Stochastik

Markus Reichl, 3. Dezember 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen **2**

2 Laplace Experiment **2**

3 Zusammengesetzte Ereignisse **2**

4 Bernoulli Versuch (Pfade) **3**

5 Abzähltechniken **3**

5.1 Permutation 3

5.2 Kombination 3

5.3 Variation Geordnete Auswahl 3

1 Grundlagen

Der Zufall unterliegt Regeln, die erst bei einer großen Anzahl von Versuchen sichtbar werden.
Ein Zufallsexperiment muss n-Mal durchgeführt werden um zu erkennen, dass das Ereignis A k-Mal auftritt.

Nach einer ausreichenden Zahl von Versuchen kann man als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit $P(A)$, die Anzahl der Ereignisse k relativ zur Anzahl der Versuche n nehmen.

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

$P(A)$	...	Wahrscheinlichkeit
A	...	Ereignis
k	...	Anzahl der Ereignisse
n	...	Anzahl der Versuche

2 Laplace Experiment

Gilt für ein Zufallsexperiment, dass

- endlich viele Ereignisse existieren und
- jedes Ereignis gleich wahrscheinlich ist,

kann man ein Laplace Experiment durchführen. Man unterscheidet dabei die Zahl der günstigen g und der möglichen m Fälle für ein Ereignis A. Die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ für ein Ereignis A ist als Quotient der günstigen g und der möglichen m Fälle definiert.

$$P(A) = \frac{g}{m}$$

3 Zusammengesetzte Ereignisse

2 Ereignisse A, B sollen zu einem Ereignis C zusammengesetzt werden.

A UND B	bzw.	A ODER B
(A und B zugleich)		(mindestens A oder B)

Gegenwahrscheinlichkeit $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ $\quad \bar{A}$ ... "Non-A"

Unvereinbar 2 Ereignisse sind unvereinbar wenn sie nicht gemeinsam Auftreten können ($P(A_{\text{UND}}B) = 0$).

Additionssatz (ODER-Regel)

$$P(A_{\text{ODER}}B) = P(A) + P(B) - P(A_{\text{UND}}B) \quad \text{wenn A und B beliebig}$$

$$P(A_{\text{ODER}}B) = P(A) + P(B) \quad \text{wenn A und B unvereinbar}$$

Multiplikationssatz (UND-Regel)

$$P(A_{\text{UND}}B) = P(A) * P(B_{\text{ODER}}A) \quad \text{wenn A und B beliebig}$$

$$P(A_{\text{UND}}B) = P(A) * P(B) \quad \text{wenn A und B unvereinbar}$$

4 Bernoulli Versuch (Pfade)

1. Pfadregel UND-Regel Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang seines Pfades.

2. Pfadregel ODER-Regel Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten seiner Pfade.

5 Abzähltechniken

5.1 Permutation

Es seien 4 Personen gegeben und es wird die Anzahl verschiedener Reihenfolgen gesucht. Jede Person kann nur an einer Position stehen, es handelt sich also um ein *ziehen ohne zurücklegen*.

Nach jeder Auswahl einer Position stehen eine Person und ein Platz weniger zur Verfügung.

1.	2.	3.	4.	Position
4	3	2	1	Möglichkeiten

Es bestehen also $4*3*2*1$ Möglichkeiten (Permutationen) oder 4 Fakultät (4!).
Die Anzahl der Permutationen von n Elementen entspricht also $n! = \sum_{i=0}^{n-1} n - i$.

5.2 Kombination

Aus $n = 7$ Personen sollen $k = 3$ Personen ausgewählt werden. Die Reihenfolge ist dabei belanglos, es handelt sich also um ein *ziehen mit zurücklegen*.

$7*6*5$	sind wählbar
$3*2*1$	sind gleich für jede Auswahl

Es bestehen also $\frac{7*6*5}{3*2*1} = \frac{210}{6} = 35$ Möglichkeiten. Allgemein ist die Kombination als $\frac{n*(n-1)\dots(n-k+1)}{1\dots k}$ definiert, was dem Binomialkoeffizienten entspricht.

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!*k!}$$

In wxMaxima kann der Binomialkoeffizient mittels `binomial(n, k)` berechnet werden.

5.3 Variation Geordnete Auswahl

Aus $n = 7$ Personen sollen $k = 3$ ausgewählt werden. Die Reihenfolge der Kombination ist dabei zu beachten, es handelt sich also um ein *ziehen ohne zurücklegen*.

1.	2.	3.	Position
7	6	5	$\rightarrow 7*6*5$ Möglichkeiten

Die Variation kann auch anhand der Kombination berechnet werden.

$$\binom{7}{3} * 3! = 7*6*5 = 210 \text{ Variationen}$$