Listas 9-10: Equivalências e Consequências Lógicas

Nome: Miguel Thadeu Campos Reis dos Santos
ADS Manhã – 1° Semestre

Avalie:

a) $p \rightarrow q \models \neg p \rightarrow \neg q$

Introdução: Vamos avaliar se $p \rightarrow q \models \neg p \rightarrow \neg q$, ou seja, se as verdades de $p \rightarrow q$ (se p então q) se repetem em $\neg p \rightarrow \neg q$ (se não p então não q).

Desenvolvimento:

p	q	¬p	¬q	p → q	¬p → ¬q
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	V

Conclusão: Como demonstrado via tabela verdade, na primeira linha, a verdade de $p \rightarrow q$ se repete em $\neg p \rightarrow \neg q$, logo, $p \rightarrow q \models \neg p \rightarrow \neg q$ ($\neg p \rightarrow \neg q$ é Consequência Lógica de $p \rightarrow q$).

b) $(p \rightarrow q) \wedge \neg q \models \neg p$

Introdução: Vamos avaliar se $(p \rightarrow q) \wedge \neg q \models \neg p$, ou seja, se as verdades de $(p \rightarrow q)$ ^ $\neg q$ (se p então q e não q) se repetem em $\neg p$ (não p).

Desenvolvimento:

p	q	p → q	¬q	(p → q) ∧ ¬q	¬p
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

Conclusão: Como demonstrado via tabela verdade, na última linha, a verdade de $(p \rightarrow q) \wedge \neg q$ se repete em $\neg p$, logo, $p \rightarrow q) \wedge \neg q \models \neg p$ ($\neg p$ é Consequência Lógica de $(p \rightarrow q) \wedge \neg q$).

c) $p \rightarrow (q \land \neg q) \equiv \neg p$

Desenvolvimento: Vamos avaliar se $p \rightarrow (q \land \neg q) \equiv \neg p$, ou seja, se a tabela verdade de $p \rightarrow (q \land \neg q)$ (se p então q e não q) é idêntica à tabela verdade de $\neg p$ (não p).

p	q	¬q	q ^ ¬q	p → (q ∧ ¬q)	¬p
V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	F
F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	V	V

Conclusão: Como demonstrado via tabela verdade, as tabelas de $p \rightarrow (q \land \neg q)$ e $\neg p$ são idênticas, logo, $p \rightarrow (q \land \neg q) \equiv \neg p$ ($p \rightarrow (q \land \neg q)$ é equivalente a $\neg p$).

d) $p \rightarrow q \land r \vDash (p \rightarrow q) \rightarrow r$

Introdução: Vamos avaliar se $p \rightarrow q \land r \vDash (p \rightarrow q) \rightarrow r$, ou seja, se as verdades de $p \rightarrow q \land r$ (se p então q e r) se repetem em $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ (se p implicação q então r).

Desenvolvimento:

p	q	r	q ^ r	p → q ^ r	p → q	(p → q) → r
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F
V	F	V	F	F	F	V
V	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	V	V
F	V	F	F	F	V	F
F	F	V	F	F	V	V
F	F	F	F	F	V	F

Conclusão: Como demonstrado via tabela verdade, a verdade da primeira linha de $p \rightarrow q \land r$ se repete em $(p \rightarrow q) \rightarrow r$, logo. $p \rightarrow q \land r \vDash (p \rightarrow q) \rightarrow r$ ($(p \rightarrow q) \rightarrow r$ é Consequência Lógica de $p \rightarrow q \land r$).

e) p ∨ (¬q ∧ r) ⊨ q ∨ ¬r → p

Introdução: Vamos avaliar se p ∨ (¬q ∧ r) ⊨ q ∨ ¬r → p, ou seja, se as verdades de p ∨ (¬q ∧ r) (p ou não q e r) se repetem em q ∨ ¬r → p (se q ou não r então p) .

Desenvolvimento:

p	q	r	¬q	¬q ^ r	p v (¬q ^ r)	¬r	q v ¬r	q v ¬r → p
V	V	V	F	F	V	F	V	V
V	V	F	F	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	F	V	F
F	V	F	F	F	F	V	V	F
F	F	V	V	V	V	F	F	V
F	F	F	V	F	F	V	V	F

Conclusão: Como demonstrado via tabela verdade, as verdades de p ∨ (¬q ∧ r) se repetem em p ∨ (¬q ∧ r), logo, p ∨ (¬q ∧ r) ⊨ q ∨ ¬r → p (q ∨ ¬r → p é Consequência Lógica de p ∨ (¬q ∧ r)).

f) ¬p ⊨ p ∧ ¬q → p ∧ q

Introdução: Vamos avaliar se ¬p ⊨ p ∧ ¬q → p ∧ q, ou seja, se as verdades de ¬p (não p) se repetem em p ∧ ¬q → p ∧ q (se p e não q então p e q).

Desenvolvimento:

p	q	¬q	p ^ ¬q	p ^ q	¬p	p ^ ¬q → p ^ q
V	V	F	F	V	F	V
V	F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	F	V	V
F	F	V	F	F	V	V

Conclusão: Como demonstrado via tabela verdade, as verdades de ¬p se repetem em p ∧ ¬q → p ∧ q, logo, ¬p ⊨ p ∧ ¬q → p ∧ q (p ∧ ¬q → p ∧ q é Consequência Lógica de ¬p).

g) ¬(p ∧ q) ≡ ¬p ∨ ¬q

Introdução: Vamos avaliar se ¬(p ∧ q) ≡ ¬p ∨ ¬q, ou seja, se a tabela verdade de ¬(p ∧ q) (não p e q) é idêntica à tabela verdade de ¬p ∨ ¬q (não p ou não q).

Desenvolvimento:

p	q	p ^ q	¬(p ^ q)	¬p	¬q	¬p v ¬q
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Conclusão: Como demonstrado via tabela verdade, as tabelas verdade de ¬(p ^ q) e ¬p v ¬q são idênticas, logo, ¬(p ∧ q) ≡ ¬p ∨ ¬q (¬(p ∧ q) é equivalente a ¬p ∨ ¬q).

h) (p ∨ q) ∧ (¬p → ¬q) ≡ q

Introdução: Vamos avaliar se (p ∨ q) ∧ (¬p → ¬q) ≡ q, ou seja, se a tabela verdade de (p ∨ q) ∧ (¬p → ¬q) (p ou q e se não p então não q) é idêntica à tabela verdade de q.

Desenvolvimento:

p	q	p v q	¬p	¬q	¬p → ¬q	(p ∨ q) ∧ (¬p → ¬q) ≡ q
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V	F
F	V	F	V	F	F	F
F	F	F	V	V	V	F

Conclusão: Como demonstrado via tabela verdade, as tabelas verdade de (p ∨ q) ∧ (¬p → ¬q) e q não são idênticas, logo, (p ∨ q) ∧ (¬p → ¬q) ≢ q ((p ∨ q) ∧ (¬p → ¬q) não é equivalente a q).

i) (p ∧ q) ∨ r ≡ (p → ¬q) → r

Introdução: Vamos avaliar se (p ∧ q) ∨ r ≡ (p → ¬q) → r, ou seja, se a tabela verdade de (p ∧ q) ∨ r (p e q ou r) é idêntica (p → ¬q) → r (se p implicação não q então r).

Desenvolvimento:

p	q	r	¬q	p ^ q	(p ^ q) v r	p → ¬q	(p → ¬q) → r
V	V	V	F	V	V	F	V
V	V	F	F	V	V	F	V
V	F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	F	V	V	V
F	V	F	F	F	F	V	F
F	F	V	V	F	V	V	V
F	F	F	V	F	F	V	F

Conclusão: Como demonstrado via tabela verdade, as tabelas verdade de (p ∧ q) ∨ r e (p → ¬q) → r são idênticas, logo, (p ∧ q) ∨ r ≡ (p → ¬q) → r ((p ∧ q) ∨ r é equivalente a (p → ¬q) → r).

j) (p ∨ q) ∧ (¬p → ¬q) ≡ p

Introdução: Vamos avaliar se (p ∨ q) ∧ (¬p → ¬q) ≡ p, ou seja, se a tabela verdade de (p ∨ q) ∧ (¬p → ¬q) (p ou q e se não p então não q) é idêntica à tabela verdade de p.

Desenvolvimento:

p	q	p v q	¬p	¬q	¬p → ¬q	(p v q) ^ (¬p → ¬q)
V	V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	V	V
F	V	V	V	F	F	F
F	F	F	V	V	V	F

Conclusão: Como demonstrado via tabela verdade, as tabelas verdade de p v q e ¬p → ¬q são idênticas, logo, (p ∨ q) ∧ (¬p → ¬q) ≡ p ((p ∨ q) ∧ (¬p → ¬q) é equivalente a p).

k) $((p \to q) \to q) \to q \equiv p \to q$

Introdução: Vamos avaliar se $((p \to q) \to q) \to q \equiv p \to q$, ou seja, se as tabelas verdade de $(p \to q) \to q) \to q$ (se p implicação q implicação q então q) e $p \to q$ (se p então q) são idênticas.

Desenvolvimento:

p	q	$p \to q$	$((p \to q) \to q)$	$((p \to q) \to q) \to q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	F	V	F	V

Conclusão: Como demonstrado via tabela verdade, as tabelas de $((p \to q) \to q) \to q$ e $p \to q$ são idênticas, logo, $((p \to q) \to q) \to q \equiv p \to q$ ($((p \to q) \to q) \to q$ é equivalente a $p \to q$).

Leis Lógicas(Tabelas Verdade):

9- Leis de Associação

(a) $p \wedge q \wedge r \equiv (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

p	q	r	p ^ q ^ r	(p ^ q) ^ r	p ^ (q ^ r)
V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	F
V	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F
F	F	F	F	F	F

(b) $p \vee q \vee r \equiv (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

p	q	r	p v q v r	(p v q) v r	p v (q v r)
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F

10 – Leis Distributivas

(a) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

p	q	r	p ^ q	p ^ r	q v r	p ^ (q v r)	(p ^ q) v (p ^ r)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	V	F	F
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	V	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

(b) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

p	q	r	q ^ r	p v q	p v r	p v (q ^ r)	(p v q) ^ (p v r)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	F	F
F	F	V	F	F	V	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

11 – Leis da Absorção

(a) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

p	q	p v q	p ^ (p v q)
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	F

(b) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

p	q	p ^ q	p v (p ^ q)
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	F
F	F	F	F

1) Usando as Leis Lógicas, mostre que:

a) $p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$

p v q DNF ≡ ¬p → q

b) $p \wedge q \equiv \neg(q \rightarrow \neg p)$

¬(q → ¬p) DNF ≡ ¬(¬q v ¬p)

¬(¬q v ¬p) D.M. ≡ q ^ p

q ^ p COM. ≡ p ^ q

c) $\neg(p \rightarrow q) \equiv p \land \neg q$

$\neg(p \rightarrow q)$ DNF $\equiv \neg(\neg p \lor q)$

$\neg(\neg p \lor q)$ D.M. $\equiv p \land \neg q$

d) $(p \rightarrow q) \land (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \land r)$

$p \rightarrow (q \land r)$ DIST. $\equiv (p \rightarrow q) \land (p \rightarrow r)$

e) $(p \rightarrow r) \land (q \rightarrow r) \equiv (p \lor q) \rightarrow r$

$(p \rightarrow r) \land (q \rightarrow r)$ DIST. $\equiv (p \land q) \rightarrow r$

$(p \land q) \rightarrow r$ D.M. $\equiv \neg(p \land q) \rightarrow r$

$\neg p \lor \neg q \rightarrow r$ ~~ $\equiv \neg(\neg p \lor \neg q) \rightarrow r$

$\neg(\neg p \lor \neg q) \rightarrow r \equiv (p \lor q) \rightarrow r$

f) $(p \rightarrow q) \lor (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \lor r)$

$p \rightarrow (q \lor r)$ DIST. $\equiv (p \rightarrow q) \lor (p \rightarrow r)$

g) $(p \rightarrow r) \lor (q \rightarrow r) \equiv (p \land q) \rightarrow r$

$(p \land q) \rightarrow r$ DNF $\equiv \neg(p \land q) \lor r$

$\neg(p \land q) \lor r$ D.M. $\equiv (\neg p \lor \neg q) \lor r$

$(\neg p \lor \neg q) \lor r$ DIST. $\equiv (\neg p \lor r) \lor (\neg q \lor r)$

$(\neg p \lor r) \lor (\neg q \lor r)$ DNF $\equiv (p \rightarrow r) \lor (q \rightarrow r)$

2) Use as leis Lógicas para trazer todas as proposições compostas à sua forma DNF e remover negações a esquerda de parênteses.

a) $\neg(\neg p \land q)$

$\neg(\neg p \land q)$ D.M $\equiv p \lor \neg q$

b) $(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge q)$

$(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \equiv (p \wedge \neg q \rightarrow \neg p \wedge q) \wedge (\neg p \wedge q \rightarrow p \wedge \neg q)$

$(p \wedge \neg q \rightarrow \neg p \wedge q) \wedge (\neg p \wedge q \rightarrow p \wedge \neg q)$ DNF $\equiv (\neg p \vee q \vee \neg p \wedge q) \wedge (p \vee q \vee p \wedge \neg q)$

$(\neg p \vee q \vee \neg p \wedge q) \wedge (p \vee q \vee p \wedge \neg q)$ D.M. $\equiv \neg((\neg p \vee q \vee \neg p \wedge q) \wedge (p \vee q \vee p \wedge \neg q))$

$\neg(\neg p \vee q \vee \neg p \wedge q) \vee \neg(p \vee q \vee p \wedge \neg q)$

$(p \wedge \neg q \wedge p \vee q) \vee (p \wedge q \wedge \neg p \vee \neg q)$

c) $\neg(\neg p \vee q) \vee (r \rightarrow \neg s)$

$\neg(\neg p \vee q) \vee (r \rightarrow \neg s)$ DNF $\equiv \neg(\neg p \vee q) \vee (\neg r \vee \neg s)$

$\neg(\neg p \vee q) \vee (\neg r \vee \neg s)$ D.M $\equiv (p \wedge \neg q) \vee \neg(\neg r \vee \neg s)$

$(p \wedge \neg q) \vee \neg(\neg r \vee \neg s) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (r \wedge s)$

d) $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow \neg r)$

$(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow \neg r)$ DNF $\equiv (p \vee q) \vee (q \rightarrow \neg r)$

$(p \vee q) \vee (q \rightarrow \neg r)$ DNF $\equiv (p \vee q) \vee (\neg q \vee \neg r)$

e) $\neg(\neg p \vee q) \vee (r \rightarrow \neg s)$

$\neg(\neg p \vee q) \vee (r \rightarrow \neg s)$ D.M $\equiv (p \wedge \neg q) \vee (r \rightarrow \neg s)$

$(p \wedge \neg q) \vee (r \rightarrow \neg s)$ DNF $\equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg r \vee \neg s)$

f) $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow \neg r)$

$(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow \neg r)$ DNF $\equiv (p \vee q) \vee (q \rightarrow \neg r)$

$(p \vee q) \vee (q \rightarrow \neg r)$ DNF $\equiv (p \vee q) \vee (\neg q \vee \neg r)$

g) $p \rightarrow (q \wedge r)$

$p \rightarrow (q \wedge r)$ DNF $\equiv \neg p \vee (q \wedge r)$

h) $(p \vee q) \rightarrow r$

$(p \vee q) \rightarrow r$ DNF $\equiv \neg(p \vee q) \vee r$

$\neg(p \vee q) \vee r \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee r$

i) $\neg(\neg p \lor q) \lor (r \rightarrow \neg s)$

$\neg(\neg p \lor q) \lor (r \rightarrow \neg s)$ D.M. $\equiv$ $(p \wedge \neg q) \lor (r \rightarrow \neg s)$

$(p \wedge \neg q) \lor (r \rightarrow \neg s)$ DNF $\equiv$ $(p \wedge \neg q) \lor (\neg r \lor \neg s)$

j) $\neg((((a \rightarrow b)) \rightarrow a) \rightarrow a)$

$\neg((((a \rightarrow b)) \rightarrow a) \rightarrow a)$ D.M. $\equiv$ $\neg(((a \rightarrow b)) \rightarrow a) \rightarrow \neg a$

$\neg(((a \rightarrow b)) \rightarrow a) \rightarrow \neg a$ $\equiv$ $\neg((a \rightarrow b)) \rightarrow \neg a \rightarrow \neg a$

$\neg((a \rightarrow b)) \rightarrow \neg a \rightarrow \neg a$ $\equiv$ $\neg(a \rightarrow b) \rightarrow \neg a \rightarrow \neg a$

$\neg(a \rightarrow b) \rightarrow \neg a \rightarrow \neg a$ DNF $\equiv$ $\neg(\neg a \lor b) \lor a \lor \neg a$

$\neg(\neg a \lor b) \lor a \lor \neg a$ $\equiv$ $(a \wedge \neg b) \lor (a \lor \neg a)$

k) $\neg(a \lor (a \rightarrow b)$

$\neg(a \lor (a \rightarrow b)$ D.M. $\equiv$ $\neg a \wedge \neg(a \rightarrow b)$

$\neg a \wedge \neg(a \rightarrow b)$ $\equiv$ $\neg a \wedge (\neg a \rightarrow \neg b)$

$\neg a \wedge (\neg a \rightarrow \neg b)$ DNF $\equiv$ $\neg a \wedge (a \lor \neg b)$

$\neg a \wedge (a \lor \neg b)$ DIST. $\equiv$ $(\neg a \wedge a) \lor (\neg a \wedge \neg b)$