Lista Indução 02

1. Prove que $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

CB. P(1) vale pois

$1 = \frac{n(n+1)}{2}$

$1 = \frac{1(1+1)}{2}$

$1 = \frac{1(2)}{2}$

$1 = 1$

HI. Vamos supor P(K) válida para algum $K > 1$

$1+2+3+\dots+K = \frac{K(K+1)}{2}$

$1+2+3+\dots+K = \frac{K^2+K}{2}$

P.I. Vamos provar P(K+1) válida

$1+2+3+\dots+K+K+1 = \frac{(K+1)(K+1+1)}{2}$

$$\begin{array}{r} K+1 \\ \times\ K+2 \\ \hline 2K+2 \\ K^2+K \\ \hline K^2+3K+2 \end{array}$$

$1+2+3+\dots+K+K+1 = \frac{(K+1)(K+2)}{2}$

$1+2+3+\dots+K+K+1 = \frac{K^2+3K+2}{2}$

$\frac{K^2+K}{2} + K + 1 = \frac{K^2+3K+2}{2}$

$\frac{K^2+K+2K+2}{2} = \frac{K^2+3K+2}{2}$

$\frac{K^2+3K+2}{2} = \frac{K^2+3K+2}{2}$

Logo, pelo P.I.F, a fórmula vale $\forall\, n \in \mathbb{N}$

2. Prove que $1^3+2^3+\dots+n^3=(1+2+\dots+n)^2$

Como demonstramos anteriormente

$1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

Logo

$(1+2+\dots+n)^2=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

$$\begin{array}{r} K^2+2K+1 \\ K^2+4K+4 \\ \hline 4K^2+8K+4 \\ 4K^3+8K^2+4K \\ K^4+2K^3+K^2 \\ \hline K^4+6K^3+13K^2+12K+4 \end{array}$$

• Reformulando o exercício

$1^3+2^3+\dots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

$1^3+2^3+\dots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

• C.B P(1) vale pois

$1^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$1^3=\frac{1^2(1+1)^2}{4}$

$1=\frac{1(2)^2}{4}$

$1=\frac{1\cdot 4}{4}$

$1=1$

• H.I Vamos supor P(K) válido para algum $K>1$

$1^3+2^3+\dots+K^3=\frac{K^2(K+1)^2}{4}$

P.I Vamos provar P(K+1) válido, ou seja

$1^3+2^3+\dots+K^3+(K+1)^3=(K+1)^2(K+1+1)^2$

$\frac{K^2(K+1)^2}{4}+(K+1)^3=(K+1)^2(K+2)^2$

$\frac{K^2(K+1)^2}{4}+(K+1)^3=\frac{(K^2+2K+1)(K^2+4K+4)}{4}$

$\frac{K^2(K^2+2K+1)}{4}+\frac{4(K^3+3K^2+3K+1)}{4}=\frac{(K^2+2K+1)(K^2+4K+4)}{4}$

$K^2(K^2+2K+1)+4(K^3+3K^2+3K+1)=(K^2+2K+1)(K^2+4K+4)$

$K^4+2K^3+K^2+4K^3+12K^2+12K+4=K^4+6K^3+13K^2+12K+4$

$K^4+6K^3+13K^2+12K+4=K^4+6K^3+13K^2+12K+4$

3. Prove que $1+4+7+\dots+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$

CB P(1) vale pois

$1=\frac{1(3\cdot1-1)}{2}$

$1=\frac{1(2)}{2}$

$1=1$

H.I. Vamos supor P(K) válido para algum $K>1$

$1+4+7+\dots+(3K-2)=\frac{K(3K-1)}{2}$

$1+4+7+\dots+(3K-2)=\frac{3K^2-K}{2}$

P.I. Vamos provar P(K+1) válido, ou seja

$1+4+7+\dots+(3K-2)+(3(K+1)-2)=\frac{(K+1)(3(K+1)-1)}{2}$

$1+4+7+\dots+(3K-2)+(3K+3-2)=\frac{(K+1)(3K+3-1)}{2}$

$1+4+7+\dots+(3K-2)+(3K+1)=\frac{(K+1)(3K+2)}{2}$

$\frac{3K^2-K}{2}+3K+1=\frac{(K+1)(3K+2)}{2}$

$\frac{3K^2-K}{2}+\frac{2(3K+1)}{2}=\frac{(K+1)(3K+2)}{2}$

$3K^2-K+6K+2=(K+1)(3K+2)$

$3K^2+5K+2=3K^2+5K+2$

$$\begin{array}{r} K+1 \\ 3K+2 \\ \hline 2K+2 \\ 3K^2+3K \\ \hline 3K^2+5K+2 \end{array}$$

Logo, pelo P.I.F, a fórmula vale $\forall n \in \mathbb{N}$

4. Prove que $2+4+6+\ldots+2n = n(n+1)$

CB $P(1)$ vale pois

$2+4 = 2(2+1)$

$6 = 2(3)$

$6 = 6$

H.I. Vamos supor $P(K)$ válido para algum $K > 1$

$2+4+6+\ldots+2K = K(K+1)$

$2+4+6+\ldots+2K = K^2+K$

P.I. vamos provar $P(K+1)$ válido, ou seja

$2+4+6+\ldots+2K+2(K+1) = (K+1)(K+1+1)$

$2+4+6+\ldots+2K+2K+2 = (K+1)(K+2)$

$K^2+K+2K+2 = K^2+2K+K+2$

$K^2+3K+2 = K^2+3K+2$

Logo, pelo P.I.F, a fórmula vale $\forall n \in \mathbb{N}$

5. Prove que $1+5+9+\ldots+(4n-3) = n(2n-1), \forall n \in \mathbb{N}$

CB. $P(1)$ vale pois

$1 = n(2n-1)$

$1 = 1(2.1-1)$

$1 = 1$

H.I. Vamos supor $P(K)$ válido para algum $K > 1$

$1+5+9+\ldots+(4K-3) = K(2K-1)$

$1+5+9+\ldots+(4K-3) = 2K^2-K$

P.I Vamos provar $P(K+1)$ válido, ou seja

$1+5+9+\ldots+(4K-3)+(4(K+1)-3) = (K+1)(2(K+1)-1)$

$1+5+9+\ldots+(4K-3)+(4K+4-3) = (K+1)(2K+2-1)$

$1+5+9+\ldots+(4K-3)+(4K+1) = (K+1)(2K+1)$

$2K^2-K+(4K+1) = 2K^2+K+2K+1$

$2K^2+3K+1 = 2K^2+3K+1$

Logo, pelo P.I.F., a fórmula vale $\forall n \in \mathbb{N}$

6. Prove que $3+6+9+\dots+3n = \frac{3n(n+1)}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

CB P(1) vale, pois

$3+6 = \frac{3\cdot 3(3+1)}{2}$

$9 = \frac{9\cdot 2}{2}$

$9 = 9$

H.I. Vamos supor P(K) válido para algum $K > 1$

$3+6+9+\dots+3K = \frac{3K(K+1)}{2}$

$3+6+9+\dots+3K = \frac{3K^2+3K}{2}$

P.I. Vamos provar P(K+1) válido, ou seja

$3+6+9+\dots+3K+3(K+1) = \frac{3(K+1)((K+1)+1)}{2}$

$$\begin{array}{r} K+2 \\ \underline{3K+3} \\ 3K+6 \\ \underline{3K^2+6K} \\ 3K^2+9K+6 \end{array}$$

$3+6+9+\dots+3K+3K+3 = \frac{(3K+3)(K+2)}{2}$

$\frac{3K^2+3K}{2} + 3K+3 = \frac{3K^2+9K+6}{2}$

$\frac{3K^2+3K}{2} \quad \frac{2(3K+3)}{2} = \frac{3K^2+9K+6}{2}$

$3K^2+3K+6K+6 = 3K^2+9K+6$

$3K^2+9K+6 = 3K^2+9K+6$

Logo, pelo P.I.F, a fórmula vale $\forall n \in \mathbb{N}$

7. Prove que $2.1 + 2.2 + 2.3 + \ldots + 2n = n^2 + n, \forall n \in \mathbb{N}$

CB P(1) vale pois

$2.1 + 2.2 = 2^2 + 2$

$2 + 4 = 4 + 2$

$6 = 6$

H.I Vamos supor P(K) válido para algum $K > 1$

$2.1 + 2.2 + 2.3 + \ldots + 2K = K^2 + K$

P.I Vamos provar P(K+1) válido, ou seja

$2.1 + 2.2 + 2.3 + \ldots + 2K + 2(K+1) = (K+1)^2 + (K+1)$

$K^2 + K + 2K + 2 = K^2 + 2K + 1 + K + 1$

$K^2 + 3K + 2 = K^2 + 3K + 2$

Logo, pelo P.I.F., a fórmula vale $\forall n \in \mathbb{N}$

8. Prove que, para $n \geq 2$,

$$\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + (n-1)n = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$$

$$\begin{array}{r} K^2 + K \\ K + 2 \\ \hline 2K^2 + 2K \\ K^3 + K^2 \\ \hline K^3 + 3K^2 + 2K \end{array}$$

C.B. P(1) vale pois

$$1.2 = \frac{2(2-1)(2+1)}{3} \qquad 2 = \frac{6}{3}$$

$$2 = \frac{2(1)(3)}{3} \qquad 2 = 2$$

H.I. Vamos supor $P(K)$ válido para algum $K \geq 2$

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + (K-1)K = \frac{K(K-1)(K+1)}{3}$$

P.I. Vamos provar $P(K+1)$ válido, ou seja,

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + (K-1)K + (K+1-1)(K+1) = \frac{(K+1)(K+1-1)(K+1+1)}{3}$$

$$\frac{K((K-1)(K+1))}{3} + K(K+1) = \frac{(K+1)(K)(K+2)}{3}$$

$$\frac{K(K^2+K-K-1)}{3} + K^2 + K = \frac{K^3+3K^2+2K}{3}$$

$$\frac{K(K^2-1)}{3} + \frac{3(K^2+K)}{3} = K^3 + 3K^2 + 2K$$

$$K(K^2-1) + 3(K^2+K) = K^3 + 3K^2 + 2K$$

$$K^3 - K + 3K^2 + 3K = K^3 + 3K^2 + 2K$$

$$K^3 + 3K^2 + 2K = K^3 + 3K^2 + 2K$$

Logo, pelo P.I.F, a fórmula vale $\forall n \in \mathbb{N}$

9. Ache a fórmula fechada para

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)},$$

$P(1) = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $P(3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$

$P(2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$

$\frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ $\qquad$ $\frac{6}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

CB. $P(1)$ vale pois $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$; Logo a fórmula é $\frac{n}{n+1}$

H.I. $\exists\, k > 1$ tq $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, ou seja,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

P.I. Usando H.I.,

$$\frac{(k+2)}{(k+2)} \cdot \frac{k}{(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

$$\frac{k^2+2k+1}{(k+2)(k+1)} = \frac{\cancel{(k+1)}(k+1)}{(k+2)\cancel{(k+1)}} = \frac{k+1}{k+2}$$

$$\frac{k+1}{k+2} = \frac{k+1}{k+2}$$

Logo, a fórmula é válida $\forall\, n \in \mathbb{N}$

10. Prove que $6^n - 1$ é múltiplo de 5, $\forall n \in \mathbb{N}$

$6^n - 1 = 5 \cdot$ algum número

CB $P(1)$ vale, pois

$6^1 - 1 = 5$

$6 - 1 = 5$

$6 - 1 = 5 \cdot 1$

H.I para algum K consigo encontrar $j \in \mathbb{N}$ tal que

$6^K - 1 = 5 \cdot j$, também

$6^K = 5J + 1$

P.I. Vamos provar $P(K+1)$ válido, ou seja,

$6^{K+1} - 1$

$6^K \cdot 6^1 - 1 = (5J+1) \cdot (6^1 - 1)$

$5 \cdot 6 \cdot J + 5 \cdot 1$

$5(6J + 1)$

c.q.d

$P(K) \Rightarrow P(K+1)$

Pelo P.I.F. $P(n)$ vale $n \in \mathbb{N}$

11. Prove que $5^n - 1$ é múltiplo de 4, $\forall n \in \mathbb{N}$

$5^n - 1 = 4 \cdot$ algum número

CB. P(1) vale, pois

$5^1 - 1 = 4$

$5 - 1 = 4 \cdot 1$

H.I. Para algum K consigo encontrar

$J \in \mathbb{N}$

$5^K - 1 = 4 \cdot J$

$5^K = 4J + 1$

P.I Vamos provar P(K+1) válida, ou seja,

$5^{K+1} - 1$

$5^K \cdot 5^1 - 1$

$(4J+1)(5^1 - 1)$

$4J + 4 \cdot 1$

$4 \cdot 5 \cdot J + 4 \cdot 1$

$4(5J+1)$

12. Prove que $4^n - 1$ é múltiplo de 3, para todo $n \in \mathbb{N}$

CB $P(1)$ vale, pois

$4^1 - 1 = 3$

$4 - 1 = 3$

$4 - 1 = 3 \cdot 1$.

H.I. Para algum k consigo encontrar

$J \in \mathbb{N}$ tal que

$4^k - 1 = 3 \cdot J$

$4^k = 3J + 1$

P.I Vamos provar $P(k+1)$ válido, ou seja,

$4^{k+1} - 1$

$4^k \cdot 4^1 - 1$

$(3J+1)(4^1 - 1)$

$3J + 1 \cdot 3 \cdot 1$

$3 \cdot 4 \cdot J + 1 \cdot 3 \cdot 1$

$3(4J + 1)$

13. Prove que $3^k - 1$ é múltiplo de 2, para todo $k \in \mathbb{N}$

CB $P(1)$ vale pois

$3^1 - 1 = 2$

$3 - 1 = 2 \cdot 1$

H.I Para algum n posso encontrar

$J \in \mathbb{N}$

$3^n - 1 = 2 \cdot J$

$3^n = 2J + 1$

P.I Vamos provar $P(n+1)$ válido, ou seja,

$3^{n+1} - 1$

$3^n \cdot 3^1 - 1$

$(2J+1)(3^1 - 1)$

$(2J+1)(3 - 1)$

$(2J+1)(2 \cdot 1)$

$2 \cdot 3 \cdot J + 1 \cdot 2 \cdot 1$

$2(3J + 1)$