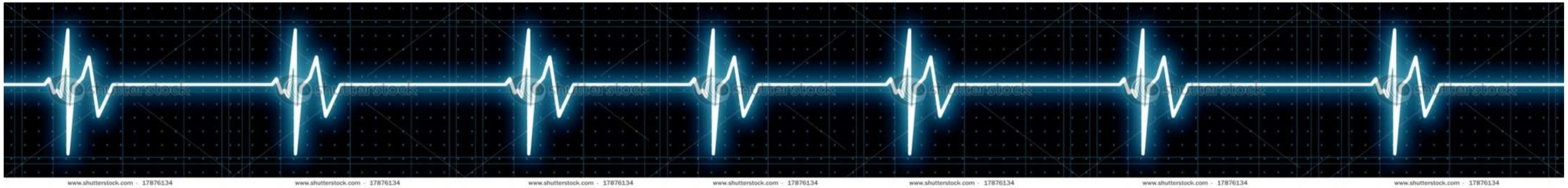
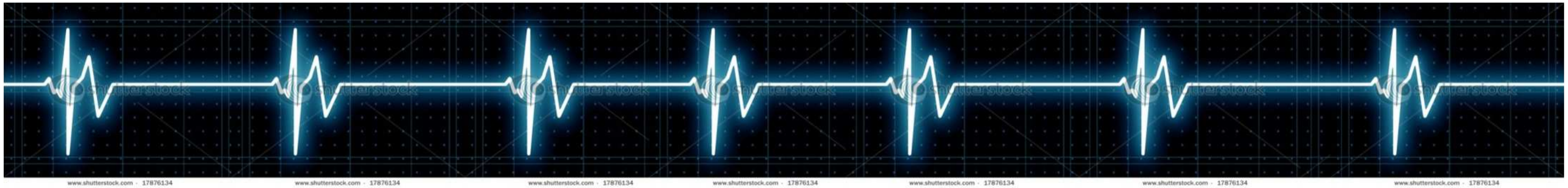


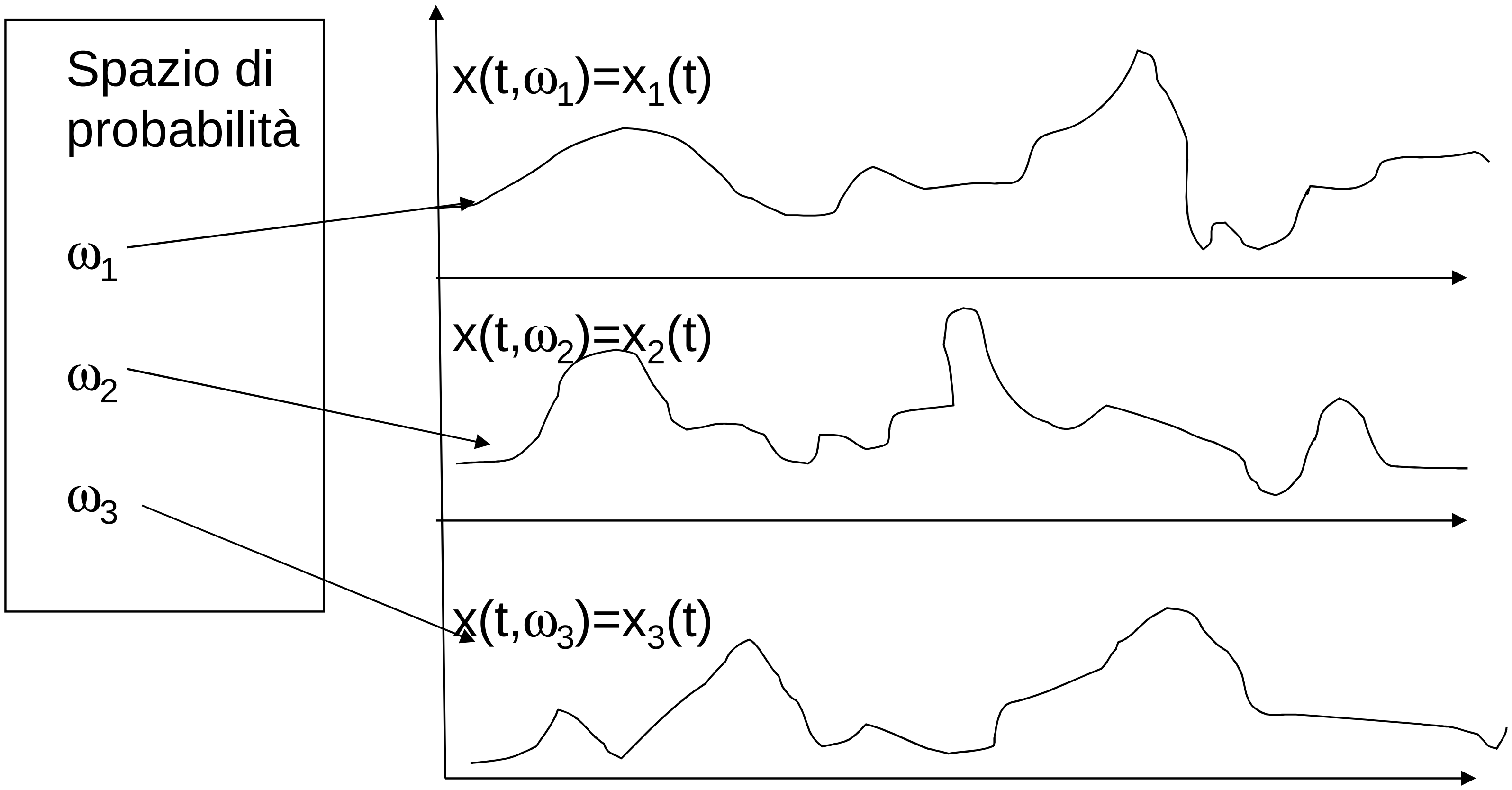
# Segnali aleatori



# Processo aleatorio

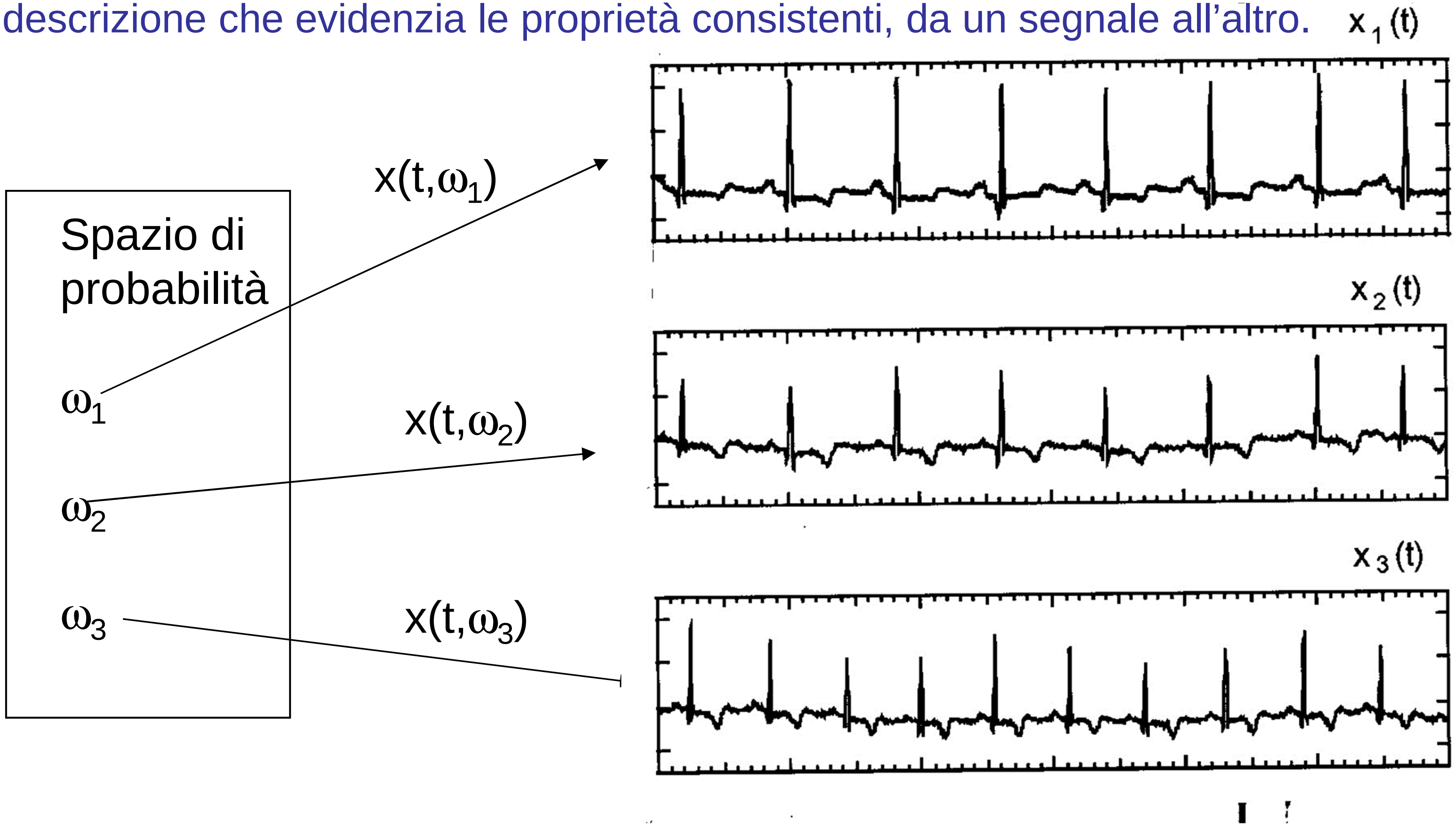
È il modello adatto a descrivere un esperimento casuale in cui quello che si osserva è una quantità che evolve nel tempo (segnale). Quindi un p.a. è una funzione reale di due variabili $X(t;\omega)$

tempo evento casuale



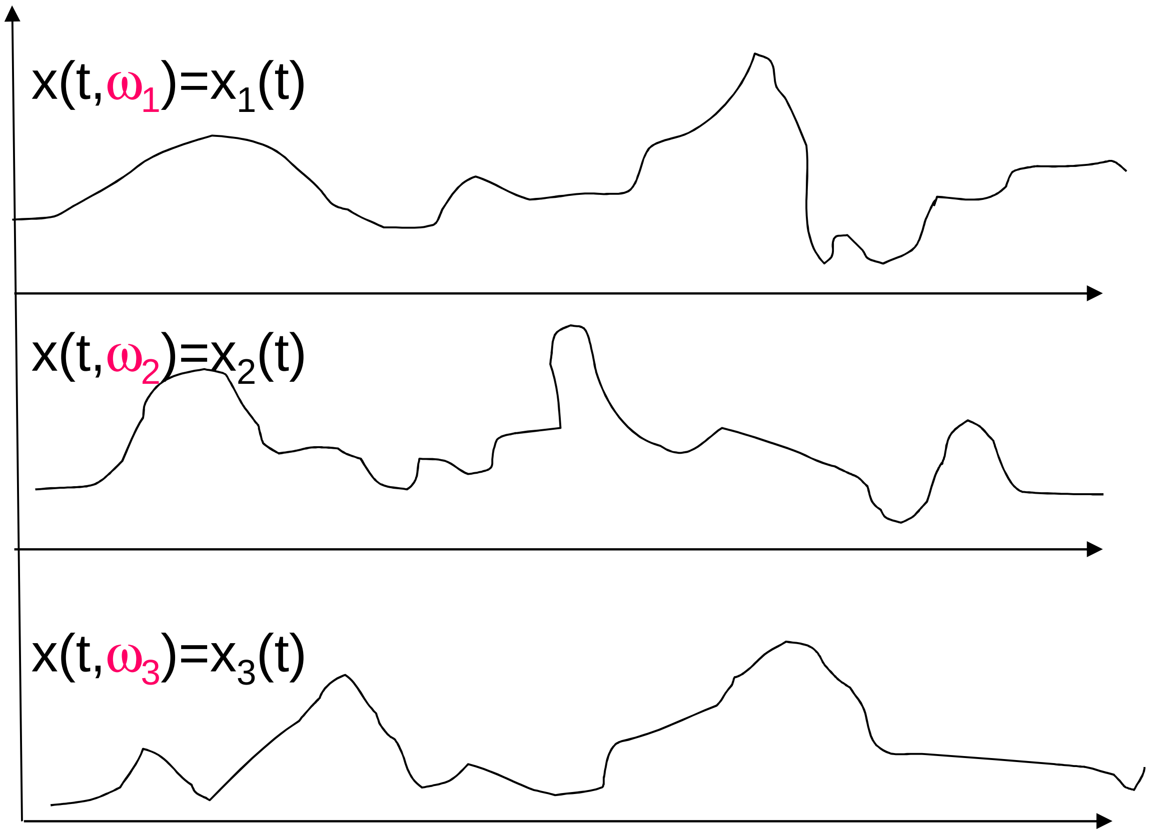
# Esempio : ECG

Ogni volta che la misura di ECG viene ripetuta sullo stesso soggetto o su un diverso soggetto, alcuni fattori non controllabili e non noti fanno si che tale misura abbia caratteristiche diverse (random). Può essere allora utile rinunciare a descrivere l'esatta natura temporale del segnale, limitarsi ad una descrizione che evidenzia le proprietà consistenti, da un segnale all'altro.



# Processo aleatorio : 1° interpretazione

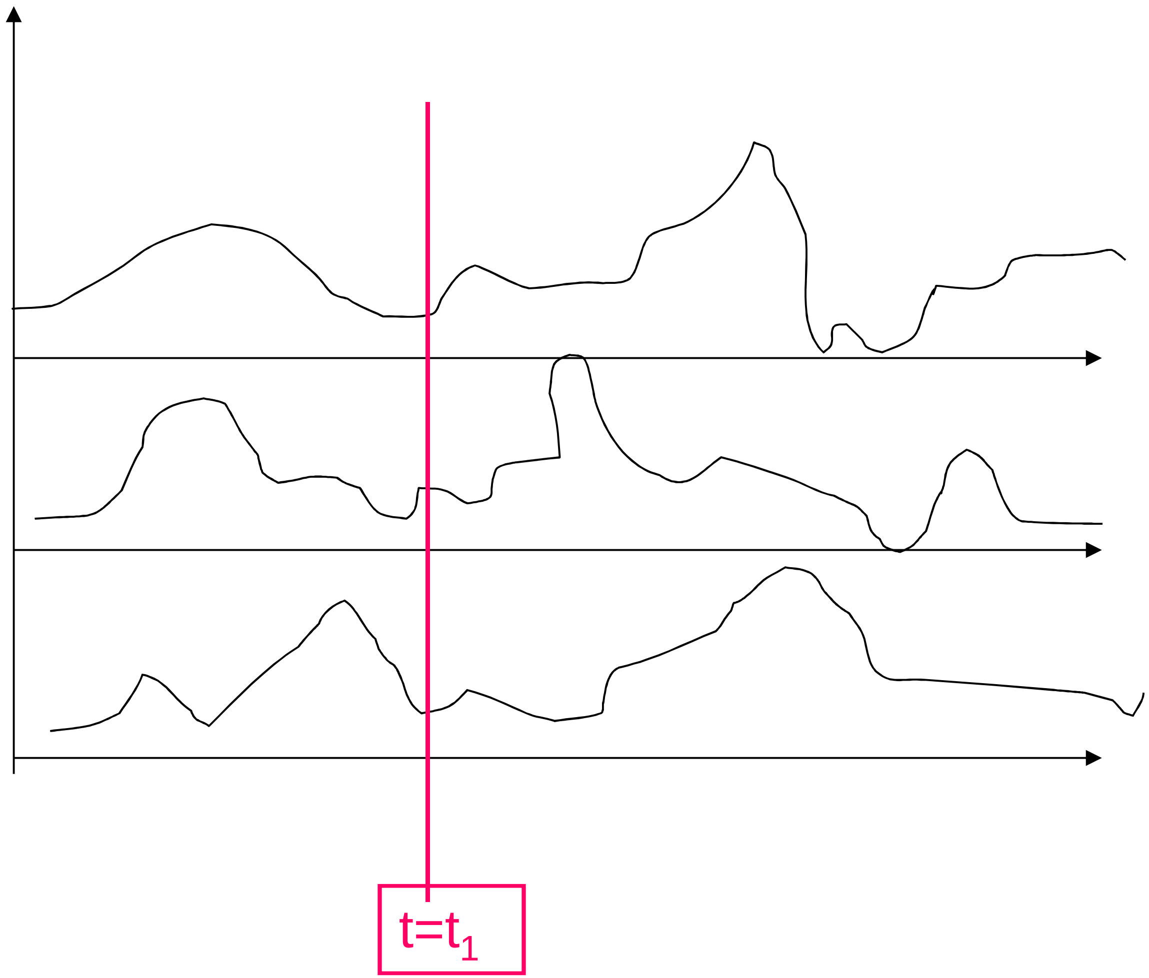
Famiglia di segnali, ottenuti in corrispondenza di vari valori di $\omega$.
La causalità risiede nella presentazione di un particolare risultato dell'esperimento




Fissato ad $\omega_1$ il valore di $\omega$, si ottiene il segnale deterministico $x(t,\omega_1)$.
Il particolare segnale che si osserva in una data prova dell'esperimento aleatorio prende il nome di segnale campione o realizzazione del processo

# Processo aleatorio : 2° interpretazione

Famiglia di v.a, ottenuti in corrispondenza a vari valori del tempo




Fissato $t=t_1$ si ottiene la v.a. $x(t_1,\omega)$

Fissati due istanti distinti, si ottengono due distinte v.a., ovvero il vettore aleatorio
$X = [x(t_1,\omega)\ x(t_2,\omega)]^T$

Analogamente, fissati N istanti distinti, si ottiene un vettore di N distinte v.a.

# Riassumendo:

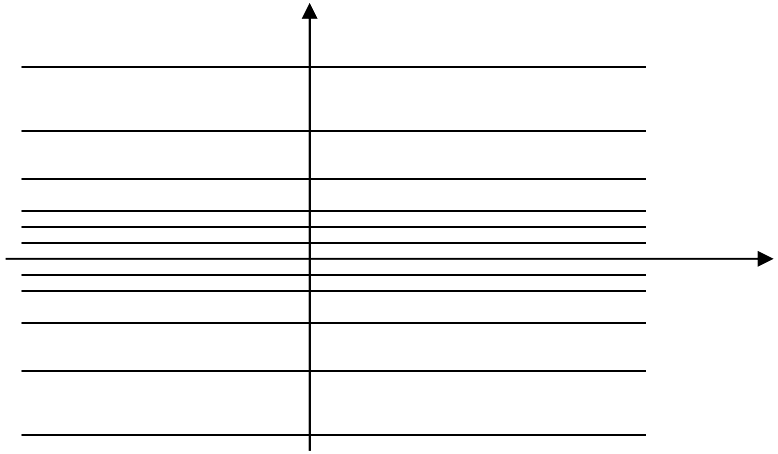
$X(t,\omega)$ può rappresentare :

- un insieme di funzioni delle variabili $\omega$ e t (processo aleatorio)
- una funzione deterministica della variabile t detta funzione campione del processo (t variabile, $\omega$ fissato)
- una variabile aleatoria (t fissato, $\omega$ variabile)
- una n-upla di variabili aleatorie (fissati n valori di t, $\omega$ variabile)
- un numero reale (t e $\omega$ fissati)

Per comodità, d'ora in poi indichiamo in breve il P.A. con $X(t)$, omettendo la dipendenza da $\omega$. Il tempo t può assumere valori su un insieme continuo (processo a tempo continuo) oppure in un insieme discreto (es.$t=kT$, con T periodo di campionamento). Similmente, le ampiezze possono variare in un insieme continuo o discreto. Consideriamo nel seguito il caso in cui le ampiezze variano in un insieme continuo.

# Descrizione parametrica di un processo:

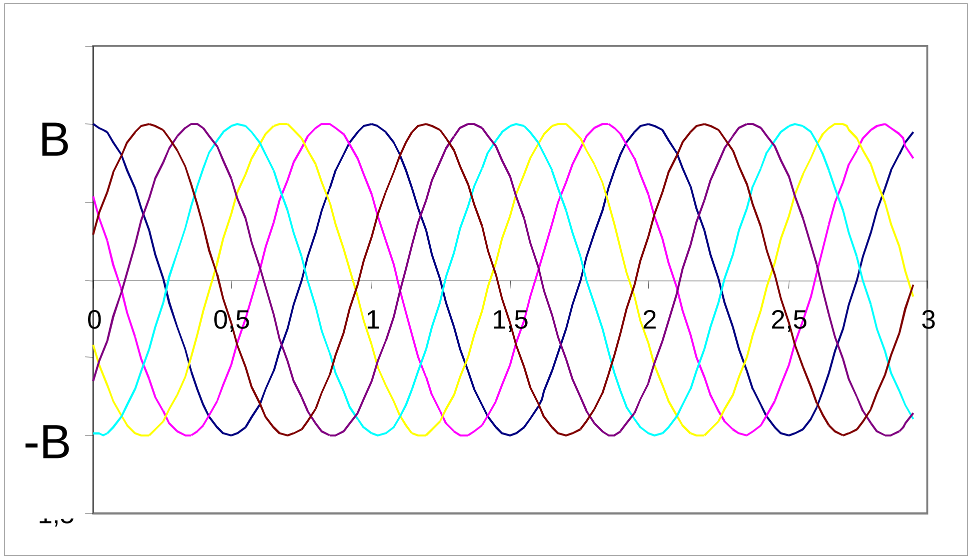
*Il processo viene specificato mediante una funzione del tempo e di v.a. e la descrizione statistica della v.a.*



*Esempio:*

*X(t)=A*

*A v.a. normale, media=0, SD=3*




*Esempio:*

*X(t)=B cos(2πt+A)*

*con A v.a. unif in 0-2π*

# Descrizione statistica di un PA

Un P.A. viene spesso descritto in termini statistici, cioè si rinuncia ad una descrizione dettagliata di tutte le sue possibili realizzazioni e ci si accontenta di descrivere alcune caratteristiche da un punto di vista statistico. In genere si procede per gradi, assegnando prima le funzioni di distribuzione delle v.a. unidimensionali estratte in un certo istante di tempo (descrizione del primo ordine) poi le funzioni di distribuzione congiunte relative a tutte le coppie di v.a. unidimensionali (descrizione del secondo ordine) e così di seguito

# Descrizione statistica del primo ordine

E' relativa al processo in un generico istante t, quindi è la descrizione statistica della v.a. $X(t,\omega)$ con t fissato.

distribuzione di probabilità $F_x(a;t)= P[X(t)\leq a]$

densità di prob $f_x(a;t)=d\, F_x(a;t)/da$

*dipendono sia da a che dal tempo!*

# Aspettazione di un P.A.

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} a \cdot f_x(a;t)da$$

# Dalla descrizione statistica del primo ordine si derivano

Media $m_x(t) = E[X(t]$

media del processo al tempo t

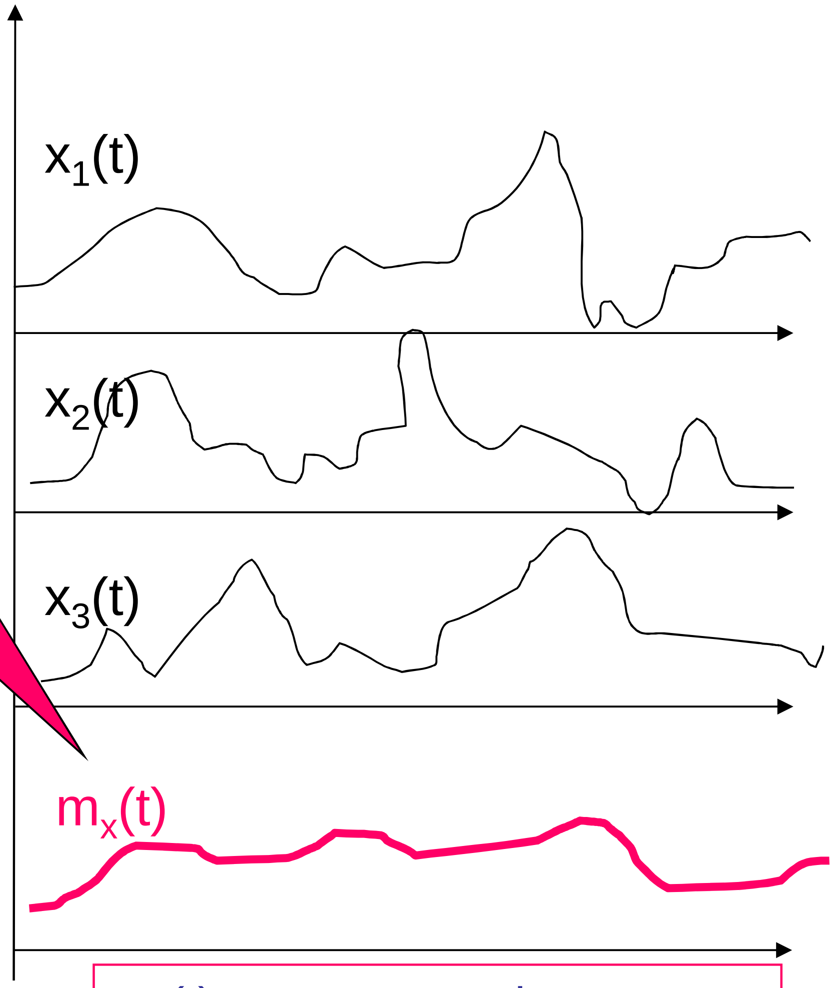
Potenza statistica $P_x(t) = E[X^2(t]$

media del quadrato del processo al tempo t

Varianza $\sigma_x^2(t) = E[(X(t)- m_x(t))^2] =$

$P_x(t) - m_x(t)^2$

Media della dispersione dei valori del processo attorno al valor medio al tempo t




media, potenza e varianza sono segnali deterministici

$m_x(t)$ non necessariamente coincide con una realizzazione del processo!

# Media e varianza: come si ottengono?

Se si dispone della descrizione parametrica del processo, si deriva, ad es. usando il teorema dell'aspettazione

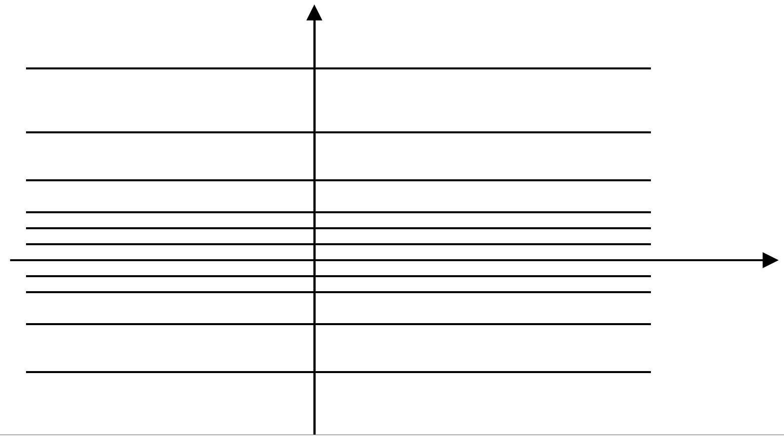
*Esempio 5:*

*X(t)=A*

*A v.a. normale, media=0, SD=3*

$m_x(t) = 0$

$P_x(t) = \sigma_x^2(t) = 9$



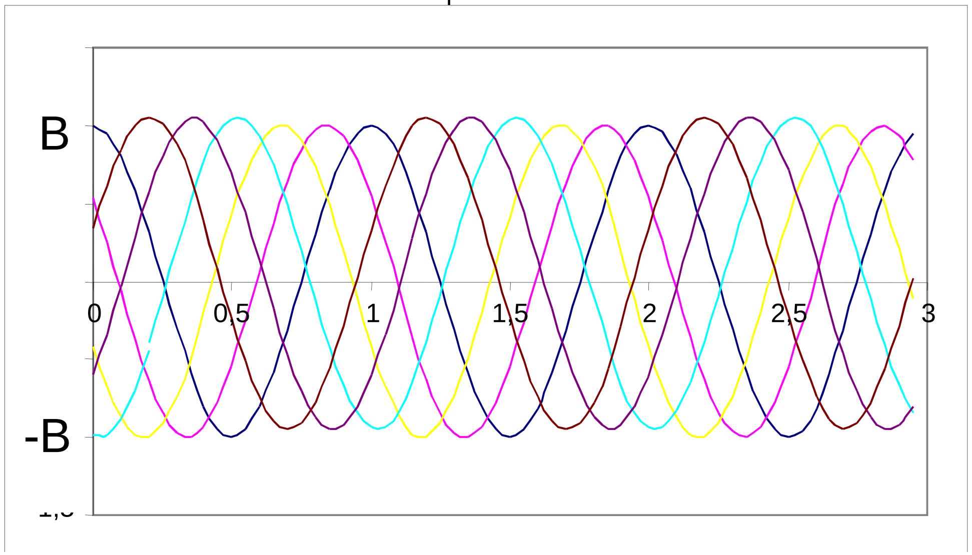
*Esempio 6:*

*X(t)=B cos(2πt+A)*

*con A v.a. unif in 0-2π*

$m_x(t) = 0$

$P_x(t) = \sigma_x^2(t) = 0.5\ B^2$



# Media e varianza: come si stimano?

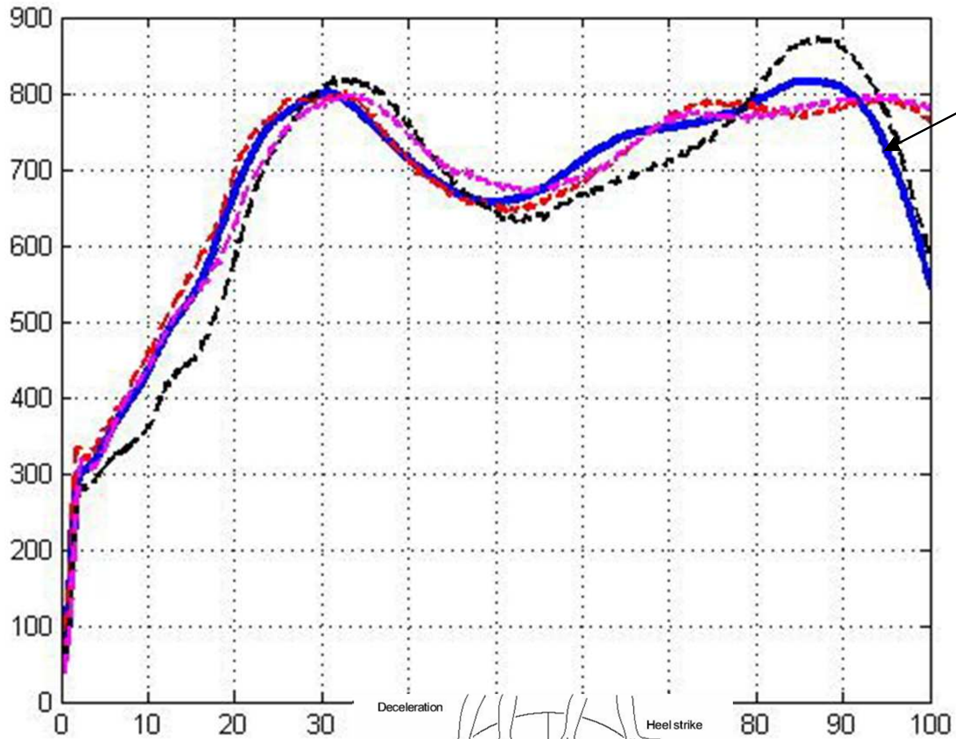
Se non si dispone di una descrizione parametrica o della descrizione statistica del primo ordine, ma si può misurare un numero finito N di realizzazioni, si possono ottenere delle stime di queste funzioni, estendendo ad ogni tempo t quanto visto per la stima di media e varianza di una v.a. a partire dalla misura di un suo campione, ad es. per la media

$$\hat{m}(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(t)$$

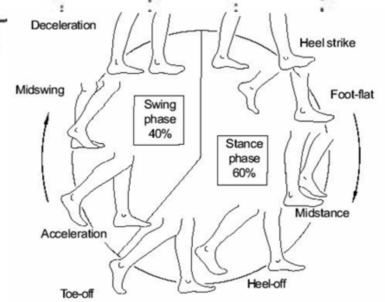
# Esempio

P.A: parametri cinematici misurati durante il cammino, ad ogni ciclo di cammino corrisponde una realizzazione del processo

Forza
di reazione al
suolo




Stima
della
media
del
processo



# Descrizione statistica del secondo ordine

E' relativa al processo in due generici istanti $t_1$ e $t_2$, quindi è la descrizione statistica congiunta delle due v.a. $X(t_1,\omega)$ e $X(t_2,\omega)$.

Funzione distribuzione di probabilità e ddp congiunta (o del secondo ordine)

$$F_x(a_1,a_2;t_1,t_2) = \mathrm{prob}[X(t_1) < a_1, X(t_2) < a_2]$$

$$f_x(a_1,a_2;t_1,t_2) = \frac{\partial^2 F_x(a_1,a_2;t_1,t_2)}{\partial a_1 \partial a_2}$$

dipendono dai tempi $t_1$ e $t_2$!

# Autocorrelazione e Autocovarianza

Si calcolano dalla descrizione statistica del secondo ordine

Autocorrelazione $R_x(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$

È il valor medio del prodotto tra i valori assunti da ogni realizzazione ai tempi $t_1$ e $t_2$.

Autocovarianza $C_x(t_1,t_2) = E[(X(t_1) - m_x(t_1))(X(t_2) - m_x(t_2))]$

$= R_x(t_1,t_2) - m_x(t_1)\, m_x(t_2)$

dove l'aspettazione congiunta è definita come

$$E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} a_1 a_2 \cdot f_x(a_1 a_2; t_1 t_2)\, da_1 da_2$$

Autocorrelazione e autocovarianza sono misure della "memoria" dei segnali, cioè di quanto il processo all'istante $t_1$ è legato al valore che esso assume all'istante $t_2$

Se non c'è alcun legame tra i valori agli istanti $t_1$ e $t_2$ (ipotesi di indipendenza) la autocovarianza va a zero.

# Descrizione statistica di potenza

E' una descrizione statistica parziale spesso utilizzata, basata sulle funzioni:

- Valor medio $m_x(t) = E[X(t)]$

- Autocorrelazione $R_x(t_1,t_2)= E[X(t_1)X(t_2)]$

o in alternativa

- Autocovarianza $C_x(t_1,t_2)= E[(X(t_1)- m_x(t))(X(t_2)- m_x(t))]$

# Stima dell'autocorrelazione

Se disponiamo di un numero finito N di realizzazioni si possono ottenere delle stime dell'autocorrelazione sostituendo, al solito l'aspettazione con la media campionaria

$$\hat{R}_x(t_1,t_2)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i(t_1)x_i(t_2)$$

# Stazionarietà

In generale, la descrizione statistica di un P.A. (media, potenza, autocorrelazione ecc) dipendono dal tempo

In molti fenomeni aleatori si verifica che certi parametri statistici risultano indipendenti dal tempo $\Rightarrow$ stazionarietà

Un processo aleatorio si dice stazionario in senso stretto se il suo comportamento statistico è invariante rispetto ad una traslazione dell'origine dei tempi.

Si dice stazionario in senso lato o debolmente stazionario se l'invarianza rispetto ad una traslazione vale per la descrizione in potenza, pertanto

- Valor medio $m_x(t) = E[X(t,A)] = m$ costante nel tempo

- Autocorrelazione $R_x(t_1,t_2) = E[X(t_1)\, X(t_2)]$

$$= E[X(t_1)\, X(t_1+\tau)]$$

$$= R_x(\tau)$$ dipende da $\tau = t_2 - t_1$

*Esempio :*

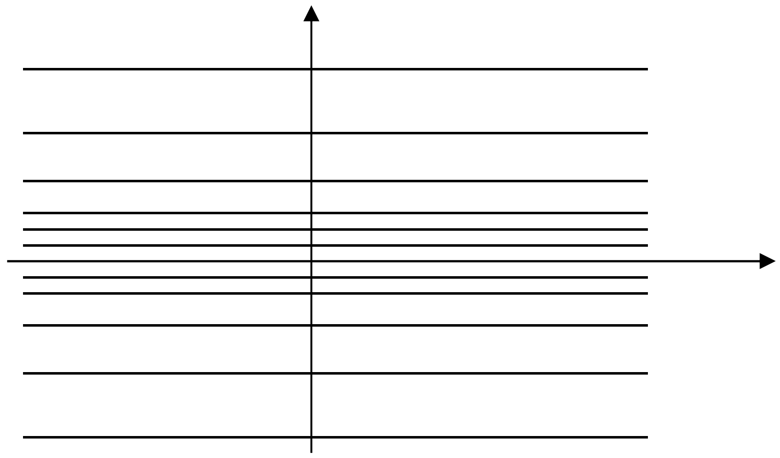
*X(t)=A*

*A v.a. normale, media=0, SD=3*

$m_x(t) = 0$

$R_x(t_1,t_2)= C_x(t_1,t_2) = 9$

**Stazionario**



*Esempio :*

*X(t)=B cos(2πt+A)*

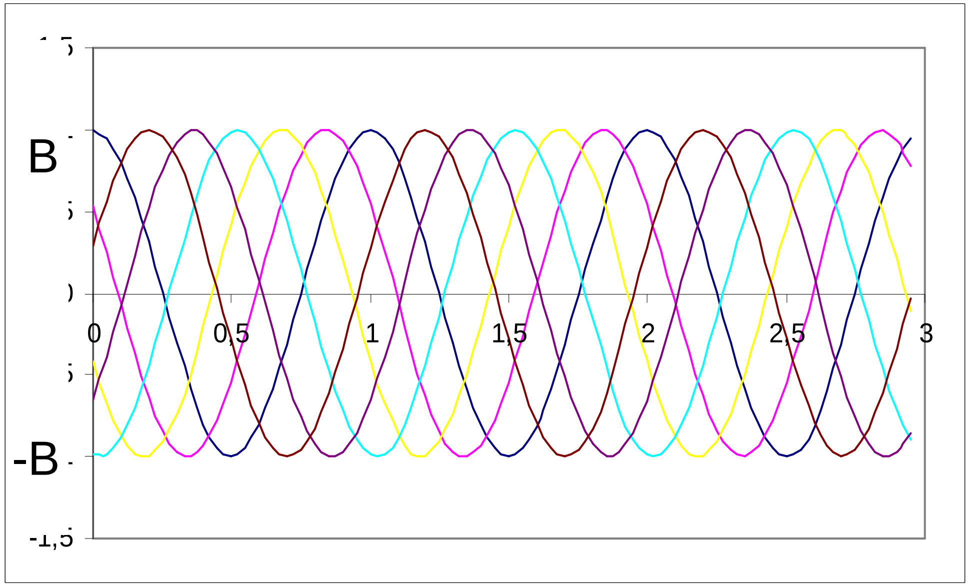
*con A v.a. unif in 0-2π*

$m_x(t) = 0$

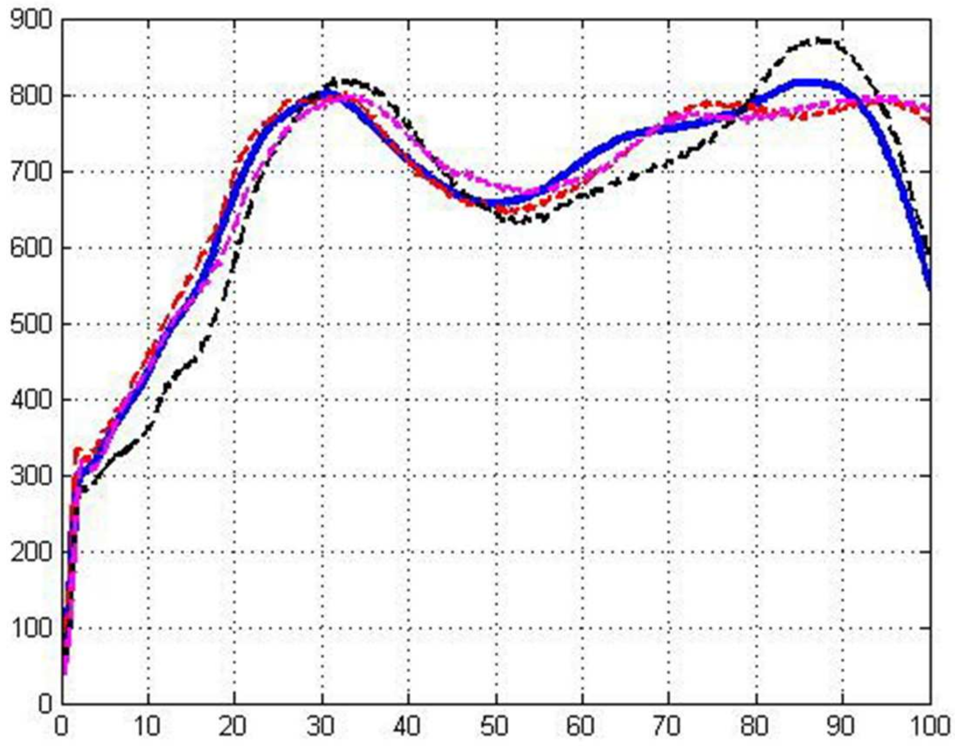
$R_x(t_1,t_2)= C_x(t_1,t_2)$

$= 0.5\ B^2 \cos[2\pi(t_2- t_1)]$

**Stazionario**



*Esempio :*




*Questo processo è* **NON Stazionario**

**(la media varia nel tempo)**

# Proprietà della autocorrelazione

La funzione di autocorrelazione di un processo reale, stazionario almeno in senso lato

1. è una funzione reale e pari:

$R_x(\tau) = E[X(t)\ X(t+\tau)] = E[X(t-\tau)X(t)] = E[X(t)X(t-\tau)] = R_x(-\tau)$

2. assume valor massimo nell'origine

$E[(X(t)\pm X(t+\tau))^2] = E[X(t)^2] + E[X(t+\tau)^2] \pm 2E[X(t)X(t-\tau)] = 2R_x(0) \pm 2R_x(\tau) \geq 0$

da cui

$R_x(0) \geq |R_x(\tau)|$

3. Nell’origine coincide con la potenza statistica

$R_x(0) = E[X^2(t)] = P_x \geq 0$

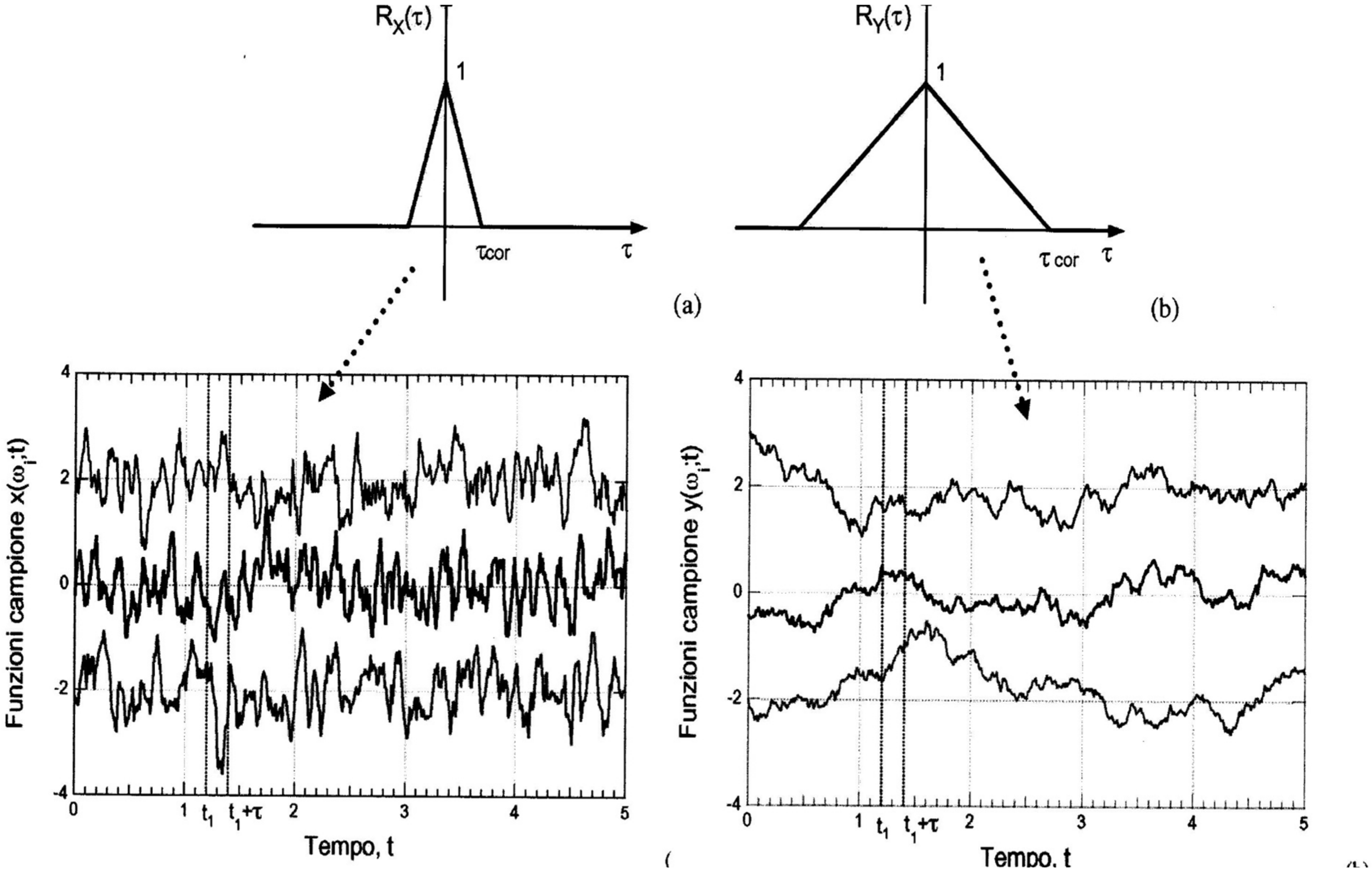
*NB. Si chiama potenza perché:*

*se le realizzazioni del processo rappresentano la tensione applicata ai capi di una resistenza unitaria*

$x^2(t,\omega)$ *è la potenza istantanea dissipata dalla realizzazione associata all’esito dell’esperimento* $\omega$ *casuale*

$E[X^2(t)]$ *è il valor medio (statistico) di tale grandezza, costante nel tempo se il processo è stazionario*

# Significato della autocorrelazione




*L'autocorrelazione è una misura di quanto in media sono collegati tra loro valori che distano di un tempo t. Più rapidamente va a zero la funzione di autocorrelazione, più blando è questo legame e quindi più "irregolari" sono le realizzazioni*

# 1°Caso limite: processo con funzione di autocorrelazione costante

*Esempio :*

*X(t)=A*

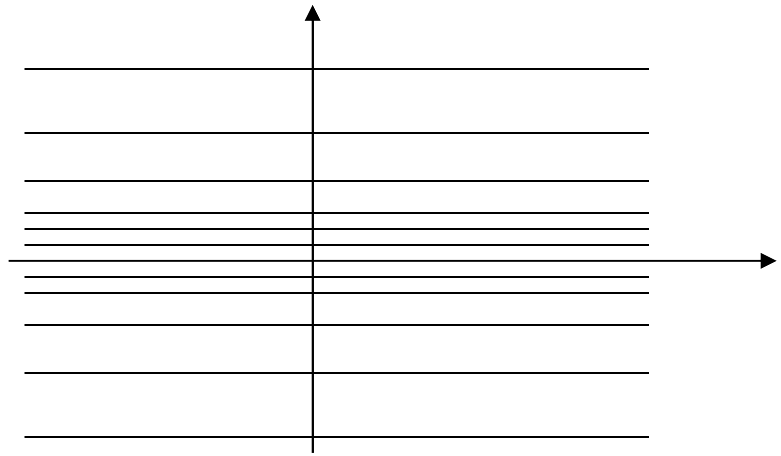
*A v.a. normale, media=0, SD=3*

$m_x(t) = 0$

$R_x(t_1,t_2) = C_x(t_1,t_2) = 9$

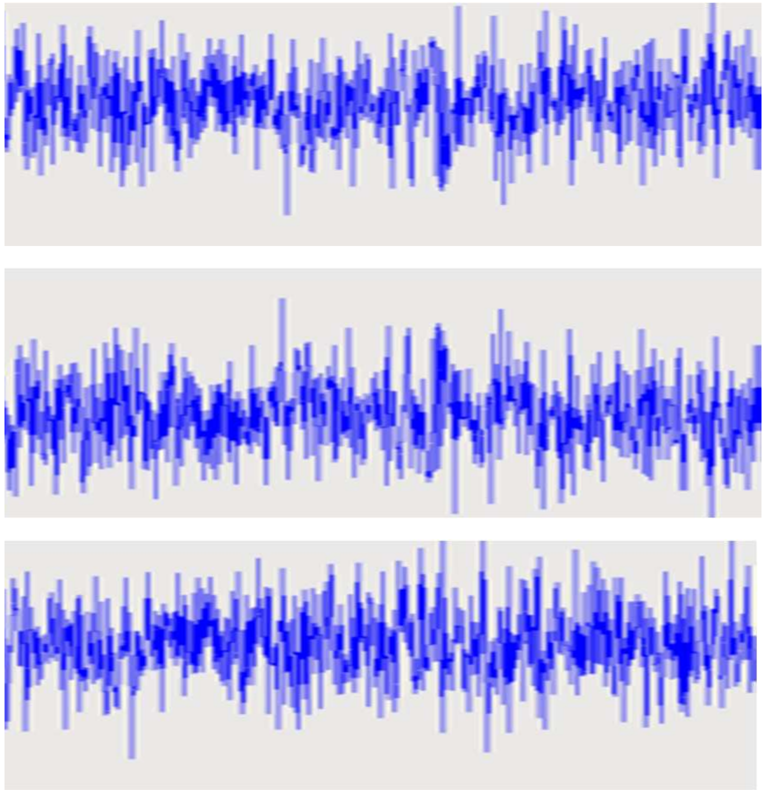
Il processo è Stazionario

Realizzazioni del processo



# 2°Caso limite: Rumore bianco

Realizzazioni del processo



E' un processo aleatorio stazionario a media nulla e con funzione di autocorrelazione diversa da zero solo nell'origine:

$m_x(t) = 0$

$R_x(\tau) = C_x(\tau) = \sigma^2 \quad \tau=0$

$= 0 \quad$ altrove

Quindi non c'è alcun legame tra i valori presi in due tempi diversi: le realizzazioni hanno la massima irregolarità

La bianchezza non pone restrizioni sui valori che il segnale può assumere. Ad es. un segnale binario che assume solo valori 0 o 1 potrà essere bianco, come pure un processo continuo con distribuzione gaussiana.

# Torniamo al problema della stima

Se il processo è stazionario, il problema è più semplice:

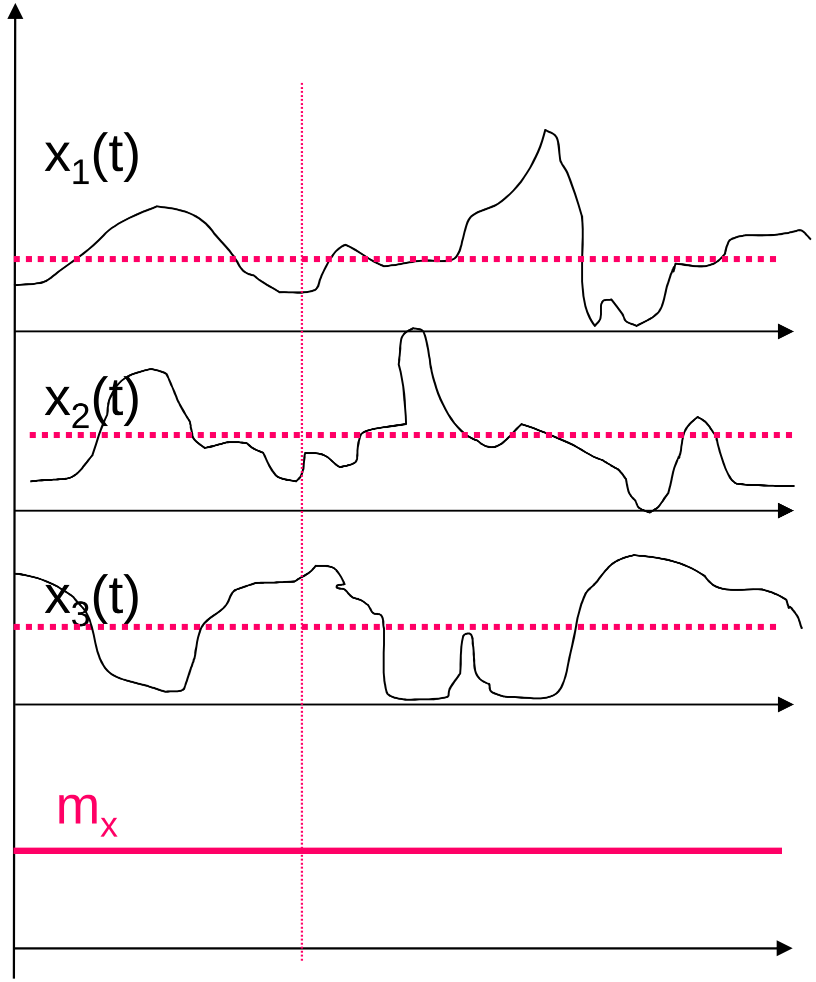
- La media del processo è una costante
- La funzione di autocorrelazione dipende solo da $\tau$

Però in teoria servono ancora tutte le possibili realizzazioni per ottenere media e autocorrelazione, o quanto meno un numero elevato di realizzazioni per ottenere una buona stima

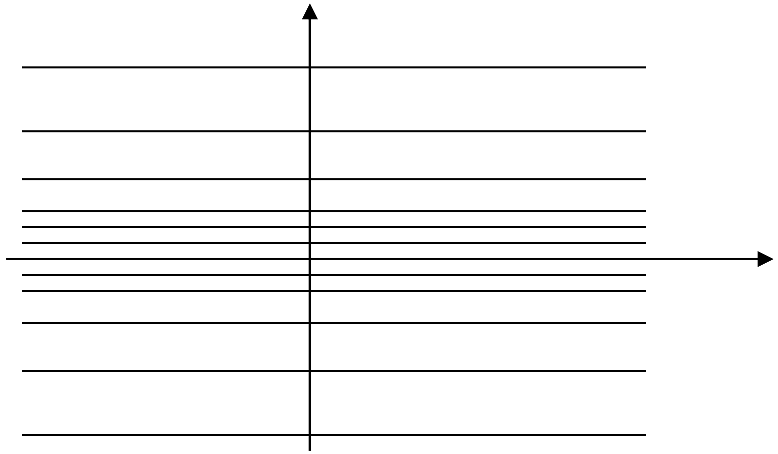
# Ergodicità

Un processo stazionario si dice ergodico se le sue proprietà statistiche possono essere ricavate da una sua qualsiasi realizzazione.
Ogni realizzazione di un processo ergodico contiene in sé tutta l'informazione possibile sul processo in quanto una sorgente ergodica produce, nel corso di una realizzazione, tutte le situazioni ed i casi possibili per il processo con una frequenza pari alla probabilità di detti eventi

# Ergodicità




*La media (temporale) di ogni realizzazione coincide con il valor medio del processo*



*La media (temporale) di ogni realizzazione NON coincide con il valor medio del processo*

*Il processo NON è ergodico*

# Per processi ergodici:

$$m_x = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_i(t)dt$$

$$R_x(\tau) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_i(t)x_i(t+\tau)dt$$

E' una proprietà importante da un punto di vista operativo, perché consente di inferire sulle proprietà dell'intero processo, dall'unica realizzazione che spesso possiamo misurare