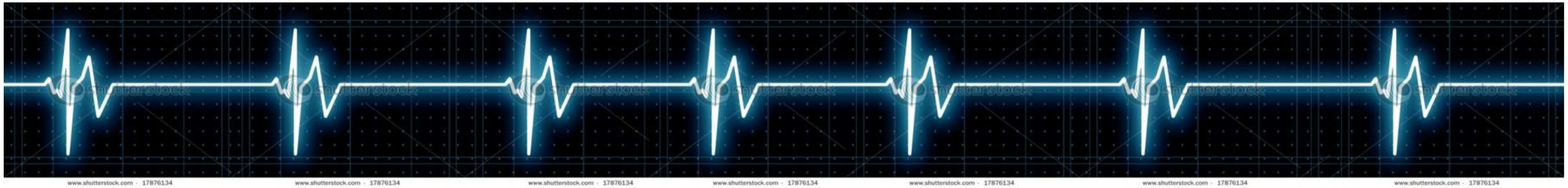
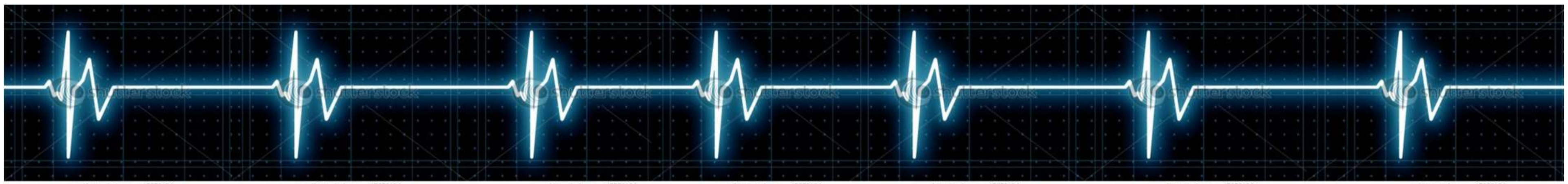


Rappresentazioni tempo-frequenza



L’analisi di Fourier, che gioca un ruolo fondamentale per l’analisi spettrale segnali biologici, decompone il segnale nelle sue componenti periodiche, seno e coseno.

$$x(t)=FT^{-1}[x(t)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$$

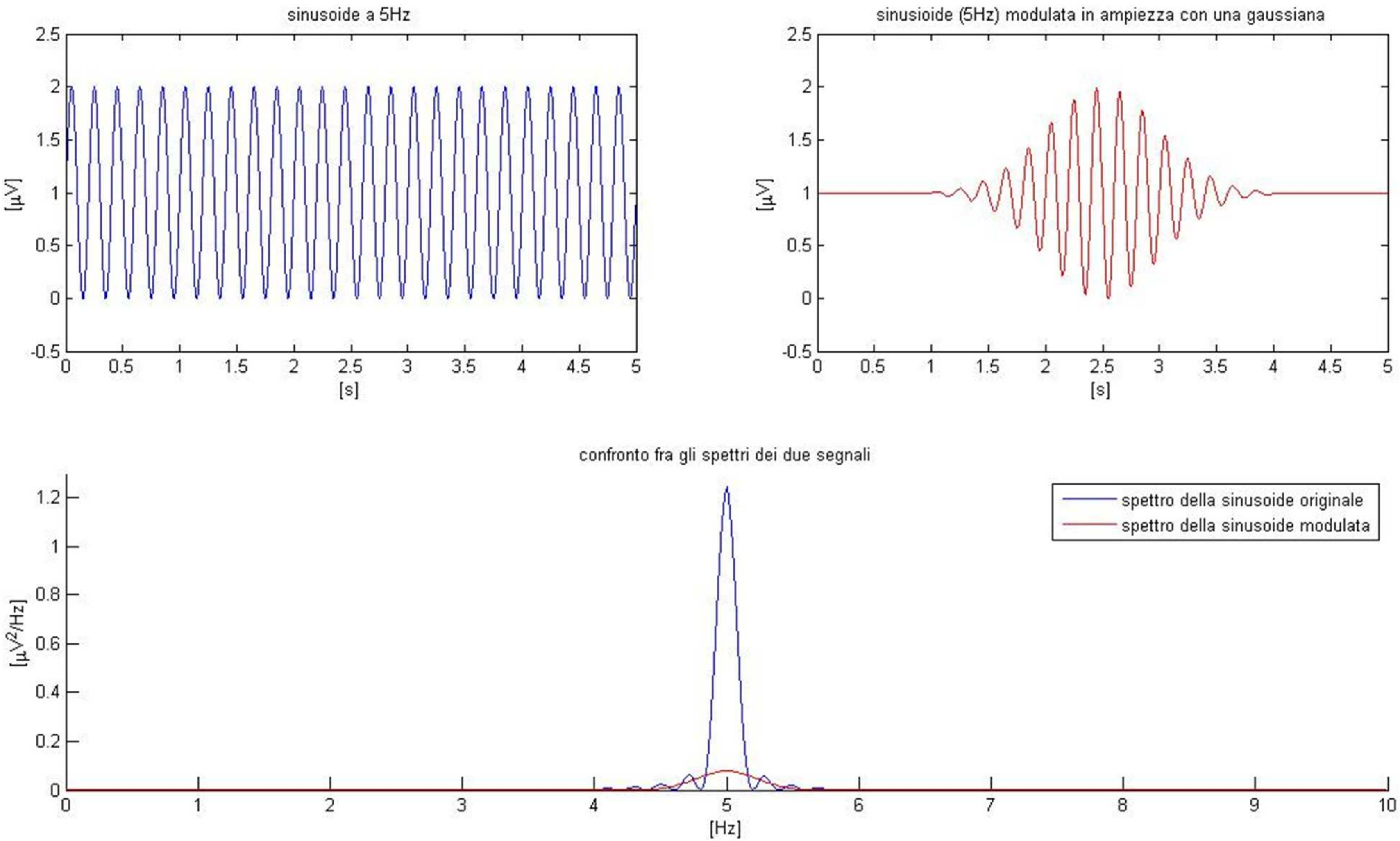
Per un certo valore f_1 di frequenza, $X(f_1)$ rappresenta il peso di seno e coseno a frequenza f_1 nel segnale x(t). Tale peso viene calcolata attraverso la trasformata inversa calcolata in corrispondenza della frequenza f1

$$X(f_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi f_1 t}dt$$

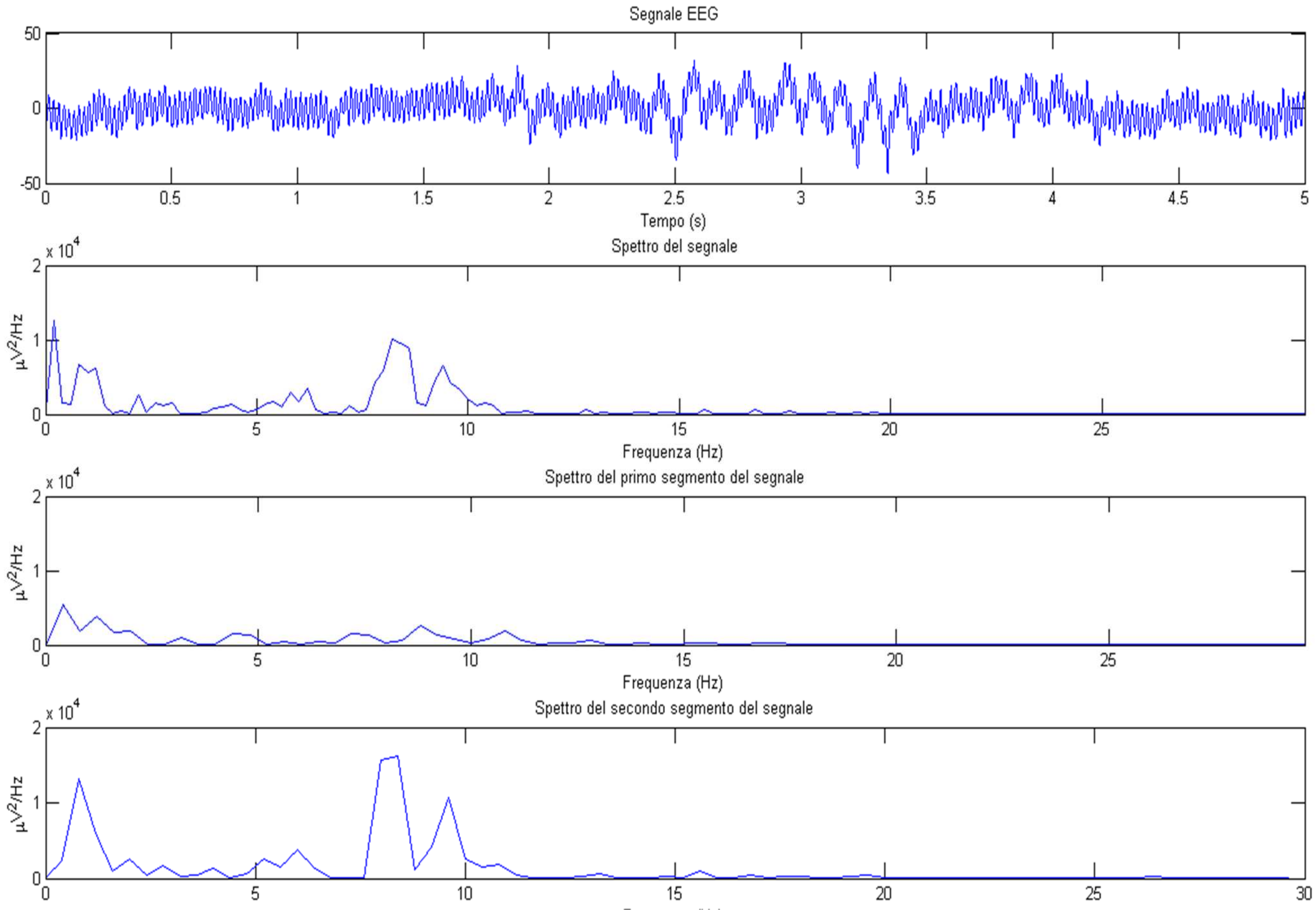
quindi moltiplicando il segnale per l’esponenziale complesso (seno e coseno) alla frequenza f_1 e poi integrando su tutto il dominio temporale

Nessuna informazione sulla eventuale localizzazione nel tempo delle componenti periodiche…..dualmente nessuna informazione su eventuali variazioni nel tempo dell’ampiezza delle componenti spettrali

Esempio 1 – dati simulati



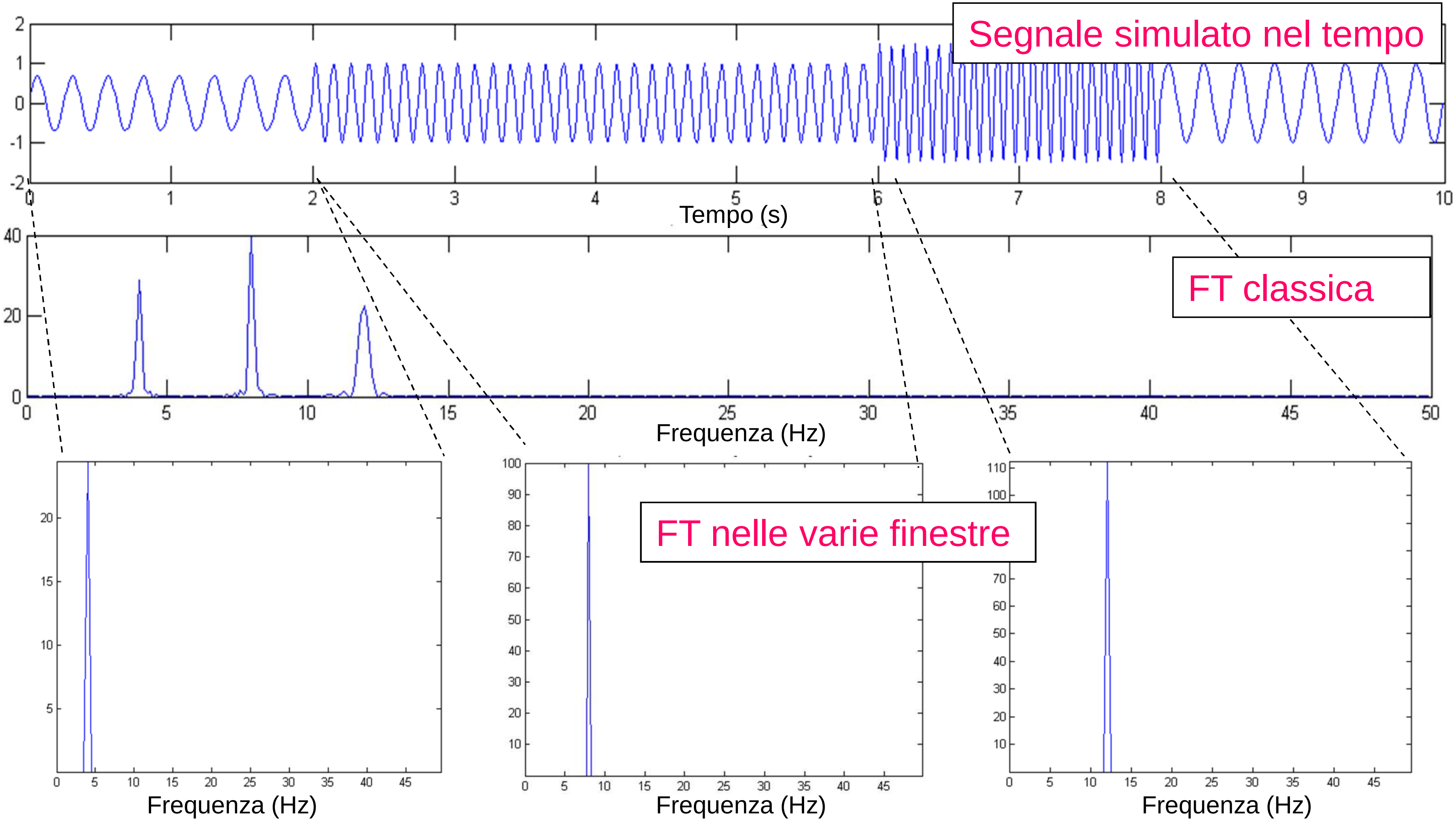
Esempio 2 - dati reali (EEG)



Una prima soluzione è rappresentata dalla

Short Time Fourier Transform (STFT)

che si basa sulla segmentazione del segnale attraverso una finestra temporale e sull'analisi in frequenza di ogni segmento, supposto stazionario.



Intuitivamente:

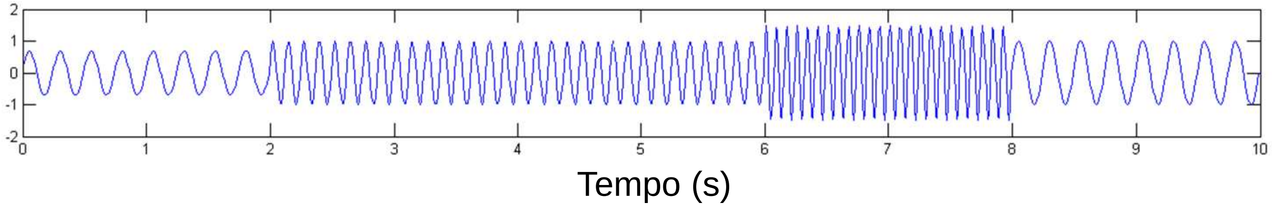
STFT trasforma un segnale monodimensionale che varia nel tempo in un segnale bidimensionale del tempo e della frequenza che analizza le variazioni nel tempo del contenuto spettrale del segnale. Pertanto:

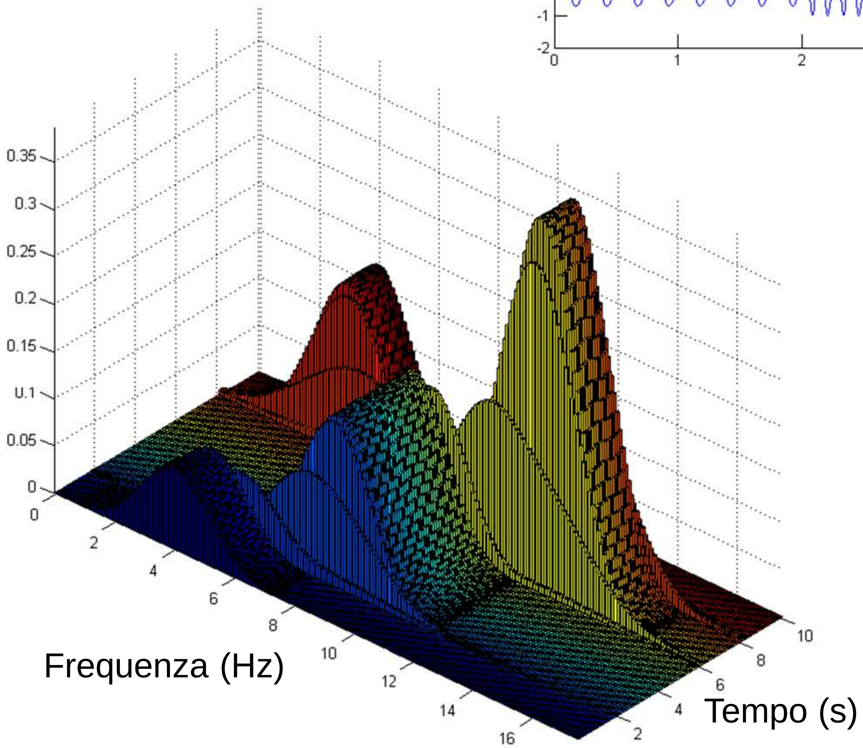
fissata una certa finestra rettangolare centrata al tempo t, X(t,f) evidenzia le componenti spettrali del segmento di segnale contenuto nella finestra.

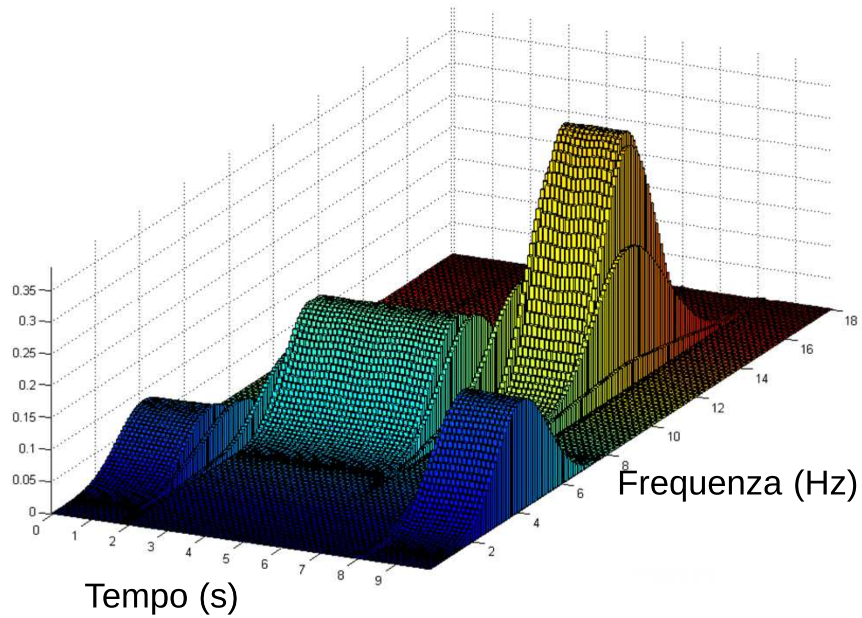
Come vedremo piü avanti, vale anche il duale, cioè fissata un intervallo di frequenza centrato in f, X(t,f) evidenzia come variano nel tempo le componenti dello spettro relative alle frequenze in questo intervallo

Dalla STFT allo spettro tempo-frequenza: 3D

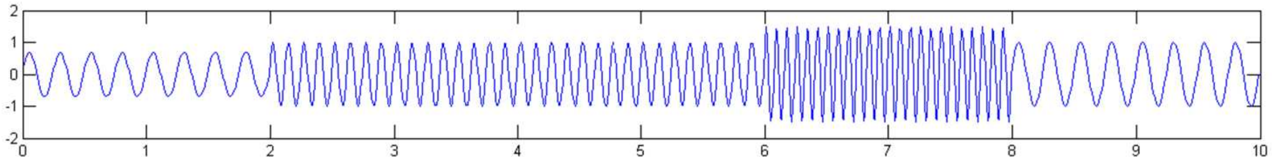
Il modulo al quadrato della STFT fornisce una stima dello spettro tempo-frequenza



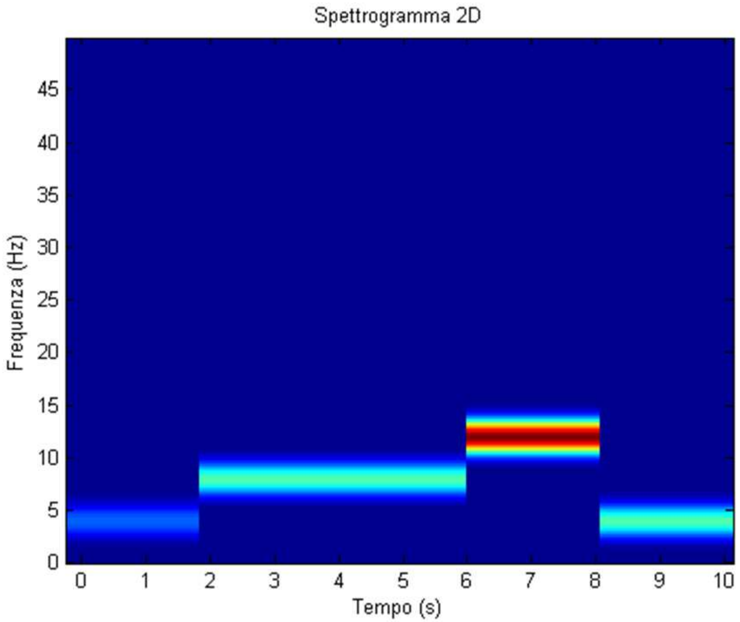


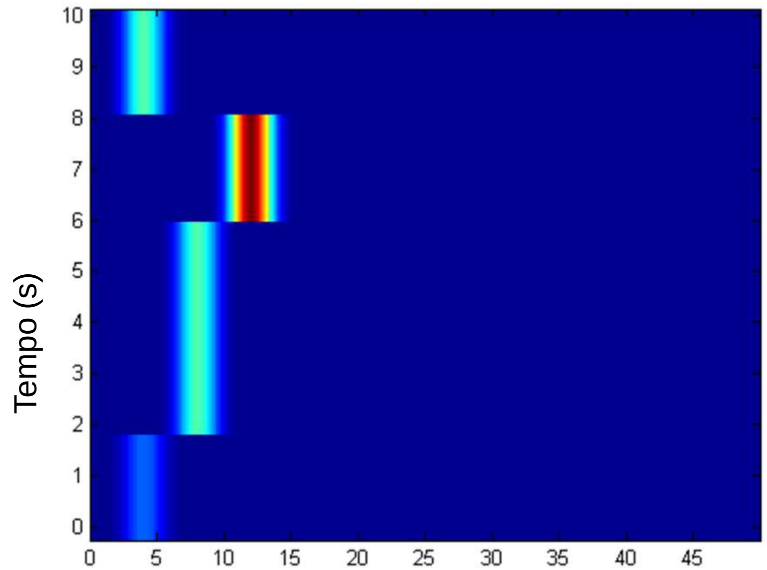


Dalla STFT allo spettro tempo-frequenza: 2D



Tempo (s)



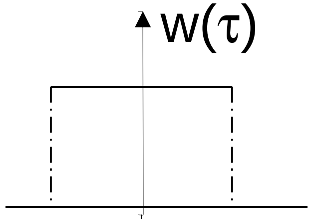


Tempo (s)

Frequenza (Hz)

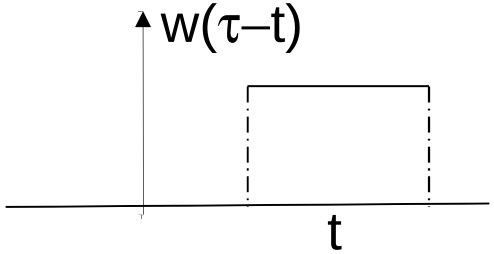
La dimensione (e la forma) della finestra utilizzata (nella figura si è scelta una finestra rettangolare di 2 sec) influenza lo spettrogramma. Finestre rettangolari, molto semplici da implementare, comportano una stima spettrale che converge in media verso il prodotto di convoluzione dello lo spettro vero per una funzione sinc, con gli evidenti problemi di leakage presenti nella figura)

Formalizzando:



Si considera una finestra w(τ) reale, es. finestra rettangolare, finestra gaussiana ecc.

Fissato un istante t:



- si costruisce la finestra traslata in t : w(τ - t)
- si moltiplica il segnale x(τ) per la finestra w(τ - t)
- di questo prodotto si fa la FT

$$\boxed{X(t,f)=STFT[x(t)]=FT[x(\tau)w(\tau-t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)w(\tau-t)e^{-j2\pi f\tau}d\tau}$$

X(t,f) risulta formata dalle componenti dello spettro relative al segnale in un intorno del tempo t

Valgono le seguenti

Proprietà della STFT

Traslazione nel tempo corrisponde ad uno shift della fase

$$x(t) \xrightarrow{\text{STFT}} X(t,f)$$

$$x(t-t_0) \xrightarrow{\text{STFT}} X(t-t_0,f)\exp(-j2\pi t_0 f)$$

Dualmente

$$x(t)\exp(j2\pi f_0 t) \xrightarrow{\text{STFT}} X(t,f-f_0)$$

interpretazione della STFT

Dalla definizione di STFT si può scrivere

$$\boxed{X(t,f)=e^{-j2\pi ft}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)w(\tau-t)e^{-j2\pi f(\tau-t)}d\tau}$$

Si consideri una frequenza f_1. L'integrale è la convoluzione tra x(t) e $w(-t)e^{j2\pi f_1 t}$, ovvero

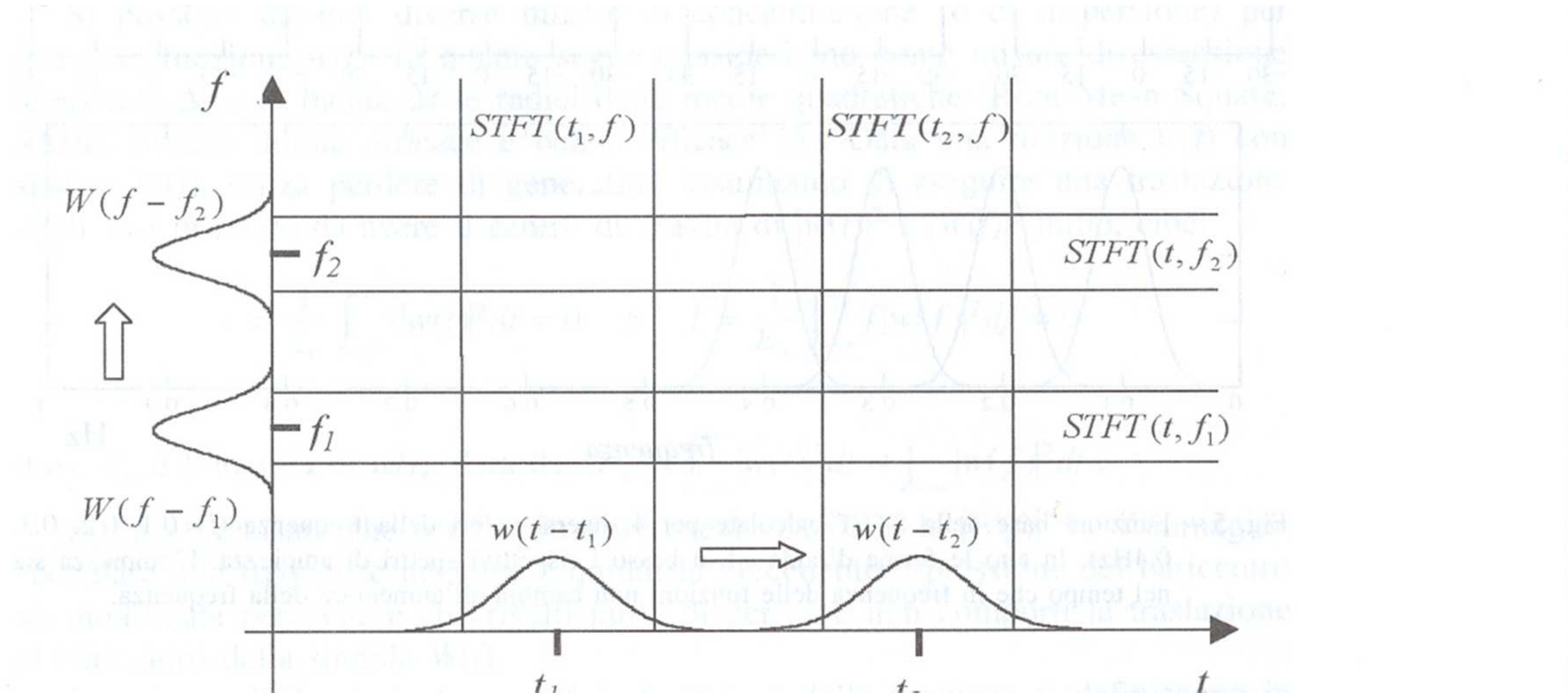
$$X(t,f_1)=\underbrace{e^{-j2\pi f_1 t}}_{\text{Fattore di demodulazione}}\underbrace{x(t)\otimes\left[w(-t)e^{j2\pi f_1 t}\right]}$$

Fattore di demodulazione

uscita di un filtro passa-banda con risposta impulsiva pari alla portante a frequenza f_1 modulata dalla finestra w, quindi con risposta in frequenza pari a $W(f-f_1)$

Al variare di f_1, NON varia la forma del filtro ma varia la frequenza centrale: ciò consente di interpretare la STFT come banco di filtri

STFT come banco di filtri



ad ogni istante t_1 la STFT è la FT del segnale selezionato dalla finestra $w(t- t_1)$

Ad ogni frequenza f_1 la STFT isola le componenti del segnale viste attraverso il filtro $W(f-f_1)$

Funzioni base della STFT

$$X(t,f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}\cdot w(\tau-t)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot h_{t,f}(\tau)d\tau$$

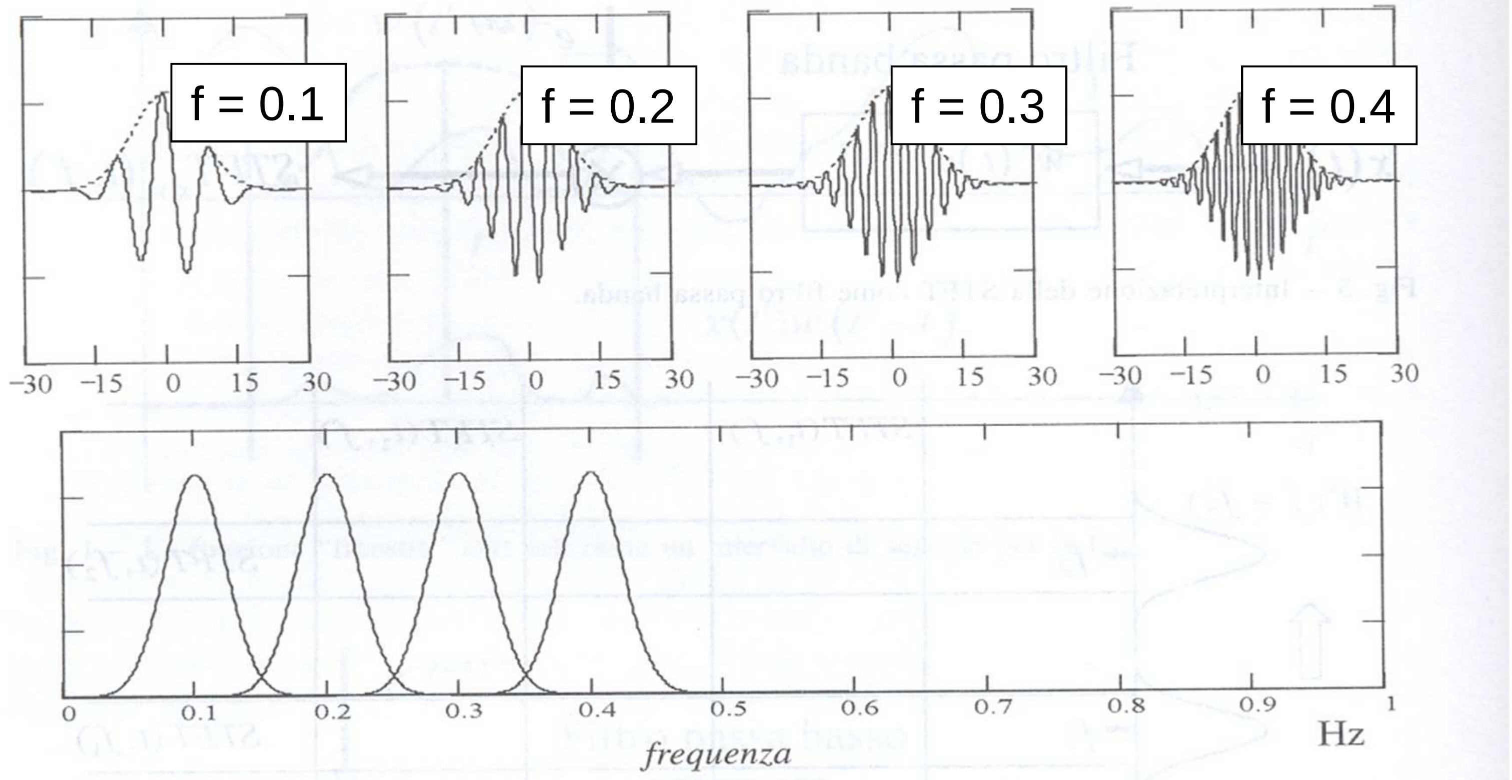
$$\text{con} \quad h_{t,f}(\tau) = e^{-j2\pi f\tau}w(\tau - t)$$

Pertanto, STFT può essere vista come la proiezione del segnale x(t) su una famiglia di funzioni h, derivate dalla w per mezzo di:

- traslazione nel tempo $w(t-\tau)$
- traslazione in frequenza $\exp(-j2\pi ft)$

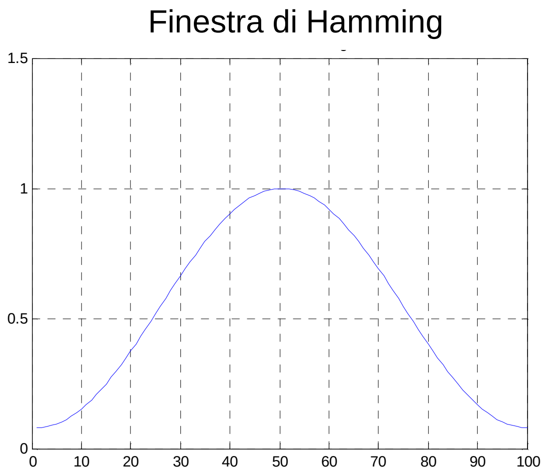
Funzioni base della STFT

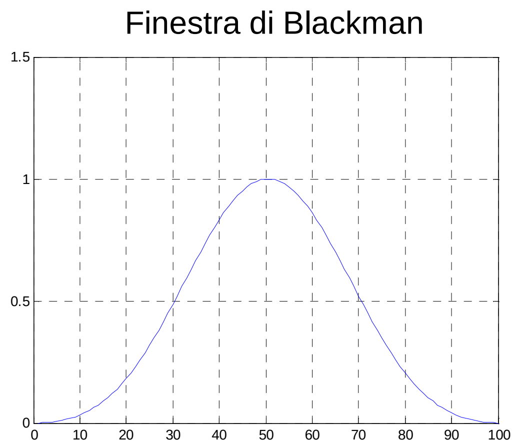
$$h_{t,f}(\tau) = e^{-j2\pi f\tau} w(\tau - t)$$

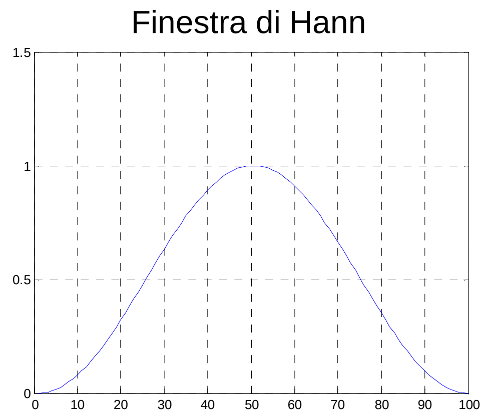


Funzioni base della STFT calcolate per una finestra w gaussiana e 4 diversi valori di frequenza (0.1, 0.2, 0.3, 0.4 hz); in alto la parte reale delle forme d'onda e sotto i relativi spettri. Al variare della frequenza, la durata della finestra è costante, il numero di oscillazioni aumenta, lo spettro trasla in frequenza mantenendo la stessa forma.

Finora abbiamo usato finestre rettangolari o gaussiane, ma ne esistono delle altre: Hamming, Blackman, Hann,... (sono composizioni dei funzioni coseno, dove variano coefficienti moltiplicativi e frequenze)







Antitrasformata STFT

Se la funzione w ha area unitaria: $\int_{-\infty}^{+\infty} w(\tau)d\tau = 1$

il segnale x(t) può essere ricostruito con la seguente formula

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} X(\tau, f) e^{j2\pi ft} df}_{\substack{\text{antitrasformata della STFT vista} \\ \text{come funzione della sola frequenza}}} \right] d\tau$$

Risoluzione tempo-frequenza

La STFT è lo spettro locale in un intorno del tempo t, ottenuto selezionando una parte di segnale con la finestra di analisi w(t).

Per avere una buona risoluzione nel tempo, serve una finestra “stretta”

D’altra parte l’interpretazione della STFT come banco di filtri mostra che per avere una buona risoluzione in frequenza è necessario che W(f) abbia banda stretta.

Queste due esigenze sono contrastanti, in quanto ad una variazione (compressione o espansione) della durata [w(at)] corrisponde una variazione opposta (espansione o compressione) della banda [W(f/a)]

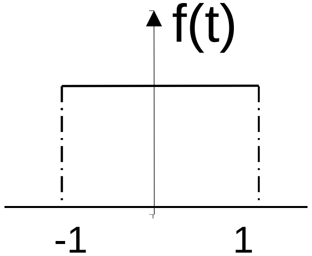
$$\mathrm{FT}[w(at)] = \frac{1}{|a|} W\left(\frac{f}{a}\right)$$

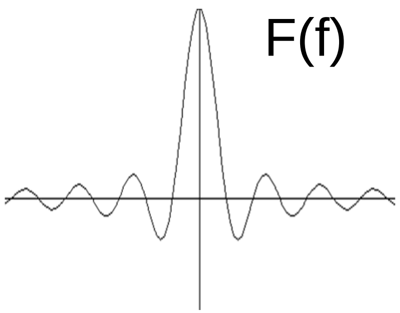
a é un qualsiasi numero reale positivo che rappresenta il fattore di scala

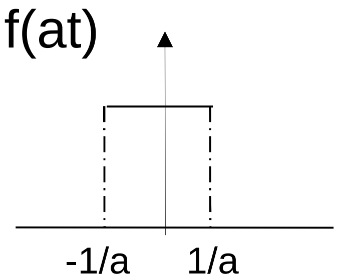
Infatti:

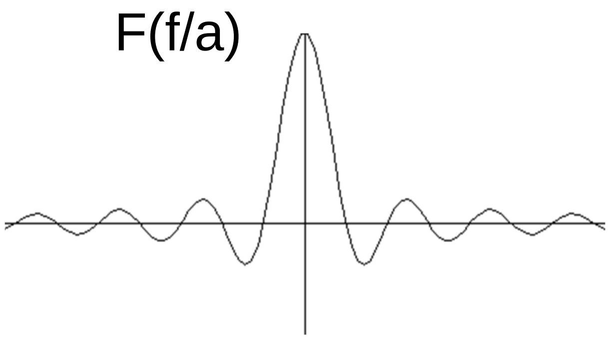
Quando si cambia la scala ad una funzione, cioè si passa da f(t) a f(at), questa

- se a<1 si espande nel tempo e si contrae in frequenza
- se a>1 si contrae nel tempo e si espande in frequenza

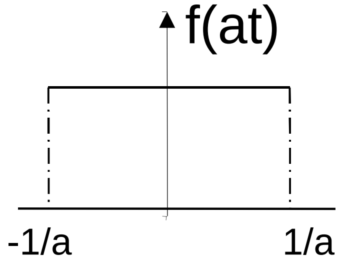


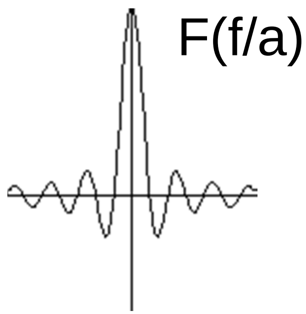






a>1



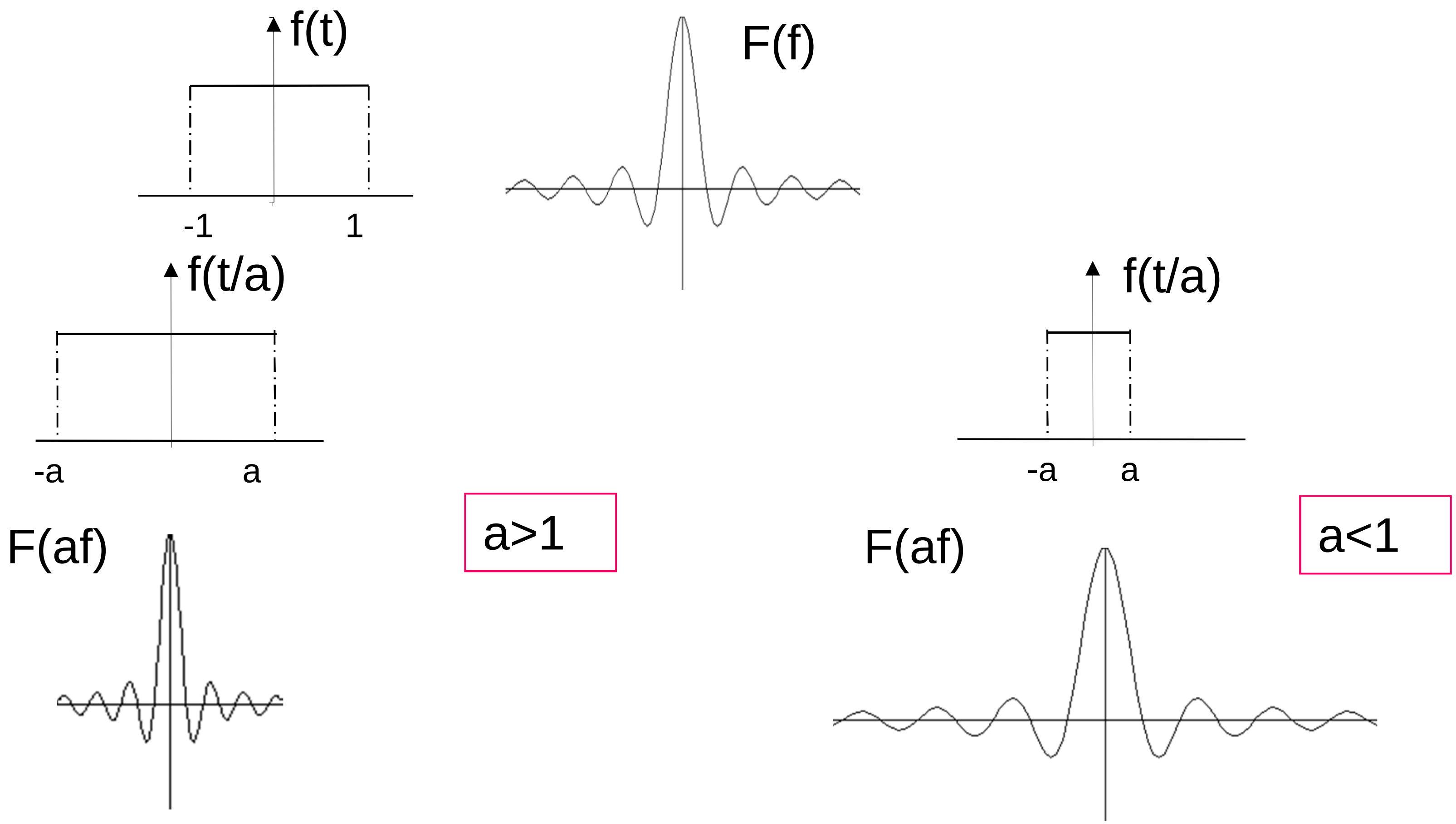


a<1

Analogamente:

Quando si passa da f(t) a f(t/a):

- se a<1 si contrae nel tempo e si espande in frequenza
- se a>1 si espande nel tempo e si contrae in frequenza



Risoluzione tempo-frequenza

Le relazioni viste suggeriscono che durata e banda di unsegnale sono inversamente proporzionali. Dato che la durata di w e/o la banda di W potrebbero essere infinite, conviene definire una misura di concentrazione (o dispersione), legata alla media quadratica

$$\Delta t^2 = \frac{1}{E_w} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \left| w(t) \right|^2 dt$$

$$\Delta f^2 = \frac{1}{E_w} \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 \left| W(f) \right|^2 df$$

con

$$E_w = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| w(t) \right|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| W(f) \right|^2 df$$

Si può dim: $\boxed{\Delta t \Delta f \geq \frac{1}{4\pi}}$

Principio di indeterminazione di Heisenberg

Ricapitolando

Nella STFT si usa sempre la stessa finestra, sia al variare di t che al variare di f, quindi i valori di risoluzione Δt e Δf sono costanti nell'intero piano tempo-frequenza.

Ciò è abbastanza innaturale: il concetto di frequenza è associato a quello di oscillazione e per poter affermare che è presente un'oscillazione ad una certa frequenza con ragionevole precisione è necessario osservare un fenomeno per un intervallo che includa uno o più periodi. Se ad es. siamo interessati a rilevare un ritmo circadiano, ($f=1.16\ 10^{-5}$ Hz) dobbiamo osservare per uno o più giorni, mentre se siamo interessati a ritmi veloci quali l'interferenza a 50Hz è sufficiente una finestra della durata di decimi di secondo.

Per ovviare a questi problemi

J Morlet nel 1982 introdusse l'idea base della trasformata wavelet, che consente di decomporre il segnale in funzioni base:

compresse nel tempo alle alte frequenza, perché sono sufficienti finestre di durata limitata per seguire variazioni rapide del segnale

dilatate nel tempo alle basse frequenze, quando sono necessarie finestre ampie per riconoscere variazioni lente del segnale

Trasformata Wavelet

Riprendiamo l'espressione della STFT riscritta come

$$X(t,f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot h^{*}_{t,f}(\tau)d\tau$$

con h derivata dalla finestra w per mezzo di:

- traslazione nel tempo
- traslazione in frequenza

$$h_{t,f}(\tau)=w(\tau-t)e^{-j2\pi f\tau}$$

Nella trasformata Wavelet l'espressione è la stessa

$$X(t,f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot h^{*}_{t,f}(\tau)d\tau$$

ma h è derivata da una finestra di riferimento h_0 (mother wavelet)

$$h_0(\tau)=w(\tau)e^{-j2\pi f_0\tau}$$

Tale mother wavelet viene modificata per mezzo di:

- traslazione nel tempo
- cambiamento di scala

$$h_{t,a}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{a}} h_0\left(\frac{\tau - t}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{a}} w\left(\frac{\tau - t}{a}\right) e^{-j2\pi f_0 \left(\frac{\tau - t}{a}\right)}$$

h è quindi una funzione del tempo e del fattore di scala a, con $a = f/f_0$
Il termine $1/\sqrt{a}$ è introdotto per normalizzare l'energia della wavelet.

Che mother wavelet scegliere?

Nell'analisi dei segnali in cui il concetto di frequenza è di primaria importanza, come nel caso del segnale EEG, è opportuno far ricadere la scelta della forma della wavelet su una famiglia di funzioni ben caratterizzate in frequenza, come sono le wavelet con inviluppo gaussiano

Per tali wavelet

$$\mathrm{h}_0(t) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma_t}\right)^2} e^{j2\pi f_0 t}$$

A cui corrisponde

$$\mathrm{H}_0(f) = \sqrt{2\pi\sigma_t^2}\, e^{-2\pi^2\sigma_t^2 (f - f_0)^2}$$

I parametri da settare sono σ_t (legato alla durata della finestra) e f_0 (legato al numero di oscillazioni)

Effetto del cambiamento di scala

Abbiamo già visto che quando si cambia la scala ad una funzione, cioè si passa da f(t) a f(t/a), questa

- si espande se a>1
- si contrae se a<1

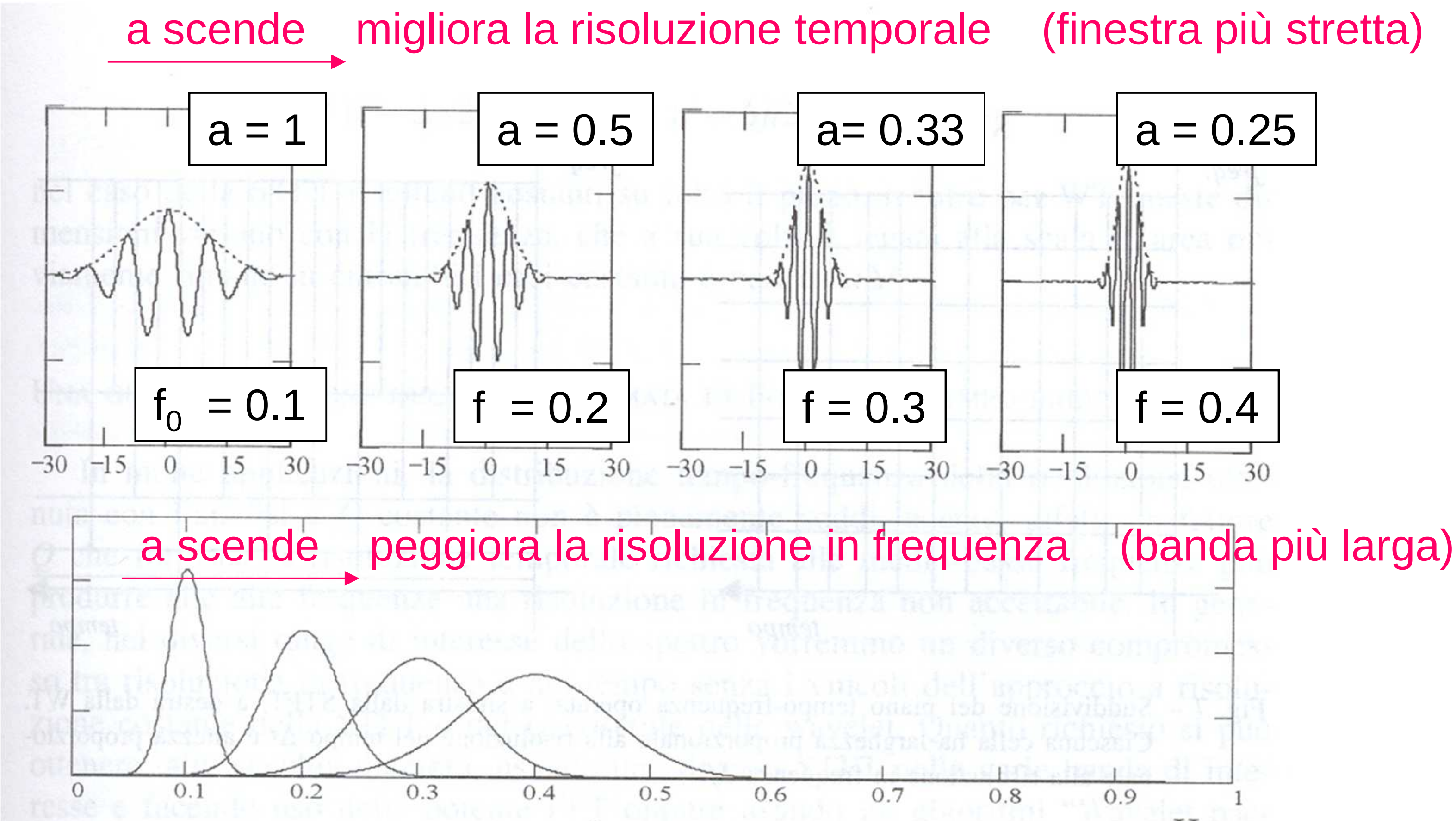
Allora nella WT, qui riscritta come

$$WT(t,a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h^* \left(\frac{\tau - t}{a} \right) d\tau$$

all'aumentare di a la funzione h si espande nel tempo (peggiora la risoluzione temporale) e la WT può tener conto di variazioni lente del segnale (migliora la risoluzione in frequenza). Si ha quindi filtraggio con un banco di filtri con risposta all'impulso h la cui estensione aumenta con a.

Si può ritornare alla frequenza attraverso la relazione a=f°/f dove f° è la freq centrale della FT della della wavelet di base (mother wavelet)

Funzioni base della wavelet di Morlet



Mother wavelet gaussiana (a sin) e funzioni base della WT calcolate per 3 diversi valori di a (0.5, 0.33, 0.25), a cui corrispondono tre diverse frequenza ($f=f_0/a$). In alto le forme d'onda e sotto i relativi spettri. Al variare della frequenza, la forma (ovvero la dispersione Δt) della finestra varia mentre il numero di oscillazioni rimane costante. Lo spettro, anch'esso gaussiano, trasla in frequenza e la sua forma (ovvero la sua dispersione Δf) varia.

Trasformata wavelet inversa

Come illustrato in precedenza per la STFT, è nota la formula di ricostruzione con cui risalire dai coefficienti wavelet al segnale di partenza x(t)

$$\mathrm{x}(t) = \frac{1}{C_g} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} WT(t,a)\, h\left(\frac{\tau - t}{a}\right) \frac{1}{a^2}\, da\, d\tau$$

Risoluzione tempo-frequenza

La risoluzione dipende dalla funzione wavelet scelta e può essere valutata ricorrendo alle misure Δt e Δf viste in precedenza

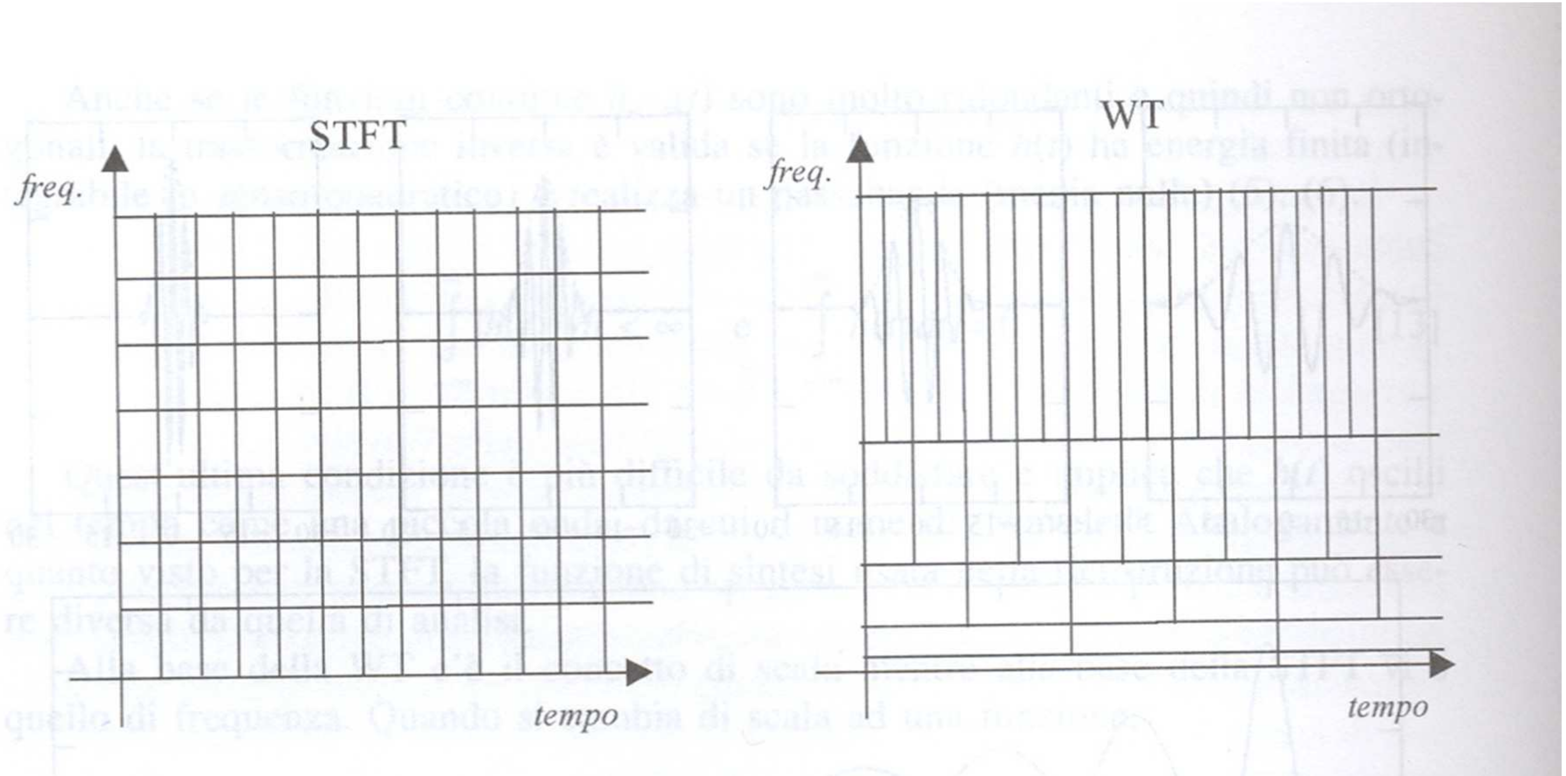
Se indichiamo con Δt_m e Δf_m i valori della wavelet madre (a=1) per la generica funzione si ha

$$\Delta t = a \cdot \Delta t_m$$

$$\Delta f = \frac{1}{a} \cdot \Delta f_m$$

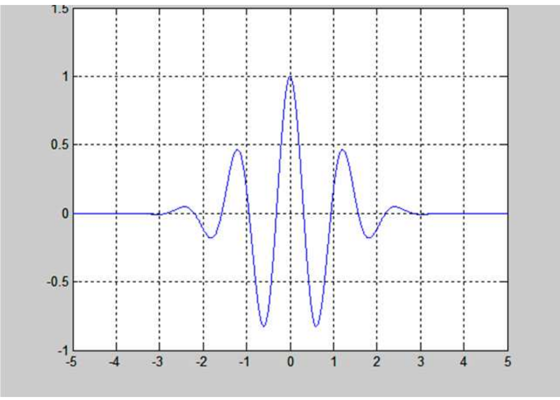
Pertanto il prodotto rimane costante, e al solito inferiormente limitato da 4π. Le wavelet con inviluppo gaussiano (wavelet di Morlet) raggiungono il limite inferiore.

Suddivisione nel piano tempo-frequenza



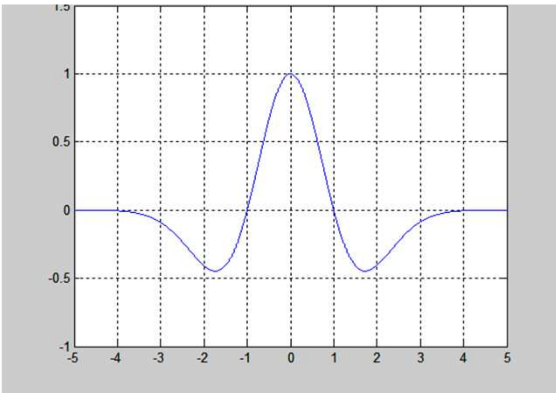
Esistono molte altre famiglie di wavelet, es. Morlet, Mexican hat, Haar wavelet…

Morlet



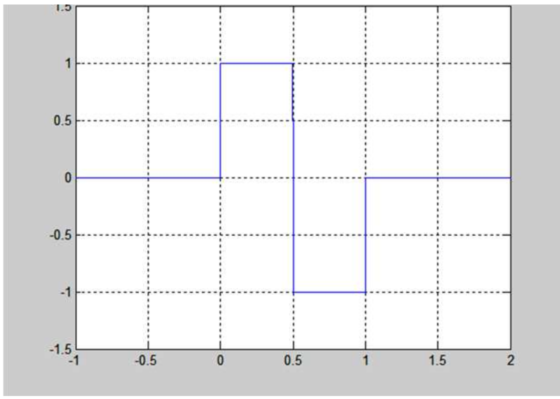
$$h(t) = \exp(j\omega_0 t)\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

Mexican hat



$$h(t) = (1 - t^2)\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

Haar



$$h(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1/2 \\ -1 & 1/2 < t < 1 \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Sotto quali condizioni una funzione può essere una mother wavelet?

- Energia finita

- Media nulla

- La trasformata wavelet di un segnale 1d è una rappresentazione 2d del segnale: è necessario che non si perda informazione nella trasformata. A tale scopo è necessario che sia verificata la seguente espressione:

$$c_g = \int \frac{|H(f)|^2}{|f|} df < +\infty$$

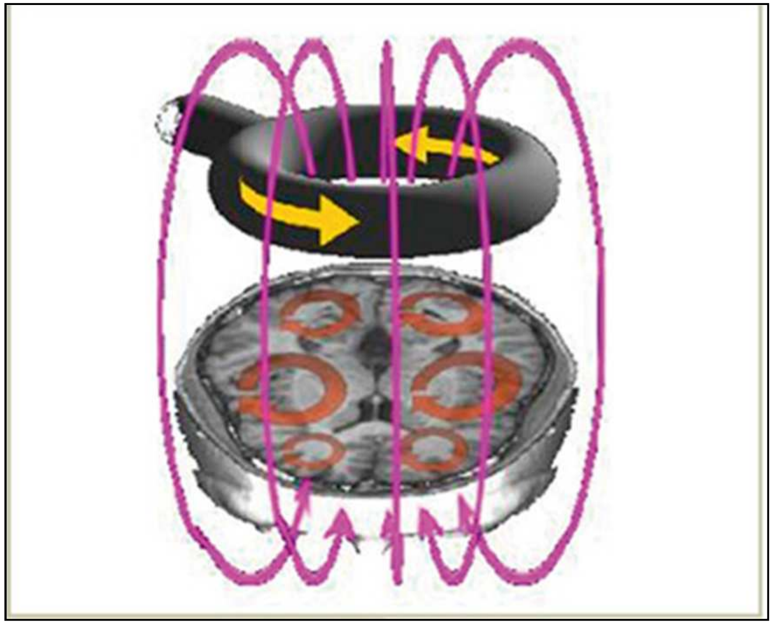
Con c_g: costante di ammissibilità, è legato alla wavelet scelta

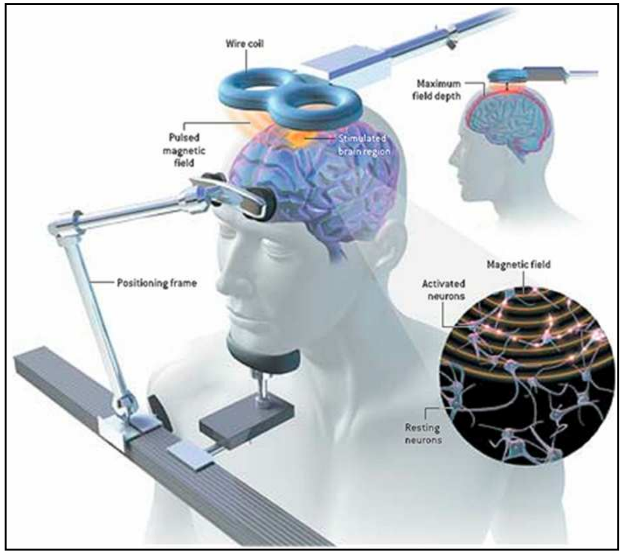
Ciò implica che la trasformata di Fourier: H(f) deve avere un valore 0 alla frequenza f=0.

Nel dominio del tempo perciò si ha che: $\boxed{\int h(t)dt = 0}$ (quindi h oscilla attorno allo zero, da cui il nome wavelet)

• H(f) è reale e nulla per frequenze negative: deve realizzare un filtro passa-basso.

Esempio - EEG durante TMS



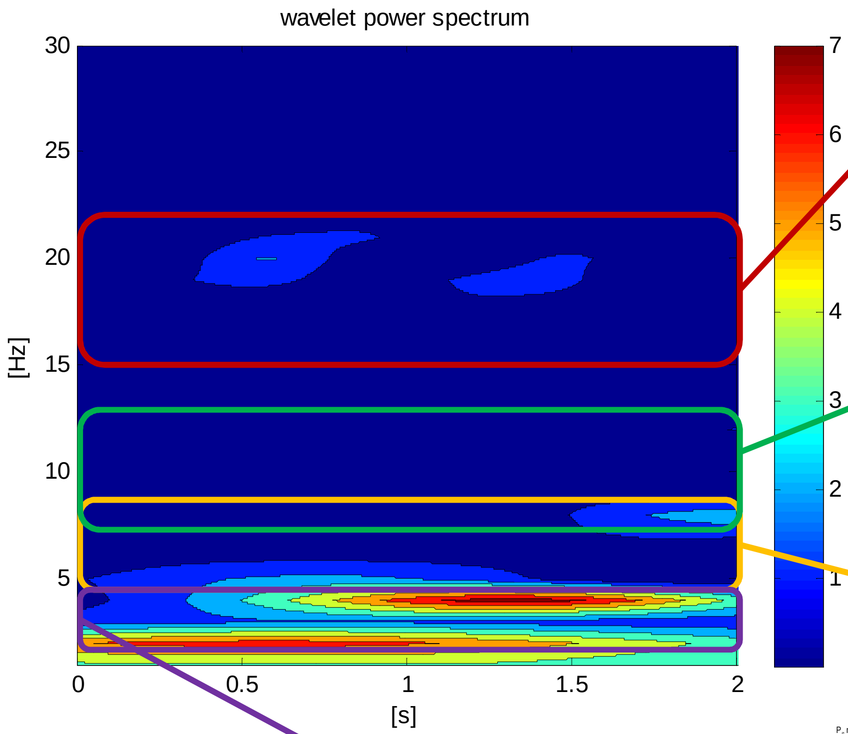


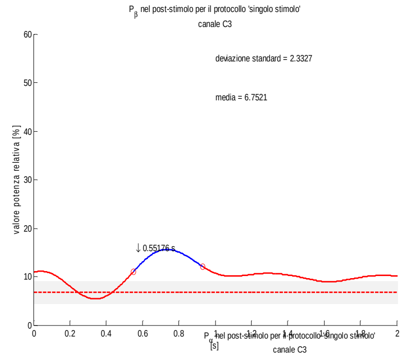
La TMS (transcranic magnetic stimulation) è una metodica non invasiva usata per stimolare la corteccia cerebrale in maniera indolore

E' di interesse evidenziare le variazioni (transitorie!) indotte dalla TMS sul segnale EEG, in particolare sul suo contenuto spettrale

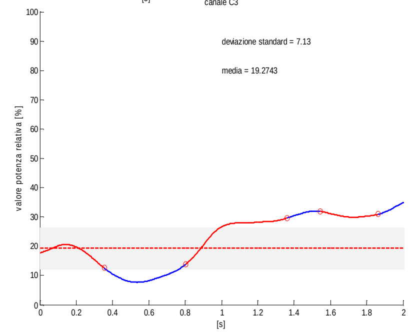
E' quindi evidente la necessità di adottare metodi tempo-frequenza, per monitorare nel tempo le variazioni indotte dalla TMS

EEG - TMS

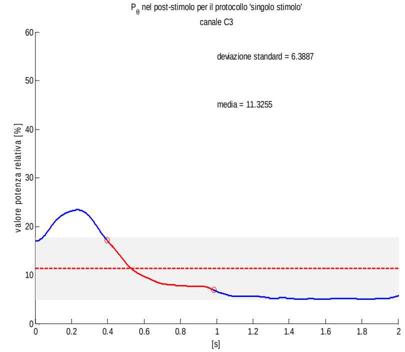




Potenza
banda
beta
15-22 Hz



Potenza
banda
alpha
7-12 Hz



Potenza
banda
theta
4-8 Hz

Potenza
banda
delta
1-4 Hz