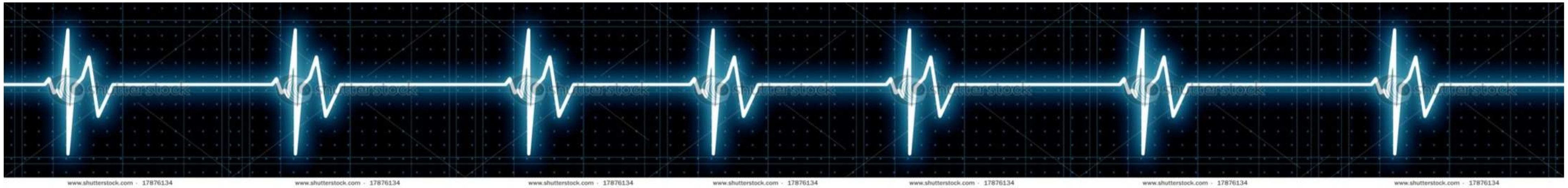
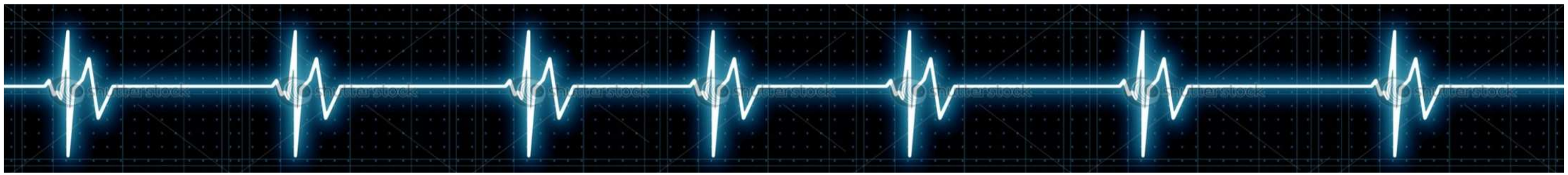


Applicazione di metodi di analisi deterministici e aleatori : estrazione di potenziali evocati



Misura dei potenziali evocati

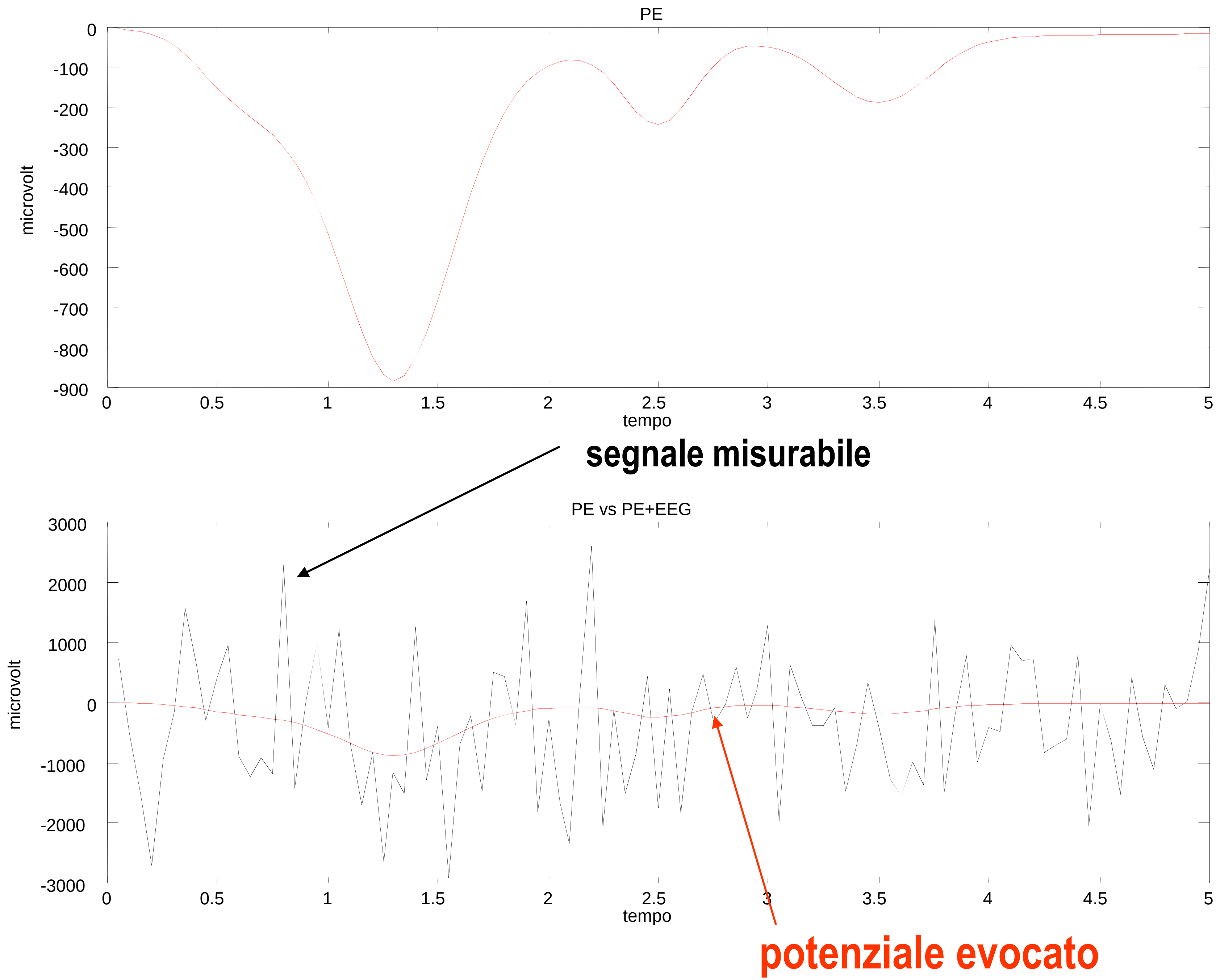
Il potenziale evocato (PE) non si può misurare separatamente dal segnale EEG di fondo. Se ipotizziamo un modello additivo, il segnale misurabile è espresso come somma di due componenti

$$y(t) = u(t) + v(t)$$

segnale utile
PE

Rumore EEG
+ errori di misura
+ artefatti

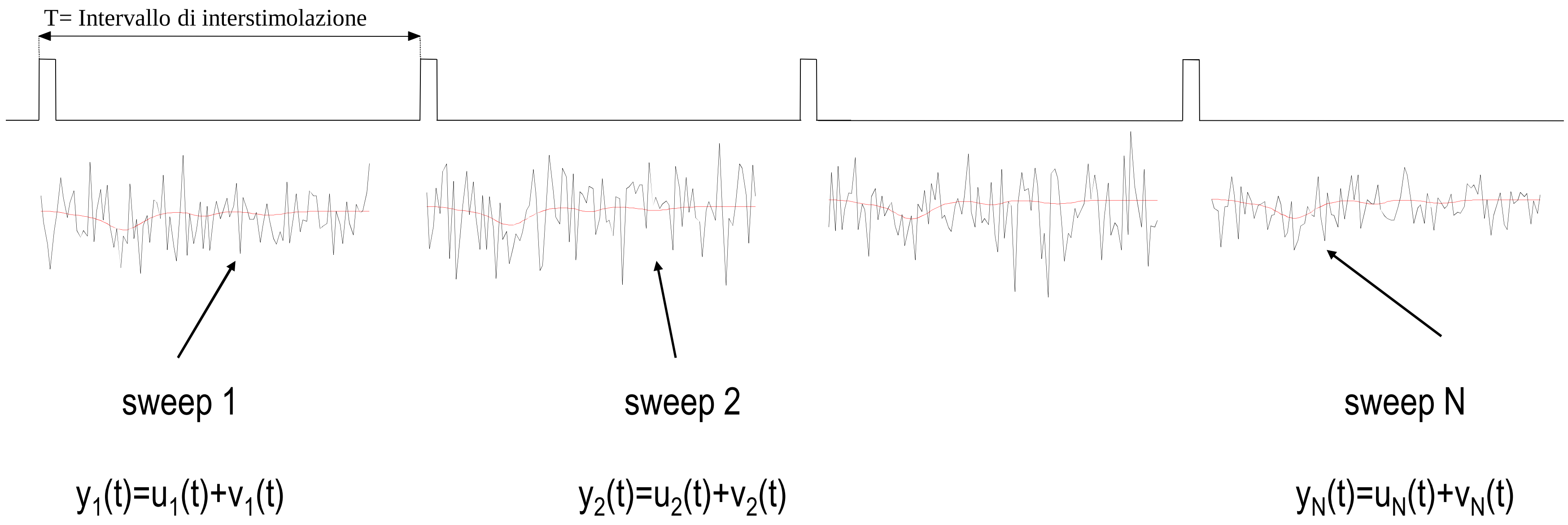
L'EEG di fondo ha ampiezze di qualche decina di mV
Il PE, a seconda del tipo e della distanza del sito nervoso che lo genera dall'elettrodo di misura, ha ampiezze massime di ordine variabile tra le decine di μV e il mV
(Per comodità, trattiamo il problema nel continuo)


PE
microvolt
0
-100
-200
-300
-400
-500
-600
-700
-800
-900
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
tempo
segnale misurabile
PE vs PE+EEG
microvolt
3000
2000
1000
0
-1000
-2000
-3000
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
tempo
potenziale evocato

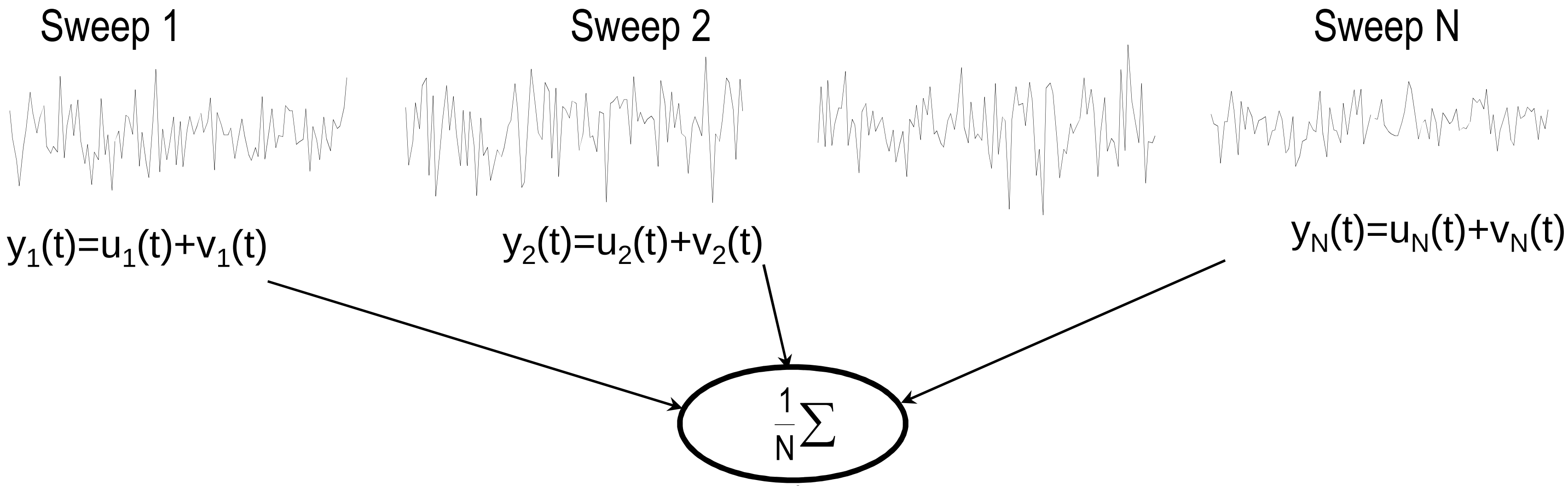
Soluzione

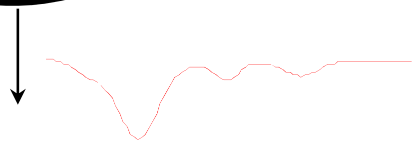
Al soggetto vengono proposti N stimoli identici, generalmente equispaziati nel tempo.

Dopo ogni stimolo viene misurata una sweep (o *epoca*) di segnale, che contiene sia potenziale evocato che rumore EEG (attività spontanea)



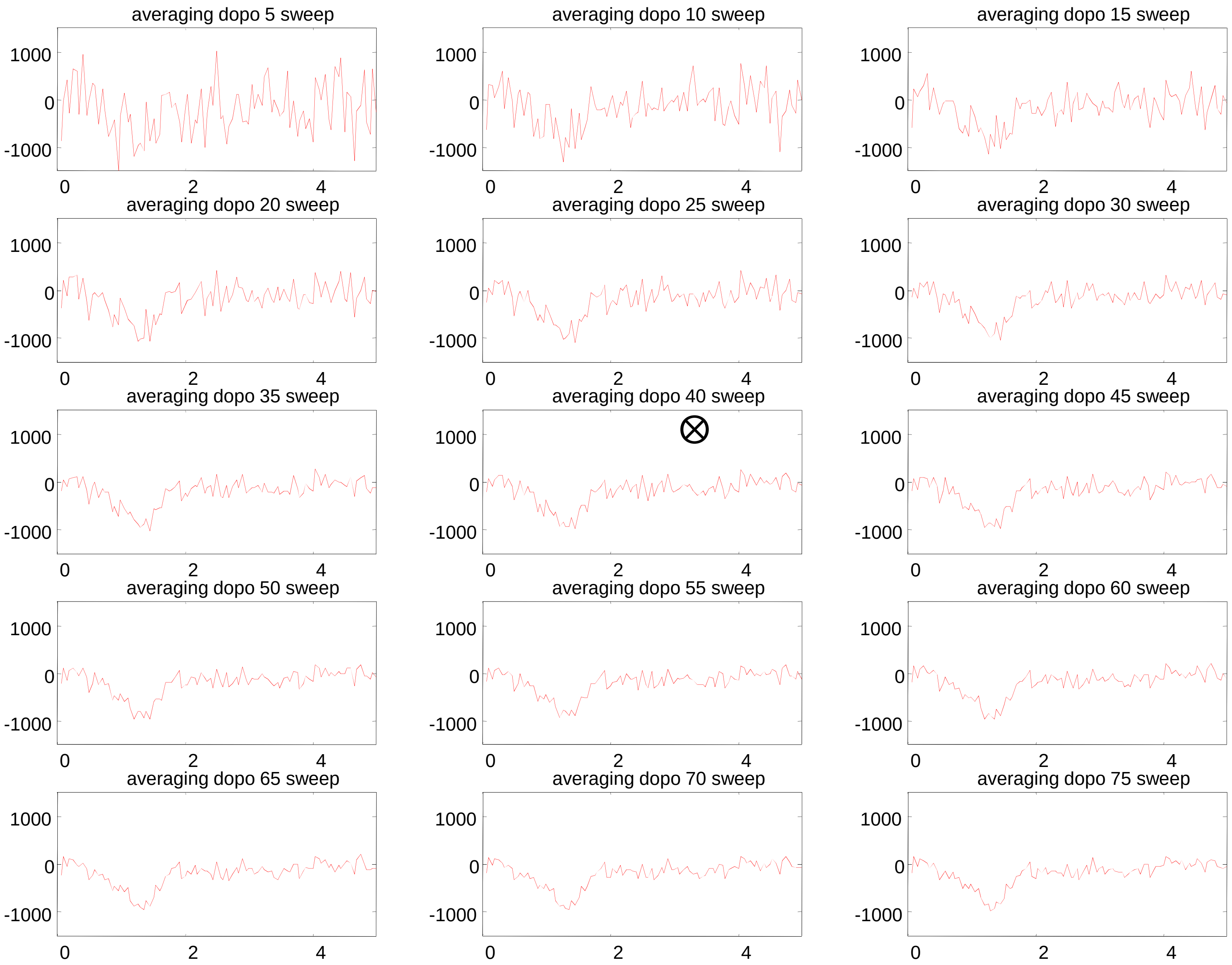
Averaging convenzionale



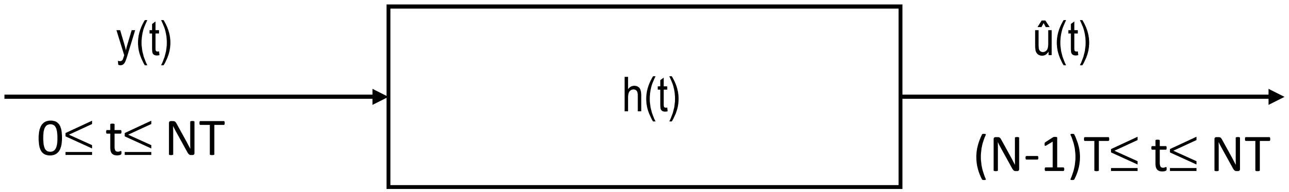


La media coerente $\hat{u}(t)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i(t)$ fornisce una stima del potenziale evocato

Effetto del numero di repliche



IL FILTRO EQUIVALENTE



$$\hat{u}(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} y(t - iT)$$

$$\hat{u}(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} y(t) \otimes \delta(t - iT) = y(t) \otimes \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} \delta(t - iT)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{u}(t) &= y(t) \otimes h(t) \\ h(t) &= \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} \delta(t - iT) \end{aligned}}$$

Filtro COMB (a pettine)

$$H(f) = \frac{sen(N\pi fT)}{N sen(\pi fT)}$$

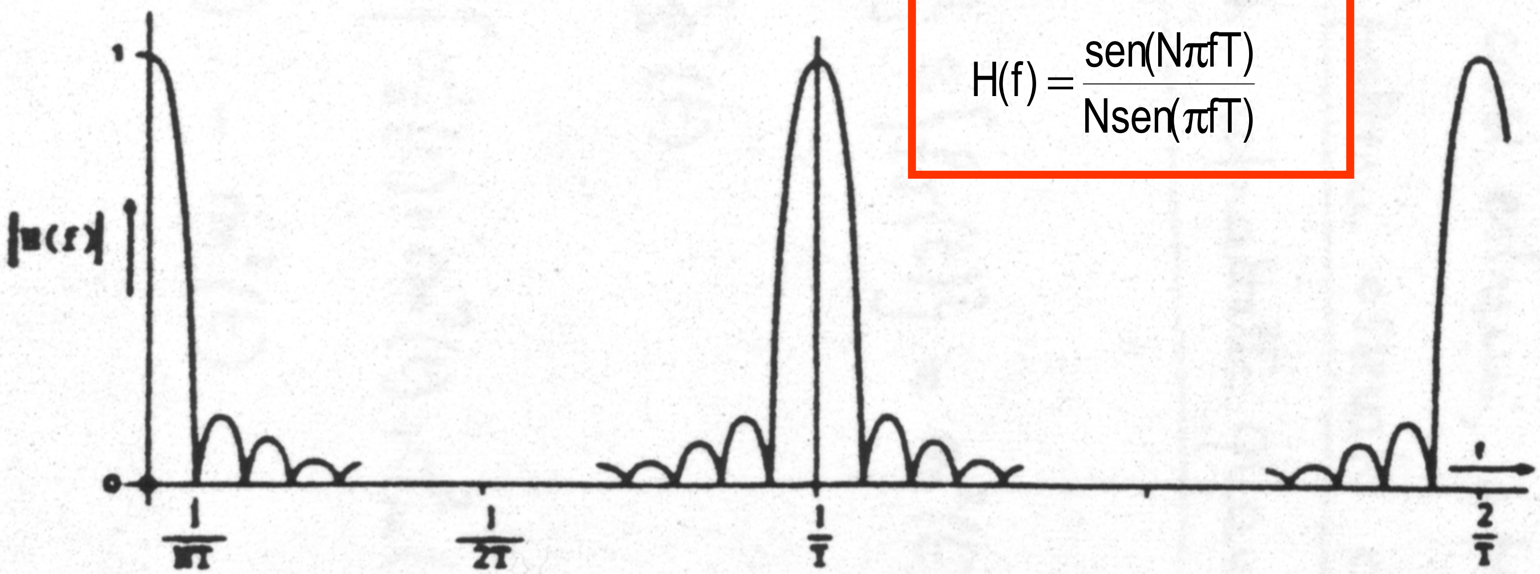


Figure 4 The modulus of the transfer function of the equivalent filter

Osservazioni

- il filtro ha N zeri tra 0 e 1/T
- In y(t) la componente utile è periodica di periodo T, quindi rappresentabile nel dominio della freq con componenti a 1/T=armonica fondamentale e ai suoi multipli k/T, k=0,1,2,….
- Tali frequenze passano inalterate, in quanto H(k/T)=1
- Le frequenze diverse dai multipli della fondamentale vengono attenuate, tanto più quanto più è elevato N
- Bisogna evitare che 1/T e i suoi multipli siano vicini alla frequenza di alimentazione di 50Hz e ai suoi multipli

Proprietà statistiche dello stimatore

Ipotesi 1: la risposta evocata non varia : $u_i(t) \equiv u(t)\ \forall i$

$$\hat{u}(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i(t) + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i(t) = u(t) + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i(t)$$

Ipotesi 2: EEG di fondo è un processo a media nulla

$$\boxed{E[\hat{u}(t)] = u(t) + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E[v_i(t)] = u(t)}$$

Lo stimatore è non polarizzato

Ipotesi 3: EEG di fondo e' un processo *stazionario, con varianza pari a σ_v^2 indipendente da sweep a sweep* (v_i indip. da v_j), cioè $v_1(t)$, $v_2(t)$, ..., $v_N(t)$ sono N realizzazioni indipendenti di uno stesso PA

$$\mathrm{var}[\hat{u}(t)] = E[(\hat{u}(t) - u(t))^2] = E\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i(t)\right)^2\right] =$$

$$\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} E[v_i(t)^2] + \frac{1}{N^2}\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N}\sum_{j=1}^{N} E[v_i(t) v_j(t)] = \frac{1}{N^2}\cdot N \cdot \sigma^2{}_v = \frac{1}{N}\sigma^2{}_v$$

Lo stimatore è consistente perché la sua varianza va a zero per N tendente all'infinito

A cosa serve valutare la varianza dello stimatore?

1. A dimensionare il numero N di repliche, necessarie per ridurre la varianza del rumore a livelli desiderati.

Esempio

Il potenziale evocato varia tra -20 e 20 μV

La varianza dell'EEG è pari a 400 μV^2

almeno 89%dei valori dell'EEG sono compresi tra -60 e 60

Dimensionare il numero N di repliche affinchè all'uscita del sistema di averaging la SD del rumore sia ridotta a non più del 10% del valore massimo del segnale

Dovrà essere $$\mathrm{var}[\hat{u}(t)] = \frac{\sigma_v^2}{N} = \frac{400}{N} \approx 4$$ $\Rightarrow$

N=100

durata indicativa

dell'esperimento: 100 sec

Esempio

Se invece il potenziale evocato varia tra -10 e 10 μV

$$\mathrm{var}[\hat{u}(t)] = \frac{\sigma_v^2}{N} = \frac{400}{N} \approx 1 \Rightarrow$$

N=400

durata indicativa
dell'esperimento: circa 7min

se varia tra -1 e 1μV

$$\mathrm{var}[\hat{u}(t)] = \frac{\sigma_v^2}{N} = \frac{400}{N} \approx 0.01 \Rightarrow$$

N=40000

durata indicativa
dell'esperimento: circa 11h

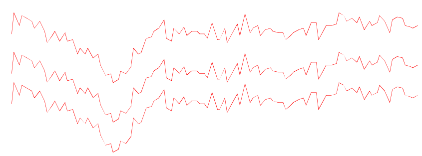
A cosa serve valutare la varianza dello stimatore?

2. A calcolare gli intervalli di confidenza della stima, tramite la disuguaglianza di Chebychev, ad es.

$$k=2 \quad \mathrm{Prob}\left[\hat{u}(t)-2\frac{\sigma_v}{\sqrt{N}} \le u(t) \le \hat{u}(t)+2\frac{\sigma_v}{\sqrt{N}}\right] \ge 75\%$$

$$k=3 \quad \mathrm{Prob}\left[\hat{u}(t)-3\frac{\sigma_v}{\sqrt{N}} \le u(t) \le \hat{u}(t)+3\frac{\sigma_v}{\sqrt{N}}\right] \ge 89\%$$

Ad es. per k=3, si può dire con **almeno** 89% di probabilità che il potenziale evocato cade nella fascia compresa tra il valore stimato e +/-3 volte la deviazione standard della stima, che è pari alla deviazione standard del rumore EEG diviso per la radice del numero di repliche.



Limiti dell'Averaging

Le buone proprietà dello stimatore di averaging valgono se sono soddisfatte le ipotesi 1-2-3. L'ipotesi più critica è la prima, che è soddisfatta solo in prima approssimazione in quanto in realtà il potenziale evocato varia in relazione alle variazioni del sistema sensoriale in esame, per meccanismi di adattamento, abitudine, calo dell' attenzione, affaticamento. Questi problemi sono particolarmente evidenti in esperimenti con N elevato. D'altra parte N elevato garantisce migliori proprietà della stima.

Rimuoviamo allora l'ipotesi 1, e rivalutiamo l'operazione di averaging

Ipotesi 1bis: ogni risposta evocato $u_i(t)$ è un P.A. (non stazionario!) u(t), indipendente dal rumore.

$$\hat{u}(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i(t) + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i(t) = u(t) + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i(t)$$

Ipotesi 2bis: EEG è a media nulla, u(t) ha media pari a m(t)

$$\boxed{E[\hat{u}(t)] = E[u(t)] + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E[v_i(t)] = m(t)}$$

Lo stimatore converge in media verso il valor medio del processo

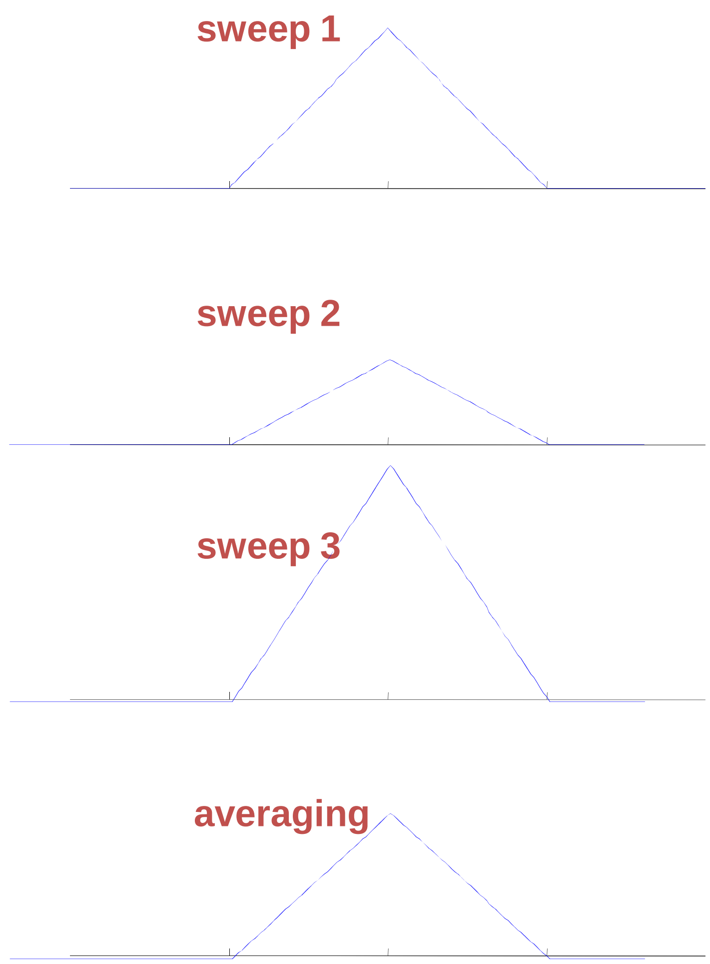
Cosa vuol dire stimare la media del processo?

Consideriamo due casi limite:

1°caso limite: le risposte evocate hanno la tutte la stessa forma, ma variano di un fattore di scala

$u(t)=Au'(t)$ con A v.a. e $u'(t)$ deterministico

$m(t)=E\,[u(t)]=E[A]u'(t)$



La media del processo ha la stessa forma di tutte le realizzazioni, quindi ad es. i tempi di occorrenza dei picchi e la loro durata vengono correttamente stimati

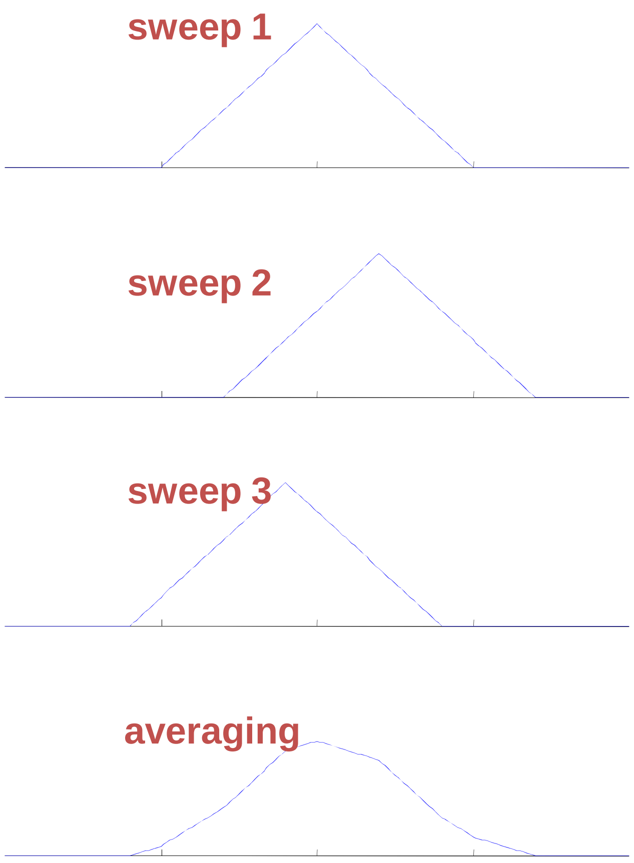
2° caso limite: le risposte evocate hanno la tutte la stessa forma, ma differiscono nella latenza

$u(t)=u°(t-\tau)$ con τ v.a. con ddp pari a $f(\tau)$

Teorema dell'aspettazione

$$m(t) = E[u°(t-\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) u°(t-\tau) d\tau$$

La media del processo ha una forma diversa dalla forma di tutti i potenziali evocati, perché è pari al prodotto di convoluzione tra la forma del singolo potenziale evocato e la ddp della latenza



Riassumendo

Se le risposte evocate sono tutte uguali, lo stimatore basato sulla media coerente tende in media verso questa comune risposta, con una varianza che scende a zero al crescere del numero di risposte. Questo vuol dire che aumentando il numero delle risposte è possibile stimare correttamente la risposta evocata

Se le risposte evocate sono diverse, lo stimatore basato sulla media coerente tende in media verso il valor medio delle risposte

Variazioni di scala tra le risposte sono meno critiche, in quanto la media recupera la forma comune a tutte le risposte

Variazioni di latenza sono più critiche, perché la media non coincide con la forma di nessuna risposta,