Zusammenfassung ETiT II SS12

Maximilian Reuter

9. September 2012

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Elektrostatisches Feld

1.1 Konstanten

$c_0 = 299792458 \frac{m}{s}$
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$
$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ (durch $\epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot c_0^2 = 1$)
$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7} \cdot c_0^2$
ϵ_r : temperaturunabhÃngig, oberhalb der ferroelektrischen Curie-Temperatur starkes absinken.

1.2 Ladungsformen

Raumladungsdichte: $\rho = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV}$
Ladung durch Ortsfunktion $\rho(x, y, z)$ berechnen: $Q = \int\limits_V \rho \; dV = \iiint\limits_V \rho(x, y, z) \; dx \; dy \; dz$
FlÃchenladungsdichte: $\sigma = \lim\limits_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A}$
Bei einem Leiter mit $L\tilde{A}nge >> Durchmesser$ → Linienladung.
Linienladungsdichte: $\lambda = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{dQ}{dl}$

1.3 Das Coulombsche Gesetz / Gravitationsgesetz

Kraftwirkung zwischen zwei Ladungen Q_1 und Q_2: $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \cdot d\vec{r_0}$
Kraftwirkung zwischen zwei Massen m_1 und m_2: $F_m = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$

1.4 Elektrisches Feld

$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}$ mit $[E] = \frac{V}{m}$
$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} = \frac{\Delta\Psi}{\Delta A} = \frac{Q}{4\pi r^2} \cdot \vec{r}$
E-Feld um Punktladung: $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \vec{r}$ (Abnahme $\tilde{}\frac{1}{r^2}$)
Arbeit um Ladung im Feld zu verschieben: $\Delta W_{mech} = F \cdot \Delta s = q \cdot E \cdot \Delta s$
Potentielle Energie der Ladung nimmt um gleichen Betrag ab $\rightarrow \Delta U = E \cdot \Delta s$
Verschiebung in beliebige Richtung:
$\Delta W_{mech} = F \cdot \Delta s \cdot cos\alpha = \left|\vec{F}\right| \cdot |\Delta\vec{s}| \cdot cos(\vec{F}, \Delta\vec{s})$
$W_{mech} = q \int\limits_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$ („Linienintegral")
Bei geschlossenem Weg: $\oint\limits_L \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ („Wirbelfreiheit")
Das Linienintegral der E-FeldstÃrke ist weg-unabhÃngig. Es kommt nur auf den Anfangs- und Endpunkt an!
$U_{AB} = \int\limits_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$
Potential in Bezug auf Punkt 0: $\varphi_v = U_{v0} = \int\limits_v^0 \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int\limits_0^v \vec{E} \cdot d\vec{s}$
$E_x = -\frac{d\varphi}{dx},\ E_y = -\frac{d\varphi}{dy},\ E_z = -\frac{d\varphi}{dz} \rightarrow \vec{E} = -grad\varphi$

1.5 Elektrischer Fluss

Elektrischer Fluss: $\Delta\Psi = D \cdot A (= \left|\vec{D}\right| \left|\vec{A}\right| \cdot cos(\vec{D}), \Delta\vec{A})$ mit $\Delta\Psi = \Delta Q$
GauÃscher Satz der Elektrostatik: $Q = \oint\limits_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$
$\Psi = \int\limits_A \vec{D} \cdot dA$ bei beliebiger, jedoch nicht geschlossener FlÃche

1.6 Potentialfunktionen

1.6.1 Punktladung

$U_{PB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon}(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_B}) = \varphi(P) - \varphi(B)$
Ohne Festlegung eines Bezugspunkts: $\varphi(P) = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\frac{1}{r} + const$ (bei weit entferntem oder geerdetem Bezugspunkt: const = 0)

1.6.2 Dipol

b: Abstand zwischen den Ladungsschwerpunkten
$\varphi(P) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{r_- - r_+}{r_- r_+}$
NÃherung fÃr sehr kleines b: $\varphi(P) = \frac{p \cdot cos\vartheta}{4\pi\epsilon r^2}$ mit $p = Q \cdot b$ (elektrisches Dipolmoment)
Punktladung: Potentialabnahme mit $\frac{1}{r}$
Dipol: Potentialabnahme mit $\frac{1}{r^2}$, da sich die beiden Wirkungen zunehmend aufheben.

1.6.3 Linienladung

$dQ = \lambda \cdot ds \rightarrow d\varphi(P) = \frac{\lambda ds}{4\pi\epsilon r}$
$\varphi(P) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \int\limits_{-l}^{+l} \frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z-s)^2}} ds = [\frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \cdot Arsh\frac{s-z}{\rho}]_{-l}^{+l}$ mit $Arshx = ln(x + \sqrt{x^2+1})$

Besser (fÃr Zylindersymmetrische Anordnungen):
$Q = \lambda l = \int\limits_{Mantel} \vec{D} \cdot d\vec{A} = D(\rho) 2\pi\rho l$
$E(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon\rho}$
$U_{PB} = \int\limits_{\rho_P}^{\rho_B} E(\rho) d\rho = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon}[ln(\rho)]_{\rho_P}^{\rho_B} \rightarrow \varphi(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} ln\frac{\rho_B}{\rho}$

1.7 Influenz

$\sigma = \frac{dQ}{dA} = \frac{d\Psi}{dA} = D$

1.7.1 FeldmÃhle

$\sigma = D = \epsilon_0 \cdot E$
Ladung auf FlÃche A: $Q = \int\limits_{(A)} \sigma dA = \int\limits_{(A)} \epsilon_0 E dA = \epsilon_0 EA$

1.8 KapazitÃt

$C = \frac{Q}{U}$
$U = Ed$

1.8.1 Kugelkondensator

$C = 4\pi\epsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$
$U_{12} = \int\limits_{r_1}^{r_2} Edr = \frac{Q}{4\pi\epsilon}(\frac{1}{r_1} \frac{1}{r_2})$
$E_{max} = \frac{U}{r_1} \frac{r_2}{r_2 - r_1}$

Minimale FeldstÃrke: $\frac{dE_{max}}{dr_1} = 0 \rightarrow r_{1,opt} = \frac{r_2}{2}$
Sonderfall, KapazitÃt einer Kugel frei im Raum: $C = 4\pi\epsilon r_1$
$E_{max} = \frac{U}{r}$

1.8.2 Koaxialer Zylinder

$Q = \lambda z = \oint\limits_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = D(\rho) \cdot A(\rho) = D(\rho) \cdot 2\pi\rho z$
$E(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon\rho}$
LÃngen-bezogene KapazitÃt: $C' = \frac{C}{z} = \frac{\lambda}{U} = \frac{2\pi\epsilon}{ln\frac{\rho_2}{\rho_1}}$
Minimum der Maximalen FeldstÃrke: $\frac{dE_{max}}{d\frac{\rho_2}{\rho_1}} = 0 \rightarrow \rho_{1,opt} = \frac{\rho_2}{e}$

Geschichtete Dielektrika

Geschichtete Dielektrika ($\epsilon_1, \rho_1 ... \rho_2$ und $\epsilon_2, \rho_2 ... \rho_3$):
$U_{ges} = U_{\rho_1\rho_2} + U_{\rho_2\rho_3} = \frac{\lambda}{2\pi}(\frac{1}{\epsilon_1} ln\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{1}{\epsilon_2} ln\frac{\rho_3}{\rho_2})$
$C' = \frac{\lambda}{U_{ges}} = \frac{2\pi}{\frac{1}{\epsilon_1} ln\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{1}{\epsilon_2} ln\frac{\rho_3}{\rho_2}}$
FeldstÃrkeverhÃltnisse: $\frac{E_2(\rho_2)}{E_1(\rho_2)} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$
Das Maximum der FeldstÃrke tritt jeweils am Innenradius des Dielektrikums auf!
$\frac{E_{max1}}{E_{max2}} = \frac{\epsilon_2\rho_2}{\epsilon_1\rho_1}$

1.8.3 Superposition von Potentialen

Zwei parallele Linienladungen, ungleichen Vorzeichens, mit Radius ρ_0, Punkt P mit φ_+, φ_-:
$C' = \frac{\lambda}{\varphi_+ - \varphi_-} = \frac{\pi\epsilon}{ln\frac{f}{\rho_0}}$
$\varphi(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} ln\frac{\rho_-}{\rho_+}$
$E_{max} = \frac{U}{2\rho_0 ln\frac{d}{\rho_0}}$
(Gleiche Vorzeichen: $\varphi(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \cdot ln\frac{\rho_B}{\rho_1} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \cdot ln\frac{\rho_B}{\rho_2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} ln\frac{\rho_B^2}{\rho_1\rho_2}$)

1.9 Feldbilder

d : Abstand zwischen zwei Ãquipotentiallinien.
$\Delta U = d \cdot E$
b : Abstand zwischen zwei Feldlinien.
ΔQ : Ladung auf den Elektroden.

$\Delta Q = D \cdot \Delta A = \epsilon E \cdot \Delta A = \epsilon Ebz$
ΔC : TeilkapazitÃt pro KÃstchen mit SeitenlÃngen d und b.
$\Delta C = \frac{\Delta Q}{\Delta U} = \frac{\epsilon Ebz}{dE} = \epsilon z \frac{b}{d} = const.$
$\Delta C' = \frac{\Delta C}{z} = \epsilon \frac{b}{d} = const.$
Der gesamte Feldraum kann als Reihen- und Parallelschaltung gleicher (LÃngen-bezogener) TeilkapazitÃten $\Delta C'$ verstanden werden, fÃr die gilt:
$\Delta C' = \frac{\epsilon b}{d}$
FÃr $\frac{b}{d} = 1$ (Quadrate) gilt:
$\Delta C' = \epsilon \rightarrow C' = \epsilon \frac{n}{m-1}$
mit n: Anzahl d. Feldlinien und m: Zahl d. Ãquipotentiallinien (inc. OberflÃche). Nur gÃltig fÃr 2D Felder.

1.10 Energie im elektrischen Feld

Allgemein:
$W_e = \int\limits_0^\infty u(t)i(t)dt = \int\limits_0^{Q_e} udQ$
Plattenkondensator mit Abstand d:
$W_e = \int\limits_0^{Q_e} udQ = \int\limits_0^{D_e} EdAdD = Ad \int\limits_0^{D_e} EdD$ mit $Ad = V$ ist das vom Feld durchsetzte Volumen:
$W_e = V \int\limits_0^{D_e} EdD = \frac{1}{2}CU^2$
$w_e = \frac{W_e}{V} = \int\limits_0^{D_e} EdD = \frac{1}{2} \cdot \frac{D_e^2}{\epsilon} = \frac{1}{2}DE$
$F_x = -\frac{dW_e^{(Q)}}{dx} = \frac{Q^2}{2\epsilon A}$ fÃr F_x: aufzuwendende Kraft bei VergrÃ¶Ãerung d. KapazitÃt.

1.10.1 KrÃfte im elektrostatischen Feld

$Q = \oint\limits_A \vec{D} \cdot dA = D2A = \epsilon E2A$
$F = \frac{Q^2}{2\epsilon A}$