Curso: Sistemas de Informação

Matemática para Computação I

Prof. Carlos Eduardo Costa Vieira

MATRIZES

RESUMO DA APRESENTAÇÃO

- Matrizes;
- Tipos de Matrizes;
- Operações com Matrizes;
- Bibliografia.

MATRIZ: DEFINIÇÃO

- Chama-se matriz de ordem m por n a um quadro de mxn elementos (números, funções, etc) dispostos em m linhas e n colunas;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$A_{mxn} = [a_{ij}]_{mxn}$ **:** Matriz de ordem **m por n** de elementos a_{ij}

EXEMPLO DE NOTAÇÃO MATRICIAL

- Suponha que um fabricante tenha quatro fábricas, cada uma delas produzindo três produtos conforme Tabela. Se definirmos a_{ij} como o número de unidades do produto i produzido pela fábrica j em uma semana, então a matriz 4x3 mostra a produção do fabricante por semana.

	Produto 1	Produto 2	Produto 3
Fábrica 1	560	340	280
Fábrica 2	360	450	270
Fábrica 3	380	420	210
Fábrica 4	0	80	380

$$P = \begin{bmatrix} 560 & 340 & 280 \\ 360 & 450 & 270 \\ 380 & 420 & 210 \\ 0 & 80 & 380 \end{bmatrix}_{4 \times 3}$$

TIPOS DE MATRIZES

- Matriz Retangular: Se o número de linhas é diferente do número de colunas;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 5}$$

- Matriz-Coluna: Matriz de ordem n por 1;

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

- Matriz-Linha: Matriz de ordem 1 por n;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{1\times 5}$$

TIPOS DE MATRIZES

- Matriz Quadrada: Se o número de linhas é igual ao número de colunas;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

- Em uma matriz quadrada $A=[a_{ij}]$ de ordem n, os elementos de a_{ij} em que $i=j$ constituem a diagonal principal;
- Em uma matriz quadrada $A=[a_{ij}]$ de ordem n, os elementos de a_{ij} em que $i+j=n+1$ constituem a diagonal secundária;

TIPOS DE MATRIZES

- Matriz Diagonal: matriz quadrada $A=[a_{ij}]$ que tem os elementos $a_{ij}=0$ quando $i \neq j$;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

- Matriz Escalar: matriz diagonal que tem os elementos a_{ij} iguais entre si para $i=j$;

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

TIPOS DE MATRIZES

- Matriz Unidade ou Identidade: matriz escalar que tem os elementos $a_{ij}=1$ para $i=j$. Representa-se por I_n ou I. $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$
- Matriz Zero: matriz cujos elementos a_{ij} são todos nulos. $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

TIPOS DE MATRIZES

- Matriz Triangular Superior: matriz quadrada $A=[a_{ij}]$ que tem os elementos $a_{ij}=0$ quando $i>j$;

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 & 9 \\ 0 & 3 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

- Matriz Triangular Inferior: matriz quadrada $A=[a_{ij}]$ que tem os elementos $a_{ij}=0$ quando $i<j$;

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

IGUALDADE DE MATRIZES

- Duas matrizes $A=[a_{ij}]$ e $B=[b_{ij}]$ de ordem (m,n) são iguais se, e somente se, $a_{ij}=b_{ij}$, isto é, duas matrizes são iguais se os elementos correspondentes forem iguais.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE MATRIZES

- A soma (resp. subtração) de duas matrizes $A=[a_{ij}]$ e $B=[b_{ij}]$ de ordem (m,n) é uma matriz $C=[c_{ij}]$ do mesmo tipo tal que $c_{ij}= a_{ij} + b_{ij}$ (resp. $c_{ij}= a_{ij} - b_{ij}$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 0 & 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 5 & 11 & 8 \end{bmatrix}$$

ADIÇÃO DE MATRIZES

- Propriedades
  - Comutativa

$$\forall\, A, B \in M_{m\times n} \quad A+B=B+A$$

  - Associativa

$$\forall\, A, B, C \in M_{m\times n} \quad (A+B)+C=A+(B+C)$$

  - Tem elemento neutro

$$\forall\, A \in M_{m\times n} \quad \exists\, O \in M_{m\times n} : A+O=A$$

  - Todos os elementos têm oposto

$$\forall\, A \in M_{m\times n} \quad \exists\, B \in M_{m\times n} : A+B=O$$

EXEMPLO DE ADIÇÃO DE MATRIZES

- Um fabricante de um produto produz três modelos A, B e C. Cada modelo é produzido parcialmente na Fábrica F_1 na Argentina e finalizado na Fábrica F_2, no Brasil. O custo total de cada produto é composto pelo custo de produção e pelo custo de transporte. O custo de cada fábrica, em reais pode ser descrito pelas matrizes F_1 e F_2 (3x2):

$$F_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Custo de Prod.} & \text{Custo de Transp.} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 32 & 40 \\ 50 & 80 \\ 70 & 20 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Mod. A} \\ \text{Mod. B} \\ \text{Mod. C} \end{array} \qquad F_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Custo de Prod.} & \text{Custo de Transp.} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 40 & 60 \\ 50 & 50 \\ 130 & 20 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Mod. A} \\ \text{Mod. B} \\ \text{Mod. C} \end{array}$$

- A matriz $F_1 + F_2$ fornece o total dos custos de produção e transporte para cada produto. Assim, o total dos custos de produção e transporte de um produto do modelo C é de R$ 200,00 e R$ 40,00 respectivamente.

PRODUTO DE UMA MATRIZ POR UM ESCALAR

- Se λ é um escalar, o produto de uma matriz $A=[a_{ij}]$ por esse escalar é uma matriz $B=[b_{ij}]$ tal que: $b_{ij}=\lambda a_{ij}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad 3 \times A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 15 & 3 & 0 \\ 6 & 12 & 9 \end{bmatrix}$$

PRODUTO DE UMA MATRIZ POR UM ESCALAR

- Propriedades
  - $(\lambda\ \mu)A = \lambda\,(\mu\ A)$
  - $(\lambda + \mu)\,A = \lambda\,A + \mu\,A$
  - $\lambda\,(A + B) = \lambda\,A + \lambda\,B$
  - $1\,A = A$

EXEMPLO DE MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

- Seja P=[18,95 14,75 8,60] uma matriz linha 1x3 ou vetor de dimensão 3 que representa os preços atuais de três itens de uma loja. A loja anuncia uma promoção em que o preço de cada item vai ser reduzido em 20%.
- A matriz linha 0,20xP=[(0,20)x18,95 (0,20)x 14,75 (0,20)x8,60]=[3,79 2,95 1,72] fornece as reduções de preço para os três itens;
- A matriz linha P-0,20xP=[18,95 14,75 8,60]-[3,79 2,95 1,72]=[15,16 11,80 6,88] fornece os novos preços para os três itens.

PRODUTO DE UMA MATRIZ POR OUTRA

- Seja A uma matriz do tipo mxn e B uma matriz do tipo nxp. O produto de A por B é uma matriz C do tipo mxp cujos elementos são dados por:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

- Escreve-se C=AB.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 15 \\ 15 & 29 & 27 \end{bmatrix}$$

PRODUTO DE UMA MATRIZ POR OUTRA

- A multiplicação de duas matrizes não é comutativa, isto é, AB e BA são diferentes;
- Porém, existem matrizes A e B, tais que AB=BA.
- Exemplo 1:
  - AI = A $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$
  - IA = A $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$
  - Portanto: AI = IA = A, isto é, dadas duas matrizes A e I de ordem n, a multiplicação dessas matrizes é comutativa e igual à matriz A.

PRODUTO DE UMA MATRIZ POR OUTRA

- Exemplo 2:
  - AB = I $$\begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -7 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
  - BA = I $$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -7 & 11 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
  - Portanto: AB=BA=I. Diz-se que a matriz B é a inversa de A e pode ser representada por A^{-1} (ou A é a inversa de B e pode ser representada por B^{-1}).
  - Assim: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.
  - Se uma matriz A admite inversa, ela é única.

PRODUTO DE UMA MATRIZ POR OUTRA

- Propriedades :
  - A_{mxn}, B_{nxp} e C_{pxr} $\longrightarrow$ $(AB)C = A(B\ C)$
  - A_{mxn}, B_{mxn} e C_{nxp} $\longrightarrow$ $(A+B)\ C = A\ C + B\ C$
  - A_{mxn}, B_{nxp} e C_{nxp} $\longrightarrow$ $A\,(B + C) = A\ B + A\ C$
  - A_{mxn}, B_{nxp} e $\alpha \in \Re$ $\longrightarrow$ $\alpha\,(AB) = (\alpha\, A)B = A(\alpha\, B)$

EXEMPLO DE MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

- Os pesticidas são aplicados às plantas a fim de eliminar os insetos daninhos. Entretanto, parte destes pesticidas é absorvida pelas plantas. Os pesticidas são absorvidos pelos animais herbívoros quando eles se alimentam de plantas que receberam pesticidas. Pode-se determinar a quantidade de pesticida absorvida por um animal herbívoro através da multiplicação de matrizes.
  - Suponha que temos três pesticidas e quatro plantas. Seja a_{ij} a quantidade de pesticida i que foi absorvida pela planta j (em miligramas);
  - Suponha que temos três animais herbívoros. Seja b_{ij} o número de plantas do tipo i que um animal herbívoro do tipo j come por mês.

EXEMPLO DE MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \text{P. 1} & \text{P. 2} & \text{P. 3} & \text{P. 4} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{Pest. 1} \\ \text{Pest. 2} \\ \text{Pest. 3} \end{array} \end{array} \quad B = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \text{Her. 1} & \text{Her. 2} & \text{Her. 3} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 20 & 12 & 8 \\ 28 & 15 & 15 \\ 30 & 12 & 10 \\ 40 & 16 & 20 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{P. 1} \\ \text{P. 2} \\ \text{P. 3} \\ \text{P. 4} \end{array} \end{array}$$

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} 364 & 165 & 161 \\ 376 & 170 & 174 \\ 448 & 199 & 187 \end{bmatrix}$$

- O elemento (i,j) em C=AxB fornece a quantidade de pesticida do tipo i que o animal j absorveu. Assim, se i=2 e j=3, o elemento (2,3) em AB é: 3x(8)+2x(15)+2x(10)+5x(20) = 174 mg do pesticidade 2 absorvidos pelo animal herbívoro 3;
- Se tivermos agora p animais carnívoros que come herbívoros, podemos repetir a análise para determinar quanto de cada pesticida foi absorvido por cada animal carnívoro.

MATRIZ TRANSPOSTA

- A matriz transposta de A, de ordem m por n é a matriz A^T de ordem n por m, que se obtém permutando as linhas e colunas de mesmo índice.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}_{3\times5} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{5\times3}$$

MATRIZ TRANSPOSTA

- Propriedades
  - $(A+B)^T = A^T + B^T$
  - $\alpha A^T = (\alpha A)^T$
  - $(A^T)^T = A$
  - $(AB)^T = B^T A^T$

MATRIZ SIMÉTRICA E ANTI-SIMÉTRICA

- Para matrizes quadradas, se $A=A^t$, então dizemos que a matriz A é simétrica.

$$A = A^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 5 & 3 & 8 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

- Para matrizes quadradas, se $A = -A^t$, dizemos que a matriz A é anti-simétrica.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & -6 \\ -4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

- O produto de uma matriz quadrada A pela sua transposta é uma matriz simétrica

POTÊNCIA DE UMA MATRIZ

- Uma matriz quadrada $A=[a_{ij}]$ pode ser multiplicada n vezes por si mesma. A matriz resultante, representada por A^n é chamada potência n da matriz A.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 16 & 17 \end{bmatrix}$$

BIBLIOGRAFIA

- KOLMAN, B.; HILL, D. R. **Introdução à Álgebra Linear com Aplicações.** Tradução da oitava edição de Alessandra Bosquilha. Rio de Janeiro, LTC, 2011.
- STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Álgebra Linear.** 2.ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.