Matemática para Computação I
Prof. Carlos Eduardo Costa Vieira

Material cedido pelo Professor Glauter Jannuzzi

π

Conteúdo

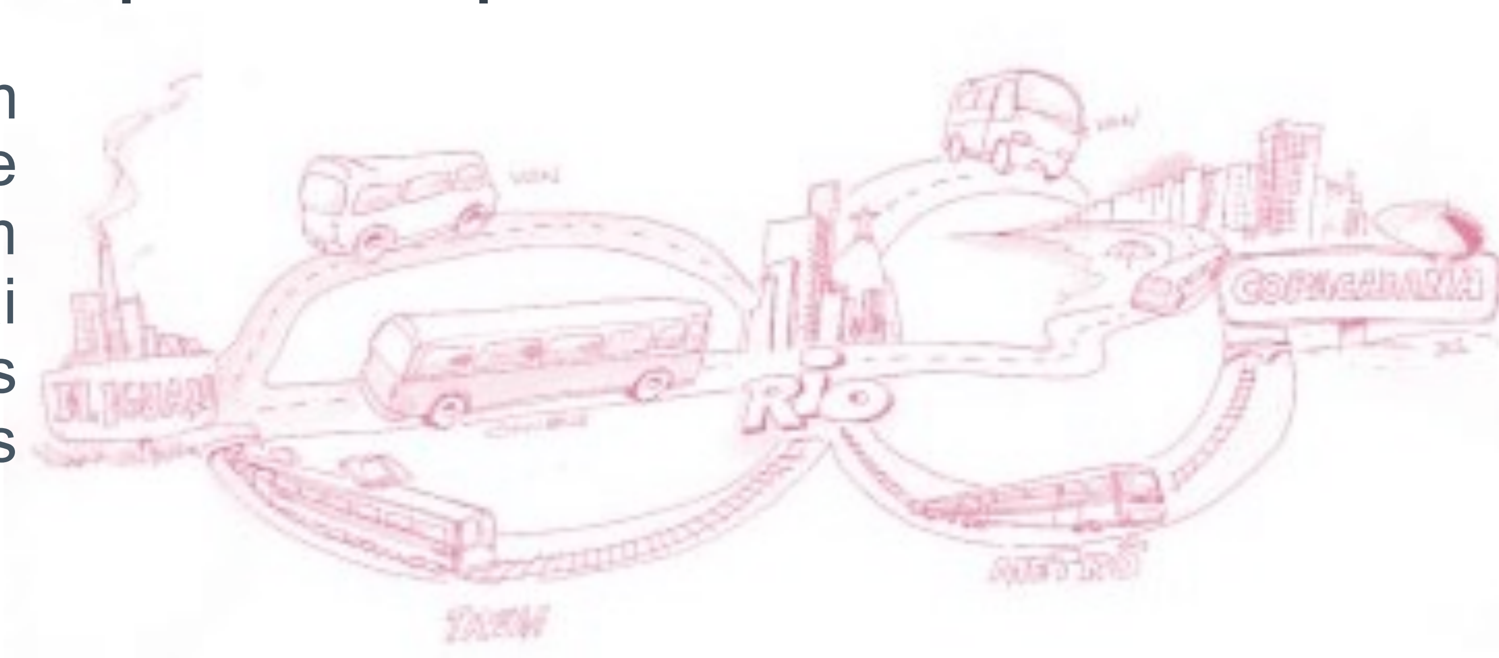
- **Princípio Fundamental da Contagem;**
- **Permutações;**
- **Arranjos;**
- **Permutação com Elementos Repetidos;**
- **Permutações Circulares;**
- **Combinação.**

Princípio Fundamental da Contagem

- Nas próximas aulas vamos trabalhar técnicas de contagem matemáticas;
- Primeiro, vamos estudar **o Princípio Multiplicativo**, também chamado **Princípio Fundamental da Contagem**;
  - Este princípio lida com situações em que uma tarefa se divide em várias etapas.
- Vamos Começar com um Exemplo …

Exemplo – Princípio Multiplicativo

› Uma pessoa mora em Nova Iguaçu e trabalha em Copacabana. Ela vai trabalhar todos os dias usando apenas transporte coletivo.



- Esta pessoa vai de Nova Iguaçu ao Centro do Rio tomando ônibus, van ou trem. Do Centro do Rio, pode ir a Copacabana de ônibus, van ou metrô. Levando em conta apenas estas possibilidades, de quantas maneiras ela poderá ir de casa ao trabalho?

Resolução do Exemplo

- Seja T_1 a tarefa de ir de Nova Iguaçu ao Centro do Rio e T_2 a tarefa de ir do Centro do Rio à Copacabana. Existem $N_1 = 3$ possibilidades para realizar T_1 (Ônibus – O; Van – V; Trem – T) e $N_2 = 3$ possibilidades para realizar T_2 (Ônibus – O; Van – V; Metrô – M);
- Mapeando, temos 9 possibilidades:
  - {(O,O), (O,V), (O,M), (V,O), (V,V), (V,M), (T,O), (T,V), (T,M)}.

Definição – Princípio Multiplicativo

Suponha que existam N_1 maneiras de se realizar uma tarefa T_1 e N_2 maneiras de se realizar uma tarefa T_2. Então há $N_1 \times N_2$ maneiras de se realizar a tarefa T_1 seguida da tarefa T_2.

Princípio Multiplicativo Generalizado

Se uma tarefa T_1 pode ser feita de N_1 maneiras, uma tarefa T_2 de N_2 maneiras, ..., uma tarefa T_k de N_k maneiras, então o número de maneiras de realizar $T_1, T_2, \ldots, T_k$, em seqüência, é $N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_k$.

Exercícios

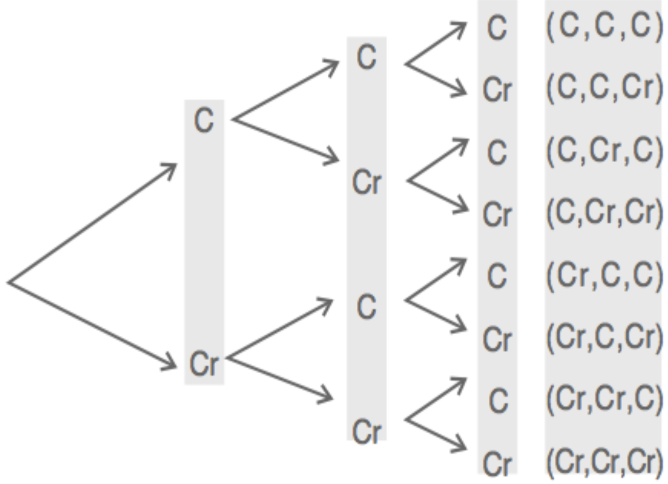
1) Um aluno se prepara para ingressar no ensino superior. Ele pode escolher entre 10 universidades. Se cada uma delas tiver 15 cursos, quantas possibilidades de cursos há para este aluno?
2) Um restaurante oferece 4 tipos de entrada, 10 pratos principais e 5 tipos de sobremesa. Se um freguês deste restaurante decide tentar uma refeição diferente a cada noite, quanto tempo levará para esgotar todas as possibilidades?
3) Em um jogo de “cara ou coroa”, uma moeda é lançada 3 vezes. Qual o número de resultados possíveis?

Resolução dos Exercícios

› 1) Solução: 10x15 = 150 cursos diferentes;

› 2) Solução: A questão é quantas combinações de pratos há no total. Se temos 4 tipos de entrada, 10 pratos principais e 5 sobremesas, o total de possibilidades é: 4x10x5 = 200. O cliente levaria 200 noites para esgotar todas as possibilidades deste restaurante.

› 3) Solução: Cada lançamento tem 2 resultados possíveis: cara ou coroa. Como foi lançado 3 vezes, há 2x2x2 = 8 resultados possíveis.



Exercícios

4) Alguns cadeados usam anéis rotativos numéricos, em vez de chave. Existe um número que deve ser selecionado nos anéis numéricos para abrir o cadeado. Vamos chamar este número de chave numérica. Suponha que um tal cadeado trabalha com números de 5 dígitos (por exemplo, 23478 é uma chave numérica possível). Quantas possibilidades de chave numérica existem?

As chaves são números de 5 dígitos. Para cada dígito, temos 10 possibilidades, que são os algarismos $0, 1, 2, 3, \ldots, 9$.

Portanto, temos

$$10.10.10.10.10 = 10^5 = 100000 \text{ possibilidades de chave.}$$

Exercícios

5) Quantos inteiros múltiplos de 5 existem entre 1000 (inclusive) e 4999?

6) As palavras de um certo código são formadas por 2 letras e 2 algarismos, de tal forma que não há letras ou algarismos iguais. Assim, a palavra LY45 é palavra deste código, enquanto que AA23 não é palavra deste código, pois repete a letra A. Quantas palavras existem neste código?

Alfabeto = { a, b, c, d, e, f, g, h, I, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z } = 26 letras

Digitos = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 } = 10 digitos

Portanto, há:

$$26 \times 25 \times 10 \times 9 = 58500$$

palavras neste código.

Resolução do Exercício 5

- Solução: Um número inteiro é múltiplo de 5 se, e somente se, seu algarismo das unidades for 0 ou 5. Então, se o número é $x_1x_2x_3x_4$, temos 4 possibilidades para x_1 (1,2,3,4), 10 possibilidades para x_2 e x_3 (algarismos de 0 a 9) e apenas 2 possibilidades para x_4 (algarismos 0 e 5). Portanto, há no total:
  - 4 x 10 x 10 x 2 = 800 múltiplos de 5 entre 1000 e 4999.

Permutações - Exemplo

Objetivos

Estudar problemas de permutação.

Definir o fatorial de um número inteiro.

- **Exemplo**: Um pai quer tirar uma fotografia de seus 3 filhos, mas não consegue colocar os 3 garotos em ordem: todos querem ficar no meio e ninguém quer ficar nos lados.
  - O pai poderia obrigá-los à força, mas como é paciente e educador moderno ele decide tirar uma foto de cada ordenação possível dos 3 meninos. Quantas fotos o paciente pai deverá tirar?

Resolução do Exemplo

- Supomos que os garotos se chamam André (A), João (J) e Pedro (P). Listando todas as 6 ordenações possíveis, temos que: AJP, APJ, JAP, JPA, PAJ e PJA;
- Dado um conjunto de objetos distintos, uma **Permutação de um Conjunto** é uma ordenação (troca) dos elementos deste conjunto;
- Pode-se utilizar o princípio multiplicativo para calcular quantas são as permutações de um conjunto.

Resolução do Exemplo

- Voltando ao exemplo, são 3 posições na foto. Assim, podemos preencher a primeira posição de 3 maneiras, pois são 3 crianças. Uma vez escolhido quem fica na 1ª posição, temos duas escolhas possíveis para a 2ª posição, pois restaram duas crianças. Resta somente uma criança, o que dá somente uma escolha para a 3ª posição;
- Usando o princípio multiplicativo, o número de ordenações possíveis é:

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

Permutações: Definição

Pelo princípio multiplicativo temos que o número total de permutações de um conjunto de n elementos é:

$$n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1\ .$$

É interessante apresentar uma notação para o produto acima.

Para qualquer inteiro positivo n, definimos $n!$, que se lê "n fatorial", como o produto

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$$

Definimos também:

$$0! = 1\ .$$

Permutações: Definição

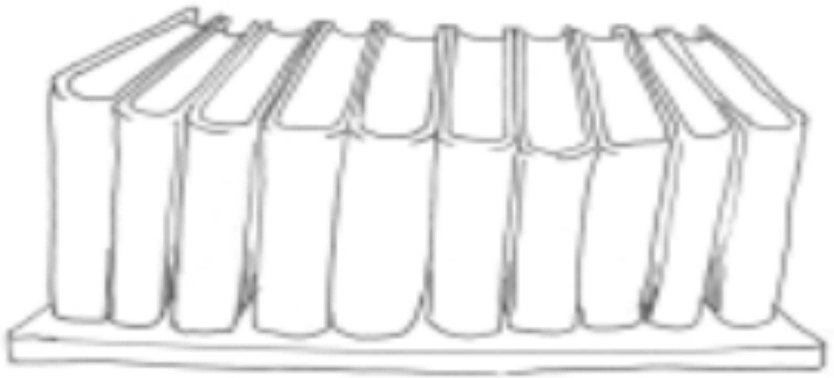
O número de permutações de um conjunto de n elementos é:

$$P(n) = n!$$

› **<u>Exemplo:</u>** Qual o número de resultados possíveis em uma corrida de carros, onde 6 deles competem e todos chegam ao final?

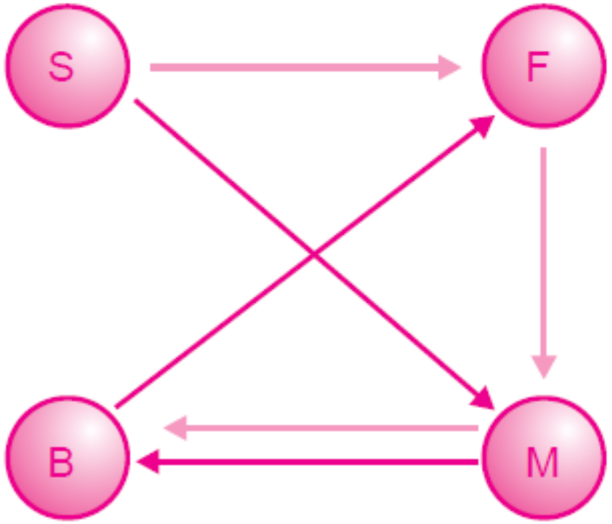
Resolução do Exemplo

- Cada resultado possível corresponde a uma permutação do conjunto de 6 carros. O número total de permutações de um conjunto de 6 elementos é: 6! = 6x5x4x3x2x1 = 720;
- Exercício 1: De quantas maneiras 10 livros distintos podem ser arrumados em uma prateleira de uma estante?
  - Solução: Cada arrumação corresponde a uma ordenação ou permutação do conjunto dos 10 livros. Assim, o número total de permutações é: 10! = 10x9x8x7x6x5x4x3x2x1 = 3.628.800



Exercício 2

Uma pessoa sai de casa com a incumbência de ir ao supermercado (S), ir à feira (F), ir ao Banco (B) e ir ao mecânico de seu carro (M). Esta pessoa pode realizar estas 4 tarefas em qualquer ordem. De quantas maneiras pode fazê-lo?



O número de ordenações das 4 tarefas é o número de permutações de 4 elementos, que é: $P(4) = 4! = 24$.

Permutações: Definição 2

> O número de caminhos que passa por n pontos, passando por cada ponto apenas uma vez e começando em qualquer um dos pontos é $n!$

- Exemplo: Em uma campanha presidencial, um candidato quer visitar todas as capitais de todos os estados do país. Ele passará por cada capital apenas uma vez e pode começar de qualquer uma, quantas rotas são possíveis para esta turnê eleitoral?
- Solução: São 26 capitais a serem visitadas. Portanto: P(26) = 26! rotas possíveis, um número com 27 dígitos.

Bibliografia

- FIGUEIREDO, Luiz Manoel. **Matemática discreta.** 3. ed. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010. v. 1.
- GERSTING, Judith L. **Fundamentos matemáticos para a ciência da computação.** 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.
- MENEZES, Paulo Blauth. **Matemática discreta para computação e informática.** 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.