Matemática para Computação I
Prof. Carlos Eduardo Costa Vieira

Material cedido pelo Professor Glauter Jannuzzi

Número de Elementos de um Conjunto

Para o infinito…
… e Além!

A noção de Contagem foi fundamental no desenvolvimento do homem.
É natural ao ser humano a atitude de agrupar objetos, animais, pessoas e contá-los.

Número de Elementos de um Conjunto

DEFINIÇÃO:

Denotaremos por $n(A)$ o número de elementos de um conjunto finito A.

O conjunto vazio não tem elementos; portanto $n(\emptyset) = 0$.

PRINCÍPIO DE INCLUSÃO-EXCLUSÃO

Se A e B são dois conjuntos finitos, então

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Número de Elementos de um Conjunto

Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 5, 6\}$. Então:

$$n(A) = 3, \quad n(B) = 3, \quad n(A \cup B) = 5 \quad \text{e} \quad n(A \cap B) = 1 \,.$$

Se A e B são dois conjuntos disjuntos, então $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, pois se $x \in A \cup B$ então $x \in A$ ou $x \in B$, mas x não pode estar em ambos A e B, já que $A \cap B = \emptyset$.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \,.$$

Exercício 1:

- Uma pesquisa foi realizada com pessoas que lêem revistas semanais. Entrevistando 200 pessoas, descobriu-se o seguinte:
  - 85 pessoas compram a revista A,
  - 75 pessoas compram a revista B,
  - 65 pessoas compram a revista C,
  - 30 pessoas compram as revistas A e B,
  - 25 pessoas compram as revistas A e C,
  - 20 pessoas compram as revistas B e C,
  - 10 pessoas compram as três revistas.
- Com base nestes dados, responda ao seguinte:

  a) Quantas pessoas compram pelo menos uma das revistas?

  b) Quantas pessoas não compram nenhuma das três revistas?

  c) Quantas pessoas compram exatamente uma das revistas?

  d) Quantas pessoas compram exatamente duas das revistas?

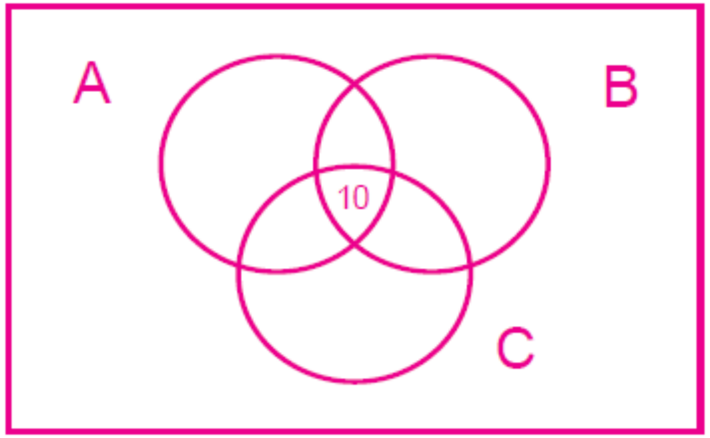
Resolução do Exercício:

Seja U o conjunto das pessoas que foram entrevistadas.
Sejam

$$A = \{x \in U \mid x \text{ compra a revista } A\}$$

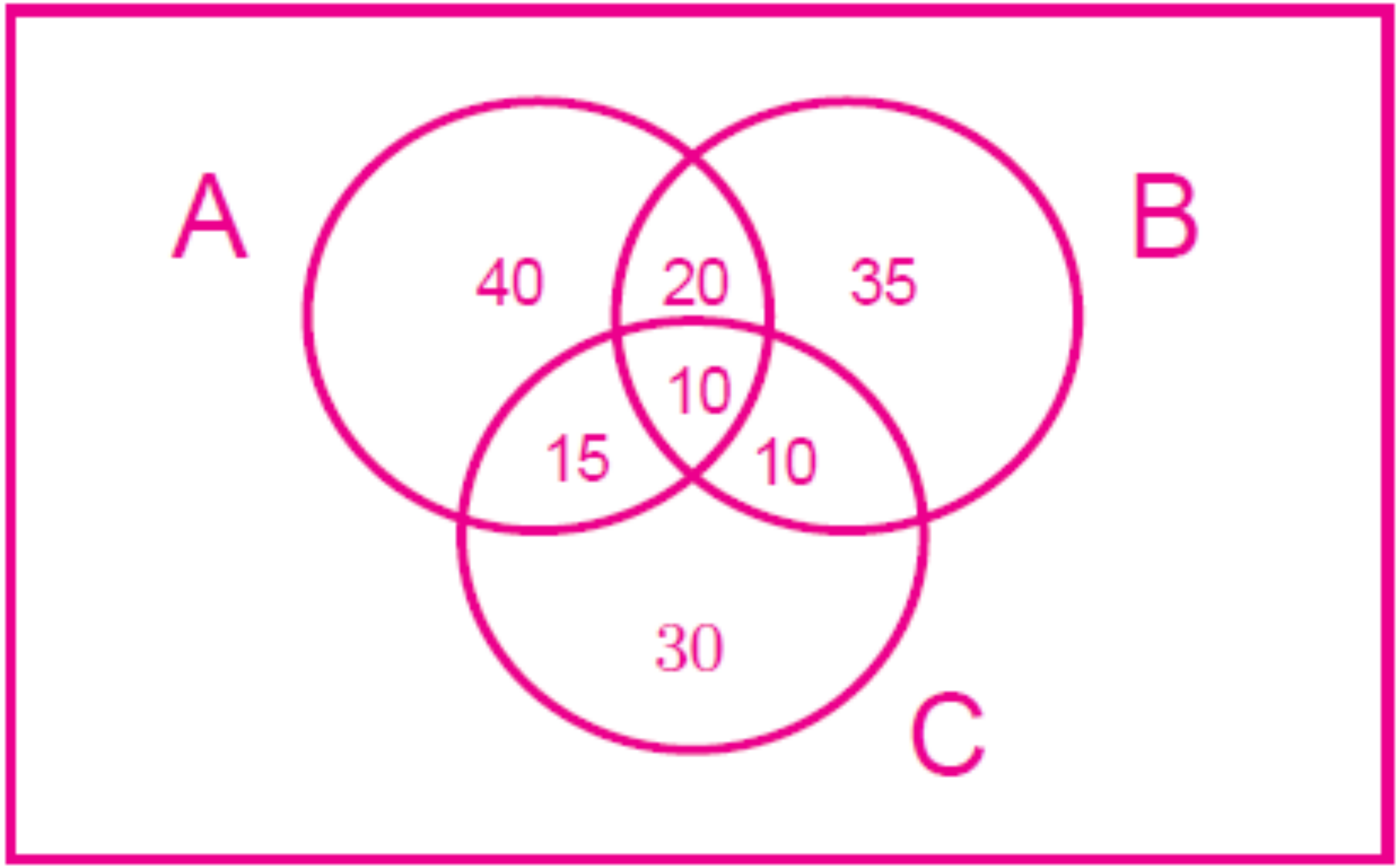
$$B = \{x \in U \mid x \text{ compra a revista } B\}$$

$$C = \{x \in U \mid x \text{ compra a revista } C\}$$



O diagrama ao lado representa a situação.

Resolução do Exercício:



Respostas:

a) Quantas pessoas compram pelo menos uma das revistas?

$$n(A \cup B \cup C) = 30 + 40 + 20 + 15 + 10 + 35 + 10 = 160\ .$$

b) Quantas pessoas não compram nenhuma das três revistas?

$$n(U) - n(A \cup B \cup C) = 200 - 160 = 40$$

c) Quantas pessoas compram exatamente uma das revistas?

Temos que 40 pessoas compram apenas revista A, 35 compram apenas revista B e 30 compram apenas revista C. Portanto,

40 + 35 + 30 = 105 pessoas compram apenas uma das revistas.

d) Quantas pessoas compram exatamente duas das revistas?

Temos que 20 pessoas compram revistas A e B, mas não C; 15 pessoas compram revistas A e C, mas não B; 10 pessoas compram revistas B e C, mas não A. Portanto,10 + 15 + 20 = 45 pessoas compram exatamente duas revistas.

Exercício 2:

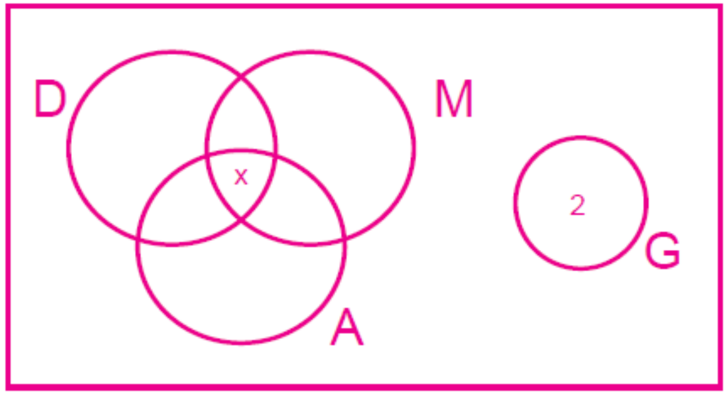
O técnico da seleção brasileira de futebol convocou 22 jogadores para um amistoso. Destes, 2 são goleiros, 10 podem jogar na defesa, 10 podem jogar no meio-de-campo e 9 podem jogar no ataque.

Sabe-se também que 4 jogadores podem jogar na defesa e no meio, 5 jogadores podem jogar no meio ou no ataque e apenas 1 jogador pode jogar na defesa e no ataque.

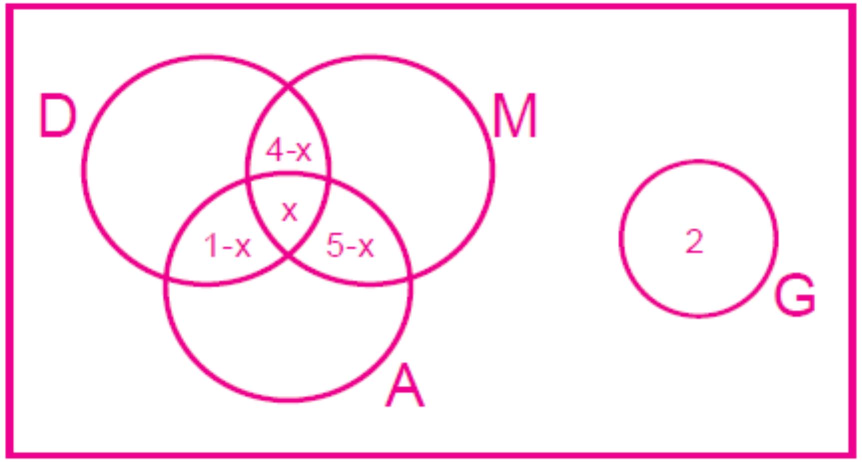
Os goleiros só podem jogar no gol. Perguntas:

a) Quantos jogadores são tão versáteis que podem jogar na defesa, no meio e no ataque?
b) Quantos podem jogar apenas na defesa?
c) Quantos podem jogar apenas no ataque?
d) Quantos podem jogar no ataque ou no meio, mas nunca na defesa?

Resolução do Exercício 2:



O número de elementos das interseções de cada par de conjuntos é $n(D \cap M) = 4$, $n(D \cap A) = 1$ e $n(M \cap A) = 5$. Com esta informação, chegamos ao diagrama da figura abaixo.



Resolução do Exercício 2:

Temos que $n(D) = 10$. O número de jogadores que atuam apenas na defesa é

$$10 - (1 - x) - (4 - x) - x = 5 + x \ .$$

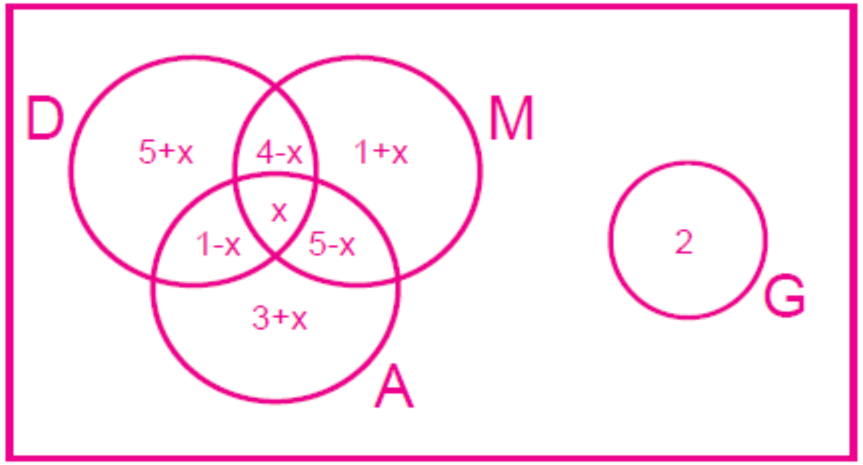
Como $n(M) = 10$, o número de jogadores que atuam apenas no meio é

$$10 - (5 - x) - (4 - x) - x = 1 + x \ .$$

Como $n(A) = 9$, o número de jogadores que atuam apenas no ataque é

$$9 - (1 - x) - (5 - x) - x = 3 + x \ .$$

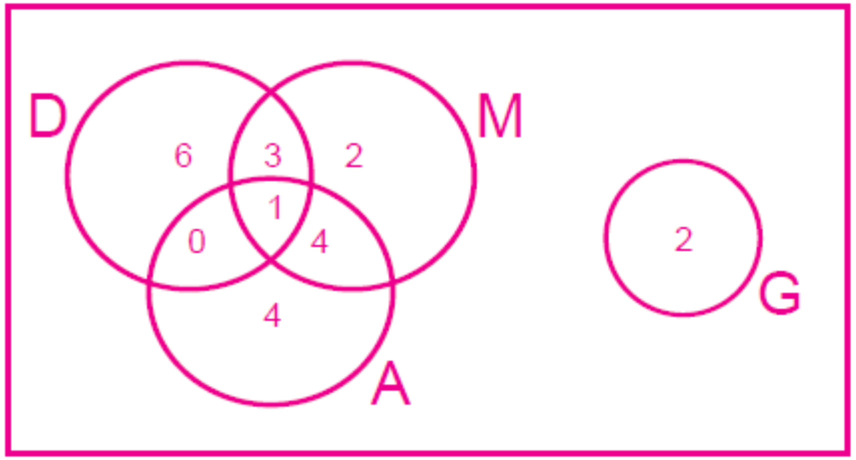
Resolução do Exercício 2:



Somando as partes de $D \cup M \cup A$, obtemos:

$$\begin{aligned}
20 &= n(D \cup M \cup A) \\
20 &= (5+x)+(3+x)+(1+x)+(4-x)+(1-x)+(5-x)+x \\
20 &= 19+x \\
x &= 1
\end{aligned}$$

Resolução do Exercício 2:



a) Apenas um jogador pode jogar na defesa, no meio e no ataque.

b) Seis jogadores podem jogar apenas na defesa.

c) Quatro jogadores podem jogar apenas no ataque.

d) Os jogadores que não podem jogar na defesa são em número de $4 + 4 + 2 = 10$.

DEFINIÇÃO

Princípio da inclusão-exclusão para 3 conjuntos

Raciocinando como no exemplo anterior, podemos provar o Princípio da inclusão-exclusão para 3 conjuntos:

Dados 3 conjuntos A, B e C, vale que:

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) \\ -n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)\ . \end{aligned}$$

Bibliografia

- FIGUEIREDO, Luiz Manoel. **Matemática discreta.** 3. ed. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010. v. 1.
- GERSTING, Judith L. **Fundamentos matemáticos para a ciência da computação.** 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.
- MENEZES, Paulo Blauth. **Matemática discreta para computação e informática.** 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.