Matemática para Computação I
Prof. Carlos Eduardo Costa Vieira

Material cedido pelo Professor Glauter Jannuzzi

RESUMO DAS AULAS ANTERIORES

Objetivos:

- Principio Fundamental da Contagem;
- Permutações.

› **Próximos Tópicos:**

– **Arranjos;**

– **Permutação com Elementos Repetidos;**

– **Permutações Circulares;**

– **Combinação.**

Arranjos - Introdução

Objetivos

Definir arranjo de n elementos tomados r a r.

Apresentar a fórmula para o cálculo de arranjos.

Em muitos problemas devemos determinar o número de maneiras de selecionar r objetos em uma certa ordem dentro de um conjunto de n objetos distintos, onde $n \geq r$.

Estes são chamados problemas de arranjo de n elementos, tomados r a r.

Portanto, o número de arranjos de n elementos, tomados r a r, é o número de maneiras de selecionar, em ordem, r elementos de um conjunto de n elementos.

Arranjos x Combinações

Diferença entre Arranjos e Combinações?

- **Definição:** Um problema é de **Arranjo** se a ordem em que os r elementos são selecionados é relevante ou importante. Se a ordem não for importante, temos um outro tipo de problema, chamado **Combinação**.

Arranjo - Exemplo

Em uma classe de 10 alunos, deve-se escolher um representante e seu suplente. De quantas maneiras isto pode ser feito?

- **Solução**

A ordem é importante, pois o primeiro será o representante e o segundo será o suplente.Temos 10 possibilidades para a primeira opção. Uma vez escolhido o representante, restam 9 alunos para disputar a vaga de suplente. Portanto:

$$\underline{10} \times \underline{9} = \underline{90}$$

Assim existem 90 possibilidades para a formação desta comissão.

Arranjo - Definição

Seja A(n,r) o número de arranjos de n elementos, tomados r a r. Em outras palavras, $A(n,r)$ é o número de maneiras de selecionar, em ordem, r elementos em um conjunto de n elementos distintos.

Em geral, se devemos selecionar, em alguma ordem, r objetos de um conjunto de n objetos $(n \geq r)$ distintos, temos n maneiras de preencher a primeira posição, seguido de $n-1$ maneiras de preencher a segunda posição, seguido de $n-2$ maneiras de preencher a terceira posição, e assim por diante. Para a $r-$ésima posição, teremos $n-r+1$ possibilidades de preenchimento.

$$\underline{\text{n}} \times \underline{\text{n-1}} \times \underline{\text{n-2}} \times \ldots \times \underline{\text{n-r+1}}$$

Arranjo – Fórmula

Usando o princípio multiplicativo, temos:

$$A(n,r) = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)\,.$$

Podemos escrever este resultado de uma forma mais compacta usando a notação fatorial:

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = \frac{[n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)][(n-r)(n-r-1)\dots 3.2.1]}{(n-r)(n-r-1)\dots 3.2.1} = \frac{n!}{(n-r)!}\,.$$

$$\boxed{A(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

Arranjos – Exercício 1

Em uma reunião de condomínio onde 10 moradores estão presentes, deve-se escolher, entre eles, um síndico, um subsíndico, um secretário e um tesoureiro. De quantas maneiras isto pode ser feito?

Solução:

Este problema é o de selecionar, em ordem, 4 pessoas dentro de um conjunto de 10 pessoas. Este número é:

$$A(10,4) = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10.9.8.7.6!}{6!} = 10.9.8.7 = 5040\ .$$

Há, portanto, 5040 possibilidades.

Arranjos – Exercício 2

Um empregador tem 3 tarefas distintas que deve distribuir para 6 empregados. De quantas maneiras pode fazer isto, se cada empregado pode realizar apenas uma tarefa e cada tarefa deve ser dada a apenas um empregado?

Solução:

$$A(6,3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6.5.4.3!}{3!} = 6.5.4 = 120$$

maneiras de distribuir as tarefas.

Arranjos – Exercício 3

O prefeito de uma cidade está trabalhando com sua equipe, decidindo as metas de sua administração. Seus assessores lhe apresentaram uma lista de 30 metas, dividas em 3 grupos:

12 metas de curto prazo;

10 metas de médio prazo;

8 metas de longo prazo.

O prefeito então ordena que seus assessores escolham 5 metas de cada grupo, em uma ordem de prioridade em cada grupo.

De quantas maneiras isto pode ser feito?

Arranjos – Exercício 3 - Solução

A escolha das 5 metas de curto prazo pode ser feita de:

$$A(12,5) = \frac{12!}{(12-5)!} = \frac{12.11.10.9.8.7!}{7!} = 95040 \quad \text{maneiras} .$$

A escolha das 5 metas de médio prazo pode ser feita de

$$A(10,5) = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10.9.8.7.6.5!}{5!} = 30240 \quad \text{maneiras} .$$

A escolha de 5 metas de longo prazo pode ser feita de

$$A(8,5) = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8.7.6.5.4.3!}{3!} = 6720 \quad \text{maneiras} .$$

Arranjos – Exercício 3 – Solução (cont)

Usando o princípio multiplicativo, o prefeito tomaria um susto ao descobrir que possui:

$95040 \times 30240 \times 6720 = 19.313.344.512.000$

possibilidades para seu Plano de Administração!

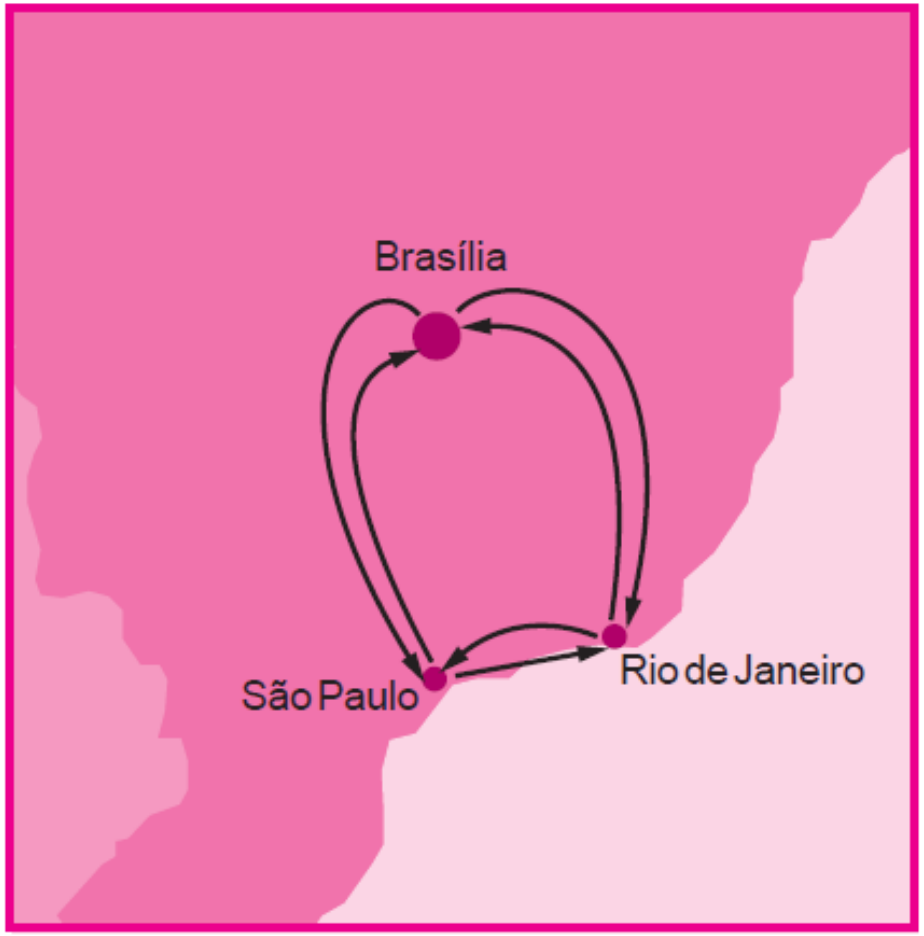
Arranjos – Exercício 4

Uma companhia aérea tem vôos ligando 5 cidades, interligando cada uma destas cidades a todas as outras. Calcule quantas rotas diferentes esta companhia possui. Considere a ida uma rota diferente da volta. Assim, Rio–Brasília é uma rota enquanto Brasília–Rio é outra.

Arranjos – Exercício 4 - Solução

Solução:

Na figura ao lado representamos as rotas ligando 3 cidades:



$$A(3,2) = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6 \quad \text{rotas.}$$

Arranjos – Exercício 4 – Solução (cont)

Cada rota é formada por duas cidades, sendo que a ordem é importante porque as mesmas duas cidades, em ordem diferente, formam 2 rotas diferentes.

Portanto, o número de rotas é o número de maneiras de selecionar 2 cidades, de um conjunto de 5 cidades, em que a ordem da escolha é importante. É um problema de arranjo.

$$\boxed{A(5,2) = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{120}{6} = 20\ .}$$

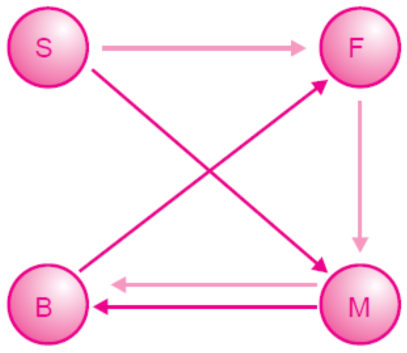
Esta companhia aérea possui 20 rotas.

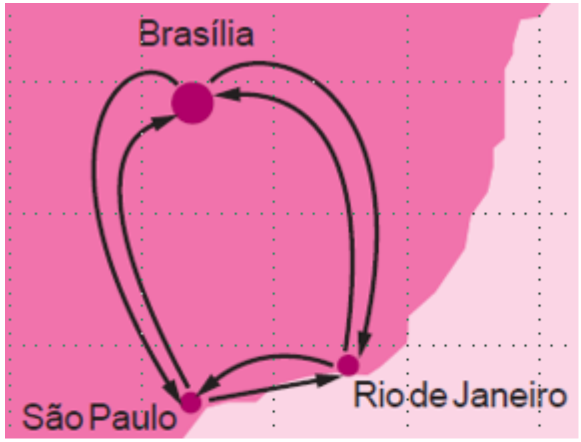
Aplicação na Teoria dos Grafos

› Na figura anterior, representamos as cidades por pontos e as rotas por linhas ligando estes pontos. Este tipo de figura é chamado um grafo.

› Os pontos (as cidades na figura) são chamados vértices do grafo, enquanto as linhas ligando os vértices são chamadas arestas do grafo.

› Quando as arestas têm uma orientação, como é o caso anterior, o grafo é chamado de grafo dirigido ou orientado.





Bibliografia

› FIGUEIREDO, Luiz Manoel. **Matemática discreta.** 3. ed. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010. v. 1.

› GERSTING, Judith L. **Fundamentos matemáticos para a ciência da computação.** 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

› MENEZES, Paulo Blauth. **Matemática discreta para computação e informática.** 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.