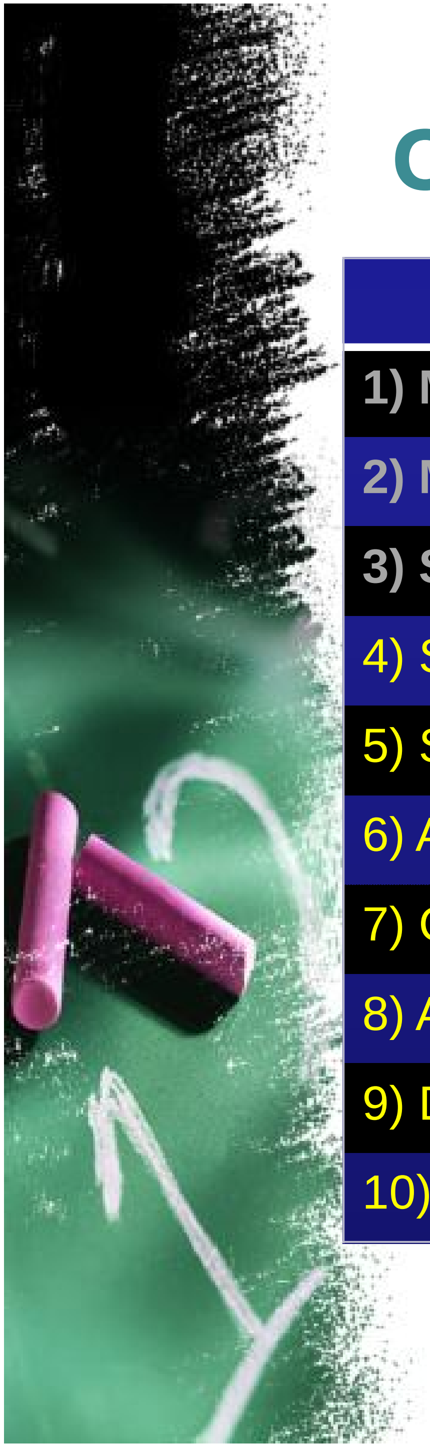
MateMática para computação I

Prof. Carlos Eduardo Costa Vieira

Material cedido pelo Prof. Glauter Jannuzzi

Resumo da Apresentação

- Lógica Proposicional
  - ✓ *Outras Regras de Inferência;*
  - ✓ *Regras de Substituição;*
  - ✓ *Provas por Refutação.*



Outras Regras de Inferência

Regra	Sigla	Fórmulas Atômicas
1) Modus Ponnens	MP	$\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha\} \vdash \beta$
2) Modus Tollens	MT	$\{\alpha \rightarrow \beta , \sim\beta\} \vdash \sim\alpha$
3) Silogismo Hipotético	SH	$\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma\} \vdash \alpha \rightarrow \gamma$
4) Silogismo Disjuntivo	SD	$\{\alpha \vee \beta, \sim\alpha\} \vdash \beta$
5) Simplificação	SIMP	$\{\alpha \wedge \beta\} \vdash \alpha$
6) Adição	AD	$\{ \alpha \} \vdash \alpha \vee \beta$
7) Conjunção	CONJ	$\{\alpha, \beta\} \vdash \alpha \wedge \beta$
8) Absorção	ABS	$\{\alpha \rightarrow \beta\} \vdash \alpha \rightarrow (\alpha \wedge \beta)$
9) Dilema Construtivo	DC	$\{\alpha \rightarrow \beta, \gamma \rightarrow \theta, \alpha \vee \gamma\} \vdash \beta \vee \theta$
10) Dilema Destrutivo	DD	$\{\alpha \rightarrow \beta, \gamma \rightarrow \theta, \sim\beta \vee \sim\theta\} \vdash \sim\alpha \vee \sim\gamma$

Regras de Inferência

4. Silogismo Disjuntivo (SD)

Validação da regra SD utilizando a Tabela Verdade

α	β	$\alpha \vee \beta$	$\sim\alpha$	$(\alpha \vee \beta) \wedge \sim\alpha$	β	$((\alpha \vee \beta) \wedge \sim\alpha) \rightarrow \beta$
F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F	V
V	V	V	F	F	V	V

Se uma disjunção é verdadeira e uma das proposições componentes se revela falsa, então a outra proposição é necessariamente verdadeira, conforme mostra a Tabela Verdade acima.

Regras de Inferência

5. Simplificação (SIMP)

Validação da regra SIMP utilizando a Tabela Verdade

α	β	$\alpha \wedge \beta$	α	$(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$
F	F	F	F	V
F	V	F	F	V
V	F	F	V	V
V	V	V	V	V

Em uma conjunção verdadeira, pode-se concluir que cada um dos seus componentes é verdadeiro de forma independente conforme mostra a Tabela Verdade acima.

Regras de Inferência

6. Adição (AD)

Validação da regra AD utilizando a Tabela Verdade

α	β	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$
F	F	F	V
F	V	V	V
V	F	V	V
V	V	V	V

Dada uma proposição verdadeira, a partir dele pode-se deduzir uma disjunção verdadeira com qualquer outro enunciado que escolhermos, como mostra a Tabela Verdade acima.

Regras de Inferência

7. Conjunção (CONJ)

Validação da regra CONJ utilizando a Tabela Verdade

α	β	$\alpha \land \beta$	$\alpha \land \beta$	$(\alpha \land \beta) \rightarrow (\alpha \land \beta)$
F	F	F	F	V
F	V	F	F	V
V	F	F	F	V
V	V	V	V	V

Se dois enunciados são verdadeiros independentemente, isso é condição suficiente para que juntos formem uma conjunção verdadeira.

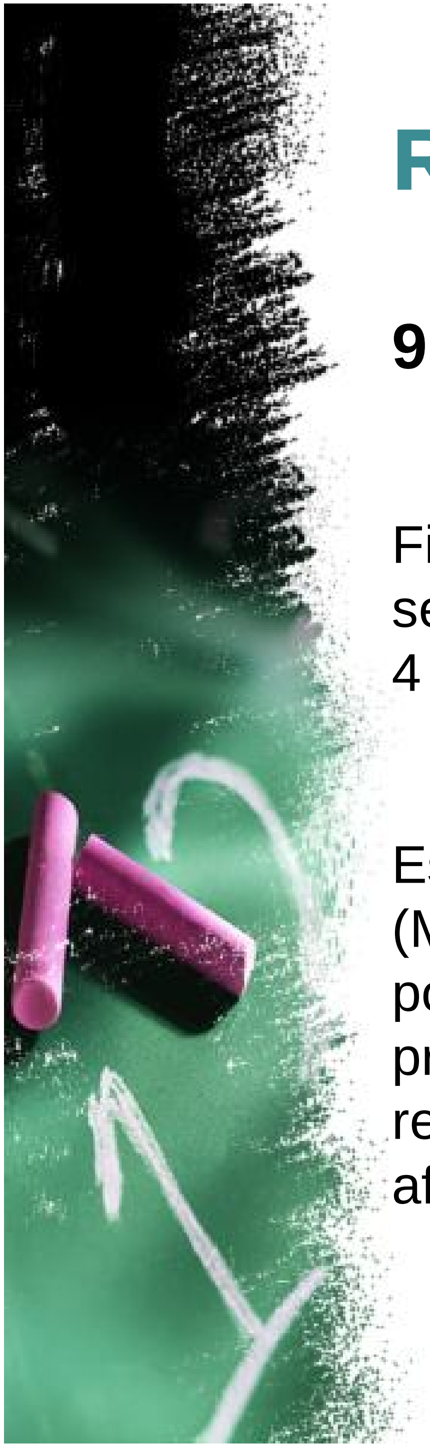
Regras de Inferência

8. Absorção (ABS)

Validação da regra ABS utilizando a Tabela Verdade

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$	α	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \rightarrow (\alpha \wedge \beta)$	$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$
F	F	V	F	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
V	V	V	V	V	V	V

Dada uma condicional, pode-se deduzir dela uma condicional que tem como antecedente o mesmo antecedente da primeira e como consequente uma conjunção das duas proposições que figuravam na primeira condicional. Uma reflexão sobre a Tabela Verdade das condicionais é capaz de mostrar como esta inferência é válida.



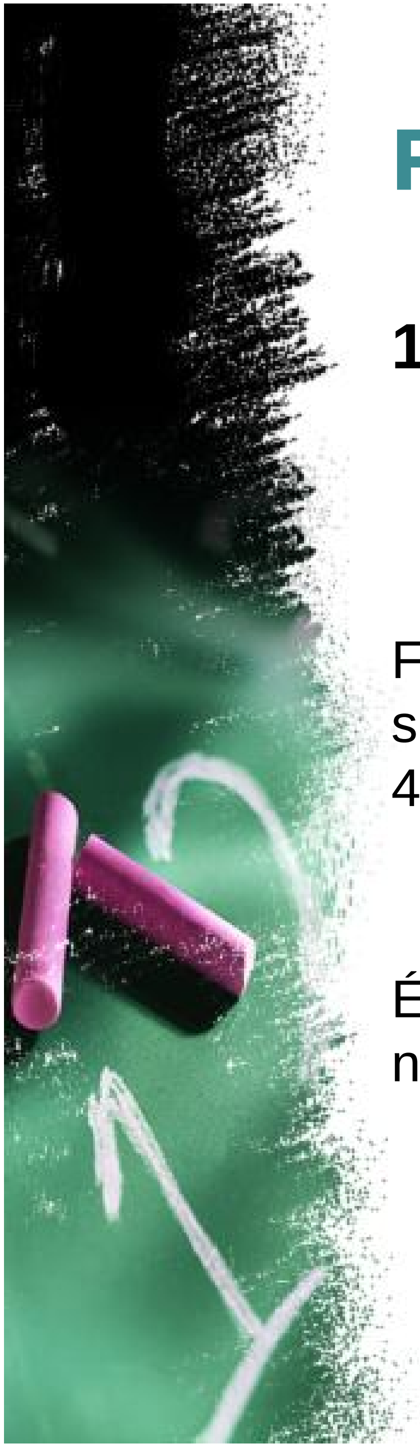
Regras de Inferência

9. Dilema Construtivo (DC)

$\{\alpha \rightarrow \beta, \gamma \rightarrow \theta, \alpha \vee \gamma\} \vdash \beta \vee \theta$

Fica como exercício provar a regra de inferência DC, pois serão utilizadas 16 linhas de Tabela Verdade, já que temos 4 proposições;

Esta regra de inferência se baseia na regra Modus Ponens (MP). Seja a primeira premissa $\alpha \rightarrow \beta$, se afirmamos α, podemos concluir pela regra MP β. Fazendo o mesmo procedimento com a segunda premissa, concluímos pela regra MP θ. Então, o dilema consiste em que, ao afirmarmos α ou γ, somos obrigados a concluir β ou θ.



Regras de Inferência

10. Dilema Destrutivo (DD)

$$\{\alpha \rightarrow \beta,\ \gamma \rightarrow \theta,\ \sim\beta \vee \sim\theta\} \vdash \sim\alpha \vee \sim\gamma$$

Fica como exercício provar a regra de inferência DD, pois serão utilizadas 16 linhas de Tabela Verdade, já que temos 4 proposições;

É exatamente o oposto do Dilema Construtivo e se baseia na regra Modus Tollens.

Regras de Substituição

- **Dupla Negação ou Involução**

$$\sim\sim P \Leftrightarrow P$$

- **Idempotência**

$$1)\ P \Leftrightarrow (P \wedge P)$$

$$2)\ P \Leftrightarrow (P \vee P)$$

- **Comutação**

$$1)\ (P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$$

$$2)\ (P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$$

$$3)\ (P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \leftrightarrow P)$$

- **Associação**

$$1)\ P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow (P \wedge R) \wedge Q$$

$$2)\ P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \vee Q$$

- **Distribuição**

$$1)\ P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$2)\ P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

- **Transposição ou Contrapositiva**

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$$

Regras de Substituição

- **Implicação Material**

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$$

- **Equivalência Material**

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

- **Absorção**

$$P \vee (P \wedge Q) \leftrightarrow P$$

$$P \wedge (P \vee Q) \leftrightarrow P$$

- **Exportação / Importação**

$$(P \wedge Q) \rightarrow R \Leftrightarrow P \rightarrow (Q \rightarrow R)$$

- **De Morgan**

$$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$$

$$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$$

Prova por Refutação

Embora a prova por dedução seja um método mais prático que a tabela-verdade, ainda é muito difícil obter algoritmos eficientes para validação de argumentos com base neste método.

Refutação

- **Refutação** é um processo em que se demonstra que uma determinada hipótese contradiz uma base de conhecimento.
- Uma base de conhecimento $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ é consistente se a fórmula correspondente $\alpha_1 \land \ldots \land \alpha_n$ é satisfatível.
- Se $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ é consistente, provar $\Delta \vDash \gamma$ equivale a mostrar que o conjunto de fórmulas $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \neg\gamma\}$ é inconsistente.

Prova de Argumentos

- Argumento

  (1) Se o time joga bem, então ganha o campeonato. $j \rightarrow g$

  (2) Se o time não joga bem, então o técnico é culpado. $\sim j \rightarrow t$

  (3) Se o time ganha o campeonato, então os torcedores ficam contentes. $g \rightarrow c$

  (4) Os torcedores não estão contentes. $\sim c$

  (5) Logo, o técnico é culpado. $\vdash t$

```
(1)  j→g     Δ
(2)  ¬j→t    Δ
(3)  g→c     Δ
(4)  ¬c      Δ
-------------
```

$\{j \rightarrow g,\ \neg j \rightarrow t,\ g \rightarrow c,\ \neg c\} \models t$

Prova de Argumentos

validar o argumento $\{j \to g,\ \neg j \to t,\ g \to c,\ \neg c\} \vDash t$

- **Por Dedução**

(1) $j \to g$ Δ
(2) $\neg j \to t$ Δ
(3) $g \to c$ Δ
(4) $\neg c$ Δ
----

(5) ~g MT(3,4)

(6) ~j MT(1,5)

(7) t MP(2,6)

Argumento Válido!

- **Por Refutação**

(1) $j \to g$ Δ
(2) $\neg j \to t$ Δ
(3) $g \to c$ Δ
(4) $\neg c$ Δ
----

(5) ~t hipótese

(6) j MT(5,2)

(7) g MP(6,1)

(8) c MP(7,3)

(9) *CONTRADIÇÃO!!! (8, 4)*

Prova por Refutação: Exercício 1

- **Usando refutação, mostre que o argumento é válido.**

(1) *Se Ana sente dor de estômago ela fica irritada.* $d \rightarrow i$

(2) *Se Ana toma remédio para dor de cabeça ela fica com dor de estômago.* $r \rightarrow d$

(3) *Ana não está irritada.* $\sim i$

(4) *Logo, Ana não tomou remédio para dor de cabeça.* $\vdash \sim r$

(1)	$d \rightarrow i$	
(2)	$r \rightarrow d$	
(3)	$\sim i$	
(4)	$\sim(\sim r)$	hipótese
(5)	r	hipótese (Dupla Negação)
(6)	d	MP(5,2)
(7)	i	MP(6,1)

(8) Contradição! (7,3)

Prova por Refutação: Exercício 2

$$\{p \to q,\ \neg q,\ \neg p \to r\} \vdash r$$

(1) $p \rightarrow q$

(2) $\sim q$

(3) $\sim p \rightarrow r$

(4) $\sim r$ hipótese

(5) p MT(3,4)

(6) q MP(5,1)

(7) Contradição! (6,2)

Prova por Refutação: Exercício 3

$$\{p \rightarrow q,\ q \rightarrow r,\ \neg r,\ \neg p \rightarrow s\} \vdash s$$

(1) $p \rightarrow q$

(2) $q \rightarrow r$

(3) $\sim r$

(4) $\sim p \rightarrow s$

---

(5)	$\sim s$	hipótese
(6)	p	MT(4,5)
(7)	q	MP(6,1)
(8)	r	MP(7,2)

(9) Contradição! (8,3)

Referências

- FIGUEIREDO, Luiz Manoel; SILVA, Mário Oliveira da; CUNHA, Marisa Ortegoza da Cunha. **Matemática Discreta.** 2. ed. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2009. v. 3.
- GERSTING, Judith L. **Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação.** 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.
- MENEZES, Paulo Blauth. **Matemática Discreta para Computação e Informática.** 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.