Matemática para Computação I
Prof. Carlos Eduardo Costa Vieira

Material cedido pelo Professor Glauter Jannuzzi

π

Conteúdo

- A Matemática;
- Introdução a Matemática Discreta;
  - Discreto x Contínio
- A Matemática Discreta;
- Matemática Discreta x Ciência da Computação;
- Tratamento de Problemas;
- Teoria dos Conjuntos.

A Matemática

- A matemática, para a área de computação, deve ser vista como uma ferramenta a ser usada na definição formal de conceitos computacionais (linguagens, autômatos, métodos, etc);
- Os modelos formais permitem definir suas propriedades e dimensionar suas instâncias, dadas suas condições de contorno;
- Considerando que a maioria dos conceitos computacionais pertencem ao domínio do discreto, a matemática discreta (ou também chamada álgebra abstrata) é fortemente empregada.

Contínuo x Discreto

- A Matemática
  - Estudo dos conjuntos, funções e conceitos construídos a partir de noções fundamentais.

DISCRETO

CONTÍNUO

A Matemática Discreta

› A matemática discreta tornou-se popular em décadas recentes devido às suas **aplicações na ciência da computação** (devido ao desenvolvimento de **computadores digitais** que funcionam em etapas discretas e ao **armazenamento de dados em bits** discretos).

› Conceitos e notações da matemática discreta são úteis para o estudo ou a expressão de objetos ou problemas em algoritmos de computador e linguagens de programação.

Matemática Discreta x Contínua

- A *matemática discreta* possui como ênfase os estudos matemáticos baseados em conjuntos contáveis, finitos ou infinitos.
- Em oposição, a *matemática do continuum* possui como ênfase os estudos matemáticos baseados em conjuntos não contáveis. Um importante exemplo de *matemática do continuum* é o *cálculo diferencial e integral*.

Mat. Discreta x Ciência da Computação

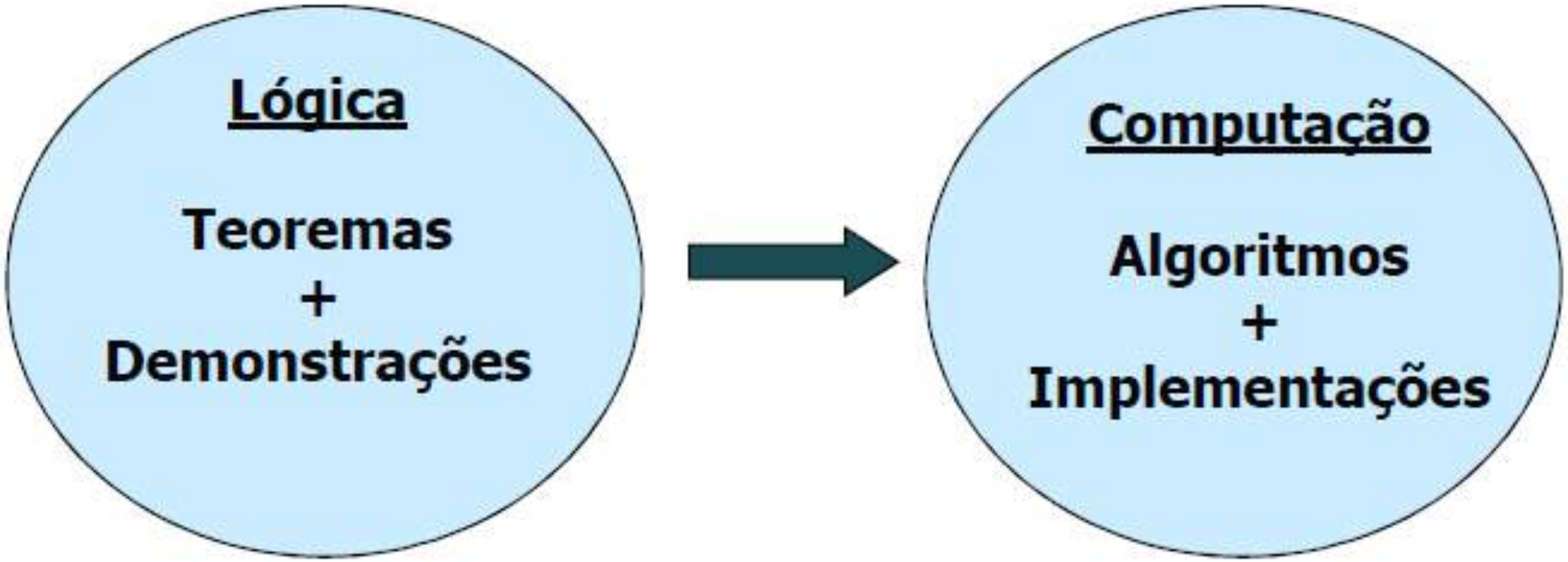
- **Teoria dos Conjuntos:**
  - Banco de dados;
  - Circuitos integrados;
  - Inteligência artificial;
  - Sistemas distribuídos.

- **Métodos de Prova:**
  - Circuitos integrados;
  - Projeto de algoritmos.

- **Seqüências e Indução Matemática**:
  - Projeto de algoritmos.

- **Fundamentos da Lógica; Lógica Proposicional; Lógica de Proposições Quantificadas; Cálculo de Predicados.**
  - Banco de dados;
  - Circuitos integrados;
  - Inteligência artificial;
  - Sistemas computacionais (hardware e software)
  - Sistemas distribuídos.

Tratamento de Problemas



Teoria dos Conjuntos

Conjuntos

Definição 1.1 – Conjunto

– Um *conjunto* é uma coleção bem definida de zero ou mais objetos distintos, chamados *elementos* do conjunto, os quais não possuem qualquer ordem associada.

› **Exemplos**

a) As vogais **a**, **e**, **i**, **o**, **u**;
b) O par de sapatos preferido;
c) Os dígitos **0**, **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7**, **8** e **9**;
d) Todos os brasileiros;
e) Os números pares **0**, **2**, **4**, **6**,…
f) O personagem **Snoopy**, a letra **a**, a **baía da Guanabara** e o **Pelé**.

Denotação de Conjuntos

- Observe que um conjunto pode ser definido listando-se todos os seus elementos (como “as vogais **a**, **e**, **i**, **o**, **u**”) ou por propriedades declaradas (como “todos os brasileiros”).

- **Denotação por Extensão:**
- A definição de um conjunto listando todos os seus elementos é denominada *denotação por extensão* e é dada pela lista de todos os seus elementos, em qualquer ordem (separados por vírgulas) e entre chaves, como por exemplo:

Vogais = { a, e, i, o, u }

Neste caso, **Vogais** denota o conjunto **{ a, e, i, o, u }**.

Denotação de Conjuntos

- **Denotação por Compreensão**:
  - A definição de um conjunto por propriedades é denominada *denotação por compreensão*.

Ex: **Pares = { n** | **n** é número par **}**

a qual é interpretada como o conjunto de todos os elementos ***n*** tal que ***n*** é número par.

Assim, a forma geral de definição de um conjunto por propriedades é como se segue:

{ x | p(x) }

e é tal que um determinado elemento **a** é elemento deste conjunto se a propriedade **p** é verdadeira para **a**, ou seja, se **p(a)** é verdadeira. Por exemplo, para o conjunto:

B = { x | x é brasileiro **}**

tem-se que **Pelé** é elemento de **B** e **Bill Gates** *não* é elemento de **B**.

Conjuntos Importantes

Um conjunto especialmente importante é o *conjunto vazio*, ou seja, o conjunto sem elementos **{ }**, usualmente representado pelo seguinte símbolo:

$$\varnothing$$

exemplo 1.4 – Conjunto vazio

a o conjunto de todos os brasileiros com mais de **300** anos;

b o conjunto de todos os números que são simultaneamente pares e ímpares. ❑

exemplo 1.5 – Conjunto unitário

a o conjunto constituído pelo jogador de futebol Pelé;

b o conjunto de todos os números que são simultaneamente pares e primos;

Conjuntos Importantes

- Os seguintes conjuntos são importantes na matemática em geral e na computação em particular. Por isso possuem uma denotação universalmente aceita:
  - N – Conjunto dos Números Naturais;
  - Z – Conjunto dos Números Inteiros;
  - Q – Conjunto dos Números Racionais;
  - I – Conjunto dos Números Irracionais;
  - R – Conjunto dos Números Reais;

Conjuntos Finitos e Infinitos

Um conjunto pode possuir um número finito ou infinito de elementos. A definição formal de conjunto finito e infinito será apresentada adiante. Informalmente, um conjunto é dito:

a *Conjunto finito* se pode ser denotado por extensão, ou seja, listando exaustivamente todos os seus elementos;

b *Conjunto infinito*, caso contrário.

exemplos

a Os seguintes conjuntos são *finitos*:

$\varnothing$

$\{ \varepsilon \}$

Vogais = { a, e, i, o, u }

Dígitos = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }

{ Snoopy, a, baía da Guanabara, Pelé }

$A = \{ x \in \mathbf{N} \mid x > 0 \text{ e } x < 4 \}$

$B = \{ x \mid x \text{ é brasileiro} \}$

b Os seguintes conjuntos são *infinitos*:

$\mathbf{Z}$

$\mathbf{R}$

$\{ x \in \mathbf{Z} \mid x \geq 0 \}$

$\text{Pares} = \{ y \mid y = 2x \text{ e } x \in \mathbf{N} \}$

Pertinência

Se um determinado elemento **a** é elemento de um conjunto **A**, tal fato é denotado por:

$$a \in A$$

que é interpretado como segue:

a pertence *ao conjunto* ***A***

Caso contrário, afirma-se que **a** *não* pertence ao conjunto **A**. Tal fato é denotado por:

$$a \notin A$$

exemplo 1.3 – Pertence, não pertence

a Relativamente ao conjunto **Vogais = { a, e, i, o, u }**, tem-se que:

a ∈ Vogais
h ∉ Vogais

b Relativamente ao conjunto **B = { x | x** é brasileiro **}**, tem-se que:

Pelé ∈ B
Bill Gates ∉ B

Continência e subconjunto

Além da noção de pertinência já introduzida, outra noção fundamental da teoria dos conjuntos é a de *continência*, que permite introduzir os conceitos de *subconjunto* e de *igualdade de conjuntos*.

Se todos os elementos de um conjunto **A** também são elementos de um conjunto **B**, então se afirma que **A** está *contido* em **B** e denota-se por:

$$A \subseteq B$$

ou, alternativamente, que **B** *contém* **A**, e denota-se por:

$$B \supseteq A$$

Nesse caso ($A \subseteq B$ ou $B \supseteq A$), afirma-se que **A** é *subconjunto* de **B**.

Adicionalmente, se $A \subseteq B$, mas existe $b \in B$ tal que $b \notin A$, então se afirma que **A** está *contido propriamente* em **B**, ou que **A** é *subconjunto próprio* de **B**, e denota-se por:

$$A \subset B$$

Continência e subconjunto

exemplo 1.11 – Continência, subconjunto

a $\{ a, b \} \subseteq \{ b, a \}$

b $\{ a, b \} \subseteq \{ a, b, c \}$, $\{ a, b \} \subset \{ a, b, c \}$

c $\{ 1, 2, 3 \} \subseteq \mathrm{N}$, $\{ 1, 2, 3 \} \subset \mathrm{N}$

d $\mathrm{N} \subseteq \mathrm{Z}$, $\mathrm{N} \subset \mathrm{Z}$

e $\varnothing \subseteq \{ a, b, c \}$, $\varnothing \subset \{ a, b, c \}$

f $\varnothing \subseteq \mathrm{N}$, $\varnothing \subset \mathrm{N}$ ❑

Um conjunto especial e importante é o *conjunto universo*, normalmente denotado por **U**, que contém todos os conjuntos que estão sendo considerados. Ou seja, o conjunto universo define o "contexto de discussão" (e portanto, **U** *não* é um conjunto fixo). Uma vez definido o conjunto universo **U**, para qualquer conjunto **A**, tem-se que:

$$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{U}$$

Igualdade de conjuntos

Os conjuntos **A** e **B** são ditos *conjuntos iguais*, o que é denotado por:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}$$

se e somente se possuem exatamente os mesmos elementos. Formalmente, afirma-se que:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \quad \text{se e somente se} \quad \mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \text{ e } \mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$$

exemplo 1.12 – Igualdade de conjuntos

a $\{ 1, 2, 3 \} = \{ x \in N \mid x > 0 \text{ e } x < 4 \}$

b $N = \{ x \in Z \mid x \geq 0 \}$

c $\{ 1, 2, 3 \} = \{ 3, 3, 3, 2, 2, 1 \}$

Este último item ilustra claramente a definição de igualdade. De fato, é fácil verificar que:

$$\{ 1, 2, 3 \} \subseteq \{ 3, 3, 3, 2, 2, 1 \} \quad \text{e} \quad \{ 3, 3, 3, 2, 2, 1 \} \subseteq \{ 1, 2, 3 \}.$$

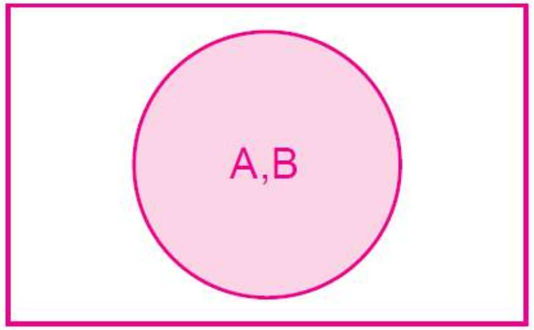
Tabela de Símbolos

TEORIA DOS CONJUNTOS

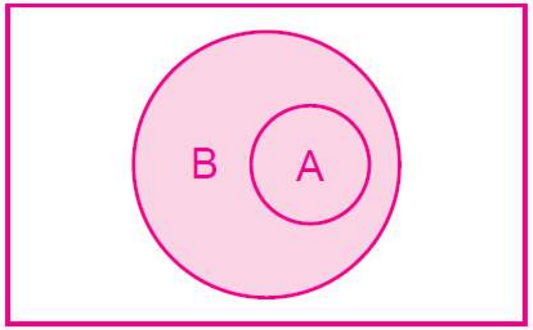
$\in$: pertence	$\exists$: existe
$\notin$: não pertence	$\nexists$: não existe
$\subset$: está contido	$\forall$: para todo (ou qualquer que seja)
$\not\subset$: não está contido	$\varnothing$: conjunto vazio
$\supset$: contém	**N**: conjunto dos números naturais
$\not\supset$: não contém	**Z** : conjunto dos números inteiros
$\vert$: tal que	**Q**: conjunto dos números racionais
$\Rightarrow$: implica que	**Q'= I**: conjunto dos números irracionais
$\Leftrightarrow$: se, e somente se	**R**: conjunto dos números reais

Diagramas de Venn: Operações entre conjuntos

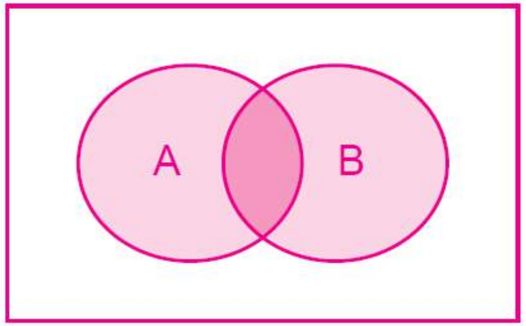
- Representação visual de conjuntos
  - representamos conjuntos por regiões;
  - conjunto universo *U* por um retângulo;
  - subconjuntos de *U* por regiões dentro do retângulo.



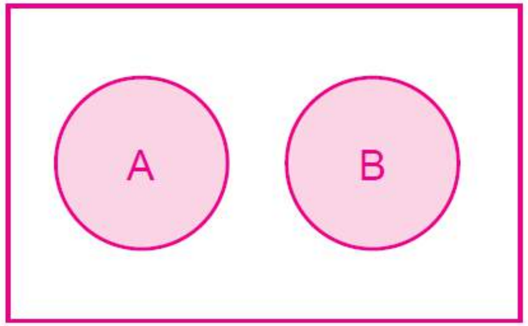
(a) $A = B$



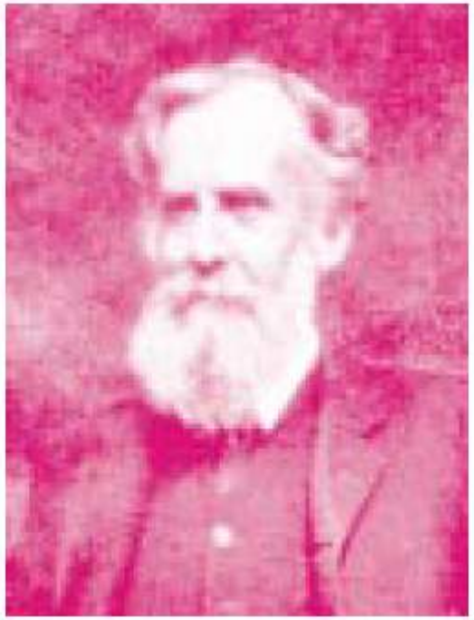
(b) $A \subset B$



(c)



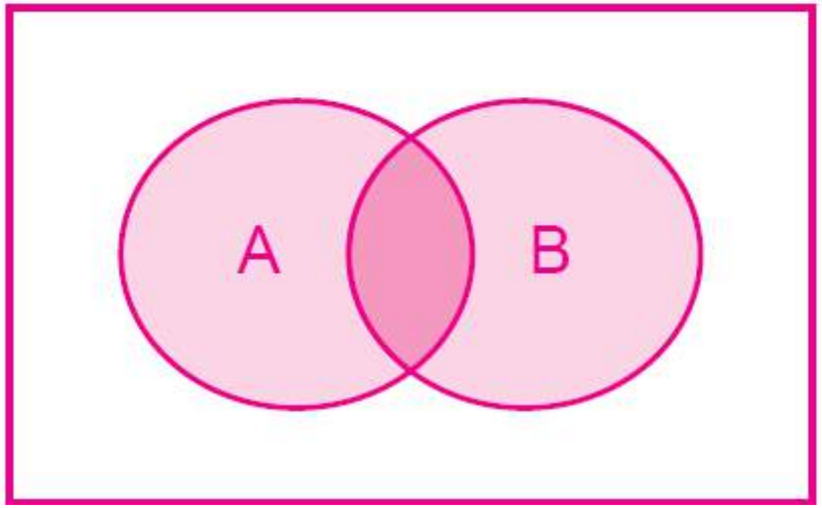
(d)



O matemático inglês John Venn (1834–1923) é mais conhecido pela sua representação de conjuntos por regiões no plano.

Operações com Conjuntos - UNIÃO

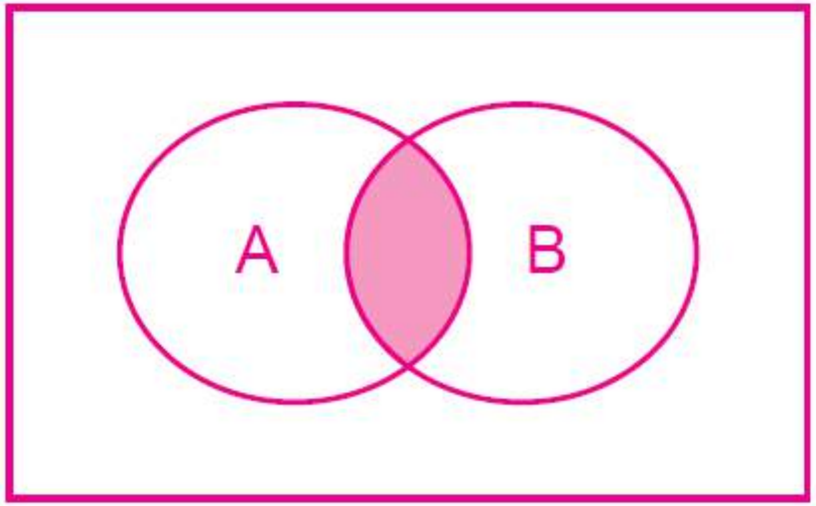
Sejam A e B conjuntos. A união de A e B, que se escreve $A \cup B$, é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A ou pertencem a B.



$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Operações com Conjuntos - INTERSEÇÃO

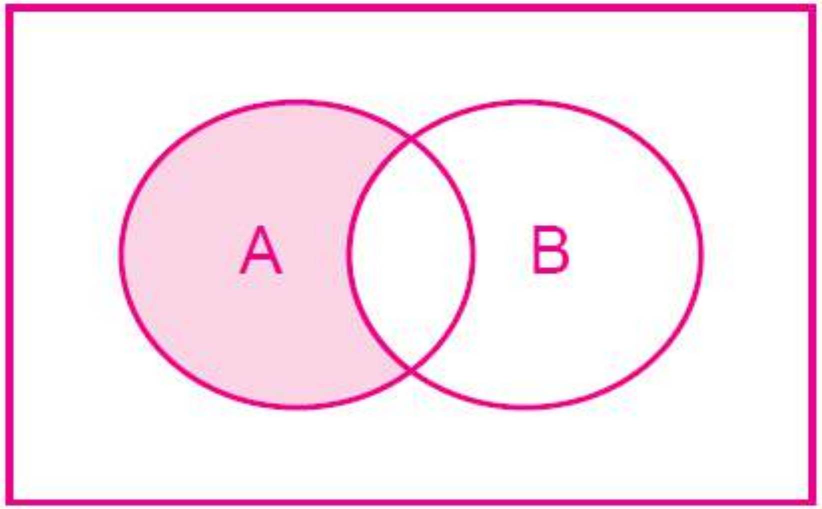
Sejam A e B conjuntos. O conjunto interseção de A e B, que se escreve $A \cap B$, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem ao conjunto A e ao conjunto B.



$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Operações com Conjuntos - DIFERENÇA

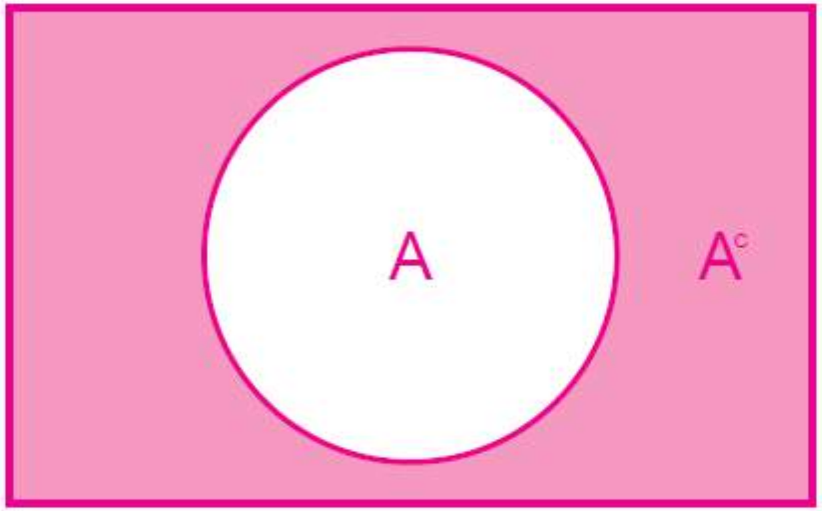
Sejam A e B dois conjuntos. O conjunto dos elementos que estão em A, mas não estão em B, é chamado diferença entre A e B e é denotado por $A - B$.



$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Operações com Conjuntos - COMPLEMENTO

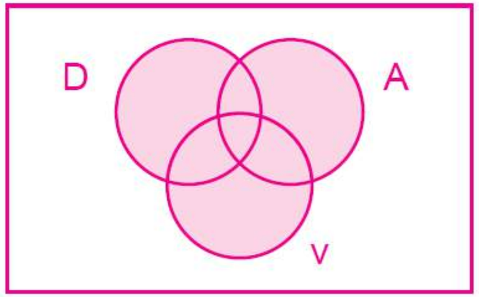
Se U é o conjunto universo e A é subconjunto de U, então o complemento de A, que denotamos A^c, é o conjunto dos elementos de U que não estão em A, isto é $A^c = U - A$.



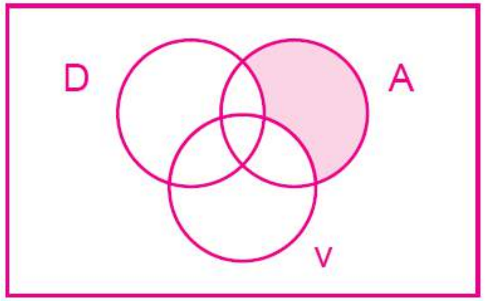
$$A^c = U - A = \{x \mid x \in U \text{ e } x \notin A\}.$$

Ex: Diagrama de Venn

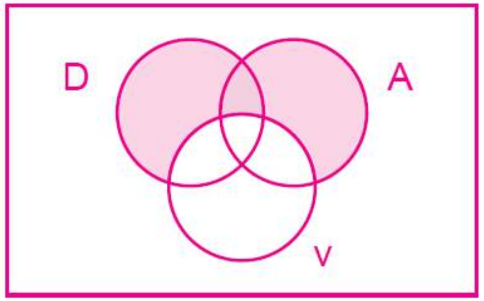
A – carros com Ar-condicionado
D – carros com direção hidráulica
V – carros com vidros elétricos



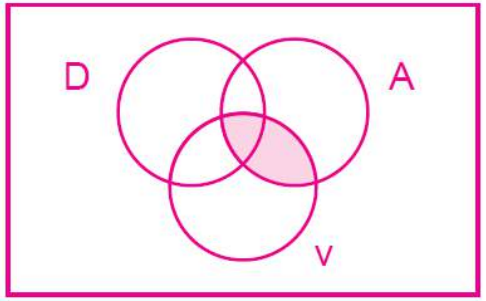
Carros com pelo menos 1 opcional



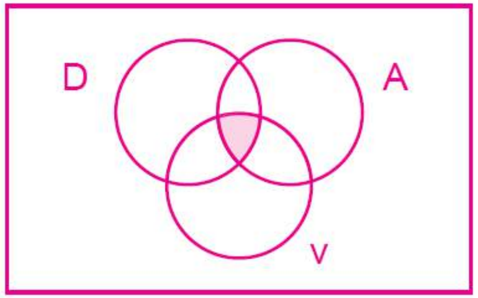
Carros com Ar mas sem direção e vidro.



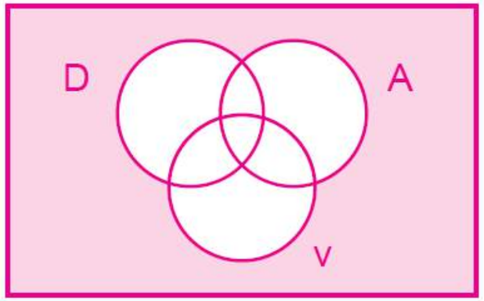
Carros com Direção e/ou Ar mas sem vidro elétrico.



Carros com Ar e vidros elétricos, com ou sem Direção.



Completaço



Basicão

Bibliografia

- FIGUEIREDO, Luiz Manoel. **Matemática discreta.** 3. ed. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010. v. 1.
- GERSTING, Judith L. **Fundamentos matemáticos para a ciência da computação.** 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.
- MENEZES, Paulo Blauth. **Matemática discreta para computação e informática.** 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.