Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Τεχνολογίες Διαδραστικών Συστημάτων»

Μεταπτυχιακό Μάθημα:

Τεχνικές Βελτιστοποίησης

Πρώτη εργασία ακαδημαϊκού έτους 2021-2022

Θεσσαλονίκη, 7/4/2022

Ασκηση 1. (30%)

α. (10%) Το 300 π.Χ., ο Ευκλείδης έθεσε το ακόλουθο πρόβλημα: ποιό είναι το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με το μεγαλύτερο εμβαδόν ανάμεσα στα ορθογώνια παραλληλόγραμμα που έχουν περίμετρο ίση με L. Αυτό το πρόβλημα θεωρείται ως ένα από τα πρώτα γνωστά προβλήματα βελτιστοποίησης στην ιστορία. Διατυπώστε το στην μορφή του γενικού προβλήματος βελτιστοποίησης και λύστε το.

β. (20%) Μια τηλεπικοινωνιακή εταιρεία θέλει να εγκαταστήσει μία νέα κεραία για να συνδέσει τέσσερις σημαντικούς νέους πελάτες στο δίκτυό της. Η κεραία πρέπει να είναι όσο κοντύτερα γίνεται σε κάθε πελάτη με προτεραιότητα στους καλύτερους πελάτες. Όμως, από τους κανονισμούς της ρυθμιστικής αρχής τηλεπικοινωνιών, δεν επιτρέπεται η εγκατάσταση νέας κεραίας σε απόσταση μικρότερη των 10 χιλιομέτρων από τις άλλες δύο υπάρχουσες κεραίες της περιοχής οι οποίες ευρίσκονται στα σημεία $(-5, 10)$ και $(5, 0)$. Οι συντεταγμένες εκφράζονται σε χιλιόμετρα από την βάση της τηλεπικοινωνιακής εταιρείας. Η εταιρεία γνωρίζει τις συντεταγμένες του κάθε πελάτη και τον αριθμό των ωρών επικοινωνίας που ο καθένας έχει ζητήσει να καταναλώσει. Τα δεδομένα αυτά δίνονται στον παρακάτω πίνακα. Μεγαλύτερος αιτούμενος αριθμός ωρών επικοινωνίας αντιστοιχεί σε μεγαλύτερη προτεραιότητα του πελάτη. Διατυπώστε το παραπάνω πρόβλημα προσδιορισμού των συντεταγμένων της νέας κεραίας στην μορφή του γενικού προβλήματος βελτιστοποίησης.

Πελάτης	Συντεταγμένες	Ώρες
1	(5,10)	200
2	(10,5)	150
3	(0,12)	200
4	(12,0)	300

Ασκηση 2. (30%)

Υλοποιήστε προγραμματιστικά τους αλγορίθμους αναγνώρισης τοπικών βελτιστοποιητών που βασίζονται στις ελάσσονες υποορίζουσες και τις ιδιοτιμές Εσσιανού πίνακα και εφαρμόστε τους για να βρείτε τους τοπικούς βελτιστοποιητές των συναρτήσεων

$$f(x_1, x_2) = 8x_1^2 + 3x_1x_2 + 7x_2^2 - 25x_1 + 31x_2$$

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2^2 + x_2^4 - x_2^5$$

$$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

Σχεδιάστε με κάταλληλο Μαθηματικό Λογισμικό τις αντίστοιχες επιφάνειες εστιάζοντας στις περιοχές των κρίσιμων σημείων και σχολιάστε την συμπεριφορά των συναρτήσεων σχετικά με το αν το κάθε σημείο έχει αναγνωριστεί ως τοπικός βελτιστοποιητής ή όχι.

Ελέγξτε αν οι βελτιστοποιητές που βρήκατε είναι και ολικοί.

Ασκηση 3. (40%)

Υλοποιήστε προγραμματιστικά τη μέθοδο Steepest Descent και εφαρμόστε την για να βρείτε τους τοπικούς βελτιστοποιητές των συναρτήσεων

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}Q\mathbf{x} - \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}Q\mathbf{x} - \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, \quad Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Θεωρήστε ακρίβεια $\epsilon = 10^{-5}$ και διαφορετικά αρχικά σημεία $\mathbf{x}_0$ της επιλογής σας. Υλοποιήστε την περίπτωση σταθερού βήματος α, το οποίο θα δίνεται από τον χρήστη. Καταγράψτε τα αποτελέσματα σε πίνακες, όπου δίνονται οι τιμές του διανύσματος $\mathbf{x}_k$ της ακολουθίας της Steepest Descent, οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης $f(\mathbf{x}_k)$ καθώς και της νόρμας $||\nabla f(\mathbf{x}_k)||$ της κλίσης της f στα σημεία αυτά. Σχεδιάστε τους διάφορους όρους της ακολουθίας της Steepest Descent και εξηγήστε ποιοτικά τη συμπεριφορά σύγκλισης της μεθόδου.

Σε κάθε άσκηση, συμπεριλάβετε τους κώδικες που υλοποιήσατε.

Προθεσμία παράδοσης: 17/5/2022

Επικοινωνία: ntsitsas@csd.auth.gr