VO 051011
Technische Grundlagen der Informatik

Begleitende Folien zur Vorlesung

Wintersemester 2023

Vortragende: Peter Reichl, Andreas Janecek

Zuletzt aktualisiert: 28. September 2023

01 BIT

Überblick

Literatur

- Grundlagen der Technischen Informatik 5. Auflage (Hoffmann, Hanser-Verlag): Kapitel 3
- Mikroprozessortechnik (Wüst, Vieweg+Teubner): Kapitel 2
- Informatik (Blieberger, Springer-Verlag): Kapitel 7+8
- *(Computerarchitektur (Tanenbaum): Anhang A und B)*

Überblick

Additionssysteme: Beispiel

Römisches Zahlensystem

- **Wert einer Zahl durch Form und *Anzahl* der Zeichen (Symbole) bestimmt**
- I=1, V=5, X=10, L=50, C=100, D=500, M=1000
- XLIX = 49 = -10+50-1+10
- CDXCV = 495 = -100+500-10+100+5
- MMXIX = 2019 = 1000+1000+10-1+10

Additionssysteme: Überblick

Additionssysteme

- Addition einfach, kein Übertrag
- Restliche Operationen mühsam
- Darstellung großer Zahlen mühsam
- Keine Null!
- Maschinelle Darstellung?!

Stellenwertsysteme

Stellenwertsysteme: Überblick

- **Wert einer Zahl durch Form und *Position* der Zeichen (Symbole) bestimmt**
- "Positionssystem", "Polyades Zahlensystem"
- **Basis** B: $B \in \mathbb{N}$; $B \geq 2$
- Zahl x wird in Potenzen von B zerlegt
- B verschiedene Symbole, Ziffern 0 bis $B - 1$
- n ... Anzahl der Ziffern, b_i ... Werte der einzelnen Ziffern

$$x = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \cdot B^i = b_0 \cdot B^0 + b_1 \cdot B^1 + b_2 \cdot B^2 + \cdots + b_{n-1} \cdot B^{n-1}$$

Dezimalsystem

Basis 10

$$x = 2017_{10} = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

Binärsystem ("Dualsystem")

Basis 2

$$x = 11001_2 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 25_{10}$$

Nur zwei verschiedene Zustände!

- = Minimalvariante
- **technisch am einfachsten realisierbar**

Oktalsystem

Basis 8

$$x = 315_8 = 3 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 = 205_{10}$$

Hexadezimalsystem

Hexadezimalsystem

Hex:	0	1	2	...	9	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
Dez:	0	1	2	...	9	10	11	12	13	14	15

Basis 16

$$x = F1_{16} = \texttt{0xF1} = 15 \cdot 16^{1} + 1 \cdot 16^{0} = 241_{10}$$

Gebrochene Zahlen: Überblick

- Bei **gebrochenen Zahlen** trennt das Komma den ganzzahligen vom gebrochenen Teil
- **Basis** B; $B \geq 2$; Ziffern 0 bis $B - 1$
- n: Anzahl der **signifikanten** Stellen **vor** dem Komma
- m: Anzahl der **signifikanten** Stellen **nach** dem Komma

$$x = \sum_{i=-m}^{n-1} b_i \cdot B^i =$$

$$b_{-m} \cdot B^{-m} + b_{-m+1} \cdot B^{-m+1} + b_{-m+2} \cdot B^{-m+2} + \cdots +$$

$$\cdots + b_0 + b_1 \cdot B + b_2 \cdot B^2 + \cdots +$$

$$\cdots + b_{n-2} \cdot B^{n-2} + b_{n-1} \cdot B^{n-1}$$

Gebrochene Zahlen: Beispiel

Gebrochene Dezimalzahl

$$x = 23,42_{10} = 2 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{0} + 2 \cdot 10^{1} = 23,42_{10}$$

Gebrochene Binärzahl

$$x = 10,011_{2} = 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{0} + 1 \cdot 2^{1} = 2,375_{10}$$

Konvertierung: Methode für Ganzzahlen

Basis 10 $\Rightarrow$ 2

- (Ganz)Zahl so lange durch 2 dividieren, bis 0 erreicht
- Jeweilige Reste (rückwärts gelesen) ergeben Binärzahl

Basis 2 $\Rightarrow$ 10

- Potenzen von 2 summieren, entsprechen den gesetzten Bits der Binärzahl
- Siehe Folien zu Stellenwertsysteme

Beispiel: 373_{10}

Quotient	Rest
373	
186	1
93	0
46	1
23	0
11	1
5	1
2	1
1	0
0	1

$373_{10} = 101110101_2$ (Tabelle von unten nach oben lesen!)

Konvertierung: Methode für Ganzzahlen

Basis 10 $\Rightarrow$ 16

- Zahl so lange durch 16 dividieren, bis 0 erreicht
- Jeweilige Reste ergeben Hexadezimalzahl
- Achtung: falls Rest $> 9 \rightarrow$ durch entspr. Buchstaben ersetzen!

Basis 16 $\Rightarrow$ 10

- Potenzen von 16 summieren
- Siehe Folien zu Stellenwertsysteme

Beispiel: 373_{10}

Quotient	Rest
373 : 16 = 23	5
23 : 16 = 1	7
1 : 16 = 0	1

$373_{10} = 175_{16}$ (Tabelle von unten nach oben lesen!)

Beispiel: 2702_{10}

Quotient	Rest
2702 : 16 = 168	14 (E)
168 : 16 = 10	8
10 : 16 = 0	10 (A)

$2702_{10} = A8E_{16}$ (Tabelle von unten nach oben lesen!)

Konvertierung: Methode für gebrochene Zahlen

Basis 10 $\Rightarrow$ 2

- Ganzzahlen (Zahlen links vom Komma) trennen

$\Rightarrow$ “normale” Umrechnung

- Ziffernfolge rechts vom Komma kann nicht immer exakt berechnet werden

$\Rightarrow$ Häufig nur Näherungswert möglich

Einfache Beispiele für exakte Umrechnung

Dezimalsystem	Dualsystem
0,5	$0,1_2$
0,25	$0,01_2$
0,125	$0,001_2$

Konvertierung zwischen Basen 2, 8, 16

Abkürzung

- Basis 2 $\Rightarrow$ Basis 8: Dreiergruppen bilden ($2^3 = 8$)

$$0\underbrace{111}_{7}\underbrace{101}_{5}\underbrace{110}_{6}\underbrace{100}_{4}\underbrace{011}_{3_8}$$

- Basis 2 $\Rightarrow$ Basis 16: Vierergruppen bilden ($2^4 = 16$)

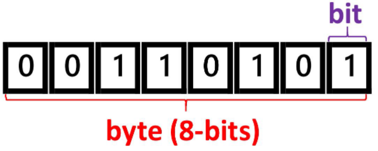
$$\underbrace{0111}_{7}\underbrace{1011}_{B}\underbrace{1010}_{A}\underbrace{0011}_{3_{16}}$$

Geht natürlich auch in die andere Richtung!

Bit und Byte

- Bit = **bi**nary dig**it**
- Zwei Zustände: “0” und “1”
- 1 bit ⇒ 2 Zustände, 2 bit ⇒ 4 Zustände, 3 bit ⇒ 8 Zustände, ... , n bit ⇒ 2^n Zustände

- Byte = Folge von 8 Bit (Oktett)



Dezimal- und Binärpräfixe

Vielfache von Bit

Dezimalpräfix			Binärpräfix		
Name	**Symbol**	**Wert**	**Name**	**Symbol**	**Wert**
Kilobit	kbit	10^3	Kibibit	Kibit	2^{10}
Megabit	Mbit	10^6	Mebibit	Mibit	2^{20}
Gigabit	Gbit	10^9	Gibibit	Gibit	2^{30}

Vielfache von Byte

Dezimalpräfix			Binärpräfix		
Name	**Sym.**	**Wert**	**Name**	**Sym.**	**Wert**
Kilobyte	kB	10^3 Byte	Kibibyte	KiB	2^{10} Byte
Megabyte	MB	10^6 Byte	Mebibyte	MiB	2^{20} Byte
Gigabyte	GB	10^9 Byte	Gibibyte	GiB	2^{30} Byte

Mit steigender Größe wird der Unterschied immer bedeutender

Most/Least Significant Bit / Byte

msb und lsb

- msb = most significant **bit** = höchstwertiges bit
- lsb = least significant **bit** = niedrigstwertiges bit

Dualsystem vs. Dezimalsystem

$$10011_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$
$$17564_{10} = 1 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$$

MSB und LSB

- MSB = Most Significant **Byte** = höchstwertiges Byte
- LSB = Least Significant **Byte** = niedrigstwertiges Byte

Überblick

Addition im Dualsystem

Additionstabelle

A	+	B	=	Übertrag	Summe(Σ)
0	+	0	=	0	0
0	+	1	=	0	1
1	+	0	=	0	1
1	+	1	=	1	0

Übertrag (engl. carry) bei nächsthöherer Stelle berücksichtigen!

Addition im Dualsystem

Beispiel: Zwei 8 Bit Dualzahlen addieren

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrr}
 & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
+ & & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
 & \color{red}{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

Carry-Bit

- **Ergebnis kann 9 Bit lang sein!**
- Wird in einem **Spezialregister** gespeichert
- Muss nach Operation ausgelesen werden
- Ansonsten würden wir most significant bit verlieren und einen Überlauf haben!

Subtraktion im Dualsystem

Subtraktion

- Prinzipiell ist eine Subtraktion im Dualsystem relativ einfach durchführbar (negatives Ergebnis möglich!)
- Rechner können keine direkte Subtraktion durchführen (würde zusätzliche Schaltungen erfordern)
- **Subtraktion auf Addition zurückführbar**
- **Komplement des Subtrahenden wird zum Minuenden addiert**
- **Komplementbildung** im Dualsystem besonders einfach (Invertierung bzw. **NOT**)
- **Einerkomplement vs. Zweierkomplement**

Komplement im Dezimalsystem

Differenz zweier zweistelliger Zahlen im Dezimalsystem:

$$
\begin{aligned}
b - a &= b - a + 100 - 100 && (1)\\
b - a &= b + (100 - a) - 100 && (2)\\
b - a &= b + \quad \overline{a} \quad - 100 && (3)
\end{aligned}
$$

- Differenz $(100 - a)$, d.h. die Differenz zur **nächsthöheren** Zehnerpotenz = Komplement von a, Symbol: $\overline{a}$
- Anstatt $b - a$ rechnen wir $b + \overline{a}$ und subtrahieren anschließend 100.
- Subtraktion von 100 $\rightarrow$ Übertrag in dritter Stelle streichen

Komplement im Dezimalsystem

Beispiel: 17 – 14

$$\begin{array}{rr} & 17_{10} \\ - & 14_{10} \\ \hline & 3_{10} \end{array}$$

Komplement:

$$\begin{array}{rr} & 100_{10} \\ - & 14_{10} \\ \hline & 86_{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & 17_{10} \\ + & 86_{10} \\ \hline & \cancel{1}03_{10} \end{array}$$

- Komplementbildung erfordert immer noch Subtraktion, im Binärsystem allerdings nicht (kommt gleich)
- Anderes Problem: Was passiert wenn Ergebnis negativ, d.h. $b - a$ bei $a > b$?

Komplement im Dezimalsystem

Beispiel: 45 − 81

$$\begin{array}{rr} & 45_{10} \\ - & 81_{10} \\ \hline - & 36_{10} \end{array} \qquad \text{Komplement:} \quad \begin{array}{rr} & 100_{10} \\ - & 81_{10} \\ \hline & 19_{10} \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 45_{10} \\ + & 19_{10} \\ \hline & 64_{10} \end{array}$$

- **<u>ERGEBNIS IST FALSCH!</u>**
- Kein Übertrag aufgetreten, daher auch nicht streichbar
- Subtraktion fehlt! Zwischenergebnis rückkomplementieren!

$$\begin{aligned} 45 - 81 &= 45 + (100 - 81) - 100 && (4) \\ &= 45 + 19 - 100 && (5) \\ &= 64 - 100 = -36 && (6) \end{aligned}$$

Komplement im Dezimalsystem

Rückkomplementieren

$$
\begin{aligned}
b - a &= b + (100 - a) - 100 \quad &(7)\\
b - a &= [b + (100 - a)] - 100 \quad &(8)\\
b - a &= c - 100 \quad &(9)\\
b - a &= -(100 - c) \quad &(10)
\end{aligned}
$$

- $c < 0$; $-(100 - c) =$ negatives Komplement von c!
- **Falls kein Übertrag vorhanden: Rückkomplementieren**

$\Rightarrow$ Ergebnis ist negativ

- **Falls Übertrag vorhanden, diesen streichen**

$\Rightarrow$ Ergebnis ist positiv

Komplement

Komplement im Binärsystem

- Wir bilden zuerst das **Stellen**komplement
- Für jede Ziffer: Differenz zu größtmöglichem Wert ($= 1$)
- Ist die Ziffer 1, ist die Differenz 0
- Ist die Ziffer 0, ist die Differenz 1
- Entspricht Boole'scher (logischer) Operation **NOT**
- Für vollständiges (Zweier-)Komplement: $+1$

Im Dezimalsystem (zweistellige Zahl)

- $(99 - a)$: **Stellen**komplement, ziffernweise berechenbar!
- Für jede Ziffer: Differenz zu größtmöglichem Wert ($= 9$)
- Vollständiges Komplement durch Addition von 1

Subtraktion im Dualsystem

Beispiel: Zwei 8 Bit Dualzahlen subtrahieren

	55_{10}	0	0	1	1	0	1	1	1_2
-	26_{10}	0	0	0	1	1	0	1	0_2
	29_{10}	?	?	?	?	?	?	?	$?_2$

Subtraktion im Dualsystem

1.) Komplementbildung des Subtrahenden

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
NOT & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0_2 \\
\hline
= & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1_2 \\
+ & & & & & & & & 1_2 \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0_2
\end{array}
$$

2.) Addition

Übertrag vorhanden ⇒ Ergebnis positiv!

$$
\begin{array}{cc|ccccccccc}
 & & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1_2 & \\
+ & & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0_2 & \\
\hline
 & \color{red}{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1_2 & = 29_{10}
\end{array}
$$

Subtraktion im Dualsystem

Beispiel: Zwei 8 Bit Dualzahlen subtrahieren

	26_{10}	0	0	0	1	1	0	1	0_2
-	55_{10}	0	0	1	1	0	1	1	1_2
	-29_{10}	?	?	?	?	?	?	?	$?_2$

1.) Komplementbildung des Subtrahenden

NOT	0	0	1	1	0	1	1	1_2
$=$	1	1	0	0	1	0	0	0_2
$+$								1_2
	1	1	0	0	1	0	0	1_2

Subtraktion im Dualsystem

2.) Addition

	0	0	0	1	1	0	1	0_2
	1	1	0	0	1	0	0	1_2
	1	1	1	0	0	0	1	1_2

3.) Rückkomplementbildung

<u>KEIN</u> Übertrag ⇒ Ergebnis negativ!

Zwischenergebnis:	1	1	1	0	0	0	1	1_2
Stellenkomplement:	0	0	0	1	1	1	0	0_2
+1	0	0	0	0	0	0	0	1_2
=	0	0	0	1	1	1	0	1_2

- $11101_2 = 29_{10}$ ⇒ Minus davorschreiben: -29_{10}

Verschiebeoperationen (Shifting)

Verschieben nach links (bei Big Endian)

Verschieben einer Zahl um S Stellen nach **links** entspricht **Multiplikation** mit B^S

$$x \cdot B^S = \left(\sum_{i=0}^{n-1} b_i \cdot B^i \right) \cdot B^S = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \cdot B^i \cdot B^S = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \cdot B^{i+S}$$

Beispiel: 01100111_2 = 8bit unsigned integer

Stelle	7	6	5	4	3	2	1	0
Vorher	0	1	1	0	0	1	1	1
Nachher	1	1	0	0	1	1	1	0

Vorsicht vor Überläufen (Overflows)!

Verschiebeoperationen (Shifting)

Verschieben nach rechts (bei Big Endian)

Verschieben einer Zahl um S Stellen nach **rechts** entspricht **Division** durch B^S

$$x \cdot B^{-S} = \left(\sum_{i=0}^{N-1} b_i \cdot B^i \right) \cdot B^{-S} = \sum_{i=0}^{N-1} b_i \cdot B^i \cdot B^{-S} = \sum_{i=0}^{N-1} b_i \cdot B^{i-S}$$

Beispiel: 1010_2 = 4bit unsigned integer

Stelle	3	2	1	0
Vorher	1	0	1	0
Nachher	0	1	0	1

Vorsicht vor Unterläufen (Underflows)!

Überblick

Negative Binärzahlen

Verschiedene Ansätze

1. Vorzeichen und Betrag: Vorzeichenbit, dann absolute Größe der Zahl
2. Einerkomplement: überholt
3. Zweierkomplement: Standard für Integer
4. Exzessdarstellung: Wertebereichsverschiebung (IEEE754)

Vorzeichen und Betrag

Vorzeichen und Betrag

n	$n-1$	$\dots$	0
VZ	Betrag		

- **Führendes Bit codiert Vorzeichen:** (0/1 $\Rightarrow$ +/-)
- Grundsätzlich:
  - $z = +0$ bis $+2^{n-1} - 1 \quad \Rightarrow 000\dots00$ bis $011\dots11$
  - $z = -0$ bis $-(2^{n-1} - 1) \Rightarrow 100\dots00$ bis $111\dots11$
- n-1: Aufteilung in positiven/negativen Bereich benötigt 1 Bit
- -1: Null wird als -0 und $+0$ kodiert

$$-(\mathbf{2^{n-1}-1}) \leq \mathbf{z} \leq \mathbf{2^{n-1}-1}$$

Vorzeichen und Betrag

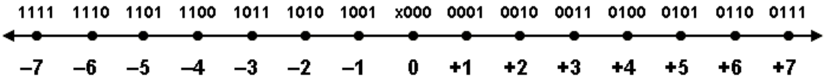
Beispiel

- Wortlänge 4 Bits, $\Rightarrow 2^4 = 16$ Kombinationen
- Bei positiven Zahlen: 0 bis $2^4 - 1 = 15$ darstellbar
- Ausweitung auf negative Zahlen: Darstellungsbereich auf negative und positive Hälfte aufteilen
- **Zahlen von -7 bis 7 darstellbar**

8-Bit-Prozessoren

$$x = 8 \Rightarrow -127 \leq z \leq 127$$

Vorzeichen und Betrag



[1]

[1] http://www.iris.uni-stuttgart.de/lehre/eggenberger/eti/02_Codierung/Zahlendarstellung/NegativeZahlen.htm

Stellenkomplement (“Einerkomplement”)

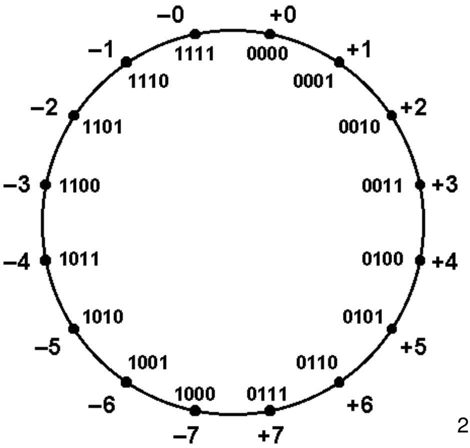
Stellenkomplement $\overline{B-1}$

- Nullen und Einser werden vertauscht
- Stellenkomplement im Binärsystem auch “Einerkomplement” genannt
- **Addition des Komplements** $\overline{B-1}$ **zur urspr. Zahl** B **ergibt immer höchstzulässige Zahl** - ergibt sich aus der Definition!

Beispiel

$$\begin{array}{llcllll} & B & = & 1 & 0 & 1 & 0_2 \\ + & \overline{B-1} & = & 0 & 1 & 0 & 1_2 \\ & B+\overline{B-1} & = & 1 & 1 & 1 & 1_2 \end{array}$$

Stellenkomplement (“Einerkomplement”)



[2]

[2] http://www.iris.uni-stuttgart.de/lehre/eggenberger/eti/02_Codierung/Zahlendarstellung/NegativeZahlen.htm

Stellenkomplement (“Einerkomplement”)

Eigenschaften

- Zwei Darstellungen für Zahl 0
- Einmal mit positivem und einmal mit negativem Vorzeichen

$\Rightarrow$ Redundanz (begrenzte Anzahl an Bits)

$\Rightarrow$ Bringt Probleme, wenn bei einer Operation die Null durchschritten wird

Verbesserung: Zweierkomplement

- Diese Probleme werden bei der Kodierung von Zahlen in der Zweierkomplementdarstellung vermieden

Zweierkomplement

Zweierkomplement $\overline{B}$

- **Vollständiges Komplement** zur jeweiligen Basis

$\Rightarrow$ Dezimalsystem: 10, Binärsystem: 2, ...

- Basis 2: “Zweierkomplement”
- Berechnung: Stellenkomplement + 1
- **Addition von $\overline{B}$ zur urspr. Zahl B ergibt immer Null**

Beispiel

$$
\begin{array}{lcccccc}
B & = & & 1 & 0 & 1 & 0_2 \\
\overline{B} & = & & 0 & 1 & 1 & 0_2 \\
B + (\overline{B}) & = & 1 & 0 & 0 & 0 & 0_2
\end{array}
$$

Zweierkomplement

Trick zur schnelleren Umwandlung (Wikipedia)

- ... einer negativen in eine positive Binärzahl oder umgekehrt von Hand:

$\Rightarrow$ Von rechts angefangen, alle Nullen und die erste Eins abschreiben und alle nachfolgenden Stellen invertieren

Beispiel

$$
\begin{array}{lccccccccc}
B & = & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0_2 \\
\overline{B} & = & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0_2
\end{array}
$$

Zweierkomplement

Interpretation des “Vorzeichenbits” (Wikipedia)

- Alle Bits haben die gleiche Wertigkeit wie bei positiver Darstellung
- ABER: Das msb (most significant bit = höchstwertige bit) erhält die negative Wertigkeit

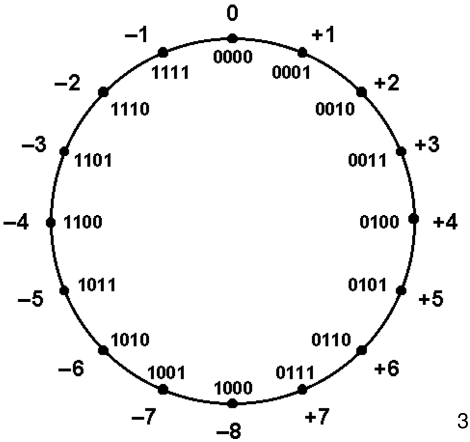
$\Rightarrow$ msb wird abgezogen (falls es 1 ist)

Beispiel

$$
\begin{array}{lcccccccccll}
B & = & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0_2 & = & +40_{10} \\
\overline{B} & = & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0_2 & = & -40_{10}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
B &= 32 + 8 = +40_{10} \\
\overline{B} &= -128 + 64 + 16 + 8 = -40_{10}
\end{aligned}
$$

Zweierkomplement



[3]

[3] http://www.iris.uni-stuttgart.de/lehre/eggenberger/eti/02_Codierung/Zahlendarstellung/NegativeZahlen.htm

Komplemente

Es gilt:

$$\begin{aligned} B + \overline{B-1} + 1 &= 0 \\ B + \overline{B} &= 0 \\ \overline{B} &= -B \end{aligned}$$

Zweierkomplement auch <u>interpretierbar</u> als negative <u>Größe</u> der Zahl *B*!

Exzessdarstellung

Exzessdarstellung

- Zur Zahl z wird eine Exzess q addiert, damit das Ergebnis w (= die Darstellung) nicht negativ ist.
- Exzess q muss daher gleich dem Betrag der kleinsten negativen Zahl gewählt werden

Exzessdarstellung

Beispiel: $n = 2^5 \Rightarrow q = 2^4 = 16$

- $z = -2^4$ bis -1 $\Rightarrow$ 00000 bis 01111
- $z = 0$ $\Rightarrow$ $10000 (= q)$
- $z = 1$ bis $+(2^4 - 1)$ $\Rightarrow$ 10001 bis 11111
- Führendes Bit codiert Vorzeichen: 0/1 $\Rightarrow$ -/+
- Null hat nur eine Codierung!
- **Ordnungsrelation bleibt erhalten!**

$\Rightarrow$ **Vergleiche zwischen Zahlen!**

Überblick

Numerische Berechnungen und Numerik

- Berechnungen unter Verwendung reeller Zahlen (oder deren *Näherung*!) nennt man *numerische Berechnungen*
- Die dazugehörige mathematische Disziplin: *Numerik*

Näherung

- Speicher und Rechenzeit begrenzt
- Nur signifikante Stellen speichern

$\Rightarrow$ Oft kann eine Zahl nicht exakt im Computer gespeichert werden, sondern nur eine Näherung (*Approximation*) davon

- Beispiel: $0.1_{10} \approx 0.00011001100110011...$

$\Rightarrow$ Dadurch ergibt sich auch ein entsprechender *Rundungsfehler*

Dezimaltrennzeichen

Notation des Dezimaltrennzeichens: “,” vs. “.”

- Festkomma-Darstellung vs. Fixed-point arithmetic
- Gleitkomma-Darstellung vs. Floating-point arithmetic

Achtung auf die Notation

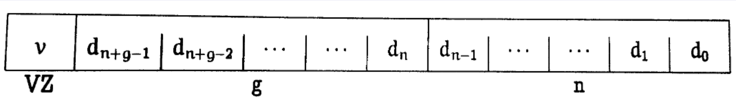
Auf den nächsten Folien wird ein Punkt (und kein Komma) als Dezimaltrennzeichen verwendet

Festpunkt-(Festkomma)-Darstellung

Beispiel zweier Dezimalzahlen in Festkomma-Darstellung mit 12 Vorkomma und 22 Nachkommastellen

- 000000000000.0000000000000000001602
- 149700000000.0000000000000000000000

Mögliche Darstellung im Computer



Der Betrag einer N = n + g + 1 Bit breiten ganzen Zahl *Z* wird in *g* Vorkomma- und *n* Nachkommastellen unterteilt

Festpunkt-(Festkomma)-Darstellung

Mögliche Darstellung im Computer

v	d_{n+g-1}	d_{n+g-2}	$\cdots$	$\cdots$	d_n	d_{n-1}	$\cdots$	$\cdots$	d_1	d_0
VZ			g					n		

$$vd_{N-2}d_{N-3}\cdots d_1 d_0 = (-1)^v \cdot 2^{-n} \sum_{j=0}^{N-2} d_j \cdot 2^j = (-1)^v \cdot d_{N-2} \cdots d_1 d_0$$

Beispiel: N = 16 Bit breite und n = 3 Nachkommastellen

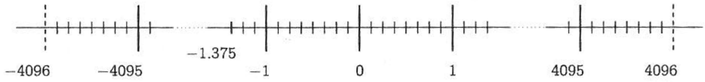
$$vd_{14}d_{13}\cdots d_1 d_0 = (-1)^v \cdot 2^{-3} \sum_{j=0}^{14} d_j \cdot 2^j$$

$$1000\,0000\,0000\,1011 = -(1.011)_2 = (-1)^1 \cdot 2^{-3} \cdot (2^3 + 2^1 + 1^0)$$

Festpunkt-(Festkomma)-Darstellung

Bsp: Kleinste und größte darstellbare Zahl mit $N = 16$, $n = 3$

- 1111 1111 1111 1111 $= -4095.875_{10}$
- 0111 1111 1111 1111 $= +4095.875_{10}$
- Zwei aufeinanderfolgende Zahlen unterscheiden sich jeweils um den Betrag 0000 0000 0000 0001 $= 0.125_{10}$
- Damit überdeckt dieses Festpunkt-System auf der reellen Zahlengeraden das Intervall $[-4095.875_{10}, +4095.875_{10}]$ **gleichmäßig** mit konstantem Abstand $2^{-n} = 0.125_{10}$



Festpunkt-Zahlensystem mit $n = 3$ Nachkommastellen

Festpunkt-(Festkomma)-Darstellung

Probleme der Festpunkt-Darstellung

- Intervall zwischen größter und kleinster darstellbarer Zahl sehr klein
- Größere Zahlen sind nur über eine Reduktion der Nachkommastellen darstellbar

$\Rightarrow$ Verlust an Genauigkeit ist für große Zahlen oft vernachlässigbar, da die Bedeutung der Nachkommastellen mit steigenden Absolutbeträgen sinkt

$\Rightarrow$ Die Verwendung von sehr kleinen von Null verschiedenen Zahlen ist jedoch sehr wichtig, z.B. für wissenschaftliche Anwendungen

- Festpunkt-Darstellung kann nicht beiden Forderungen (Darstellung sehr großer UND sehr kleiner Zahlen) genügen

Gleitpunkt-(Gleitkomma/Fließkomma)-Darstellung

Fließkommadarstellung

$$x = (-1)^V \cdot M \cdot B^{\pm E}$$

- V ... Vorzeichen (V=1: negative Zahl, V=0: positive Zahl)
- M ... Mantisse: Für Genauigkeit entscheidend
- B ... Basis
- E ... Exponent: Für Bereich entscheidend

Englische Bezeichnung

"Floating-point" (Dezimalpunkt statt Komma)

Normalisierte Gleitpunkt-Darstellung

Beispiele

- $-0.0000123_{10} = -123 \cdot 10^{-7} = -12.3 \cdot 10^{-6}$
- $2016_{10} = 20.16 \cdot 10^{2} = 0.2016 \cdot 10^{4}$
- ...

Mehrdeutigkeiten möglich

- Mögliche **Normalisierung** um Mehrdeutigkeiten zu vermeiden:

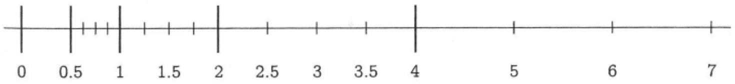
$\Rightarrow$ Mantisse hat genau eine Vorkommastelle, die ungleich 0 ist

- $-1.23 \cdot 10^{-5}$
- $2.016 \cdot 10^{3}$

Normalisierte Gleitpunkt-Darstellung

Bsp: Gleitpunkt-Zahlensystem mit $B = 2$, $E_{min} = -1$, $E_{max} = 2$ und einer Mantissenlänge von $p = 3$

- Achtung: hier fehlen die negativen Zahlen!



Gleitpunkt-Zahlensystem mit $b = 2$, $p = 3$, $e_{min} = -1$, $e_{max} = 2$

- Lange vertikale Markierungen entsprechen Mantisse von 1.00

$\Rightarrow$ $+1.00 \cdot 2^{-1} = 0.5_{10}$ $\quad +1.00 \cdot 2^{0} = 1_{10}$ $\quad +1.00 \cdot 2^{1} = 2_{10} \cdots$

- Bsp.: $+1.01 \cdot 2^{-1} = 0.101_2 = 0.5_{10} + 0.125_{10} = +0.625_{10}$
- Bsp.: $+1.11 \cdot 2^{1} = 11.1_2 = 2_{10} + 1_{10} + 0.5_{10} = +3.5_{10}$

Denormalisierte Gleitpunkt-Darstellung

Problem im vorherigen Beispiel: Lücke zwischen 0 und kleinsten positiven darstellbaren Zahl 0.5_{10}

- Grund: Normalisierungsbedingung ($m_0 \; ! = 0$)
- U.a. gilt nun die Eigenschaft $x = y \Leftrightarrow x - y = 0$ NICHT mehr

$\Rightarrow$ Bsp.: y = $1.11 \cdot 2^{-1} = 0.875_{10}$; x = $1.00 \cdot 2^{0} = 1.00_{10}$

$\Rightarrow$ x - y = $0.01 \cdot 2^{-1} = 0.125_{10}$ kann nicht als normalisierte Gleitpunktzahl dargestellt werden

$\Rightarrow$ Nächstliegende Zahl wäre Null. Durch eine Rundung auf Null kann ein folgenschwerer Laufzeit-Fehler passieren

$\Rightarrow$ Beispiel: `if (x!=y) then z = 1/(x-y);`

Denormalisierte Gleitpunkt-Darstellung

Um Eigenschaft $x = y \Leftrightarrow x - y = 0$ zu garantieren, ...

- ...erweitert man die normalisierten Zahlen um genau jene Zahlen, die betragsmäßig zu klein sind, um normalisiert dargestellt werden zu können
- Diese durch Normalisierungsbedingung ($m_0 \, ! = 0$) weggefallenen Zahlen, werden zurückgewonnen in dem man $m_0 = 0$ für $E = E_{min}$ zulässt

$\Rightarrow$ Diese Zahlen nennt man **denormalisierte** Zahlen

$\Rightarrow$ Sie liegen sämtlich im Bereich $[-B^{E_{min}}, +B^{E_{min}}]$

Gleitpunkt-Zahlensystem inklusive denormalisierter Gleitpunktzahlen

Maschinengenauigkeit

Maß für den Rundungsfehler, der bei der Rechnung mit Gleitkommazahlen auftritt

- Bsp.: Zwei aufeinanderfolgende binäre Gleitkommazahlen sind
- $x = 1.000...00$
- $y = 1.000...01$
- Die Differenz beschreibt die relative Genauigkeit des Zahlensystems

$\Rightarrow$ “Maschinengenauigkeit” bzw. “Maschinen-Epsilon”

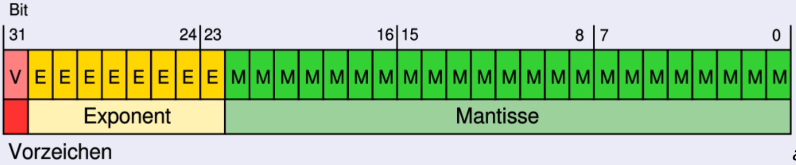
- $\epsilon = 2^{-p}$

IEEE 754 Standard (aktuell: 2008)

Verschiedene Formate definiert - die wichtigsten:

1. Einfache Genauigkeit: 32 Bits ("Single-precision")
2. Doppelte Genauigkeit: 64 Bits ("Double-precision")

Einfache Genauigkeit



[a]

[a] http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:IEEE-754-single.svg&filetimestamp=20110525181832

Genauigkeit $\Rightarrow$ nur endliche Genauigkeit möglich

Single-Precision: 32 bit

- VZ: 1 bit, Exponent: 8 bit, Mantisse: 23 Bit

$\Rightarrow$ Maschinenepsilon $\epsilon = 2^{-23} \Rightarrow$ dezimal $\approx 1.2 \cdot 10^{-7}$

$\Rightarrow$ Anzahl Dezimalstellen: ≈ 7

Double-Precision: 64 bit

- VZ: 1 bit, Exponent: 11 bit, Mantisse: 52 Bit

$\Rightarrow$ Maschinenepsilon $\epsilon = 2^{-52} \Rightarrow$ dezimal $\approx 2.2 \cdot 10^{-16}$

$\Rightarrow$ Anzahl Dezimalstellen: ≈ 16

Darstellung und Codierung im IEEE 754 Standard

Exponent in Exzessdarstellung

- Biased exponent e, $e = E + q$ ($\Rightarrow E = e - q$)
- E... rechnerisch wirkende Exponent, q... Exzess/bias

$\Rightarrow$ q = 127 bei 32 Bit (single-precision)

$\Rightarrow$ q = 1023 bei 64 Bit (double-precision)

Spezielle Codierung für

- Null
- Unendlich
- Ungültige Zahl (NaN, not a number)

Beispiel: -5.375_{10} in Single Precision

Umwandlung in Dualsystem

- $-5.375_{10} = -101.011_2$

Normierung der Mantisse $\pm 1.\cdots \cdot 2^E$

- $-1.01011_2 \cdot 2^2$
- Nur Bitfolge nach dem Komma wird gespeichert: 01011
- Restlichen Stellen werden mit 0-ern aufgefüllt

$\Rightarrow$ 01011000000000000000000 (23 bit)

Exponent in Exzessdarstellung

- $e = E + q \Rightarrow 129 = 2 + 127$
- e = 10000001

Beispiel: -5.375_{10} in Single Precision

Ergebnis

- $-5.375_{10} = -101.011_2 = -1.01011_2 \cdot 2^{2(entspricht\ E)} = -1.01011_2 \cdot 2^{(129-127)(entspricht\ e-q)}$
- Vorzeichenbit = 1
- Exponent e = 10000001
- Mantisse M = 01011000000000000000000 (23 bit)

Überblick

Rundungsfehleranalyse

Wie pflanzen sich Rundungsfehler fort?

- Typisches Beispiel *Taschenrechner*:
  Ziehe k-mal die Wurzel aus 2 und quadriere anschließend das Ergebnis k-mal
- Erwartetes Ergebnis: 2
- Erzieltes Ergebnis für große k: 1

Addition dreier Maschinenzahlen

- Aufgabe: addiere $x = a + b + c$
- Maschinengenauigkeit ϵ
- Zerlegung der Gesamtrechnung:
  $e = (a +_M b)$ und $f = (e +_M c)$

Addition von Maschinenzahlen

Rundungsfehleranalyse

$$
\begin{aligned}
f &= e +_M c \\
&= (e + c)(1 + \epsilon_2) \\
&= ((a +_M b) + c)(1 + \epsilon_2) \\
&= ((a + b)(1 + \epsilon_1) + c)(1 + \epsilon_2) \\
&= a + b + c + (a + b)\epsilon_1 + (a + b + c)\epsilon_2 + (a + b)\epsilon_1\epsilon_2
\end{aligned}
$$

Erste Näherung

In erster Näherung (d.h. unter Vernachlässigung des quadratischen Terms $(a + b)\epsilon_1\epsilon_2$) ergibt sich also:

$$f = a + b + c + (a + b)\epsilon_1 + (a + b + c)\epsilon_2$$

mit $|\epsilon_1|, |\epsilon_2| \leq \epsilon$

Addition von Maschinenzahlen

Für den relativen Fehler in erster Näherung ergibt sich damit

$$f_{rel}(x) = \frac{x - f}{x} \doteq \frac{(a+b+c) - (a+b+c+(a+b)\epsilon_1 + (a+b+c)\epsilon_2)}{a+b+c}$$

und daraus

$$= -\frac{a+b}{a+b+c}\epsilon_1 - \epsilon_2$$

und wegen $|\epsilon_1|, |\epsilon_2| \leq \epsilon$ die Abschätzung

$$|f_{rel}(x)| \doteq \left| \frac{a+b}{a+b+c}\epsilon_1 + \epsilon_2 \right| \leq \left(1 + \left| \frac{a+b}{a+b+c} \right| \right) \epsilon$$

Addition von Maschinenzahlen

1. Beobachtungen für den relativen Fehler

Der relative Fehler wird groß wenn:

- $|a + b| >> |a + b + c|$, oder
- $a + b + c \approx 0$

2. Beobachtungen für den relativen Fehler

Andere Berechnungsreihenfolge liefert andere Faktoren:

- $x = (b + c) + a \to |f_{rel}| \leq \left(1 + \left|\frac{b+c}{a+b+c}\right|\right) \epsilon$
- $x = (a + c) + b \to |f_{rel}| \leq \left(1 + \left|\frac{a+c}{a+b+c}\right|\right) \epsilon$

$\Rightarrow$ Es wird also jeweils der bei der ersten Addition auftretende Fehler verstärkt!

Addition von Maschinenzahlen

Beispiel: $a = 1.11_2 \cdot 2^{-1}, \quad b = -1.10_2 \cdot 2^{-1}, \quad c = 1.10_2 \cdot 2^{-3}$

- Addition dieser Maschinenzahlen (dreistellige Mantisse inkl. führender 1) in der Reihenfolge: $(a+b)+c$
  $$\begin{aligned} x &= (1.11_2 \cdot 2^{-1} +_M (-1.10)_2 \cdot 2^{-1}) +_M 1.10_2 \cdot 2^{-3} \\ &= 1.00_2 \cdot 2^{-3} +_M 1.10_2 \cdot 2^{-3} \\ &= 1.01_2 \cdot 2^{-2} \text{ (korrektes Ergebnis)} \end{aligned}$$
- Andere Reihenfolge: $x = a + (b + c)$
  $$\begin{aligned} x^* &= 1.11_2 \cdot 2^{-1} +_M (-1.10_2 \cdot 2^{-1} +_M 1.10_2 \cdot 2^{-3}) \\ &= 1.11_2 \cdot 2^{-1} +_M (-1.00_2 \cdot 2^{-1}) \text{ (*)} \\ &= 1.10_2 \cdot 2^{-2} \end{aligned}$$
  mit relativem Fehler $\left| \frac{1.01_2 \cdot 2^{-2} - 1.10_2 \cdot 2^{-2}}{1.01_2 \cdot 2^{-2}} \right| = 20\%$

$\Rightarrow$ Also: Reihenfolge ist wichtig!

(*) Hinweis für alle Interessierten: In diesem Bsp. kann man davon ausgehen, dass im Rechenwerk für die Mantisse mehr als 3 Bit zur Verfügung stehen ("Guard Bit, Round Bit, Sticky Bit"). Das erlaubt eine genaue Berechnung der Differenz, danach wird nach der dritten signifikanten Ziffer abgeschnitten.

Addition von Maschinenzahlen

Besonders kritisch: Endergebnis nahe bei Null ("Auslöschung")

- Beispiel: Differenz zwischen $a = 3/5$ und $b = 4/7$ bei fünfstelliger Mantisse (hier 5 Stellen inkl. führender 1)
- Exaktes Ergebnis: $a - b = 1/35 \approx 0.11101_2 \cdot 2^{-5}$
- Rundung: $a = (1.0011001...)_2 \cdot 2^{-1} \approx 1.0011_2 \cdot 2^{-1}$ und $b = (1.001001...)_2 \cdot 2^{-1} \approx 1.0010_2 \cdot 2^{-1}$
- Also ergibt Rechnung: $1.0011_2 \cdot 2^{-1} - 1.0010_2 \cdot 2^{-1} = 0.0001_2 \cdot 2^{-1} = 1.0000_2 \cdot 2^{-5} = 1/32$
- Relativer Fehler: $|\frac{x-f}{x}| = |(1/35 - 1/32)/(1/35)| = 9.4\%$
- Vergleich: die Maschinengenauigkeit bei fünfstelliger Mantisse (inkl. führender 1) liegt bei ca. 3.1%

Gerundete Eingangszahlen

Differenz $y = a - b$ für Eingangszahlen mit Rundungsfehlern

- $a \to a(1 + \epsilon_a)$, $b \to b(1 + \epsilon_b)$, Maschinengenauigkeit ϵ
- Relativer Fehler bei gerundeten Eingangszahlen:

$$f_{rel}(y) = \frac{x - f}{x} = \frac{a - b - (a(1 + \epsilon_a) - b(1 + \epsilon_b))}{a - b}$$

$$= -\frac{a}{a - b} \cdot \epsilon_a + \frac{b}{a - b} \cdot \epsilon_b$$

- Eingabefehler werden also extrem verstärkt, falls sich a und b fast auslöschen!
- Das gilt aber nur für Eingangswerte mit Rundungsfehlern: Differenz mit exakten Zahlen ist ok!

Addition von Maschinenzahlen

Beispiel: Patriot-Scud Bug

- (Tragisches) Beispiel: sog. Patriot-Scud Software-Bug
- 25. Februar 1991 (Golf-Krieg): amerikanisches Raketenabwehrsystem Patriot verpasst Entdeckung einer irakischen Scud-Rakete, was zum Tod von mindestens 28 Menschen führt
- Grund: unpräzise Zeitkalkulation aufgrund von arithmetischen Rundungsfehlern

Addition von Maschinenzahlen

Beispiel: Patriot-Scud Bug

- Was war passiert?
- Interne Systemzeit misst in Zehntelsekunden. Diese Zeit wurde jeweils mit 10 malgenommen (Sekunden), und zwar über ein 24-Bit Festkommazahlenregister.
- Problem: 1/10 lässt sich im Binärsystem darin nicht exakt darstellen: Rundungsfehler nach der 24. Nachkommastelle.
- Patriot-System lief bereits über 100 Stunden, d.h. dieser kleine Rundungsfehler entsprach bereits einer Zeitdifferenz von ca. 0.34 Sekunden. In dieser Zeit fliegt eine Scud-Rakete ca. einen halben Kilometer.

Addition von Maschinenzahlen

Beispiel: Patriot-Scud Bug

- Weiteres Problem: Bugfix war eigentlich bereits eingebaut, aber nicht überall konsistent
- Konsequenz: keine gegenseitige Auslöschung der Rundungsfehler
- Ergebnis: das Patriot-System vermutete die Scud-Rakete an einer falschen Stelle und konnte sie daher nicht entdecken.

Überblick

Was ist eigentlich Informatik?

Informatik beschäftigt sich mit der

- Erfassung von Information
- Verarbeitung von Information
- Übertragung von Information
- Speicherung von Information

Information = ein Unterschied, der einen Unterschied macht

Information = Bedeutung, die durch Nachricht übermittelt wird

Information = Verringerung von Unsicherheit

Träger der Information: Zeichen (Symbol)

Menge von Symbolen $\rightarrow$ Alphabet (Code)

Wie kann man Information messen?

Idee: Informationsgehalt $I(\text{“}a\text{”})$ eines Zeichens als Funktion f der Wahrscheinlichkeit p_a für sein Auftreten

- unabhängig von Codierung
- häufiges Auftreten $\rightarrow$ geringer Informationsg.: $f = f(\frac{1}{p_a})$
- Informationsgehalt einer Zeichenkette = Summe der einzelnen Informationsgehalte:
  $\Rightarrow f(\frac{1}{p_a} \times \frac{1}{p_b}) = f(\frac{1}{p_a}) \times f(\frac{1}{p_b})$
- Idee: Logarithmus $\rightarrow f(\frac{1}{p}) = log(\frac{1}{p}) = -log(p)$
- Spezialfall: binär $\rightarrow$ Zweierlogarithmus: $f(\frac{1}{p}) = -ld(p)$

Einheit: 1 Shannon (Sh) = 1 Bit (binary digit)
(Achtung: muss nicht ganzzahlig sein!)