VO 051011
Technische Grundlagen der Informatik

Begleitende Folien zur Vorlesung

Wintersemester 2023

Vortragende: Peter Reichl, Andreas Janecek

Zuletzt aktualisiert: 28. September 2023

02 LOGIK

Überblick

Literatur

- Grundlagen der Technischen Informatik 5. Auflage (Hoffmann, Hanser-Verlag): Kapitel 4, 6
- Informatik (Blieberger, Springer-Verlag): Kapitel 11

Überblick

Boole’sche Algebra

Boole’sche Algebra

- Grundlage für digitale Schaltungen
- Kennt nur zwei Werte:
  1. **Wahre Aussage**
  2. **Falsche Aussage**
- George Boole, 1847 (!)

Aussagenlogik

Wahrheitswerte

Wahr	**Falsch**
W (wahr)	F (falsch)
T (true)	F (false)
H (high)	L (low)
1 (Bit gesetzt)	0 (Bit nicht gesetzt)

Operatoren

Unäre Operationen

- Negation („nicht“, „NOT“): $\neg$

Binäre Operationen

- Konjunktion („und“, „AND“): $\wedge$
- Disjunktion („inklusives oder“, „OR“): $\vee$
- Implikation[a]: $\Rightarrow$
- Äquivalenz: $\Leftrightarrow$

---

[a]VORSICHT: die Implikation (auch materiale Implikation, Subjunktion, Konditional genannt) drückt eine hinreichende Bedingung aus, aber keine Kausalität!

Wahrheitswerte

Wahrheitswerte

a	b	$\neg a$	$a \vee b$	$a \wedge b$	$a \Rightarrow b$	$a \Leftrightarrow b$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Ordnungsrelation (Operatorrangfolge)

1. $\neg$
2. $\wedge$
3. $\vee$

Überblick

Axiome und Gesetze

Kommutativität

- $a \wedge b = b \wedge a$
- $a \vee b = b \vee a$

Assoziativität

- $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
- $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$

Distributivität

- $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
- $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

Axiome und Gesetze

Verknüpfung mit 1 bzw. 0

- $a \wedge 1 = a$
- $a \vee 0 = a$

Komplementäres Element

- $a \wedge \neg a = 0$
- $a \vee \neg a = 1$

Axiome und Gesetze

Absorption

- $(a \wedge b) \vee a = a$
- $(a \vee b) \wedge a = a$

Auslöschung

- $a \wedge (b \vee \neg b) = a$
- $a \vee (b \wedge \neg b) = a$

Axiome und Gesetze

Idempotenz

- $a \wedge a = a$
- $a \vee a = a$

Involutivität

- $\neg(\neg a) = a$

De Morgansche Regel

- $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$
- $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$

Tautologie, Antilogie

Tautologie, Antilogie

- Tautologie: Ausdruck, der für jede Belegung **wahr** ist
- Antilogie (Kontradiktion): Ausdruck, der für jede Belegung **falsch** ist

Tautologie

Beispiel: $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \Rightarrow \mathbf{a}$

$\mathbf{a}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$	$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \Rightarrow \mathbf{a}$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Antilogie (Kontradiktion)

Beispiel: $\mathbf{f} = [\neg\mathbf{a} \vee (\neg\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})] \wedge \mathbf{a}$

$\mathbf{a}$	$\mathbf{b}$	$\neg\mathbf{a}$	$(\neg\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$	$\neg\mathbf{a} \vee (\neg\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$	f
0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0

Überblick

Normalformen

Normalformen

- Verschiedene Formen der Darstellung von logischen Aussagen möglich
- **Normierte Darstellung sinnvoll**
- **Disjunktive Normalform**
- **Konjunktive Normalform**
- **Kommen mit AND, OR, NOT aus** $\Rightarrow$ wir müssen nicht alle logischen Operationen in Hardware implementieren!

Disjunktive Normalform (DNF)

DNF

- **Vollkonjunktionen werden disjunktiv verknüpft**
- Vollkonjunktionen = alle Variablen sind konjunktiv verknüpft

$\Rightarrow$ Variablen können negiert sein

Nachfolgendes Beispiel

- Der Term: $f(e_1, e_2, e_3) = (e_1 \Rightarrow e_2) \wedge (\neg e_1 \Leftrightarrow e_3)$ soll als DNF dargestellt werden

Beispiel DNF

1.: Wahrheitstabelle

#	e_1	e_2	e_3	$e_1 \Rightarrow e_2$	$\neg e_1 \Leftrightarrow e_3$	$(e_1 \Rightarrow e_2) \wedge (\neg e_1 \Leftrightarrow e_3)$
1	0	0	0	1	0	0
2	0	0	1	1	1	1
3	0	1	0	1	0	0
4	0	1	1	1	1	1
5	1	0	0	0	1	0
6	1	0	1	0	0	0
7	1	1	0	1	1	1
8	1	1	1	1	0	0

Beispiel DNF

2.: Zeilen auswählen, Vollkonjunktionen bilden

- Auswahl der Zeilen mit **wahrem** Ergebnis (= 1)
  - Zeile 2
  - Zeile 4
  - Zeile 7
- Variablen mit Wert 0 negieren, andere direkt übernehmen, und alle konjunktiv verbinden
- $\neg e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3$, $\neg e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$, $e_1 \wedge e_2 \wedge \neg e_3$

3.: Disjunktive Normalform

Einzelne „Zeilen“ disjunktiv verbinden.

$$(\neg e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3) \vee (\neg e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) \vee (e_1 \wedge e_2 \wedge \neg e_3)$$

Beispiel DNF - finaler Vergleich

Wahrheitstabelle

#	e_1	e_2	e_3	$e_1 \Rightarrow e_2$	$\neg e_1 \Leftrightarrow e_3$	$(e_1 \Rightarrow e_2) \wedge (\neg e_1 \Leftrightarrow e_3)$
1	0	0	0	1	0	0
2	0	0	1	1	1	1
3	0	1	0	1	0	0
4	0	1	1	1	1	1
5	1	0	0	0	1	0
6	1	0	1	0	0	0
7	1	1	0	1	1	1
8	1	1	1	1	0	0

DNF

$$(\neg e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3) \vee (\neg e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) \vee (e_1 \wedge e_2 \wedge \neg e_3)$$

Konjunktive Normalform (KNF)

KNF

- **Volldisjunktionen werden konjunktiv verknüpft**
- Volldisjunktionen = alle Variablen sind disjunktiv verknüpft

Nachfolgendes Beispiel

- Der Term: $f(e_1, e_2, e_3) = (e_1 \wedge e_2) \vee e_3$
  soll als KNF dargestellt werden

Beispiel KNF

1.: Wahrheitstabelle

#	e_1	e_2	e_3	$e_1 \wedge e_2$	$(e_1 \wedge e_2) \vee e_3$
1	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	1
3	0	1	0	0	0
4	0	1	1	0	1
5	1	0	0	0	0
6	1	0	1	0	1
7	1	1	0	1	1
8	1	1	1	1	1

Beispiel KNF

2.: Zeilen auswählen

- Auswahl der Zeilen mit **falschem** Ergebnis (= 0):
  - Zeile 1
  - Zeile 3
  - Zeile 5
- Variablen mit Wert 1 negieren, andere direkt übernehmen, und alle disjunktiv verbinden

3.: Konjunktive Normalform

Einzelne „Zeilen“ konjunktiv verbinden.

$$(e_1 \vee e_2 \vee e_3) \wedge (e_1 \vee \neg e_2 \vee e_3) \wedge (\neg e_1 \vee e_2 \vee e_3)$$

Beispiel KNF - finaler Vergleich

Wahrheitstabelle

#	e_1	e_2	e_3	$e_1 \wedge e_2$	$(e_1 \wedge e_2) \vee e_3$
1	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	1
3	0	1	0	0	0
4	0	1	1	0	1
5	1	0	0	0	0
6	1	0	1	0	1
7	1	1	0	1	1
8	1	1	1	1	1

DNF

$$(e_1 \vee e_2 \vee e_3) \wedge (e_1 \vee \neg e_2 \vee e_3) \wedge (\neg e_1 \vee e_2 \vee e_3)$$

Überblick

Verfahren nach Quine und McCluskey

Verfahren nach Quine und McCluskey

- **Verfahren zum Vereinfachen von Funktionen**
- Irrelevante Variablen aus Normalform eliminieren
- Geht von **DNF** aus
- Gezielt Terme der Art $(x \vee \neg x)$ erzeugen
- $\Rightarrow$ Entsprechen 1. Fallen weg, wenn sie in einer Konjunktion vorkommen
- Weitere Schritte (hier nicht angeführt, bei Interesse siehe Literatur)

Verfahren nach Quine und McCluskey

Das Prinzip

$$(e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3 \wedge \underline{e_4}) \vee (e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3 \wedge \underline{\neg e_4}) =$$

$$((\underline{e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3)} \wedge e_4) \vee ((\underline{e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3)} \wedge \neg e_4) \overset{Distr.Ges.}{=}$$

$$\underline{(e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3)} \wedge (e_4 \vee \neg e_4) \overset{AxiomKompl.El.}{=}$$

$$\underline{(e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3)} \wedge 1 =$$

$$(\mathbf{e_1} \wedge \neg \mathbf{e_2} \wedge \mathbf{e_3})$$

KV-Diagramme

KV-Diagramme

- **Graphische Veranschaulichung des Verfahrens von Quine und McCluskey**
- Karnaugh und Veitch
- Für maximal 4 Variablen sinnvoll anwendbar
- **Geschickte graphische Darstellung: Terme, die nach Quine/McCluskey zusammengefasst werden können, sind im KV-Diagramm direkt benachbart!**
- 2^n Felder bei n Eingangsvariablen

Prinzip

Jedes Feld entspricht einer Vollkonjunktion der DNF!

	e_1	$\neg e_1$
e_2	$e_1 \wedge e_2$	$\neg e_1 \wedge e_2$
$\neg e_2$	$e_1 \wedge \neg e_2$	$\neg e_1 \wedge \neg e_2$

Abbildung: KV Diagramm für zwei Variablen

Simples Beispiel

$$X = e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3 \wedge \neg e_4$$

	$\neg e_3$	e_3	e_3	$\neg e_3$	
$\neg e_1$					$\neg e_2$
e_1			X		$\neg e_2$
e_1					e_2
$\neg e_1$					e_2
	e_4	e_4	$\neg e_4$	$\neg e_4$	

Abbildung: KV Diagramm für vier Variablen

Vorgehensweise

Vorgehensweise

1. **Von DNF ausgehen** (z.B.)
2. **Für jede in der DNF vorkommende Vollkonjunktion im KV-Diagramm Einser im entsprechendem Feld eintragen**
3. **Zusammenfassen möglichst vieler 1er in benachbarten[a] Feldern zu Blöcken**
4. **Zusammengefasste Blöcke entsprechen den Vollkonjunktionen der neuen, minimierten DNF**

[a] auch außen herum!

Zweierblöcke

	$\neg e_3$	e_3	e_3	$\neg e_3$	
$\neg e_1$	0	0	0	0	$\neg e_2$
e_1	0	1	1	0	$\neg e_2$
e_1	0	0	0	0	e_2
$\neg e_1$	0	0	0	0	e_2
	e_4	e_4	$\neg e_4$	$\neg e_4$	

Abbildung: $e_1 \land \neg e_2 \land e_3$

Zweierblöcke

	$\neg e_3$	e_3	e_3	$\neg e_3$	
$\neg e_1$	0	0	0	0	$\neg e_2$
e_1	0	0	0	1	$\neg e_2$
e_1	0	0	0	1	e_2
$\neg e_1$	0	0	0	0	e_2
	e_4	e_4	$\neg e_4$	$\neg e_4$	

Abbildung: $e_1 \wedge \neg e_3 \wedge \neg e_4$

Zweierblöcke

	$\neg e_3$	e_3	e_3	$\neg e_3$	
$\neg e_1$	1	0	0	0	$\neg e_2$
e_1	0	0	0	0	$\neg e_2$
e_1	0	0	0	0	e_2
$\neg e_1$	1	0	0	0	e_2
	e_4	e_4	$\neg e_4$	$\neg e_4$	

Abbildung: $\neg e_1 \wedge \neg e_3 \wedge e_4$

Viererblöcke

	$\neg e_3$	e_3	e_3	$\neg e_3$	
$\neg e_1$	1	1	0	0	$\neg e_2$
e_1	1	1	0	0	$\neg e_2$
e_1	0	0	0	0	e_2
$\neg e_1$	0	0	0	0	e_2
	e_4	e_4	$\neg e_4$	$\neg e_4$	

Abbildung: $\neg e_2 \wedge e_4$

Viererblöcke

	$\neg e_3$	e_3	e_3	$\neg e_3$	
$\neg e_1$	0	0	0	1	$\neg e_2$
e_1	0	0	0	1	$\neg e_2$
e_1	0	0	0	1	e_2
$\neg e_1$	0	0	0	1	e_2
	e_4	e_4	$\neg e_4$	$\neg e_4$	

Abbildung: $\neg e_3 \wedge \neg e_4$

Viererblöcke

	$\neg e_3$	e_3	e_3	$\neg e_3$	
$\neg e_1$	1	0	0	1	$\neg e_2$
e_1	0	0	0	0	$\neg e_2$
e_1	0	0	0	0	e_2
$\neg e_1$	1	0	0	1	e_2
	e_4	e_4	$\neg e_4$	$\neg e_4$	

Abbildung: $\neg e_1 \wedge \neg e_3$

Achterblöcke

	$\neg e_3$	e_3	e_3	$\neg e_3$	
$\neg e_1$	1	1	1	1	$\neg e_2$
e_1	1	1	1	1	$\neg e_2$
e_1	0	0	0	0	e_2
$\neg e_1$	0	0	0	0	e_2
	e_4	e_4	$\neg e_4$	$\neg e_4$	

Abbildung: $\neg e_2$

Beispiel

$f(e_1, e_2, e_3, e_4) = (e_1 \wedge \neg e_2 \wedge \neg e_3 \wedge e_4) \vee (e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3 \wedge e_4) \vee (e_1 \wedge e_2 \wedge \neg e_3 \wedge e_4) \vee (e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4) \vee (e_1 \wedge e_2 \wedge \neg e_3 \wedge \neg e_4)$

	$\neg e_3$	e_3	e_3	$\neg e_3$	
$\neg e_1$	0	0	0	0	$\neg e_2$
e_1	1	1	0	0	$\neg e_2$
e_1	1	1	0	1	e_2
$\neg e_1$	0	0	0	0	e_2
	e_4	e_4	$\neg e_4$	$\neg e_4$	

Minimiert: $(e_1 \wedge e_4) \vee (e_1 \wedge e_2 \wedge \neg e_3)$

Überblick

Literatur

- Informatik (Blieberger, Springer-Verlag): Kapitel 12
- alle Abbildungen hieraus entnommen

Fuzzy Logic

Fuzzy Logic

- Bisher: Boole'sche Algebra $\rightarrow$ zwei Wahrheitswerte
- Aber: reale Welt $\rightarrow$ nicht-exakte/unvollständige Datensätze
- Lotfi A. Zadeh (1965): Fuzzy Logik
- Idee: ersetze Zweiwertigkeit $\{0, 1\}$ durch Intervall $[0, 1]$
- Anwendungsbereich: Regelungstechnik (Fuzzy Control)
  $\rightarrow$ oft keine mathematisches Prozessmodell möglich
  $\rightarrow$ stattdessen alltagssprachliche/linguistische Zustandsbeschreibung
- Beispiel Temperatur: sehr kalt / kalt / kühl / warm / sehr warm / heiß / sehr heiß

Fuzzy-Mengen

- Fuzzy-Menge: normierte Zugehörigkeitsfunktion mit beliebigen Werten zwischen 0 und 1
- Also: statt „Element x ist in Menge A enthalten oder nicht" jetzt Zugehörigkeitsmaß $\mu_A(x)$

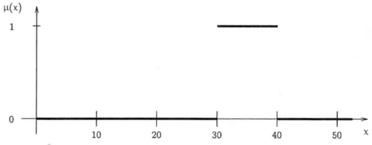

Abbildung 12.1: Zugehörigkeitsfunktion einer scharfen Menge

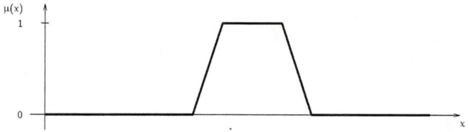

Abbildung 12.2: Zugehörigkeitsfunktion einer unscharfen Menge

Fuzzy-Mengen

- Betrachte Zugehörigkeitsfunktion $\mu_A(x)$
- Mengen-Operationen (Vereinigung, Durchschnitt, Komplement) neu definiert:
  - $(A \cup B) = max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$
  - $(A \cap B) = min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$
  - $\overline{A}(x) = 1 - \mu_A(x)$
- Beobachtung: bisherige (zweiwertige) Logik als Spezialfall enthalten
  $\rightarrow$ Fuzzy Logic als Erweiterung der Boole'schen Algebra!

Fuzzyfizierung

- Idee: Zugehörigkeitsfunktion für jede Kategorie
- können unterschiedlich aussehen
- typische Form: stückweise linear
- Normierung: Summe der Zugehörigkeitsmaße für jeden scharfen Wert = 1

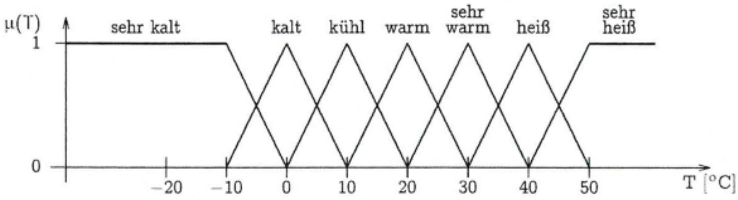

Abbildung 12.3: Zugehörigkeitsfunktionen $\mu(T)$

Fuzzy-Operatoren

- Idee: Verknüpfung von Fuzzy-Sets ein und derselben Grundmenge
- OR-Verknüpfung: Maximum-Operator
  A OR $B \equiv A \cup B \equiv \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$ mit $x \in X$

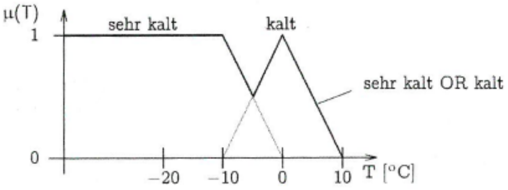

Abbildung 12.5: OR-Verknüpfung durch Maximum-Operator

Fuzzy-Operatoren

- AND-Verknüpfung: Minimum-Operator
  $A \text{ AND } B \equiv A \cap B \equiv \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$ mit $x \in X$
- Komplement: $\text{NOT} A \equiv 1 - \mu_A(x)$ mit $x \in X$
- Kommutativ- und Assoziativgesetz weiterhin gültig!

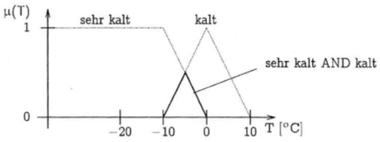

Abbildung 12.6: AND-Verknüpfung durch Minimum-Operator

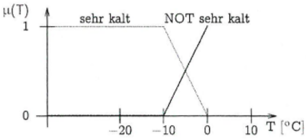

Abbildung 12.7: NOT-Verknüpfung mittels Komplement

Fuzzy-Relationen

- Bisher: Fuzzy-Sets auf gleicher Grundmenge
- Wanted: Implikation $\rightarrow$ `IF` p `THEN` c
- Prämisse p durch Fuzzy-Set X_1, Conclusio c durch Fuzzy-Set X_2 beschrieben
- Idee: Kartesisches Produkt $X = X_1 \times X_2$
- Ergebnis: Fuzzy-Relation $\mu_R(x_1, x_2) : X_1 \times X_2 \rightarrow [0, 1]$
- Zugehörige Operatoren abhängig vom Anwendungsfall, z.B.
  - Minimum-Operator: $\mu_{min}(x_1, x_2) = \min\{\mu_1(x_1), \mu_2(x_2)\}$
  - Produkt-Operator: $\mu_{prod}(x_1, x_2) = \mu_1(x_1) \cdot \mu_2(x_2)$

Regelbasis

- Idee: Beschreibe Produktionsregeln R_1, R_2 usw. als Fuzzy-Relationen
  R_k : $\texttt{IF}$ p_k $\texttt{THEN}$ c_k
- Beispiel: Temperaturregler
  $\texttt{IF}$ (*Temperatur* = heiß $\texttt{AND}$ *Gradient* = hoch) $\texttt{OR}$
  Temperatur = sehr heiß
  $\texttt{THEN}$ *Ventilstellung* = ganz zu
- Regelbasis endlicher Größe
- keine Lösung von Differentialgleichungen etc. notwendig

Inferenz

- Inferenz = Auswertung der Regeln plus Zusammenfassung der Handlungsanweisungen $\rightarrow$ Entscheidungsstrategie
- Schritt 1: Ermittlung der aktiven Regeln (Prämissen mit Erfülltheitsgrad > 0)
- Schritt 2a: Ermittlung der einzelnen Ausgangs-Fuzzymengen
- Schritt 2b: Wahrheitswert jeder aktiven Regel = Maß, in dem die Regel “feuert”
- Schritt 3: Ermittlung der resultierenden Ausgangs-Fuzzymenge

Inferenz

- Strategie 1: MAX-MIN Inferenz
  - OR $\rightarrow$ max
  - AND $\rightarrow$ min
  - Implikation $\rightarrow$ min
- Strategie 2: MAX-PROD Inferenz
  - OR $\rightarrow$ max
  - AND $\rightarrow$ min
  - Implikation $\rightarrow \cdot$

MAX-MIN Inferenz vs MAX-PROD Inferenz

- Strategie 1: MAX-MIN Inferenz
  - OR $\rightarrow$ max
  - AND $\rightarrow$ min
  - Implikation $\rightarrow$ min
- Strategie 2: MAX-PROD Inferenz
  - OR $\rightarrow$ max
  - AND $\rightarrow$ min
  - Implikation $\rightarrow \cdot$

Beispiel

- Annahme: Temperatur = 10℃, Temperaturabfall δ = 2℃/min
- Aktive Regel 1: IF T = kalt AND δ = negativ THEN ξ = mittel
- Aktive Regel 2: IF T = sehr kalt OR δ = null THEN ξ = offen

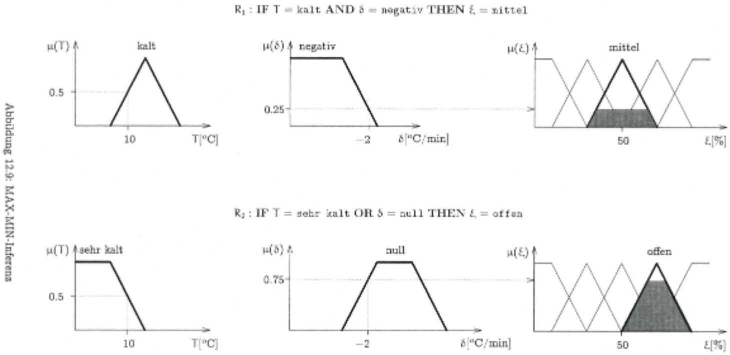

Abbildung: MAX-MIN Inferenz

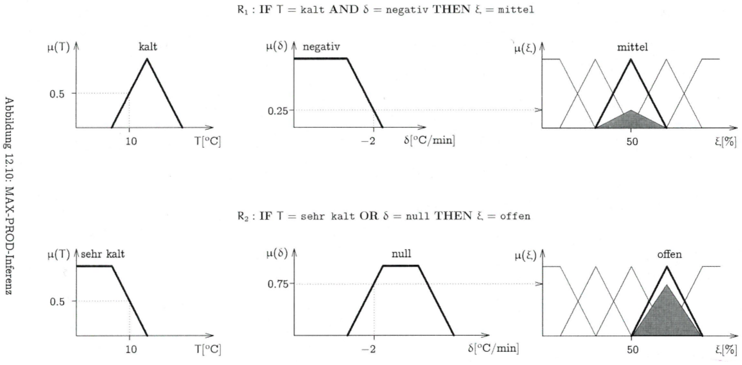

Abbildung: MAX-PROD Inferenz

Inferenz: Ergebnis

- Beachte: einzelne Ausgangsmengen ergeben sich
  - bei MAX-MIN Inferenz durch den Minimumoperator (aus Prämissen) angewandt auf Conclusio
    $\rightarrow$ Zugehörigkeitsmaß wird oben “abgeschnitten”
  - bei MAX-PROD Inferenz durch den Produktoperator
    $\rightarrow$ Zugehörigkeitsmaß wird gleichmäßig “gestaucht”

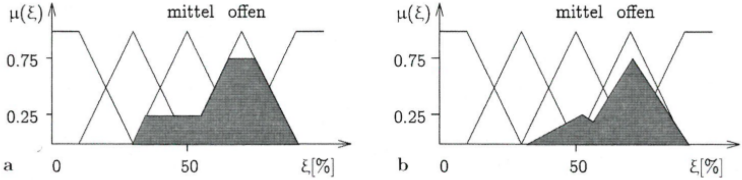

Abbildung 12.11: Ausgangsmenge bei MAX-MIN-Inferenz (a) und MAX-PROD-Inferenz (b)

Defuzzifizierung

- Letzter Schritt: Ermittlung eines scharfen Wertes aus dem unscharfen Ergebnis
- Mehrere Methoden
  - Maximum Height (maximale Höhe): Ausgangsgröße aus maximalem Wert der Ausgangsmenge
  - Mean of Maximum (Maximum-Mittelwert): arithmetisches Mittel aller Werte, für die die Zugehörigkeitsfunktion maximal ist
  - Center of Gravity (Schwerpunktmethode): x-Wert des Flächenschwerpunkts

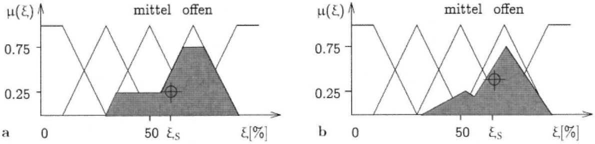

Abbildung 12.12: Scharfer Wert für MAX-MIN-Inferenz (a) und MAX-PROD-Inferenz (b)