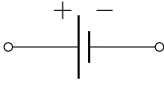
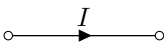


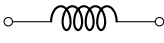
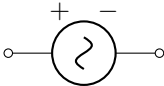


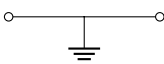
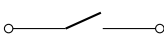
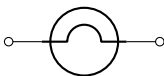
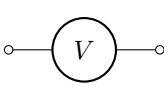
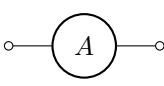
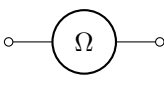
Kafli 17

Inngangur að rafrásum

17.1 Íhlutir í rafrásir

Mynd	Lýsing	Tákn
	Rafhlaða	V
	Rafstraumur	I
	Viðnám	R
	Þéttir	C
	Spóla	L
	Riðspennugjafi	$\mathcal{E}(t)$

Tafla 17.1: Íhlutir í rafrásum sem hafa algebrulegar stærðir.

Mynd	Lýsing
	Jarðtenging
	Rofi
	Ljósapera
	Spennumælir
	Straummælir
	Viðnámsmælir

Tafla 17.2: Aðrir algengir íhlutir í rafrásir.

17.2 Lögmál Kirchoffs

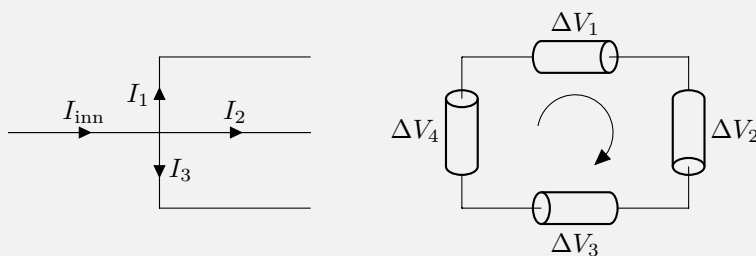
Lögmál 17.1. Við höfum eftirfarandi tvö lögmál fyrir rafrásir:

- (i) (**Gatnamótalögmál Kirchoffs**) Rafstraumsflæðið er varðveitt. Það er að segja við höfum í sérhverjum punkti að:

$$I_{\text{inn}} = I_{\text{út}}$$

- (ii) (**Lykkjulögmál Kirchoffs**) Spennufallið í gegnum lykkju í rafrás er núll. Þ.e.a.s.

$$\Delta V_{\text{lykkja}} = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \dots + \Delta V_n = 0$$



Útleiðsla: Gatnamótalögmálið er afleiðing af því að rafflæði er varðveitt (samanber vatnsflæði í vatnspípum). Lykkjulögmálið er afleiðing af því að spennan í tilteknum punkt er föst í rásinni og þar með þarf spennan að vera sú sama þegar við komum aftur í punktinn svo við höfum að ef V er spennan í þessum ákveðna punkti þá er spennan þegar við komum aftur í þennan punkt að lokinni lykkjunni gefinn með:

$$V + \Delta V_1 + \Delta V_2 + \dots + \Delta V_n = V \implies \Delta V_{\text{lykkja}} = 0.$$

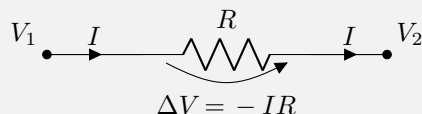
17.3 Spennufall

Lögmál 17.2. Lítum á rás þar sem að spennan er gefin með V_1 öðrum megin við viðnám R . Látum rafstraumin sem flæðir í gegnum viðnámið vera I . Spennan hinum megin við viðnámið er þá:

$$V_2 = V_1 - IR.$$

Þetta er oft umorðað þannig að **spennufallið** við það að fara í gegnum viðnám í rás er gefið með:

$$V_R = IR$$

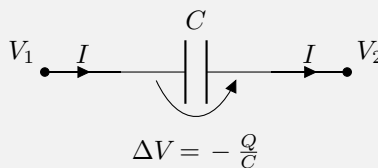


Lögmál 17.3. Lítum á rás þar sem að spennan er gefin með V_1 öðrum megin við þétti með rýmd C og hleðslu Q . Spennan hinum megin við þéttinn er þá:

$$V_2 = V_1 - \frac{Q}{C}.$$

Spennufallið við það að fara yfir þétti með rýmd C og hleðslu Q í rás er þá:

$$V_C = \frac{Q}{C}$$

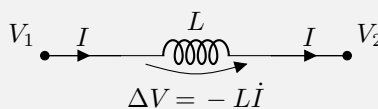


Lögmál 17.4. Lítum á rás þar sem að spennan er gefin með V_1 öðrum megin við spólu með spanstuðul L . Látum $I(t)$ vera strauminn í spólunni sem fall af tíma, t . Spennan hinum megin við spóluna er þá:

$$V_2 = V_1 - L\dot{I} = V_1 - \frac{dI}{dt}.$$

Spennufallið við það að fara yfir spólu með spanstuðul L og rafstraum $I(t)$ í rás er þá:

$$V_L = L\dot{I} = L\frac{dI}{dt}$$



Lögmál 17.5. Lítum á tiltekinn punkt í rafrás þar sem að spennan er V og straumurinn sem flæðir inn í punktinn er gefinn með I . Þá er rafaflíð, P , í þessum tiltekna punkti rafrásarinnar gefið með:

$$P = IV$$

Útleiðsla: Við fáum að:

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta(qV)}{\Delta t} = \frac{\Delta q}{\Delta t} \cdot V = IV.$$

17.4 Raðtenging og hliðtenging

Raðtengingar og hliðtengingar eru öflug tól sem við getum notað til þess að einfalda rásir.

Gormar

Lögmál 17.6. (Hliðtenging gorma) Þegar að við hliðtengjum gorma með gormstuðla k_1, k_2, \dots, k_n þá hegðar kerfið sér eins og einn gormur með gormstuðul

$$k_{\text{heild}} = k_1 + k_2 + \dots + k_n$$

kaflar/kafli04/figures/hliðtenging-gormar.pdf

Útleiðsla: Við höfum þá að kraftajafnan er gefin með:

$$ma = -k_1x - k_2x = -(k_1 + k_2)x = -kx$$

Svo við sjáum að kerfið hegðar sér eins og gormur með gormstuðul $k = k_1 + k_2$. □

Lögmál 17.7. (Raðtenging gorma) Þegar við raðtengjum gorma með gormstuðla k_1, k_2, \dots, k_n þá hegðar kerfið sér eins og einn gormur með gormstuðul k_{heild} þar sem:

$$\frac{1}{k_{\text{heild}}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}.$$

kaflar/kafli04/figures/radtengdir-gormar.pdf

Útleiðsla: Látum x_1 vera strekkinguna á fyrri gorminum og x_2 vera strekkinguna á seinni gorminum. Þá er $x = x_1 + x_2$ heildarstreking kerfisins frá jafnvægisstöðu. Á massann m verkar eininungis gormkraftur frá seinni gorminum svo:

$$ma = -k_2x_2$$

En við vitum þar að auki að $k_1x_1 = k_2x_2$ því togkrafturinn í seinni gorminum hlítur að vera núll því gormurinn er massalaus og einu kraftarnir sem verka á gorminn eru k_1x_1 og k_2x_2 . En þá er:

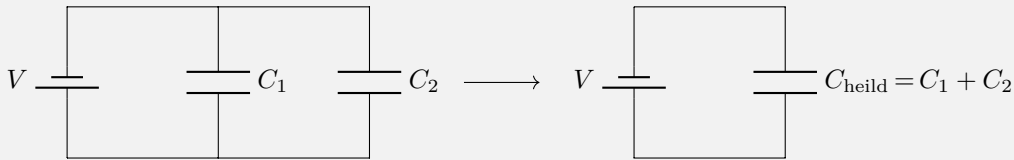
$$ma = -kx = -k(x_1 + x_2) = -k\left(-\frac{ma}{k_1} - \frac{ma}{k_2}\right) = k\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)ma \implies \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}.$$

□

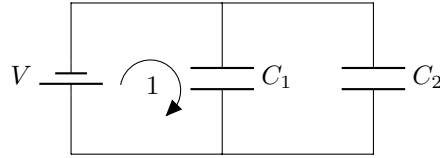
Þéttar

Lögmál 17.8. (Hliðtenging þétta) Þegar að við hliðtengjum þétta með rýmd C_1, C_2, \dots, C_n , þá hegðar kerfið sér eins og kerfi með einu jafngildum þétti með rýmd

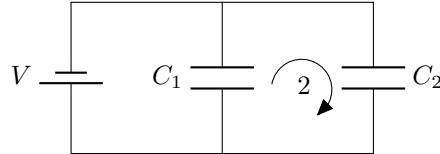
$$C_{\text{heild}} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$



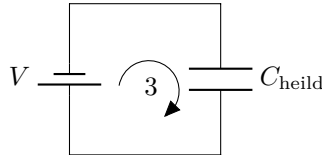
Útleiðsla: Samkvæmt lykkjulögmáli Kirchoffs þá þarf spennufallið yfir sérhverja lokaða rás í rásinni að vera núll. Við skoðum því fyrst eftirfarandi lykkju:



En þar með sjáum við að $V - \frac{Q_1}{C_1} = 0$ svo $V = \frac{Q_1}{C_1}$. Athugum síðan að ef við skoðum eftirfarandi lykkju:



Þá höfum við að $\frac{Q_2}{C_2} - \frac{Q_1}{C_1} = 0$ svo $\frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_1}{C_1} = V$. Loks skulum við skoða jafngildu rásina:



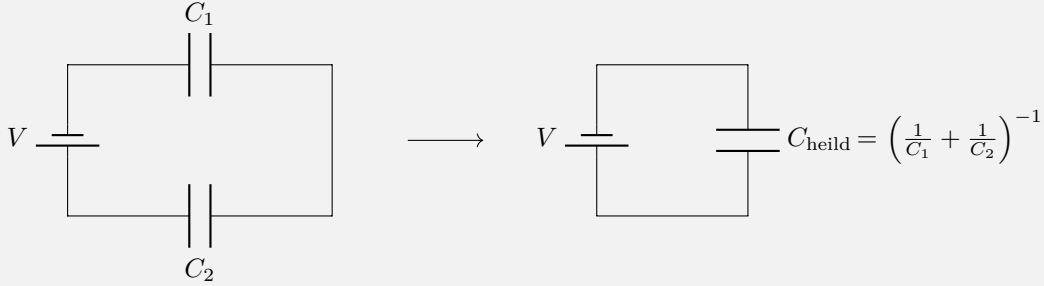
En þá höfum við samkvæmt lykkjulögmáli Kirchoffs að $V - \frac{Q_{\text{heild}}}{C_{\text{heild}}} = 0$ svo

$$C_{\text{heild}} = \frac{Q_{\text{heild}}}{V} = \frac{Q_1 + Q_2}{V} = \frac{C_1V + C_2V}{V} = C_1 + C_2.$$

□

Lögmál 17.9. (Raðtenging þétta) Þegar að við raðtengjum þétta með rýmd C_1, C_2, \dots, C_n , þá hegðar kerfið sér eins og kerfi með einu jafngildum þétti með rýmd, C_{heild} , þar sem:

$$\frac{1}{C_{\text{heild}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}.$$



Útleiðsla: Samkvæmt lykkjulögmáli Kirchoffs er:

$$V - \frac{Q_1}{C_1} - \frac{Q_2}{C_2} = 0$$

Ásamt

$$V - \frac{Q_{\text{heild}}}{C_{\text{heild}}} = 0.$$

En þar sem að rásin er hliðtengd þá er $Q_{\text{heild}} = Q_1 = Q_2$ svo við ályktum að:

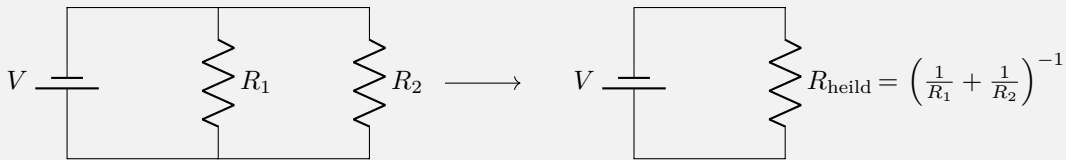
$$\frac{1}{C_{\text{heild}}} = \frac{V}{Q_{\text{heild}}} = \frac{\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2}}{Q_{\text{heild}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

□

Viðnám

Lögmál 17.10. (Hliðtenging viðnáma) Þegar að við hliðtengjum viðnám R_1, R_2, \dots, R_n , þá hegðar kerfið sér eins og kerfi með einu jafngildu viðnámi, R_{heild} , þar sem:

$$\frac{1}{R_{\text{heild}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}.$$



Útleiðsla: Með því að skoða lykkjurnar þá fáum við að:

$$V = R_1 I_1 = R_2 I_2 = R_{\text{heild}} I_{\text{heild}}$$

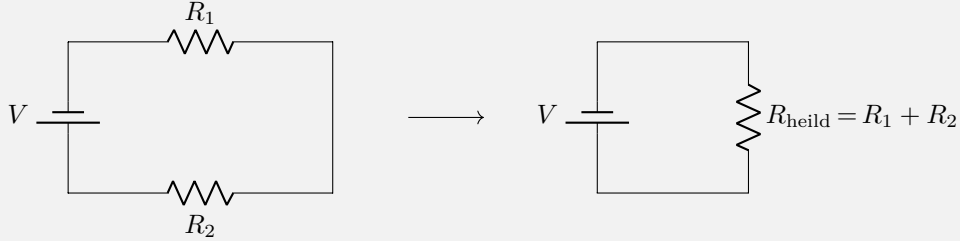
Þar að auki sjáum við ef við notum gatnamótalögmál Kirchoffs að $I = I_1 + I_2$. En þar með er:

$$\frac{1}{R_{\text{heild}}} = \frac{I_{\text{heild}}}{V} = \frac{I_1 + I_2}{V} = \frac{\frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2}}{V} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

□

Lögmál 17.11. (Raðtenging viðnáma) Þegar við raðtengjum viðnám, R_1, R_2, \dots, R_n , þá heðgar kerfið sér eins og kerfi með einu jafngildu viðnámi

$$R_{\text{heild}} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$



Útleiðsla: Við höfum þá samkvæmt lykkjulögmáli Kirchoffs að:

$$V - IR_1 - IR_2 = 0$$

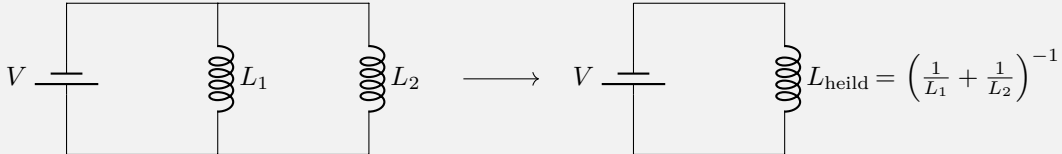
En í jafngildu rásinni væri $V = IR_{\text{heild}}$ svo við ályktum að $R_{\text{heild}} = R_1 + R_2$.

□

Spólur

Lögmál 17.12. (Hliðtenging spóla) Þegar við hliðtengjum spólur með spanstuðla, L_1, L_2, \dots, L_n , þá heðgar kerfið sér eins og kerfi með einni jafngildri spólu með spanstuðul L_{heild} þar sem

$$\frac{1}{L_{\text{heild}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n}.$$



Útleiðsla: Samkvæmt lykkjulögmáli Kirchoffs þá er:

$$V - L_1 \dot{I}_1 = 0, \quad V - L_2 \dot{I}_2 = 0, \quad V - L_{\text{heild}} \dot{I} = 0.$$

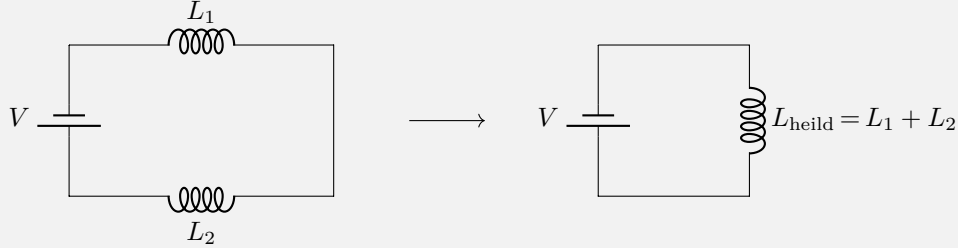
Þar sem að heildarstraumurinn sem að flæðir í rásinni er $I = I_1 + I_2$ þá er $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$ með því að diffra. Við ályktum því að:

$$\frac{1}{L_{\text{heild}}} = \frac{\dot{I}}{V} = \frac{\dot{I}_1 + \dot{I}_2}{V} = \frac{\frac{V}{L_1} + \frac{V}{L_2}}{V} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}.$$

□

Lögmál 17.13. (Raðtenging spóla) Þegar við raðtengjum spólur með spanstuðla, L_1, L_2, \dots, L_n , þá hegðar kerfið sér eins og kerfi með einni jafngildri spólu með spanstuðul

$$L_{\text{heild}} = L_1 + L_2 + \dots + L_n$$



Útleiðsla: Við höfum samkvæmt lykkjulögmálinu að:

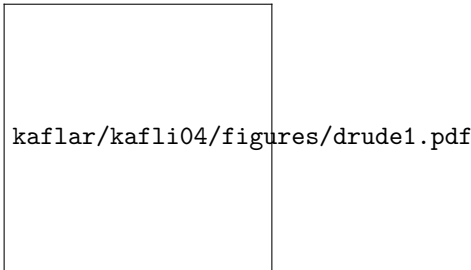
$$V - L_1 \dot{I} - L_2 \dot{I} = 0 = V - L_{\text{heild}} \dot{I} \implies L_{\text{heild}} = L_1 + L_2.$$

□

17.5 Drude-líkanið (★)

Í þessum viðauka munum við reyna að útskýra einfalt líkan fyrir rafstraum. Það er nefnilega svolítið skrítið að við gerum ráð fyrir að rafstraumurinn sé fastur í rásinni þ.e.a.s. að rafeindirnar ferðist með jöfnum hraða í gegnum rafrásina. Því ef við rifjum upp tengslin milli rafspennu og rafsviðs, $\Delta V = Ed$ þá sjáum við að rafeindirnar ættu að finna fyrir rafsviði, E , og þar með rafkrafti $F_E = eE$, en þar með myndu þær hafa fasta hröðun, $a = \frac{eE}{m}$, í rásinni og rafstraumurinn ætti að aukast eftir því sem að rafeindirnar ferðast lengra í rásinni. Við munum nú reyna að útskýra hvers vegna rafeindirnar ferðast með jöfnum hraða í rásinni. Hliðstæðu er að finna í loftmótsstöðu og lokahraðanum sem að hlutir ná í frjálsum falli með loftmótsstöðu.

Við skoðum vírbút af lengd ℓ með þverskurðarflatarmál A sem að samanstendur af efni með heildarmassa M og mólmassa μ . Látum spennunuminn á milli enda vírbútsins vera ΔV og þar með er rafsviðið í vírbútnum gefið með $E = \frac{\Delta V}{\ell}$.



Við lítum á sem svo að rafeindirnar séu á hreyfingu en að sameindirnar séu kyrrstæðar og að rafeindirnar skoppi á milli sameindanna og lendi í árekstrum við þær. Vegna rafsviðsins finna rafeindirnar fyrir krafti $F_E = eE$ en í árekstrum við sameindirnar þá finna þær fyrir einhversskonar loftmótsstöðu:

$$F_{\text{árekstur}} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

þar sem að Δp er skriðþungabreytingin á tímanum Δt . Látum τ tákna meðaltímann sem líður á milli árekstra rafeindanna við sameindirnar (við munum síðar sýna hvernig er hægt að ákvarða τ). Þegar að rafeindirnar

skoppa af sameindunum með hraða v þá geta þær fengið hvaða hraða sem er á bilinu $[-v, v]$ svo að meðaltali er hraði rafeindanna eftir áreksturinn 0 (sumar hafa þá neikvæðan hraða en aðrar jákvæðan en að meðaltali hafa þær engan hraða eftir áreksturinn). En það þýðir að skriðþungabreytingin á milli árekstra verður að meðaltali:

$$F_{\text{árekstur}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{mv - m \cdot 0}{\tau} = \frac{mv}{\tau}$$

En þar með verður heildarkraftajafnan:

$$ma = eE - \frac{mv}{\tau}$$

Í kraftajafnvægi er $a = 0$ og þá ferðast rafeindirnar þess vegna með föstum hraða sem kallast rekhraði:

$$0 = ma = eE - \frac{mv}{\tau} \implies v_d = \frac{eE}{m}\tau.$$

Látum nú f_e tákna heildarfjölda rafeinda á rúmmálseiningu. Þá verður rafstraumurinn:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{e \cdot f_e \cdot Av_d \tau}{\tau} = ef_e Av_d = \frac{e^2 f_e \tau}{m} AE.$$

Við skilgreinum þá eðlisviðnám sem stærðina:

$$\rho = \frac{m}{e^2 f_e \tau}$$

Þá höfum við sýnt að:

$$I = \frac{A}{\rho} E$$

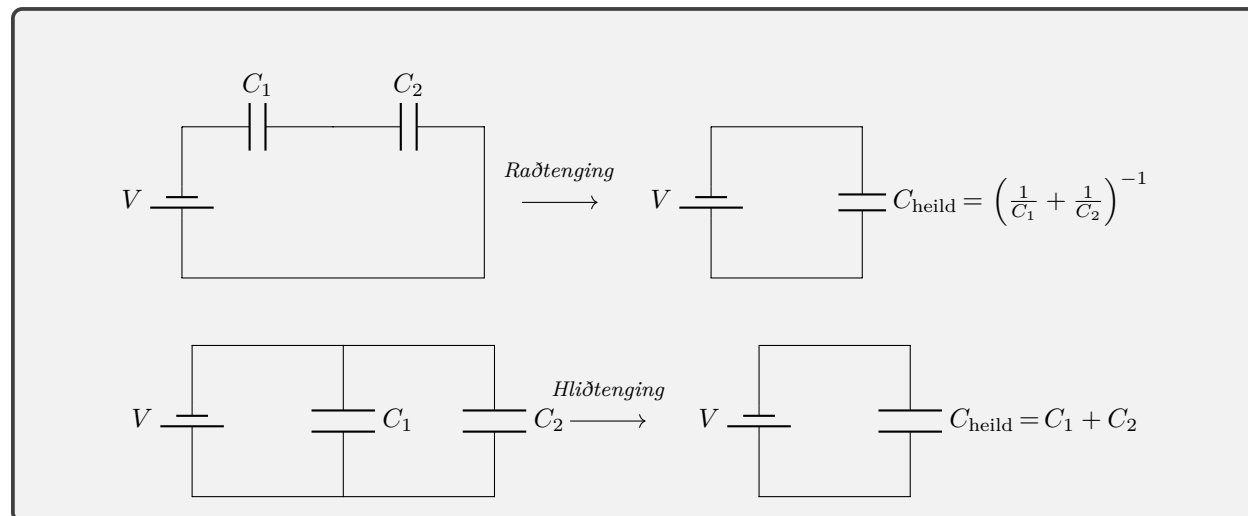
Viðnámið var síðan skilgreint sem stærðin $R = \frac{\rho L}{A}$ svo að við höfum hér sýnt að:

$$I = \frac{A}{\rho} E = \frac{E \ell}{R}$$

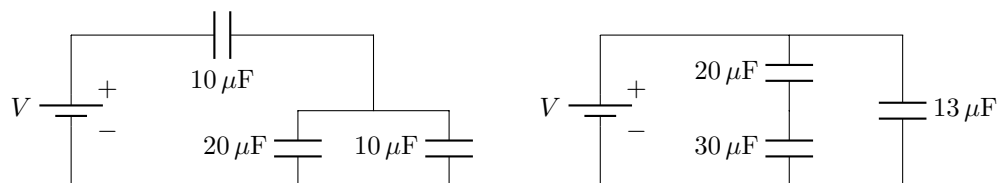
En $E \ell = \Delta V$ svo við ályktum að $\Delta V = E \ell = IR$. Þar með höfum við leitt út lögmál Ohms.

17.6 Dæmi

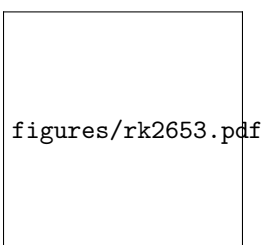
Dæmatími 13: Jafngildir þéttar



(26.27 og 26.28) Einfaldið eftirfarandi rásir og ákvarðið heildarrýmdir þeirra:



(26.56 og 26.57) Ákvarðið hleðsluna og spennufallið yfir hvern þétti í rásunum hér fyrir neðan:

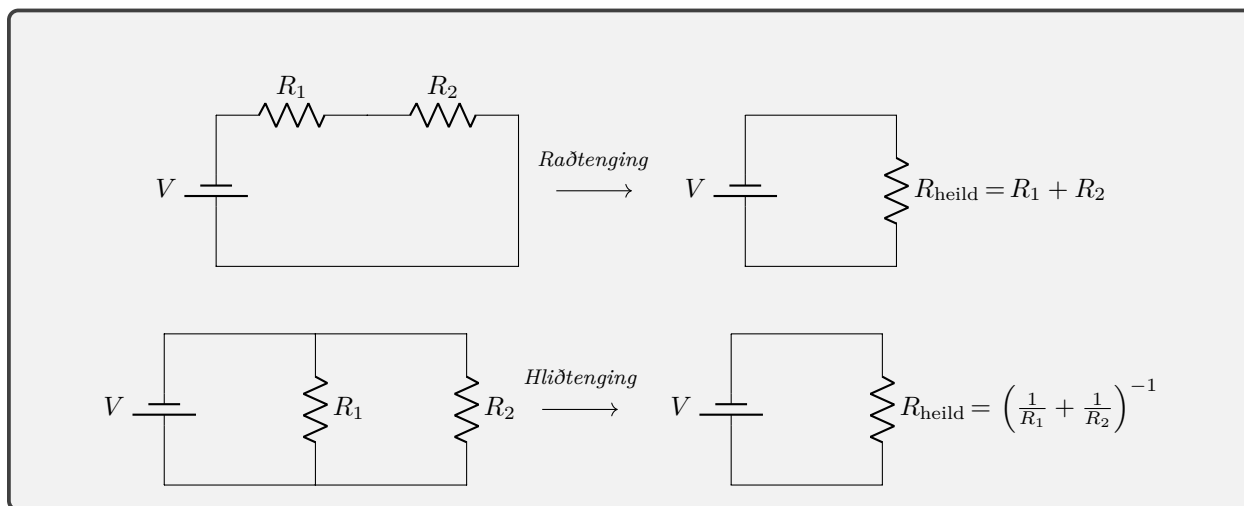


(26.27) $C_{\text{heild}} = 7,5\ \mu\text{F}$. (26.28) $C_{\text{heild}} = 25\ \mu\text{F}$.

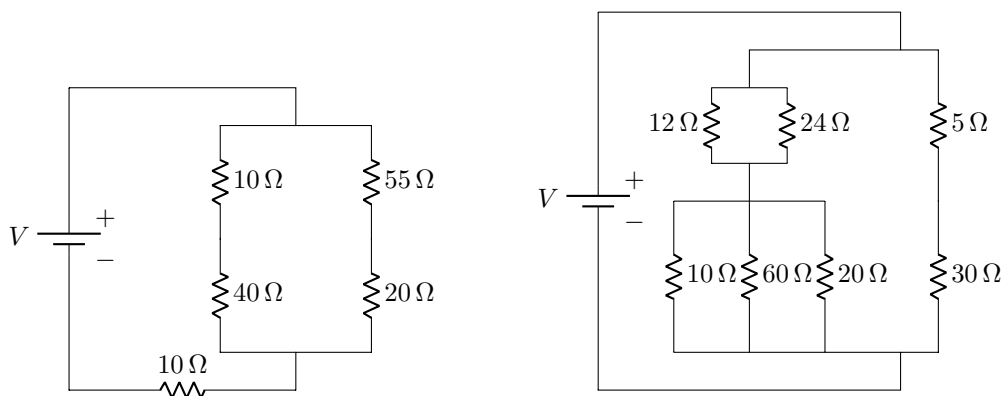
(26.56) $Q = 60\ \mu\text{C}$, $\Delta V_1 = 5\ \text{V}$, $\Delta V_2 = 15\ \text{V}$, $\Delta V_3 = 10\ \text{V}$.

(26.57) $Q = 16\ \mu\text{C}$, $Q_1 = 4\ \mu\text{C}$, $Q_2 = 12\ \mu\text{C}$, $Q_3 = 16\ \mu\text{C}$.

Dæmatími 14: Jafngild viðnám



(28.25 og 28.26) Einfaldið eftirfarandi rásir og ákvarðið heildarviðnám þeirra:



(28.58 og 28.59) Ákvarðið rafstrauminn og spennufallið yfir hvert viðnám í rásunum hér fyrir neðan:

figures/rk2856.pdf

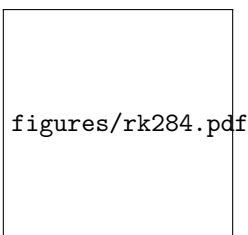
(28.25) $R_{\text{heild}} = 40\ \Omega$. (28.26) $R_{\text{heild}} = 10\ \Omega$. (28.58) $I = 4,0\ \text{A}$, $I_1 = 2,4\ \text{A}$, $I_2 = 1,6\ \text{A}$.
 (28.59) $I = 4,0\ \text{A}$, $I_1 = I_2 = 2,0\ \text{A}$, $I_3 = 1,33\ \text{A}$, $I_4 = 0,67\ \text{A}$.

Dæmatími 15: Lögmál Kirchoffs

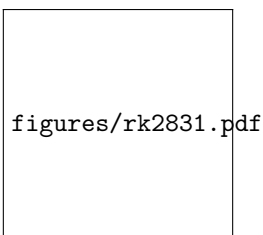
Lykkjulögmál Kirchoffs segir að heildarspennufallið við það að fara hring í rafrás er núll. Með öðrum orðum: $\Delta V_{\text{heild}} = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \dots + \Delta V_n = 0$. Gatnamótalögmál Kirchoffs segir að ef að I_{inn} er heildarrafastraumurinn sem flæðir inn í punkt og $I_{\text{út}}$ er heildarrafastraumurinn sem flæðir út úr sama punkti þá er $I_{\text{inn}} = I_{\text{út}}$. Spennuföllin eru:

$$\Delta V_R = IR, \quad \Delta V_C = \frac{Q}{C}, \quad \Delta V_L = LI = L \frac{dI}{dt}.$$

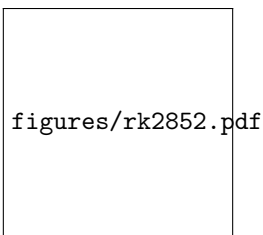
(28.4) Hver er stærð og stefna straumsins sem fer í gegnum 10Ω viðnámið á myndinni hér fyrir neðan?



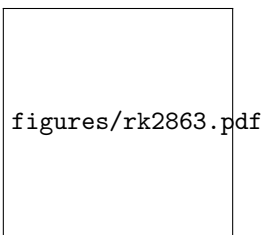
(28.31) Hver er spennunurinn, $\Delta V = V_b - V_a$ milli punktanna a og b á myndinni hér fyrir neðan?



(28.52) Straummælirinn á myndinni hér fyrir neðan sýnir 3,0 A. Ákvarðið \mathcal{E} , I_1 og I_2 .



(28.63) Hver er stærð og stefna straumsins sem fer í gegnum 10Ω viðnámið á myndinni hér fyrir neðan?



(28.4) $I = 0,9 \text{ A}$. (28.31) $\Delta V = -7,0 \text{ V}$. (28.52) $\mathcal{E} = 12 \text{ V}, I_1 = 3,0 \text{ A}$. (28.63) $I = 0,45 \text{ A}$.

Dæmatími 16: Afl í rafrásum

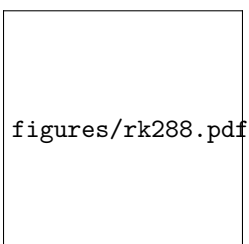
Varmaaflið/rafaflíð sem tapast í rafrásum er gefið með:

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{d(qV)}{dt} = \frac{dq}{dt}V = IV.$$

Þar sem V táknar spennufallið yfir tiltekinn íhlut og I táknar rafstrauminn í gegnum íhlutinn.

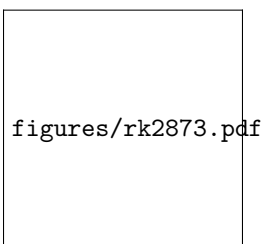
(28.7) Í hefðbundnum innstungum hér á landi notum við 220 V riðspennu sem sveiflast með 50 Hz tíðni. Dyson Supersonic hárbólarsari notar 1600 W stafrænan mótör til þess að gefa nákvæman og öflugan blástur. Hversu mikill straumur er í Dyson Supersonic hárbólarsaranum þegar hann er í gangi? Hvert þarf innra viðnámið í hárbólarsarnum að vera?

(28.8) Lítum á myndina hér fyrir neðan til vinstri. Hversu mikið rafafl tapast út um hvort viðnám?



(28.9) Lítum á myndina hér fyrir ofan til hægri. Búið er að koma fyrir tveimur ljósaperum fyrir í rásinni, einni 60 W og einni 100 W. Athugið að ljósaperur hafa innra viðnám og styrkur ljósaperu ákvarðast út frá aflinu sem að peran myndi gefa ef að hún væri tengd við 220 V heimilisspennu. Báðar ljósaperurnar skína. Hvor ljósaperan skín skærar og hversu mikið rafafl tapast í hvorri ljósaperu?

(28.78) Hvert er rafaflíð sem tapast í gegnum 2Ω viðnámið á myndinni hér fyrir neðan?



(28.7) $I = 7,3\text{ A}$, $R = 30\Omega$. (28.8) $P_1 = 1,9\text{ W} > P_2 = 2,9\text{ W}$. (28.9) $P_1 = 7,0\text{ W} > P_2 = 4,2\text{ W}$.

(28.78) $P = 0,29\text{ W}$.

Dæmatími 17: Eðlisviðnám

Viðnám víra er breytilegt eftir því úr hvaða efni þeir eru gerðir. Almennt gildir að viðnám vísins er:

$$R = \rho \frac{\ell}{A}.$$

Þar sem ρ er eðlisviðnám vísins, ℓ er lengd vísins og A er þverskurðarflatarmál hans.

Efni	Eðlisviðnám
Ál	$2,8 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$
Kopar	$1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$
Gull	$2,4 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$
Járn	$9,7 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$
Silfur	$1,6 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$
Volfram	$5,6 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$
Nikkel	$1,5 \cdot 10^{-6} \Omega \text{ m}$
Kolefni	$3,5 \cdot 10^{-5} \Omega \text{ m}$

- (27.27) (a) Hvert er viðnám gullvírs sem er 2,0 m á lengd og hefur þvermál 0,20 mm. (b) Hvert er viðnám rétthyrningslaga kolefnisvírs sem hefur hliðarlengdir 1,0 mm og lengd 10 cm?
- (27.28) Verkfræðingur tekur 94 cm langan vír sem hefur þvermál 0,33 mm og tengir hann við rafhlöðu með 1,5 V spennu. Með því að nota straummæli sér hann að straumurinn í rásinni er 8,0 A. Úr hvaða efni er vírin?
- (27.33) Blýið í blýöntum er í alvörunni úr kolefni. Blýantur af lengd 6,0 cm og með 0,70 mm þvermál er tengdur í sitthvorn endann við 9,0 V rafhlöðu. Hver er straumurinn sem að fer í gegnum blýantinn?
- (27.37) Rafmagnsvírarnir sem eru notaðir í rafrásum heimila eru oftast koparvírar með þvermál 2,0 mm. Vírarnir geta þurft að vera mjög langir í stórum íbúðarhúsum til þess að ná að tengja allt sem þarf að tengja. Hver er spennunurinn á milli endanna á 20 m löngum heimilisvír sem ber 8,0 A rafstraum?

(27.27) $R_{\text{Au}} = 1,5 \Omega$, $R_{\text{C}} = 3,5 \Omega$. (27.28) Silfri. (27.33) $I = 1,6 \text{ A}$. (27.37) $\Delta V = 0,87 \text{ V}$.