Kafli 15

Lögmál Gauss

Áður en að við byrjum að fjalla um lögmál Gauss þá ættum við að skoða Maxwells-jöfnurnar fjórar:

$$\begin{cases} \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \dfrac{Q_{\text{inni}}}{\epsilon_0}, & \textit{(Lögmál Gauss fyrir rafsvið)} \\ \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, & \textit{(Lögmál Gauss fyrir segulsvið)} \\ \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\dfrac{d\Phi_B}{dt}, & \textit{(Lögmál Faradays)} \\ \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{inni}}, & \textit{(Lögmál Ampéres).} \end{cases}$$

Það kann kannski að koma ykkur spánskt fyrir sjónir að engin af jöfnunum hér á undan er kennd við Maxwell - en það er vegna þess að hann var fyrstur manna til þess að átta sig á því hvernig að þessar fjórar jöfnur tengjast (og að þær lýsi einu og sama fyrirbærinu). Reyndar var hans helsta framlag í öllu þessu máli að *„lagfæra“* fjórðu jöfnuna (Lögmál Ampéres) þannig að hún yrði:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{inni}} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}, \qquad \textit{(Lögmál Maxwells).}$$

Það er reyndar fræg saga af Maxwell og Eureka-mómentinu hans þegar honum tókst að sýna fram á að ljós er rafsegulbylgja. Það tengist allt saman þeirri merkilegu staðreynd að ljóshraðinn er:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

Það er því einnig hægt að skrifa lögmál Maxwells á eftirfarandi formi:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{inni}} + \frac{1}{c^2} \frac{d\Phi_E}{dt}, \qquad \textit{(Lögmál Maxwells).}$$

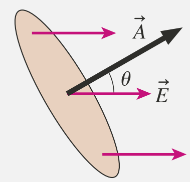
Maxwells-jöfnurnar útskýra alla rafsegulfræði. Þær eru án efa hagnýttustu jöfnur mannkynssögunnar - þær eru fjórar og líta út fyrir að vera einfaldar (kannski finnst ykkur það ekki sem stendur en bíðiði bara!). Samt sem áður er fólk enn þann daginn í dag að afhjúpa leyndardóma Maxwellsjafnanna (t.d. nýlega uppgötvuðu menn hvernig er hægt að hlaða síma án þess að stinga þeim í samband með því að leggja þá ofan á flöt sem að býr til segulsvið sem að er hægt að nota til þess að hlaða rafhlöðuna). Við skulum því hefjast handa við það að skoða Maxwells-jöfnurnar og byrjum því á þeirri fyrstu: Lögmál Gauss fyrir rafsvið.

15.1 Rafflæði

Þegar við vorum að skoða flæði í vatnspípum þá töluðum við um flæðið í gegnum vatnspípuna sem stærðina $\Phi = Av$ þar sem A var flatarmálið á pípunni og v var straumhraði vatnsins þvert á flatarmálið. Við höfðum þá sýnt að vatnsflæði í pípum er varðveitt, þ.e.a.s. $A_1 v_1 = A_2 v_2$ eða með öðrum orðum $\Phi =$ fasti. Nú kynnum við hinsvegar til sögunnar almennara stærðfræðilegt hugtak fyrir flæði. Við viljum nefnilega geta talað um rafflæði:

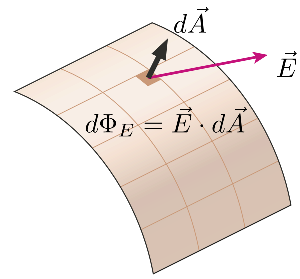
Skilgreining 15.1. Lítum á hlut með flatarmál $\vec{A}$ þar sem að rafsviðið er gefið með $\vec{E}$. Látum θ vera hornið á milli vigranna. **Rafflæðið** út um flötinn er þá gefið með:

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos\theta$$



Stundum viljum við setja þetta fram á örsmæðarformi. Til dæmis ef að yfirborðið okkar er kúpt eða bogið. Þá skiptum við flatarmálinu upp í örsmæðir $d\vec{A}$ og skoðum örrafflæðið út um sérhvert örsmæðarflatarmál. Við skrifum þá $d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A}$. Við þurfum síðan að leggja saman framlagið frá öllum þessum örrafflæðum til þess að finna heildarrafflæðið. En þá er:

$$\Phi_E = \oint d\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}.$$



Þar sem að $\oint$ táknar tegur yfir allt yfirborð hlutarins. Yfirborð hlutarins sem að við erum að tegra yfir kallast *Gauss-flötur*. Við veljum oft ímyndaða Gauss-fleti (lögmál Gauss gildir líka um þá!). Lögmál Gauss segir þá einfaldlega að rafflæðið er varðveitt:

Lögmál 15.2. (Lögmál Gauss) Lítum á hlut með rúmmál V og yfirborðsflatarmál A. Látum hlutinn umlykja heildarhleðslu $Q_{\text{inni}} = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n$. Þá gildir að:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{inni}}}{\varepsilon_0}.$$

Við skulum núna sanna/leiða út lögmál Coulombs með því að nota lögmál Gauss:

Lögmál 15.3. (Lögmál Gauss $\Longrightarrow$ Lögmál Coulombs) Lítum á punkthleðslu Q. Þá er rafsviðið í fjarlægð r frá punkthleðslunni gefið með $E(r) = \frac{kQ}{r^2}$. Sér í lagi gildir að rafkrafturinn sem að jákvæð prufuhleðsla, $+q$, finnur fyrir í fjarlægð r frá punkthleðslunni er gefinn með $F_k = qE = \frac{kQq}{r^2}$.

Útleiðsla: Til þess að nota lögmál Gauss þurfum við fyrst að velja Gauss-flöt. Við veljum Gauss-flötinn okkar sem kúluna með geisla r í kringum punkthleðsluna, Q. Þá fæst samkvæmt lögmáli Gauss að:

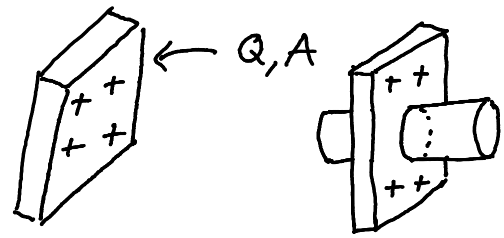
$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{inni}}}{\varepsilon_0} \implies E \underbrace{\oint dA}_{4\pi r^2} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \implies E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \implies E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} = \frac{kQ}{r^2}.$$

Hér höfum við notað að rafsviðið og þverilvigur yfirborðsins eru alltaf samsíða (svo hornið á milli þeirra er núll). Vegna samhverfu er gildið á rafsviðinu $\vec{E}$ alltaf það sama í fjarlægð r frá punkthleðslunni svo að það er fasti fyrir sérhvern smábút dA og við getum því tekið það út fyrir tegrið. Loks notuðum við að $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$. $\square$

Lögmál 15.4. (Rafsvið frá plötu) Skoðum plötu með flatarmál A og jafndreifða hleðslu Q. Þá er rafsviðið frá plötunni gefið með:

$$E_{\text{plata}} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 A}.$$

Útleiðsla: Hleðsluþéttleiki plötunnar er $\sigma = \frac{Q}{A}$. Velum nú Gauss-flöt sem er sívalningur sem nær í gegnum báðar hliðar og hefur lengd ℓ og geisla r þar sem $r \ll \sqrt{A}$ og lengdin er meiri heldur en þykkt plötunnar. Hver er þá hleðslan inni í Gauss-fletinum? Hún er:



$$Q_{\text{inni}} = \sigma r^2 \pi$$

En þar með höfum við samkvæmt lögmáli Gauss að:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{inni}}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma r^2 \pi}{\varepsilon_0}.$$

En hvert er rafflæðið út um Gauss-flötinn? Við sjáum að rafsviðið verður að liggja beint frá plötunni í báðar stefnur (ef Q er jákvæð - annars liggja rafsviðslínurnar beint að plötunni) svo að það er ekkert rafflæði út um hliðar sívalningsins, það er einungis rafflæði út um botninn og topinn á sívalningnum. Við höfum þá að:

$$\Phi_E = \underbrace{\Phi_{\text{hliðar}}}_{=0} + \Phi_{\text{toppur}} + \Phi_{\text{botn}} = E\pi r^2 + E\pi r^2 = 2\pi E r^2.$$

Þar sem að við höfum notað að $\vec{E}$ og $\vec{A}$ eru samsíða fyrir bæði botninn og toppinn. En þar með ályktum við:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{inni}}}{\varepsilon_0} \implies 2\pi r^2 E = \frac{\sigma r^2 \pi}{\varepsilon_0} \implies E_{\text{plata}} = \frac{\sigma r^2 \pi}{2\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 A}.$$

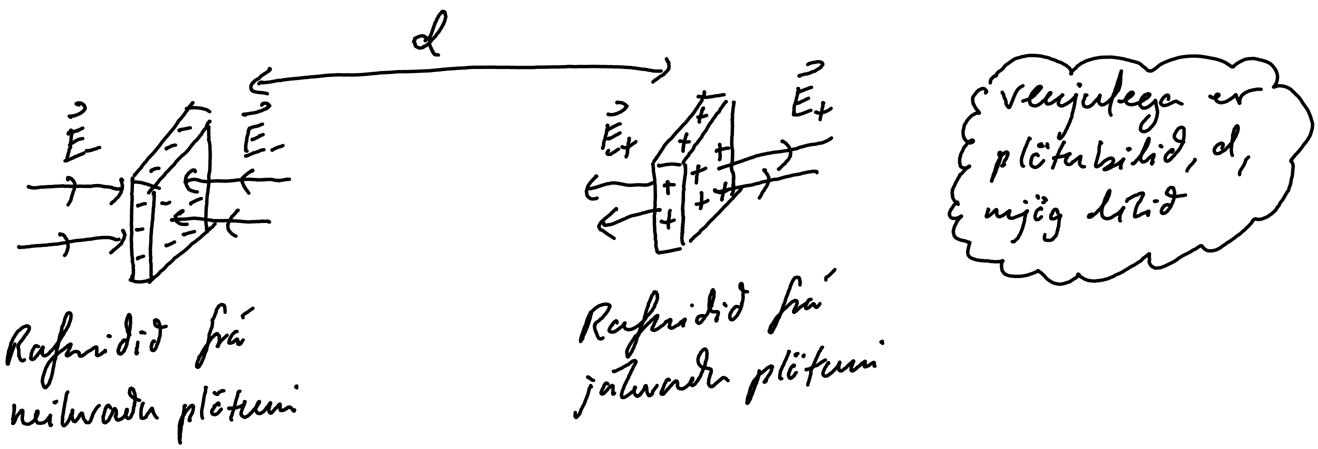
□

Þetta er í rauninni frekar skrítin niðurstaða því að við fáum að rafsviðið er óháð fjarlægðinni frá plötunni. Þannig að í óendanlegri fjarlægð frá plötuþéttinum þá ætti rafsviðið einnig að vera gefið með $E_{\text{plata}} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 A}$. Kannski hefði ég átt að minnast á það á einhverjum tímapunkti en við gerðum eiginlega ráð fyrir því að platan væri óendanlega stór í útleiðslunni! Það er þá spurning hvort að þetta sé góð nálgun eftir allt saman? Í rafsegulfræði þá er ágæt þumalputtaregla að ef að hluturinn er meira en 5 cm á lengd þá er hann svo gott sem óendanlega langur (þ.e. 5 cm $\approx \infty$). En niðurstaðan hér á undan gefur okkur sniðuga leið til þess að leiða út eftirfarandi (sem við munum nota mikið í vetur!):

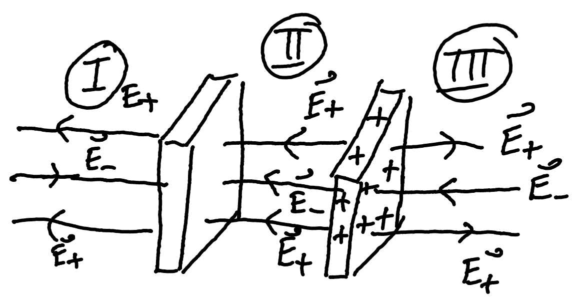
Lögmál 15.5. (Rafsvið frá plötuþétti) Lítum á tvær plötur með flatarmál A sem eru í fjarlægð d frá hvor annarri. Látum plöturnar hafa jafnstóra en gagnstæða hleðslu $\pm Q$. Þá er rafsviðið á milli platnanna gefið með:

$$E_{\text{plötuþéttir}} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}.$$

Útleiðsla: Við byrjum á því að teikna upp mynd af plötuþéttinum:



En við höfum þá eiginlega þrjú tilvik:



Við sjáum þá að:

$$E_{\text{I}} = E_- - E_+ = \frac{Q}{2\varepsilon_0 A} - \frac{Q}{2\varepsilon_0 A} = 0.$$

og eins er

$$E_{\text{III}} = E_+ - E_- = \frac{Q}{2\varepsilon_0 A} - \frac{Q}{2\varepsilon_0 A} = 0.$$

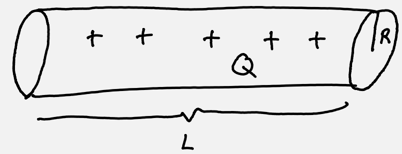
En á milli platnanna höfum við að:

$$E_{\text{II}} = E_+ + E_- = \frac{Q}{2\varepsilon_0 A} + \frac{Q}{2\varepsilon_0 A} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}.$$

Þannig að við álytum að $E_{\text{plötuþéttir}} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$ á milli platnanna. $\square$

Lögmál 15.6. (Rafsvið frá löngum beinum vír) Lítum á rafmagnsvír með geisla R og lengd L sem ber rafstraum þannig að heildarhleðslan inni í þessum vírbút er Q. Þá er rafsviðið frá vírnum gefið með:

$$E_{\text{vír}} = \begin{cases} \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2 L} \cdot r & \text{ef } r \leq R. \\ \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} \cdot \dfrac{1}{r} & \text{ef } r > R. \end{cases}$$



Útleiðsla: Byrjum á því að athuga að hleðsluþéttleiki vírsins er:

$$\rho = \frac{Q}{\pi R^2 L}$$

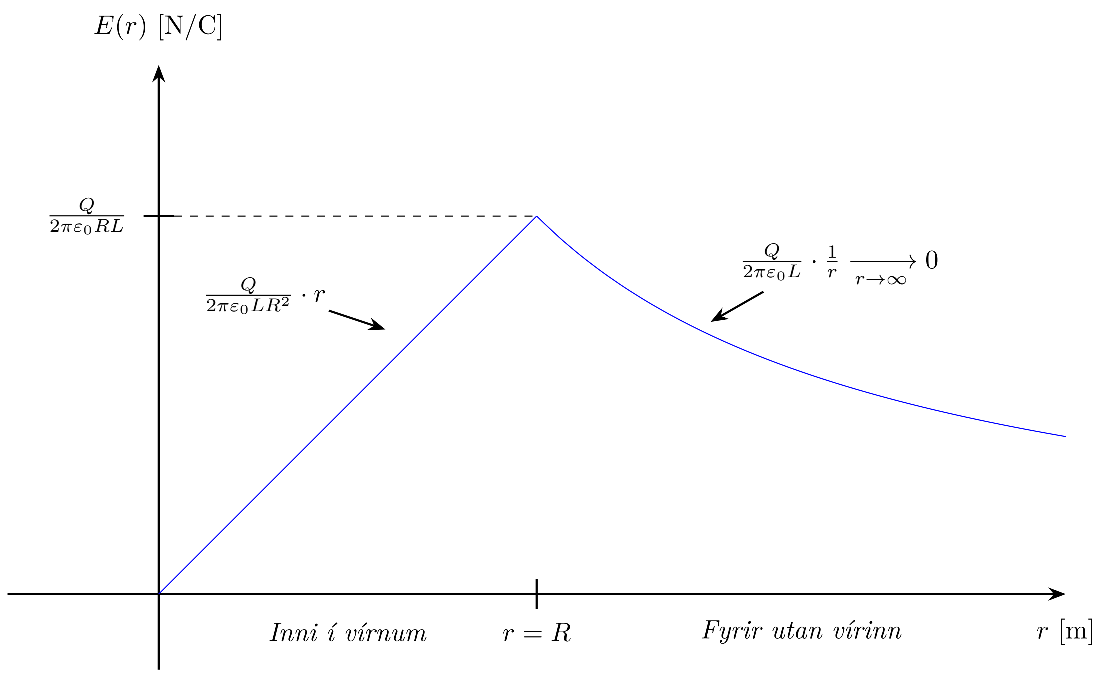
Skoða hvernig rafsviðið breytist inni í vírnum og fyrir utan. Veljum Gauss-flöt sem er sammiðja sívalningur með lengd $\ell < L$ og geisla r. Byrjum á því að skoða tilvikið þegar að $r > R$ (fyrir utan sívalninginn). Þá höfum við einfaldlega að:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \underbrace{\Phi_{\text{hliðar}}}_{E \cdot 2\pi r \ell} + \underbrace{\Phi_{\text{botn}}}_{=0} + \underbrace{\Phi_{\text{toppur}}}_{=0} = \frac{Q_{\text{inni}}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho \pi R^2 \ell}{\varepsilon_0} \implies E(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{R^2}{r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} \cdot \frac{1}{r}.$$

Hinsvegar ef $r < R$ þá fæst að $Q_{\text{inni}} = \rho \pi r^2 \ell$ svo lögmál Gauss gefur að:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} \implies E(r) \cdot 2\pi r \ell = \frac{\rho \pi r^2 \ell}{\varepsilon_0} = \frac{Q r^2 \ell}{\varepsilon_0 R^2 L} \implies E(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L R^2} \cdot r.$$

Að lokum getum við teiknað graf sem að sýnir þessa hegðun:



Mynd 1: Graf af styrk rafsviðsins frá löngum beinum vír með geisla R í fjarlægð r frá miðju vírsins.

Takið eftir að rafsviðsstyrkurinn frá vírnum ($\frac{1}{r}$) fellur hægar en rafsviðsstyrkurinn frá punkthleðslu ($\frac{1}{r^2}$).

15.2 Lögmál Gauss fyrir þyngdarsviðið (*)

Þar sem að það er ákveðið samræmi á milli Coulombskraftsins og þyngdarlögmálskraftsins þá ættum við að geta fundið Gausslögmál fyrir þyngdarlögmálið. Höfum séð að:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \implies \Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{inni}}{\varepsilon_0}.$$

Ef þyngdarsviðið er táknað með $\vec{g}$ þá ættum við að hafa:

$$g(r) = \frac{GM}{r^2} \implies \Phi_g = \oint \vec{g}\cdot d\vec{A} = 4\pi G M_{\text{inni}}.$$

Við getum þá notað þetta til þess að skoða hvernig styrkur þyngdarsviðsins breytist inni í jörðinni eftir því sem að við förum neðar. Lítum því á jörðina sem einsleita kúlu með geisla R og jafndriefðan massa M. Við viljum ákvarða þyngdarhröðunina inni í jörðinni fyrir $r < R$ og fyrir $r > R$. Fyrir $r > R$ fáum við einfaldlega að:

$$\oint \vec{g}\cdot d\vec{A} = 4\pi GM \implies g(r)\cdot 4\pi r^2 = 4\pi GM \implies g(r) = \frac{GM}{r^2}, \qquad \text{fyrir } r > R.$$

Hinsvegar ef $r < R$ þá þurfum við að ákvarða hvað M_{inni} er (því núna er það ekki massi allrar jarðarinnar). Því er gott að nota eðlismassa jarðarinnar:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3}, \qquad \text{þannig að} \qquad M_{\text{inni}} = \rho V_{\text{inni}} = \rho\frac{4\pi}{3}r^3$$

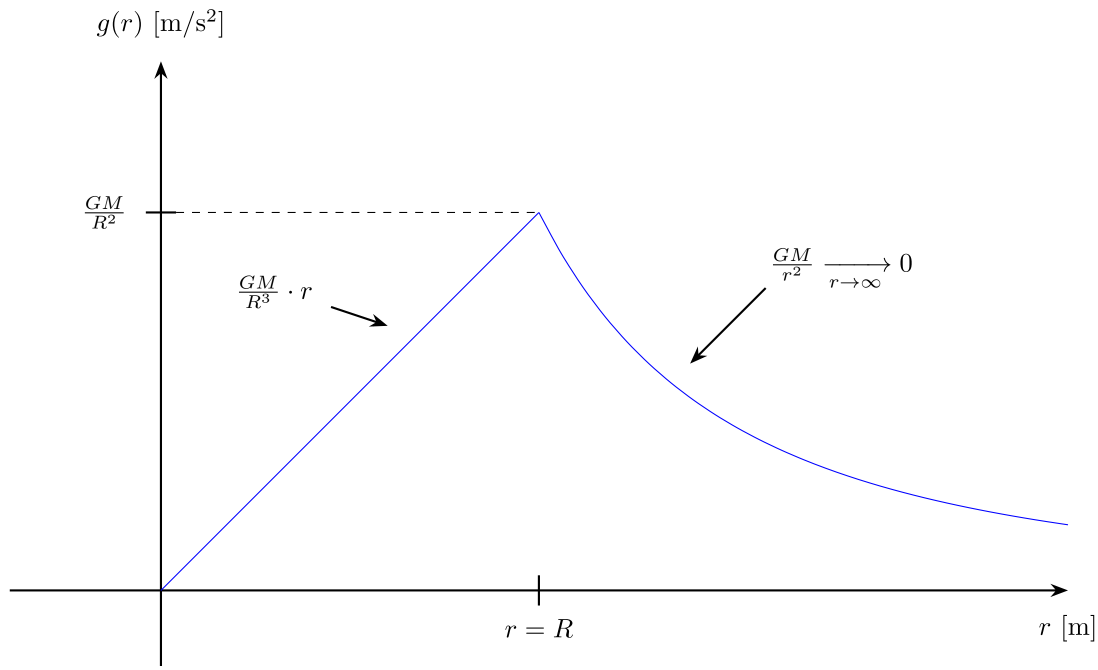
sem gefur því að $M_{\text{inni}} = M\left(\frac{r}{R}\right)^3$. Við fáum því að:

$$\oint \vec{g}(r)\cdot d\vec{A} = 4\pi G M_{\text{inni}} \implies g(r)\cdot 4\pi r^2 = 4\pi GM\left(\frac{r}{R}\right)^3$$

sem gefur því að:

$$g(r) = \frac{GM}{R^2}\frac{r}{R}, \qquad r < R.$$

Sjáum sér í lagi að þegar $r = R$ þá er $g(r) = \frac{GM}{R^2}$ eins og við var að búast. Á næstu blaðsíðu má síðan sjá graf sem sýnir þyngdarhröðun jarðar sem fall af fjarlægð frá miðju jarðarinnar, r.



Mynd 2: Graf af þyngdarhröðun jarðar sem fall af r.

Takið eftir að þyngdarhröðunin vex línulega inni í jörðinni!

15.3 Dæmi

Dæmatími 4: Rafflæði

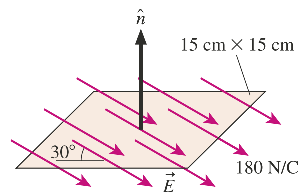
Rafflæði er skilgreind sem stærðin:

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA\cos\theta$$

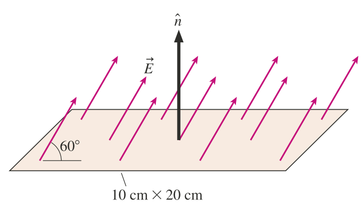
þar sem θ er hornið á milli vigranna. Ef við setjum þetta fram á örsmæðarformi þá verður þetta:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}.$$

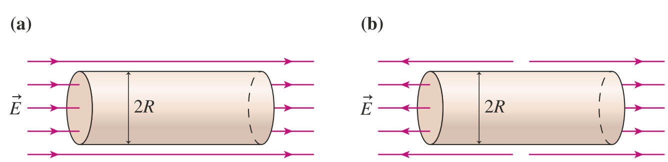
(24.9) Hvert er rafflæðið út um flötinn á myndinni?



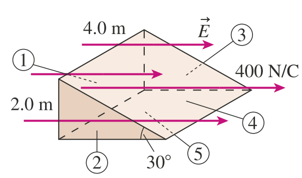
(24.11) Rafflæðið út um flötinn sem sést á myndinni er $\Phi_E = 25\,\mathrm{Nm^2/C}$. Hver er styrkur rafsviðsins?



(24.16) Hvert er rafflæðið út um sívalningana hér fyrir neðan?



(24.29) Ákarðið rafflæðin, $\Phi_1, \ldots, \Phi_5$ út um skábrettið hér fyrir neðan sem hallar um horn $\theta = 30°$ og hefur hæð $h = 2{,}0\,\mathrm{m}$ og breidd $b = 4{,}0\,\mathrm{m}$. Styrkur rafsviðsins er $E = 400\,\mathrm{N/C}$ í stefnu x-áss.



(24.9) $\Phi_E = -2{,}0\,\mathrm{Nm^2/C}$. **(24.11)** $\Phi_E = 1400\,\mathrm{N/C}$. **(24.16)** $\Phi_a = 0$, $\Phi_b = 2E\pi r^2$. **(24.29)**

$\Phi_1 = -3200\,\mathrm{Nm^2/C}$, $\Phi_2 = \Phi_3 = \Phi_5 = 0\,\mathrm{Nm^2/C}$, $\Phi_4 = 3200\,\mathrm{Nm^2/C}$, $\Phi_{\mathrm{heild}} = 0\,\mathrm{Nm^2/C}$.

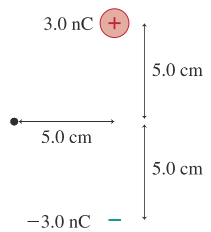
Dæmatími 5: Plötuþéttir

Rafsviðið í plötuþétti er gefið með:

$$E_{\text{plötuþéttir}} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}.$$

Rafsviðslínurnar liggja frá jákvæðu plötunni og að neikvæðu plötunni.

(23.3) Hver er styrkur og stefna rafsviðsins í svarta punktinum á myndinni?



(23.23) Plötuþéttir samanstendur af tveimur diskum með þvermál $þ = 6{,}0\,\mathrm{cm}$ í fjarlægð $d = 2{,}0\,\mathrm{mm}$ frá hvor annarri. Styrkur rafsviðsins á milli platnanna er $1{,}0 \cdot 10^6\,\mathrm{N/C}$. Hver er hleðslan á hvorri plötu?

(23.25) Tvær plötur eru í fjarlægð $d = 1{,}0\,\mathrm{cm}$ frá hvor annarri og halda hleðslu $\pm q \gg e$. Nú er rafeind sleppt frá yfirborði neikvæðu plötunnar og róteind er sleppt á sama tíma frá yfirborði jákvæðu plötunnar. Hvar mætast rafeindin og róteindin?

(23.26) Tvær plötur með þvermál $þ = 2{,}0\,\mathrm{cm}$ eru í fjarlægð $d = 1{,}0\,\mathrm{mm}$ frá hvor annarri. Búið er að hlaða plöturnar í $q = \pm 10\,\mathrm{nC}$.

(a) Hvert er rafsviðið á milli platnanna?

(b) Róteind er skotið frá neikvæðu plötunni í átt að þeirri jákvæðu. Hver þarf upphafshraðinn að vera ef hún á rétt svo að sleikja yfirborð jákvæðu plötunnar?

(23.3) $\vec{E} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -7600 \end{smallmatrix}\right)\,\mathrm{N/C}$. **(23.23)** $Q = 25\,\mathrm{nC}$. **(23.25)** $\ell_e = 0{,}9995\,\mathrm{cm}$. **(23.26)** $E = 3{,}6\,\mathrm{MN/C}$, $v = 8{,}3 \cdot 10^5\,\mathrm{m/s}$.

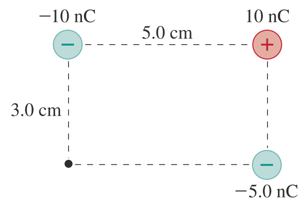
Dæmatími 6: Hreyfing í rafsviði

Hreyfing í rafsviði er afar svipuð hreyfingu í þyngdarsviði. Kraftajafnan okkar verður þá:

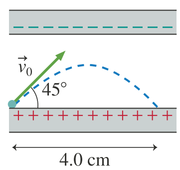
$$ma = qE, \qquad \text{til samanburðar við:} \qquad ma = mg$$

Almennt þá gilda allar sömu stöðujöfnur og við höfðum lært fyrir einsleitt rafsvið, E. Núna er hröðunin bara $a = \frac{qE}{m}$ í staðinn fyrir $a = g$.

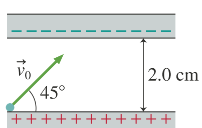
(23.37) Hver er styrkur og stefna rafsviðsins í punktinum á myndinni?



(23.52) Rafeind er skotið undir horni $\theta = 45°$ miðað ivð lárétt með upphafshraða $v_0 = 5{,}0 \cdot 10^6\,\mathrm{m/s}$ frá jákvæðu plötu plötuþéttisins eins og sést á myndinni hér fyrir neðan. Rafeindin lendir í fjarlægð $\ell = 4{,}0\,\mathrm{cm}$ frá upphafsstaðsetningu sinni. **(a)** Hver er styrkur rafsviðsins inni í þéttinum? **(b)** Hvert er minnsata hugsanlega plötubilið, d?



(23.53) Rafeind er skotið frá jákvæðu plötu plötuþéttis undir horni $\theta = 45°$ miðað við lárétt með upphafshraða v_0. Plötubilið er $d = 2{,}0\,\mathrm{cm}$. Styrkur rafsviðsins er $E = 1{,}0 \cdot 10^4\,\mathrm{N/C}$. Hver er mesti hraðinn, v_0, sem að rafeindin getur haft án þess að rekast í neikvæðu plötuna?



(23.73) Skoðum hringlaga gjörð með geisla R og jafndreifða hleðslu Q sem liggur þannig að samhverfuás gjarðarinnar samsvarar z-ás hnitakerfisins. Nú er lítilli hleðslu $-q$ komið fyrir í $z = 0$ á samhverfuás gjarðarinnar. Nú er hleðslan færð um litla vegalengd z frá jafnvægisstöðunni. Sýnið að fyrir $z \ll R$ þá verður tíðni einföldu sveifluhreyfingarinnar sem myndast við þetta gefin með:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 m R^3}}$$

(23.37) $\vec{E}_{\text{heild}} = \left(\begin{smallmatrix} -4{,}7 \\ 86{,}4 \end{smallmatrix}\right)\,\mathrm{kN/C}$, $E_{\text{heild}} = 86{,}5\,\mathrm{kN/C}$ og $\varphi = 266{,}9°$. **(23.52)** $d_{\max} = 9{,}9\,\mathrm{mm}$.

(23.53) $v_0 = 1{,}2 \cdot 10^7\,\mathrm{m/s}$. **(23.73)** $m\ddot{z} = -\frac{kQq}{R^3}z$, $\omega = \sqrt{\frac{kQq}{mR^3}}$, $f = \frac{\omega}{2\pi} = 2{,}0 \cdot 10^{12}\,\mathrm{Hz}$.

Dæmatími 7: Lögmál Gauss

Lögmál Gauss segir að heildarrafflæðið út Gauss-flöt með rúmmál V og yfirborðsflatarmál A er:

$$\Phi_{\text{heild}} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{inni}}}{\varepsilon_0}$$

Þar sem Q_{inni} er heildarhleðslan sem að Gauss-flöturinn umlykur.

(24.33) Hleðsla $q = +10\,\text{nC}$ er stödd í miðjunni á jafnhliða tening með hliðarlengdir $\ell = 2{,}0\,\text{m}$. Hvert er rafflæðið út um efstu hlið kubbsins vegna hleðslunnar, q?

(24.43) Finnið rafsviðið **(a)** inni í **(b)** fyrir utan á sundbolta með geisla R sem ber jafndreifða hleðslu Q á yfirborðinu.

(24.54) Lítum á kúluskel með innri geisla a og ytri geisla b. Hleðslan, Q, í kúluskelinni er jafndreifð um rúmmál hennar. Kúluskelin er hol að innan fyrir $r < a$.

- **(a)** Hvert er rafsviðið fyrir $r \geq b$?
- **(b)** Hvert er rafsviðið fyrir $r < a$?
- **(c)** Hvert er rafsviðið fyrir $a < r < b$?

(24.55) Eitt af fyrstu atómlíkönum Rutherfords hafði kjarna með hleðslu $+Ze$ í miðjunni (fjöldi róteindanna var þá heiltalan Z) og jafndreifða neikvæða hleðslu $-Ze$ í rúmmáli kúlu með geisla R.

- **(a)** Sýnið að rafsviðið inni í atóminu ($r < R$) er:

$$E = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right).$$

- **(b)** Hvert er gildið á E við yfirborð atómsins?
- **(c)** Úran hefur $Z = 92$ róteindir og geisla $R = 0{,}10\,\text{nm}$. Hver er rafsviðsstyrkurinn inni í Úranatómi í $r = \frac{1}{2}R$ fjarlægð frá kjarnanum?

(24.33) $\Phi_{\text{toppur}} = 190\,\text{Nm}^2/\text{C}.$ **(24.43)** $E(r) = \begin{cases} 0 & \text{ef } r < R \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \text{ef } r \geq R \end{cases}$ **(24.54)**

$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{ef } r < a \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \frac{r^3 - a^3}{b^3 - a^3} & \text{ef } a \leq r \leq b \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \text{ef } r < b \end{cases}$ **(24.55)** $E(r) = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right)$, $E(R) = 0$, $E_U(\frac{1}{2}R) = 4{,}6 \cdot 10^{23}\,\text{N/C}.$