Fyrirlestur 10

Ljós

„Það fyrsta sem Newton komst að raun um þegar hann hóf að athuga ljós var að hvítt ljós er blanda lita. Með glerstrendingi gat hann klofið hvítt ljós í ýmsa liti, en þegar hann sendi einlitt ljós - til dæmis rautt - gegnum annan þrístrending sá hann að ekki var hægt að kljúfa það frekar. Newton uppgötvaði því að hvítt ljós er blanda lita sem eru hreinir í þeim skilningi að engan þeirra er hægt að kljúfa í sundur. Newton taldi ljós samanstanda af eindum og hann hafði rétt fyrir sér (en rökin hans voru röng). Við vitum að ljós samanstendur af ögnum því það eru til næm tæki sem gefa frá sér smelli ef ljós skín á þau, og þótt ljósið dofni meir og meir eru smellirnir alltaf jafn háir, aðeins færri. Ljós er því ekki óvsipað regndropum. Hver dropi ljóss er kallaður ljóseind og ef ljósið er einlitt eru allir droparnir jafn stórir.“

- Richard P. Feynman, Ljósið, 1985

10.1 Lögmál Snells

Ljós ferðast alltaf með hraða $c = 3{,}00 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ óháð viðmiðunarkerfi. Hinsvegar, þá segir fólk stundum óheppilega að ljós ferðist „hægar“ í sumum efnum. En það er einfaldlega vegna þess að ljósið virðist ferðast hægar því að sameindir efnisins sem að ljósið ferðast í gegnum gleypa ljóseindirnar sem að lenda í árekstri við þær. Við það örvast sameindir efnisins upp í hærra orkustig, en sameindirnar vilja að eðlisfari vera í orkulægsta ástandinu sínu, grunnástandinu, svo að þær geisla aftur orkunni í burtu (jafn mikil orka svo að ljósið sem losnar aftur hefur sömu tíðni og upphaflega ljósið hafði). Við þetta virðist hægjast á ljósinu því hver svona árekstur tekur um það bil 1 ns (fer eftir því hversu þétt efnið er). Það sem meira er þá hefur þetta í för með sér að ljósgeislinn beygir við það að fara inn í önnur efni (hægt að sjá það með skriðþungavarðveislu á skilfletinum t.d.). Annað merkilegt, er eftirfarandi forsenda sem er gjarnan tileinkuð Fermat um eðli ljóssins:

Lögmál 10.1. (Lögmál Fermats) Ljósið ferðast ávallt þá leið milli tveggja punkta sem tekur stystan tíma að ferðast.

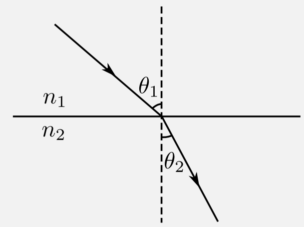
Skilgreining 10.2. Við táknum með n_{efni} brotstuðul efnis þar sem að ljóshraðinn er $c_{\text{efni}} < c$. Brotstuðullinn er skilgreindur þannig að:

$$n_{\text{efni}} = \frac{c}{c_{\text{efni}}}$$

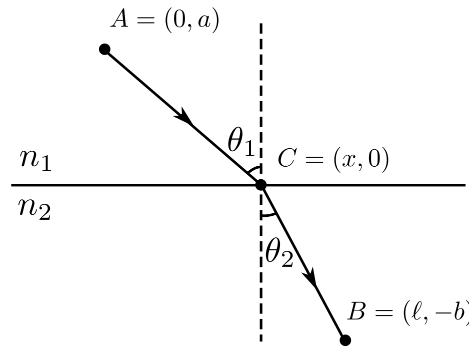
Takið sér í lagi eftir því að við höfum ávallt að $n_{\text{efni}} \geq 1$ því $c_{\text{efni}} \leq c$.

Lögmál 10.3. (Lögmál Snells) Látum ljós ferðast á milli tveggja efna þar sem að brotstuðlarnir eru n_1 og n_2. Látum θ_1 og θ_2 vera hornin sem að ljósgeislinn myndar við þverlana. Þá gildir að:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$



Útleiðsla 1: Látum ljósgeislan byrja í $A = (0, a)$ og enda í $B = (\ell, -b)$ eftir viðkomu í $C = (x, 0)$ á skilum efnanna. Við viljum lágmarka heildartímann sem það tekur ljósið að ferðast á milli A og C. Þar sem að ljósið ferðast með hraða c_1 í efni 1 en með hraða c_2 í efni 2 þá höfum við að heildartíminn sem það tekur ljósið að ferðast á milli A og C er gefinn með:



$$\tau(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(\ell - x)^2 + b^2}}{c_2}$$

En samkvæmt Fermat velur ljósið þá leið sem að lágmarkar ferðatímann:

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{x}{c_1\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{\ell - x}{c_2\sqrt{(\ell - x)^2 + b^2}} \overset{!}{=} 0.$$

En af skilgreiningunni á sínus sjáum við af rúmfræðinni á myndinni að:

$$\sin\theta_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \qquad \text{og} \qquad \sin\theta_2 = \frac{\ell - x}{\sqrt{(\ell - x)^2 + b^2}}$$

svo við ályktum að útgildið gefur að:

$$\frac{d\tau}{dx} \overset{!}{=} 0 \implies \frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2}$$

Við margföldum að lokum í gegn með ljóshraðanum c og höfum því lögmál Snells:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2.$$

□

Það er reyndar til önnur útleiðsla á lögmáli Snells sem er kennd við Newton (og kannski líka smá Einstein). Hún er eftirfarandi:

Útleiðsla 2: Samkvæmt Einstein þá samanstendur ljós af litlum ögnum sem við köllum ljóseindir. Hver ljóseind hefur orku $E_\gamma = hf = \frac{hc}{\lambda}$ þar sem f er tíðni ljóssins og λ er bylgjulengd þess. Fyrir massalausar agnir (eins og ljósið) þá gildir að skriðþungi ljóssins er $p_\gamma = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c}$. Ef við ímmyndum okkur hvað gerist á skilfleti efnanna þá sjáum við fyrir okkur að það er enginn heildarkraftur í láréttu stefnuna svo að skriðþunginn í láréttu stefnuna er varðveittur. Hinsvegar er einhver kraftur í lóðréttu stefnuna á skilunum - við getum hugsað okkur að það sé vegna aðdráttarkraftsins frá sameindunum á sitt hvorri hliðinni. En skriðþungavarðveislan í láréttu stefnuna gefur strax lögmál Snells:

$$\frac{hf_1}{c_1}\sin\theta_1 = \frac{hf_2}{c_2}\sin\theta_2$$

þar sem að heildarorka ljóseindanna er varðveitt svo $hf_1 = hf_2$. Við margföldum loks í gegn með c og fáum:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2.$$

□

10.2 Alspeglun

Að lokum skulum við fjalla stuttlega um alspeglun. Skoðum aðeins lögmál Snells aftur:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \implies \sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1$$

Eina leiðin til þess að þessi jafna geti gengið er ef að stærðin:

$$\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1 \leq 1$$

Þá hefur jafnan alltaf lausn og θ_2 ákvarðast af því skilyrði - með öðrum orðum þá kemst geislinn út úr efninu. Hinsvegar ef

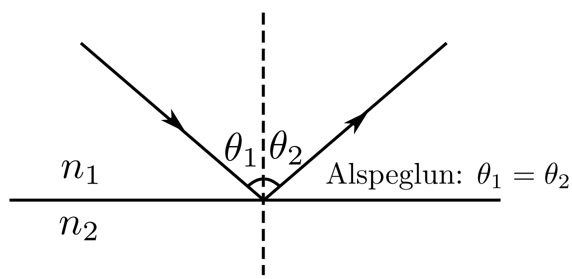
$$\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1 > 1$$

þá fáum við svokallaða **alspeglun**. Þá sleppur geislinn ekki út um hina hliðina. Við sjáum líka að þar sem að $\sin\theta_1 \leq 1$ þá er eina leiðin til þess að fá alspeglun ef:

$$\frac{n_1}{n_2} > 1 \implies n_1 > n_2.$$

Með öðrum orðum þá sjáum við að alspeglun getur einungis orðið þegar að ljós fer úr efni með hærri brotstuðul í efni með lægri brotstuðul þ.e.a.s. úr þéttara efni í ekki eins þétt efni (t.d. gler í loft eða gler í vatn).

Sér í lagi sjáum við að ef að það verður speglun þá er innfallshornið θ_1 jafnt útfallshorninu, θ_2, þ.e.



Með öðrum orðum þá vitum við að þegar að hlutir speglast af yfirborði þá er $\theta_1 = \theta_2$.

10.3 Upprifjun: Einföld sveifluhreyfing og bylgjusamliðun

Á þessu stigi málsins þá held ég að við þurfum að rifja upp aðeins úr 5. bekk. Til að byrja með skulum við rifja upp hvað einföld sveifluhreyfing er:

> **Skilgreining 10.4.** Við segjum að hlutur sé á **einfaldri sveifluhreyfingu** með **sveiflutíðni** ω ef lýsa má staðsetningu hlutarins, $z(t)$, sem fall af tíma með jöfnu af gerðinni:
>
> $$\ddot{z} = -\omega^2 z.$$

Eins og þið munið síðar læra þá er þetta óhliðruð 2. stigs diffurjafna með fastastuðlum sem hefur lausn:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi).$$

Til þess að sanna að eitthvað fall sé lausn á diffurjöfnu þá diffrar maður einfaldlega fallið og sýnir að það uppfylli diffurjöfnuna. En við athugum einmitt að:

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi), \qquad \ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)$$

Sem sýnir að $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ er fullkomin lausn á diffurjöfnunni. Almennt þarf 2 fasta (hér A og φ) til þess að ákvarða fullkomlega lausn á 2. stigs diffurjöfnu. Bylgjur eru síðan bara tvær einfaldar sveifluhreyfingar settar saman í eina hreyfingu, þ.e.a.s einföld sveifluhreyfing í tíma og rúmi. Bylgjujafnan er:

Skilgreining 10.5. Látum $\psi(x,t)$ lýsa fráviki hlutar frá jafnvægisstöðu sinni sem fall af staðsetningu, x og tíma, t. Við segjum að hluturinn sé á **bylgjuhreyfingu** með **bylgjuhraða** c ef frávikið uppfyllir **bylgjujöfnuna**:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

Lausnir á bylgjujöfnunni eru þá föll af gerðinni:

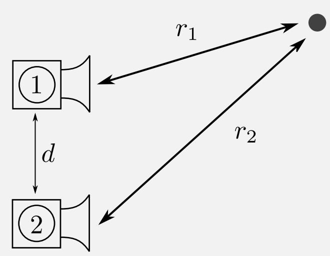
$$\psi(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \varphi), \qquad \text{þar sem} \qquad \omega = ck.$$

Sem við getum auðveldlega sannað með diffrun:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\omega^2\psi(x,t), \qquad c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -c^2k^2\psi(x,t) = -\omega^2\psi(x,t).$$

Ef við leggjum síðan saman tvær samfasa bylgjur frá sömu uppsprettu (það þýðir í stuttu máli að tíðnin er sú sama og þar með bylgjulengdin þar að auki sem að fasahornið er núll og þá höfum við:

Lögmál 10.6. Hugsum okkur að við höfum tvær samfasa bylgjuuppsprettur í fjarlægð d frá hvor annarri sem senda út eins bylgjur með útslag A, tíðni f og bylgjulengd λ. Skoðum einhvern punkt, P, sem er þannig að önnur uppsprettan er í fjarlægð r_1 frá punktinum og hin uppsprettan er í fjarlægð r_2 frá punktinum.



Þá er samliðunarbylgjan sem athugandi í punkti P greinir gefin með:

$$A\sin(kr_1 - \omega t) + A\sin(kr_2 - \omega t) = 2A\cos\left(\frac{1}{2}k\Delta r\right)\sin\left(\frac{1}{2}k(r_1 + r_2) - \omega t\right).$$

Sér í lagi þá mun athugandinn heyra fullkomlega styrkjandi/eyðandi bylgjusamliðun í punkti P ef:

$$\Delta r = \begin{cases} n\lambda & \text{(styrkjandi bylgjusamliðun)} \\ \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda & \text{(eyðandi bylgjusamliðun)} \end{cases}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Útleiðsla: Skoðum samliðunarbylgjuna í punktinum P en hún er gefin með:

$$\psi_{\text{P}} = \psi_1 + \psi_2 = A\sin(kr_1 - \omega t) + A\sin(kr_2 - \omega t)$$

Með því að nota þáttunarreglur hornafalla:

$$\sin(s) + \sin(t) = 2\sin\left(\frac{s+t}{2}\right)\cos\left(\frac{s-t}{2}\right),$$

fæst að:

$$\begin{aligned}\psi &= A\sin(kr_1-\omega t)+A\sin(kr_2-\omega t)\\ &= 2A\sin\left(\frac{(kr_1-\omega t)+(kr_2-\omega t)}{2}\right)\cos\left(\frac{(kr_1-\omega t)-(kr_2-\omega t)}{2}\right)\\ &= 2A\cos\left(\frac{1}{2}k\Delta r\right)\sin\left(\frac{1}{2}k(r_1+r_2)-\omega t\right).\end{aligned}$$

Við sjáum að samliðunarbylgjan hegðar sér eins og bylgja með fast útslag $B = 2A\cos\left(\frac{1}{2}k\Delta r\right)$, tíðni f og bylgjulengd λ, sem rita mætti sem $\psi = B\sin(kr-\omega t)$ þar sem $r = \frac{r_1+r_2}{2}$ er meðalfjarlægðin frá hátölurunum. En þá fæst fullkomlega styrkjandi bylgjusamliðun $B = 2A$ ef:

$$\cos\left(\frac{1}{2}k\Delta r\right) = 1 \implies \frac{1}{2}k\Delta r = n\pi \implies \Delta r = \frac{2n\pi}{k} = n\lambda.$$

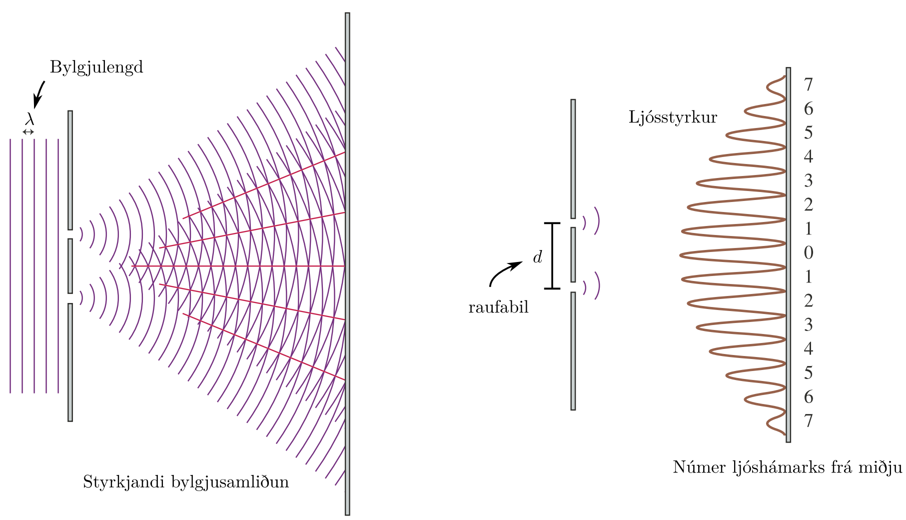
En fullkomlega eyðandi bylgjusamliðun $B = 0$ ef:

$$\cos\left(\frac{1}{2}k\Delta r\right) = 0 \implies \frac{1}{2}k\Delta r = \frac{\pi}{2}+n\pi = (2n+1)\frac{\pi}{2} \implies \Delta r = (2n+1)\frac{\pi}{k} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda.$$

Almennt segjum við að samliðun sé **styrkjandi** ef $B > A$ og **eyðandi** ef $B < A$. □

10.4 Tveggja raufa tilraun Youngs: Ljóssamliðun

Nú komum við að tveggja raufa tilraun Youngs sem var fyrst notuð til þess að sýna fram á bylgjueðli ljóss. Þá er leisigeisla með bygljulengd λ beint í gegnum tvær raufar eins og á myndinni hér fyrir neðan. Þá kemur fram styrkjandi bylgjusamliðun á skjá fyrir aftan raufarnar.



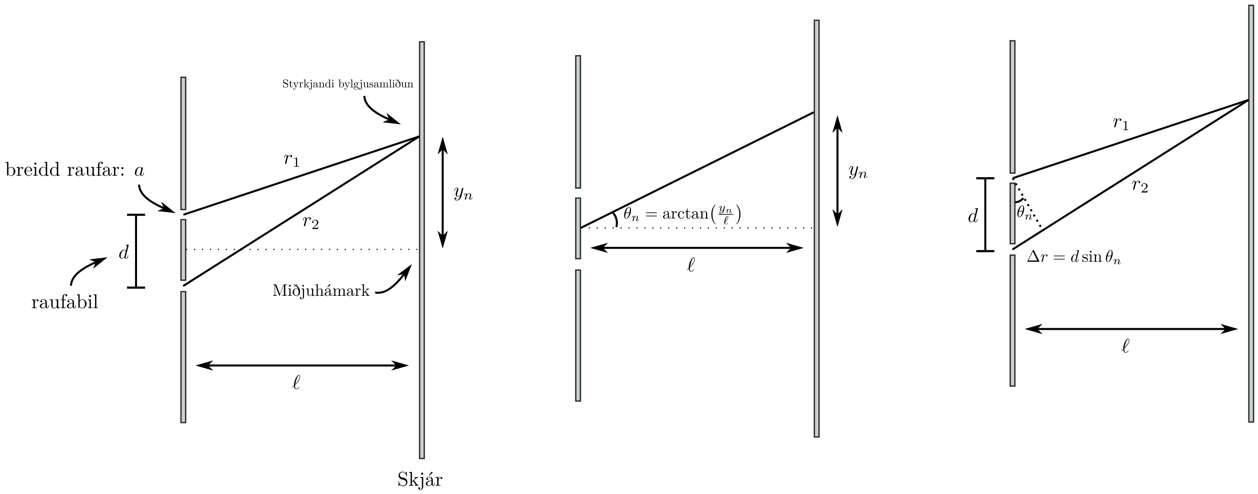
Lögmál 10.7. Þegar leisigeisla með bylgjulengd λ er beint í gegnum tvær raufar með raufabil d þá kemur fram styrkjandi samliðunarmynstur í fjarlægð ℓ fyrir aftan raufarnar. Ef y_n táknar staðsetningu björtu ljóshámarkanna þá gildir að:

$$d\sin\theta_n = n\lambda, \qquad y_n = \ell\tan\theta_n$$

Sér í lagi ef $\theta_n \ll 1$ þá gildir að bilið á milli ljósráka á skjánum er með góðri nálgun fast:

$$\Delta y = \frac{\lambda\ell}{d}$$

Útleiðsla 1: Til þess að bylgjusamliðunin sé styrkjandi í punkti á skjánum í fjarlægð y_n frá miðjunni þá þarf að muna heiltölumargfeldi af bylgjulengdum á vegalengdinni sem að geislarnir þurfa að ferðast frá hvorri rauf þannig að $\Delta r = n\lambda$. En við sjáum af eftirfarandi mynd:



Við ályktum þar með að

$$d \sin\theta_n = \Delta r = n\lambda$$

Þar að auki sem að rúmfræðilega staðsetning ljóshámarksins gefur okkur að:

$$y_n = \ell \tan\theta_n$$

Sér í lagi ber að nefna að ef $\theta_n \ll 1$ þá er $\sin\theta_n \approx \theta_n$ og $\tan\theta_n \approx \theta_n$ svo að fyrir lítil horn gildir að:

$$y_n = \ell \tan\theta_n \approx \ell \sin\theta_n = \frac{n\lambda\ell}{d} \implies \Delta y = y_{n+1} - y_n = \frac{\lambda\ell}{d}.$$

□

Útleiðsla 2: Ef að manni finnst þetta vera frekar óformlegt (eins og mér) og maður er ekki sannfærður á þessum rökum (eins og ég) þá gæti maður vilja gera þetta aðeins formlegra. Athugum fyrst að:

$$\sin\theta_n = \frac{y_n}{\sqrt{\ell^2 + y_n^2}}.$$

Höfum síðan að mismunurinn á vegalengdinni sem að ljósið þarf að ferðast er:

$$n\lambda = \Delta r = r_2 - r_1 = \sqrt{\ell^2 + \left(y_n + \frac{d}{2}\right)^2} - \sqrt{\ell^2 + \left(y_n - \frac{d}{2}\right)^2}$$

Með því að margfalda með samokastærðinni sjáum við að:

$$n\lambda = \frac{\left(y_n + \frac{d}{2}\right)^2 - \left(y_n - \frac{d}{2}\right)^2}{\sqrt{\ell^2 + \left(y_n + \frac{d}{2}\right)^2} + \sqrt{\ell^2 + \left(y_n - \frac{d}{2}\right)^2}} = \frac{2y_n d}{\sqrt{\ell^2 + \left(y_n + \frac{d}{2}\right)^2} + \sqrt{\ell^2 + \left(y_n - \frac{d}{2}\right)^2}} \overset{y_n \gg \frac{d}{2}}{\approx} \frac{y_n d}{\sqrt{\ell^2 + y_n^2}} = d \sin\theta_n.$$

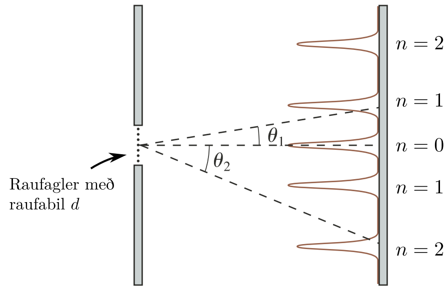
Sér í lagi sést í þessari nálgun að ef þar að auki við höfum að $\ell \gg y_n$ þá er þar að auki:

$$n\lambda \overset{y_n \gg \frac{d}{2}}{\approx} \frac{y_n d}{\sqrt{\ell^2 + y_n^2}} \overset{\ell \gg y_n}{\approx} \frac{y_n d}{\ell} \implies y_n = \frac{n\lambda\ell}{d}.$$

□

10.5 Margar raufar

Helsti kosturinn við seinni útleiðsluna hér á undan er að þá sér maður að svo lengi sem að $y_n \gg \frac{d}{2}$ þá mun $d \sin\theta_n = n\lambda$ gilda. Þá sjáum við að ef við höfum ljósgreiðu með mörgum raufum þá munu raufabilin sem eru hlið við hlið alltaf gefa sömu niðurstöðu og fyrir tveggja raufa mynstrið. Fyrir margar raufar þá er raufabilið oftast minna svo það dreifist meira úr ljóshámörkunum á skjánum en það þýðir að seinni nálgunin $\ell \gg y_n$ gildir ekki. Þar með höfum við:

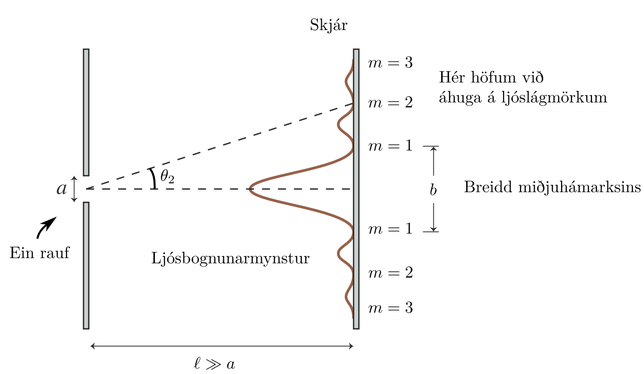


Lögmál 10.8. Þegar að leisigeisla með bylgjulengd λ er beint í gegnum ljósgreiðu með raufabil d þá kemur fram styrkjandi samliðunarmynstur á skjá í fjarlægð ℓ fyrir aftan raufaglerið. Ef y_n táknar staðsetningu björtu ljóshámarkanna þá gildir að:

$$d \sin\theta_n = n\lambda, \qquad y_n = \ell \tan\theta_n$$

10.6 Ein rauf: Ljósbognun

Ef við setjum fyrir aðra raufina þannig að leisigeislinn kemst bara út um aðra raufina þá fáum við svokallað ljósbognunarmynstur.



Þegar að leisigeisla með bylgjulengd λ er beint í gegnum eina rauf af stærð a þá kemur fram ljósbognunarmynstur á skjá í fjarlægð ℓ fyrir aftan. Ef y_n táknar staðsetningu dökku rákana (ljóslággildin) þá gildir að:

$$a \sin\theta_n = n\lambda, \qquad y_n = \ell \tan\theta_n$$

Að því gefnu að $\theta_1 \ll 1$ þá höfum við að breiddin á miðjuhámarkinu, b, er gefin með:

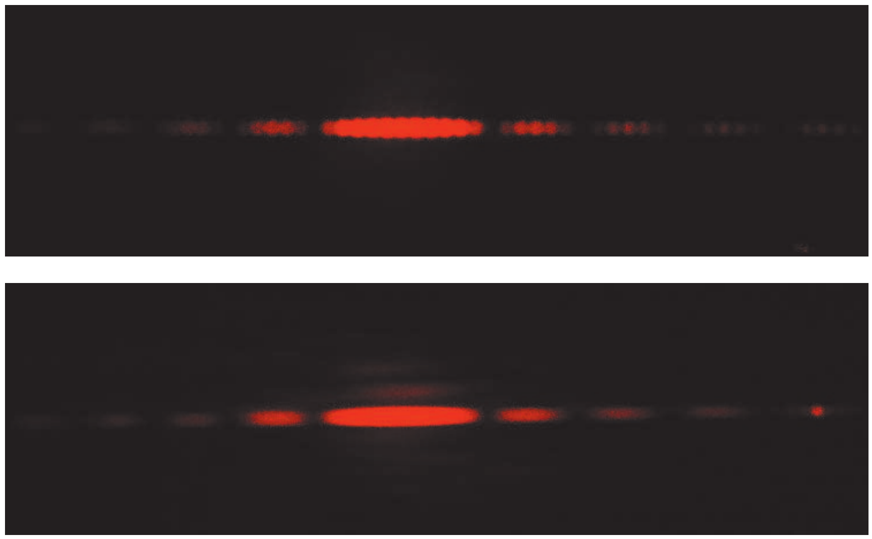
$$b = \frac{2\lambda\ell}{a}.$$

10.7 Bæði samliðunarmynstur og bognunarmynstur

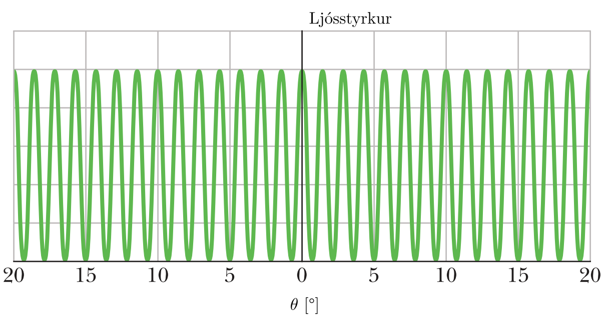
Í flestum tilvikum þá fáum við hinsvegar fram bæði mynstrin í einu (því það er óhjákvæmilegt að ef við erum með margra raufagler að raufarnar hafi ekki einhverja þykkt a og eitthvað raufabil d). En hvernig lítur slíkt mynstur út? Það er í rauninni bara bæði mynstrin sett saman í eitt. Hér er til dæmis mynd til útskýringar:

(*a*)

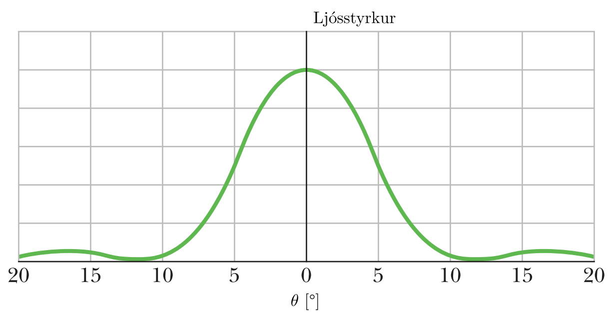
(*b*)



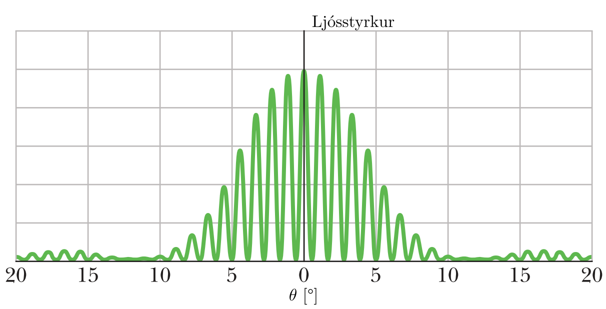
Á mynd (a) hér að ofan sést hefðbundið samliðunarmynstur fyrir tveggja raufa raufagler. En samliðunarmynstrið samanstendur í rauninni af tveimur mynstrum. Því á mynd (b) sést mynstrið sem fæst þegar að við lokum fyrir aðra raufina þannig að ljósið kemst bara í gegnum eina rauf. Þá sjáum við að dökku rákirnar koma útaf því hversu breið hver rauf er en ljóshámörkin inni í miðjuhámarkinu er vegna þess hversu langt er á milli ljóshámarkanna (sér í lagi gildir á þessum myndum að $\lambda < a < d$). Mynstrið sem kemur fram verður þá einhvern veginn svona:



(*a*) Tveggja raufa samliðunarmynstur sem ákvarðast af $d \sin\theta_n = n\lambda$



(*b*) Einnar raufar ljósbognunarmynstur þar sem lágmörkin ákvarðast af $a \sin\theta_m = m\lambda$



(*c*) Alvöru mynstrið sem kemur fram á skjánum er samsetning af bæði samliðunar- og ljósbognunarmynstrinu

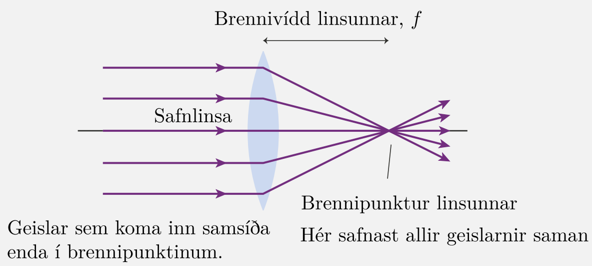
10.8 Linsur og geislagangsmyndir

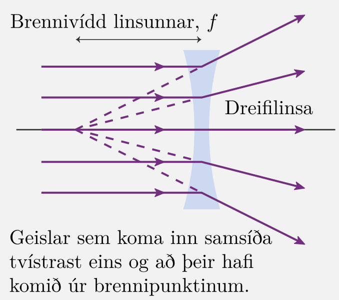
Linsur eru algengar í daglegu lífi. Þær er að finna í sjónaukum, smásjám og myndavélum þar að auki sem að þær eru megingrundvöllurinn fyrir því hvernig að gleraugu og augnlinsur virka (sumir nota slíkt á hverjum degi!). Til að byrja með skulum við setja fram tvær helstu gerðir af linsum sem að fólk notar:

Skilgreining 10.9. Við segjum að linsa sé:

(i) **Safnlinsa** ef allir geislar sem ferðast samsíða í gegnum linsuna safnast saman í einum **brennipunkti** í fjarlægð f frá linsunni á ás linsunnar.

(ii) **Dreifilinsa** ef allir geislar sem ferðast samsíða í gegnum linsuna tvístrast burt frá ás linsunnar eins og að þeir hafi komið úr brennipunktinum í fjarlægð $-f$ frá linsunni.





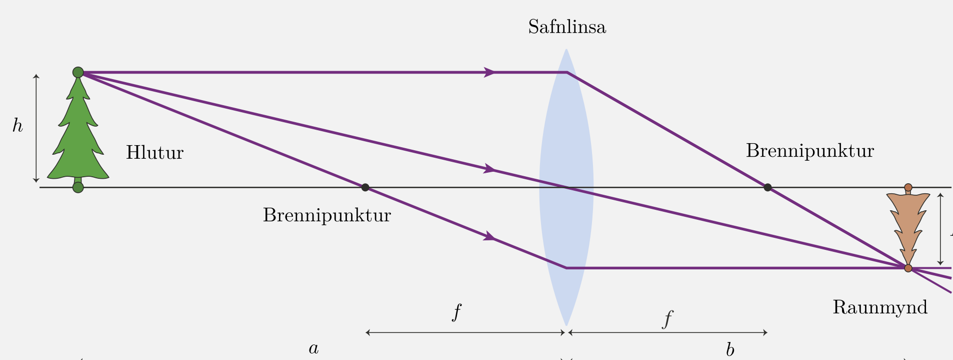
Talan f kallast **brennivídd** linsunnar. Safnlinsur hafa jákvæða brennivídd en dreifilinsur hafa neikvæða brennivídd.

Það ber að nefna að á hinni hlið linsunnar er alltaf alveg eins brennipunktur í sömu fjarlægð.

10.9 Safnlinsur: Raunveruleg mynd

Lögmál 10.10. Lítum á hlut með hæð h sem stendur í fjarlægð a frá safnlinsu með brennivídd f þar sem $a > f$. Þá kemur fram skörp, viðsnúin raunmynd í fjarlægð b hinum meginn við linsuna þar sem að hæð eftirmyndarinnar verður $H = \frac{b}{a}h$ þar að auki sem að við höfum **linsujöfnuna**:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$



Útleiðsla: Látum hæð hlutarins vera h og hæð eftirmyndarinnar vera H. Jafna línunnar sem að tengir saman punktana $(0, h)$ og $(f, 0)$ er gefin með:

$$y - h = \left(\frac{h-0}{0-f}\right)(x-0), \qquad \text{þ.e.} \qquad y_1 = h - \frac{h}{f}x$$

Hinsvegar, þá er jafna línunnar sem að liggur milli $(-a, h)$ og $(b, -H)$ gefin með:

$$y - h = \left(\frac{-H-h}{b-(-a)}\right)(x-(-a)), \qquad \text{þ.e.} \qquad y_2 = h - \left(\frac{H+h}{a+b}\right)(x+a).$$

Við vitum að seinni línan fer í gegnum $(0, 0)$. Athugum að skilyrðið $y_2(0) = 0$ gefur því að:

$$y_2(0) = 0 \implies h - \left(\frac{H+h}{a+b}\right)a = 0 \implies h(a+b) = (H+h)a \implies hb = Ha \implies \frac{H}{h} = \frac{b}{a}.$$

Svo við ályktum að $\frac{b}{a}$ lýsir stækkun myndarinnar:

$$H = \frac{b}{a}h$$

Sér í lagi sjáum við að ef $b > a$ þá stækkar myhndin en ef $a > b$ þá minnkar myndin. Við viljum síðan að línurnar y_1 og y_2 skerist í $x = b$. Við höfum því að:

$$\begin{aligned} y_1(b) = y_2(b) &\implies h - \frac{h}{f}b = h - \frac{H+h}{a+b}(a+b) = -H \\ &\implies 1 - \frac{b}{f} = -\frac{H}{h} = -\frac{b}{a} \\ &\implies \frac{1}{b} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{a} \end{aligned}$$

Sem gefur því að lokum linsujöfnuna:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

□

10.10 Safnlinsur: Ímynduð mynd

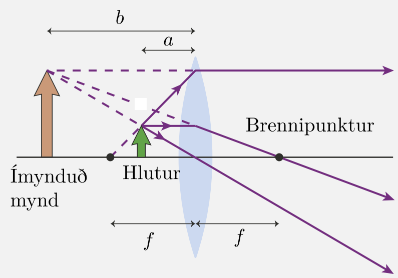
Við skulum líka skoða hvað gerist ef hluturinn okkar er fyrir innan brennipunktinn. Það er að segja ef að $a < f$. Eina leiðin til þess að linsujafnan:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

gangi upp með $a < f$, þ.e. $\frac{1}{a} > \frac{1}{f}$ er ef að b er neikvæð! En það samsvarar því að myndin kemur fram sömu meginn og hluturinn nema fyrir utan brennipunktinn, $b > f$. Við höfum semsagt:

Lögmál 10.11. Lítum á hlut með hæð h sem stendur í fjarlægð a frá safnlinsu með brennivídd f þar sem $a < f$. Þá kemur fram skörp, ímynduð mynd í fjarlægð $b < 0$ sömu meginn við linsuna þar sem að hæð eftirmyndarinnar verður $H = \left|\frac{b}{a}\right|h$ þar að auki sem að við höfum **linsujöfnuna**:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$



Útleiðsla: Þetta leiðir beint af útleiðslunni hér á undan nema maður ætti að benda á að hér er b neikvætt. $\square$

Reyndar eitt sem er áhugavert er að við getum notað linsujöfnuna til að sýna að ímyndaða myndin sem kemur fram er alltaf stærri heldur en upphaflegi hluturinn. Athugum að linsujafnan gefur að:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \implies b = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{a}\right)^{-1} = \frac{af}{a-f} \implies \frac{b}{a} = -\frac{f}{f-a}$$

og þar sem að $f > f - a$ þá er $\left|\frac{b}{a}\right| > 1$ svo myndin stækkar alltaf.

10.11 Dreifilinsur

Að lokum skulum við fjalla stuttlega um dreifilinsur. Dreifilinsur eru áhugaverðar að því leitinu til að við fáum bara eitt tilvik (en ekki tvö eins og fyrir safnlinsuna. Fyrir dreifilinsur gildir líka linsujafnan nema núna er brennivídd linsunnar neikvæð $f < 0$ og við fáum alltaf ímyndaða mynd svo $b < 0$.

Lögmál 10.12. Lítum á hlut með hæð h sem stendur í fjarlægð a frá dreifilinsu með brennivídd $f < 0$. Þá kemur fram skörp, smækkuð, ímynduð mynd í fjarlægð $b < 0$ sömu meginn við linsuna þar sem að hæð eftirmyndarinnar verður $H = \left|\frac{b}{a}\right|h$ þar að auki sem að við höfum **linsujöfnuna**: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$.