Kafli 25

Inngangur að skammtafræði

„There is nothing new to be discovered in physics now. All that remains is more and more precise measurement.“

- William Thomson (Lord Kelvin), 1900

„The task is not so much to see what no one has yet seen; but to think what nobody has yet thought, about that which everybody sees.“

- Erwin Schrödinger, 1925

25.1 Sögulegur inngangur

Árið 1905 hefur stundum verið kallað *Annus Mirabilis* eða ár undrana því það ár birti Einstein fjórar greinar (tæknilega séð þrjár því fjórða greinin er framhald af þriðju greininni) sem hver er talin marka nýtt upphaf að ólíkum greinum eðlisfræðinnar. Flestir kannast ágætlega við þriðju og fjórðu greinarnar sem fjalla um takmörkuðu afstæðiskenninguna. Færri kannast við aðra greinina um Brown-hreyfingu en það var fyrsta raunverulega röksemdarfærslan fyrir tilvist atóma (þannig var fyrst hægt að mæla stærð þeirra með skipulögðum hætti!). Einstein gaf síðan út almennu afstæðiskenninguna árið 1915 sem útskýrir hvernig að þyngdarkrafturinn virkar (þyngdarlögmál Newtons er nálgun!). Einstein hlaut síðan nóbelsverðlaunin árið 1921, en það er frekar athyglisvert í sögunni, að það var ekki fyrir verk hans á afstæðiskenningunni sem hann er frægastur fyrir í dag heldur var það fyrir fyrstu greinina sem að hann skrifaði árið 1905 um svokallaða ljósröfunartilraun. Í tilkynningu nóbelsnefndarinnar segir nefnilega:

For his services to Theoretical Physics, and especially for his discovery of the law of the photoelectric effect.

En það var fyrsta greinin sem hann birti árið 1905. Hún fjallaði um þessa svokölluðu ljósröfunartilraun. Þessi grein er af mörgum talin marka upphafið að skammtafræði en það er frekar írónískt því Einstein eyddi stórum hluta ævinnar í að reyna að færa rök gegn skammtafræðinni (sbr. samræður hans við Niels Bohr). Á þessum tímapunkti er kannski allt í lagi að útskýra hvers vegna Einstein var svo mótfallinn skammtafræðinni. Hann á að hafa sagt um skammtafræðina (sem stjórnast af líkum eins og teningakast):

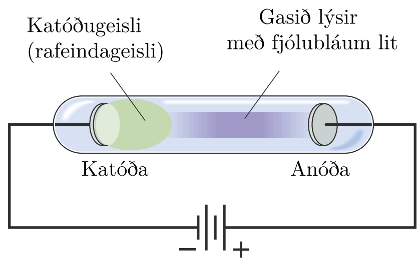
„God does not play dice with the universe.“

- Albert Einstein, 1926

En helsta ástæðan fyrir því að Einstein var mótfallinn skammtafræðinni var vegna þess að það kemur í ljós að skammtafræðin og almenna afstæðiskenningin eru ekki samrýmanlegar kenningar í þeirri merkingu að það er hægt að sýna fram á að aðeins önnur af þessum tveimur kenningum geti staðist - þær eru semsagt í mótsögn við hvor aðra! Einstein veðjaði auðvitað á að það væri almenna afstæðiskenningin sem að réði ríkjum og að skammtafræðin þyrfti að víkja fyrir betri kenningu. Ein frægasta grein allra tíma er einmitt svokölluð EPR-þversögn (Einstein–Podolsky–Rosen) en í þeirri grein færði Einstein að því er honum virtist óhrekjanleg rök fyrir því að skammtafræðin væri í mótsögn við sjálfa sig. Þetta er reyndar kveikjan afar merkilegum heimspekilgum samræðum og bréfaskrifum sem að danski eðlisfræðingurinn Niels Bohr og Albert Einstein áttu árin 1920-1930 um eðli skammtafræðinnar. Albert Einstein vildi meina að undirliggjandi gæti heimurinn ekki stjórnast af líkum - þetta væri bara galli í kenningunni - okkur vantaði bara nákvæmari lýsingu á heiminum til þess að við gætum útskýrt hvaðan þessar líkur kæmu. Hinsvegar vildu fylgismenn Bohrs meina að það væri aldrei hægt að ákvarða neina nánari lýsingu - efnisheimurinn er handahófskenndur og stjórnast af líkum á dýpsta plani tilverunnar. EPR-þversögnin sem að átti að vera helsti þyrnirinn í augum fylgismanna Niels Bohrs varð þvert á móti helsta vígi þeirra! Árið 1982 birti franski eðlisfræðingurinn Alain Aspect tilraunastaðfestingu á þessari svokölluðu þversögn og sýndi að það væru ekki til neinar huldar breytistærðir eins og Einstein hafði spáð fyrir um!

25.2 Glerpíputilraun Faradays

Til að skilja ljósröfunartilraunina almennilega verðum við að fara aftur til Michael Faradays (já! Það er maðurinn á bak við hið alræmda spanlögmál)[1] En Faraday hafði í kringum árið 1820 verið að skoða eftirfarandi uppstillingu:



Inni í glerpípunni hafði hann komið fyrir gasi (hér neon) og plötum í plötuþétti. Ef að spennumunurinn var nógu mikill á milli platna plötuþéttisins þá kom fram annar grænn geisli inni í glerpípunni sem að hann kallaði katóðugeisla (í dag vitum við að katóðugeislar eru ekkert annað heldur en rafeindageislar). Skoðum þetta aðeins nánar inni í hylkinu. Þegar rafeindirnar rekast á gassameindirnar þá fá sameindirnar orku og örvast upp í hærra orkuástand. En atóm vilja að eðlisfari vera í lægsta orkuástandi sínu, þ.e. grunnástandinu, svo að atómin reyna að losa sig við orkuna en við það þá geislar atómið frá sér ljóseind með tilheyrandi orku, þ.e. við höfum að:

$$E_\gamma = \Delta E_{\text{atóm}}$$

Það sem meira er: Liturinn á ljósinu sem að gasið gefur frá sér er breytilegur eftir því hvaða efni við erum með inni í glerpípunni. Öfugt þá er hægt að sjá hvaða efni er í hylkinu bara út frá því að litur kemur frá efninu. Sýnilega litrófið samanstendur af ljósi með bylgjulengd:

$$\lambda_{\text{sýnilegt}} \in [400; 750]\,\text{nm}.$$

En þar sem að $c = \lambda f$ þá samsvarar það eftirfarandi tíðnum:

$$f_{\text{sýnilegt}} = \frac{c}{\lambda_{\text{sýnilegt}}} \in [400; 750]\,\text{THz}.$$

(sem er afar skondin tilviljun!). Hvert efni hefur þá einskonar kennitölu sem kallast litróf frumefnisins og samanstendur af þeim sýnilegu bylgjulengdum sem að efnið getur gefið frá sér. Fyrir vetni höfum við t.d. að:

$$\lambda_{\text{H}} \in \left\{ \underbrace{410{,}1}_{\text{fjólublár}}\ ;\ \underbrace{434{,}0}_{\text{dökkblár}}\ ;\ \underbrace{486{,}1}_{\text{sægrænn}}\ ;\underbrace{656{,}2}_{\text{rauður}} \right\}\text{nm}.$$

[1] Reyndar var Michael Faraday afar ofarlega í huga Albert Einstein þegar hann skrifaði greinar sínar árið 1905. Til dæmis hefst greinin hans um afstæðiskenninguna á því að dásama störf Faradays.

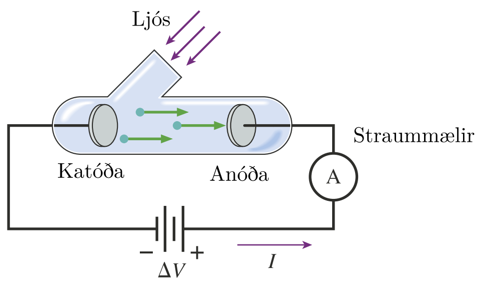
en fyrir kvikasilfur er t.d.

$$\lambda_{\mathrm{Hg}} \in \left\{ \underbrace{404{,}7}_{\text{fjólublár}};\ \underbrace{407{,}8}_{\text{ljós fjólublár}};\ \underbrace{435{,}8}_{\text{dökkblár}};\underbrace{546{,}1}_{\text{grænn}};\underbrace{577{,}0}_{\text{gulur}};\ \underbrace{579{,}1}_{\text{appelsínugulur}} \right\} \text{nm}.$$

Á þessum tímapunkti förum við að sjá ummerki um skömmtun! Litrófslínurnar geta bara komið í ákveðnum gildum en ekki með hvaða gildi sem er! Þetta er fyrsta vísbendingin um skömmtun á orku atómanna! Þetta minnir á grunnhleðsluna, e, en allar hleðslur, Q, þurfa að vera heiltölumargfeldi af e, þ.e. til er $N \in \mathbb{Z}$ þannig að $Q = Ne$.

25.3 Ljósröfunartilraunin og útskýring Einsteins

Árið 1886 prufaði Heinrich Hertz að breyta glerpíputilrauninni örlítið þannig að:



Það sem að hann komst að var að ljóseindirnar gátu búið til straum í rásinni en það ætti ekki að vera neinn straumur í rásinni þegar að þéttirinn er fullhlaðinn! Hvernig væri hugsanlega hægt að útskýra það? Það sem meira var, það var bara fyrir ákveðnar bylgjulengdir á ljósi sem að þetta var hægt! Ef að bylgjulengdin var of há þá var ekki hægt að fá straum í rásina sama hversu mikill ljósstyrkurinn var en um leið og bylgjulengdin varð nógu lág (og þar með hækkaði orka ljóseindanna í ljósinu) þá var hægt að fá straum í rásina. Hertz skráði niður athuganir sýnar:

(1) Ljósröfunarstraumurinn í rásinni er í beinu hlutfalli við ljósstyrkinn.

(2) Straumurinn í rásinni byrjar um leið ($< 1\,\mathrm{ns}$) og kveikt er á ljósinu.

(3) Ljósröfunarstraumurinn kemur einungis fram ef tíðni ljóssins er $f > f_0$ eða $\lambda < \lambda_0$ þar sem f_0 kallast **þröskuldstíðni málmsins** og er háð efninu sem að plötuþéttirinn samanstendur af.

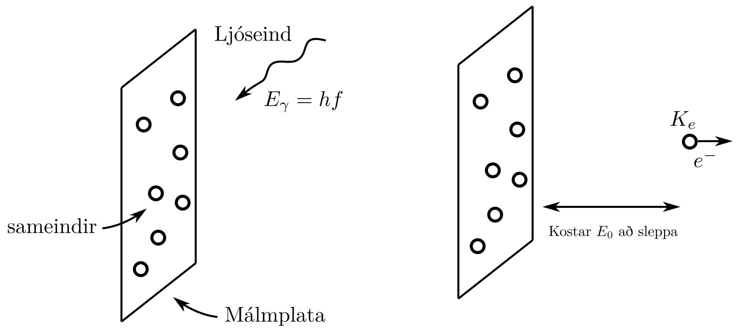
(4) Ef að rafhlöðunni er snúið við og ljósinu beint að jákvæðu plötu plötuþéttisins þá hættir straumurinn í rásinni þegar að spennumunurinn í rásinni verður $V_{\text{þ}}$, þar sem að $V_{\text{þ}}$ kallast **þröskuldsspenan**. Gildið á $V_{\text{þ}}$ er breytilegt eftir efnum og óháð ljósstyrknum. Með öðrum orðum, sama hversu sterkt ljósið er þá endar spennumunurinn í rásinni alltaf í $V_{\text{þ}}$.

Einstein hlaut nóbelsverðlaunin árið 1921 fyrir að útskýra þessa ljósröfunartilraun. Einstein lagði til að orka ljóss væri skömmtuð. Hann kallaði slíkan orskuskammt ljóseindir. Hann staðhæfði að:

$$E_\gamma = hf$$

þar sem að $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Js er fasti Plancks.[1] Þá gat Einstein útskýrt ljósröfunina með eftirfarandi hætti:

[1] Fastinn, h, heitir eftir þýska eðlisfræðingnum Max Planck sem notaði hann fyrst árið 1900 til að útskýra svarthlutsgeislun (sem útskýrir djúpstæð tengsl milli litrófslína og hitastigs). En Planck notaði tilgátuna hans Einsteins án þess að átta sig á því!



Til þess að osa rafeind frá yfirborðinu á málminum þá þarf örvaða rafeindin (sem gleypir ljóseindina) að fá nógu mikla orku til þess að yfirvinna alla rafsegulkraftana sem að halda henni í málmplötunni. Því er til minnsta orka; svokallað vinnufall mámlsins (sem er breytilegt fyrir mismunandi málma), E_0, þannig að:

$$E_\gamma = E_0 + K_e \quad \text{þ.e.} \quad K_e = E_\gamma - E_0 = hf - hf_0 = h(f - f_0).$$

þar sem að K_e táknar hreyfiorku rafeindarinnar sem að losnar. En þá nær rafeindin bara að lenda á neikvæðu plötu plötuéttisins ef að hún hefur nægilega orku til að yfirvinna rafsviðið (sem er að reyna að stöðva hana) sem gefur því að þröskuldsspennan verður

$$eV_\text{þ} = K_e = hf - E_0.$$

25.4 Efnisbylgjur de Broglie

Samkvæmt afstæðiskenningu Einsteins er orku-skriðþunga jafnan:

$$E^2 = E_0^2 + (pc)^2$$

þar sem að E táknar heildarorku eindarinnar, E_0 táknar kyrrstöðuorku eindarinnar og p táknar skriðþunga eindarinnar. Ljóseindir eru massalausar og fyrir þær gildir að $E_0 = 0$ en þar með höfum við að:

$$E_\gamma = p_\gamma c \implies p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{\frac{hc}{\lambda}}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Með öðrum orðum þá höfum við almennt að skriðþungi ljóseindar er gefinn með:

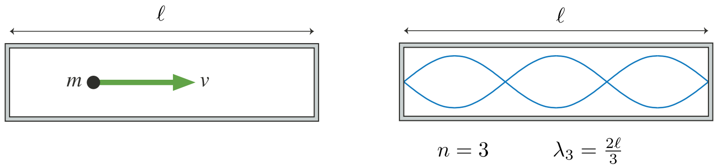
$$p_\gamma = \frac{h}{\lambda}.$$

En árið 1924 í doktorsritgerðinni sinni þá staðhæfði Louis de Broglie (borið fram du broj) að sama jafn gildir líka fyrir efnisagnir. Þ.e. til er svokölluð de Broglie bylgjulengd fyrir allar efnisagnir sem er gefin með:

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p}.}$$

Þar sem að $p = mv$ eða $p = \gamma mv$ (eftir því hvort á betur við) er skriðþungi efniseindarinnar.

Hann notaði þetta til þess að útskýra mörg skammtafræðileg fyrirbæri (hann hlaut nóbelsverðlaunin árið 1929 fyrir störf sín með efnisbylgjur). En sér í lagi notaði hann þetta til þess að útskýra kjarnann og atómið. Hann ímyndaði sér nefnilega að kjarninn væri eins og kassi og að kjarneindirnar gætu einungis hegðað sér eins og staðbylgjur á streng inni í kassanum (með lokuðu jaðarskilyrði því kassinn er lokaður).



Hryefiorka agnanna í kassanum er

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}.$$

Þar að auki sem að samkvæmt bylgjuagnaforsendu de Broglie er $\lambda = \frac{p}{h}$ svo:

$$K = \frac{\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2}{2m} = \frac{h^2}{2m}\frac{1}{\lambda^2}$$

En staðbylgjur uppfylla þá að $\lambda = \frac{2\ell}{n}$ þar sem $n \in \mathbb{Z}_+$ svo

$$E_n = K_n = \frac{h^2 n^2}{8m\ell^2}$$

er heildarorka agnanna í kassanum. Við sjáum þá sér í lagi að orkan er skömmtuð.

25.5 Klassískur líftími atómsins

Árið 1897 hafði Joseph Larmor sýnt fram á að allar hlaðnar eindir sem að verða fyrir hröðun geisla frá sér orku með afli sem er gefið með:

$$P = \frac{1}{6\pi\epsilon_0}\frac{q^2 a^2}{c^3} = \frac{2}{3}\frac{kq^2a^2}{c^3}.$$

En við vitum að ef að rafeindin er á hringhreyfingu umhverfis róteindina í vetnisatóminu þá verður hún fyrir miðsóknarhröðun sem er gefin með:

$$m_e a_{\text{mið}} = \frac{ke^2}{r^2} \implies a = \frac{ke^2}{m_e r^2}$$

Við athugum síðan að heildarorka rafeindinarinnar á sporbraut hennar umhverfis róteindina er:

$$E = K + U = \frac{1}{2}m_e v^2 - \frac{ke^2}{r}$$

En við höfum að $a_{\text{mið}} = \frac{v^2}{r} = \frac{ke^2}{m_e r^2}$ svo við ályktum að:

$$E = \frac{1}{2}m_e v^2 - \frac{ke^2}{r} = \frac{1}{2}m_e\frac{ke^2}{m_e r} - \frac{ke^2}{r} = -\frac{1}{2}\frac{ke^2}{r}$$

En við athugum síðan að samkvæmt keðjureglunni er:

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}.$$

En við athugum að

$$\frac{dE}{dr} = \frac{d}{dr}\left(-\frac{1}{2}\frac{ke^2}{r}\right) = \frac{1}{2}\frac{ke^2}{r^2}.$$

En þar með höfum við samkvæmt Larmor að:

$$\frac{1}{2}\frac{ke^2}{r^2}\frac{dr}{dt} = P = \frac{2}{3}\frac{ke^2a^2}{c^3} = \frac{2ke^2}{3c^3}\left(\frac{ke^2}{m_e r^2}\right)^2 \implies \frac{dr}{dt} = \frac{4k^2e^4}{3m_e^2c^3}\cdot\frac{1}{r^2} = \frac{\alpha}{r^2}$$

Þar sem að við höfum skilgreint $\alpha = \frac{4k^2e^4}{3m_e^2c^3} = 2{,}2\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$. Þetta er fyrsta stigs diffurjafna sem að við leysum með aðskilnaði breytistærða:

$$\int_{r_1}^{r_2} r^2 dr = \int_0^t \alpha dt \implies \frac{1}{3}\left(r_2^3 - r_1^3\right) = \alpha t \implies t = \frac{1}{3\alpha}\left(r_2^3 - r_1^3\right)$$

Þannig að heildartíminn sem að það myndi taka rafeindina að falla frá $r_1 = 10^{-10}\,\mathrm{m}$ niður í $r_2 = 10^{-15}\,\mathrm{m}$ væri:

$$t =$$

En þetta er augljóslega allt of stuttur tími því þá væru frumeindir ekki svona stöðugar eins og þær eru (þá myndu þær svo gott sem hrörna um leið og þær myndast!).

figures/spirala.pdf

25.6 Bohr-líkanið

En danski eðlisfræðingurinn (og nóbelsverðlaunahafi 1922) reyndi að lagfæra þetta gallaða atómlíkan árið 1913 með eftirfarandi þremur forsendum:

Frumsendur að atómlíkani Bohrs

(i) Rafeindin er á stöðugri hringhreyfingu umhveris kjarnan án þess þó að geisla frá sér orku. Þessar brautir eru skammtaðar í þeirri merkingu að rafeindin getur einungis verið í ákveðinni fjarlægð frá róteindinni (en ekki hvaða fjarlægð sem er).

(ii) Þessar stöðugu brautir eru þær brautir þar sem að hverfiþungi rafeindarinnar á sporbraut hennar um kjarnan er skammtaður þannig að:

$$L = n\hbar$$

Þar sem $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}05\cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}$ er fasti sem nefnist smækkaður Plancks-fasti (eða há-slá).

(iii) Rafeindir geta einungis stokkið á milli leyfilegra brautargeisla með því annað hvort að taka við eða geisla frá sér rafsegulgeislun (ljóseind) með orku $\Delta E_{\text{atóm}} = E_\gamma = hf$.

Þessi skammtatilgáta hófst með Planck og Einstein árið 1905. En Einstein hafði haft þá tilgátu að líta mætti á sem svo að ljós samanstæði af svokölluðum ljóseindum þar sem að hver ljóseind hefði orku $E = hf$ þar sem $h =$ var Plancks-fastinn og f var tíðni ljóssins.
Samkvæmt atómlíkani Bohrs þá gildir því að:

$$ma = m\frac{v^2}{r} = \frac{ke^2}{r^2} \implies v = \sqrt{\frac{ke^2}{mr}}$$

En þar með höfum við að þar sem að hverfiþungi agnarinnar er heiltölumargfeldi af smækkaða Plancks-fastanum að:

$$mvr = n\hbar \implies m\sqrt{\frac{ke^2}{mr}}r = n\hbar \implies mke^2r = n^2\hbar^2 \implies r_n = \frac{\hbar^2 n^2}{mke^2} = a_B n^2.$$

Þar sem $a_0 = r_1 = 0{,}529\,\text{Å}$ er svokallaður Bohr-geisli og táknar minnstu leyfilegu brautarvegalengdina sem að rafeindin getur haft. En þá sjáum við að brautarhraði rafeindarinnar á n-tu braut er gefinn með:

$$v_n = \sqrt{\frac{ke^2}{mr_n}} = \sqrt{\frac{ke^2}{ma_B}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{v_1}{n}$$

þar sem $v_1 = 2{,}19 \cdot 10^6\,\text{m/s}$ er brautarhraði rafeindarinnar á innsta hveli. Heildarorka rafeindarinnar á n-tu braut er þá gefin með:

$$E_n = \frac{1}{2}m_e v_n^2 - \frac{ke^2}{r_n} = \frac{1}{2}m_e\frac{ke^2}{m_e r_n} - \frac{ke^2}{r} = -\frac{1}{2}\frac{ke^2}{r_n} = -\frac{E_1}{n^2}$$

Þar sem $E_1 = 13{,}6\,\text{eV}$ er heildarorka rafeindarinnar á innsta hveli (takið eftir því að heildarorka rafeindarinnar er alltaf neikvæð og því ytra sem að rafeindin fer því nær kemst heildarorkan núlli). En þar með ályktum við að orkan sem að rafeindin geislar frá sér við það að fara á milli orkuhvela er gefin með:

$$\frac{hc}{\lambda} = hf = \Delta E = E_m - E_n = -\frac{E_1}{m^2} + \frac{E_1}{n^2} = -E_1\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

En þar með ályktum við að gleypnilínur vetnisatómsins verða greinilegar við eftirfarandi bylgjulengdir:

$$\lambda = \frac{-\frac{hc}{E_1}}{\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{\lambda_0}{\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)}$$

Þannig tókst Bohr að spá fyrir gleipnilínurófi vetnisatómsins. En þegar að Bohr reyndi að framkvæma sömu reikninga fyrir helín atómið þá voru niðurstöðurnar hans algjörlega í mótsögn við mælingar. Hann hafði því gert eitthvað rétt en samt svo vitlaust!

25.7 Óendanlegur mættisbrunnur

Lítum á eind með massa m og hraða v sem að ferðast inni í kassa með lengd ℓ. Samkvæmt de Broglie hefur eindin einhverja bylgjulengd:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}.$$

En við höfum áður lært að staðbylgjur með lokuð jaðarskilyrði uppfylla:

$$\lambda_n = \frac{2\ell}{n}$$

Með því að setja þessar tvær hugmyndir saman þá ályktum við að:

$$\frac{2\ell}{n} = \frac{h}{mv_n} \implies v_n = \frac{hn}{2m\ell}$$

Heildarorka eindarinnar inni í kassanum er einungis vegna hreyfiorku hennar svo að við höfum því að:

$$E_n = \frac{1}{2}mv_n^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{hn}{2m\ell}\right)^2 = \frac{h^2n^2}{8m\ell^2}.$$

Tilheyrandi bylgjuföll verða þá:

$$\psi_n(x) = A\sin(k_n x) = A\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda_n}\right) = A\sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right)$$

Við tengjum við bylgjufallið svokallaðan líkindaþéttleika:

$$\rho_n(x) = |\psi_n(x)|^2 = A^2\sin^2\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right)$$

Líkindaþéttleikinn lýsir líkunum á því að finna ögnina inni á einhverju bili með eftirfarandi hætti:

$$\mathbb{P}_{[a,b]} = \int_a^b \rho(x)dx$$

Heildarlíkurnar á því að finna ögnina inni í kassanum verða því að vera 1 þannig að við höfum að:

$$1 = \mathbb{P}_{[0,\ell]} = \int_0^\ell A^2\sin^2\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)dx = A^2\int_0^\ell \frac{1-\cos\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right)}{2}dx = \frac{A^2}{2}\left[x - \frac{\ell}{2\pi n}\sin\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right)\right]_0^\ell = \frac{A^2\ell}{2}$$

Svo við ályktum að:

$$A = \sqrt{\frac{2}{\ell}}.$$

Við höfum þar með að bylgjuföllin verða:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}}\sin\left(\frac{2\pi n x}{\ell}\right), \qquad \text{og líkindaþéttleikinn verður} \qquad \rho_n(x) = \frac{2}{\ell}\sin^2\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right).$$

Við getum þá svarað spurningum eins og:

- Hverjar eru líkurnar á því að finna ögn í skammtaástandi n milli $\frac{\ell}{4}$ og $\frac{\ell}{2}$?

Lausn: Höfum þá:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[\frac{\ell}{4},\frac{\ell}{2}]} &= \int_{\ell/4}^{\ell/2}\rho_n(x) = \frac{2}{\ell}\int_{\ell/4}^{\ell/2}\sin^2\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)dx = \frac{1}{2\ell}\int_{\ell/4}^{\ell/2}\left(1-\cos\left(\frac{2\pi n x}{\ell}\right)\right)dx \\
&= \frac{1}{2\ell}\left[x - \frac{\ell}{2\pi n}\sin\left(\frac{2\pi n x}{\ell}\right)\right]_{\ell/4}^{\ell/2} \\
&= \frac{1}{2\ell}\left(\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{4} - \frac{\ell}{2\pi n}\sin(n\pi) + \frac{\ell}{2\pi n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi n}(-1)^{n+1}\right).
\end{aligned}$$