Kafli 20

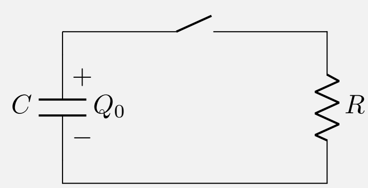
Tímaþróun í rafrásum

20.1 Jafnspennurásir (DC)

20.1.1 RC-rás:

Lögmál 20.1. (Afhleðsla þéttis) Lítum á rafrás þar sem að hleðslu Q_0 hefur verið komið á þétti í rafrás með viðnámi R sem er til að byrja með rofin þannig að enginn straumur flæðir í rásinni. Við tímann $t = 0\,\mathrm{s}$ lokum við fyrir rofan svo að straumur geti flætt í rásinni. Þá mun þéttirinn afhlaðast og hleðslan á þéttinum eftir tímann, t, verður gefin með:

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}$$



Útleiðsla: Eftir að rofanum er lokað þá höfum við samkvæmt lykkjulögmáli Kirchoffs að:

$$\frac{Q}{C} - IR = 0$$

En við höfum að $I = \frac{dq}{dt} = -\frac{dQ}{dt} = -\dot{Q}$ (neikvæða formerkið táknar að rafstraumurinn í rásinni er hleðslan sem að þéttirinn missti) svo við ályktum að:

$$\frac{Q}{C} + R\dot{Q} = 0 \implies \dot{Q} + \frac{1}{RC}Q = 0.$$

Við margföldum síðan með $e^{t/RC}$ báðum meginn og fáum að:

$$0 = \dot{Q} + \frac{1}{RC}Q = \dot{Q}e^{t/RC} + \frac{1}{RC}e^{t/RC}Q = \frac{d}{dt}\left(Qe^{t/RC}\right).$$

Þar sem að við höfum notað diffrun margfeldis í öfuga átt (ég kalla þetta að pilla af afleiðuna). En þar með ályktum við að til sé fasti α þannig að:

$$Qe^{t/RC} = \alpha \implies Q(t) = \alpha e^{-t/RC}.$$

Upphafsskilyrðið gefur síðan að $Q(0) = \alpha = Q_0$ svo við ályktum að:

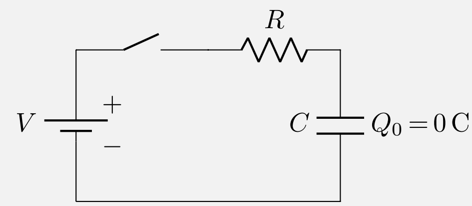
$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}.$$

$\square$

Lögmál 20.2. (Hleðsla þéttis) Lítum á rafrás með spennugjafa V, viðnámi R og þétti með rýmd C þar sem að til að byrja með er engin hleðsla á þéttinum, $Q_0 = 0\,\mathrm{C}$. Til að byrja með er rásin rofin þannig að enginn straumur flæðir í rásinni. Við tímann $t = 0\,\mathrm{s}$ lokum við fyrir rofan svo að straumur geti flætt í rásinni. Þá mun þéttirinn hlaðast og hleðslan á þéttinum eftir tímann, t, verður gefin með:

$$Q(t) = Q_{\max}\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

Þar sem $Q_{\max} = CV$ er mesta hleðslan sem að þéttirinn getur borið (við spennuna V).



Útleiðsla: Við notum lykkjulögmál Kirchoffs og höfum þá:

$$V - IR - \frac{Q}{C} = 0$$

En nú er $I = \frac{dq}{dt} = \frac{dQ}{dt}$ svo við höfum:

$$\dot{Q} + \frac{1}{RC}Q = \frac{V}{R}$$

Við margföldum síðan aftur með $e^{t/RC}$ og fáum að:

$$\frac{d}{dt}\left(Qe^{t/RC}\right) = \dot{Q}e^{t/RC} + \frac{1}{RC}e^{t/RC}Q = \frac{V}{R}e^{t/RC}$$

En þá fáum við með tegrun að:

$$Qe^{t/RC} = VCe^{t/RC} + \alpha$$

Þar sem α er tegurfasti sem ákvarðast af upphafsskilyrðinu $Q(0) = Q_0 = 0\,\mathrm{C}$. En þar með er:

$$Q(t) = VC + \alpha e^{-t/RC}$$

En þá gefur upphafsskilyrðið að $Q(0) = Q_0 = 0 = VC + \alpha$ svo $\alpha = -VC$ og við höfum því:

$$Q(t) = VC\left(1 - e^{-t/RC}\right) = Q_{\max}\left(1 - e^{-t/RC}\right).$$

$\square$

Við höfum þá samanburð við einfölda sveifluhreyfingu $\ddot{z} = -\omega^2 z$ og höfum því:

Skilgreining 20.3. Diffurjafna af gerðinni $\dot{z} = -\alpha z$ kallast *hrörnunarhreyfing* og hefur lausn:

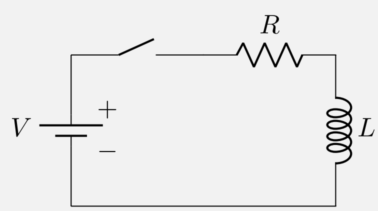
$$z(t) = z_0 e^{-\alpha t}.$$

20.1.2 LR-rás:

Lögmál 20.4. (Með spennugjafa) Lítum á rafrás með spennugjafa V, viðnámi R og spólu með spanstuðul L þar sem að til að byrja með er engin hleðsla á þéttinum, $Q_0 = 0\,\mathrm{F}$. Til að byrja með er rásin rofin þannig að enginn straumur flæðir í rásinni. Við tímann $t = 0\,\mathrm{s}$ lokum við fyrir rofan svo að straumur geti flætt í rásinni. Þá mun straumurinn í rásinni aukast smátt og smátt og verður við tímann, t, gefin með:

$$I(t) = I_{\max}\left(1 - e^{-tR/L}\right).$$

Þar sem $I_{\max} = \frac{V}{L}$ er mesti straumurinn í rásinni. Sér í lagi sjáum við að þegar $t \to \infty$ þá má líta á sem svo að straumurinn $I(t) \approx I_{\max}$ sé fastur í rásinni og að það sé einungis spennufall yfir viðnámið.



Útleiðsla: Við höfum þá að:

$$V - IR - L\dot{I} = 0$$

Sem við getum umritað þannig að:

$$\dot{I} + \frac{R}{L}I = \frac{V}{L}.$$

Við margföldum í gegn með $e^{tR/L}$ og fáum:

$$\frac{d}{dt}\left(Ie^{tr/L}\right) = \dot{I}e^{tr/L} + \frac{R}{L}e^{tR/L}I = \frac{V}{L}e^{tR/L}$$

Þar sem að við höfum notað diffrun margfeldis. En þar með fáum við með því að tegra að:

$$Ie^{tR/L} = \int \frac{V}{L}e^{tR/L}dt = \frac{V}{R}e^{tR/L} + \alpha$$

þar sem α er tegrunarfasti sem ákvarðast af upphafsskilyrðinu $I(0) = I_0 = 0\,\mathrm{A}$. En við höfum þar með sýnt að:

$$I(t) = \frac{V}{L} + \alpha e^{-tR/L}$$

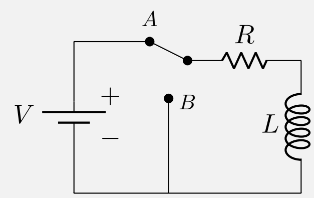
Upphafsskilyrðið gefur síðan að: $I(0) = I_0 = 0 = \frac{V}{L} + \alpha$ en þar með er er $\alpha = -\frac{V}{L}$ svo við ályktum að:

$$I(t) = \frac{V}{L}\left(1 - e^{-tR/L}\right) = I_{\max}\left(1 - e^{-tR/L}\right).$$

□

Lögmál 20.5. (Án spennugjafa) Lítum á rafrás sem hefur verið tengd í langan tíma þannig að fastur straumur I_0 flæðir í rásinni. Við tímann $t = 0\,\mathrm{s}$ færum við rofann úr stillingu A í stillingu B. Þá mun straumurinn í rásinni hrörna samkvæmt:

$$I(t) = I_0 e^{-Rt/L}$$



Útleiðsla: Við skulum sýna aðra lausnaraðferð með aðskilnaði breytistærða (annars er hægt að herma eftir útleiðslunni fyrir RC-rásina nema núna er margfaldað með $e^{Rt/L}$ í stað $e^{t/RC}$). Lykkjulögmál Kirchoffs gefur:

$$-IR - L\frac{dI}{dt} = 0 \implies \frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I$$

Aðskiljum breytistærðir með því að margfalda báðar hliðar með dt og einangra báðar hliðar þannig að vinstri hliðin verður einungis háð I en hægri hliðin einungis háð t og tegra svo:

$$\begin{aligned}
dI = -\frac{R}{L}Idt \implies \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt &\implies \int_{I_0}^{I}\frac{dI}{I} = \int_0^t -\frac{R}{L}dt \\
&\implies [\ln(I)]_{I_0}^{I} = \left[-\frac{R}{L}t\right]_0^t \\
&\implies \ln(I) - \ln(I_0) = -\frac{R}{L}t - \left(-\frac{R}{L}\cdot 0\right) = -\frac{R}{L}t \\
&\implies \ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -\frac{R}{L}t \\
&\implies \frac{I}{I_0} = e^{-\frac{Rt}{L}}
\end{aligned}$$

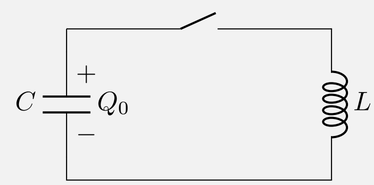
Sem gefur því niðurstöðuna:

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{Rt}{L}}.$$

20.1.3 LC-rás:

Lögmál 20.6. Lítum á rafrás með spólu með spanstuðli L og þétti með rýmd C og upphafshleðslu Q_0. Til að byrja með er rásin rofin þannig að enginn straumur flæðir í rásinni. Við tímann $t = 0\,\mathrm{s}$ lokum við fyrir rofan svo að straumur geti flætt í rásinni. Þá mun þéttirinn hlaðast og afhlaðast á einfaldri sveifluhreyfingu og hleðslan á þéttinum eftir tímann, t, verður gefin með:

$$Q(t) = Q_0\cos(\omega t), \qquad \text{þar sem sveiflutíðnin er} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



Útleiðsla: Samkvæmt lykkjulögmáli Kirchoffs er þá:

$$\frac{Q}{C} - L\frac{dI}{dt} = 0$$

Við notum síðan að $\frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{d^2Q}{dt^2}$ og ályktum að:

$$\ddot{Q} = -\frac{1}{LC}Q$$

Sem er einföld sveifluhreyfing með sveiflutíðni $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ svo við ályktum að:

$$Q(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Þar með er straumurinn í rásinni gefinn með:

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

En upphafsskilyrðin $I(0) = 0$ gefur að $\varphi = 0\,\mathrm{rad}$ og upphafsskilyrðið $Q(0) = Q_0$ gefur okkur þá að:

$$Q(t) = Q_0\cos(\omega t), \qquad I(t) = Q_0\omega\sin(\omega t).$$

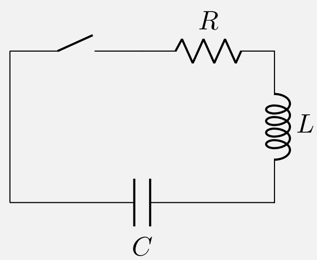
□

20.1.4 RCL-rás:

Lögmál 20.7. (RCL-rás) Lítum á RCL-rás þar sem að viðnámi R, spólu með spanstuðul L og þétti með rýmd C hefur verið komið fyrir í rafrás. Þéttirinn er fullhlaðinn og við tímann $t = 0\,\mathrm{s}$ lokum við rofanum. Þá er hleðslan á þéttinum á hrörnunar-sveifluhreyfingu og er gefin með:

$$Q(t) = Q_0 e^{-\alpha t}\cos(\Omega t + \varphi), \qquad \text{þar sem að} \quad \alpha = \frac{R}{2L}, \quad \Omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

Sér í lagi sjáum við að $\lim_{t\to\infty} Q(t) = 0$ svo eftir að rofinn hefur verið lokaður lengi er ekkert að gerast.



Útleiðsla: Samkvæmt lykkjulögmáli Kirchoffs er:

$$-\frac{Q}{C} - IR - L\dot{I} = 0$$

Sem við getum umritað þannig að:

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0.$$

Sem er óhliðruð, línuleg 2. stigs diffurjafna með fastastuðlum. Við skoðum því kennimargliðuna:

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC}$$

Sem hefur rætur:

$$\lambda_\pm = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\frac{R}{2L} \pm i\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

Þar sem að við höfum notað skilgreininguna á tvinntölunni $i^2 = -1$. Í okkar umfjöllun munum við alltaf gera ráð fyrir að stærðin undir rótinni sé jákvæð það er að segja að:

$$\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2 > 0 \implies R > \frac{2L}{\sqrt{LC}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

(það er hægt að skoða tilvikin þegar að $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ og þegar $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ en það hefur aðra eðlisfræðilega merkingu sem að við munum ekki fara út í núna). Lausnirnar eru því gefnar með:

$$Q(t) = Q_0 e^{-\alpha t}\cos(\Omega t + \varphi), \qquad \text{þar sem að} \quad \alpha = \frac{R}{2L}, \quad \Omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

20.2 Riðspennurásir (AC)

Lítum á RCL-rás sem er raðtengd rás við riðspennugjafa $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$ sem sveiflast með sveiflutíðni ω, viðnám R, þétti með rýmd C og spólu með spanstuðul L. Við skilgreinum stærðirnar:

$$X_L = \omega L, \qquad X_C = \frac{1}{\omega C}, \qquad Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \qquad \text{og} \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)$$

Þá gildir að straumurinn í rásinni er gefinn með:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi), \qquad I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}.$$

og spennuföllinn yfir íhlutina eru:

$$\Delta V_C = I_0 X_C \sin(\omega t - \varphi), \qquad \Delta V_R = I_0 R \cos(\omega t - \varphi), \qquad \Delta V_L = -I_0 X_L \sin(\omega t - \varphi).$$

Meðalaflið sem að tapast í viðnáminu er gefið með:

$$P_{_R} = P_{_\mathcal{E}} = I_{\mathrm{rms}} \mathcal{E}_{\mathrm{rms}} \cos\varphi.$$

Þar sem að $I_{\mathrm{rms}} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0$ og $\mathcal{E}_{\mathrm{rms}} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0$.

Útleiðsla: Samkvæmt lykkjulögmáli Kirchoffs er diffurjafnan okkar:

$$\mathcal{E}(t) - \frac{Q}{C} - L\frac{dI}{dt} - IR = 0 \implies \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC}Q = \frac{\mathcal{E}_0}{L}\cos(\omega t)$$

En við höfum þegar leyst óhliðruðu diffurjöfnuna. Fullkomin lausn á þessari diffurjöfnu fæst því með því að bæta við tiltekinni lausn, þ.e. $Q_{\mathrm{f}} = Q_{\mathrm{ó}} + Q_{\mathrm{t}}$ þar sem að:

$$Q_{\mathrm{ó}}(t) = Q_0 e^{-\alpha t}\cos(\Omega t + \varphi)$$

úr útleiðslunni á undan þá sjáum við að eftir að rásin hefur verið kveikt í langan tíma (lesist nokkrar sekúndur) þá er $\lim_{t\to\infty} Q_{\mathrm{ó}}(t) = 0$ og tiltekna lausnin því eina lausnin sem að skiptir máli. Til þess að ákvarða hana þá giskum við á (heppilega valda) lausn af gerðinni:

$$Q(t) = Q_0 \sin(\omega t - \varphi)$$

og stingum því inn í diffurjöfnuna. Þá er:

$$I(t) = \dot{Q}(t) = \omega Q_0 \cos(\omega t - \varphi), \qquad \dot{I}(t) = \ddot{Q}(t) = -\omega^2 Q_0 \sin(\omega t - \varphi)$$

Þá fáum við að upprunalega diffurjafnan gefur:

$$-\omega^2 Q_0 L \sin(\omega t - \varphi) + R\omega Q_0 \cos(\omega t - \varphi) + \frac{Q_0}{C}\sin(\omega t - \varphi) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$$

Rifjum síðan upp hornafallareglurnar:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta, \qquad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$$

Sem gefur því að:

$$\left(-\omega^2 L + \frac{1}{C}\right)[\sin(\omega t)\cos(\varphi) - \cos(\omega t)\sin(\varphi)] + R\omega\,[\cos(\omega t)\cos(\varphi) + \sin(\omega t)\sin(\varphi)] = \frac{\mathcal{E}_0}{Q_0}\cos(\omega t)$$

Með því að endurraða sjáum við að:

$$\left(\omega^2 L \sin\varphi + R\omega\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{C}\right)\cos(\omega t) + \left(-\omega^2 L\cos\varphi + R\omega\sin(\varphi) + \frac{\cos(\varphi)}{C}\right)\sin(\omega t) = \frac{\mathcal{E}_0}{Q_0}\cos(\omega t)$$

Með því að bera saman stig og stuðla vinstra og hægra meginn sjáum við því að:

$$\begin{cases} \omega^2 L \sin\varphi + R\omega\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{C} = \frac{\mathcal{E}_0}{Q_0} \\ -\omega^2 L\cos\varphi + R\omega\sin(\varphi) + \frac{\cos\varphi}{C} = 0 \end{cases}$$

Með því að leysa neðri jöfnuna fáum við að:

$$-\omega^2 L + \frac{1}{C} = -R\omega\tan(\varphi) \implies \tan(\varphi) = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{X_L - X_C}{R} \implies \varphi = \arctan\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right).$$

Þar sem að við höfum skilgreint $X_L = \omega L$ og $X_C = \frac{1}{\omega C}$. En við athugum að:

$$\frac{1}{\cos^2\varphi} = 1 + \tan^2\varphi \implies \frac{1}{\cos\varphi} = \sqrt{1+\tan^2\varphi} = \sqrt{1 + \left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)^2} = \frac{1}{R}\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}.$$

Fáum þá úr efri jöfnunni að:

$$Q_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega^2 L\sin\varphi + R\omega\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{C}} = \frac{\frac{\mathcal{E}_0}{\cos\varphi}}{\omega^2 L\tan\varphi + R\omega - \frac{1}{C}\tan\varphi} = \frac{\frac{\mathcal{E}_0}{\omega R}\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}{(X_L - X_C)\frac{X_L - X_C}{R} + R} = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}.$$

Sem sýnir því að:

$$Q_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega Z}, \qquad \text{þar sem við höfum skilgreint} \qquad Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}.$$

En þar með ályktum við að:

$$Q(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega Z}\sin(\omega t - \varphi)$$

En þá er straumurinn í rásinni gefinn með:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}\cos(\omega t - \varphi).$$

Við skilgreinum þá $I_0 = \omega Q_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}$. Þá er sér í lagi:

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{\mathcal{E}_0\omega}{Z}\sin(\omega t - \varphi)$$

Við sjáum þá að spennufallið yfir þéttinn er gefið með:

$$\Delta V_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega C Z}\sin(\omega t - \varphi) = I_0 X_C \sin(\omega t - \varphi).$$

Þá er:

$$\Delta V_R(t) = I(t)R = I_0 R\cos(\omega t - \varphi)$$

Síðan er:

$$\Delta V_L(t) = L\frac{dI}{dt} = -\omega L I_0\sin(\omega t - \varphi) = -I_0 X_L \sin(\omega t - \varphi) = -I_0 X_L\sin(\pi + \varphi - \omega t) = I_0 X_L \sin(\omega t - \varphi - \pi).$$

Meðalaflið sem að tapast út um viðnámið er jafnt aflinu sem að riðspennugjafinn gefur svo við höfum að:

$$P_R = P_\mathcal{E} = \frac{1}{T}\int_0^T I(t)\mathcal{E}(t)dt = \frac{I_0\mathcal{E}_0}{T}\int_0^T \cos(\omega t - \varphi)\cos(\omega t)dt = \frac{I_0\mathcal{E}_0}{T}\int_0^T \left[\cos^2(\omega t)\sin(\varphi) + \sin(\omega t)\cos(\omega t)\cos(\varphi)\right] dt$$

Fyrra hornafallið gefur núll þegar að við tegrum yfir eina lotu $T = \frac{2\pi}{\omega}$ en seinna hornafallið gefur $\frac{T}{2}\cos(\varphi)$.
Við ályktum því að:

$$P_R = P_\mathcal{E} = \frac{1}{2}I_0\mathcal{E}_0\cos\varphi = I_{\text{rms}}\mathcal{E}_{\text{rms}}\cos\varphi.$$

20.3 Dæmi

Dæmatími 27: RC-rásir

RC-rás er rás sem að inniheldur einungis viðnám R og þétti með rýmd C. Lykkjulögmálið gefur þá:

$$\frac{Q}{C} - IR = 0 \implies \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC}Q = 0 \implies Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}$$

Með því að diffra fáum við síðan að straumurinn í rásinni er:

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{RC}e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/RC}$$

Stærðin $\tau = RC$ kallast stundum *tímafasti* rásarinnar.

(28.36) Rofinn á myndinni hér til hægri hefur verið í stillingu a í langan tíma. Við tímann $t = 0\,\mathrm{s}$ er rofinn færður yfir í stillingu b. Hver verður hleðslan á þéttinum, $Q(t)$, og straumurinn í gegnum viðnámið, $I(t)$ **(a)** einmitt þegar að rofanum er lokað? **(b)** eftir $50\,\mu\mathrm{s}$ **(c)** eftir $200\,\mu\mathrm{s}$.

`figures/rk2836.pdf`

(28.68) Þið eruð með fullhlaðinn $20\,\mu\mathrm{F}$ þétti sem að þú tengir við tímann $t = 0\,\mathrm{s}$ inn í rafrás með óþekkt viðnám. Í töflunni hér til hægri sjást straumgildin, I, sem að straummælirinn sýndi við tímann t. Gerið viðeigandi graf af gögnunum og ákvarðið viðnámið í rásinni og upphaflega spennufallið yfir þéttinn við tímann $t = 0\,\mathrm{s}$.

t [s]	I [μA]
0,5	890
1,0	640
1,5	440
2,0	270
2,5	200

(28.70) Þéttir með rýmd $50\,\mu\mathrm{F}$ hafði upphaflega verið hlaðinn þannig að spennumunurinn á milli platnanna var $30\,\mathrm{V}$. Grafið hér til hægri sýnir spennufallið, ΔV_C, yfir þéttinn sem fall af tíma, t, þegar að þéttirinn er afhlaðinn í gegnum viðnám. Ákvarðið viðnámið, R.

`figures/rk2870.pdf`

(28.80) Rofinn á myndinni hér til hægri hefur lokaður í langan tíma. Við tímann $t = 0\,\mathrm{s}$ er rofinn opnaður. **(a)** Hver er hleðslan á þéttinum áður en rofinn er opnaður? **(b)** Hversu langur tími líður þar til að hleðslan á þéttinum hefur minnkað niður í $10\,\%$ af upphaflegu gildi sínu?

`figures/rk2880.pdf`

(28.36) $I(50\,\mu\mathrm{s}) = 220\,\mathrm{mA}$, $I(200\,\mu\mathrm{s}) = 49\,\mathrm{mA}$. **(28.68)** $R \approx 64\,\mathrm{k}\Omega$, $I_0 \approx 1180\,\mu\mathrm{A}$, $\Delta V_C(0) \approx 75{,}5\,\mathrm{V}$. **(28.70)** $R = 73\,\Omega$. **(28.80)** $Q_0 = 80\,\mu\mathrm{C}$, $t = 230\,\mu\mathrm{s}$.

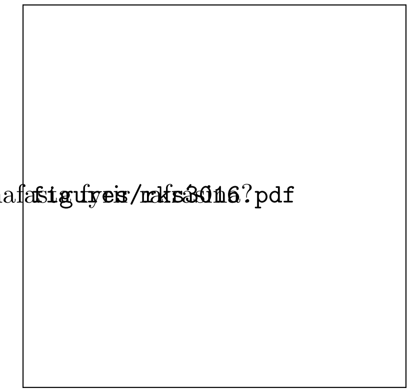
Dæmatími 28: LR-rásir

LR-rás er rás sem að inniheldur einungis viðnám R og spólu með spanstuðul L. Lykkjulögmálið gefur:

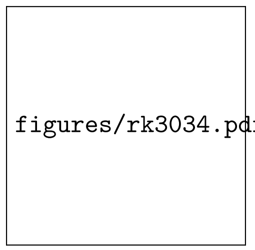
$$-IR - L\frac{dI}{dt} = 0 \implies \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = 0 \implies I(t) = I_0 e^{-Rt/L}$$

Stærðin $\tau = \frac{L}{R}$ kallast stundum *tímafasti* rásarinnar (sbr. tímafasti RC-rásarinnar).

(30.16) Rofinn á myndinni hér til hægri hefur verið í stillingu a í langan tíma. Við tímann $t = 0\,\mathrm{s}$ er rofinn færður yfir í stillingu b. **(a)** Hver er straumurinn í rásinni einmitt við tímann $t = 0\,\mathrm{s}$? **(b)** Hver verður straumurinn í rásinni við tímann $t = 5{,}0\,\mu\mathrm{s}$? **(c)** Við hvaða tíma mun straumurinn í rásinni hafa minnkað niður í $1\,\%$ af upphaflegu gildi sínu?

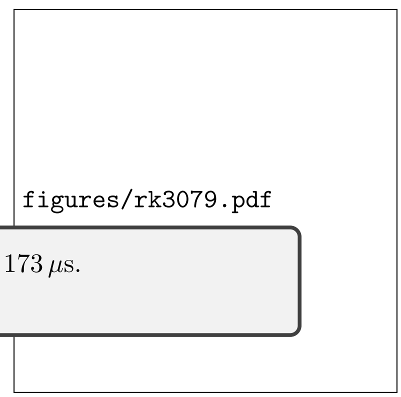


(30.34) Lítum á rafrásina hér fyrir neðan til vinstri. Hvað gildi á R gefur $25\,\mu\mathrm{s}$ tímafasta fyrir rásina?



(30.35) Lítum á rafrásina hér fyrir ofan til hægri. Við tímann $t = 0\,\mathrm{s}$ er straumurinn í rásinni I_0. Við hvaða tíma veðrur straumurinn í rásinni $\frac{1}{2}I_0$?

(30.79) Lítum á rafrásina hér til hægri. Við tímann $t = 0\,\mathrm{s}$ er rofinn færður úr stöðu a í stöðu b. Við tímann $t = 5{,}0\,\mu\mathrm{s}$ hefur spólan tapað helmingnum af orkunni sem að hún geymdi við tímann $t = 0\,\mathrm{s}$. Hvert er gildið á spanstuðli spólunnar?



(30.16) $I_0 = 0{,}10\,\mathrm{A}$, $I(5{,}0\,\mu\mathrm{s}) = 61\,\mathrm{mA}$, $t = 46\,\mu\mathrm{s}$. **(30.34)** $750\,\Omega$. **(30.35)** $173\,\mu\mathrm{s}$. **(30.79)** $L = 720\,\mu\mathrm{H}$.

Dæmatími 29: LC-rásir

LC-rás er rás sem að inniheldur einungis spólu með spanstuðul L og þétti með rýmd C. Fáum þá:

$$\frac{Q}{C} - L\frac{dI}{dt} = 0 \implies \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC}Q = 0 \implies Q(t) = Q_{\max}\cos(\omega t + \varphi), \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

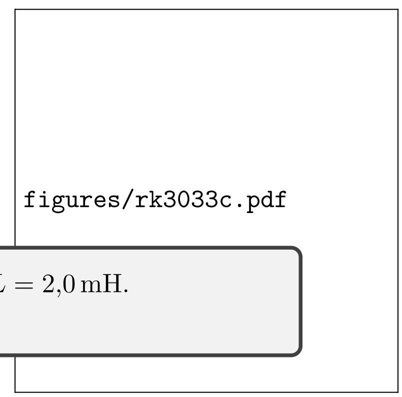
Sem er einfaldlega einföld sveifluhreyfing. Fasahornið ákvarðast af upphafsskilyrðunum og rafstraumurinn fæst með því að diffra hleðsluna. Stærðin $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ kallast sveiflutíðni rásarinnar.

(30.71) Þú hefur fengið LC-rás í jólagjöf frá ömmu þinni (þú baðst reyndar um RC-rás). Amma þín keypti spólu með spanstuðul 20 mH og plötuþétti með rýmd 8,0 pF. Amma þín var búin að hlaða plötur plötuþéttisins þannig að spennumunurinn á milli platna plötuþéttisins er 25 V. Þú tengir síðan rásina á aðfangadag við tímann $t = 18{:}00$. **(a)** Hversu langur tími mun líða þar til að þéttirinn er alveg afhlaðinn í fyrsta skipti? **(b)** Hver verður straumurinn sem að fer í gegnum spóluna einmitt þá?

(30.72) Spennufallið yfir þétti með rýmd 0,10 μF er 5,0 V. Við tímann $t = 0$ s er þéttirinn tengdur við spólu með spanstuðul 1,0 mH. Hver verður mesti straumurinn sem að fer í gegnum spóluna í sveifluhreyfingunni?

(30.73) Sem hluti af munnlegu prófi í eðlisfræði þá biður erfiði eðlisfræðikennarinn þinn þig um að búa til LC-rás sem að sveiflast með tíðni 10 kHz. Sem varúðarráðstöfun þá biður hann þig þar að auki um að sjá til þess að mesti straumurinn í rásinni sé 0,10 A og að mesta orkan sem að þéttirinn geymir sé $1{,}0 \cdot 10^{-5}$ J. Hver á rýmd þéttisins að vera og hver á spanstuðull spólunnar að vera?

(30.33) Rofinn á myndinni hér til hægri hefur verið í stillingu 1 í langan tíma. Hann er færður yfir í stillingu 2 við tímann $t = 0$ s. **(a)** Hver verður mesti straumurinn sem að fer í gegnum spóluna? **(b)** Við hvaða tíma verður straumurinn mestur (í fyrsta skipti) í spólunni?



(30.71) $t = 628$ ns, 500 μA. **(30.72)** $I_{\max} = 50$ mA. **(30.73)** $C = 130$ nF, $L = 2{,}0$ mH. **(30.33)** $I_{\max} = 76$ mA, $t = 500\,\mu$s.

Dæmatími 30: RCL-rásir með AC-spennugjafa

RCL-sveiflurásir eru rásir sem innihalda sveifluspennugjafa $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$ sem er raðtengdur við viðnám, R, spólu með spanstuðul, L og þétti með rýmd, C. Lögmál Kirchoffs gefa þá að:

$$\mathcal{E}(t) - \Delta V_R - \Delta V_L - \Delta V_C = 0$$

Með því að leysa þessa diffurjöfnu fæst að straumurinn í rásinni er gefinn með:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi), \quad \text{þar sem} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right).$$

Þar að auki sem:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}, \qquad Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \qquad X_L = \omega L, \qquad X_C = \frac{1}{\omega C}.$$

Í þessum fræðum er líka oft fjallað um svokölluð *rms*-gildi. Þá skilgreinum við:

$$\mathcal{E}_{\text{rms}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}, \qquad I_{\text{rms}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}.$$

Aflið sem að sveifluspennugjafinn gefur tapast síðan í viðnáminu og meðalaflið sem að tapast er:

$$P = \mathcal{E}_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos\varphi.$$

(32.30) Raðtengd RLC-rás samanstendur af $50\,\Omega$ viðnámi, $3{,}3\,\text{mH}$ spólu og $480\,\text{nF}$ þétti. Hún er tengd við sveifluspennu með útslag $5{,}0\,\text{V}$. Ákvarðið samviðnám (Z) rásarinnar, stærsta gildið á straumnum í rásinni, fasahornið og meðalaflið við eftirfarandi gildi á tíðninni: **(a)** $3000\,\text{Hz}$ **(b)** $4000\,\text{Hz}$

(32.32) Lítum á rásina hér til hægri. **(a)** Hver er hermitíðni rásarinnar? (Ath. við segjum að rásin sé við *hermitíðni* ef að *samviðnám rásarinnar*, $Z = R$ en þá er $X_L = X_C$). **(b)** Hvert er fasahornið við hermitíðnina? **(c)** Hvert er meðalaflið sem að tapast í rásinni við hermitíðnina?

`figures/rk3232.pdf`

(32.52) Raðtengd RLC-rás samanstendur af $550\,\Omega$ viðnámi, $0{,}10\,\text{H}$ spólu og $100\,\mu\text{F}$ þétti. Hún tekur $2{,}5\,\text{A}$ rms-straum þegar að hún er tengd við $60\,\text{Hz}$ sveifluspennugjafa. Hver eru gildin á: **(a)** rms-spennunni, $\mathcal{E}_{\text{rms}}$ **(b)** fasahorninu, φ? **(c)** Meðalaflinu sem að tapast í rásinni?

(32.53) Raðtengd RLC-rás samanstendur af $550\,\Omega$ viðnámi, $2{,}1\,\text{mH}$ spólu og $550\,\text{nF}$ þétti. Hún er tengd við $50\,\text{V}$ rms-spennugjafa sem er hægt að stilla sveiflutíðnina á. Í $2{,}5\,\text{mm}$ fjarlægð frá einum af vírunum í rásinni má greina segulsvið sem að sveiflast vegna riðstraumsins í rásinni. Hvert er stærsta gildið á segulsviðinu sem að er hægt að búa til og við hvaða sveiflutíðni er það?

(32.30) $Z_a = 179{,}8\,\Omega, I_a = 27{,}8\,\text{mA}, \varphi_a = 1{,}29\,\text{rad}, P_a = 19{,}3\,\text{mW}$. $Z_b = 173{,}2\,\Omega, I_b = 28{,}9\,\text{mA}, \varphi_b = 1{,}28\,\text{rad}, P_b = 20{,}7\,\text{mW}$. **(32.32)** $f = 503\,\text{Hz}$, $\varphi = 0\,\text{rad}$, $P = 5{,}0\,\text{W}$. **(32.52)** $\mathcal{E}_{\text{rms}} = 128\,\text{V}$, $\varphi = 0{,}22\,\text{rad}$, $P = 312\,\text{W}$. **(32.53)** $B_{\max} = 7{,}3\,\mu\text{T}$, $f = 4680\,\text{Hz}$.