Fjórða laugardagsæfingin í eðlisfræði 2021

Nafn:

Bekkur:

Fastar

Nafn	Tákn	Gildi
Hraði ljóss í tómarúmi	c	$3{,}00 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
Þyngdarhröðun við yfirborð jarðar	g	$9{,}82\,\mathrm{m\,s^{-2}}$
Frumhleðslan	e	$1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Massi rafeindar	m_e	$9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Gasfastinn	R	$8{,}3145\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$
Fasti Coulombs	k_e	$8{,}988 \cdot 10^{9}\,\mathrm{N\,m^{2}\,C^{-2}}$
Rafsvörunarstuðull tómarúms	ϵ_0	$8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C^{2}\,s^{2}\,m^{-3}\,kg^{-1}}$
Þyngdarfastinn	G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^{3}\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
Geisli jarðarinnar	$R_\oplus$	$6{,}38 \cdot 10^{6}\,\mathrm{m}$
Geisli sólarinnar	$R_\odot$	$6{,}96 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}$
Massi jarðarinnar	$M_\oplus$	$5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$
Massi sólarinnar	$M_\odot$	$1{,}99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$
Stjarnfræðieiningin	AU	$1{,}50 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$

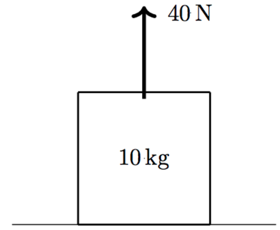
Krossar

Hver kross gildir 3,5 stig. Vinsamlegast skráið svörin ykkar við tilheyrandi krossi hér fyrir neðan:

K1	**K2**	**K3**	**K4**	**K5**	**K6**	**K7**	**K8**	**K9**	**K10**
C	A	D	A	D	D	C	E	B	E

K11	**K12**	**K13**	**K14**	**K15**	**K16**	**K17**	**K18**	**K19**	**K20**
E	E	E	A	D	A	D	D	D	E

Krossar (70 stig)



K1. Kubbur með massa 10 kg liggur kyrr á láréttum fleti. Krafti í lóðrétta stefnu upp á við af stærð 40 N er beitt á kubbinn. Hver er þyngd kubbsins?

(A) 58 N (B) 80 N (C) 98 N (D) 6 kg (E) 14 kg

K2. Hversu stór er heildarkrafturinn sem verkar á kubbinn í dæmi 1?

(A) 0 N (B) 40 N (C) 58 N (D) 100 N (E) 138 N

Lausn: Þyngd kubbsins er $F_g = mg = 98\,\mathrm{N}$. Heildarkrafturinn sem verkar á kubbinn er þá $F_{\text{heild}} = ma = 0\,\mathrm{N}$ því $a = 0$ því hann er kyrr.

K3. Samúel og Fanney æfa hlaup á 400 m hringlaga hlaupabraut. Hraði Samúels er 4,0 m/s en hraði Fanneyjar er 4,5 m/s. Ef þau byrja að hlaupa á sama stað, hve marga hringi þarf Fanney að hlaupa til að hringa Samúel (þ.e. hlaupa heilum hring lengra en Samúel)?

(A) 6 hringi (B) 7 hringi (C) 8 hringi (D) 9 hringi (E) 10 hringi

Lausn: Látum s_F, v_F tákna staðsetningu og hraða Fanneyjar og látum s_S, v_S tákna staðsetningu og hraða Samúels við tímann t. Látum ℓ tákna lengd brautarinnar. Við höfum þá að:

$$s_S + \ell = s_F \implies v_S t + \ell = v_F t + \ell \implies t = \frac{\ell}{v_F - v_S} = \frac{400\,\mathrm{m}}{4{,}5\,\mathrm{m/s} - 4{,}0\,\mathrm{m/s}} = 800\,\mathrm{s}$$

En þá er $s_F = v_F t = 4{,}5\,\mathrm{m/s} \cdot 800\,\mathrm{s} = 3600\,\mathrm{m}$, þ.e. $\frac{3600}{400} = 9$ hringi.

K4. Harry Potter flýgur á kústinum sínum lárétt yfir jörðinni á hraðanum 25 m/s í 50 m hæð þegar hann missir skólatöskuna sína. Ef loftmótstaða er hundsuð, hver verður fjarlægðin milli Harry og skólatöskunnar þegar hún lendir á jörðinni ef Harry breytir hvorki um hraða né stefnu?

(A) 50 m (B) 60 m (C) 84 m (D) 94 m (E) 100 m

Lausn: Höfum þá að láréttur hraði þeirra helst alltaf sá sami svo að vegalengdin á milli þeirra er bara lóðrétta vegalengdin þegar hún lendir á jörðinni, þ.e. $y = 50\,\mathrm{m}$.

K5. Sigrún á jeppa á dekkjum sem eru 22 tommur í þvermál. Dag einn ákveður hún að breyta bílnum og setja undir hann dekk sem eru 25 tommur í þvermál. Hraðamælir bílsins er þó óbreyttur, mælir hraða út frá fjölda snúninga dekkjanna á tímaeiningu, en miðar við upphaflegu dekkin. Dag einn eftir breytinguna fer Sigrún í bíltúr út á land þar sem hámarkshraði er 90 km/klst. Ef hraðamælir Sigrúnar sýnir nú að bíllinn sé á 90 km/klst, hver er raunverulegur hraði bílsins?

(A) 79 km/klst (B) 90 km/klst (C) 98 km/klst (D) 102 km/klst (E) 110 km/klst

Lausn: Þá er $v_1 = r_1\omega \implies \omega = \frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2} \implies v_2 = \frac{þ_2}{þ_1} v_1 = \frac{25}{22} 90\,\mathrm{km/klst} = 102\,\mathrm{km/klst}$.

K6. Hildur Guðnadóttir vill mæla eðlismassa Óskarsverðlaunastyttunnar sinnar. Samkvæmt opinberum upplýsingum er hún úr bronsi. Hildur veit að massi styttunnar í lofti er 3830 g en hún mælir massa hennar ofan í vatni sem 3400 g. Hver er eðlismassi styttunnar? Eðlismassi vatns er $1{,}0\,\mathrm{g/cm^3}$.

(A) $4{,}9\,\mathrm{g/cm^3}$ (B) $7{,}4\,\mathrm{g/cm^3}$ (C) $8{,}1\,\mathrm{g/cm^3}$ (D) $8{,}9\,\mathrm{g/cm^3}$ (E) $13{,}5\,\mathrm{g/cm^3}$

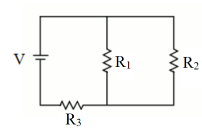
Lausn: Höfum þá að

$$F_{\text{upp}} = T_{\text{lóð í lofti}} - T_{\text{lóð í vatni}} = 0{,}430\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}82\,\mathrm{m/s^2} = 4{,}22\,\mathrm{N}.$$

En þar með ályktum við að:

$$F_{\text{upp}} = \rho_{\text{vatn}} V_{\text{hlutur}} g = \frac{\rho_{\text{vatn}}}{\rho_{\text{hlutur}}} mg \implies \rho_{\text{hlutur}} = \frac{mg}{F_{\text{upp}}} = \frac{T_{\text{lóð í lofti}}}{F_{\text{upp}}} = \frac{37{,}6\,\mathrm{N}}{4{,}22\,\mathrm{N}} = 8{,}9\,\mathrm{g/cm^3}.$$

K7. Í rásinni hér til hægri hefur rafhlaðan spennu $V = 10{,}0\,\mathrm{V}$ og viðnámin eru $R_1 = 2{,}0\,\Omega$, $R_2 = 2{,}0\,\Omega$ og $R_3 = 1{,}0\,\Omega$. Hver er straumurinn um rafhlöðuna?



(A) $2{,}0\,\mathrm{A}$ (B) $4{,}0\,\mathrm{A}$ (C) $5{,}0\,\mathrm{A}$ (D) $6{,}0\,\mathrm{A}$ (E) $10{,}0\,\mathrm{A}$

Lausn: Fáum að heildarviðnámið er gefið með:

$$R_{\text{heild}} = \underbrace{\underbrace{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1}}_{\text{hliðtenging}} + R_3}_{\text{raðtenging}} = 2\,\Omega$$

En þá fáum við að:

$$V = IR \implies I = \frac{V}{R} = \frac{10{,}0\,\mathrm{V}}{2\,\Omega} = 5{,}0\,\mathrm{A}.$$

K8. Í sumum tilvikum getur járnkjarni sólstjörnu hrunið saman og myndað nifteindastjörnu, en eðlismassi nifteindastjarna er jafn eðlismassa kjarna atóma. Ef járnkjarni slíkrar stjörnu hefur geisla $1{,}0 \cdot 10^4\,\mathrm{km}$ og geisli nifteindastjörnunnar sem myndast eftir hrun kjarnans er 12 km, hver er snúningstími nifteindastjörnunnar ef snúningstími upphaflegu stjörnunnar var 16 dagar? Gerið ráð fyrir að járnkjarninn og nifteindastjarnan séu kúlulaga og hafi sama massa.

(A) 1,2 ms (B) 57 ms (C) 0,5 s (D) 2,0 s (E) 60 s

Lausn: Fáum þá samkvæmt hverfiþungavarðveislu að:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \implies \omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 = \frac{\frac{2}{5}mr_1^2}{\frac{2}{5}mr_2^2}\frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{T_1}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = 3{,}16\,\mathrm{rad/s}$$

En þá er $T_2 = \frac{2\pi}{2} = 2{,}0\,\mathrm{s}$.

K9. Hversu mikla orku þarf til að hita hálfan lítra af vatni úr $10{,}0\,^\circ\mathrm{C}$ í $80{,}0\,^\circ\mathrm{C}$? Vatn hefur eðlisvarmann $4190\,\mathrm{J/kg\,K}$ og gera má ráð fyrir að eðlismassi vatns sé $1000\,\mathrm{kg/m^3}$ á þessu hitastigsbili.

(A) 293 MJ (B) 147 kJ (C) 587 kJ (D) 168 kJ (E) 468 MJ

Lausn: Höfum þá að

$$Q = c_{\text{vatn}} m_{\text{vatn}} \Delta T = 4190\,\text{J/kg K} \cdot 0{,}500\,\text{kg} \cdot 70{,}0\,\text{K} = 147\,\text{kJ}$$

K10. Ökuþór í Formúlu 1 kappakstri er í tímatöku á braut sem er 8 km að lengd. Fyrri helmgin brautarinnar ekur hann með meðalhraða 50 km/klst. Hversu hratt þarf hann að aka síðari helming brautarinnar ef hann á að ná því marki að vera á 100 km/klst meðalhraða á heildina litið?

(A) 50 km/klst (B) 100 km/klst (C) 150 km/klst (D) 200 km/klst (E) Óendanlega hratt.

Lausn: Látum lengdina á helming brautarinnar vera ℓ. Þá er

$$v_1 = \frac{\ell}{t_1}, \qquad v_2 = \frac{\ell}{t_2}, \qquad v = \frac{2\ell}{t_1 + t_2} = \frac{2\ell}{\frac{\ell}{v_1} + \frac{\ell}{v_2}} = 2\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)^{-1}$$

En þá fáum við að:

$$v_2 = \left(\frac{2}{v} - \frac{1}{v_1}\right)^{-1}$$

En $\frac{2}{v} - \frac{1}{v_1} = 0$ svo hann þyrti að keyra óendanlega hratt.

K11. 200 g af 10 °C heitu vatni eru sett í 600 W örbylgjuofn í 1,5 mínútur. Eðlisvarmi vatns er 4,2 J/g K. Ef allt aflið fer í að hita vatnið, hvert verður þá lokahitastigið?

(A) 12 °C (B) 38 °C (C) 46 °C (D) 53 °C (E) 74 °C

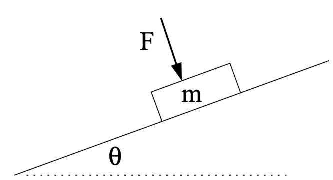
Lausn: Fáum þá að:

$$cm\Delta T = Q = Pt \implies \Delta T = \frac{Pt}{cm} = \frac{600\,\text{W} \cdot 90\,\text{s}}{4{,}2\,\text{J/g K} \cdot 200\,\text{g}} = 64\,°\text{C}$$

En þar með er $T_2 = T_1 + \Delta T = 10\,°\text{C} + 64\,°\text{C} = 74\,°\text{C}$.

K12. Dráttardýr hafa haldið því fram eftir daga Newtons, að ekki þýði að berja þau áfram af því að vagninn togi í dýrið með sama krafti og dýrið togi í vagninn, og því geti þau ekki hreyft vagninn. Hvernig svarar þú þessum mótbárum?

(A) Gulrót fyrir framn dýrið breytir öllu.
(B) Vagninn er á hjólum.
(C) Dýrið verður bara að toga enn fastar.
(D) Svipan hefur þann kraft sem þarf til.
(E) Jörðin verkar á dýrið með krafti áfram.



K13. Kassa með massann m er haldið föstum á skábretti með krafti F eins og sést á myndinni hér til hægri. Skábrettið myndar horn θ miðað við lárétt og núningsstuðullinn milli brautarinnar og kassans er μ. Hver þarf krafturinn, F, minnst að vera ef kassinn á ekki að færast?

(A) μmg. (B) $mg\cos\theta$. (C) $mg\sin\theta$. (D) $\frac{mg}{\mu}\sin\theta$. (E) $\frac{mg}{\mu}(\sin\theta - \mu\cos\theta)$.

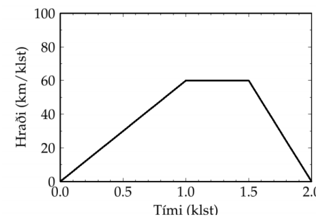
Lausn: Kraftamyndin gefur að

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{\text{nún}} - mg\sin\theta \\ \text{Þ} - F - mg\cos\theta \end{pmatrix}$$

En þá er $mg\sin\theta = F_{\text{nún}} \leqslant \mu\text{Þ} = \mu\left(F + mg\cos\theta\right) \implies F \geqslant \frac{mg}{\mu}\left(\sin\theta - \mu\cos\theta\right)$.

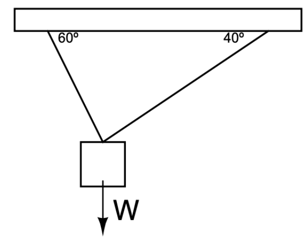
K14. Á myndinni hér til hægri má sjá hraða-tíma graf fyrir bíl á ferðlagi. Hversu mikla vegalengd hefur bíllinn farið þegar hann nemur staðar?

(A) 75 km (B) 150 km (C) 120 km (D) 60 km (E) 100 km



Lausn: Höfum: $s = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 1 + 60 \cdot 0.5 + \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 0.5 = 75\,\text{km}$.

K15. Tvö massalaus reipi eru tengd stálbita. Reipin mynda annars vegar horn $\alpha = 60°$ miðað við lárétt og hinsvegar horn $\beta = 40°$ miðað við lárétt. Í reipunum hangir kubbur með þyngd $W = mg$. Ef hámarkstogkraftur hvors reipis er 5000 N hver er hámarksþyngd kubbs sem kerfið getur borið án þess að slitna?



(A) 0 N (B) 4400 N (C) 5500 N (D) 6400 N (E) 7500 N

Kraftajafnvægið gefur:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1\cos\alpha - T_2\cos\beta \\ T_1\sin\alpha + T_2\sin\beta - mg \end{pmatrix}$$

Þurfum að ákvarða hvort reipið slitnar. Fáum þá að $T_1 = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}T_2 \approx 1.53T_2 > T_2$ og þá slitnar $T_1 = 5000\,\text{N}$ fyrst. En þá er $T_2 = 3264\,\text{N}$ Athugum því að þá væri:

$$mg = T_1\sin\alpha + T_2\sin\beta = 6428\,\text{N}.$$

K16. Körfubolta með massa 0,145 kg er kastað upp í loft. Hraði boltans rétt eftir að honum er kastað er 20,0 m/s. Hversu hátt fer boltinn ef loftmótsstaða er hverfandi?

(A) 20,3 m (B) 19,4 m (C) 18,2 m (D) 17,1 m (E) 16,0 m

Lausn: Fáum þá að $v = v_0 - gt \implies t = \frac{v_0}{g}$ er tíminn sem hefur liðið frá því að honum er kastað og þar til hann er í hæstu hæð. En þá er

$$h = v_0t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} = 20{,}3\,\text{m/s}.$$

K17. Faðir nokkur dregur son sinn á snjóþotu eftir göngustíg í snjónum. Sonurinn og snjóþotan vega samtals 30 kg. Band af lengd 2,0 m er fest í framenda snjóþotunnar. Faðirinn heldur í hinn enda bandsins í 1,0 m hæð og strekkir það. Núningsstuðullinn milli snjóþotunnar og snjósins er 0,1. Með hversu miklum krafti þarf faðirinn að toga í bandið til að halda jöfnum hraða?

(A) 8 N (B) 16 N (C) 24 N (D) 32 N (E) 40 N

Lausn: Byrjum á því að athuga að ef hornið sem bandið myndar við lárétt er θ þá gildir að:

$$2\sin\theta = 1 \implies \theta = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$$

En þá þarf:

$$\begin{pmatrix} ma \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F\cos\theta - \mu Þ \\ Þ + F\sin\theta - mg \end{pmatrix}$$

En hann dregur með jöfnum hraða (a.m.k.) svo $a = 0$. En þá er:

$$F\cos\theta = \mu Þ = \mu\left(mg - F\sin\theta\right) \implies F = \frac{\mu mg}{\cos\theta + \mu\sin\theta} = 32\,\mathrm{N}.$$

K18. Bolti sem vegur 1,0 kg fellur úr kyrrstöðu í 12 m hæð niður á gólf og skoppar aftur upp í 8 m hæð. Hver er breytingin í skriðþunga boltans við áreksturinn?

(A) 0 kg m/s (B) 9,8 kg m/s (C) 34 kg m/s (D) 2,8 kg m/s (E) 410 kg m/s

Lausn: Hraði boltans þegar hann lendir á jörðinni fyrst er fundinn með tímaóháðu jöfnunni:

$$2a\Delta s = v^2 - v_0^2 \implies v = \sqrt{2gh}$$

En þetta mun líka gefa okkur mestu hæðina eftir að hann skoppar svo við höfum að:

$$\Delta p = m\left(v_2 - v_1\right) = m\left(\sqrt{2gh_2} - \sqrt{2gh_1}\right) = -2{,}8\,\mathrm{kg\,m/s}.$$

K19. Hjól sem er 1,0 m að þvermáli veltur 7,8 m. Hversu marga hringi snerist hjólið á þessu ferðalagi.

(A) 1 hring (B) 1,25 hringi (C) 7,8 hringi (D) 2,5 hringi (E) 5 hringi

Lausn: Gerum ráð fyrir að hjólið rúlli án þess að renna. Höfum þá að $s = r\theta$ svo:

$$\frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{\Delta s}{2\pi r} = 2{,}5\,\text{hringi}.$$

K20. Erla býr sér til heitt súkkulaði á köldum vetrardegi. Henni nægir að drekka 150 mL af heitu súkkulaði sem hún hitar á hellu og 21,5 kJ fara í það að hita drykkinn. Í upphafi var hitastig drykkjarins 5 °C en Erla hitar hann upp í 40 °C. Eðlisvarmi drykkjarins er 3,9 kJ/(kg K). Hver er eðlismassi heits súkkulaðis?

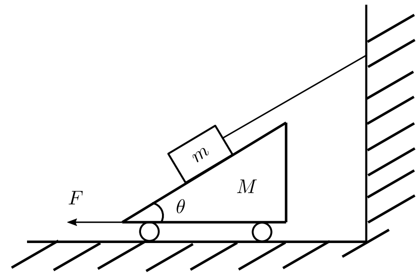
(A) 0,225 kg/m^3 (B) 8,72 kg/m^3 (C) 54,0 kg/m^3 (D) 662 kg/m^3 (E) 1050 kg/m^3

Lausn: Eðlismassi heits súkkulaðis hlýtur að vera afskaplega nálægt eðlismassa vatns, $c_{\text{vatn}} = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$ svo ef við þyrftum að giska blint þá ættum við að velja 1050 kg/m^3. Sannreynum þá ágiskun:

$$Q = cm\Delta T = c\rho V\Delta T \implies \rho = \frac{Q}{cV\Delta T} = \frac{21{,}5\,\mathrm{kJ}}{3{,}9\,\mathrm{kJ/(kg\,K)}\cdot 150\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^3}\cdot 35\,°\mathrm{C}} = 1050\,\mathrm{kg/m^3}.$$

Dæmi 1: Tvö erfið kraftadæmi (15 stig)

Lítum á skábretti á hjólum með massa M sem hallar um horn θ miðað við lárétt. Ofan á skábrettinu stendur kassi með massa m sem er festur með massalausu bandi við vegg eins og sést á myndinni hér til hægri. Með hversu stórum, láréttum krafti, F, þurfum við að toga í skábrettið til þess að allt kerfið haldist kyrrt?



Lausn: Við höfum þá eftirfarandi kraftajöfnur:

$$M\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F - Þ\sin\theta\\ Þ_{\text{gólf}} - Mg - Þ\cos\theta\end{pmatrix}, \qquad m\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}Þ\sin\theta - T\cos\theta\\ Þ\cos\theta - mg + T\sin\theta\end{pmatrix}$$

Með því að leggja saman efri jöfnurnar fáum við að $F = T\cos\theta$. Margföldum nú efri jöfnuna fyrir m með $\cos\theta$ og neðri jöfnuna fyrir m með $\sin\theta$ þá fáum við:

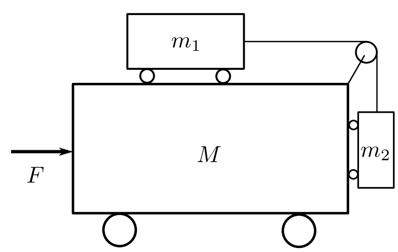
$$\begin{cases} Þ\sin\theta\cos\theta - T\cos^2\theta = 0\\ Þ\sin\theta\cos\theta - mg\sin\theta + T\sin^2\theta = 0\end{cases}$$

Drögum síðan efri frá neðri og fáum:

$$T = mg\sin\theta$$

En þar með ályktum við að $F = T\cos\theta = mg\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}mg\sin(2\theta)$.

Vagn á hjólum með massa M stendur á núninglausu yfirborði. Ofan á vagninum stendur annar vagn á hjólum með massa m_1. Vagninn með massa m_1 er festur með massalausu bandi við annan vagn með massa m_2 yfir núningslausa trissu. Hjólin á vagninum með massa m_2 snerta hliðina á vagninum með massa M. Enginn núningur er á milli vagnanna. Með hvaða lárétta krafti, F, á að ýta vagninum þannig að m_1 og m_2 haldast kyrrir miðað við M?



Lausn: Skrifum niður kraftajöfnurnar:

$$\begin{pmatrix}Ma\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F - Þ_2\\ Þ_{\text{gólf}} - Mg - Þ_1\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}m_1 a\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}T\\ Þ_1 - m_1 g\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}m_2 a\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}Þ_2\\ T - m_2 g\end{pmatrix}.$$

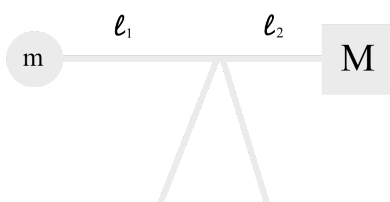
Tæknilega séð ættum við líka að skrifa niður kraftajöfnuna fyrir massalausu trissunni með massa $\mu \approx 0$, sem $\left(\begin{smallmatrix}\mu a\\0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}T+Þ_x\\-T-\mu g+Þ_y\end{smallmatrix}\right)$ og tæknilega séð ættum við þá líka að bæta við $-Þ_x$ í x-hnitið fyrir massann M. Við sjáum að þegar við leggjum saman alla kraftana þá styttast öll þriðja lögmáls pörin út (togkraftar og þverkraftar) og við höfum að:

$$(M + m_1 + m_2)a = F$$

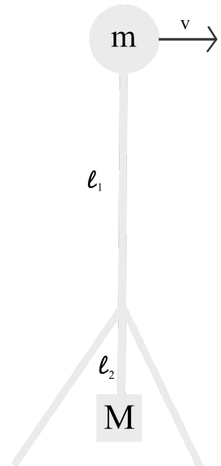
En $m_1 a = T = m_2 g$ þannig að $a = \frac{m_2}{m_1}g$ og við höfum því að $F = \frac{m_2}{m_1}\left(M + m_1 + m_2\right)g$.

Dæmi 2: Valslöngvan

Í borgarumsátrum miðalda voru valslöngvur ómissandi tæki, en þær valslöngvur sem við þekkjum best eiga líklegast rætur sínar að rekja til soldánadæmis Ayyubída á 12. öld e.o.t. (en voru mögulegu fundnar upp fyrst í Austur Rómarveldi á 11. öldinni) og breiddust þaðan út til Evrópu og Kína. Athugum eiginleika einfaldaðrar valslöngvu, sjá myndir 1 og 2. Valslöngvan virkar þannig að massalaus *armur* af lengd L er festur á *öxul* í hæð h frá jörðinni sem skiptir arminum í *kastarm* af lengd ℓ_1 og *fallarm* af lengd ℓ_2. Við enda kastarmsins er fest massalaus *karfa* sem geymir stein af massa m. Við fallarminn er fest *mótvigt* af massa M. Gerum ráð fyrir að armurinn bogni ekki, að enginn núningur sé í kerfinu og hunsum massa allra festinga og aukahluta sem gætu komið við sögu.



Mynd 1: Valslöngva fest í hvíldarstöðu.



Mynd 2: Valslöngva þegar steinninn sleppur.

Lausn:

(a) Hverfitregðan er gefin með:

$$I = m\ell_1^2 + M\ell_2^2 = 14\,480\,\mathrm{kg\,m^2}.$$

(b) Höfum þá að:

$$0 = \frac{1}{2}I\omega^2 + mg\ell_1 - Mg\ell_2 \implies \omega = \sqrt{\frac{2g}{I}\left(M\ell_2 - m\ell_1\right)} = 2{,}166\,\mathrm{rad/s}.$$

(c) Við höfum þá lárétta kasthreyfingu þannig að hann lendir á jörðinni eftir tíma

$$(h + \ell_1) = \frac{1}{2}gt^2 \implies t = \sqrt{\frac{2(h+\ell_1)}{g}} = 1{,}915\,\mathrm{s}$$

En þá er heildarvegalengdin sem hann hefur ferðast gefin með:

$$x = vt = \omega\ell_1 t = 49{,}8\,\mathrm{m}.$$