Önnur laugardagsæfingin í eðlisfræði 2021

Nafn:

Bekkur:

Fastar

Nafn	Tákn	Gildi
Hraði ljóss í tómarúmi	c	$3{,}00 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
Þyngdarhröðun við yfirborð jarðar	g	$9{,}82\,\mathrm{m\,s^{-2}}$
Frumhleðslan	e	$1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Massi rafeindar	m_e	$9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Gasfastinn	R	$8{,}3145\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$
Fasti Coulombs	k_e	$8{,}988 \cdot 10^{9}\,\mathrm{N\,m^2\,C^{-2}}$
Rafsvörunarstuðull tómarúms	ϵ_0	$8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C^2\,s^2\,m^{-3}\,kg^{-1}}$
Þyngdarfastinn	G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
Geisli jarðarinnar	$R_\oplus$	$6{,}38 \cdot 10^{6}\,\mathrm{m}$
Geisli sólarinnar	$R_\odot$	$6{,}96 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}$
Massi jarðarinnar	$M_\oplus$	$5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$
Massi sólarinnar	$M_\odot$	$1{,}99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$
Stjarnfræðieiningin	AU	$1{,}50 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$

Krossar

Hver kross gildir 3,5 stig. Vinsamlegast skráið svörin ykkar við tilheyrandi krossi hér fyrir neðan:

K1	**K2**	**K3**	**K4**	**K5**	**K6**	**K7**	**K8**	**K9**	**K10**
C	C	D	C	A	B	C	D	C	B

K11	**K12**	**K13**	**K14**	**K15**	**K16**	**K17**	**K18**	**K19**	**K20**
A	E	D	E	B	B	B	C	D	A

Krossar (70 stig)

K1. Hreyfiorka hlutar með massa m og hraða v er táknuð með K. Hún er skilgreind þannig að $K = \frac{1}{2}mv^2$. Hverjar eru SI-einingar hreyfiorku?

(A) $\mathrm{kg\,m/s}$ (B) $\mathrm{kg\,m/s^2}$ (C) $\mathrm{kg\,m^2/s^2}$ (D) $\mathrm{kg\,m^2/s}$ (E) $\mathrm{kg^2\,m^2/s^2}$

Lausn: Fáum að:

$$[K] = [\frac{1}{2}mv^2] = [m][v]^2 = \mathrm{kg} \cdot (\mathrm{m/s})^2 = \mathrm{kg\,m^2/s^2}.$$

K2. Bíll eykur hraðann úr 60 km/klst í 100 km/klst á 30 m kafla. Hvaða meðalhröðun fékk bíllinn?

(A) $5{,}3\,\mathrm{m/s^2}$ (B) $7{,}9\,\mathrm{m/s^2}$ (C) $8{,}2\,\mathrm{m/s^2}$ (D) $4{,}1\,\mathrm{m/s^2}$ (E) $107\,\mathrm{m/s^2}$

Lausn: Höfum að:

$$2\overline{a}\Delta s = v^2 - v_0^2 \implies \overline{a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2\Delta s} = \frac{\left(\frac{100}{3{,}6}\right)^2 - \left(\frac{60}{3{,}6}\right)^2}{2 \cdot 30} = 8{,}2\,\mathrm{m/s^2}.$$

K3. Byssukúlu er skotið án loftmótstöðu lóðrétt upp frá yfirborði tunglsins með hraða 30 m/s. Hver verður hæsta hæð kúlunnar? (Þyngdarhröðunin á tunglinu er $1{,}6\,\mathrm{m/s^2}$).

(A) 10 m (B) 30 m (C) 46 m (D) 281 m (E) 563 m

Lausn: Fáum að:

$$2a\Delta s = v^2 - v_0^2 \implies \Delta s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{30^2 - 0^2}{2 \cdot 1.6} = 281\,\mathrm{m}.$$

K4. Engisprettan Engilbert stekkur 40 m upp í loftið. Hversu langur tími líður frá því hann stekkur og þar til hann lendir aftur í sömu hæð?

(A) 0,62 s (B) 2,3 s (C) 5,7 s (D) 9,2 s (E) 11 s

Lausn: Látum t_1 tákna tímann sem það tekur hann að fara frá lægstu stöðu í hæstu stöðu og t_2 tákna tímann sem það tekur hann að fara frá hæstu stöðu niður aftur. Þá er heildartíminn $T = t_1 + t_2$. En þar sem að hann lendir í sömu hæð er $T = 2t_1 = 2t_2$ og við athugum að:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \implies t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 40}{9.82}} = 2{,}85\,\mathrm{s}.$$

En þar með fáum við að $T = 2t_2 = 5{,}7\,\mathrm{s}$.

K5. Þegar hlutir falla til jarðar fá þeir í fyrstu hröðun sem er jöfn þyngdarhröðun jarðar. Loftmótstaða veldur því að eftir nokkur fall ná flestir hlutir ákveðnum lokahraða, sem er fasti. Ímyndum okkur lofstein með massa 2,0 kg sem fellur til jarðar utan úr geimnum. Hver er heildarkrafturinn sem verkar á loftsteininn þegar hann hefur náð lokahraða?

(A) 0 N (B) 0,98 N (C) 3,4 N (D) 9,8 N (E) 20 N

Lausn: Hröðun hlutarins er $a = 0$ ef hraðinn er fastur. En þar með er heildarkrafturinn sem verkar á hlutinn $F_{\mathrm{heild}} = ma = 0\,\mathrm{N}$.

K6. Kúlu A er skotið með hraða 4,0 m/s á kúlu B sem er kyrr. Þegar A klessir á B endurkastast A með hraaða 0,5 m/s í sömu stefnu og hún kom úr. Hvaða hraða fær B ef áreksturinn er alfjarðrandi og engir utanaðkomandi kraftar eru að verki?

(A) 0,5 m/s (B) 3,5 m/s (C) 4,0 m/s (D) 4,5 m/s (E) 5,0 m/s

Lausn: Í alfjaðrandi árekstri eru bæði hreyfiorkan og skriðþunginn varðveittar stærðir. Þar að auki er afstæður hraði hlutanna varðveittur í alfjaðrandi árekstri. Við höfum því að:

$$v_{A1} = v_{B2} - v_{A2} \implies v_{B2} = v_{A1} + v_{A_2} = 4,0 + (-0,5) = 3,5\,\text{m/s}.$$

K7. Á hlut A verkar kraftur F_A og á hlut B verkar kraftur F_B. Hlutur B hefur tvöfalt meiri massa en hlutur A og hröðun hlutar B er helmingi minni en hlutar A. Hvert af eftirtöldu er rétt fullyrðing um kraftana F_A og F_B?

(A) $F_B = \frac{1}{4}F_A$ (B) $F_B = \frac{1}{2}F_A$ (C) $F_B = F_A$ (D) $F_B = 2F_A$ (E) $F_B = 4F_A$

Lausn: Athugum að:

$$F_A = m_A a_A = \left(\frac{1}{2}m_B\right) \cdot (2a_B) = m_B a_B = F_B.$$

K8. Árið 2061 mun halastjarna Halleys sjást með berum augum frá jörðinni. Halastjarnan er á sporbraut um sólina og mun ljúka fjórðu umferð sinni um sólu frá því að Edmond Halley spáði fyrir um komu hennar fyrst, árið 1758. Þegar halastjarnan var síðast í nándarstöðu, árið 1986 mældist hún í fjarlægðinni $r_p = 0{,}59\,\text{AU}$ frá sólu. Hver er mesta fjarlægðin, r_a, sem að halastjarna Halleys nær í firrðarstöðu, frá sólu?

(A) 2,8 AU (B) 15 AU (C) 24 AU (D) 35 AU (E) 46 AU

Lausn: Fáum að meðalfjarlægðin er gefin með:

$$a = \frac{r_{\text{min}} + r_{\text{max}}}{2} = \frac{r_p + r_a}{2}$$

Við höfum síðan samkvæmt þriðja lögmáli Keplers að:

$$\frac{a_J^3}{T_J^2} = \frac{GM_S}{4\pi^2} = \frac{a_H^3}{T_H^2} \implies a_H = \left(\frac{T_H}{T_J}\right)^{2/3} \underbrace{a_J}_{1AU} = \left(\frac{2061-1758}{4}\right)\text{AU} = 18\,\text{AU}$$

En þá höfum við að:

$$r_a = 2a - r_p = 35\,\text{AU}.$$

K9. Tveir krakkar, Dagur og Hrólfur, leika sér með hringekju á leikvelli. Dagur stendur á ytri brún hringekjunnar á meðan Hrólfur ýtir honum í hringi með hornhraða 1,25 rad/s. Dagur er 50 kg og radíus hringekjunnar er 1,5 m. Hver er heildarkrafturinn sem verkar á Dag á hringhreyfingunni?

(A) 25 N (B) 94 N (C) 117 N (D) 130 N (E) 146 N

Lausn: Höfum þá að:

$$F_{\text{heild}} = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r = 50\,\text{kg} \cdot (1{,}25\,\text{rad/s})^2 \cdot 1{,}5\,\text{m} = 117\,\text{N}.$$

K10. Bolta er hent beint upp í loft frá jörðu með hraða v_0. Á hann verkar loftmótstaða. Í hvaða átt verkar krafturinn frá loftmótstöðunni þegar boltinn er á leiðinni upp, þegar hann er á leiðinni niður og er hraði boltans þegar hann lendir meiri, minni eða jafn v_0?

(A) Upp, niður, meiri
(B) Niður, upp, minni
(C) Niður, upp, jafn
(D) Upp, niður, minni
(E) Niður, niður, jafn

Lausn: Loftmótstaðan verkar á móti hreyfistefnunni svo hann er niður á leiðinni upp og upp á leiðinni niður. Hinsvegar þá er loftmótstaðan ógeyminn kraftur og þar með er ljóst af vinnulögmálinu að hraðinn er minni þegar boltinn lendir. Svarið er því B.

K11. Kassi með massa M rennur með hraða v_0 á láréttum fleti með núningsstuðul μ. Kassinn stoppar eftir vegalengd d. Ef öðrum kassa með massa $2M$ er rennt eftir sama fleti hver þarf hraði hans v að vera til að hann stoppi eftir sömu vegalengd d?

(A) v_0 (B) $\frac{v_0}{2}$ (C) $2v_0$ (D) $\sqrt{2}\,v_0$ (E) $\frac{v_0}{\sqrt{2}}$

Lausn: Við höfum fyrir fyrri kassann að samkvæmt vinnulögmálinu er:

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 - \mu Mgd \implies v_0 = \sqrt{2\mu gd}$$

Sem er óháð massanum M svo við ályktum að $v = v_0$.

K12. Tveir íssleðar eru kyrrir við ráslínu og gera sig klára til kapps. Sleði 2 hefur tvöfaldan massa sleða 1. Marklínan er í 100 m fjarlægð frá ráslínunni og báðir sleðarnir fá jafnmikinn kraft alla leiðina. Hvor sleðanna kemst á undan í mark og hvor hefur meiri hreyfiorku þegar hann kemur í mark?

(A) Sleði 1 kemur á undan í mark og sleði 1 hefur meiri hreyfiorku þegar hann kemur í mark.
(B) Sleði 2 kemur á undan í mark og sleði 1 hefur meiri hreyfiorku þegar hann kemur í mark.
(C) Sleði 1 kemur á undan í mark og sleði 2 hefur meiri hreyfiorku þegar hann kemur í mark.
(D) Sleði 2 kemur á undan í mark og sleði 2 hefur meiri hreyfiorku þegar hann kemur í mark.
(E) Sleði 1 kemur á undan í mark og sleðarnir hafa jafn mikla hreyfiorku þegar þeir koma í mark.
(F) Sleði 2 kemur á undan í mark og sleðarnir hafa jafn mikla hreyfiorku þegar þeir koma í mark.
(G) Sleðarnir koma í mark á sama tíma og þeir hafa jafn mikla hreyfiorku þegar þeir koma í mark.

Lausn: Samkvæmt vinnulögmálinu er:

$$W_{\text{heild}} = \Delta K$$

En þar sem báðir fá sama kraft og ferðast sömu vegalengd þá er vinnan gefin með $W_{\text{heild}} = Fd$ fyrir þá báða og þar með koma þeir í mark með sömu hreyfiorku. Hinsvegar þá er hröðun sleða 1 tvöfalt meiri heldur en sleða 2 þar sem að sleði 2 hefur tvöfalt meiri massa svo

$$m_1a_1 = F = m_2a_2 \implies a_1 = \frac{m_2}{m_1}a_2 = 2a_2.$$

En þá er auðvelt að álykta að sleði 1 kemur fyrstu í mark. Svarið er því (E).

K13. Reikistjarnan Júpíter hefur fjölmörg fylgitungl. Íó er eitt þeirra en þar er þyngdarhröðunin við yfirborðið aðeins $g_{\text{Íó}} = 1{,}8\,\mathrm{m/s^2}$. Vantsmelóna er vigtuð hér á Jörðinni þar sem þyngdarhröðunin er $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ og mælist hún $44\,\mathrm{N}$ að þyngd. Hver væri massi vatnsmelónunnar ef hún væri flutt til Íó?

(A) 24 kg (B) 8,1 kg (C) 80 kg (D) 4,5 kg (E) 2,5 kg

Lausn: Fáum að:

$$F_g = mg \implies m = \frac{F_g}{g} = \frac{44\,\mathrm{N}}{9.8} = 4{,}5\,\mathrm{kg}$$

K14. Hlaupari hleypur 2 hringi á hlaupabraut. Meðalhraði hans fyrri hringinn er 12,0 km/klst en meðalhraðinn yfir allt hlaupið er 8,0 km/klst. Hver var meðalhraðinn seinni hringinn?

(A) 2,0 km/klst (B) 3,0 km/klst (C) 4,0 km/klst (D) 5,0 km/klst (E) 6,0 km/klst

Lausn: Látum s tákna lengd brautarinnar. Látum t_1 tákna tímann sem það tekur hlauparann að hlaupa fyrri hringinn og t_2 tímann sem það tekur hann að hlaupa seinni hringinn. Þá er $T = t_1 + t_2$ heildartíminn sem það tekur að hlaupa brautina. Við vitum að:

$$V = \frac{2s}{T} = 8{,}0\,\mathrm{km/klst}, \qquad v_1 = \frac{s}{t_1} = 12{,}0\,\mathrm{km/klst}, \qquad v_2 = \frac{s}{t_2}.$$

Stingum þá inn og fáum að:

$$V = \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} \implies \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} = \frac{2}{V}$$

En þá fáum við að:

$$v_2 = \left(\frac{2}{V} - \frac{1}{v_1}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{8,0} - \frac{1}{12,0}\right)^{-1} = 6{,}0\,\mathrm{km/klst}.$$

K15. Ljósgeisli fellur á fiskabúr undir 45° horni eins og sýnt er á myndinni. Glerið hefur brotstuðul $n_g = 1.52$ og vatn hefur brotstuðul $n_v = 1.33$. Hvað eru hornin θ_1 og θ_2 stór?

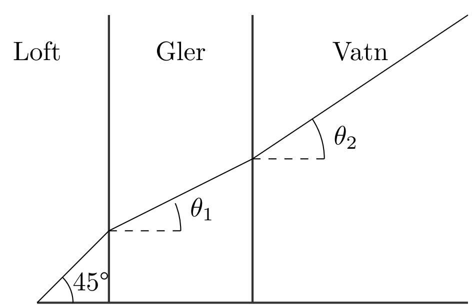
(A) $\theta_1 = 62{,}3°$ og $\theta_2 = 31{,}7°$

(B) $\theta_1 = 27{,}7°$ og $\theta_2 = 32{,}1°$

(C) $\theta_1 = 27{,}7°$ og $\theta_2 = 62{,}3°$

(D) $\theta_1 = 27{,}7°$ og $\theta_2 = 58{,}3°$

(E) $\theta_1 = 62{,}3°$ og $\theta_2 = 58{,}3°$



Lausn: Samkvæmt lögmáli Snells er:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 = n_3 \sin\theta_3$$

Sér í lagi fáum við þá að:

$$\theta_2 = \arcsin\left(\frac{1}{n_2}\sin\theta_1\right) = 27{,}7°, \qquad \theta_3 = \arcsin\left(\frac{1}{n_3}\sin\theta_1\right) = 32{,}1°.$$

K16. Ögn með litla jákvæða hleðslu $+q$ og önnur ögn með talsvert stærri neikvæða hleðslu $-Q$ sitja fastar í tiltekinni fjarlægð hvor frá annari eins og á myndinni hér fyrir ofan. Hvar myndirðu þurfa að koma lítilli ögn með jákvæða hleðslu fyrir til þess að hún væri í jafnvægi?

(A) Hægra megin við neikvæðu hleðsluna.

(B) Vinstra megin við jákvæðu hleðsluna.

(C) Milli hleðslanna, nær þeirri jákvæðu.

(D) Milli hleðslanna, nær þeirri neikvæðu.

(E) Nákvæmlega miðja vegu á milli hleðslanna.

Lausn: Reynum að setja hleðslur á alla staðina. Látum þá $+q$ vera í $x = 0$ og $-Q$ vera í $x = d$. Ef við setjum þá niður litla hleðslu $+e$ vinstra meginn í fjarlægð x frá $x = 0$ þá höfum við að heildarkrafturinn á hana er gefinn með:

$$0 = ma = -\frac{kqe}{x^2} + \frac{kQe}{(x+d)^2} \implies q(x+d)^2 = Qx^2 \implies \left(1 + \frac{d}{x}\right) = \pm\sqrt{\frac{Q}{q}}.$$

Þannig að við ályktum að ef ögnin væri vinstra meginn við hleðslurnar þá þyrfti hún að vera í:

$$x = d\left(-1 \pm \sqrt{\frac{Q}{q}}\right).$$

Neikvæða rótin kemur ekki til greina þar sem við kröfðumst þess að $x > 0$ en hin lausnin kemur til greina því $Q > q$ svo $\frac{Q}{q} > 1$. En þar með höfum við sýnt að ef ögnin er stödd í fjarlægð

$$x = d\left(\sqrt{\frac{Q}{q}} - 1\right)$$

vinstra meginn við jávkæðu hleðsluna þá helst hún í jafnvægi. Við sjáum með sambærilegum rökum að hún gæti ekki verið staðsett mitt á milli hleðslanna né hægra meginn við hleðsluna.

K17. Lítum á rafrásina hér til hægri. Rásin er knúin áfram af 1,0 V rafhlöðu. Heildarstraumurinn í rásinni er 2,0 A. Viðnámin í rásinni eru af stærð x og $\frac{1}{x}$. Hvert er heildarviðnám rásarinnar?

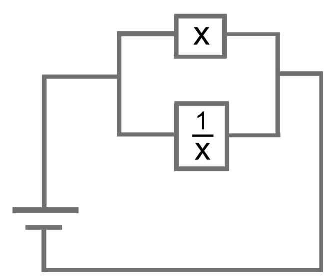
(A) 0,25 Ω

(B) 0,50 Ω

(C) 1,0 Ω

(D) 1,5 Ω

(E) 2,0 Ω



Lausn: Við höfum að:

$$V = IR \implies R = \frac{V}{R} = \frac{1{,}0\,\mathrm{V}}{2{,}0\,\mathrm{A}} = 0{,}50\,\Omega.$$

K18. Bolta er sleppt úr hæð h yfir jörðu. Í hæð $y < h$ er búið að koma fyrir planka sem hallar um 45° miðað við lárétt þannig að boltinn skoppar lárétt af plankanum. Finnið y þannig að boltinn lendi í sem mestri láréttri fjarlægð frá plankanum. Gera má ráð fyrir að áreksturinn sé alfjaðrandi.

(A) $\frac{1}{10}h$ (B) $\frac{1}{5}h$ (C) $\frac{1}{2}h$ (D) $\frac{1}{\sqrt{2}}h$ (E) Boltinn lendir alltaf á sama stað óháð y.

Lausn: Ef boltinn skoppar við 45° horn þá mun hann einungis hafa láréttan hraðaþátt eftir áreksturinn. Höfum þá að hraði hans þegar hann lendir á plankanum er gefinn með:

$$2a\Delta s = v^2 - v_0^2 \implies v = \sqrt{2g(h-y)}.$$

Athugum að tíminn sem líður frá því að hann skoppar og þar til hann lendir fæst með:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \implies t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

En þar með lendir boltinn í láréttu fjarlægðinni:

$$x(y) = vt = \sqrt{2g(h-y)} \cdot \sqrt{\frac{2y}{g}} = 2\sqrt{y(h-y)}.$$

Við þurfum því að hámarka fallið $f(y) = hy - y^2$. Athugum þá að:

$$f'(y) = h - 2y = 0 \implies y = \frac{1}{2}h.$$

Ef maður kann ekki að diffra (t.d. ef maður er í 5. bekk) þá er líka hægt að leysa þetta með því að fylla í ferninginn (eða nota topppunktsregluna). Höfum þá að:

$$-y^2 + hy = -(y^2 - hy) = -\left(\left(y - \frac{h}{2}\right)^2 - \frac{h^2}{4}\right) = \frac{h^2}{4} - \left(y - \frac{h}{2}\right)^2$$

En þar með sjáum við að stærðin er hámörkuð þegar $y = \frac{1}{2}h$.

K19. Járngerður og Stálgerður eru í kapphlaupi. Járngerður er mun betri að hlaupa og er með mikið forskot á Stálgerði. Sjúkrabíll keyrir framhjá Járngerði í átt að Stálgerði með sírenur í gangi. Hver af eftirfarandi fullyrðingum á alltaf við þegar sjúkrabíllinn er að keyra frá Járngerði að Stálgerði?

(A) Hljóðið berst fyrr til Stálgerðar en til Járngerðar.
(B) Hljóðið berst fyrr til Járngerðar en til Stálgerðar.
(C) Stálgerður heyrir dýpri tóna heldur en Járngerður.
(D) Stálgerður heyrir hærri tóna heldur en Járngerður.
(E) Járngerður og Stálgerður heyra sömu tóna.

Lausn: Við getum útilokað A því hversu hratt hljóðið berst til þeirra er háð því hversu langt frá sjúkrabílnum þau eru en það er breytilegt á meðan bíllinn keyrir á milli þeirra. Eins getum við þá útilokað B. Þær munu ekki heyra sömu tóna svo við getum útilokað E því önnur þeirra er að fjarlægjast hljóðgjafann (Járngerður) en hin þeirra er að nálgast hljóðgjafann (Stálgerður).

Dopplerhrifin valda því að Járngerður heyrir tóna með tíðni:

$$f_J = \frac{c - v_J}{c + v_B} f_0$$

Þar sem c táknar hraða hljóðsins og v_J táknar hraða Járngerðar og v_B táknar hraða sjúkrabílsins. Stálgerður heyrir síðan tóna með tíðni:

$$f_S = \frac{c + v_S}{c - v_B} f_0$$

Þar sem v_S táknar hraða Stálgerðar. Af þessu sést að $f_S > f_0 > f_J$ svo Stálgerður heyrir hærri tóna heldur en Járngerður.

K20. Myndin sýnir tvær samsíða hlaðnar plötur með hleðsluþéttleika $\sigma = 1{,}0 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{C/m^2}$. Á milli platnanna er einnig einsleitt segulsvið sem stefnir inn í blaðið og hefur stærð $1{,}0 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{T}$. Rafeind er skotið inn á milli platnanna með upphafshraða v samsíða x-ás. Hver þarf hraðinn v að vera til þess að rafeindin haldi sömu stefnu meðan hún ferðast milli platnanna?

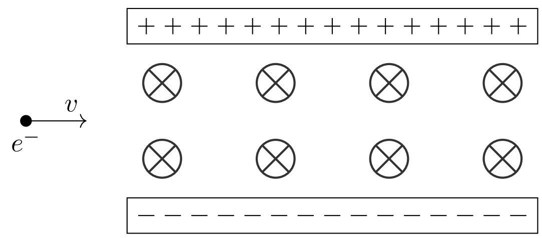
(A) $1{,}13 \cdot 10^6$ m/s

(B) $2{,}26 \cdot 10^6$ m/s

(C) $8{,}85 \cdot 10^7$ m/s

(D) $1{,}13 \cdot 10^4$ m/s

(E) $2{,}26 \cdot 10^4$ m/s



Lausn: Við byrjum á því að nota lögmál Gauss til þess að finna rafsviðið á milli platnanna. Tökum sívalning í gegnum jávkæðu plötuna með geisla r og nægilega þykkt þannig að hann sé beggja meginn við plötuna. Fáum þá samkvæmt lögmáli Gauss að:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{inni}}}{\varepsilon_0} \implies E2r^2\pi = \frac{Q_{\text{inni}}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma r^2 \pi}{\varepsilon_0} \implies E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

En vegna neikvæðu plötunnar fæst eins að:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

En rafsviðið vegna jákvæðu plötunnar er einsleitt og rafsviðslínurnar stefna í áttina frá plötunni sjálfri. Rafsviðið vegna neikvæðu plötunnar er einnig einsleitt en stefnir í áttina að plötunni sjálfri. Í heildina þá styttist rafsviðið út fyrir utan plöturnar tvær og það er aðeins tvöfalt framlag á milli platnanna svo rafsviðið á milli þeirra er gefið með:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

En þá þurfa rafkrafturinn og segulkrafturinn að vera jafn stórir til þess að rafeindin ferðist eftir beinni línu svo við höfum að:

$$F_B = F_E \implies evB = eE \implies v = \frac{E}{B} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 B} = \frac{1{,}0 \cdot 10^{-7}}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-2}} = 1{,}13 \cdot 10^6\,\mathrm{m/s} < c.$$

Dæmi 1: Gormkenndur árekstur (15 stig)

Kubbur með massa m_1 er festur í jafnvægisstöðu við gorm með gormstuðul k_1. Gormurinn er síðan þjappaður saman um lengdina d. Kubburinn er þar losaður frá gorminum og síðan er honum sleppt. Hann rennur þá eftir núningslausa fletinum sem hann hvílir á þar til hann rekst á kyrrstæðan kubb með massa m_2 sem er festur við gorm með gormstuðul k_2. Kubbarnir festast saman við áreksturinn.

(a) **(10 stig)** Finnið mesta útslag gormsins, x, eftir áreksturinn sem fall af m_1, m_2, k_1, k_2 og d.

(b) **(5 stig)** Finnið hreyfiorkuna sem tapast við áreksturinn sem fall af m_1, m_2, k_1, k_2 og d.

Lausn: **(a)** Við höfum að:

$$\frac{1}{2}k_1 d^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 \implies v_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}\, d.$$

En síðan er áreksturinn fullkomlega ófjaðrandi svo skriðþungavarðveislan gefur að hraði massanna, v_2, rétt eftir áreksturinn nýtur:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2 \implies v_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}\, d.$$

Loks höfum við að mesta þjöppun gormsins, x, er þá fundin með því að athuga að:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_2^2 = \frac{1}{2}k_2 x^2 \implies x = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k_2}} v_2 = \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}}\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}\, d.$$

(b) Þá höfum við að orkan sem tapast er gefin með:

$$\Delta K = \frac{1}{2}k_2 x^2 - \frac{1}{2}k_1 d^2 = \frac{1}{2}k_1 d^2\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} - 1\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) k_1 d^2.$$

Dæmi 2: Ævintýri kubbsins

(a) **(5 stig)** Kubbur með massa m rennur niður skábretti sem myndar horn θ miðað við lárétt. Hver er núningsstuðullinn μ milli kubbsins og skábrettisins ef kubburinn rennur niður með jöfnum hraða?

> Höfum þá að $a = 0$ því kubburinn rennur niður með jöfnum hraða svo kraftajafnan verður:
>
> $$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg\sin\theta - F_{\text{nún}} \\ \text{Þ} - mg\cos\theta \end{pmatrix}$$
>
> Notum síðan núningslögmálið $F_{\text{nún}} = \mu\text{Þ}$ og ályktum að:
>
> $$mg\sin\theta = \mu mg\cos\theta \implies \mu = \tan\theta.$$

(b) **(5 stig)** Kubbnum er nú komið fyrir á framhlið vagns sem hefur hröðun a til hægri þegar kubbnum er sleppt úr kyrrstöðu. Núningsstuðullinn milli kubbsins og vagnsins er μ. Hvert er minnsta gildið á hröðuninni a þannig að kubburinn haldist í fastri hæð og detti ekki til jarðar?

> **Lausn:** Kraftajafnan verður þá:
>
> $$\begin{pmatrix} ma \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Þ} \\ F_{\text{nún}} - mg \end{pmatrix}$$
>
> Notum síðan núningslögmálið $F_{\text{nún}} \leqslant \mu\text{Þ} = \mu ma$ og fáum að:
>
> $$\mu ma \geqslant mg \implies a \geqslant \frac{1}{\mu}g.$$

(c) **(5 stig)** Kubbnum er komið fyrir á hreyfanlegu skábretti með massa M sem hallar um horn θ miðað við lárétt borð. Enginn núningur er á milli kubbsins og skábrettisins, né á milli skábrettisins og borðsins. Skábrettinu og kubbnum er sleppt úr kyrrstöðu og fastur kraftur F verkar á vinstri hlið skábrettisins. Hver þarf stærð kraftsins F að vera til þess að kubburinn haldist í fastri hæð yfir borðinu?

> Kraftajöfnurnar verða þá:
>
> $$\begin{pmatrix} ma \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Þ}\sin\theta \\ \text{Þ}\cos\theta - mg \end{pmatrix}, \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} Ma \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F - \text{Þ}\sin\theta \\ \text{Þ}_{\text{jörð}} - Mg - \text{Þ}\cos\theta \end{pmatrix}.$$
>
> Leggjum saman efri jöfnurnar og fáum að heildarkraftajafnan gefur:
>
> $$(M+m)a = F \implies a = \frac{1}{M+m}F$$
>
> En við höfum einnig úr neðri kraftajöfnunni fyrir m að
>
> $$\text{Þ} = \frac{mg}{\cos\theta}$$
>
> En þar með höfum við að $ma = \text{Þ}\sin\theta = mg\tan\theta$ svo við höfum að:
>
> $$F = (M+m)a = (M+m)g\tan\theta.$$