Fyrirlestrar í eðlisfræði

Kennari: Matthias Baldursson Harksen.

Netfang: `matthias@mr.is`

Kennslubók: Physics, Principles with Applications eftir **Douglas C. Giancoli**. ISBN númer bókarinnar sem stuðst er við er:

- ISBN 10: 1-292-05712-2
- ISBN 13: 978-1-292-05712-5

Hægt er að finna pdf-útgáfu bókarinnar ólöglega á netinu. Passið þá að ISBN númerið sé það sama því annars er búið að rugla röð dæmanna. Hinsvegar er kennslubókartextinn nánast sá sami á milli útgáfa (eina sem er breytt er röð dæmanna). Ef þið getið orðið ykkur út um ódýrt eintak hjá systkinum ykkar eða á skiptibókamörkuðum eða jafnvel á `abebooks.co.uk` þá mæli ég eindregið með því.

1 Mælingar

1.1 Alþjóðlega einingakerfið og forskeyti

Alþjóðlega einingakerfið eða SI-kerfið hefur sjö grunneiningar sem sjá má í töflu (1). Við ritum oft forskeyti fyrir framan stærðir SI-kerfisins til að lýsa betur stærðargráðu hlutarins sem um ræðir. Forskeytin má sjá í töflu (2).

Mælistærð	**Skammstöfun**	**Eining**
Lengd	m	Metri
Tími	s	Sekúnda
Massi	kg	Kílógramm
Hiti	K	Kelvin
Efnismagn	mol	Mól
Rafstraumur	A	Amper
Ljósstyrkur	cd	Kandela

Tafla 1: Grunneiningar alþjóðlega einingakerfisins

Forskeyti	**Skammstöfun**	**Gildi**
tera	T	10^{12}
giga	G	10^9
mega	M	10^6
kilo	k	10^3
hecto	h	10^2
deka	da	10
deci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
milli	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}

Tafla 2: Helstu forskeyti alþjóðlega einingakerfisins

Til dæmis tölum við um millimetra (mm), kílógrömm (kg) og nanósekúndur (ns). Við bætum þessum forskeytum líka fyrir framan mælistærðir sem ekki eru grunneiningar SI-kerfisins, til dæmis tölum við um terabæti (TB), desilítra (dL) og megaviku (MV). Takið eftir því að grunneiningin fyrir massa, kílógramm, er skilgreind með forskeyti ólíkt hinum grunneiningum SI-kerfisins.

1.2 Skilgreiningar grunneininganna (yndisauki)

Sekúnda er jafnlöng 9.192.631.770 sveiflutímum geislunarinnar sem svarar til stökksins á milli tveggja ofurfínna stiga í grunnástandinu hjá sesín-133-atóminu.

Metri er lengd brautar sem ljós fer í lofttæmi á 1/299.792.458 af sekúndu.

Kílógrammm: er jafnt massanum á alþjóðlegu frumgerðinni af kílógramminu.

Amper er fasti straumurinn sem rennur í og veldur $2 \cdot 10^7$ N krafti á hvern lengdarmetra tveggja samsíða óendanlega langra leiðara með hverfandi þverskurðarflatarmál sem eru í lofttæmi og með 1 m millibili.

Kelvin er hlutfallið 1/273,16 af varmaaflfræðilegu hitastigi í þrífasapunkti vatns.

Mól er efnismagnið í kerfi sem inniheldur jafnmargar öreindir og eru í 0,012 kg af kolefni-12.

Kandella er ljósstyrkurinn í tiltekna stefnu frá ljósgjafa sem sendir einlita geislun með tíðni $540 \cdot 10^{12}$ herts og hefur geislastyrk í þá sömu stefnu 1/683 vött á steradíana.

1.3 Markverðir stafir

Fjöldi markverðra stafa er talinn frá fyrsta staf vinstra megin í tölunni sem ekki er núll.

(1) Ef um er að ræða heila tölu er síðasti stafurinn í tölunni sem ekki er núll talinn síðasti markverði stafurinn.

(2) Ef talan inniheldur brotkommu er síðasti stafurinn í tölunni jafnframt síðasti markverði stafurinn jafnvel þótt hann sé núll.

Um atriði (1) hér að ofan geta oft verið skiptar skoðanir. T.d. gæti ég sagt að fjöldi nemenda við Menntaskólann í Reykjavík er 800 ± 200. Hér er þá einn markverður stafur. Ef ég myndi halda því fram að þeir væru þrír þá væri ég að gefa í skyn að óvissumatið mitt væri mun betra og að ég héldi því fram að nemendurnir væru 800 ± 2. Eða ef ég segði að markverðu stafirnir væru tveir þá ætti ég við að nemendurnir væru 800 ± 20. En í öðrum dæmum getur verið eðlilegt að telja núllið sem marktækan staf. T.d. ef ég væri að mæla vegalengdina frá Reykjavík til Akureyrar þá gæti ég sagt að hún væri 480 ± 1 km og þá væru marktæku stafirnir þrír en ekki tveir. Niðurstaðan er þessi:

- **Fjöldi markverðra stafa í tölu fer eftir þeim sem framkvæmir mælinguna.** Ef einhver vafi liggur á því um hve marga marktæka stafi talan hefur þá ætti sá sem mælir að setja hana fram á staðalformi. Þetta er því eitthvað sem þið þurfið að hafa á bak við eyrað í verklegu en ekki í bóklegu.

1.4 Reiknireglur um markverða stafi

Reiknireglurnar um markverða stafi eru tvær:

(1) Við deilingu og margföldun talna hefur útkomman jafn marga marktæka stafi og sá liður sem hafði fæsta marktæka stafi.

(2) Við samlagningu og frádrátt talna hefur útkomman jafn marga marktæka stafi eftir kommu og sá liður sem hafði fæsta marktæka stafi eftir kommu.

2 Óvissa og óvissureikningar

Allar mælingar hafa óvissu. Óvissa er ekki galli heldur eðlilegur hluti af mælingu. Gerð óvissu er helst af tveim gerðum. Annars vegar óvissa vegna mælitækisins (rangt kvarðað mælitæki) sem er notað og hinsvegar vegna mælingamannsins (t.d. viðbrögð við að hefja og stöðva tímatöku).

Segjum að við höfum mælistærð $A \pm \Delta A$ (t.d. mæling á lengd þumlungs með reglustiku $3{,}8 \pm 0{,}2\,\mathrm{cm}$). Segjum einnig að við höfum aðra mælistærð $B \pm \Delta B$ (t.d. mæling á lengd fótar með reglustiku $26{,}8 \pm 0{,}5\,\mathrm{cm}$. Við viljum skilja eftirfarandi:

(1) Hver er útkomman þegar við margföldum fasta k með $A \pm \Delta A$?

(2) Hver er útkomman þegar við leggjum saman mælistærðirnar $A \pm \Delta A$ og $B \pm \Delta B$?

(3) Hver er útkomman þegar við drögum mælistærðina $B \pm \Delta B$ frá $A \pm \Delta A$?

(4) Hver er útkomman þegar við margföldum saman tvær mælistærðir $A \pm \Delta A$ og $B \pm \Delta B$?

(5) Hver er útkomman þegar við deilum mælistærðinni $B \pm \Delta B$ með mælistærðinni $A \pm \Delta A$?

Við gætum hugsað um (1) hér að ofan sem vegalengdina sem 10 þumlungar samsvara. Þá fáum við:

$$\text{10 þumlungar} = 10(3{,}8 \pm 0{,}2\,\mathrm{cm}) = 38 \pm 2\,\mathrm{cm}$$

eða almennar

$$k(A \pm \Delta A) = kA \pm k \cdot \Delta A$$

Við gætum hugsað um (2) hér að ofan sem það að við myndum mæla einhverja vegalengd bæði með fetum og þumlungum. Sem dæmi:

$$\begin{aligned}\text{3 fet + 5 þumlungar} &= 3(26{,}8 \pm 0{,}5\,\mathrm{cm}) + 5(3{,}8 \pm 0{,}2\,\mathrm{cm}) \\ &= 80{,}4 \pm 1{,}5\,\mathrm{cm} + 19 \pm 1\,\mathrm{cm} \\ &= 99 \pm 3\,\mathrm{cm}\end{aligned}$$

Almennar gildir

$$A \pm \Delta A + B \pm \Delta B = A + B \pm (\Delta A + \Delta B)$$

Við gætum hugsað um (3) sem lengdarmuninn á feti og þumlung:

$$\text{1 fet - 1 þumlungur} = 26{,}8 \pm 0{,}5\,\mathrm{cm} - 3{,}8 \pm 0{,}2\,\mathrm{cm} = 23{,}0 \pm 0{,}7\,\mathrm{cm}$$

Almennt gildir

$$A \pm \Delta A - B \pm \Delta B = A - B \pm (\Delta A + \Delta B)$$

Til að sýna dæmi um (4) gætum við mælt lengd blaðs ($29{,}6 \pm 0{,}2\,\mathrm{cm}$) og breidd þess ($20{,}9 \pm 0{,}1\,\mathrm{cm}$). Við viljum nú finna flatarmál blaðsins. Fáum þá

$$\begin{aligned}(29{,}6 \pm 0{,}2\,\mathrm{cm}) \cdot (20{,}9 \pm 0{,}1\,\mathrm{cm}) &= 618,64 \left(1 \pm \left(\frac{0,02}{29,6} + \frac{0,01}{20,9}\right)\right) \mathrm{cm}^2 \\ &= 618,64 \pm 0.714\mathrm{cm}^2 = 619 \pm 1\,\mathrm{cm}^2\end{aligned}$$

Almennt fæst reyndar:

$$\begin{aligned}(A \pm \Delta A) \cdot (B \pm \Delta B) &= AB \pm (\Delta A)B \pm A(\Delta B) \pm \Delta A \Delta B \\ &\approx AB \pm (\Delta A)B \pm A(\Delta B) = AB\left(1 \pm \left(\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}\right)\right)\end{aligned}$$

þar sem að við höfum ákveðið að hunsa framlagið sem $\Delta A \Delta B$ veitir til óvissunnar vegna þess að ΔA og ΔB eru báðar mjög litlar stærðir svo að margfeldi þeirra er enn minna. Stærð af gerðinni $\frac{\Delta A}{A}$ kallast **hlutfallsóvissa stærðarinnar A**. Raunar gildir fyrir margfeldi þriggja mælistærða að

$$(A \pm \Delta A) \cdot (B \pm \Delta B) \cdot (C \pm \Delta C) = ABC \left(1 \pm \left(\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B} + \frac{\Delta C}{C}\right)\right). \tag{1}$$

Fyrir deilinguna í (5) fæst að

$$\frac{A \pm \Delta A}{B \pm \Delta B} = \frac{A}{B} \left(1 \pm \left(\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}\right)\right). \tag{2}$$

2.1 Dæmi fyrir tímann á föstudaginn (24. ágúst)

Upphitun: Kafli 1 í Giancoli: 1-3, 12-13.

Æfingardæmi: *Kafli 1 í Giancoli:* 4, 7, 15, 18, 10. *Dæmi út verklega heftinu:* 2, 3.

3 Færsla, meðalhraði, ferð og augnablikshraði

Þið kannist eflaust við það að Usain Bolt sé fljótasti maður heims. Í eftirfarandi töflu má sjá gögn sem lýsa hlaupi hans á Ólympíuleikunum í Beijing 2008

Vegalengd $[m]$	**Tími** $[s]$
5.0 ± 0.5	1.10 ± 0.01
10.0 ± 0.5	1.85 ± 0.01
20.0 ± 0.5	2.87 ± 0.01
34.0 ± 0.4	4.00 ± 0.01
41.3 ± 0.5	4.50 ± 0.01
52.1 ± 0.5	5.40 ± 0.01
55.9 ± 0.5	5.80 ± 0.01
61.5 ± 0.5	6.20 ± 0.01
64.8 ± 0.4	6.50 ± 0.01
69.6 ± 0.2	6.90 ± 0.01
73.3 ± 0.2	7.30 ± 0.01
81.7 ± 0.2	8.00 ± 0.01
85.6 ± 0.2	8.30 ± 0.01
89.2 ± 0.2	8.60 ± 0.01
91.3 ± 0.2	8.80 ± 0.01
98.6 ± 0.2	9.40 ± 0.01
100.0 ± 0.1	9.69 ± 0.01

Tafla 3: Tafla með mælingum Bolts.

Staða er vigur. En við getum oft hugsað um þennan vigur í einni vídd t.d. hvar Usain Bolt er á 100 metra hlaupabraut (þar skiptir engu máli hversu hátt hann er yfir sjávarmáli eða hversu langt hann hleypur þvert á brautina). **Færsla** í einni vídd er skilgreind sem

$$\Delta s = s_{\text{eftir}} - s_{\text{fyrir}} = s_2 - s_1$$

Meðalhraði er skilgreindur sem

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

en þetta gefur okkur oft svolítið skrítnar niðurstöður t.d. ef að Usain Bolt myndi hlaupa frá rásmarki að endamarki og síðan aftur til baka að rásmarki þá myndi meðalhraði hans vera

$$v_m = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = 0$$

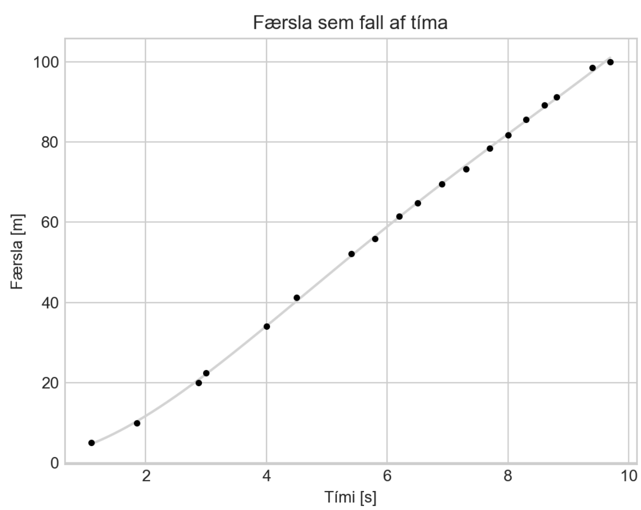
vegna þess að upphafsstaðurinn og endastaðurinn er sá sami. Því notum við oft það sem er kallað **ferð** í eðlisfræði:

$$v_m = \frac{\text{vegalengd farin}}{\Delta t}$$

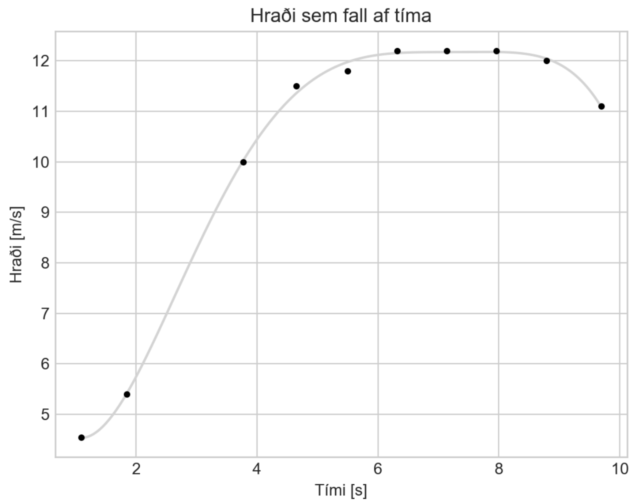
En þegar við keyrum bíl þá sýnir mælaborðið okkur ekki einhvern meðalhraða heldur sýnir það okkur hvaða hraða við erum á nákvmælega á því augnabliki þ.e.a.s. **augnabliksshraða** eða **punkthraða**. Til þess að skilgreina það fyllilega eins og stærðfræðingi sæmir þá þurfum við á diffurreikningi að halda en ef við viljum skilgreina það sem eðlisfræðingar þá ættum við að hugsa það svona: Því minna sem Δt verður því nær erum við því að mæla augnablikshraðann. Þ.e.a.s.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Við munum nú reyna að skýra muninn út frá dæminu um Usain Bolt:



Mynd 1: Á þessu grafi getum við séð hvernig staða Usain Bolts breyttist í hlaupinu sem fall af tíma.



Mynd 2: Á þessu grafi getum við séð hvernig hraði Usain Bolts breyttist í hlaupinu sem fall af tíma. Þetta graf var gert með því að reikna meðalhraða Usains á minni köflum með 10 m millibili (og þar með færri sekúndur á milli). Mælingarnar sem stuðst var við eru í töflu (3)

Meðalhraði $[m/s]$	**Tími** $[s]$
4.54	1.10
5.40	1.85
10.0	3.78
11.5	4.65
11.8	5.50
12.2	6.32
12.2	7.14
12.2	7.96
12.0	8.79
11.1	9.69

Tafla 4: Mælingar á meðalhraða Bolts.

Það sem við erum að læra af þessu öllu eru eftirfarandi atriði:

(i) Það er ákveðinn munur á meðalhraða og punkthraða. Bæði eru reiknuð eins en punkthraðinn fæst þegar við tökum eins litla tímabreytingu og við getum. Til dæmis væri mun auðveldara að lýsa ferðalagi frá Reykjavík til Akureyrar með meðalhraðagrafi frekar heldur en nákvæmu punkthraðagrafi. Hinsvegar eins og við sáum á dæminu um Usain Bolt þá getur oft verið hentugra að lýsa veruleikanum með punkthraðagrafi, enda er það nákvæmari en flóknari lýsing.

(ii) Flatarmálið undir ferlinum á hraða tímagrafinu er jafnt heildarfærslunni. Til yndisauka má rita þetta með ákveðnu tegri:

$$s_1 - s_0 = \int_{t_0}^{t_1} v dt$$

Ef v er fast (sem það oft er ef við erum t.d. með meðalhraða) þá fáum við:

$$s_1 - s_0 = v(t_1 - t_0)$$

með því að setja $t_0 = 0$, $t_1 = t$ og $s_1 = s$ getum við ritað jöfnuna á eftirfarandi formi:

$$s = s_0 + vt \tag{3}$$

oft setjum við líka viðmiðunarkerfið í $s_0 = 0$ og þá verður jafnan

$$s = vt$$

Síðan skulum við skilgreina meðalhröðun og punkthröðun með nákvæmlega sama hætti:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

og punkthröðunin/augnablikshröðunin verður

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Við höfum þegar skoðað hvað gerist ef hlutir verða ekki fyrir neinni hröðun - því við höfum skoðað hreyfingu með fastan hraða (sem er jafngilt því að hlutur verði ekki fyrir hröðun). Nú skulum við skoða hreyfingu hlutar sem verður fyrir fastri hröðun (það er ekkert voðalega óalgengt að hlutir verði fyrir fastri hröðun t.d. er þyngdarhröðunin föst við yfirborð jarðar). Eins og við færðum rök fyrir með hraða tímagrafið þá verður

$$v_1 - v_0 = a(t_1 - t_0)$$

sem við getum umritað

$$v = v_0 + at$$

Með því að nota aftur teguraðferðina að ofan þá fáum við:

$$s_1 - s_0 = \int_{t_0}^{t_1} v dt = \int_{t_0}^{t_1} (v_0 + at) dt$$

Fyrsti liðurinn er fasti en annar liðurinn er línufall svo við fáum:

$$s_1 - s_0 = v_0(t_1 - t_0) + \frac{a}{2}\left(t_1^2 - t_0^2\right)$$

setjum svo $t_0 = 0$, $s_1 = s$ og höfum

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \tag{4}$$

Loks skulum við leiða út tímaóháðu jöfnuna.

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot v$$

Fáum með því að margfalda í gegn með ds að

$$\int_{s_0}^{s_1} a ds = \int_{v_0}^{v_1} v dv$$

sem verður því

$$a(s_1 - s_0) = \frac{1}{2}(v_1^2 - v_0^2)$$

sem gefur okkur því með því að setja $\Delta s = s_1 - s_0$ að

$$2a\Delta s = v_1^2 - v_0^2 \tag{5}$$

3.1 Helstu jöfnur kaflans

$$s = s_0 + vt \tag{6}$$

$$v = v_0 + at \tag{7}$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{8}$$

$$2a(s - s_0) = v^2 - v_0^2 \tag{9}$$

Athugið að jafna (6) gildir þegar hraðinn er fastur en það er jafngilt því að hröðunin a sé núll þ.e. $a = 0$. En hún fæst þá einnig úr jöfnu (8). Jöfnur (7), (8) og (9) gilda fyrir fasta hröðun.

4 Dæmi úr gangfræði

Dæmi: Bergþóra er með fæturna uppi á borði í G-stofu í gamla skóla. HP sér til hennar og verður svo reiður að hann hendir henni út um gluggann, 1,2 s síðar heyrist Bergþóra skella á jörðinni. G.r.f. að HP hafi kastað henni með upphafshraða $v_0 = 0\,\mathrm{m/s}$.

(a) Í hvaða hæð er G-stofa?

(b) Hver var hraði Bergþóru þegar hún skall á jörðinni?

(c) Hver var hraði Bergþóru þegar hún hafði ferðast 2,0 m?

(d) Hversu langan tíma hefði það tekið Bergþóru að skella á jörðinni ef HP hefði kastað henni með upphafshraða $v_0 = 2\,\mathrm{m/s}$?

Lausn:

(a) Fáum að:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{g}{2}t^2 = \frac{9{,}82\,\mathrm{m/s^2} \cdot (1{,}2\,\mathrm{s})^2}{2} = 7{,}1\,\mathrm{m}$$

(b) Fáum að:

$$v = v_0 + at = gt = 9{,}82\,\mathrm{m/s^2} \cdot 1{,}2\,\mathrm{s} = 12\,\mathrm{m/s}$$

(c) Höfum að:

$$2a(s - s_0) = v^2 - v_0^2$$

sem gefur því að

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \cdot 9{,}82\,\mathrm{m/s^2} \cdot 2{,}0\,\mathrm{m}} = 6{,}3\,\mathrm{m/s}$$

(d) Þá höfum við

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

sem gefur með $s = 7{,}1\,\mathrm{m}$, $s_0 = 0$, $v_0 = 2{,}0\,\mathrm{m/s}$ og $a = g$ að:

$$\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t - s = 0 \implies t^2 + \frac{2v_0}{g}t - \frac{2s}{g} = 0$$

sem er 2. stigs margliða sem hefur lausn:

$$t = \frac{1}{2}\left(-\frac{2v_0}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{2v_0}{g}\right)^2 + \frac{8s}{g}}\right) = \begin{cases} 1{,}0\,\mathrm{s} \\ -1{,}4\,\mathrm{s} \end{cases}$$

við ályktum því að $t = 1{,}0\,\mathrm{s}$ því hin lausnin „meikar ekki sense”.

4.1 Dæmi fyrir mánudaginn 3. september

Kafli 2 í Giancoli: 1-5, 6b, 10, 13, 15, 16.

Allir bóklegu tímarnir í næstu viku (nema prófið ykkar föstudaginn 7. september) verða dæmatímar.

4.2 Dæmi fyrir þriðjudaginn 4. september

Kafli 2 í Giancoli: 17-18, 22-24, 37-38, 20, 26,

4.3 Dæmi fyrir miðvikudaginn 5. september

Kafli 2 í Giancoli: 34, 35, 36, 49, 50

4.4 Rússneska dæmið (yndisauki)

Eftirfarandi dæmi er fyrsta dæmið í frægri rússneskri bók eftir I.E. Irodov um klassíska eðlisfræði:

1.1 A motorboat going downstream overcame a raft at a point A; $\tau = 60\,\text{min}$ later it turned back and after some time passed the raft at a distance $\ell = 6{,}0\,\text{km}$ from the point A. Find the flow velocity assuming the duty of the engine to be constant.

Svar: $v = 3{,}0\,\text{km/klst}$

5 Gangfræði í fleiri víddum

Staða, hraði og hröðun eru vigrar. Hingað til höfum við hunsað það og aðeins skoðað gangfræði í einni vídd. Nú skulum við skoða hvað gerist ef að við látum stöðuna okkar vera vigur í tveim eða jafnvel þrem víddum. Þá getum við ritað:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Hraði verður síðan

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

þar sem v_x er hraði hlutarins í stefnu x-áss, v_y hraði hlutarins í stefnu y-áss og v_z hraði hlutarins í stefnu z-áss. Hröðun hlutarins verður

$$\vec{a} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

þar sem a_x, a_y og a_z tákna hröðun hlutarins í tilsvarandi stefnu. Jöfnurnar sem við höfðum leitt út fyrir gangfræði í einni vídd verða allar nákvæmlega eins.

5.1 Helstu jöfnur í gangfræði í fleiri víddum

Meðalhraði verður:

$$\vec{v_m} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

og meðalhröðun verður því

$$\vec{a_m} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\begin{pmatrix}\Delta v_x\\ \Delta v_y\\ \Delta v_z\end{pmatrix}$$

Síðan höfum við (föst hröðun) að

$$\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{a}t = \begin{pmatrix}v_{x,0}\\ v_{y,0}\\ v_{z,0}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a_x\\ a_y\\ a_z\end{pmatrix} t$$

$$\vec{s} = \vec{s_0} + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 = \begin{pmatrix}x_0\\ y_0\\ z_0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}v_{x,0}\\ v_{y,0}\\ v_{z,0}\end{pmatrix} t + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}a_x\\ a_y\\ a_z\end{pmatrix} t^2$$

$$\begin{pmatrix}2a_x\Delta x\\ 2a_y\Delta y\\ 2a_z\Delta z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_x^2\\ v_y^2\\ v_z^2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}v_{x,0}^2\\ v_{y,0}^2\\ v_{z,0}^2\end{pmatrix}$$

Við túlkum þetta sem svo að jöfnurnar gildi hnit fyrir hnit þ.e.a.s. í stað þess að vera með eina jöfnu þá höfum við í rauninni einna jöfnu fyrir hvert hnit! Við munum aðallega skoða þessar jöfnur í tveim hnitum í sambandi við kasthreyfingu (þ.e.a.s. hvernig hlutir hreyfast þegar þeim er kastað).

5.2 Dæmi um kasthreyfingu

Dæmi Tveim boltum er kastað á sama tíma frá sama stað. Öðrum er kastað beint upp í loftið og hinum er kastað undir $\theta = 60°$ horni miðað við lárétt. Upphafshraði beggja bolta er $v_0 = 25\,\mathrm{m/s}$. Hunsið áhrif loftmótstöðu á hreyfingu boltanna. Finnið fjarlægðina á milli boltana eftir $t = 1{,}70\,\mathrm{s}$.

Lausn: Skoðum fyrst boltann sem að er að fara beint upp í loftið. Reynum að finna stöðu hans eftir $1{,}70\,\mathrm{s}$. Látum x-ásinn tákna fjarlægðina sem að hluturinn ferðast lárétt en y-ásinn tákna fjarlægðina sem hluturinn ferðast lóðrétt. Við getum þá ritað fyrir bolta 1 að:

$$\vec{v}_{b_1}(0) = \begin{pmatrix}0\\ 25\end{pmatrix}\mathrm{m/s}$$

notum síðan stöðujöfnuna $\vec{s} = \vec{s_0} + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$. Hér er þyngdarhröðunin:

$$\vec{g} = \begin{pmatrix}0\\ -9.82\end{pmatrix}\mathrm{m/s^2}$$

Stöðujafnan gefur því að:

$$\vec{s}_{b_1}(t) = \begin{pmatrix}0 + 0\cdot t + \frac{1}{2}\cdot 0\cdot t^2\\ 0 + 25\cdot t + \frac{1}{2}(-9.82)\,t^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 25t - 4.91t^2\end{pmatrix}$$

metum síðan í $t = 1{,}70\,\mathrm{s}$ og fáum að

$$\vec{s}_{b_1}(1.70) = \begin{pmatrix}0\\ 28.3\end{pmatrix}\mathrm{m}$$

Skoðum nú bolta 2 í sama hnitakerfi. Þá höfum við að

$$\vec{v}_{b_2}(0) = 25\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}\mathrm{m/s} = 25\begin{pmatrix}\cos(60°)\\ \sin(60°)\end{pmatrix}\mathrm{m/s} = \begin{pmatrix}12.5\\ 21.7\end{pmatrix}\mathrm{m/s}$$

Nú fæst þá að

$$\vec{s}_{b_2}(t) = \begin{pmatrix} 0 + 12.5 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot t^2 \\ 0 + 21.7 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (-9.82) \cdot t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.5t \\ 21.7t - 4.91t^2 \end{pmatrix}$$

svo að við höfum að

$$\vec{s}_{b_2}(1.70) = \begin{pmatrix} 21.3 \\ 22.7 \end{pmatrix}$$

En þá er fjarlægðin milli boltana:

$$|\vec{s}_{b_1} - \vec{s}_{b_2}| = \left| \begin{pmatrix} 21.3 \\ 5.6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{21.3^2 + 5.6^2} = 22\,\mathrm{m}$$

5.3 Spurning (Valdimar)

Spurning: *Hvernig vitum við hvort að boltarnir eru að fara upp eða niður?*

Við skulum reyna að svara þessari spurningu á kannski svolítið annan veg. Gefum okkur því bolta sem er kastað undir θ gráðum í upphafsstöðunni (x_0, y_0) með upphafshraðanum v_0. Þá höfum við:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + v_0 \cos(\theta) t \\ y_0 + v_0 \sin(\theta) t - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}$$

Þegar $v_y = 0$ þá hefur boltinn náð mestri hæð. Látum τ tákna þann tíma sem það tekur boltann að ná mestri hæð. Hann uppfyllir

$$\underbrace{v_y(\tau)}_{=0} = v_{0y} - g\tau \implies \tau = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin(\theta)}{g}$$

Við getum þá fundið stöðu boltans eftir τ sekúndur með því að stinga því inn í stöðujöfnuna fyrir ofan. Fáum:

$$\begin{pmatrix} x(\tau) \\ y(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + v_0 \cos(\theta) \tau \\ y_0 + v_0 \sin(\theta) \tau - \frac{1}{2} g \tau^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + v_0 \cos(\theta) \cdot \frac{v_0 \sin(\theta)}{g} \\ y_0 + v_0 \sin(\theta) \cdot \frac{v_0 \sin(\theta)}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin(\theta)}{g} \right)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{2g} \\ y_0 + \frac{v_0^2 \sin^2(\theta)}{2g} \end{pmatrix}$$

Við höfum því sýnt að hámarkshæð bolta sem er kastað undir θ gráðum miðað við lárétt er

$$y_{\max} = y_0 + \frac{v_0^2 \sin^2(\theta)}{2g}$$

Við höfum því í rauninni svarað tveim spurningum:

(1) Hversu langan tíma tekur það boltann að komast í hæstu stöðu?

Svar: $\tau = \frac{v_0 \sin(\theta)}{g}$

(2) Hver er hæsta staðan sem boltinn kemst í?

Svar: $y_{\max} = y_0 + \frac{v_0^2 \sin^2(\theta)}{2g}$

Aðrar spurningar sem hægt er að svara að svo stöddu eru:

(i) Hvar lendir boltinn?

(ii) Hversu langan tíma tekur það boltann að lenda?

(iii) Undir hvaða horni á að kasta svo að boltinn fari sem lengst?

5.4 Dæmi fyrir dæmatíma (miðvikudagur)

Kafli 3 í Giancoli: 17 - 21

5.5 Dæmi fyrir dæmatíma (föstudagur)

Kafli 3 í Giancoli: 23, 26, 27, 30

5.6 Dæmi fyrir dæmatíma (mánudagur)

Kafli 3 í Giancoli: 31, 32, 35

5.7 Samantekt á nokkrum niðurstöðum um kasthreyfingar

Ef hlut er kastað frá jörðu $(x_0, y_0) = (0, 0)$ með upphafshraða v_0 yfir horninu θ miðað við lárétt þá er:

Heildarfærslan: $x = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$

Mesta hæðin: $y = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$

Tíminn sem það tekur að komast í hæsta punkt: $t_{1/2} = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$

Heildartíminn: $T = 2t_{1/2} = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$

6 Lögmál Newtons og kraftar

Lögmál Newtons eru í íslenskri þýðingu eftirfarandi:

Lögmál 1 *Sérhver hlutur heldur áfram að vera í kyrrstöðu, eða á jafnri hreyfingu eftir beinni línu, nema kraftar sem á hann verka þvingi hann til að breyta því ástandi..*

Lögmál 2 *Breyting hreyfingarinnar er í réttu hlutfalli við hreyfikraftinn sem verkar; og hún verður í stefnu beinu línunnar sem krafturinn verkar eftir.*

Lögmál 3 *Gagnstætt sérhverju átaki er ávallt jafnstórt gagntak, eða gagnkvæmar verkanir tveggja hluta hvors á annan eru ávallt jafnstórar og í gagnstæða stefnu.*

En þetta segir okkur kannski ekki neitt. Því Netwon segir í raun aldrei hvað kraftur er. Hvað er kraftur? Í frægum fyrirlestri eftir Richard Feynman er niðurstaðan sú að „ef hlutur verður fyrir hröðun þá verður hann fyrir krafti“. Það er eflaust besta skilgreiningin á krafti þ.e. kraftur er massi sinnum hröðun:

$$F = ma$$

Þá getum við túlkað lögmálin betur. Því þá segir 1. lögmálið okkur að ef engin kraftur verkar á hlut þ.e.a.s. ef $a = 0$ þá heldur hluturinn áfram að ferðast með föstum hraða (samanber $v = v_0 + at$). Þá segir 2. lögmálið okkur að hreyfing hlutar er vegna hröðunarinnar sem hluturinn verður fyrir vegna samanlagðra krafta sem verka á hlutinn. Ef $F_1, F_2, \ldots, F_n$ eru kraftar sem verka á hlut þá ritum við oft

$$F_{\text{heild}} = F_1 + F_2 + \ldots + F_n = \sum_{k=1}^{n} F_k$$

Loks segir þriðja lögmálið okkur að ef hlutur A verkar með krafti F_A á hlut B þá verkar hlutur B með jafnstórum gagnverkandi krafti á hlut A þ.e.a.s. $F_A = -F_B$.

6.1 Útdráttur úr Principia eftir Newton (Yndisauki)

AXIOMS, OR THE LAWS OF MOTION

Law 1 *Every body perseveres in its state of being at rest or of moving uniformly straight forward, except insofar as it is compelled to change its state by forces impressed.*

Projectiles persevere in their motions, except insofar as they are retarded by the resistance of the air and are impelled downward by the force of gravity. A spinning hoop, which has parts that by their cohesion continually draw one anohter back from rectilinear motions, does not cease to rotate, except insofr as it is retarded by the air. And larger bodies - planets and comets - preserve for a longer time both their progressive and their circular motions, which take place in spaces having less resistance.

Law 2 *A change in motion is proportional to the motive force impressed and takes place along the straight line in which that force is impressed.*

If some force generates any motion, twice the force will generate twice the motion, and three times the force wil generate three times the motion, whether the force is impressed all at once or successively by degrees. And if the body was previously moving, the new motion (since motion is always in the same direction as the generative force) is added to the original motion if that motion was in the same direction or is subtracted from the original motion if it was in the opposite direction or, if it was in an oblique direction, is combined obliquely and compounded with it according to the directions of both motions.

Law 3 *To any action there is always an opposite and equal reaction; in other words, the actions of two bodies upon each other are always equal and always opposite in direction.*

Whatever presses or draws something else is pressed or drawn just as much by it. If anyone presses a stone with a finger, the finger is also pressed by the stone. If a horse draws a stone tied to a rope, the horse will (so to speak) also be drawn back equally toward the stone, for the rope, stretched out at both ends, will urge the horse toward the horse by one and the same endeavor to go slack and will impede the forward motion of the one as much as it promotes the forward motion of the other. If some body impinging upon another body changes the motion of that body in any way by its own force, then, by the force of the other body (because of the equality of their mutual pressure), it also will in turn undergo the same change in its own motion in the opposite direction. By means of these actions, equal changes occur in the motions, not in the velocities - that is, of course, if the bodies are not impeded by anything else. For the changes in velocities that likewise occur in opposite directions are inversely proportional to the bodies because the motions are changed equally. This law is valid also for attractions, as will be proved in the next scholium.

6.2 Nokkrir kraftar

Við skulum fyrst velta því fyrir okkur hvaða einingar kraftur hefur. Við ritum:

$$F = ma$$

Við vitum að hröðunin a hefur einingar $[a] = \mathrm{m/s^2}$ og að massinn m hefur eininguna $[m] = \mathrm{kg}$. Því verður einingin á krafti $[F] = [m]\,[a] = \mathrm{kgm/s^2}$. Stærðin $\mathrm{kgm/s^2}$ hefur hlotið nafnið N (fyrir Newton) til styttingar.

Þyngdarkraftur

Krafturinn sem jörðin togar í okkur með kallast þyngdarkraftur og er oftast táknaður með F_g. Þar sem að þyngdarhröðun jarðar er ávallt $g = 9{,}82\,\mathrm{m/s^2}$ verður

$$F_g = mg$$

Þyngdarkrafturinn verkar í átt að miðju jarðar.

Þverkraftur

Ef við stöndum kyrr á jörðinni, þá er heildarkrafturinn á okkur núll (því við erum ekki á hreyfingu svo hröðun okkar er núll og því er heildarkrafturinn það líka). En þyngdarkrafturinn verkar alltaf á okkur svo að það hlítur að vera jafn stór kraftur sem verkar í öfuga stefnu miðað við þyngdarkraftinn sem heldur okkur kyrrum. Sá kraftur nefnist þverkraftur. Þverkrafturinn verkar hornrrétt frá yfirborði flatarins.

Athugið: Einföld sál gæti haldið að þverkrafturinn og þyngdarkrafturinn væru 3. lögmáls par. Það er hinsvegar ekki rétt! Því þegar við stöndum á jörðinni þá verkum við með krafti á jörðina sem ýtir henni niður. Jörðin ýtir þá til baka á okkur með jafn stórum gagnverkandi krafti. Sá kraftur er þverkrafturinn. Það er mikilvægt að átta sig á því að kraftarnir sem um ræðir í 3. lögmáli Newtons verka alltaf á sitt hvorn hlutinn. Því geta þyngdarkrafturinn og þverkrafturinn ekki verið 3. lögmáls par.

Núningskraftur

Á milli sérhverra tveggja yfirborða verkar núningskraftur sem er háður efnunum sem snertast. Til dæmis er núningsstuðullinn milli ís og ís frekar lár (0.02) en milli málms og viðar hár (0.5). Við táknum núningsstuðulinn með μ. Til eru tvær mismunandi gerðir af núningsstuðlum. Annars vegar hreyfinúningsstuðullinn, μ_k (kinetic) og hinsvegar kyrrstöðunúningsstuðullinn μ_s (static). Athugið að kyrrstöðunúningsstuðullinn er oftast hærri en hreyfinúningsstuðullinn því eftir að við höfum komið hlut af stað er auðveldara að draga hann áfram. Við höfum almennt að núningskraftinn má reikna með:

$$F_{\text{nún}} = \mu F_{\text{þver}} = \mu \text{Þ}$$

þar sem að μ er núningsstuðullinn milli efnanna og $F_{\text{þver}} = \text{Þ}$ er þverkrafturinn sem verkar á hlutinn.

Gormkraftur

Ef við höfum lítin gorm þá vitum við að ef við drögum hann frá jafnvægisstöðunni sinni þá þegar við sleppum skýst hann til baka í átt að jafnvægisstöðunni. Því meira sem við drögum því erfiðara er að halda honum og ef við missum tak á honum þá skýst hann þeim mun meira af stað. Þessu fyrirbæri má lýsa með lögmáli Hookes sem segir að:

$$F_{\text{gormur}} = -kx$$

þar sem að x er færslan frá jafnvægisstöðunni og k er gormstuðull sem er háður gorminum sem við höfum. Gormstuðullinn gæti verið háður efninu sem gormurinn er gerður úr eða lögun gormsins eða stærð hans. Við skulum skoða hvaða einingar gormstuðullinn hefur. Nú er $[F] = \mathrm{N}$ og $[x] = \mathrm{m}$ svo að $[k] = [F]\,/\,[x] = \mathrm{N/m}$

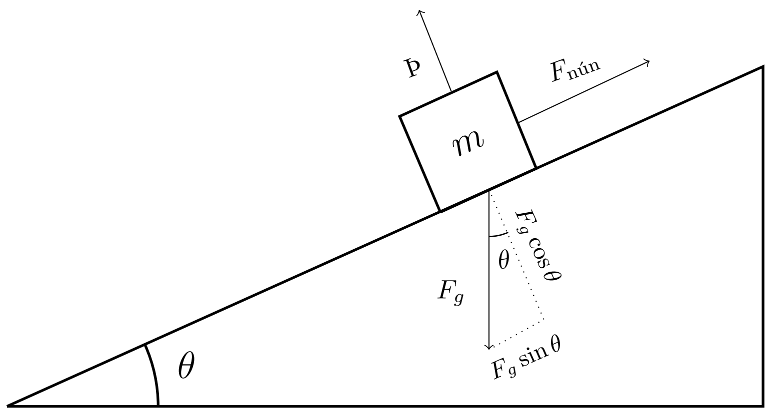
Togkraftur

Ef við höfum reipi og festum það við bíl og við togum í reipið þá verkar togkraftur á bílinn í áttina að þeim sem togar. Togkraftur getur aldrei ýtt á hlut.

7 Kraftadæmi

7.1 Skábrettadæmi

Lítum á kassa með massa m á skábretti sem hallar um θ gráður miðað við lárétt. Finnið hröðun kassans og hversu lengi hann er að renna niður skáplanið ef hann er í hæðinni h þegar hann byrjar að renna. Gera má ráð fyrir að hreyfinúningsstuðull og kyrrstöðunúningsstuðull séu þeir sömu.



Lausn: Við veljum hnitakerfið þannig að x-ásinn sé samsíða skáplaninu (í stefnu niður) og y-ásinn þvert á x-ásinn upp. Samkvæmt öðru lögmáli Newtons er heildarkrafturinn sem verkar á kassann þá summa allra kraftanna sem verka á kassann. Kraftarnir sem verka á kassann eru þyngdarkrafturinn, þverkrafturinn og núningskrafturinn. Við vitum að heildarhröðunin í y-stefnuna verður núll því massinn er að renna á skáplaninu án þess að losna frá því. Við höfum því að:

$$m\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{F}_{\text{heild}} = \vec{F}_g + \vec{F}_{\text{nún}} + \vec{\text{Þ}} = \begin{pmatrix} mg\sin\theta \\ -mg\cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mu\text{Þ} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \text{Þ} \end{pmatrix}$$

Við sjáum þá af neðri jöfnunni að:

$$0 = -mg\cos\theta + \text{Þ} \implies \text{Þ} = mg\cos\theta$$

en þá verður efri jafnan:

$$ma = mg\sin\theta - \mu\text{Þ} = mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta$$

styttum út m og höfum þá:

$$a = g\left(\sin\theta - \mu\cos\theta\right) \tag{10}$$

Ath. Ef $a = 0$ þ.e.a.s. ef kubburinn rennur niður með jöfnum hraða þá fáum við að:

$$0 = g\left(\sin\theta - \mu\cos\theta\right) \implies \sin\theta = \mu\cos\theta \implies \mu = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

með þessum hætti er hægt að finna núningsstuðullinn milli tveggja efna þ.e.a.s. með því að láta kubb renna niður með jöfnum hraða á skábretti undir horninu θ þá höfum við að $\mu = \tan\theta$.

Við skulum skoða jöfnu (10) nánar. Ef $\theta = 90°$ væri skábrettið lóðrétt og kubburinn myndi falla niður með þyngdarhröðuninni g. Svo við myndum búast við að $a = g$. En ef við stingum inn $\theta = 90°$ þá fáum við einmitt að $a = g$ (því $\cos(90°) = 0$). Þetta bendir til þess að við höfum gert eitthvað rétt í útleiðslunni okkar!

En ef kubburinn byrjar í hæð h þá er lengdin sem hann á eftir að renna niður skábrettið $x = \frac{h}{\sin\theta}$. Ef hann byrjar að renna með upphafshraða $v_{0x} = 0$ þá fáum við að:

$$\underbrace{x}_{\frac{h}{\sin\theta}} = \underbrace{x_0}_{0} + \underbrace{v_{0x}}_{0}t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\left(g\left(\sin\theta - \mu\cos\theta\right)\right)t^2$$

svo við höfum að:

$$t^2 = \frac{2h}{g\sin\theta\left(\sin\theta - \mu\cos\theta\right)}$$

svo

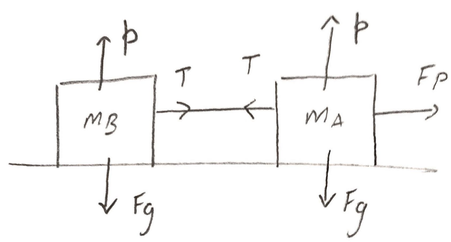
$$t = \left(\frac{2h}{g\sin\theta\left(\sin\theta - \mu\cos\theta\right)}\right)^{1/2}$$

7.2 Dæmi fyrir dæmatíma þriðjudaginn 25. september

Kafli 4 í Giancoli: $2k, k \in \{1, 2, \ldots, 14\}$

7.3 Togkraftadæmi

Lítum á tvo massa m_A og m_B sem tengdir eru saman með bandi. Látum Pétur verka á massa m_A með krafti F_P. Hver er hröðun massans m_A? Hver er hröðun massans m_B? Hver er togkrafturinn í reipinu á meðan Pétur verkar á massann m_A?



Lausn: Við stillum upp kraftajöfnum fyrir báða kassana. Hröðun kassans m_A er jöfnu hröðun kassans m_B. Á kassa A verka kraftarnir $F_P, F_g,$ Þ og T. Við höfum þá að:

$$m_A \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_p - T \\ \text{Þ} - F_g \end{pmatrix}$$

Við ályktum því að $F_g = \text{Þ}$ fyrir massa A. Hinsvegar höfum við fyrir massa B að kraftajafnan verður:

$$m_B \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \\ \text{Þ} - F_g \end{pmatrix}$$

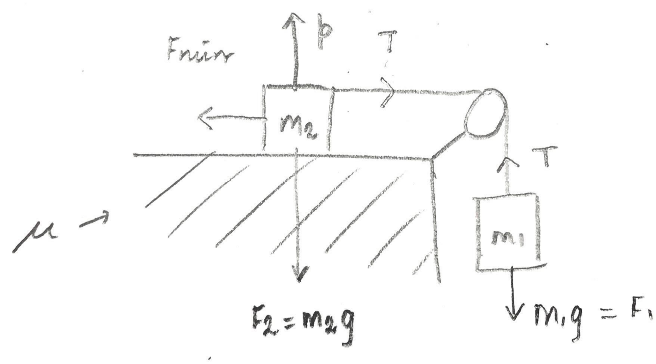
svo fyrir massa m_B er $\text{Þ} = F_g$. Leggjum saman báðar efri jöfnurnar og fáum þá að:

$$(m_A + m_B)\, a = F_P$$

svo við ályktum að $a = \frac{F_P}{m_A + m_B}$. Til þess að finna togkraftinn þá fáum við að:

$$T = m_B a = \frac{m_B}{m_A + m_B} F_P$$

7.4 Trissudæmi



Mynd 3: Látum tvo kassa, 1 og 2 með massa m_1 og m_2 vera tengda saman með bandi. Kassi 1 hangir í frjálsu falli yfir núningslausri trissu en kassi 2 liggur á borði. Finnið hröðun kerfisins ef núningsstuðullinn milli borðsins og kassa 2 er μ. Finnið togkraftinn í bandinu.

Lausn: Við stillum upp kraftajöfnum fyrir massana tvo. Höfum fyrir kassa 1 að (veljum stefnu í átt niður að gólfinu)

$$F_{\text{heild}} = m_1 a = m_1 g - T$$

en fyrir kassa 2 höfum við eftirfarandi kraftajöfnu:

$$F_{\text{heild}} = m_2 a = T - F_{\text{nún}} = T - \mu m_2 g$$

Leggjum saman jöfnurnar og fáum þá að:

$$(m_1 + m_2)a = m_1 g - \mu m_2 g$$

svo við fáum að

$$a = \frac{m_1 - \mu m_2}{m_1 + m_2} g$$

En þá getum við fundið togkraftinn með því að athuga að

$$T = -m_1(a - g) = -m_1 g \left(\frac{m_1 - \mu m_2}{m_1 + m_2} - 1 \right) = -m_1 g \left(\frac{m_1 - \mu m_2 - (m_1 + m_2)}{m_1 + m_2} \right) = \frac{(\mu + 1) m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

7.5 Lyftudæmi

Ónefndur nemandi í 5.Z ætlar að reyna að sleppa við það að þurfa að fara í lyftuna í Cösu Nova. Til þess að sleppa við það ætlar nemandinn að beita hugviti sínu til þess að giska á niðurstöðurnar sem að vondi, strangi kennarinn hans ætlar að spurja hann út úr. Hann stillir því upp kraftajöfnunum sem að verka á lyftuna og nemandann sem stendur á voginni. Látum lyftuna hafa massa M_L og látum ónefnda nemandann hafa massa m_n. Ef lyftan er á leiðinni upp er $a > 0$ (miðað við stefnu skilgreinda upp) og kraftajafnan verður fyrir lyftuna:

$$m_L a = F_{\text{lyfta}} - M_L g$$

en hinsvegar fyrir ónefnda nemandan verður jafnan

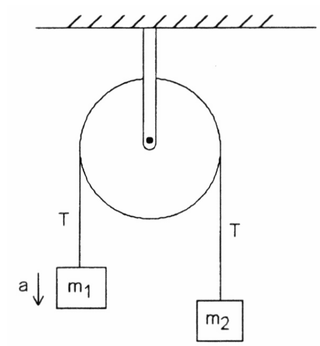
$$m_n a = Þ - m_n g$$

en þar sem að $a > 0$ þá fáum við að $Þ > m_n g$ svo að þyngd nemandans virðist aukast (samkvæmt voginni) þegar hann fer upp. En hinsvegar ef við erum á leiðinni niður þá verður kraftajafnan fyrir ónefnda nemandann (með $a > 0$ og stefnuna skilgreinda niður)

$$m_n a = m_n g - Þ$$

og ef $a > 0$ þá er $m_n g - Þ > 0$ svo við ályktum að þyngd nemandans virðist minnka á leiðinni niður. Hinsvegar á miðkaflanum þá ferðast lyftan með jöfnum hraða og þá höfum við $a = 0$ og $Þ = m_n g$ og þyngd nemandans á voginni virðist vera sú sama.

7.6 Vél Atwoods



Mynd 4: Vél Atwoods samanstendur af trissu og tveim mössum m_1 og m_2 sem tengdir eru saman með bandi yfir trissuna.

Ef við gerum ráð fyrir að $m_1 > m_2$ þá þykir okkur eðlilegt að þyngri massinn byrji að fara niður með hröðun a en sá léttari færist upp með hröðun a. Finna á hröðunina a og togkraftinn í strengnum.

Lausn: Við stillum upp kraftajöfnum fyrir massana:

$$m_1 a = m_1 g - T$$

og

$$m_2 a = T - m_2 g$$

svo við höfum þá að

$$(m_1 + m_2)a = (m_1 - m_2)g$$

sem gefur því að $a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$ en þar með höfum við að togkrafturinn sé

$$T = m_1(g - a) = m_1 g \left(1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) = m_1 g \left(\frac{m_1 + m_2 - (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}\right) = \left(\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right) g$$

7.7 Dæmi fyrir dæmatíma

Þriðjudagur

Kafli 4 í Giancoli: $11, 14, 16, 18$

Miðvikudagur

Kafli 4 í Giancoli: $23, 25, 26, 27$

Föstudagur

Kafli 4 í Giancoli: $31, 32, 33, 35$

Mánudagur

Kafli 4 í Giancoli: $39, 41, 45, 52, 53, 54, 55$

Þriðjudagur

Kafli 4 í Giancoli: $59, 60, 61, 64$

8 Yndisauki: Fermi vandamál og víddargreining

8.1 Fermi vandamál

Þann 16. júlí 1945 var fyrsta kjarnorkusprengjan sprengd í Nýju Mexíkó. Ítalski eðlisfræðingurinn og nóbelsverðlaunahafinn Enrico Fermi stóð þá í 16 km fjarlægð frá því þar sem sprengjan var sprengd. 40 sekúndum eftir að sprengjan sprakk barst höggbylgjan til hans. Þá sleppti hann mörgum litlum blaðsnifsum úr um 180 cm hæð og út frá því hvar blaðsnifsin lentu eftir höggbylgjuna mat hann sem svo að styrkur sprengjunnar hefði verið jafn mikill og 10 kílótonn af TNT. Rétta gildið reyndist vera um 20 kílótonn. Fermi dæmi ganga því iðulega út á það að nýta sér almenna þekkingu til þess að gefa gróft mat á erfiðum spurningum. Því fleiri þættir sem notaðir eru í útreikningunum því nær verður svarið réttu gildi.

Gott myndband um Fermi vandamál: `https://www.youtube.com/watch?v=0YzvupOX8Is`

8.2 Píanóstillarar í Chicago

Spurning Hversu margir píanóstillarar eru í Chicago?

Metum fjölda íbúa í Chicago sem 5.000.000. Metum sem svo að fjórða hver fjölskylda eigi píanó og að meðalfjölskylda hafi fjóra fjölskyldumeðlimi. Þ.e.a.s að 1 af hverjum 16 eigi píanó. Svo það eru 5.000.000/16 $\approx$ 300.000 píanó í Chicago. Metum sem svo að það þurfi að stilla píanó annað hvert ár og að píanóstillir sem hefur atvinnu af því að stilla píanó stilli eitt píanó á dag. Því þarf að stilla 150.000 píanó á ári. Það eru $5 \cdot 52 = 260$ vinnudagar á ári. Svo að til þess að hægt sé að stilla öll þessi píanó þarf

$$\frac{150000}{260} \approx 600 \quad \text{píanóstillara}$$

Samkvæmt Wolfram er svarið 290. Svarið okkar er því af réttri stærðargráðu. Það er einmitt það sem skiptir mestu máli í Fermi vandamálum. Að við fáum rétta stærðargráðu en ekki endilega að við fáum nákvæmlega rétt svar. Þetta er tól sem við getum beitt til þess að svara hinum ýmsu spurningum um heiminn.

8.3 Víddargreining (Dimensional Analysis)

Í eðlisfræðijöfnum þurfa víddirnar beggja megin við jafnaðarmerki að vera þær sömu. Þetta getur oft reynst vera mjög gagnlegt tól til þess að meta það hvort að svör séu rétt eða röng. En stundum er jafnvel hægt að nota víddargreiningu til þess að leiða út eðlisfræðijöfnur. Til dæmis þekkjum við núna að ef bolta er sleppt úr kyrrstöðu úr hæð h þá gildir að tíminn sem það tekur boltann að falla til jarðar er fundinn með

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \implies t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

En við hefðum líka getað sagt að t hafi einingarnar s og að til þess að smíða einingarnar s úr gefnu stærðunum g og h sem hafa einingarnar m/s^2 og m hvort um sig þá er eina lausnin $(h/g)^{1/2} = \sqrt{\frac{h}{g}}$ sem hefur einingar s.

Tökum samt eftir því að við glötum fastanum $\sqrt{2}$. Víddargreining getur nefnilega aldrei gefið okkur fastan fyrir framan lausnina. Hún gefur okkur því rétt svar upp að fasta.

Víddargreining getur líka verið gott tól til þess að meta hvort að svarið sem að við höfum fundið standist nánari athuganir. Til dæmis fengum við að hröðun massanna í vél Atwoods væri (ef $m_1 > m_2$)

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

við getum athugað hverjar víddirnar eru beggja meginn jafnaðarmerkisins (þá eru oft settir hornklofar í kringum stærðina) þannig við höfum að:

$$\underbrace{[a]}_{m/s^2} = \left[\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g\right] = \left[\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right] \underbrace{[g]}_{m/s^2}$$

svo við sjáum að stærðin $\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$ verður að vera hrein tala (þ.e.a.s. hafa engar einingar) en það gildir einmitt því einingarnar fyrir ofan strikið eru í kg en einingarnar fyrir neðan strikið líka svo þær styttast út og við fáum tölu. Því er sennilegt að þessi jafna sé rétt, eða heldur að við höfum ekki gert einhver klaufamistök þegar við vorum að leiða hana út.

Við skulum skoða eitt dæmi í viðbót. Við skulum skoða kraftinn sem stundum er nefndur miðsóknarkraftur. Hann er háður massa og hraða hlutar sem ferðast á hring með geisla r. Því getum við ritað:

$$F = m^\alpha v^\beta r^\gamma$$

þar sem að α, β og γ eru fastar. Við vitum að krafturinn F hefur einingar $[F] = \frac{kgm}{s^2}$. Við vitum að massinn m hefur einingar $[m] = kg$, að hraðinn v hafi einingar $[v] = m/s$ og að geislinn r hafi einingar $[r] = m$. Við höfum því eftirfarandi jöfnu:

$$\frac{kgm}{s^2} = (kg)^\alpha \left(\frac{m}{s}\right)^\beta (m)^\gamma$$

tökum saman liðina með og fáum:

$$kg^1 m^1 s^{-2} = kg^\alpha m^{\beta+\gamma} s^{-\beta}$$

Þetta er því jöfnuhneppi með þrem óþekktum stærðum og þrem jöfnum þ.e.a.s.

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta + \gamma = 1 \\ -\beta = -2 \end{cases}$$

Við ályktum því að $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 2, -1)$ svo að lausnin okkar er gefin með:

$$F = m^1 v^2 r^{-1} = m\frac{v^2}{r}$$

en til þess að laga þessa jöfnu þurfum við að margfalda jöfnuna á undan með óþekktum fasta (sem er aðeins unnt að finna ef maður leysir verkefnið nákvæmlega). Sá fasti reynist reyndar í þessu tilviki vera 1. Við höfum því almennt að miðsóknarkrafturinn sé gefinn með jöfnunni:

$$F = m\frac{v^2}{r}$$

9 Orka og orkuvarðveisla

Við ætlum að fresta því um stund að skoða kafla 5 í Giancoli og byrja frekar á því að skoða kafla 6 um orku. Við munum byrja á nokkrum skilgreiningum en áður en að við byrjum að skoða þær þá skulum við skoða smá pepp.

Látum bolta með massa m í hæðinni y_1 vera gefinn sem hefur hraðann v_1. Skilgreinum stærðina:

$$\underbrace{E_1}_{heildarorka} := \underbrace{\frac{1}{2}mv_1^2}_{hreyfiorka} + \underbrace{mgy_1}_{stöðuorka}$$

Lítum síðan aftur á boltan andartaki síðar þegar hann er í hæðinni y_2 með hraðann v_2. Höfum þá tilsvarandi:

$$E_2 := \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2$$

Við fullyrðum að $E_1 = E_2$ fyrir boltann! Þetta er það sem við munum kalla orkuvarðveislu síðar. Sýnum að $E_1 = E_2$ þ.e. að $E_1 - E_2 = 0$. Athugum að samkvæmt tímaóháðu jöfnunni er:

$$2g(y_1 - y_2) = v_2^2 - v_1^2 \implies y_1 - y_2 = \frac{1}{2g}\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

sem gefur okkur því að:

$$E_1 - E_2 = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_2^2) + mg(y_1 - y_2) = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_2^2) + \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = 0$$

9.1 Vinna

Látum F vera fastann kraft (eins og t.d. þyngdarkraftinn) sem verkar á hlut A. **Vinnan**, W, sem F verkar með á A er skilgreind sem margfeldi af samsíða þætti F (táknað $F_{\parallel}$) miðað við færslu A, Δs. Þ.e.a.s. við höfum:

$$W = F_{\parallel}\Delta s$$

Ef við lítum á $\vec{F}$ og $\vec{d}$ sem vigra þá getum við ritað:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = \left|\vec{F}\right|\left|\vec{d}\right|\cos\theta$$

þar sem að θ er hornið milli vigranna $\vec{F}$ og $\vec{d}$.

Ath. *SI-einingar vinnu eru $\frac{kgm^2}{s^2}$, sú stærð hefur hlotið nafnið J fyrir Joule.*

9.2 Geymnir og ógeymnir kraftar

Látum F vera fastann kraft. Við segjum að F sé **geyminn** ef summan af vinnunni við það að fara frá punkti A til punkts B og vinnunni við að fara frá punkti B til punkts A er 0 fyrir alla punkta A og B. Við segjum að F sé **ógeyminn** ef summan er ekki núll.

Dæmi um geymna krafta: þyngdarkrafturinn, gormkrafturinn, rafsegulkrafturinn.

Dæmi um ógeymna krafta: núningskrafturinn, loftmótsstaða.

9.2.1 Þyngdarkrafturinn er geyminn

Hugsum okkur að við höfum bolta með massa $5\,\text{kg}$ í hæð $y = 10\,\text{m}$ og segjum að hann falli niður í hæðina $y = 3\,\text{m}$. Þá er vinnan, W_{12}, sem þyngdarkrafturinn framkvæmir við það:

$$W_{12} = |F||d|\cos(\theta)$$

þar sem $|F| = mg = 5 \cdot 9,82 = 49{,}1\,\text{N}$, $|d| = \Delta y = |10 - 3| = 7\,\text{m}$ og $\theta = 0°$ svo vinnan er:

$$W_{12} = 344\,\text{N}$$

Athugum nú að ef boltanum væri komið úr $y = 3\,\text{m}$ hæð aftur í $y = 10\,\text{m}$ þá fengist að vinnan, W_{21} sem þyngdarkrafturinn myndi vinna við það væri:

$$W_{21} = |F||d|\cos(\theta)$$

þar sem $|F| = mg = 5 \cdot 9,82 = 49{,}1\,\text{N}$, $|d| = \Delta y = |3 - 10| = 7\,\text{m}$ og $\theta = 180°$ en þá er:

$$W_{21} = -344\,\text{N}$$

svo að $W_{12} + W_{21} = 0$. Sama röksemdarfærsla gildir almennt fyrir hlut með massa m og færslu milli hvaða tveggja punkta y_1 og y_2. Því segjum við að þyngdarkrafturinn sé geyminn.

9.2.2 Núningskrafturinn er ógeyminn

Hugsum okkur nú að við höfum kubb með massa $m = 5\,\text{kg}$ sem stendur láréttur á borði. Látum núningsstuðulinn vera $\mu = 0.2$. Látum kubbinn vera staðsettann í $x_0 = 0{,}0\,\text{m}$ og færum hann svo í $x_1 = 0{,}5\,\text{m}$. Þá er vinnan, W_{12}, sem núningskrafturinn vinnur við það að færa kubbinn frá x_1 til x_2 fengin með:

$$W_{12} = |F||d|\cos(\theta)$$

þar sem $|F| = \mu mg = 10\,\text{N}$, $|d| = |0.5 - 0.0| = 0{,}5\,\text{m}$ og hornið $\theta = 180°$ sem gefur því að:

$$W_{12} = -5\,\text{N}$$

en ef við færum nú kubbinn til baka frá $x_1 = 0{,}5\,\text{m}$ og í $x_0 = 0{,}0\,\text{m}$ þá er vinnan, W_{21}, sem núningskrafturinn vinnur við það að færa kubbinn fengin með:

$$W_{21} = |F||d|\cos(\theta)$$

þar sem $|F| = \mu mg = 10\,\text{N}$, $|d| = |0.0 - 0.5| = 0{,}5\,\text{m}$ og hornið $\theta = 180°$ sem gefur því að:

$$W_{21} = -5\,\text{N}$$

svo við ályktum að $W_{12} + W_{21} = -10\,\text{N} \neq 0$ svo núningskrafturinn er ógeyminn!

9.3 Stöðuorka

Látum A vera hlut staddann í punktinum (2) sem verður fyrir föstum, geymnum krafti F. Þá hefur hluturinn A vel skilgreinda **stöðuorku** út frá vinnunni sem það tekur að flytja A frá völdum upphafspunkti (1) í (2) þ.e. ef W_{12} táknar vinnuna sem það tekur að flytja A frá (1) til (2) þá er stöðuorka A miðað við upphafspunktinn (1) skilgreind sem:

$$U := -W_{12}$$

Ath. SI-einingar stöðuorku eru því þær sömu og fyrir vinnu þ.e. J.

9.4 Hreyfiorka

Látum A vera hlut með massa m og hraða v. **Hreyfiorka** A er skilgreind sem stærðin:

$$K := \frac{1}{2}mv^2$$

Ath. *SI-einingar hreyfiroku eru auðfundnar með víddargreiningu. Höfum:*

$$[K] = \left[\frac{1}{2}mv^2\right] = [m]\,[v]^2 = \frac{kgm^2}{s^2} = J$$

Við sjáum nú að ef á hlut verkar kraftur F_{heild} þá er vinnan:

$$W_{\text{heild}} = \vec{F}_{\text{heild}} \cdot \Delta\vec{s} = m\vec{a} \cdot \Delta\vec{s} = m\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = \Delta K$$

svo að heildarvinna fast krafts er breytingin í hreyfiorku.

9.5 Heildarorka

Þegar við tölum um heildarorku hlutarins A eða vélræna orku hlutarins A erum við að tala um summuna af hreyfiorku og stöðuorku A. Heildarorkan hefur hlotið táknið E (fyrir energy) og við skilgreinum:

$$E := K + U$$

þar sem að K er hreyfiorka A og U er stöðuorka A.

Ath. *Ljóst er að SI-einingar heildarorku eru J úr því að E er summa stærða sem hafa eininguna J.*

9.6 Vinnulögmálið og orkuvarðveisla

Gerum nú ráð fyrir að við séum með hlut A sem verður aðeins fyrir geymnum, föstum kröftum. Látum heildarorku A vera gefna með:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + U$$

Við sýnum nú að í slíku tilfelli er E fast þ.e.a.s. orkan er varðveitt. Þá er nægilegt að sýna að grafið af orkunni E sem fall af tíma t hafi hallatöluna 0 en það er gert með því að diffra E sem fall af tíma (því diffrun samsvarar hallatölu) og þá ætti grafið að hafa halltöluna 0. Fáum því:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(K + U) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 - W\right)$$

þar sem að $K = \frac{1}{2}mv^2$ og $U = -W$. En þá höfum við samkvæmt keðjureglunni að:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}\left(v^2\right) - \frac{dW}{dt} = mv\frac{dv}{dt} - \frac{dW}{dt}$$

en $\frac{dv}{dt} = a$ og $ma = F$ sem er fastur kraftur svo við höfum að:

$$\frac{dE}{dt} = vF - \frac{dW}{dt}$$

en $v = \frac{ds}{dt}$ og F er fastur kraftur svo:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(s \cdot F) - \frac{dW}{dt}$$

en $s \cdot F$ er einmitt vinnan W þ.e. $W = F \cdot s$ svo við fáum:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dW}{dt} - \frac{dW}{dt} = 0$$

En þar með höfum við sýnt að E sé fasti.

Við getum líka sýnt þetta án þess að diffra:

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{1}{2}m\frac{v_2^2 - v_1^2}{\Delta t} - \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{v_2 + v_1}{2}m\frac{v_2 - v_1}{\Delta t} - \frac{F\Delta s}{\Delta t} = \overline{v}m\overline{a} - F\overline{v} = 0$$

Eina leiðin fyrir orku til þess að sleppa út úr kerfinu er því með vinnu ógeyminna krafta eins og núningskraftsins eða loftmótstöðu eða að einhver orka losni sem varmi. Við höfum því almennt að:

$$E_1 + W = E_2$$

þar sem að $E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 + U_1$ og $E_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + U_2$ þar sem v_1 er hraði agnarinnar í upphafi en v_2 hraði hennar í lokin. U_1 er stöðuorka agnarinnar í upphafi en U_2 í lokin og W er vinna ógeyminna krafta sem verka á hlutinn á meðan hann fer frá ástandi (1) í ástand (2). Eins og stendur þekkjum við aðeins stöðuorkuna fyrir þyngdarkraftinn þ.e. $U = mgh$ þar sem h er hæðin yfir jörðu. Við munum síðar sjá fleiri geymna krafta eins og t.d. þyngdarlögmálskraftinn, gormkraftinn og finna stöðuorkuna fyrir þá krafta. Þá getur U-ið okkar orðið flóknara.

9.7 Afl

Stærðin $P = \frac{W}{\Delta t}$ kallast afl, þ.e. vinna á tímaeiningu.

9.8 Helstu jöfnur

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s} = \left|\vec{F}\right| |\Delta\vec{s}| \cos\theta$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$U = -W$$

$$E = K + U$$

$$E_1 + W = E_2$$

9.9 Dæmi fyrir dæmatíma

Mánudagur

Kafli 6 í Giancoli: 1, 3, 5, 10

Þriðudagur

Kafli 6 í Giancoli: 15, 17, 29, 31

Miðvikudagur

Kafli 6 í Giancoli: 40, 42, 44, 45

10 Gormkrafturinn

Lögmál Hookes segir að ef gormur er strektur um vegalengd x frá jafnvægisstöðunni og sleppt þá leitar hann aftur í jafnvægisstöðuna með krafti, gormkraftinum, sem lýsa má með eftirfarandi jöfnu:

$$F = -kx$$

þar sem að k er fasti sem er háður gorminum og x er fjarlægðin frá jafnvægisstöðunni. Athugum að $[k] = [F]/[x] = \frac{N}{m}$ svo að einingar gormstuðuls eru $\frac{N}{m}$. Við höfðum áður séð að ef kraftur er geyminn þá er til mætti U fyrir kraftinn þannig að heildarorkan $E = K + U$ er varðveitt. Við höfðum líka skilgreint $U = -W_{0,1}$ þar sem $W_{0,1}$ er vinnan sem það þarf til þess að koma hlut úr jafnvægisstöðu í ástand (1). Við viljum finna stöðuorkuna sem býr í gorminum þegar hann er í fjarlægð x frá jafnvægisstöðunni. En gormkrafturinn breytist þegar við færum hann fjær og fjær jafnvægisstöðunni. Við erum því ekki með fastann kraft. Við þurfum því að leggja saman örsmæðarvinnurnar sem við vinnum við það að þumlunga okkur nær stöðunni x. Segjum t.d. að við séum í stöðunni x' og að við færum okkur áfram um dx' þar sem dx' er mjög lítil tala. Þá er krafturinn um það bil fastur á þessu bili, $F = -kx'$, svo að örsmæðarvinnan sem við vinnum $W_{x',x+dx'} = -kx'dx'$. Síðan leggjum við saman þessa liði yfir allt bilið. Þetta er betur þekkt sem að tegra, höfum því að vinnan $W_{0,1}$ er gefin með:

$$W_{0,1} = \int_0^x -kx'dx' = -k\left[\frac{1}{2}(x')^2\right]_0^x = -k\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}0^2\right] = -\frac{1}{2}kx^2$$

en þar með höfum við sýnt að stöðuorka gormsins sé:

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

Föstudagur

Kafli 6 í Giancoli: 25, 34, 35, 37

11 Þyngdarlögmál Newtons

Við skulum nú skoða lögmálið sem lýsir hreyfingu himinhnattanna. Þetta er að mínu mati fegursta lögmál eðlisfræðinnar. Þyngdarlögmálið segir að krafturinn sem verkar á milli tveggja hluta með massa m_1 og m_2 í fjarlægð r frá hver öðrum er gefinn með:

$$F_G = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

þar sem að $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-}1\mathrm{s}^{-}2$ er fasti sem nefnist þyngdarlögmálsfastinn. Athugið að formerkið er aðeins til þess að segja okkur að hlutir dragast að hver öðrum.

Þyngdarlögmálskrafturinn er geyminn svo að til hans svarar mætti U. Við tökum eftir því að ef hlutirnir eru óendanlega langt í burtu frá hver öðrum þá verkar enginn þyngdarkraftur á milli þeirra. Við setjum því það sem „jafnvægisstöðuna” okkar þ.e. viðmiðunarástandið sem stöðuorkan er skilgreind eftir. Skoðum nú vinnuna sem þyngdarlögmálskrafturinn vinnur við það að færa hlut með massa m úr óendanlegri fjarlægð í fjarlægðina r frá hlut með massa M. Aftur höfum við ekki fastann kraft því þyngdarlögmálskrafturinn breytist eftir því hversu langt frá hlutirnir eru frá hver öðrum. Segjum sem svo að m sé í fjarlægðinni $r' > r$ frá M og að við færum hann nær um dr' þar sem dr' er örsmæð. Þá er þyngdarlögmálskrafturinn um það bil fastur á meðan við færum hlutinn þ.e. hann er um það bil $F_{r'} = G\frac{Mm}{(r')^2}$ á bilinu $[r', r' - dr']$ og vinnan er því $W = G\frac{Mm}{(r')^2}dr'$. Legggjum síðan saman allar þessar vinnur frá ∞ í r og fáum tegrið:

$$U = -W_{0,1} = -\int_{\infty}^{r} -G\frac{Mm}{(r')^2}dr' = GMm\int_{\infty}^{r}(r')^{-2}dr' = GMm\left[-\frac{1}{2}(r')^{-1}\right]_{\infty}^{r} = -\frac{GMm}{r}$$

svo að stöðuorka hlutar vegna þyngdarlögmálkraftsins er

$$U = -\frac{GMm}{r}$$

Heildarorka hlutarins með massa m verður því:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

Föstudagur

Kafli 5 í Giancoli: 30, 31, 32, 33

12 Hringhreyfing

Nú skulum við tala um hringhreyfingu. Við getum lýst ögn á hringhreyfingu með pólhnitum þ.e. ef ögnin hefur massa m og er á hringhreyfingu á hring með geisla r þá má lýsa staðsetningu hennar með:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta(t)) \\ r\sin(\theta(t)) \end{pmatrix}$$

þar sem að hornið er háð tíma og $\vec{r}(t)$ táknar staðsetningu agnarinnar við tímann t. Þá er hraði agnarinnar fundinn með því að taka tímaafleiðuna:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin(\theta(t))\frac{d\theta(t)}{dt} \\ r\cos(\theta(t))\frac{d\theta(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin(\theta(t))\omega(t) \\ r\cos(\theta(t))\omega(t) \end{pmatrix}$$

þar sem að $\frac{d\theta(t)}{dt}$ er hornhraði agnarinnar sem er oft táknaður $\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$. Hornhraðinn er oftast fastur í okkar umfjöllun svo $\omega(t) = \omega =$ fasti. Hornhraði er mælikvarði á það hversu hratt hlutur er að snúast þ.e. hversu langan tíma það tekur hlutinn að ferðast einn hring. Hornhraði er mældur í einingunni rad/s eða radíanar á sekúndu. Við höfum ef hornhraðinn er fastur að:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

þar sem að T er tíminn sem það tekur hlutinn að ferðast einn hring (t.d. fyrir jörðina er það $365,25$ dagar í kringum sólina).

Við fáum þá að hröðunin er gefin með:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \end{pmatrix} = -\omega^2\begin{pmatrix} r\cos(\theta(t)) \\ r\sin(\theta(t)) \end{pmatrix} = -\omega^2\vec{r}$$

svo að hröðun hlutarins er inn að miðju hringsins. Við höfum að:

$$|\vec{a}| = \left|-\omega^2\vec{r}\right| = \omega^2 r$$

ásamt

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-r\sin(\theta(t))\omega)^2 + (r\cos(\theta(t))\omega)^2} = \sqrt{r^2\omega^2\sin^2(\theta(t)) + r^2\omega^2\cos^2(\theta(t))} = \sqrt{r^2\omega^2} = r\omega$$

því bæði r og ω eru stærri en 0. En þar með höfum við að:

$$\omega = \frac{|\vec{v}|}{r}$$

á hringhreyfingu þar sem að hornhraðinn er fastur. En það gefur því að miðsóknarhröðunin $a_m := |\vec{a}| = \omega^2 r$ má einnig rita á forminu (ef $v := |\vec{v}|$:

$$a_m = \frac{v^2}{r}$$

Miðsóknarkrafturinn reynist því vera:

$$F_{\text{mið}} = m\frac{v^2}{r}$$

En pláneturnar eru á hringhreyfingu og miðsóknarkrafturinn er jafn þyngdarkraftinum sem verkar á milli hlutanna svo að:

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

sem gefur að

$$v^2 = \frac{GM}{r}$$

en þar með er fyrir hlut sem er á hringhreyfingu um annan massa M (eins og pláneturnar á ferð um sólina eða tunglið á ferð um jörðina)

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\frac{GM}{r} = G\frac{Mm}{2r}$$

en þar með verður heildarorkan samkvæmt umfjöllun í síðasta fyrirlestri:

$$E = K + U = G\frac{Mm}{2r} - G\frac{Mm}{r} = -G\frac{Mm}{2r}$$

13 Lögmál Keplers

13.1 Fyrsta lögmál Keplers

Fyrsta lögmál Keplers segir að:

> *Brautir reikistjarnanna eru sporbaugar með sólu í öðrum brennipunktinum.*

Við munum reyna að sanna þetta á næstu önn! Það er reyndar frekar erfitt.

13.2 Annað lögmál Keplers

Annað lögmál Keplers segir að:

> *Línan frá sólu að reikistjörnu fer á hverju tímabili yfir jafnstórt flatarmál.*

Við munum líka reyna að sanna þetta á næstu önn! Það er reyndar aðeins auðveldara en að sanna fyrsta lögmálið.

13.3 Þriðja lögmál Keplers

Þriðja lögmál Kepelers segir að:

> *Lengd hálfs langáss (a) sporbaugsins sem reikistjarna fer eftir í þriðja veldi er í réttu hlutfalli við umferðartíma (T) reikistjörnunnar um sólu í öðru veldi*

sem má einnig rita stærðfræðilega sem:

$$\frac{a^3}{T^2} = k = \text{fasti}$$

Við skulum nú leiða út þriðja lögmál Keplers fyrir hringhreyfingu. Höfum samkvæmt þyngdarlögmáli Newtons að:

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

Nýtum okkur að $v = \omega r$ og að $\omega = \frac{2\pi}{T}$ þar sem að T er umferðartíminn. Þá höfum við að $v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$:

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

en það gefur því að

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = \text{fasti}$$

14 Ýtarefni um heimsmynd okkar (smá sagnfræði)

Tímalína

- Geisli jarðarinnar fundinn (Eratosþenes 200 f. Kr.)
- Lögmál Keplers (1609-1619)
- Þyngdarlögmál Newtons (1689)
- Þyngdarlögmálsfastinn (Cavendish 1797)
- Stjarnfræðieiningin (Þverganga Venusar 1769)
- Massi jarðarinnar (Cavendish 1797)
- Massi sólarinnar (Þverganga Venusar (1761, 1769, 1874, 1882, 2004, 2012, 2117, 2125))
- Vegalengdin til tunglsins (Cavendish 1797)
- Ljóshraðinn (Ole Rømer 1676)

14.1 Geisli jarðarinnar

Til að byrja með skulum við lýsa aðferð til að finna geisla jarðarinnar.

Aðferð 1:

(1) Leggjast niður á jörðina og bíða eftir sólsetri (helst við höfn).

(2) Þegar síðasti sólargeislinn hverfur þá ræsir maður skeiðklukkuna sína, stendur upp og bíður eftir næsta sólsetri.

(3) Eftir að sólin hverfur í annað sinn þá stöðvar maður skeiðklukkuna.

Segjum að skeiðklukkan sýni tímann τ. Við getum þá reiknað hornið sem jörðin snerist um á þeim tíma með:

$$\theta R_J = \frac{2\pi R_J}{T}\tau$$

þar sem að T er tíminn sem það tekur jörðina að snúast einn hring. En þar með er:

$$\theta = \frac{2\pi\tau}{T}$$

mælt í radíönum. En þar með fáum við að ef h er mismunurinn á augnhæð einstaklingsins sem framkvæmdi tímamælingarnar þá gildir að:

$$(R+h)\cos\theta = R$$

með því að einangra fyrir R höfum við að:

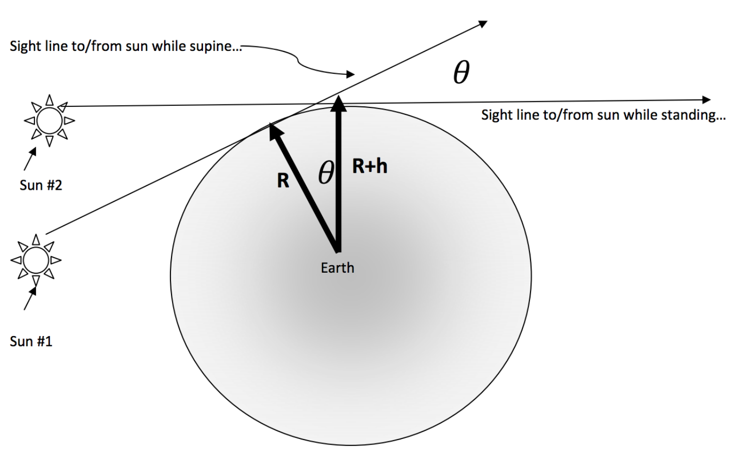
$$R = \frac{h\cos\theta}{1-\cos\theta}$$

og með því að nota að fyrir lítil horn θ gildir að:

$$\sin\theta \approx \theta, \qquad \cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$$

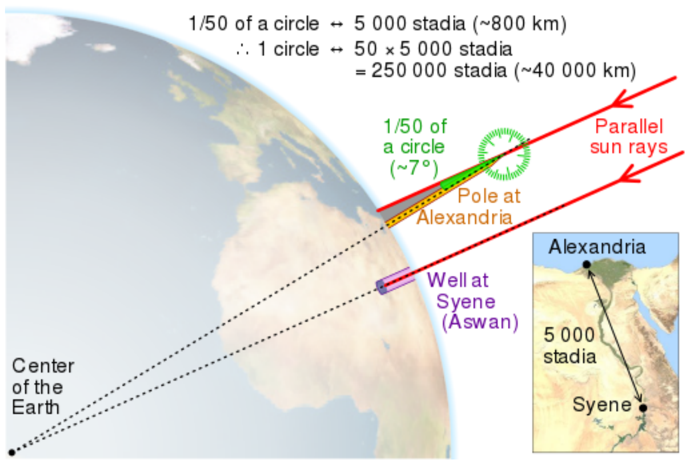
svo að við getum einnig ritað:

$$R \approx \frac{2h}{\theta^2} = \frac{hT^2}{2\pi^2\tau^2}$$



Aðferð 2 (Eratosþenes 200 f.Kr)

Sagan segir að Eratosþenes (sem var bókasafnsvörður á bókasafninu í Alexandríu) hafi lesið sér til um að í Síennu á sumarsólstöðum væri hægt að líta niður í brunn um hádegi og sjá sólina endurvarpast af vatninu niðri í brunninum. Hann ályktaði því að sólin hlyti að vera beint yfir höfði í Síennu á sumarsólstöðum. En þá, ef jörðin væri kúlulaga þá ætti sólin að varpa skugga á jörðina í Alexandríu á sama tíma. Þannig á næstu sumarsólstöðum þá festi Eratosþenes spýtu niður í jörðina hornrétt á yfirborðið í Alexandríu. Um hádegisbil þá mældi hann skuggann sem sólin varpaði á spýtuna og reiknaði þá að hornið sem sólin kæmi niður undir væri um 7°. En ef sólin er mjög langt í burtu þá koma geislar hennar samsíða inn á jörðina svo að hornið er það sama og hornið milli borganna á yfirborði jarðarinnar. En þá má með einfaldri hornafræði finna geisla jarðarinnar.



14.2 Finna þyngdarlögmálsfastann

Þar sem að þyngdarlögmálskrafturinn er svo veikur er mjög erfitt að mæla fastann G. Það var hinsvegar gert fyrst árið 1797 af Henry Cavendish. Þið hafið ekki lært alveg nógu mikið til þess að við getum lýst Cavendish tilrauninni en þið munið geta það á næstu önn. Þá ætlum við að gera þá tilraun! Til fróðleiks þá getiði skoðað eftirfarandi myndband:

`https://www.youtube.com/watch?v=jkjqrlYOW_0`

14.3 Massi jarðarinnar

Eftir að við höfum fundið þyngdarlögmálsfastann G þá verður frekar auðvelt að finna massa jarðarinnar því við höfum samkvæmt þyngdarlögmáli Newtons að:

$$G\frac{mM_J}{R_J^2} = mg$$

en það gefur því að:

$$M_J = \frac{g}{GR_J^2} = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$$

þið ákvörðuðuð t.d. g í tilraun um daginn (önnur aðferð til að mæla g er að nota vél Atwoods eða pendúl).

14.4 Vegalengdin til tunglsins

Eftir að við höfum fundið massa jarðarinnar þá höfum við einfaldlega með lögmálum Keplers að:

$$\frac{r_t^3}{T^2} = \frac{GM_J}{4\pi^2}$$

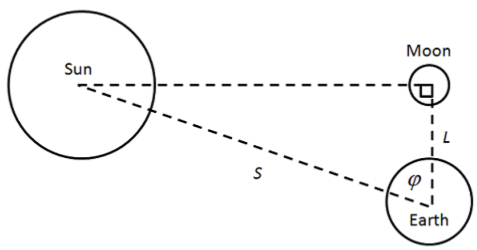
þar sem að M_J er massi jarðarinnar, r_t er vegalengdin til tunglsins frá jörðinni og $T = 27,3$ dagar er umferðartími tunglsins á braut sinni um jörðina. En þá fáum við að:

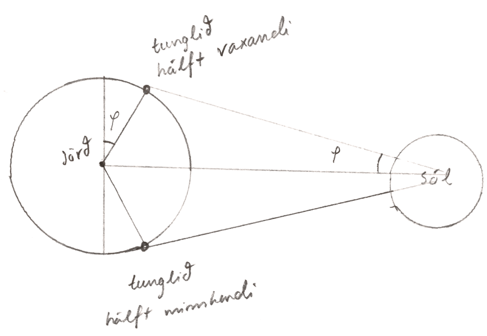
$$r_t = \left(\frac{GM_J T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 3{,}8 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$$

14.5 Stjarnfræðieiningin

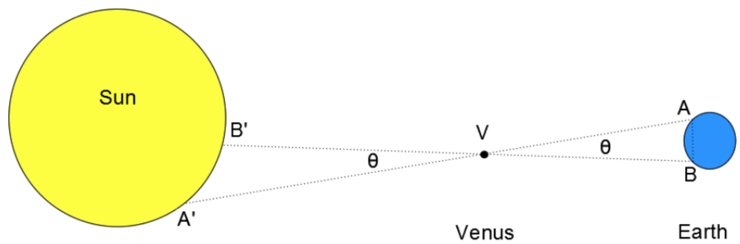
Með lögmálum Keplers var hægt að finna hlutföllin milli allra plánetanna. En enginn vissi af hvaða stærð þau voru. Þekkt var að Júpíter væri 5.2 sinnum lengra frá sólinni en jörðin. Hinsvegar var ekki þekkt hversu langt frá sólinni jörðin væri. Sú vegalengd var fyrst fundin nákvæmlega með þvergöngu Venusar. Áður hafði Aristarkos frá Samos fundið leið til þess að finna vegalengdina 200 árum fyrir Krist).

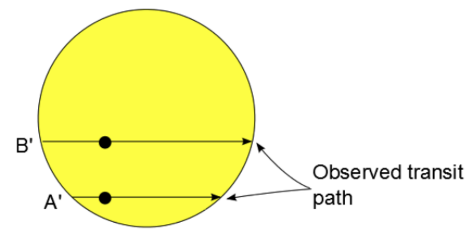
Aðferð 1 (Aristarkos frá Samos)

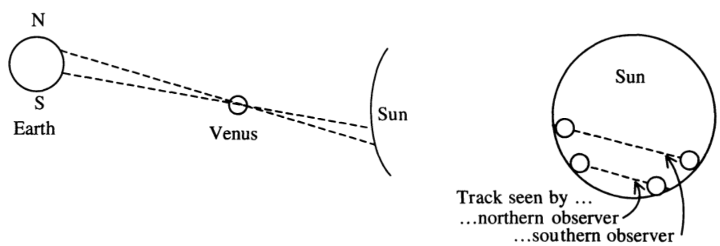


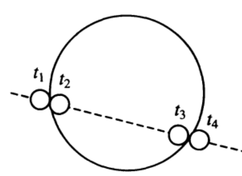


Aðferð 2 (Edmond Halley)









14.6 Ljóshraðinn (Ole Rømer)

Danska stjörnufræðingnum Ole Rømer tókst árið 1676 að mæla hraða ljóssins með þvergöngu Íó fyrir Júpíter.

Þriðjudagur

Kafli 5 í Giancoli: 53, 54, 59, 60

Miðvikudagur

Kafli 5 í Giancoli: 1,3,5,7,9,11,13

15 Skriðþungi

Stærðin

$$p = mv$$

þar sem m er massi hlutar og v er hraði hlutar nefnist skriðþungi.

15.1 Skriðþungavarðveisla

Skriðþungavarðveisla er afleiðing af þriðja lögmáli Newtons og segir að fyrir heildarkerfi gildi að:

$$p_{\text{fyrir}} = p_{\text{eftir}}$$

eða með öðrum orðum: "Heildarskriðþungi kerfis sem verður ekki fyrir utanaðkomandi krafti er fasti."

15.2 Gerðir af árekstrum

Við höfum þrjár gerðir af árekstrum:

Alfjaðrandi

Þá er hreyfiorka kerfisins varðveitt.

Ófjaðrandi

Þá er hluti af hreyfiorku kerfisins varðveittur en hinn hlutinn tapast í varma og annað.

Fullkomlega ófjaðrandi

Ef tveir hlutir festast saman við árekstur þá segjum við að áreksturinn sé fullkomlega ófjaðrandi.

Þriðjudagur?

Kafli 5 í Giancoli: 65, 67, 68, 71, 75

Miðvikudagur?

Kafli 6 í Giancoli: 25, 34, 35, 37

Föstudagur?

Kafli 7 í Giancoli: 7, 25, 27, 36, 41, 42