Fyrirlestrar í eðlisfræði

1 Snúningar

Snúningar eru flóknir og erfiðir. Stundum meika þeir ekki einu sinni sense. Sjá til dæmis `https://www.youtube.com/watch?v=1n-HMSCDYtM` eða `https://youtu.be/QtP_bh2lMXc?t=55`. Það sem er samt þægilegt við snúninga er að við höfum næstum alltaf hliðstæðu við eitthvað sem við gerðum fyrir áramót.

1.1 Hornstaða, hornhraði og hornhröðun

Hornstaða er táknuð með θ og er mæld í radíönum. Það er oft þægilegt að vinna með bogalengd b (sem er lengdin sem er farin meðfram hringnum). Bogalengd er líka stundum táknuð með s í stað b. Þá höfum við eftirfarandi samband:

$$b = r\theta, \quad \text{sem er stundum táknað} \quad s = r\theta \tag{1}$$

sem passar augljóslega þegar $\theta = 2\pi$ því þar er bogalengdin jöfn ummáli hringsins, U, og því fæst hin vel þekkta jafna fyrir ummáli hrings $U = 2\pi r$. Hornhraði og hornhröðun eru síðan skilgreind líkt og hraði og hröðun með tímaafleiðum af hornstöðu. Við táknum hornhraða með ω og hornhröðun með α og höfum

$$\theta := \frac{s}{r}, \quad \omega := \frac{d\theta}{dt}, \quad \alpha := \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{2}$$

Við höfum síðan eftirfarandi jöfnur (sem eru náskyldar jöfnunum fyrir hreyfingu í eftir beinni línu) sem lýsa sambandinu milli hornstöðu, hornhraða og hornhröðunnar (jöfnurnar gilda aðeins ef hornhröðunin er föst).

Línuleg hreyfing	**Snúningshreyfing**
$v = \frac{ds}{dt}$	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$	$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$
$s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$2a\Delta s = v^2 - v_0^2$	$2\alpha\Delta\theta = \omega^2 - \omega_0^2$

Tafla 1: Hliðstæðar jöfnur fyrir snúning og línulega hreyfingu.

Við höfum síðan loks eftirfarandi samband milli línulegs hraða og hornhraða:

$$v = \omega r \tag{3}$$

Þetta fæst með diffrun:

$$v := \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{ds}{\frac{1}{r}ds}\omega = r\omega$$

þar sem við höfum notað að $\omega := \frac{d\theta}{dt}$ og að $\theta := \frac{s}{r}$ svo $d\theta = \frac{ds}{r}$. Þið hafið meira að segja áður notað þetta samband. Þetta er í raun sama jafna og

$$v = \frac{2\pi r}{T} \tag{4}$$

því að ω má einnig rita

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{5}$$

eða ef við kynnum til sögunnar tíðni sem er táknuð með f og skilgreind þannig að $f = \frac{1}{T}$ þá getum við ritað:

$$\omega = 2\pi f \tag{6}$$

Við getum síðan líka fundið sambandið milli hornhröðunarinnar og hröðunarinnar. Athugum að:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{dt} = r\alpha$$

þar sem við höfum notað að $\alpha := \frac{d\omega}{dt}$ og $v = r\omega$ svo $dv = rd\omega$ svo við höfum:

$$a = r\alpha \tag{7}$$

Takið samt eftir að þetta er línulega hröðunin samsíða hjólinu sem snýst en ekki hornrétta hröðunina á hjólið (við höfðum þegar skoðað þá hröðun - miðsóknarhröðunina). Því væri í raun nákvæmara að rita:

$$a_{\parallel} = r\alpha, \qquad a_{\perp} = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \tag{8}$$

1.2 Massamiðja

Það er auðvelt að finna massamiðju kerfis ef við höfum marga punktmassa. Gerum t.d. ráð fyrir að við höfum n punktmassa með massa $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sem eru í staddir í $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Þá er massamiðjan táknuð með x_{cm} og um hana gildir að:

$$x_{\text{cm}} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_n m_n}{M} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} x_i m_i \tag{9}$$

þar sem að $M = m_1 + m_2 + \ldots m_n$ er heildarmassi kerfisins. Ef við ætluðum t.d. að finna massamiðjuna í 3. víðu rúmi myndum við reikna y_{cm} og z_{cm} með sama hætti og x_{cm}. Hinsvegar ef við ætlum að finna massamiðju hluta sem eru samanhangandi t.d. eins og diskur, spýta eða bók þá vandast málin.

1.3 Rúlla án þess að renna

Við segjum að hlutur rúlli án þess að renna ef að

$$v_{cm} = r\omega \tag{10}$$

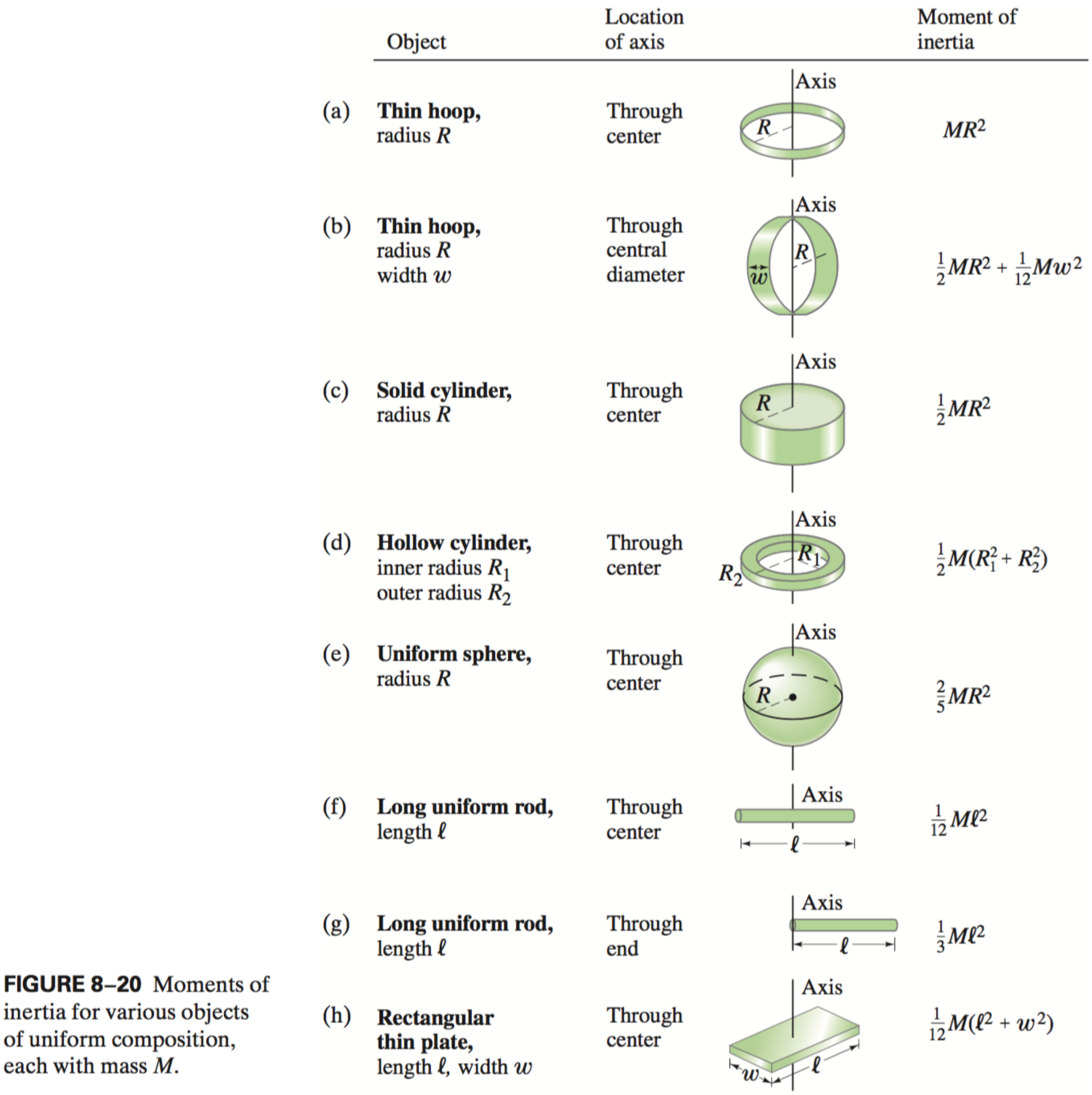
Takið eftir að þetta er ekki það sama og $v = r\omega$ sem við höfðum sýnt hér áður. Þessi jafna tengir hraða massamiðjunnar við hornhraða hlutarins.

1.4 Hverfitregða

Hverfitregða hlutar er táknuð með I og er hliðstæða massa hlutarins nema fyrir snúningshreyfingu. Hverfitregðan táknar það hversu erfitt er að snúa hlutnum um ákveðinn ás. Hlutir hafa mismunandi hverfitregðu eftir því hversu massamiklir þeir eru og hvernig legu þeir hafa. Ef hluturinn er óreglulegur í laginu getur verið mjög erfitt að finna hverfitregðu hlutarins. Á mynd 1 má sjá hverfitregður ýmissa einfaldra hluta. Fyrir punktmassa (einfaldasti hluturinn) er hverfitregða hlutarins gefin með:

$$I = mr^2 \tag{11}$$

þar sem m er massi hlutarins og r er fjarlægðin frá ásnum sem snúið er um. Því er ljóst að hverfitregða hefur SI-einingar kgm^2.



Mynd 1: Mynd tekin úr Giancoli. Tafla með hinum ýmsu hverfitregðum einfaldra hluta.

1.5 Regla Steiners (Parallel Axis Theorem)

Regla Steiners segir að ef við höfum þegar reiknað hverfitregðu hlutar um ás sem liggur í gegnum massamiðju hlutarins þá er auðvelt að finna hverfitregðu hlutarins um ás sem er samsíða þeim ás. Þá gildir einmitt að:

$$I = I_{\text{cm}} + md^2$$

þar sem að I_{cm} er hverfitregðan um ás sem liggur í gegnum massamiðjuna, I, er hverfitregðan um ás sem liggur samsíða, m er massi hlutarins og d er fjarlægðin milli ásanna.

1.6 Kraftvægi

Kraftvægi er það sem veldur því að hlutir snúast. Kraftvægi er í raun vigur og er táknur með $\vec{\tau}$. Stærð kraftvægisins er oft táknuð með τ sérstaklega ef stefna kraftvægisins er auðfundin. Til þess að tala um kraftvægi er nauðsynlegt að taka fram um hvaða ás er snúið. Um kraftvægið gildir þá að:

$$\vec{\tau} := \vec{r} \times \vec{F} \tag{12}$$

þar sem að $\vec{r}$ er fjarlægð hlutsins frá ásnum em snúið er um, $\vec{F}$ er krafturinn sem notaður er til þess að snúa hlutnum. Ef φ er hornið milli $\vec{r}$ og $\vec{F}$ þá gildir að:

$$\tau = rF \sin\varphi \tag{13}$$

Við höfum síðan einnig að:

$$\tau_{\text{heild}} = I\alpha \tag{14}$$

þar sem að α er hornhröðun hlutarins. Þar með höfum við hliðstæðu við 2. lögmál Newtons:

$$\tau_{\text{heild}} = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n = I\alpha \tag{15}$$

Það gæti verið eðlilegt á þessu stigi málsins að skýra það hvernig krossfeldi vigra er reiknað (þetta er nefnilega ekki það sama og innfeldi vigra). Til skýringar látum við því:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

Krossfeldi vigranna $\vec{r}$ og $\vec{F}$ (röðin skiptir máli!) er vigurinn $\vec{r} \times \vec{F}$ sem er skilgreindur þannig að:

$$\vec{r} \times \vec{F} := \begin{pmatrix} yF_z - zF_y \\ zF_x - xF_z \\ xF_y - yF_x \end{pmatrix}$$

1.7 Hverfiþungi

Hliðstæða skriðþungans $p = mv$ er hverfiþunginn:

$$L = I\omega \tag{16}$$

Eins og skriðþungi er hverfiþungi varðveittur þetta þýðir að:

$$L_{\text{fyrir}} = L_{\text{eftir}} \tag{17}$$

Hverfiþungi kerfis er varðveittur ef að engin utanaðkomandi kraftvægi verka á kerfið. Eins og kraftvægi er hverfiþungi vigur og einnig má reikna hverfiþungann með

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{18}$$

og þá ef φ er hornið milli $\vec{r}$ og $\vec{p}$ þá er:

$$L = rp \sin\varphi \tag{19}$$

Síðan er auðvelt að sýna eftirfarandi með diffrun:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \vec{p}}_{=0} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

því $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, þ.e.a.s. við höfum:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \tag{20}$$

1.8 Hreyfiorka snúnings

Þegar hlutir snúast hafa þeir bæði hreyfiroku vegna þess hversu hratt hluturinn er að ferðast og hreyfiorku vegna þess hve hratt hluturinn er að snúast þessu má lýsa þannig að hreyfiorka hlutarins er gefin með:

$$K = K_{\text{hreyfi}} + K_{\text{snú}} = \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2}I_{\text{cm}}\omega^2$$

ef hlutur rúllar án þess að renna þá höfum við að $v_{\text{cm}} = r\omega$ og því $\omega = \frac{v_{\text{cm}}}{r}$ og í því sértilfelli gildir að:

$$K = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v_{cm}}{r}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(M + \frac{I}{r^2}\right)v_{cm}^2$$

1.9 Samantekt

Línuleg hreyfing	**Snúningshreyfing**
$v = \frac{ds}{dt}$	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$	$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$
$s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$2a\Delta s = v^2 - v_0^2$	$2\alpha\Delta\theta = \omega^2 - \omega_0^2$

Tafla 2: Hliðstæðar jöfnur fyrir snúning og línulega hreyfingu.

Línuleg hreyfing	**Snúningshreyfing**
$F = ma = \frac{dp}{dt}$	$\tau = I\alpha = rF\sin\varphi = \frac{dL}{dt}$
$F_{\text{heild}} = F_1 + \ldots + F_n$	$\tau_{\text{heild}} = \tau_1 + \ldots + \tau_n$
$p = mv$	$L = I\omega = rp\sin\varphi$
$K = \frac{1}{2}mv^2$	$K_{\text{snú}} = \frac{1}{2}I\omega^2$

Tafla 3: Hliðstæðar jöfnur fyrir krafta og kraftvægi sem og skriðþunga og hverfiþunga.

1.10 Dæmi fyrir dæmatíma

Þriðjudagur

Kafli 8 í Giancoli: 2, 3, 5, 11

Miðvikudagur

Kafli 8 í Giancoli: 17, 20, 21, 23

Föstudagur

Kafli 8 í Giancoli: 30, 31, 32, 39

Mánudagur

Kafli 8 í Giancoli: 42, 43, 27, 29, 44, 45, 49, 51

Þriðjudagur

Kafli 8 í Giancoli: 53, 54, 57, 61, 66

Miðvikudagur

Kafli 9 í Giancoli: 12, 13, 14, 15

Föstudagur

Kafli 9 í Giancoli: 17, 18, 25, 28, 35

2 Þrýstingur og uppdrif

2.1 Eðlismassi

Eðlismassi hlutar er táknaður með ρ og skilgreindur sem massi hlutarins á rúmmálseiningu þ.e.

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{21}$$

Efni	**Eðlismassi** [kg/m^3]
Ál	$2{,}7 \cdot 10^3$
Járn	$7{,}8 \cdot 10^3$
Stál	$7{,}8 \cdot 10^3$
Kopar	$8{,}9 \cdot 10^3$
Blý	$11{,}3 \cdot 10^3$
Gull	$19{,}3 \cdot 10^3$
Kvikasilfur	$13{,}6 \cdot 10^3$
Andrúmsloft	$1{,}29 \cdot 10^3$
Blóð	$1{,}05 \cdot 10^3$
Sjór	$1{,}025 \cdot 10^3$
Ís	$0{,}917 \cdot 10^3$
Vatn (4 °C)	$1{,}000 \cdot 10^3$
Gufa (100 °C)	$0{,}598 \cdot 10^3$

Tafla 4: Eðlismassar nokkurra efna við 0 °C og 1 atm (nema þar sem annað er tekið fram)

2.2 Þrýstingur

Þrýstingur og kraftur eru náskyld fyrirbæri. Þrýstingur er táknaður með P og skilgreindur sem kraftur á flatareiningu, þ.e.

$$P := \frac{F_\perp}{A}$$

þar sem $F_\perp$ er krafturinn sem verkar þvert á yfirborðsflatarmálið A. Við sjáum að víddir þrýstings eru N/m^2 en sú stærð hefur fengið heitið pascal og er táknuð með Pa.

2.3 Þrýstingur í vökvum

Skoðum vökva með eðlismassa $\rho_{\text{vökvi}}$. Við gerum ráð fyrir að vökvinn sé um það bil kyrr. Skoðum hluta vökvans af þverskurðarflatarmáli A og hæð h. Látum efri brún kassans sem við skoðum vera við dýpt d_1 en neðri brúnina vera við dýpt d_2. Þá er þrýstingurinn vegna loftsúlunnar og vökvans sem liggur fyrir ofan þverskurðarflatarmálið fenginn með:

$$P_{\text{ofan}} = \frac{\rho_{\text{loft}} g z A}{A} + \frac{\rho_{\text{vökvi}} g d_1 A}{A} = \rho_{\text{loft}} g z + \rho_{\text{vökvi}} g d_1$$

Við köllum stærðina $\rho_{\text{loft}} g z =: P_0$ **staðalloftþrýsting** og stærðina z köllum við **hæð loftsúlunnar**. Eins er auðvelt að sjá að:

$$P_{\text{neðan}} = \frac{\rho_{\text{loft}} g z A}{A} + \frac{\rho_{\text{vökvi}} g d_1 A}{A} = \rho_{\text{loft}} g z + \rho_{\text{vökvi}} g d_2$$

og því er ljóst að þrýstingurinn vex línulega með aukinni dýpt. Við höfum því að:

$$\Delta P = \rho_{\text{vökvi}} g \Delta d$$

sem er þekkt sem lögmál Pascals. Í raun höfum við sýnt mun almennari niðurstöðu heldur en lögmál Pascals. Við höfum sýnt að þrýstingurinn P við dýpið d í vökva með eðlismassa $\rho_{\text{vökvi}}$ er gefinn með:

$$P = P_0 + \rho_{\text{vökvi}} g d$$

2.4 Uppdrif og Lögmál Arkímedesar

Hugsum okkur nú að við dýfum kassa úr efni með eðlismassa ρ_{hlutur} með flatarmál A, hæð h og rúmmál $V = Ah$ í vökva með eðlismassa $\rho_{\text{vökvi}}$. Þá er ljóst að á neðra borð kassans verkar meiri kraftur vegna þrýstingsins heldur en á efra borðið þar sem að þrýstingurinn er meiri neðar í vökvanum. Þessi kraftur nefnist uppdrif og er táknaður með F_{upp}. Við höfum því að:

$$\begin{aligned} F_{\text{upp}} &= F_{\text{botn}} - F_{\text{toppur}} \\ &= A(P_{\text{botn}} - P_{\text{toppur}}) \\ &= A\Delta P \\ &= \rho_{\text{vökvi}} g \Delta d A \\ &= \rho_{\text{vökvi}} V_{\text{hlutur}} g \end{aligned}$$

þar sem við höfum notað að $\Delta d = h$. Við endum því með lögmál Arkímedesar sem segir einmitt að:

$$F_{\text{upp}} = \rho_{\text{vökvi}} V_{\text{hlutur}} g$$

eða með öðrum orðum: "Sérhver hlutur sem sökkt er að hluta til eða alveg í vökva léttist um það sem nemur þyngd þess vökva sem hann ryður frá sér."

2.5 Lögmál Pascals

Lögmál Pascals segir að ef utanaðkomandi þrýstingur verkar á vökva þá eykst þrýstingurinn á sérhverjum öðrum stað vökvans jafn mikið. Með öðrum orðum ef að við beitum krafti F_{inn} til að breyta þrýstingnum á ákveðnum stað þá höfum við:

$$P_{\text{inn}} = \frac{F_{\text{inn}}}{A_{\text{inn}}} = \frac{F_{\text{út}}}{A_{\text{út}}} = P_{\text{út}}$$

Þetta er líka stundum ritað:

$$\frac{F_{\text{inn}}}{F_{\text{út}}} = \frac{A_{\text{inn}}}{A_{\text{út}}}, \qquad \text{eða} \qquad \frac{F_{\text{út}}}{F_{\text{inn}}} = \frac{A_{\text{út}}}{A_{\text{inn}}}$$

2.6 Dæmi fyrir dæmatíma

Þriðjudagur

Kafli 10 í Giancoli: 24, 25, 26, 31, 77, 87

Mánudagur

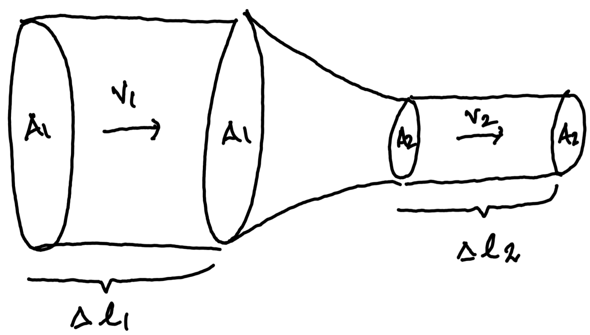
Kafli 10 í Giancoli: 9, 13, 16, 18, 69, 71

3 Inngangur að straumfræði

Í eftirfarandi umfjöllun munum við skoða flæði vökva. Við munum gera ráð fyrir að vökvinn sem við skoðum sé **ósamþjappanlegur** en það þýðir að eðlismassi vökvans, $\rho(\vec{r}, t) = \rho$, er fasti bæði sem fall af staðsetningu og tíma.

3.1 Samfellujafnan

Samfellujafnan segir í grófum dráttum að það sem fer inn þarf að hleypa jafn miklu út því annars safnast fyrir vatn á ákveðnum stað. Við skoðum því uppstillingu eins og á myndinni hér fyrir neðan. Lítum á sneið úr pípu með þverskurðarflatarmál A_1 af lengd $\Delta\ell_1$ þar sem að vökvinn með eðlismassa ρ flæðir um með hraðanum v_1. Eins skoðum við aðeins síðar í pípunni sneið með þverskurðarflatarmál A_2 af lengd $\Delta\ell_2$ þar sem að vökvinn hefur eðlismassa ρ og flæðir um með hraðanum v_2.



Til þess að það sé ekki að safnast fyrir vatn einhversstaðar þá þarf að gilda að:

$$\rho A_1 \Delta\ell_1 = \rho A_2 \delta\ell_2$$

ef við deilum í gegn með Δt þá sjáum við að $v_1 = \frac{\Delta\ell_1}{\Delta t}$ og $v_2 = \frac{\Delta\ell_2}{\Delta t}$ þegar við förum að skoða lítil bil $\Delta\ell_1$ og $\Delta\ell_2$ ásamt örtíma Δt. Því höfum við (því eðlismassinn styttist út)

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

sem kallast **samfellujafnan**.

3.2 Bernoulli-jafnan

Við miðum áfram við myndina að ofan. Við höfum að vinnan sem að vökvinn vinnur við það að fara vegalengdina $\Delta\ell_1$ er gefinn með:

$$W_1 = F_1 \Delta\ell_1 = P_1 A_1 \Delta\ell_1$$

og eins fyrir seinni vökvan höfum við að:

$$W_2 = F_2 \Delta\ell_2 = P_2 A_2 \Delta\ell_2$$

En þar með höfum við samkvæmt orkuvarðveislu:

$$W_1 + U_1 + K_1 = W_2 + U_2 + K_2$$

en það þýðir þá að:

$$P_1 A_1 \Delta\ell_1 + \rho A_1 \Delta\ell_1 g h_1 + \frac{1}{2}\rho A_1 \Delta\ell_1 v_1^2 = P_2 A_2 \Delta\ell_2 + \rho A_2 \Delta\ell_2 g h_2 + \frac{1}{2}\rho A_2 \Delta\ell_2 v_2^2$$

þar sem að h_1 og h_2 tákna hæðina yfir þeim punkti þar sem stöðuorkan er sögð vera núll. Deilum nú í gegn með Δt og berum kennsl aftur á stærðina $v_1 = \frac{\Delta \ell_1}{\Delta t}$ og $v_2 = \frac{\Delta \ell_2}{\Delta t}$ en því höfum við að:

$$P_1 A_1 v_1 + \rho A_1 v_1 g h_1 + \frac{1}{2}\rho A_1 v_1 v_1^2 = P_2 A_2 v_2 + \rho A_2 v_2 g h_2 + \frac{1}{2}\rho A_2 v_2 v_2^2$$

en við notum svo að samkvæmt samfellujöfnunni er $A_1 v_1 = A_2 v_2$ (sem við styttum því út) svo við höfum að:

$$P_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

sem er oft ritað:

$$P + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{fasti}$$

sem kallast **Bernoulli-jafnan**. Hún er í raun ekkert nema orkuvarðveisla fyrir vökva. Ef vökvinn er **samþjappanlegur** það er að segja ef eðlismassi vökvans er ekki alls staðar sá sami þá getum við fengið almennari Bernoulli-jöfnu. Hún gildir fyrir **kjörvökva** en það þýðir að eðlismassi vökvans er háður þrýstingnum.

3.3 Dæmi fyrir dæmatíma

Þriðjudagur

Kafli 10 í Giancoli: 39, 44, 47, 48, 51, 86

4 Diffrun og tegrun (Yndisauki)

4.1 Helstu reiknireglur um diffrun

Eftirfarandi eru helstu reiknireglur um diffrun:

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{d}{dx}(f(x)), \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) + \frac{d}{dx}(g(x))$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = g(x)\frac{d}{dx}(f(x)) + f(x)\frac{d}{dx}(g(x))$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\frac{d}{dx}(f(x)) - f(x)\frac{d}{dx}(g(x))}{(g(x))^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left((f \circ g)(x)\right) = \frac{df}{dx}(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx}(x)$$

Síðan er gott að kunna að diffra eftirfarandi föll:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}, \quad \frac{d}{dx}(e^x) = e^x, \quad \frac{d}{dx}(\cos(x)) = -\sin(x), \quad \frac{d}{dx}(\sin(x)) = \cos(x), \quad \frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}$$

4.2 Helstu reiknireglur um tegrun

Eftirfarandi eru helstu reiknireglur um tegrun:

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$$

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int f'(x)dx = f(x)+k$$

$$\int f(x)g(x)dx =$$

Tegrun helstu falla er síðan eftirfarandi:

$$\int e^x dx = e^x + k, \qquad \int \cos(x)dx = \sin(x)+k, \qquad \int \sin(x)dx = -\cos(x)+k$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+k, \qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln(x)+k$$

4.3 Diffurhax Feynmans

Eftirfarandi er öflug aðferð til þess að reikna afleiðu falla á heldur flóknu formi eins og t.d.

$$f(x) = \frac{\sin^3(x)\sqrt{e^{x+x^2}}}{(x^2+1)^{1/3}} \tag{22}$$

Aðferðin byggir á því að taka ln báðum megin jafnaðarmerkisins. Fáum:

$$\ln(f(x)) = 3\ln(\sin(x)) + \frac{1}{2}(x+x^2) - \frac{1}{3}\ln\big(x^2+1\big) \tag{23}$$

Athugum að samkvæmt keðjureglunni er:

$$\frac{d}{dx}\ln(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)} \tag{24}$$

svo að með því að diffra jöfnu (23) báðum meginn við jafnaðarmerkið fæst:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{3\cos(x)}{\sin(x)} + \frac{1}{2} + x - \frac{2x}{3(x^2+1)}$$

Höfum því að

$$f'(x) = f(x)\left[\frac{3\cos(x)}{\sin(x)} + \frac{1}{2} + x - \frac{2x}{3(x^2+1)}\right]$$

þ.e.

$$f'(x) = \frac{\sin^3(x)\sqrt{e^{x+x^2}}}{(x^2+1)^{1/3}}\left[\frac{3\cos(x)}{\sin(x)} + \frac{1}{2} + x - \frac{2x}{3(x^2+1)}\right]$$

5 Diffurjöfnur (Yndisauki)

Diffurjöfnur koma alls staðar fyrir í eðlisfræði. Reyndar eru allar kraftajöfnur í rauninni ekkert nema diffurjöfnur. Það er því mjög eðlilegt að við viljum kunna að leysa diffurjöfnur. Þó er eiginlega mikilvægara að átta sig á því hvernig við breytum kraftajöfnum í diffurjöfnur. Þegar við leysum diffurjöfnu sem svarar til kraftajöfnu í eðlisfræði þá segjum við að við séum að finna **hreyfilýsingu** hlutarins sem verður fyrir kraftinum F. Við þekkjum þegar hreyfilýsingu hlutar sem verður fyrir fastri hröðun a. Hún er gefin með:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

þar sem x_0, v_0 eru óþekktir fastar sem ákvarðast af upphafsstöðu hlutarins og upphafshraða hans. Almennt þurfum við n upphafsgildi til þess að ákvarða diffurjöfnu af stigi n.

5.1 Fyrsta stigs diffurjöfnur

Almennt eru allar fyrsta stigs diffurjöfnur leysanlegar (sjáum það síðar). Byrjum á því að skoða óhliðruðu fyrsta stigs diffurjöfnuna:

$$\dot{x}(t) + a x(t) = 0$$

hefur lausn:

$$x(t) = \alpha e^{-at}$$

þar sem α er fasti sem ákvarðast af upphafsstöðu agnarinnar. Til þess að sjá að þetta sé lausn þá þurfum við einfaldlega að diffra fallið og sjá hvort að það njóti diffurjöfnunnar hér að ofan. Höfum:

$$\dot{x}(t) + a x(t) = \frac{d}{dt}\left(\alpha e^{-at}\right) + a\left(\alpha e^{-at}\right) = -a^{-at} + a^{-at} = 0$$

svo fallið $x(t) = \alpha e^{-at}$ nýtur diffurjöfnunnar.

5.2 Annars stigs diffurjöfnur

Ekki allar annars stigs diffurjöfnur eru leysanlegar. Hinsvegar eru nokkrar þekktar diffurjöfnur sem hafa þekktar lausnir. Maður þarf því að kunna þessi dæmi svo að maður þekkji lausnina. Byrjum á því að skoða óhliðruðu 2. stigs diffurjöfnuna:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

Hún hefur lausn:

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

sem er auðvelt að athuga að sé rétt því:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{d^2}{dt^2}\left(x(t)\right) + \omega^2 x(t) = -\omega^2\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right) + \omega^2\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right) = 0$$

Ef hinsvegar við höfum óhliðruðu 2. stigs diffurjöfnuna:

$$\ddot{x}(t) - \omega^2 x(t) = 0$$

þá er lausnin gefin með:

$$x(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

Aftur er auðvelt að diffra til þess að sjá að þetta fall njóti diffurjöfnunnar.

6 Einföld sveifluhreyfing

Í þessum kafla munum við skoða einfalda sveifluhreyfingu. Þá munum við sjá að einföld sveifluhreyfing er í rauninni heitið sem við höfum gefið lausnum óhliðruðu 2. stigs diffurjöfnunnar:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Slíkar diffurjöfnur hafa almenna lausn:

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

Með sniðugri umritun má einnig rita þetta:

$$x(t) = \alpha\cos(\omega t + \varphi), \qquad \text{eða} \qquad x(t) = \beta\sin(\omega t + \phi)$$

Ákvarða þarf fastana $A, B, \alpha, \beta, \varphi, \phi \in \mathbb{R}$ út frá tveim upphafssgildum oftast upphafsstöðu og upphafshraða (sem gefur jöfnuhneppi með tveim óþekktum stærðum). Stærðin ω kallast sveiflutíðni.

6.1 Gormur

Regla 6.1 Látum massa m vera festann við gorm með gormstuðul k. Gerum ráð fyrir því að gorminum sé sleppt með upphafhraða v_0 í fjarlægð x_0 frá jafnvægisstöðu gormsins. Gerum ráð fyrir því að gormurinn sveiflist í láréttu plani og að engir ógeymnir kraftar verki á gorminn. Þá gildir að hreyfilýsing gormsins er gefin með:

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

þar sem $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ og $A, B \in \mathbb{R}$ eru fastar sem ákvarða má út frá upphafsskilyrðunum $x(0) = x_0$ og $v(0) = v_0$.

Sönnun: Samkvæmt kraftalögmálum Newtons er $ma = -kx$ og þar sem að $a = \frac{dv}{dx} = \frac{d^2x}{dt^2} =: \ddot{x}$ gildir að

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \quad \text{sem við getum einnig ritað:} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0, \quad \text{eða:} \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Við skoðum því kennijöfnuna $\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$ sem hefur lausnir:

$$\lambda = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm\sqrt{i^2\frac{k}{m}} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

en þar með er lausn diffurjöfnurnar gefin með:

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right), \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

Niðurstaðan er því fengin með því að skilgreina $\omega := \sqrt{\frac{k}{m}}$.

$\square$

Hjálparregla 6.2 Til eru rauntölur α, β, ϕ og φ þannig að:

$$A\cos\theta + B\sin\theta = \alpha\cos(\theta+\phi) = \beta\sin(\theta+\varphi)$$

Sönnun: Við fáum að:

$$A\cos\theta + B\sin\theta = \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\theta + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\theta\right)$$

Skilgreinum síðan punktinn $P_{AB} := \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$. Þá er ljóst að P_{AB} liggur á einingarhringnum því:

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 = 1$$

En því má finna $\phi \in [0, 2\pi]$ þannig að:

$$P_{AB} = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right) = (\cos\phi, \sin\phi)$$

og því getum við ritað:

$$A\cos\theta + B\sin\theta = \sqrt{A^2+B^2}\,(\cos\phi\cos\theta + \sin\phi\sin\theta) = \sqrt{A^2+B^2}\cos(\theta-\phi)$$

þar sem við höfum notað summureglu fyrir kósínus. En þar með er ljóst að til eru slíkir fastar α, β, φ og ϕ.

□

Regla 6.3 Látum massa m vera festann við gorm með gormstuðul k. Gerum ráð fyrir því að gorminum sé sleppt með upphafhraða v_0 í fjarlægð x_0 frá jafnvægisstöðu gormsins. Gerum ráð fyrir því að gormurinn sveiflist í láréttu plani og að engir ógeymnir kraftar verki á gorminn. Þá gildir að hreyfilýsing gormsins er gefin með:

$$x(t) = x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t), \qquad v(t) = v_0\cos(\omega t) - x_0\omega\sin(\omega t)$$

þar sem $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Sönnun Samkvæmt reglu 5.1 er hreyfilýsingin gefin með:

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t), \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

þar sem $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Við getum ákvarðað fastana A og B út frá upphafsskilyrðunum $x(0) = x_0$ og $v(0) = v_0$. Nú höfum við að:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$$

En því fæst að:

$$x_0 = x(0) = A\cos(\omega\cdot 0) + B\sin(\omega\cdot 0) = A$$

þannig að $A = x_0$ og

$$v(0) = -A\omega\sin(\omega\cdot 0) + B\omega\cos(\omega\cdot 0) = B\omega$$

svo að $B = \frac{v_0}{\omega}$, en þar með er:

$$x(t) = x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t), \qquad v(t) = v_0\cos(\omega t) - x_0\omega\sin(\omega t)$$

□

Stærðin $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ nefnist **sveiflutíðni** gormsins. Ef T er umferðartími sveiflunnar gildir að:

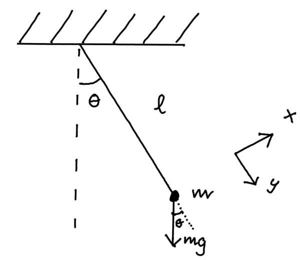
$$\omega T = 2\pi, \qquad \text{þ.a.} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

6.2 Pendúll

Regla 6.4 Lítum á pendúl sem massa m festan í massalausan streng af lengd ℓ. Látum θ vera hornið sem að strengurinn myndar við lóðrétt. Þá er nálgunarlausn á hreyfilýsingu pendúlsins gefin með:

$$\theta(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t + \varphi\right), \qquad A, \varphi \in \mathbb{R}$$

Sönnun: Skrifum niður kraftajöfnu fyrir pendúlnum:



$$\begin{pmatrix} ma \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mg\sin\theta \\ mg\cos\theta - T \end{pmatrix}$$

Við höfum síðan að $a = \ell\alpha$ þar að auki sem $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ svo:

$$m\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

Notum síðan að fyrir lítil horn θ þá gildir að $\sin\theta \approx \theta$. Þá fáum við að jafnan verður:

$$m\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\theta, \qquad \text{þ.e.} \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$

með því að setja $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ sjáum við svo að lausn diffurjöfnunnar verður:

$$\theta(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t\right)$$

$\square$

Stærðin $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ nefnist **sveiflutíðni** pendúlsins. Ef T er sveiflutími pendúlsins gildir að:

$$\omega T = 2\pi, \qquad \text{þ.a.} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

6.3 Dæmi fyrir dæmatíma

Mánudagur

Kafli 11 í Giancoli: 6, 7, 8, 18, 19, 20

Þriðjudagur

Kafli 11 í Giancoli: 21, 22, 23, 24, 26, 28, 31

7 Takmarkaða afstæðiskenningin

7.1 Inngangur

Einstein setti fram takmörkuðu afstæðiskenninguna sína árið 1905. Hún byggir á eftirfarandi tveim hugmyndum eða frumsendum:

(1) Lögmál eðlisfræðinnar eru eins í öllum tregðukerfum.

(2) Hraði ljóss í tómarúmi er sá sami fyrir alla athugendur. Alltaf.

Leiðrétting Einsteins var í raun tengd misskilningi manna á 2. lögmáli Newtons sem segir að:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(mv)$$

Fólk hafði gert ráð fyrir að massinn væri fasti - leiðrétting Einsteins fólst í því að átta sig á því að það er ekki rétt. Í raun er nákvæmara að rita massa sem fall af hraða:

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{25}$$

þar sem að m_0 er kyrrstöðumassi hlutarins. Við skilgreinum gjarna stærðina

$$\gamma(v) := \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{26}$$

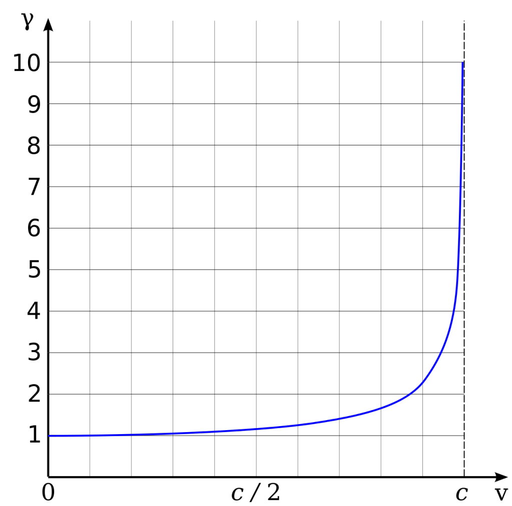
Þá má rita jöfnuna á undan á eftirfarandi formi:

$$m = \gamma m_0 \tag{27}$$

Til þess að skilja takmörkuðu afstæðiskenninguna er í raun mikilvægast að skilja stærðina γ. Tökum eftir því að $0 \leq v^2 \leq c^2$ þar sem að ekkert getur ferðast hraðar en ljósið. En þar af leiðandi er $0 \leq 1 - v^2/c^2 \leq 1$ og því $0 \leq \sqrt{1 - v^2/c^2} \leq 1$ og því er:

$$\gamma \xrightarrow[v \to c]{} +\infty, \qquad \gamma \xrightarrow[v \to 0]{} 1$$

Graf fallsins γ sem fall af v má sjá á eftirfarandi mynd:

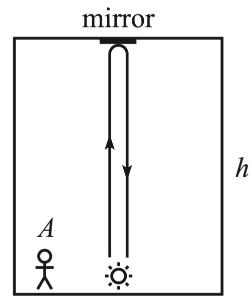


Mynd 2: Graf fallsins $\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

Þetta þýðir því að afstæður massi eykst því hraðar sem hlutur er að ferðast.

7.2 Tímalenging

Við byrjum á því að skoða fyrirbærið sem kallast tímalenging. Látum ljósgjafa vera festann við gólf í lest og látum spegil vera í lofti lestarinnar líkt og á mynd. Látum lestina ferðast áfram með hraða v. Látum A vera athuganda sem er inni í lestinni. Hann sér ljósið nema við gólfið aftur eftir tímann:



$$t_A = \frac{2h}{c}$$

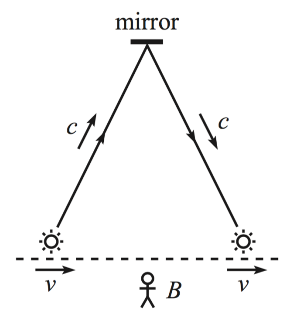
þar sem c er ljóshraðinn. Hinsvegar þá sér B ekki alveg það sama og athugandi A. Því frá honum séð þarf ljósið að ferðast lengri leið. Honum finnst því að hliðar þríhyrningsins sem myndast þurfi að njóta samkvæmt reglu Pýþagórasar:

$$\left(\frac{ct_B}{2}\right)^2 = \left(\frac{vt_B}{2}\right)^2 + h^2$$

en þessi jafna að ofan er jafngild:

$$\left(c^2 - v^2\right) t_B^2 = 4h^2$$

sem gefur því:



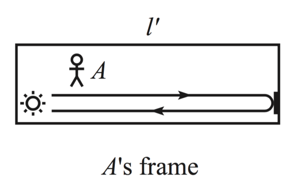
$$t_B = \frac{2h}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2h}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(v)t_A$$

svo við ályktum eftirfarandi:

$$t_B = \gamma t_A \tag{28}$$

7.3 Lengdarstytting

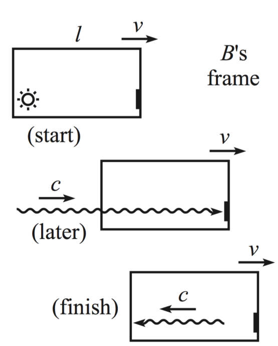
Látum A vera farþega í lest sem ferðast á hraðanum v miðað við jörðu. Látum A mæla lengd lestarinnar sem ℓ_A Ljósgjafi er settur í aftari hluta lestarinnar og spegill við fremri hluta hennar. Þá mælir A tímann sem það tekur fyrir ljósið að berast aftur í enda lestarinnar sem:



$$t_A = \frac{2\ell_A}{c}$$

En hvaða lengd sýnist B, sem er kyrrstæður á jörðinni, að lestin hafi? Látum ℓ_B vera lengdina sem B sér (þessi lengd gæti alveg eins verið jöfn ℓ_A en við munum sjá að hún er það ekki!).

Látum t_1 vera tímann sem það tekur ljósið að berast að speglinum og t_2 vera tímann sem það tekur ljósið að berast til baka í enda lestarinnar séð frá B. Þá gildir að:



$$\ell + vt_1 = ct_1 \implies t_1 = \frac{\ell_B}{c - v}, \quad \ell - vt_2 = ct_2 \implies t_2 = \frac{\ell_B}{c + v}$$

$$t_B = t_1 + t_2 = \frac{\ell_B}{c - v} + \frac{\ell_B}{c + v} = \frac{2\ell_B c}{c^2 - v^2} = \frac{2\ell_B}{c}\gamma^2$$

En samkvæmt tímalengingu höfum við að $t_B = \gamma t_A$ svo:

$$\gamma t_A = t_B = \frac{2\ell_B}{c}\gamma^2 \implies t_A = \frac{2\ell_B}{c}\gamma$$

en við vitum þegar að:

$$t_A = \frac{2\ell_A}{c}$$

en þar með er:

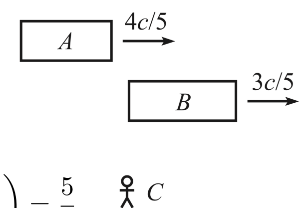
$$\ell_A = \gamma \ell_B$$

sem er oft ritað:

$$\ell_B = \frac{\ell_A}{\gamma} \tag{29}$$

semsagt, B sýnist lestin vera styttri heldur en A sýnist hún vera. En hver er hin raunverulega lengd lestarinnar? Það er eðlilegast að segja að hin raunverulega lengd lestarinnar sé fengin í því viðmiðunarkerfi þar sem lestin er kyrr. En það er einmitt í viðmiðunarkerfi A. Því myndum við segja að hin raunverulega lengd lestarinnar sé ℓ_A. Því gildir í öllum öðrum tregðukerfum að lengd lestarinnar sýnist vera styttri heldur en hin raunverulega lengd lestarinnar.

Dæmi 1: Bergljót Vilbertsdóttir stendur á brautarpalli $9\frac{3}{4}$ á King's Cross lestarstöðinni í London. Hún sér tvær lestir A og B með raunverulega lengd L fara framhjá sér með hraðanum $\frac{4}{5}c$ og $\frac{3}{5}c$ hvor um sig miðað við viðmiðunarkerfi hennar. A byrjar nákvæmlega fyrir aftan B eins og sést á myndinni. Hversu lengi er A að taka fram úr B miðað við úr Bergljótar?



Lausn: Athugum að:

$$\gamma_A := \gamma\left(\frac{4}{5}c\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{4c/5}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2}} = \frac{5}{3}, \quad \text{og} \quad \gamma_B := \gamma\left(\frac{3c}{5}\right) = \frac{5}{4}$$

Þá mælir Bergljót lengd lestar A sem: $\ell_A = \frac{L}{\gamma_A} = \frac{3}{5}L$ og lengd lestar B sem $\ell_B = \frac{4}{5}L$ (Henni finnst þess vegna lest A vera styttri heldur en lest B). Þá er heildarvegalengdin sem A þarf að ferðast miðað við B séð frá Bergljótu: $\frac{3}{5}L + \frac{4}{5}L = \frac{7}{5}L$. Séð frá Bergljótu ferðast lestarnar á afstæða hraðanum $\frac{1}{5}c$ svo við höfum að:

$$t_C = \frac{7L/5}{c/5} = \frac{7L}{c}$$

7.4 Hraðasamlagning

Við munum nú leiða út hraðasamlagningu í takmörkuðu afstæðiskenningunni. Hugsum okkur lest sem fer framhjá brautarpalli. Frá sjónarhóli brautarpallsins hefur hún hraða v og lengd L. Við tímann $t = 0$ leggur hlutur af stað frá afturenda lestarinnar með hraða $w > v$ séð frá brautarpallinum í hreyfingarstefnu lestarinar og á sama tíma leggur ljósblossi með hraða c af stað í sömu stefnu. Ljósblossinn endurkastast frá spegli fremst í lestinni og mætir hlutnum í fjarlægð fL frá framendanum þar sem $0 \leq f \leq 1$.

Við byrjum á því að athuga að í viðmiðunarkerfi lestarinnar er lestin kyrrstæð og þar hefur hluturinn hraða u. Við viljum skilja sambandið milli hraðanna u, v og w. Nú þarf ljósið að ferðast vegalengdina $(1+f)L$ í viðmiðunarkerfi lestarinnar en hluturinn þarf að ferðast vegalengdina $(1-f)L$. Þetta þarf að taka sama tíma svo að við höfum:

$$\frac{(1+f)L}{c} = \frac{(1-f)L}{u}$$

en það gefur okkur að:

$$f = \frac{c-u}{c+u}$$

Skoðum nú það sem athugandinn sem stendur á brautarpallinum sér. Látum t_1 vera tímann sem hann mælir að það taki ljósið að berast að speglinum og látum t_2 vera tímann sem hann mælir sem það tekur ljósið að mæta hlutnum aftur. Þá gildir fyrir ljósið að heildartíminn sem þetta tekur er gefinn með:

$$T = t_1 + t_2 = \frac{L}{c-v} + \frac{fL}{c+v}$$

Hluturinn þarf líka að komast á þann stað eftir sama tíma svo við höfum einnig að:

$$T = \frac{(1-f)L}{w-v}$$

En þar með höfum við að:

$$\frac{(1-f)L}{w-v} = \frac{L}{c-v} + \frac{fL}{c+v}$$

sem við leysum fyrir f og fáum:

$$f = \frac{(c+v)(c-w)}{(c-v)(c+w)}$$

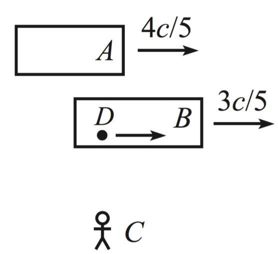
en þar með höfum við að:

$$\frac{(c+v)(c-w)}{(c-v)(c+w)} = \frac{c-u}{c+u}$$

sem gefur eftir umtalsverða (en ekki flókna) reikninga að:

$$w = \frac{u+v}{1+uv/c^2}$$

Dæmi 2: Bergljót Vilbertsdóttir stendur á brautarpalli $9\frac{3}{4}$ á King's Cross lestarstöðinni í London. Hún sér tvær lestir A og B með raunverulega lengd L fara framhjá sér með hraðanum $\frac{4}{5}c$ og $\frac{3}{5}c$ hvor um sig miðað við viðmiðunarkerfi hennar. A byrjar nákvæmlega fyrir aftan B eins og sést á myndinni.



(a) Hversu lengi er A að taka fram úr B miðað við klukkuna sem B hefur?

(b) Hversu lengi er A að taka fram úr B miðað við klukkuna sem A hefur?

(c) Látum E_1 vera atburðinn: „Fremsti hluti A fer frammúr aftasta hluta B" og látum E_2 vera atburðinn: „Aftasti hluti A fer fram úr fremsta hluta B". Látum D labba með jöfnum hraða frá aftari hluta lestar B í áttina að fremri hluta lestarinnar þannig að hann byrjar að labba þegar E_1 gerist og lýkur labbinu sínu þegar E_2 gerist. Hve lengi er A að fara fram úr B séð frá D?

Lausn:

(a) Við athugum að í viðmiðunarkerfi B er hann kyrrstæður og A kemur í áttina að honum með hraða:

$$w = \frac{\frac{4c}{5} - \frac{3c}{5}}{1 - \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}} = \frac{5}{13}c$$

B sýnist lestin hans hafa lengd L en að lengd lestar A sé:

$$\ell_A = \frac{L}{\gamma(\frac{5}{13}c)} = \frac{12}{13}L$$

en þar með er tíminn sem B mælir:

$$t_B = \frac{\frac{12}{13}L + L}{\frac{5}{13}c} = \frac{5L}{c}.$$

(b) A mælir nákvæmlega sama tíma og B.

(c) Eftirlátið lesanda sem æfing.

7.5 Skriðþungi og orka

Þekkt er jafna Einsteins fyrir orku hlutar:

$$E = \gamma m_0 c^2$$

þar sem m_0 er kyrrstöðumassi hlutarins. Við segjum að stöðuorka hlutar sé gefin með $U = m_0 c^2$ en þar með er hreyfiorkan gefin með:

$$K = E - U = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 = (\gamma - 1)\, m_0 c^2$$

Ef við skrifum þetta alveg út þá höfum við:

$$K(v) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right) m_0 c^2$$

Ef við Taylor-liðum fallið γ þá höfum við að:

$$\gamma(v) \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4 + \frac{5}{16}\left(\frac{v}{c}\right)^6 + \mathcal{O}(v^8)$$

En þar með fáum við með því að taka tvo fyrstu liðina í Taylor-nálguninni:

$$K(v) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 \cdot m_0 c^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

sem er gamla góða hreyfiorkan. Hinsvegar ef við tökum t.d. þrjá liði þá höfum við:

$$K(v) = \frac{1}{2} m_0 v^2 \left(1 + \frac{3}{4}\left(\frac{v}{c}\right)^2 \right)$$

Athugum nú að:

$$E = \gamma m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \implies E^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

En með smá umritun fæst því (bætum við v^2 og drögum aftur frá):

$$E^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0^2 c^2 \left(c^2 - v^2 + v^2\right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0^2 c^2 \left(c^2 - v^2\right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{m_0^2 c^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0^2 c^4 + \frac{m_0^2 c^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

En nú er:

$$p^2 c^2 = \gamma^2 m_0^2 v^2 c^2 = \frac{m_0 v^2 c^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

svo við höfum sýnt að:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

7.6 Dæmi fyrir dæmatíma

Mánudagur

Kafli 26 í Giancoli: 6, 7, 10, 11, 13, 43, 44, 45, 46.

8 Kjörgas

Við leiðum núna út gaslögmálið. Hugsum okkur kassa með hliðarlengdir ℓ og rúmmmál $V = \ell^3$. Látum N agnir með meðalhraða v vera í kassanum. Við viljum vita hvaða þrýstingur er inni í kassanum. Rifjum því upp að:

$$P = \frac{F_\perp}{A}$$

og nýtum okkur að $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$. Látum því Δt vera tímabil. Við viljum finna skriðþungabreytingu veggjarins á tímanum Δt. Aðeins hlutfall agnanna mun berast að kassanum til þess að lenda í árekstrinum. Athugum fyrst að hraði agnanna er:

$$\vec{v} := (v_x, v_y, v_z) = \frac{1}{\sqrt{3}}(v, v, v)$$

því $v = |\vec{v}| = \sqrt{\frac{1}{3}v^2 + \frac{1}{3}v^2 + \frac{1}{3}v^2}$ og jafnar líkur eru á því að agnirnar séu að hreyfast í allar stefnur (í z-stefnuna spilar þyngdarkrafturinn inn en hann styttist út því sumar agnirnar eru að fara upp með neikvæðri hörðun en aðrar niður með jákvæðri hröðun). Fyrir lítil tímabil Δt lenda agnirnar aðeins í einum árekstri við hliðarlengdir kassans. Þá höfum við að heildarfjöldi agna sem lendir í árekstrinum er gefinn með:

$$N \cdot \frac{v_x \Delta t}{\ell}$$

En þar með höfum við að heildarkrafturinn er:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\left(N \frac{v_x \Delta t}{\ell} \cdot m v_x\right)}{\Delta t} = \frac{2N}{\ell} \cdot \frac{1}{2} m v_x^2 = \frac{2N}{3\ell}\frac{1}{2} m v^2 = \frac{2N}{3\ell} K$$

En við skilgreinum hitastig út frá meðalhreyfiorku þannig að:

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle =: \langle K \rangle := \frac{3}{2} k_B T$$

þar sem T er hitastig hlutarins og $k_B = 1{,}381 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$ er fasti sem nefnist Boltzmann fastinn. En þar með höfum við sýnt að:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{\frac{N}{\ell} k_B T}{\ell^2} = \frac{N k_B T}{V}$$

En það gefur einmitt gaslögmálið:

$$PV = N k_B T$$

Ef vinur okkar er efnafræðingur og skilur ekki eðlisfræði þá er ekkert mál að koma jöfnunni okkar yfir á formið hans. Ef n er fjöldi móla í ílátinu þá er heildarfjöldi agna $N = n \cdot N_A$ þar sem $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ er tala Avagadros. En þar með höfum við:

$$PV = n N_A k_B T$$

Efnafræðingar skilgreina síðan $R := N_A \cdot k_B = 8{,}314\,\mathrm{J/(mól\,K)}$ og kalla hann gasfastann. Þá geta þeir ritað:

$$PV = nRT$$

8.1 Dæmi fyrir dæmatíma

Kafli 13 í Giancoli: 25, 27, 33, 34, 40, 41, 48

9 Varmi

9.1 Eðlisvarmi

Eins og allir hlutir hafa eðlismassa þá hafa allir hlutir eðlisvarma. Það er erfiðara að skilgreina eðlisvarma heldur en eðlismassa. Við táknum eðlismassa hluta með c og skilgreinum eðlismassa hluta oftast sem orkuna sem þarf til þess að hita eitt kílógramm af hlutnum um eina gráðu. Við höfum þá að:

$$Q = cm\Delta T$$

þar sem Q er varmaorkan sem þarf til þess að hita massann m um ΔT gráður og c er eðlisvarmi hlutarins. Einingar eðlisvarmans eru J/kg K.

Efni	**Eðlisvarmi c** [J/(kg K)]
Ál	900
Alkóhól	2400
Kopar	390
Gler	840
Járn	450
Stál	450
Blý	130
Marmari	860
Kvikasilfur	140
Silfur	230
Viður	1700
Ís ($-5°C$)	2100
Vatn ($15°C$)	4186
Gufa ($110°C$)	2010

Tafla 5: Eðlisvarmi nokkurra efna við 20 °C og 1 atm (nema þar sem annað er tekið fram)

9.2 Bræðsluvarmi og gufunarvarmi

Öll efni hafa þrjú ástandsform: **fastform**, **vökvaform** og **gasform**. Það kostar orku og því varma að breyta ástandsformi efna. Við táknum með L_b bræðsluvarma hluta og með L_g gufunarvarma hluta. Þá er varmaorkan sem þarf til þess að bræða massann m gefin með:

$$Q_b = mL_b$$

og varmaorkan sem þarf til þess að sjóða massann m gefin með:

$$Q_g = mL_g$$

Efni	**Bræðsluhitastig** [°C]	**L_b** [kJ/(kg)]	**Gufunarhitastig**	**L_g** [kJ/(kg)]
Súrefni	−218,8	14	−183	210
Nitur	−210,0	26	−195,8	200
Vatn	0	333	100	2260
Blý	327	25	1750	870

Tafla 6: Bræðslu- og gufunarvarmi nokkurra efna.

9.3 Dæmi fyrir dæmatíma

Kafli 14 í Giancoli: 11, 13, 27, 30, 31, 43

10 Bylgjur

10.1 Bylgjujafnan

Bylgjujafnan er 2. stigs hlutafleiðujafna. Hún er venjulega rituð í einni vídd á eftirfarandi formi:

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}$$

þar sem v er hraði bylgjunnar. Eftirfarandi fall eru lausn á bylgjujöfnunni:

$$\psi(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$$

þar sem $\omega = kv$. Sýnum það:

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial^2 t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\omega A \sin(kx - \omega t)\right) = -\omega^2 A\cos(kx - \omega t) = -\omega^2 \psi(x,t)$$

Höfum síðan að:

$$v^2 \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(-kA\sin(kx - \omega t)\right) = -k^2 v^2 A\cos(kx - \omega t) = -\omega^2 \psi(x,t)$$

þar sem við höfum notað að $\omega = kv$. En þetta sýnir að fallið uppfyllir hlutafleiðjöfnuna.

Við köllum fall $\psi(x,t)$ sem uppfyllir bylgjujöfnuna, **bylgjufall** eða **bylgju**. Lausn af gerðinni $\psi(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$ kallast **staðbylgja**. Við segjum að talan A lýsi **útslagi** bylgjunnar, k sé **bylgjutala** eða **bylgjuvigur** bylgjunnar og ω sé **hornhraði** hennar. Talan $v = k\omega$ kallast **bylgjuhraði** bylgjunnar. Hraða bylgjunnar má einnig tákna við bylgjulengd hennar, λ, sem er skilgreind sem lengdin frá bylgjutopp að bylgjutopp (eða bylgjubotn að bylgjubotn). Semsagt fyrir $\cos(x)$ væri bylgjulengdin 2π. En þá er hraði bylgjunnar gefinn með:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

þar sem T er lotutími bylgjunnar (semsagt tíminn sem það tekur hana að ferðast eina lotu en $\frac{1}{T} = f$ þar sem f er tíðni bylgjunnar. Bylgjutalan k er reyndar skilgreind þannig að:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

því við höfum að:

$$kv = \frac{2\pi}{\lambda} v = \frac{2\pi f}{\lambda f} v = \frac{\omega}{v} v = \omega$$

Regla 10.1 Lausn á bylgjujöfnunni:

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}$$

er $\psi(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$ þar sem $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Sönnun: Við fáum:

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial^2 t} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(A\cos(kx - \omega t)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\omega A\sin(kx - \omega t)\right) = -\omega^2 A\cos(kx - \omega t) = -\omega^2 \psi(x,t)$$

og síðan:

$$v^2 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(A\cos(kx - \omega t)\right) = v^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(-Ak\sin(kx - \omega t)\right) = -v^2 k^2 A\cos(kx - \omega t) = -v^2 k^2 \psi(x,t)$$

Athugum síðan að:

$$v^2 k^2 = v^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = v^2 \left(\frac{2\pi f}{\lambda f}\right)^2 = v^2 \frac{\omega^2}{v^2} = \omega^2$$

svo við ályktum að ψ sé lausn.

10.2 Staðbylgjur á streng

Skoðum streng af lengd ℓ með massa m líkt og er gert í verklegu tilrauninni Staðbylgjur á streng. Það er ekki óraunhæft að ætla að togkrafturinn í strengnum hafi áhrif á sveifluhætti strengsins. Við beitum því víddargreiningu til þess að álykta tengslin milli hraða bylgjunnar, massans, lengdarinnar og togkraftsins í strengnum. Höfum þá:

$$\frac{m}{s} = v = m^{\alpha}\ell^{\beta}T^{\gamma} = (kg)^{\alpha}(m)^{\beta}\left(\frac{kgm}{s^2}\right)^{\gamma}$$

sem gefur okkur því jöfnuhneppið:

$$\begin{cases} 1 = \beta + \gamma \\ 0 = \alpha + \gamma \\ -1 = -2\gamma \end{cases}$$

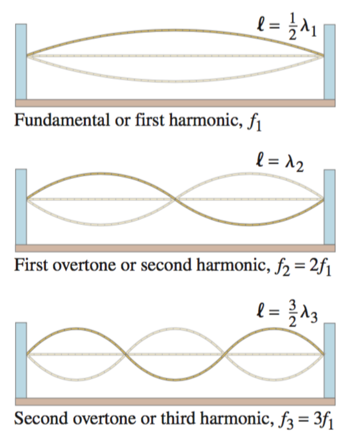
svo við ályktum að $\gamma = \frac{1}{2}$ og þá $\beta = \frac{1}{2}$ og $\alpha = -\frac{1}{2}$ en það gefur okkur því:

$$v = \sqrt{\frac{Tm}{\ell}} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

þar sem við höfum skilgreint $\mu := \frac{m}{\ell}$ sem línulegan þéttleika strengsins.

10.2.1 Strengur festur í báða enda

Skoðum streng sem er festur í báða enda eins og á myndinni hér til hægri. Þegar strengurinn sveiflast á milli endanna eru aðeins ákveðin gildi á tíðninni f og bylgjulengdinni λ sem gefa eiginsveifluhætti strengsins. Þessi gildi eru háð togkraftinum í strengnum, massa strengsins og lengd strengsins. Látum heiltöluna n tákna fjölda útslaga sem staðbylgjan hefur. Við köllum tíðnina f_1 grunntíðni strengsins sem samsvarar einu útslagi á strengnum. Bylgjulengdina fyrir n útslög á strengnum má finna samkvæmt:



$$\ell = \frac{n}{2}\lambda_n$$

en það gefur þá að n-ta bylgjulengdin er gefin með:

$$\lambda_n = \frac{2\ell}{n}$$

En þar með höfum við að:

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{vn}{2\ell} = nf_1$$

þar sem við höfum notað að $f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2\ell}$. En þetta sýnir því að almennt höfum við fyrir staðbylgjur á streng sem er festur í báða enda:

$$v = \lambda_n f_n = \frac{2\ell}{n} \cdot nf_1 = 2\ell f_1$$

10.3 Hljóð í pípu

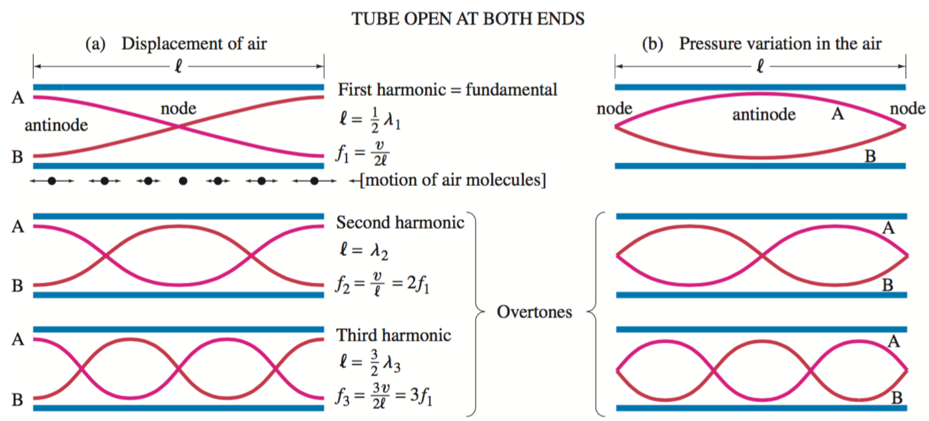
Hér skoðum við hljóð í pípum sem eru opnar í báða enda eða lokaðar í annan endann.

10.3.1 Opin í báða enda

Þá höfum við að:

$$\lambda_n = \frac{2\ell}{n}, \qquad f_n = n f_1, \qquad f_1 = \frac{v}{2\ell}$$

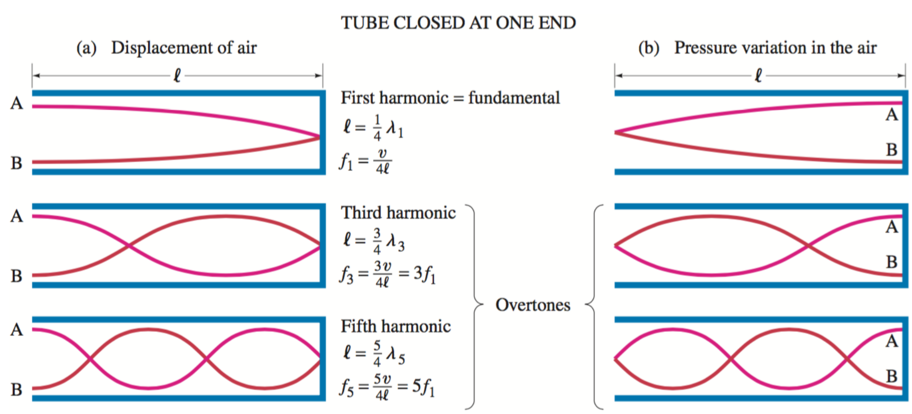
eins og fyrir staðbylgjur á streng.



10.3.2 Lokuð í annan endann

Þá höfum við að:

$$\lambda_{2n+1} = \frac{4\ell}{2n+1}, \qquad f_{2n+1} = (2n+1) f_1, \qquad f_1 = \frac{v}{4\ell}$$



10.4 Styrkleiki bylgju

Styrkleiki kúlubylgju er táknaður með I og skilgreindur þannig að:

$$I := \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi r^2}$$

þar sem $A = 4\pi r^2$ er yfirborðsflatarmál kúlunnar þar sem styrkleiki bylgjunnar er mældur og P er afl bylgjunnar frá upptökum sínum. En þá höfum við alltaf:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{P}{4\pi r_1^2}}{\frac{P}{4\pi r_2^2}} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

10.5 Hljóð

Hljóð er dæmi um bylgju. Hraði hljóðsins er mismunandi eftir því í hvaða efni hann er að berast. Til dæmis er hraði hljóðsins 343 m/s í lofti við 20 °C en 4540 m/s í gleri. En það sem við upplifum er samt frekar styrkleiki hljóðsins. Hljóðstyrkur er mældur í desíbelum (sem er lograskali). Við táknum hljóðstyrk hljóðsins með β og skilgreinum:

$$\beta := 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right), \qquad I_0 := 1{,}0 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$$

10.6 Bylgjusamliðun

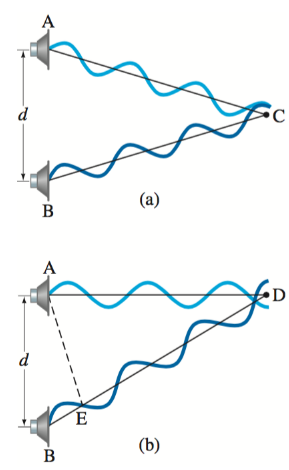
Hugsum okkur að við séum á rokktónleikum. Þar eru tveir hátlarar sem eru í fjarlægðinni d frá hver öðrum uppi á sviði. Við stöndum í fjarlægð x_1 frá öðrum þeirra en í fjarlægð x_2 frá hinum þeirra. Hátalarnir eru stilltir þannig að þeir spila tónlist með tíðni $f = 1150\,\mathrm{Hz}$. Ef $|x_2 - x_1|$ er þannig að:

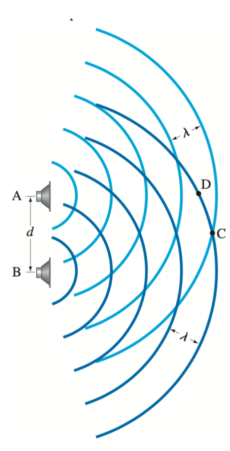
$$|x_2 - x_1| = n\frac{\lambda}{2}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+$$

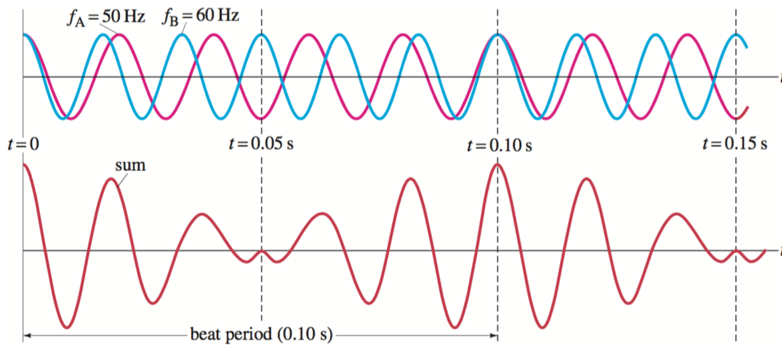
þá heyrir athugandinn ekkert. En $v_{\text{hljóð}} = \lambda f$ sem gefur því að $\lambda = \frac{v_{\text{hljóð}}}{f}$. En þá er:

$$|x_2 - x_1| = n \cdot \frac{v_{\text{hljóð}}}{2f} = \frac{343}{2 \cdot 1150} = n \cdot 0{,}149\,\mathrm{m}$$

Takið eftir að ef $d < 0{,}149\,\mathrm{m}$ þá eru engir slíkir staðir.

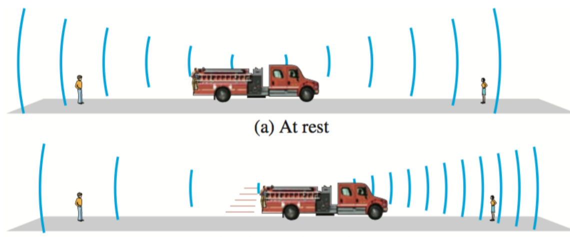






10.7 Dopplerhrif

10.7.1 Kyrrstæður athugandi og uppspretta sem hreyfist



(a) At rest

(b) Fire truck moving

Látum c tákna hraða hljóðsins. Látum hraða trukksins vera v. Látum Járngerði standa vinstra meginn og Stálgerði standa hægra meginn. Þá finnst Stálgerði eins og að það verður styttra á milli bylgjutoppanna sem hún heyrir og þar með finnst henni tíðni hljóðsins lækka. Hinsvegar finnst Járngerði eins og að það verður lengra á milli bylgjutoppanna sem hún heyrir og þar með finnst henni tíðni hljóðsins hækka. Látum f_0 tákna tíðni hljóðsins sem trukkurinn sendir frá sér og λ_0 vera bylgjulengd hljóðsins sem trukkurinn sendir frá sér í viðmiðunarkerfi trukksins. Þá er $c = \lambda_0 f_0$. Látum λ_S og f_S vera bylgjulengd og tíðni hljóðsins sem Stálgerður heyrir en λ_J og f_J vera bylgjulengd og tíðni hljóðsins sem Járngerður heyrir. Þá höfum við að:

$$\lambda_J = \lambda_0 + vT_0 = \lambda_0 + \frac{v}{f_0} = \lambda_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

og

$$\lambda_S = \lambda_0 - vT_0 = \lambda_0 - \frac{v}{f_0} = \lambda_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

En þar með höfum við að:

$$f_J = \frac{c}{\lambda_J} = \frac{c}{\lambda_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right)} = \frac{f_0}{1 + \frac{v}{c}}$$

$$f_S = \frac{c}{\lambda_S} = \frac{c}{\lambda_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right)} = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}}$$

10.7.2 Athugandi sem hreyfist og kyrrstæð uppspretta

Látum nú uppsprettuna vera kyrrstæða og látum athugandann hreyfast með hraða u í átt að uppsprettunni. Látum c vera hraða bylgjunnar, λ_0 vera bylgjulengd bylgjunnar og f_0 vera tíðni hennar. En athugandinn er á hreyfingu miðað við miðillinn svo að:

$$c + u = \lambda_A f_A$$

en nú er $c = \lambda_0 f_0$ þar að auki sem $\lambda_A = \lambda_0$ svo:

$$f_A = \frac{c+u}{\lambda_A} = \frac{\lambda_0 f_0 + u}{\lambda_0} = f_0 + \frac{u}{\lambda_0} = f_0 + \frac{u f_0}{c} = \left(1 + \frac{u}{c}\right) f_0$$

ef athugandinn færist frá uppsprettunni höfum við:

$$f_A = \left(1 - \frac{u}{c}\right) f_0$$

10.7.3 Allsherjarjafnan

Við höfum því fengið eftirfarandi allsherjarjöfnu:

$$f' = \left(\frac{1 \pm \frac{u}{c}}{1 \pm \frac{v}{c}}\right) f_0$$

sem má einnig rita:

$$f' = \left(\frac{c \pm u}{c \pm v}\right) f_0$$

þar sem v er hraði uppsprettunnar, u er hraði athugandans og c hraði bylgjunnar. Ákvarða þarf formerkin í jöfnunni út frá eðlisfræðilegu innsæi.

10.8 Dæmi fyrir dæmatíma

Kafli 11 í Giancoli: 33, 37, 38, 45, 49.

Kafli 12 í Giancoli: 10, 15, 16, 20, 21, 26, 27, 28, 29, 41, 49, 50, 51, 53, 54, 57, 58.

11 Inngangur að varmafræði

11.1 Núllta lögmál varmafræðinnar

Núllta lögmálið segir að varmajafnvægi séu gegnvirk vennsl á varmakerfum:

Núllta lögmál varmafræðinnar: Látum A, B og C vera þrjú varmakerfi. Ef A og C eru í varmajafnvægi og B og C eru í varmajafnvægi þá eru A og B í varmajafnvægi.

11.2 Fyrsta lögmál varmafræðinnar

Við byrjum á því að skilgreina innri orku varmakerfis. Við sáum í útleiðslunni á gaslögmálinu að hreyfiorka agnanna var gefin með: $\frac{1}{2}mv^2$ þar sem v var meðalhraði agnanna. Því er heildarorka kerfisins $N \cdot \frac{1}{2}mv^2$ og við skilgreindum því næst $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T$ svo því er eðlilegt að innri orka varmakerfis sé gefin með:

$$U = \frac{3}{2} N k_B T$$

Það sem getur gerst við þetta varmakerfi er að varma getur verið bætt í kerfið eða kerfið getur unnið vinnu á umhverfinu. Upp að formerki skiptir máli að taka fram hvort varma sé bætt í kerfið eða tekið úr því og það skiptir máli að taka fram hvort að vinna sé unnin á kerfinu eða hvort kerfið vinni vinnu. Í Giancoli er það varma sem er bætt í kerfið og kerfið sem vinnur vinnu. Því er heildar innri orkubreytingin gefin með:

$$\Delta U = Q - W$$

Það er að segja orka kerfisins eykst ef að varma er bætt í kerfið og hún minnkar ef kerfið vinnur vinnu. En þetta er einmitt fyrsta lögmál varmafræðinnar:

Fysta lögmál varmafræðinnar: Breyting í innri orku varmakerfis, ΔU, er gefið með:

$$\Delta U = Q - W$$

þar sem Q er varmaorkan sem er bætt í kerfið og W er heildarvinnan sem kerfið vinnur á umhverfi sínu.

Við getum þá fundið vinnuna sem er unnin á gasinu með: $W = Fd = PAd = PV$ og þá með því að taka örsmæðir höfum við:

$$dW = PdV$$

En það gefur okkur því að:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} PdV$$

11.3 Gerðir varmaferla

Fjórar helstu gerðir varmaferla eru Jafnhita-,jafnþrýstings-, jafnrúmmáls- og óvermin ferli.

11.3.1 Jafnhitaferli (Isothermal)

Við segjum að ferli sé **jafnhitaferli** ef $\Delta T = 0$ þ.e. ef hitastigið er fasti. Þá höfum við að vinnan sem er unnin á gasinu er gefin með:

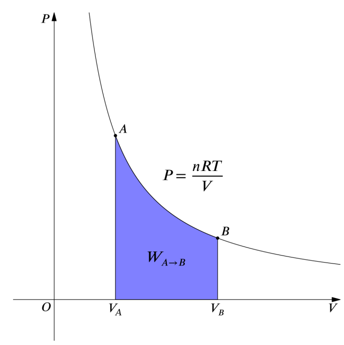
$$W = \int_{V_1}^{V_2} PdV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$$
$$= nRT\left(\ln(V_2) - \ln(V_1)\right) = nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

en síðan getum við nýtt okkur að $PV = nRT$ er fasti þ.a.

$$P_1V_1 = nRT = P_2V_2$$

sem gefur því að:

$$W = nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = nRT \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$$

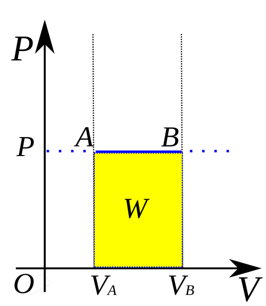


Mynd 3: Jafnhitaferli.

11.3.2 Jafnþrýstingsferli (Isobaric)

Við segjum að ferli sé **jafnþrýstingsferli** ef $\Delta P = 0$ þ.e. ef þrýstingurinn er fasti. Þá höfum við að vinnan sem er unnin á gasinu er gefin með:

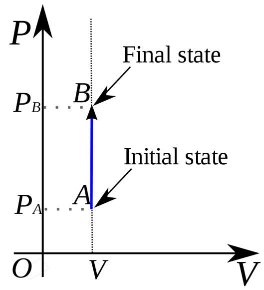
$$W = \int_{V_1}^{V_2} PdV = P\int_{V_1}^{V_2} dV = P\left(V_2 - V_1\right) = P\Delta V$$



Mynd 4: Jafnþrýstingsferli.

11.3.3 Jafnrúmmálsferli (Isochoric)

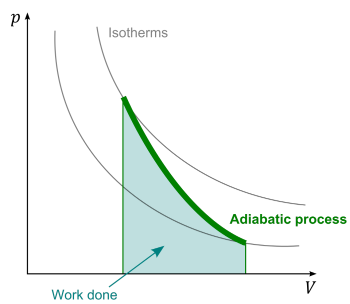
Við segjum að ferli sé **jafnrúmmálsferli** ef $\Delta V = 0$ þ.e. ef rúmmálið er fasti. Þá er $W = 0$.



Mynd 5: PV línurit af jafnrúmmálsferli

11.3.4 Óvermin ferli (Adiabatic)

Við segjum að ferli sé **óvermið** ef $Q = 0$ þ.e.a.s. enginn varmi tapast úr kerfinu.



Mynd 6: PV línurit af óvermnu ferli.

11.4 Dæmi fyrir dæmatíma

Kafli 15 í Giancoli: 1, 2, 3, 7, 9, 10.

12 Inngangur að skammtatölvum (Yndisauki)

Skammtatölvur eru framtíðin. Hér er gott kynningarmyndband á skammtatölvum:

`https://www.youtube.com/watch?v=QuR969uMICM`

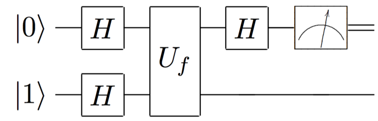
12.1 Deutsch–Jozsa reikniritið

Segjum að við séum með fall $f : \{0, 1\} \to \{0, 1\}$. Við viljum svara eftirfarandi spurningu: Er $f(0) = f(1)$?

Klassísk tölva myndi segja að við þyrftum að framkvæma tvo reikninga til þess að geta svarað þessari spurningu. Við munum hinsvegar sjá að fyrir skammtatölvu þá þurfum við aðeins að framkvæma einn reikning. Það er útfært með Deutsch-Jozsa reikniritinu:

(i) Tökum inn ástandið $|0\rangle\,|1\rangle$.

(ii) Skilgreinum svokallað Hadamard-hlið, U_H, þannig að:



$$U_H(|0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right), \qquad U_H(|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - |1\rangle\right).$$

Setjum síðan ástandið $|0\rangle\,|1\rangle$ í gegnum Hadamard-hlið. Þá fáum við að:

$$U_H\,|0\rangle\,U_H\,|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - |1\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(|0\rangle\left(|0\rangle - |1\rangle\right) + |1\rangle\left(|0\rangle - |1\rangle\right)\right).$$

(iii) Búum síðan til virkjann M_f þannig að:

$$M_f\,|x\rangle\,|y\rangle := |x\rangle\,|f(x) \oplus y\rangle$$

þar sem $\oplus$ táknar samlagningu samleifa 2. Fáum þá með því að nota M_f á ástandið hér á undan:

$$\begin{aligned} M_f\frac{1}{2}\left(|0\rangle\left(|0\rangle - |1\rangle\right) + |1\rangle\left(|0\rangle - |1\rangle\right)\right) &= \frac{1}{2}\left(|0\rangle\left(|f(0)\oplus 0\rangle - |f(0)\oplus 1\rangle\right) + |1\rangle\left(|f(1)\oplus 0\rangle - |f(1)\oplus 1\rangle\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\Big((-1)^{f(0)}\,|0\rangle\left(|0\rangle - |1\rangle\right) + (-1)^{f(1)}\,|1\rangle\left(|0\rangle - |1\rangle\right)\Big) \\ &= \frac{1}{2}(-1)^{f(0)}\Big(|0\rangle + (-1)^{f(0)\oplus f(1)}\,|1\rangle\Big)\left(|0\rangle - |1\rangle\right). \end{aligned}$$

þar sem við höfum notað að:

$$f(0)\oplus 0 = \begin{cases} 0 & \text{ef } f(0) = 0 \\ 1 & \text{ef } f(0) = 1 \end{cases}, \quad f(0)\oplus 1 = \begin{cases} 1 & \text{ef } f(0) = 0 \\ 0 & \text{ef } f(0) = 1 \end{cases},$$

svo við höfum að:

$$|f(0)\oplus 0\rangle - |f(0)\oplus 1\rangle = \begin{cases} |0\rangle - |1\rangle & \text{ef } f(0) = 0 \\ -\left(|0\rangle - |1\rangle\right) & \text{ef } f(0) = 1 \end{cases} = (-1)^{f(0)}\left(|0\rangle - |1\rangle\right).$$

Eins má sýna að:

$$|f(1)\oplus 0\rangle - |f(1)\oplus 1\rangle = (-1)^{f(1)}\left(|0\rangle - |1\rangle\right).$$

Þar að auki höfum við notað að:

$$f(0)\oplus f(1) = \begin{cases} 0 & \text{ef } f(0) = f(1) \\ 1 & \text{ef } f(0) \neq f(1) \end{cases}$$

(iv) Skoðum núna bara fyrri bitann sem varð eftir í útreikningunum okkar áðan:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + (-1)^{f(0)\oplus f(1)}\,|1\rangle\Big)$$

Tökum Hadamard aftur af þessum bita og fáum:

$$\begin{aligned} U_H\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + (-1)^{f(0)\oplus f(1)}\,|1\rangle\Big)\right) &= \frac{1}{2}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) + \frac{1}{2}(-1)^{f(0)\oplus f(1)}\left(|0\rangle - |1\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2}\Big(1 + (-1)^{f(0)\oplus f(1)}\Big)\,|0\rangle + \frac{1}{2}\Big(1 - (-1)^{f(0)\oplus f(1)}\Big)\,|1\rangle \end{aligned}$$

En þá er ljóst að ef að niðurstaðan okkar er sú að útkoman er $|0\rangle$ þá er $f(0)\oplus f(1) = 0$ svo $f(0) = f(1)$ en ef útkomman er $|1\rangle$ þá er $f(0)\oplus f(1) = 1$ svo $f(0) \neq f(1)$.

Upprunalega vandamálið er hinsvegar að ef $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ er þannig að fallið er annað hvort fast eða nákvæmlega helmingur stakanna varpast í 0 og nákvæmlega hinn helmingurinn varpast í 1. Þá kemur í ljós að skammtatölvan þarf samt sem áður bara einn reikning en venjuleg tölva þarf a.m.k. tvo og í versta falli $2^n + 1$ reikning (ef fallið er fast þá þarf að reikna helminginn og síðan eitt í viðbót til að ákvarða svarið).

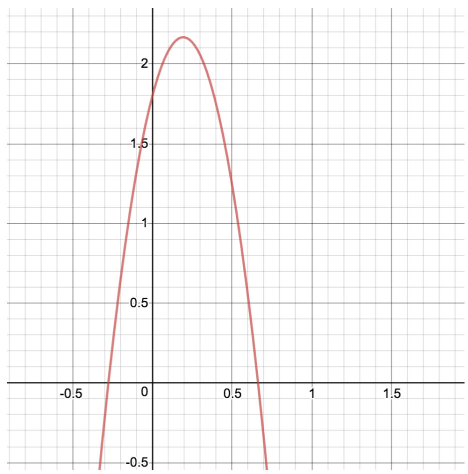
13 Lögmálið um minnsta verkun (Ýtarefni)

Byggt á frægum fyrirlestri sem Feynman hélt: `http://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_19.html`

Hugsum okkur að við séum að kasta bolta upp í loftið. Látum $y(t)$ tákna hæð boltans yfir jörðu við tímann t. Við höfum þegar séð að:

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

og ef við gerum graf af hæðinni y sem fall af tíma, t þá lítur grafið einhvern veginn svona út:



Mynd 7: Graf fallsins $y(t) = 1.8 + 3.8t - 9.82t^2$.

Stöðuorka boltans (sem fall af tíma) er gefin með:

$$U = mgy$$

þar sem y er hæðin yfir jörðinni. Hreyfiorkan er gefin með:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{y}^2$$

þar sem $v = \dot{y} = \frac{dy}{dt}$ er hraði boltans (sem fall af tíma). Við skilgreinum nú fallið:

$$L := K - U$$

Þetta fall kallast Lagrange-fall og minnir mjög mikið á orku hlutarins. Fyrir boltann höfum við Lagrange-fallið:

$$L = K - U = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - mgy$$

Athugum nú eftirfarandi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{y}}\left(\frac{1}{2} m \dot{y}^2 - mgy\right)\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = m\ddot{y} = ma$$

þar sem að $a = \ddot{y}$ er hröðun hlutarins. Athugum síðan að:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2} m \dot{y}^2 - mgy\right) = -mg$$

En þar með höfum við að:

$$ma = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{\partial L}{\partial y} = -mg$$

Jafnan:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{\partial L}{\partial y}$$

nefnist Euler-Lagrange jafnan. Hún gefur jafngilda framsetningu á lögmálum Newtons út frá orku hlutarins.

En segjum að við vitum ekki að ögnin ferðist eftir ferlinum $y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$. Hugsum okkur að hún geti valið einhverja aðra leið til þess að fara úr hæðinni y_1 í hæðina y_2 á tímanum t. Við skilgreinum þá verkun:

$$S := \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} (K - U)\, dt.$$

Fyrir boltann höfum við:

$$S_{\text{bolti}} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} m \dot{y}^2 - mgy\right) dt.$$

Lögmálið um minnsta verkun segir þá að ferillinn sem að boltinn velur er sá ferill sem lágmarkar S. Það er eins og að boltinn prófi allar leiðir og velji þá leið sem að lágmarkar orku hans í einhverjum skilningi (eða réttara sagt lágmarkar verkun hans). Það kemur í ljós að til þess að lágmarka verkunina þá þarf einmitt Euler-Lagrange jafnan að gilda. Hægt er að lesa fyrirlesturinn eftir Feynman til þess að fá nánari skýringar á hvers vegna það gildir.