

Landskeppni í eðlisfræði 2020

Úrslitakeppni

23. maí kl. 09:00-12:00

Leyfileg hjálpargögn: Reiknivél sem geymir ekki texta.

Keppnin samanstendur af 3 dæmum. Athugaðu hvort þú hafir fengið öll dæmin.

Öll dæmin 3 vega jafnt og ekki verður dregið frá fyrir röng svör. Liðunum í hverju dæmi er ekki endilega raðað eftir erfiðleikastigi. Það má alltaf leysa seinni liði þó fyrri liðir hafi ekki verið leystir.

Skrifaðu lausnir þínar snyrtilega á lausnablöð sem þú færð afhent og merktu þau vel.

Tekið verður tillit til útreikninga við yfirferð á dæmum.

Góður frágangur hefur jákvæð áhrif!

Tafla yfir þekkta fasta

| Nafn | Tákn | Gildi |
|--|--------------|---|
| Hraði ljóss í tómarúmi | c | $3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ |
| Þyngdarhröðun við yfirborð jarðarinnar | g | $9,82 \text{ m/s}^2$ |
| Massi rafeindar | m_e | $9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ |
| Rafsvörunarstuðull tómarúms | ϵ_0 | $8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ s}^2 / (\text{m}^3 \text{ kg})$ |
| Frumhleðslan | e | $1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ |
| Þyngdarfastinn | G | $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 / (\text{kg s}^2)$ |
| Fasti Plancks | h | $6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$ |



1 Sterki kjarnakrafturinn

Um fjöllum um sterka kjarnakraftinn er gjarnan sleppt í inngangsnámskeiðum í eðlisfræði. Samkvæmt atómlíkaninu samanstanda frumeindir af kjarna þar sem róteindum með jákveða hleðslu og óhlöðnum nifteindum er pakkað þétt saman og rafeindaskýi þar sem rafeindir með neikvæða hleðslu sveima umhverfis kjarnann. Í þessu verkefni munum við einblína á kjarnann og við hunsum því öll áhrif rafeindanna.

Stærð kjarnans er breytileg eftir frumefnum og er aðallega háð því hversu margar róteindir og nifteindir, sem saman kallast kjarneindir, eru í kjarnanum. Látum n tákna fjölda nifteinda og látum p tákna fjölda róteinda í kjarnanum. Heildarfjöldi kjarneindanna er þá gefinn með $A = n + p$. Skoðum einfalt líkan af kjarnanum þar sem við lítum á kjarneindirnar sem gegnheilar kúlur með geisla $r_0 = 0,85 \text{ fm} = 0,85 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ og massa $m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

- (a) **(0,5 stig)** Finnið tölulegt gildi á eðlismassa kjarneindar, $\rho = \frac{m}{V}$, þar sem V er rúmmál hennar.
- (b) **(1,5 stig)** Lítum á kjarna með geisla R sem samanstendur af n nifteindum og p róteindum. Kjarneindirnar koma sér þannig fyrir að kjarninn hafi sama eðlismassa og kjarneindirnar. Ákvarðið ræðar tölur $a, b \in$ þannig að:

$$R = A^a r_0^b.$$

[Ef þér tekst ekki að leysa þennan lið máttu nota að $a = b = 1$ framvegis í dæminu]

Skoðum nú kraftana sem verka á milli tveggja aðliggjandi róteinda í kjarnanum. Þar sem eindirnar hafa massa verkar á þær aðdráttarkraftur vegna þyngdarlögmálsins sem er gefinn með:

$$F_G = \frac{Gm^2}{r^2}$$

þar sem $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$ er fasti sem kallast þyngdarfasti Newtons og r er fjarlægðin milli massamiðja róteindanna. Þar sem róteindirnar hafa hleðslu $q_e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ verkar einnig á þær fráhrindandi Coulombskraftur sem er gefinn með:

$$F_k = \frac{kq_e^2}{r^2}$$

þar sem $k = 8,99 \cdot 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2$ er fasti sem nefnist fasti Coulombs og r er fjarlægðin milli massamiðja róteindanna.

- (c) **(0,5 stig)** Sýnið að $F_k \gg F_G$ svo við getum hunsað áhrif þyngdarkraftsins framvegis í dæminu.
- (d) **(0,5 stig)** Finnið hröðunina sem róteindin finnur fyrir vegna Coulombkraftsins.
- (e) **(1 stig)** Árið 1935 sýndi japanski eðlisfræðingurinn Hideki Yukawa fram á að lýsa mætti kjarnakraftinum með:

$$F_Y = -\frac{\alpha}{r} \left(\frac{1}{r} + \beta \right) \exp(-\beta r)$$

þar sem $\beta = 6,9 \cdot 10^{14} \text{ m}^{-1}$ er fasti og r er fjarlægðin á milli massamiðja eindanna. Ákvarðið tölulegt gildi á fastanum α þannig að kjarninn haldist stöðugur.

[Ef þér tekst ekki að leysa þennan lið máttu nota að $\alpha = 1,3 \cdot 10^{-27} \text{ m}^2$ framvegis í dæminu]

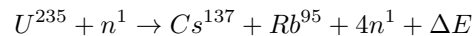
- (f) **(1 stig)** Stöðuorka Yukawa kraftsins F_Y er gefin með:

$$U_Y = -\frac{\alpha}{r} \exp(-\beta r)$$

Metið stöðuorkuna, ΔU , sem losnar vegna Yukawa kraftsins, við það að skilja tvær róteindir frá hver annarri.

[Ef þér tekst ekki að leysa þennan lið máttu nota að $\Delta U = 7,8 \cdot 10^{-13} \text{ J}$ framvegis í dæminu]

- (g) **(1 stig)** Við skoðum nú úran atómið U^{235} sem hefur 92 róteindir og 143 nifteindir. Athugið að Yukawa krafturinn verkar einnig á milli róteinda og nifteinda í kjarnanum. Hugsum okkur að við ætlum að fjarlægja eina kjarneind úr kjarna úran atómsins. Við metum orkuna sem losnar við það að fjarlægja eina kjarneind úr kjarnanum sem $A \cdot \Delta U$ þar sem A er fjöldi kjarneinda í kjarnanum. Hugsum okkur nú að við höldum áfram að fjarlægja róteindir og nifteindir úr úrankjarnanum (eina í einu) þar til við höfum breytt úrankjarnanum í sesínkjarnan, Cs^{137} , sem hefur 55 róteindir og 82 nifteindir. Hversu mikil orka losnar við það?
- (h) **(1 stig)** Hugsum okkur nú að úr þeim 37 róteindum og 61 nifteindum sem við fjarlægðum úr úraníum atóminu í lið (g) smíðum við rúbidín atóm, Rb^{95} sem hefur 37 róteindir og 58 nifteindir (3 nifteindir verða afgangss). Hversu mikla orku kostar að smíða rúbidínkjarna?
- (i) **(2 stig)** Fyrsta kjarnorkusprengjan, sem notuð var í hernaði, "Little Boy", innihélt 64 kg af úrani. Þar af hvarfaðist um það bil 1 kg af úrani og myndaði efnahvarf af gerðinni:



Metið orkuna, ΔE , sem losnaði í þessari kjarnorkusprengju.

Nokkrar upplýsingar sem gætu komið að gagni:

- Mólarmassi úrans er $M_U = 235,04$ g/ml.
- Mólarmassi sesíums er $M_{Cs} = 136,91$ g/ml.
- Mólarmassi rúbidíums er $M_{Rb} = 94,93$ g/ml.
- Avogadrosartalan er $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$.

2 Lögmál Snells

Ljós ferðast hægar í vatni heldur en í lofti. Þessu er lýst með brotstuðlinum, n , sem er skilgreindur þ.a.

$$n_{\text{efni}} = \frac{c}{c_{\text{efni}}},$$

þar sem c er hraði ljósins í tómarúmi og c_{efni} er hraði ljósins í efniinu sem um ræðir. Sem dæmi má nefna að gildi brotstuðulsins í vatni er $n_{\text{vatn}} = 1,33$ en í lofti er hann $n_{\text{loft}} = 1,00029 \approx 1$.

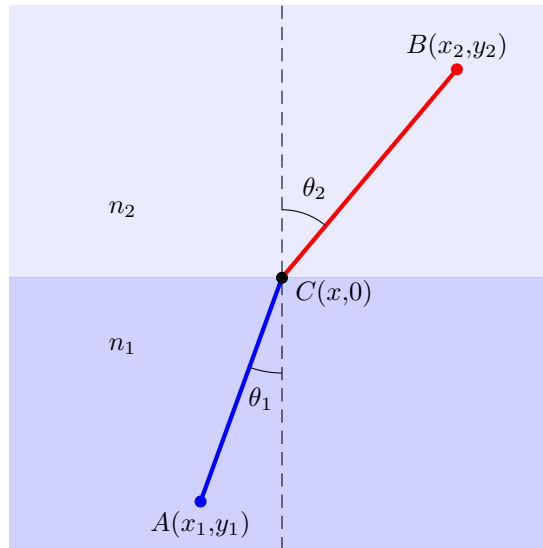
Þetta verkefni er í þremur hlutum. Í hluta A sýnum við hvernig lögmál Snells fæst sem afleiðing af lögmáli Fermats. Í hluta B skoðum við hvernig lögmáli Snells er beitt. Í hluta C skoðum við síðan hillingar vegna ljóssveigju. Hlutarnir eru náskyldir að efnistöfum en ef þú lendir í vandræðum í fyrsta hlutanum máttu gefa þér niðurstöðuna í jöfnu (1) í lið (b) og halda áfram í síðari hlutana (sem eru óháðir hvor öðrum).

A Lögmál Fermats (3 stig)

Lögmál Fermats í einfaldaðari mynd segir að:

„Ljósið ferðast ávallt þá leið milli tveggja punkta sem tekur stystan tíma að ferðast.“

Lítum á uppsetningu eins og á mynd 1. Látum $A(x_1, y_1)$ og $B(x_2, y_2)$ vera fasta punkta í efnum með brotstuðla n_1 og n_2 . Hraði ljóss er fasti inni í hvoru efniinu fyrir sig þannig að innan þeirra ferðast ljósið eftir beinum línunum. Við viljum ákvarða punkt $C(x, 0)$ á skilfleti efnanna þannig að það taki ljósið sem stystan tíma að ferðast vegalengdina $|AC| + |CB|$. Við hugsum um punktinn C þannig að honum fylgi rennimál sem leyfir okkur að draga hann fram og tilbaka meðfram skilfletinum sem fall af breytistærðinni x .



Mynd 1: Upsetningin sýnir hugsanlega braut ljósgeisla sem fer frá A til B með viðkomu í C.

- (a) (1 stig) Látum t_{AC} tákna tímann sem það tekur ljósið að ferðast frá A til C og látum t_{CB} tákna tímann sem það tekur ljósið að ferðast frá C til B . Sýnið að heildartíminn, t , sem það tekur ljósið að ferðast frá A til B með viðkomu í C sé gefinn með:

$$t = t_{AC} + t_{CB} = \frac{n_1}{c} \sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2} + \frac{n_2}{c} \sqrt{(x - x_2)^2 + y_2^2}.$$

- (b) (2 stig) Sýnið að lögmál Snells:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (1)$$

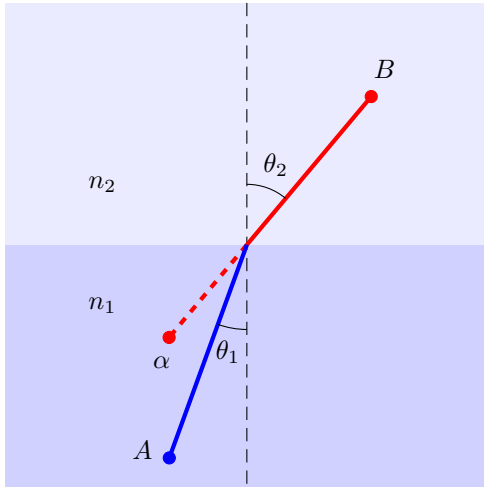
fæst sem afleiðing þess að lágmarka tímann t . Hornin θ_1 og θ_2 eru skilgreind á mynd 1.

B Ekki er allt sem sýnist (3,5 stig)

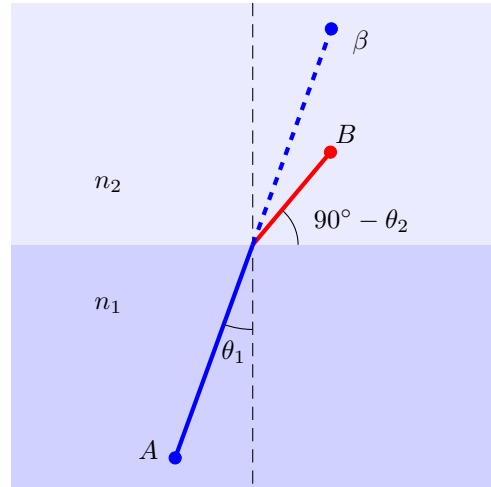
Fiskurinn Anna situr á dýpi d í miðri hringlaga tjörn með geisla r . Prösturinn Baldur situr í hæð h í tré sem er í láréttri fjarlægð k frá tjörninni. Látum A tákna punktinn sem Anna er í og látum B tákna punktinn sem Baldur er í.

(c) (0,5 stig) Hver er rúmfræðilega fjarlægðin, $\ell = |AB|$, milli Önnu og Baldurs?

Augun okkar eiga hinsvegar erfitt með að greina ljóssveigjuna sem verður við það að ljósið ferðast úr einum miðli í annan. Augun okkar halda að ljósið ferðist alltaf eftir beinum línum óháð því úr hvaða miðli ljósið kemur. Það er ástæðan fyrir því að reglustikur virðast bogna í vatni og að fiskar séu ekki þar sem að þeir virðast vera undir vatninu. Látum nú α vera punktinn sem fuglinum Baldri sýnist fiskurinn Anna vera í og látum β vera punktinn sem Önnu sýnist Baldur vera í (sjá myndir 2 og 3). Takið eftir að punktarnir α og β eru í lóðréttri línu við punktana A og B .



Mynd 2: Baldur er í punktinum B .
Honum sýnist Anna vera í punktinum α .



Mynd 3: Anna er í punktinum A .
Henni sýnist Baldur vera í punktinum β

(d) (1 stig) Látum $\ell_A = |A\beta|$ og $\ell_B = |B\alpha|$ tákna vegalengdirnar sem Anna og Baldur skynja sem fjarlægðina á milli þeirra. Sýnið að:

$$\frac{\ell_A}{n_1} = \frac{\ell_B}{n_2}.$$

(e) (0,5 stig) Ákvarðið stærðarröð lengdanna ℓ, ℓ_A og ℓ_B , það er, hvert eftirtalinna er rétt?

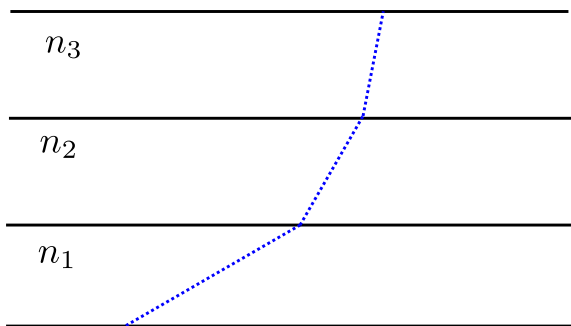
$$\ell < \ell_A < \ell_B, \quad \ell < \ell_B < \ell_A, \quad \ell_A < \ell < \ell_B, \quad \ell_A < \ell_B < \ell, \quad \ell_B < \ell_A < \ell, \quad \ell_B < \ell < \ell_A.$$

(f) (1,5 stig) Látum d' vera dýptina sem Baldri sýnist Anna vera í (sjá mynd 2). Sýnið að:

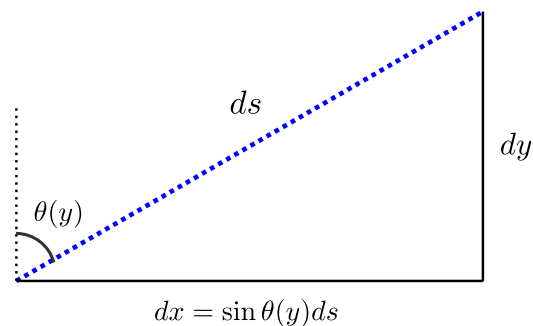
$$\frac{d'}{d} = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1}.$$

C Hillingar (3,5 stig)

Ljós ferðast hraðar í heitu lofti heldur en í köldu en það þýðir að brotstuðull lofts getur breyst samfelld með breytilegu hitastigi. Eins breytist lofthiti með hæð og er oftast hæstur næst yfirborði jarðarinnar en lækkar þegar ofar dregur. Þetta veldur því að fólk getur séð hillingar í eyðimörkum. Þá sýnist fólki það sjá vatn í þurrum eyðimerkursandinum en það er í rauninni ljós frá himninum sem fólk sér. Þetta má skýra með lögmáli Fermats (og með lögmáli Snells) því ljósið velur að fara þá leið sem lágmarkar ferðatímann en sú leið reynist vera sú sem liggur sem næst jörðinni því þar er loftið heitast. Við ætlum í þessum hluta að reyna að skýra þetta fyrirbrigði nánar.



Mynd 4: Sveigja ljósins sem fall af hækkanði hæð.



Mynd 5: Örmsæðarmynd sem sýnir hvernig $\sin \theta(y)$ er háð $y' = dy/dx$.

(g) (0,5 stig) Sýnið, með mynd 5 til hliðsjónar, að almennt gildi að:

$$\sin \theta(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}},$$

þar sem $y' = \frac{dy}{dx}$.

Góð nálgun fyrir því hvernig að brotstuðull andrúmsloftsins breytist sem fall af hæðinni y er gefin með:

$$n(y) = \sqrt{1 + \gamma y},$$

þar sem γ er jákvæður fasti sem hefur SI-einingar 1/m. Við höfum þá samkvæmt lögmáli Snells að:

$$n(y) \sin \theta(y) = n(0) \sin \theta(0).$$

En $n(0) = 1$ og ef $\theta_0 = \theta(0)$ þá höfum við fyrir öll $y > 0$ að:

$$n(y) \sin \theta(y) = \sin \theta_0.$$

Við viljum núna ákvarða ferilinn sem ljósið mun fylgja, það er, við viljum ákvarða y sem fall af x .

(h) (3 stig) Sýnið að ferli ljóssins sé lýst með:

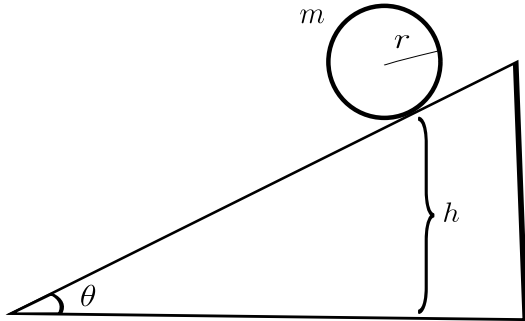
$$y(x) = \frac{\gamma}{4 \sin^2 \theta_0} x^2 + \cot \theta_0 x,$$

ef ljósgeislinn byrjar í $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

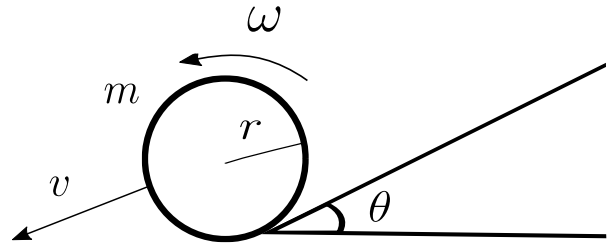
3 Magnuskrafturinn

Í þessu verkefni munum við skoða Magnuskraftinn sem kenndur er við þýska eðlisfræðinginn Heinrich Gustav Magnus. Kraftinn má gjarna sjá að verki í boltaþróttum þar sem boltinn snýst með ógnarhraða á meðan hann flýgur í gegnum loftið. Krafturinn veldur því að boltinn sveigir burt af leiðinni sem hann hefði annars fylgt í lofttæmi. Þetta má gjarnan sjá í aukaspyrnum í fótbolta sbr. orðatiltækið „Bend It Like Beckham“.

Greining okkar hefst á því að skoða gegnheila kúlu með massa m og geisla r sem rúllar án þess að renna niður skábretti sem hallar um θ gráður miðað við lárétt. Til að byrja með hunsum við bæði loftmótsstöðu og Magnuskraftinn, en við munum reyna að bæta þeim við í lokin á dæminu.



Mynd 6: Gegnheil kúla rúllar án þess að renna niður skábretti.



Mynd 7: Gegnheil kúla rúllar fram af skábretti.

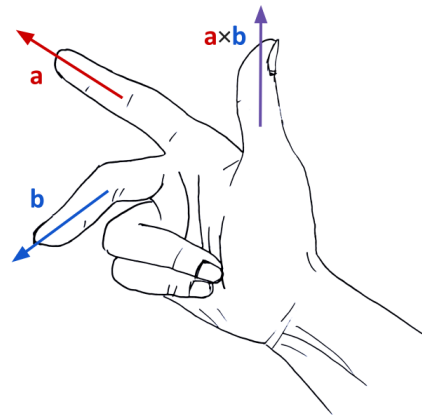
- (1,5 stig)** Látum kúluna byrja að rúlla úr kyrrstöðu niður skábrettið úr hæð h . Hver verður hraði kúlunnar, v og hornhraði kúlunnar, ω , um snúningsásinn þegar kúlan flýgur fram af skábrettinu?
- (0,5 stig)** Skábrettið stendur í hæð y yfir jörðu. Teiknið feril kúlunnar frá því að hún rúllar fram af skábrettinu og þar til að hún lendir á jörðinni. Hunsuð áhrif vegna loftmótsstöðu og Magnuskraftsins.

Nú kynnum við Magnuskraftinn til sögunnar. Fyrir hlut með hraða \vec{v} og hornhraða $\vec{\omega}$ er hann gefinn með:

$$\vec{F}_M = mS \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

Þar sem S er stuðull sem er háður lögun hlutarins og miðlinum sem hann hreyfist í og m er massi hlutarins. Vigurinn $\vec{\omega}$ er skilgreindur með hægri handar reglu þannig að hann stefnir beint út úr blaðinu á mynd 7 og \times táknar krossfeldi¹ vigranna $\vec{\omega}$ og \vec{v} . Ákvarða má stefnu krossfeldisins með hægri handar reglu eins og sést á mynd 8 hér til hægri.

- (1 stig)** Teiknið kraftamynd af kúlunni andartaki eftir að hún rúllar fram af skábrettinu. Á myndinni eiga Magnuskrafturinn og þyngdarkrafturinn að sjást greinilega.



Mynd 8: Hægri handar regla fyrir krossfeldið $\vec{a} \times \vec{b}$.

¹Reikna má krossfeldi vigranna $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ með:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}.$$

Við gerum framvegis ráð fyrir því að eftir að kúlan flýgur fram af skábrettinu, þá sé hornhraði hennar, ω , fastur. Þar sem að Magnuskrafturinn hefur þátt í lárétta stefnu er mun erfiðara að finna hvar kúlan lendir eftir að hafa fallið lóðrétta vegalengd y . Við viljum því skoða kraftajöfnuna sem fall af tíma, þ.e.

$$m\vec{a} = \vec{F}_g + \vec{F}_M.$$

Þar sem:

$$\vec{F}_g = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{F}_M(t) = mS \vec{\omega} \times \vec{v}(t).$$

(d) (1 stig) Finnið Magnuskraftinn, $\vec{F}_M(t) = mS \vec{\omega} \times \vec{v}(t)$, með því að reikna krossfeldi $\vec{\omega}$ og $\vec{v}(t)$.

(e) (0,5 stig) Sýnið að kraftajöfnuna megi rita á eftirfarandi formi:

$$m \begin{pmatrix} v'_x(t) \\ v'_y(t) \\ v'_z(t) \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} -S\omega v_y(t) \\ -g + S\omega v_x(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

þar sem $a_x = v'_x = \frac{dv_x}{dt}$.

(f) (1 stig) Sýnið, með því að diffra jöfnurnar hnit fyrir hnit, að:

$$v''_x(t) + S^2\omega^2 v_x(t) = S\omega g, \quad v''_y(t) + S^2\omega^2 v_y(t) = 0. \quad (2)$$

(g) (2,5 stig) Diffurjöfnuhneppið í jöfnu (2) hefur þá lausnina:

$$\begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = -v_0 \begin{pmatrix} \cos(\Omega t + \theta) \\ \sin(\Omega t + \theta) \end{pmatrix} - \frac{g}{\Omega} \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) - 1 \\ \sin(\Omega t) \end{pmatrix},$$

í hnitakerfi þar sem $-v_0(\cos \theta, \sin \theta)$ er upphafshraði agnarinnar þegar hún fer fram af skábrettinu og $\Omega = S\omega$. Sýnið að:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = -\frac{2v_0}{\Omega} \begin{pmatrix} \sin(\frac{1}{2}\Omega t) \cos(\frac{1}{2}\Omega t + \theta) \\ \sin(\frac{1}{2}\Omega t) \sin(\frac{1}{2}\Omega t + \theta) \end{pmatrix} + \frac{g}{\Omega^2} \begin{pmatrix} \Omega t - \sin(\Omega t) \\ \cos(\Omega t) - 1 \end{pmatrix}.$$

Hér gætu eftirfarandi hornafallareglur komið að góðum notum:

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right), \quad \text{og} \quad \cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right),$$

(h) (1 stig) Við gerum nú þá nálgun að $\sin \alpha \approx \alpha - \frac{1}{6}\alpha^3$ og $\cos \beta \approx 1 - \frac{1}{2}\beta^2$. Sýnið að þá sé:

$$x(t) \approx -v_0 \cos \theta t + \left(\frac{1}{6}gt^3 + \frac{1}{2}v_0 \sin \theta t^2\right) \Omega + \mathcal{O}(\Omega^2).$$

Þar sem $\mathcal{O}(\Omega^2)$ þýðir að við sleppum öllum þeim liðum sem innihalda Ω^n fyrir $n \geq 2$.

(i) (1 stig) Sýnið að í þessari nálgun sé til tími $\tau > 0$ þannig að $x(\tau) = 0$.