Önnur laugardagsæfingin í eðlisfræði 2019-2020

Nafn:

Bekkur:

Fastar

Nafn	Tákn	Gildi
Hraði ljóss í tómarúmi	c	$3{,}00 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
Þyngdarhröðun við yfirborð jarðar	g	$9{,}82\,\mathrm{m\,s^{-2}}$
Frumhleðslan	e	$1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Massi rafeindar	m_e	$9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Gasfastinn	R	$8{,}3145\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$
Fasti Coulombs	k_e	$8{,}988 \cdot 10^{9}\,\mathrm{N\,m^2\,C^{-2}}$
Rafsvörunarstuðull tómarúms	ϵ_0	$8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C^2\,s^2\,m^{-3}\,kg^{-1}}$
Þyngdarfastinn	G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
Geisli jarðarinnar	$R_\oplus$	$6{,}38 \cdot 10^{6}\,\mathrm{m}$
Geisli sólarinnar	$R_\odot$	$6{,}96 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}$
Massi jarðarinnar	$M_\oplus$	$5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$
Massi sólarinnar	$M_\odot$	$1{,}99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$
Stjarnfræðieiningin	AU	$1{,}50 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$

Svarblað

Krossar

Hver kross gildir 3 stig. Vinsamlegast skráið svörin ykkar við tilheyrandi krossi hér fyrir neðan:

K1	**K2**	**K3**	**K4**	**K5**	**K6**	**K7**	**K8**	**K9**	**K10**	**K11**	**K12**	**K13**	**K14**	**K15**
B	E	E	C	E	C	E	D	E	C	B	E	D	C	D

Krossar (45 stig)

K1. Eitt ljósár er skilgreint sem sú vegalengd sem ljósið ferðast á einu ári. Hvað er eitt ljósár langt?

(A) $3{,}43 \cdot 10^{14}\,\mathrm{m}$ (B) $9{,}46 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m}$ (C) $2{,}94 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m}$ (D) $4{,}39 \cdot 10^{17}\,\mathrm{m}$ (E) $7{,}53 \cdot 10^{18}\,\mathrm{m}$

Lausn: Höfum að vegalengdin, s, sem ljósið ferðast á einu ári er gefin með:

$$s = ct = \left(3,00 \cdot 10^8\right) \cdot \left(365 \cdot 24 \cdot 60^2\right) = 9{,}46 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m}.$$

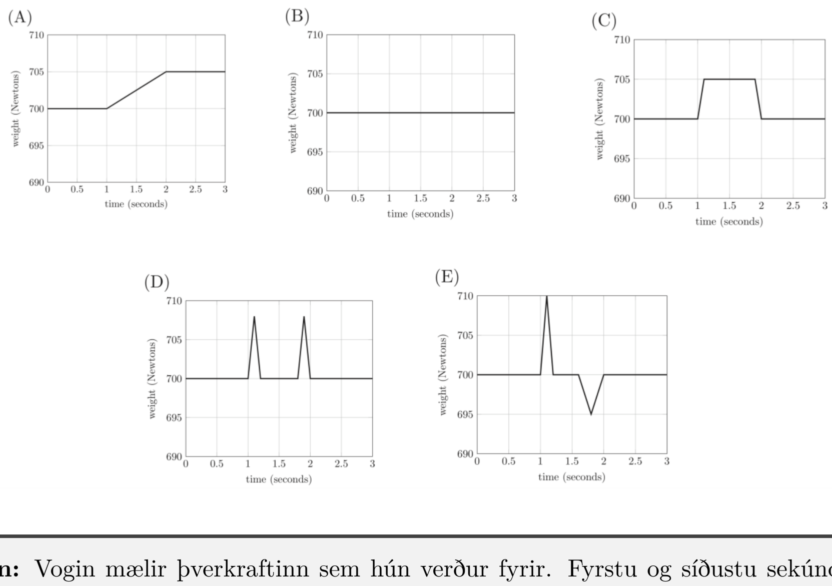
K2. Snæfríður stendur á lestarstöð og er að veifa frænku sinni, Ragnheiði, á sama tíma og lestin er að taka af stað úr kyrrstöðu með jafnri hröðun $0{,}25\,\mathrm{m/s^2}$. Hversu langur tími líður þar til að lestin hefur náð hámarkshraða sínum, $108\,\mathrm{km/klst}$?

(A) $12\,\mathrm{s}$ (B) $45\,\mathrm{s}$ (C) $72\,\mathrm{s}$ (D) $99\,\mathrm{s}$ (E) $120\,\mathrm{s}$

Lausn: Við höfum að:

$$v = at \implies t = \frac{v}{a} = \frac{\left(\frac{108}{3.6}\right)}{0.25} = 120\,\mathrm{s}.$$

K3. Jörmunrekur stendur á vog og heldur á þungri eðlisfræðibók sem er kyrrstæð við tímann $t = 0\,\mathrm{s}$. Við tímann $t = 1\,\mathrm{s}$ byrjar hann að lyfta bókinni upp þannig að við tímann $t = 2\,\mathrm{s}$ hefur hún færst upp um hálfan metra og er aftur kyrr. Hvert eftirfarandi grafa sýnir best hvað stóð á voginni sem fall af tíma?



Lausn: Vogin mælir þverkraftinn sem hún verður fyrir. Fyrstu og síðustu sekúnduna er allt kyrrt svo að $Þ_0 = (M_J + m_b)g$ þar sem M_J er massi Jörmunreks og m_b er massi bókarinnar. Til þess að byrja að færa bókina þarf Jörmunrekur að beita krafti á bókina og til að láta hana stöðvast aftur þarf að beita krafti á bókina í stefnu niður. Látum a vera hröðun bókarinnar. Þá er $a > 0$ þegar bókinni er lyft upp og $a < 0$ þegar bókin stöðvast. Vogin les þá:

$$Þ_a = M_J g + m_b(a + g).$$

Ef $a > 0$ þá er $Þ_a > Þ_0$. En ef $a < 0$ er $Þ_a < Þ_0$. Því er ljóst að rétt svar er (E).

K4. Vésteinn og Hálfdán sitja á löngum sleða sem stendur á núningslausum ís. Vésteinn situr vinstra meginn á sleðanum en Hálfdan situr hægra meginn. Hálfdan kastar bolta til Vésteins, sem grípur boltann. Hvað gerist við sleðann?

(A) Hann byrjar á að fara til vinstri en endar á því að vera kyrr.

(B) Hann byrjar á að fara til vinstri en endar á því að fara til hægri.

(C) Hann byrjar á að fara til hægri en endar á því að vera kyrr.

(D) Hann byrjar á að fara til hægri en endar á því að fara til vinstri.

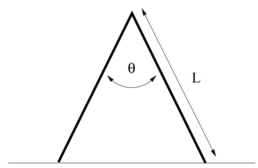
(E) Hann er kyrr allan tímann.

Lausn: Látum M vera samanlagðan massa sleðans, Vésteins og Hálfdáns. Látum m vera massa boltans. Þegar Hálfdan kastar boltanum gildir samkvæmt skriðþungavarðveislu að:

$$(M+m)\cdot 0 = -mv + Mu \implies u = \frac{m}{M}v$$

í stefnuna til hægri. Hinsvegar þegar að Vésteinn grípur boltann þá gefur skriðþungavarðveisla aftur að hraði sleðans er 0 svo rétt svar er (C).

K5. Myndin hér til hægri sýnir fætur spýtukalls. Fæturnir eru einsleitir og jafn langir, af lengd L. Hann stendur þannig að fætur hans mynda hornið θ. Núningsstuðullinn milli jarðarinnar og fóta spýtukallsins er μ. Hvert er stærsta hornið, θ, þannig að spýtukallinn detti ekki niður í spíkat. [*Ath.* Munið eftir **öllum** kröftunum]



(A) $\arcsin(2\mu)$ (B) $2\arcsin\left(\frac{\mu}{2}\right)$ (C) $2\arctan(\mu)$ (D) $\arctan(2\mu)$ (E) $2\arctan(2\mu)$

Lausn: Kraftarnir sem verka á spýtuna eru þyngdarkrafturinn, núningskrafturinn (til vinstri) og þverkrafturinn. Við höfum þá vægisjöfnuna:

$$0 = \tau_{\text{heild}} = \frac{1}{2}mgL\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \mu mgL\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - mgL\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

sem gefur að:

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\mu \implies \theta = 2\arctan(2\mu).$$

K6. Bolta er sleppt úr hæð h yfir jörðu. Í hæð $y < h$ er búið að koma fyrir planka sem hallar um 45° miðað við lárétt þannig að boltinn skoppar lárétt af plankanum. Finnið y þannig að boltinn lendi í sem mestri láréttri fjarlægð frá plankanum. Gera má ráð fyrir að áreksturinn sé fjaðrandi.

(A) $\frac{1}{10}h$ (B) $\frac{1}{5}h$ (C) $\frac{1}{2}h$ (D) $\frac{1}{\sqrt{2}}h$ (E) Boltinn lendir alltaf á sama stað óháð y.

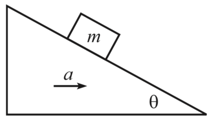
Lausn: Hraði boltans þegar hann lendir á plankanum er fenginn með $v = \sqrt{2g(h-y)}$. Svo er:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} vt \\ \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$$

Leysum tímann úr neðri jöfnunni, $t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$, og stingum inn í efri og fáum $x = 2\sqrt{y(h-y)}$. Við hámörkum síðan fallið $x(y) = 2\sqrt{y(h-y)}$ með tilliti til y. Fáum:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{h-2y}{\sqrt{y(h-y)}} = 0 \implies y = \frac{1}{2}h.$$

K7. Kubbur með massa m liggur á núningslausu skábretti sem hallar um horn θ miðað við lárétt. Skábrettið hefur hröðun a til hægri sem er þannig að kubburinn helst kyrr miðað við skábrettið. Hver er þverkrafturinn á kubbinn?



(A) mg (B) $mg\sin\theta$ (C) $\frac{mg}{\sin\theta}$ (D) $mg\cos\theta$ (E) $\frac{mg}{\cos\theta}$

Lausn: Hér er flóknara að snúa hnitakerfinu! Höfum:

$$\begin{pmatrix} ma \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Þ\sin\theta \\ Þ\cos\theta - mg \end{pmatrix} \implies Þ = \frac{mg}{\cos\theta}.$$

K8. Íó er tungl Júpíters. Umferðartími tunglsins er 1,769 dagar og meðalgeisli sporbrautarinnar er 421 800 km. Látum M_J tákna massa Júpíters og m_J tákna massa Jarðarinnar. Hvert er hlutfallið M_J/m_J?

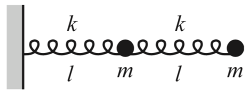
(A) 51 (B) 94 (C) 141 (D) 318 (E) 637

Lausn: Samkvæmt þriðja lögmáli Keplers er:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM_J}{4\pi^2} \implies M_J = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} = 1{,}9 \cdot 10^{27}\ \text{kg}$$

Massi jarðarinnar er gefinn á forsíðunni þannig að $\frac{M_J}{m_J} = 318$.

K9. Tveir gormar hafa sama gormstuðul k og óstrekkt lengd þeirra er svo gott sem núll. Nú er teygt á þeim um lengd ℓ og tveir massar festir við gormana sem og veggur eins og sjá má á myndinni hér til hægri. Mössunum er sleppt úr kyrrstöðu á sama tíma. Látum a_v tákna stærðina á hröðun vinstri massans og a_h hægri massans. Hver eru gildi a_v og a_h á augnablikinu eftir að mössunum hefur verið sleppt?



(A) $a_v = 2k\ell/m$ og $a_h = k\ell/m$.

(B) $a_v = k\ell/m$ og $a_h = 2k\ell/m$.

(C) $a_v = k\ell/m$ og $a_h = k\ell/m$.

(D) $a_v = 0$ og $a_h = 2k\ell/m$.

(E) $a_v = 0$ og $a_h = k\ell/m$.

Lausn: Fyrir vinstri massann höfum við: $ma_v = k\ell - k\ell = 0$ svo $a_v = 0$. Fyrir hægri massann höfum við: $ma_h = k\ell$ svo $a_h = \frac{k\ell}{m}$

K10. Pláneta hefur einsleitan eðlismassa, ρ, geisla R og þyngdarhröðunin við yfirborð plánetunnar er g. Hver er lausnarhraðinn frá yfirborði plánetunnar?

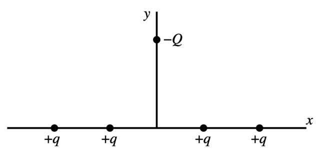
(A) $\frac{1}{2}\sqrt{gR}$ (B) $\sqrt{gR}$ (C) $\sqrt{2gR}$ (D) $2\sqrt{gR}$ (E) $\sqrt{\frac{1}{2}gR}$

Lausn: Látum $M = \frac{4\pi}{3}\rho R^3$ vera massa plánetunnar. Fyrir hlut með massa m fæst þá:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv_\infty^2 - \frac{GMm}{R_\infty} = 0$$

því $R_\infty = \infty$ og $v_\infty = 0$. Þetta gefur að $v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$. Þyngdarlögmálið gefur síðan að $mg = \frac{GMm}{R^2}$ þannig $gR = \frac{GM}{R}$ og því $v = \sqrt{2gR}$.

K11. Fjórum ögnum, hver með hleðslu $+q$ er komið fyrir á x-ásnum (samhverft um upphafspunktinn). Fimmtu hleðslunni, með hleðslu $-Q$, er komið fyrir á jákvæðum y-ásnum eins og sést á myndinni. Í hvaða stefnu er heildarkrafturinn sem verkar á fimmtu hleðsluna?



(A) $\uparrow$ (B) $\downarrow$ (C) $\rightarrow$ (D) $\leftarrow$ (E) Heildarkrafturinn er núll.

Lausn: Vegna samhverfu þá er heildarkrafturinn beint niður.

K12. Loftmótstöðu sem verkar á bolta er gjarnan lýst með dragakrafti, F_d. Dragakrafturinn er háður eðlismassa loftsins, ρ, geisla boltans, R og hraða boltans, v. Hver af eftirfarandi stærðum hefur réttar einingar og gæti því hugsanlega verið jöfn dragakraftinum?

(A) ρv (B) $\rho R v$ (C) $\rho R v^2$ (D) $\rho R^2 v$ (E) $\rho R^2 v^2$

Lausn: Beitum víddargreiningu. Setjum $F_D = \rho^\alpha R^\beta v^\gamma$ og ákvörðum α, β og γ. Nú er:

$$[F_D] = \frac{kgm}{s^2} = \left[\rho^\alpha R^\beta v^\gamma\right] = \left(\frac{kg}{m^3}\right)^\alpha (m)^\beta \left(\frac{m}{s}\right)^\gamma$$

því er ljóst að $\alpha = 1$, $\gamma = 2$ og því $\beta = 2$. Því er $F_D = \kappa\rho R^2 v^2$ þar sem κ er fasti.

K13. Lögmálið um svarthlutsgeislun segir að aflið, P, sem svarthlutur með yfirborðsflatarmál A geislar frá sér er háð hitastigi svarthlutarins, T, samkvæmt Stefan-Boltzman lögmálinu $P = \sigma A T^4$ þar sem $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$ er fasti. Því er spáð að eftir 5 milljarða ára muni sólin byrja að þenjast út þar til hún gleypir jörðina. Núna er hitastig sólarinnar $5778\,\mathrm{K}$ og geisli hennar $R_\odot = 6{,}96 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$. Því er spáð að hitastigið muni lækka niður í $5000\,\mathrm{K}$. Hvert verður afl sólarinnar eftir þennsluna?

(A) $3{,}6 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$ (B) $9{,}4 \cdot 10^{27}\,\mathrm{W}$ (C) $4{,}7 \cdot 10^{29}\,\mathrm{W}$ (D) $1{,}0 \cdot 10^{31}\,\mathrm{W}$ (E) $2{,}2 \cdot 10^{32}\,\mathrm{W}$

Lausn: Höfum: $P = \sigma A T^4 = 4\pi\sigma R^2 T^4 = 1{,}0 \cdot 10^{31}\,\mathrm{W}$.

K14. Hvert af eftirfarandi mælitækjum er **EKKI** hægt að nota til að mæla þyngdarhröðun jarðar, g?

(A) Gormvog (sem mælir þyngd) og þekktan massa.
(B) Pendúl af þekktri lengd og skeiðklukku.
(C) Skábretti sem hallar um þekkt horn, misþunga vagna með þekktan massa og skeiðklukku.
(D) Fallbyssu sem skýtur byssukúlum, af þekktum massa, með þekktum upphafshraða og málband.
(E) Hús af þekktri hæð H, skeiðklukku og óþekktan massa.

Lausn:

(A) Þá les gormvogin $w = mg$ þar sem m er þekkt er $g = \frac{w}{m}$.

(B) Þá er sveiflutíminn gefinn með: $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ svo $g = \frac{4\pi^2 \ell}{T^2}$.

(C) Þetta er ekki hægt því það vantar einhverja leið til að mæla lengdina sem vagnarnir fara. Vagnarnir koma allir niður á sama tíma óháð massa.

(D) Skjótum beint upp í loftið. Þá er $2gh = v_0^2$ svo $g = \frac{v_0^2}{2h}$.

(E) Hendum massanum niður: $H = \frac{1}{2}gt^2$ svo $g = \frac{2H}{t^2}$.

K15. Sporbraut halastjörnu sker sporbraut jarðar undir horni $\alpha = 45°$. Gerum ráð fyrir að sporbraut jarðar sé hringlaga með geisla R_0, sólfirð halastjörnunnar, $R_{\max}$ sé mun meiri en R_0 og að sporbrautirnar liggja í sama plani. Hver er sólnánd halastjörnunnar, $R_{\min}$?

(A) $1{,}9\ R_0$ (B) $1{,}0\ R_0$ (C) $0{,}71\ R_0$ (D) $0{,}50\ R_0$ (E) $0{,}28\ R_0$

Lausn: Við notum orkuvarðveislu og hverfiþungavarðveislu. Látum r_0, v_0 tákna fjarlægð og hraða halastjörnunnar þegar hún sker sporbraut jarðar. Látum r_1 og v_1 tákna fjarlægð og hraða halastjörnunnar þegar hún er í nándarstöðu. Látum M vera massa sólarinnar og m massa halastjörnunnar. Viljum ákvarða r_1. Höfum að:

$$a = \frac{R_{\min} + R_{\max}}{2} = \infty, \qquad \text{því } R_{\max} = \infty.$$

En þar með er heildarorka halastjörnunnar $E = -\frac{GMm}{2a} = 0$. Höfum að:

$$0 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_0}$$

Hverfiþungavarðveisla gefur síðan að: $mv_1r_1 = mv_0r_0\sin(45°)$ sem gefur því að:

$$v_1^2 = \frac{v_0^2 r_0^2}{2r_1^2} = GM\frac{r_0}{r_1^2} \implies \frac{GMm}{r_1} = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{GMm}{r_1} \cdot \frac{r_0}{2r_1} \implies r_1 = \frac{1}{2}r_0.$$

Dæmi 1: Tjarnarbolti? (USAPhO 2016) [15 stig]

Varmaflæði frá einu efni í annað er lýst með

$$P = \frac{\kappa A \Delta T}{d}$$

þar sem P er varmaaflið, A er þverskurðarflatarmálið þar sem fletirnir snertast, ΔT er hitastigsmunurinn á flötunum, d er þykktin á fletinum sem varminn flæðir í og κ er fasti sem kallast varmaleiðnistuðullinn.

Á vetrardegi nokkrum í Reykjavík er hitastigið $-5\,°\mathrm{C}$. Tjörnin í miðbæ Reykjavíkur hefur flatarmál $A = 0{,}25\,\mathrm{km}^2$ og dýpt $d_0 = 1{,}3\,\mathrm{m}$. Ofan á vatninu hefur myndast íslag af þykkt $þ_0 = 1{,}0\,\mathrm{cm}$. Botn vatnsins er við fast hitastig $4{,}0\,°\mathrm{C}$ (snerting við jörð). Markmið okkar er að finna lokaþykktina sem ísinn mun hafa.

Nokkrir fastar sem gætu komið að gagni í þessu dæmi:

Nafn	Tákn	Gildi
Eðlisvarmi vatns	c_{vatn}	$4200\,\mathrm{J/(kgK)}$
Eðlisvarmi íss	$c_{\text{ís}}$	$2100\,\mathrm{J/(kgK)}$
Varmaleiðni vatns	κ_{vatn}	$0{,}57\,\mathrm{W/(mK)}$
Varmaleiðni íss	$\kappa_{\text{ís}}$	$2{,}2\,\mathrm{W/(mK)}$
Eðlismassi vatns	ρ_{vatn}	$1000\,\mathrm{kg/m^3}$
Eðlismassi íss	$\rho_{\text{ís}}$	$920\,\mathrm{kg/m^3}$

(a) Vatn þennst út þegar það frýs. Finnið upphaflega dýpt tjarnarinnar, d, áður en íslagið myndaðist.

(b) Látum $h_þ$ tákna dýpt vatnsins þegar þykkt ísins er þ. Ákvarðið $h_þ$ sem fall af d, þ og þekktum föstum.

(c) Finnið lokaþykktina, þ, sem ísinn mun hafa.

Lausn:

(a) Höfum þá að $\rho_{\text{ís}} V_{\text{ís}} = \rho_{\text{vatn}} V_{\text{vatn}}$ og $V_{\text{ís}} = Aþ_0$ en $V_{\text{vatn}} = A\delta$ svo $\delta = \frac{\rho_{\text{ís}}}{\rho_{\text{vatn}}} þ_0$. Því er:

$$d = d_0 + \delta = d_0 + \frac{\rho_{\text{ís}}}{\rho_{\text{vatn}}} þ_0 = 1{,}300\,92\,\mathrm{m}.$$

(b) Þá er $(d - h_þ)\rho_{\text{vatn}} = þ\rho_{\text{ís}}$ svo

$$h_þ = \frac{d\rho_{\text{vatn}} - þ\rho_{\text{ís}}}{\rho_{\text{vatn}}}.$$

(c) Ísinn hættir að stækka þegar varmaflæðið frá vatninu í ísinn er jafnt varmaflæðinu frá loftinu í ísinn. Höfum því:

$$\frac{\kappa_{\text{vatn}} A \Delta T_{\text{vatn}}}{h_þ} = \frac{\kappa_{\text{ís}} A \Delta T_{\text{ís}}}{þ}$$

Notum síðan niðurstöðuna í (b)-lið og fáum:

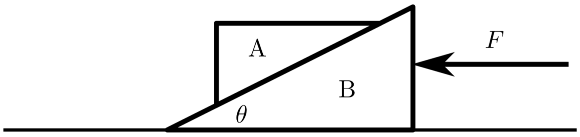
$$\frac{\rho_{\text{vatn}} \kappa_{\text{vatn}} \Delta T_{\text{vatn}}}{d\rho_{\text{vatn}} - þ\rho_{\text{ís}}} = \frac{\kappa_{\text{ís}} \Delta T_{\text{ís}}}{þ}$$

þ.e. $$\rho_{\text{vatn}} \kappa_{\text{vatn}} \Delta T_{\text{vatn}} þ = \kappa_{\text{ís}} \Delta T_{\text{ís}} \left(d\rho_{\text{vatn}} - þ\rho_{\text{ís}}\right)$$

þ.e. $$þ = \frac{\rho_{\text{vatn}} \kappa_{\text{ís}} \Delta T_{\text{ís}}}{\rho_{\text{vatn}} \kappa_{\text{vatn}} \Delta T_{\text{vatn}} + \rho_{\text{ís}} \kappa_{\text{ís}} \Delta T_{\text{ís}}} d = 1{,}154\,\mathrm{m}.$$

Dæmi 2: Martröð! Skábretti ofan á skábretti [20 stig]

Tveim skábrettum er komið fyrir á láréttum fleti. Núningsstuðullinn milli skábrettanna er μ og núningsstuðullinn milli neðra skábrettisins, B, og lárétta flatarins er μ. Neðra skábrettið hallar um θ gráður miðað við lárétt. Massi skábrettis A er m og massi skábrettis B er $M = 2m$. Láréttur kraftur F verkar á skábretti B eins og sést á myndinni.



Ákvarðið þau gildi á F (sem fall af m, g, θ og μ) þannig að efra skábrettið helst kyrrt miðað við neðra skábrettið (rennur semsagt hvorki upp né niður).

[*Ábending:* Ekki snúa hnitakerfinu! Skrifið niður kraftajöfnu fyrir öllu kerfinu og síðan fyrir kubb A.]

Lausn: Látum a vera hröðun kerfisins til vinstri. Þá höfum við:

$$3ma = F - 3\mu mg \implies F = 3m\left(a + \mu g\right) \tag{1}$$

Tökum eftir því að ef F er lítill (og $\mu \leqslant \tan\theta$) þá byrjar kubbur A að renna niður skábrettið. Ef F er stór (og $\mu \leqslant \frac{1}{\tan\theta}$) þá byrjar kubbur A að renna upp skábrettið. Þurfum að skoða bæði þessi tilvik. Byrjum á fyrra tilvikinu: Þegar kubbur A byrjar að renna niður. Þá er núningskrafturinn upp meðfram skábrettinu. Höfum þá kraftajöfnuna:

$$\begin{pmatrix} ma \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Þ}\sin\theta - F_{\text{nún}}\cos\theta \\ -mg + \text{Þ}\cos\theta + F_{\text{nún}}\sin\theta \end{pmatrix}$$

Notum að $F_{\text{nún}} = \mu\text{Þ}$ svo að við höfum jöfnuhneppið:

$$ma = \text{Þ}\left(\sin\theta - \mu\cos\theta\right), \qquad mg = \text{Þ}\left(\cos\theta + \mu\sin\theta\right)$$

þar sem a og Þ eru óþekktu stærðirnar. Leysum fyrir a og fáum:

$$a = \left(\frac{\sin\theta - \mu\cos\theta}{\cos\theta + \mu\sin\theta}\right) g.$$

En þar með fæst samkvæmt jöfnu (1) að:

$$F_{\min} = 3mg\left(\frac{\sin\theta - \mu\cos\theta}{\cos\theta + \mu\sin\theta} + \mu\right).$$

Skoðum síðan hitt tilvikið þegar F er svo stórt að kubburinn byrjar að fara upp - þá er núningskrafturinn niður meðfram skábrettinu. Höfum þá kraftajöfnuna fyrir kubb A:

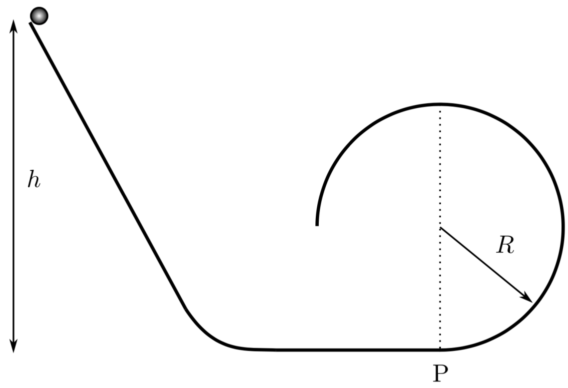
$$\begin{pmatrix} ma \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Þ}\sin\theta + F_{\text{nún}}\cos\theta \\ -mg + \text{Þ}\cos\theta - F_{\text{nún}}\sin\theta \end{pmatrix}$$

Leysum fyrir a með því að nota að $F_{\text{nún}} = \mu\text{Þ}$ eins og áður og fáum að:

$$F_{\max} = 3mg\left(\frac{\sin\theta + \mu\cos\theta}{\cos\theta - \mu\sin\theta} + \mu\right).$$

Dæmi 2: Rennibraut (USAPhO 2016) [20 stig]

Einsleitri kúlu er sleppt úr hæð h á rennibrautinni hér fyrir neðan. Kúlan rúllar án þess að renna á brautinni. Gerum ráð fyrir að núningur sé hverfandi lítill svo að engin orka tapast vegna núnings.



(a) Ákvarðið, h_{min}, þ.e. minnsta mögulega gildið á hæðinni h þannig að kúlan nái að rúlla allan hringinn.

[*Ábending:* Skoðið þverkraftinn sem verkar á kúluna í hæsta punkti.]

(b) Kúlunni er sleppt úr hæð $h < h_{\text{min}}$ þannig að hún nær ekki að komast í hæsta punkt í gjörðinni. Hún fellur aftur niður í punkt P. Markmið okkar er að ákvarða hæðina sem kúlunni var sleppt úr sem fall af R. Skilgreinum upphafspunkt hnitakerfisins í P. Þá má skrifa staðsetningu á gjörðinni sem:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\sin\theta \\ R(1+\cos\theta) \end{pmatrix}, \qquad \theta \in [0°, 180°[.$$

Látum θ vera hornið þar sem ögnin losnar af gjörðinni og v vera hraða hennar þegar hún losnar. Sýnið að hæðin y þar sem hún losnar er gefin með:

$$y = R(1+\cos\theta) = \frac{1}{2}g\left(\frac{R}{v}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 - v\sin\theta\left(\frac{R}{v}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

(c) Notið jöfnuna hér á undan til þess að ákvarða hornið θ þar sem ögnin losnar.

[*Ábending:* Þið þurfið líka að skoða þverkraftinn sem verkar á kúluna einmitt þegar hún dettur.]

(d) Notið niðurstöðuna á undan og orkuvarðveislu til að finna hæðina h, þannig að kúlan lendi í P.

Lausn: Látum kúluna hafa massa m og geisla r. Hverfitregða kúlunnar er þá $I = \frac{2}{5}mr^2$.

(a) Þá er þverkrafturinn efst $Þ > 0$. Ef þverkrafturinn væri 0 myndi kúlan detta. Höfum þá samkvæmt orkuvarðveislu (notum einnig að kúlan rúllar án þess að renna svo $v_{\text{cm}} = r\omega$)

$$mgh = 2mgR + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = 2mgR + \frac{1}{2}mv^2(1+\gamma), \qquad \text{þar sem } \gamma = \frac{2}{5}.$$

Kraftajafnan og hringhreyfingin gefur síðan í efsta punkti að: $m\frac{v^2}{R} = mg$ svo við fáum:

$$mgh = 2mgR + \frac{mgR(1+\gamma)}{2} \implies h = \frac{(5+\gamma)}{2}R = \frac{27}{10}R.$$

(b) Þurfum aðeins að sýna seinna jafnaðarmerkið. Hraði agnarinnar þegar hún losnar er:

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\cos\theta \\ v\sin\theta \end{pmatrix}$$

Stöðujöfnurnar gefa síðan að:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x t \\ \frac{1}{2}gt^2 - v_y t \end{pmatrix}$$

Efri jafnan gefur að $t = \frac{x}{v_x} = \frac{R}{v}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ sem við stingum inn í neðri jöfnuna og höfum fáum:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 - v_y t = \frac{1}{2}g\left(\frac{R}{v}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 - v\sin\theta\left(\frac{R}{v}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right).$$

(c) Notum niðurstöðuna í liðnum á undan:

$$R(1+\cos\theta) = \frac{gR^2\sin^2\theta}{2v^2\cos^2\theta} - \frac{R\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

Styttum út R og margföldum í gegn með $\cos\theta$ þá fæst:

$$(1+\cos\theta)\cos\theta + \sin^2\theta = \frac{gR\sin^2\theta}{2v^2\cos\theta}$$

Notum $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ vinstra meginn. Þar sem Þ $= 0$ þegar kúlan losnar þá gefur kraftajafnan að: $m\frac{v^2}{R} = mg\cos\theta$ en þá er $\frac{gR}{v^2} = \frac{1}{\cos\theta}$ svo:

$$1+\cos\theta = \frac{\sin^2\theta}{2\cos^2\theta} = \frac{1-\cos^2\theta}{2\cos^2\theta} = \frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{2\cos^2\theta}$$

sem gefur að:

$$2\cos^2\theta = 1-\cos\theta \implies \cos\theta = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -1 \end{cases}$$

Efri lausnin gefur $\theta = 60°$, neðri lausnin gefur $\theta = 180°$ sem við hunsum því $\theta \in [0°, 180°[$.

(d) Hraði agnarinnar þegar hún losnar finnst með orkuvarðveislu:

$$mgh = mgy + \frac{1}{2}mv^2(1+\gamma) \implies h = y + \frac{v^2}{2g}(1+\gamma)$$

En nú vitum við að $y = R(1+\cos\theta) = \frac{3}{2}R$ þar að auki sem $v^2 = gr\cos\theta = \frac{1}{2}gR$ svo:

$$h = \frac{3}{2}R + \frac{1}{4}(1+\gamma)R = \frac{37}{20}R.$$