Þriðja laugardagsæfingin í eðlisfræði 2021

Nafn:

Bekkur:

Fastar

Nafn	Tákn	Gildi
Hraði ljóss í tómarúmi	c	$3{,}00 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
Þyngdarhröðun við yfirborð jarðar	g	$9{,}82\,\mathrm{m\,s^{-2}}$
Frumhleðslan	e	$1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Massi rafeindar	m_e	$9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Gasfastinn	R	$8{,}3145\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$
Fasti Coulombs	k_e	$8{,}988 \cdot 10^{9}\,\mathrm{N\,m^{2}\,C^{-2}}$
Rafsvörunarstuðull tómarúms	ϵ_0	$8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C^{2}\,s^{2}\,m^{-3}\,kg^{-1}}$
Þyngdarfastinn	G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^{3}\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
Geisli jarðarinnar	$R_\oplus$	$6{,}38 \cdot 10^{6}\,\mathrm{m}$
Geisli sólarinnar	$R_\odot$	$6{,}96 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}$
Massi jarðarinnar	$M_\oplus$	$5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$
Massi sólarinnar	$M_\odot$	$1{,}99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$
Stjarnfræðieiningin	AU	$1{,}50 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$

Krossar

Hver kross gildir 3,5 stig. Vinsamlegast skráið svörin ykkar við tilheyrandi krossi hér fyrir neðan:

K1	**K2**	**K3**	**K4**	**K5**	**K6**	**K7**	**K8**	**K9**	**K10**
B	A	A	C	C	D	D	A	E	D

K11	**K12**	**K13**	**K14**	**K15**	**K16**	**K17**	**K18**	**K19**	**K20**
D	D	B	C	E	C	A	C	B	C

Krossar (70 stig)

K1. Lögmál Hookes um fjaðurmagn segir að krafturinn sem verkar frá gormi sé í réttu hlutfalli við lengingu gormsins, þ.e. $F = -kx$ þar sem x táknar lengingu gormsins. Hver er SI-eining gormstuðulsins, k?

(A) m/s (B) $\mathrm{kg/s^2}$ (C) J (D) s/m (E) $\mathrm{kg/m^2}$

Lausn: Fáum með víddargreiningu að:

$$[k] = \frac{[F]}{[x]} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{kg\,m/s^2}}{m} = \mathrm{kg/s^2}.$$

K2. Hjól með geisla 0,50 m snýst með hornhraða 1,0 rad/s. Hversu langt snýst hjólið eftir jörðinni á 4,0 s ef það rúllar án þess að renna?

(A) 2,0 m (B) 3,1 m (C) 4,0 m (D) $6{,}3\,\mathrm{m/s^2}$ (E) $12{,}6\,\mathrm{m/s^2}$

Lausn: Þá er $v_{\mathrm{cm}} = r\omega = 0{,}50\,\mathrm{m} \cdot 1{,}0\,\mathrm{rad/s} = 0{,}50\,\mathrm{m/s}$ svo $\Delta s = vt = 0{,}50\,\mathrm{m/s} \cdot 4{,}0\,\mathrm{s} = 2{,}0\,\mathrm{m}$.

K3. Kraftur $F = 6{,}0\,\mathrm{N}$ verkar lárétt á 10 kg kassa. 3,0 N núningskraftur verkar gegn F. Hver er hröðun kassans?

(A) $0{,}30\,\mathrm{m/s^2}$ (B) $0{,}50\,\mathrm{m/s^2}$ (C) $0{,}60\,\mathrm{m/s^2}$ (D) $0{,}90\,\mathrm{m/s^2}$ (E) $3{,}0\,\mathrm{m/s^2}$

Lausn: Höfum þá að:

$$ma = F - F_{\text{nún}} \implies a = \frac{F - F_{\text{nún}}}{m} = \frac{6{,}0\,\mathrm{N} - 3{,}0\,\mathrm{N}}{10\,\mathrm{kg}} = 0{,}30\,\mathrm{m/s^2}$$

K4. Kubbur með massa 10 kg rennur eftir láréttum, núningslausum fleti með hraða 1 m/s. Nú ýtum við á kubbinn með föstum krafti F samsíða hreyfistefnu kubbsins þar til að kubburinn hefur ferðast 5 m frá því að við byrjuðum að ýta á kubbinn. Eftir að við hættum að ýta á kubbinn hefur hraði hans aukist upp í 2 m/s. Hver var stærð kraftsins?

(A) 1 N (B) 2 N (C) 3 N (D) 4 N (E) 5 N

Lausn: Byrjum á því að athuga að:

$$2a\Delta s = v^2 - v_0^2 \implies a = \frac{v^2 - v_0^2}{2\Delta s} = \frac{2^2 - 1^2}{2 \cdot 5} = 0{,}3\,\mathrm{m/s^2}.$$

En þá er $F = ma = 3\,\mathrm{N}$.

K5. Kassi með massa m liggur á núningslausu borði. Á hann verkar kraftur $F_1 = 45\,\mathrm{N}$ í stefnu x-áss, og annar kraftur $F_2 = 30\,\mathrm{N}$ í gagnstæða stefnu. Hver er massi kassans ef hröðun hans er $3{,}0\,\mathrm{m/s^2}$?

(A) 0,30 kg (B) 3,0 kg (C) 5,0 kg (D) 25 kg (E) 35 kg

Lausn: Höfum þá að:

$$F_{\text{heild}} = ma = F_1 - F_2 \implies m = \frac{F_1 - F_2}{a} = \frac{45\,\mathrm{N} - 30\,\mathrm{N}}{3{,}0\,\mathrm{m/s^2}} = 5{,}0\,\mathrm{kg}.$$

K6. Einfaldri eldflaug er skotið á loft úr kyrrstöðu með heildarhröðun $25\,\mathrm{m/s^2}$ upp á við. Slökkt er á vélinni eftir 5,0 s. Gerum ráð fyrir að massi eldflaugarinnar haldist fastur og að engin loftmótstaða verki á eldflaugina. Hversu hátt kemst eldflaugin?

(A) 310 m (B) 490 m (C) 770 m (D) 1100 m (E) 1600 m

Lausn: Höfum þá að hraði eldflaugarinnar þegar slökkt er á vélinni er:

$$v = at = 25\,\mathrm{m/s^2} \cdot 5{,}0\,\mathrm{s} = 125\,\mathrm{m/s}.$$

Þá er hún í hæð

$$h_1 = \frac{1}{2}at^2 = 313\,\mathrm{m}$$

Notum síðan tímaóháðu til þess að finna mestu hæðina eftir að slökkt hefur verið á vélinni en hún er gefin með:

$$2a\Delta s = v^2 - v_0^2 \implies \Delta s = \frac{v^2 - v_0^2}{-2g} = \frac{(125\,\mathrm{m/s})^2}{2 \cdot 9{,}82\,\mathrm{m/s^2}} = 795\,\mathrm{m}.$$

En þá er heildarhæðin:

$$h_{\max} = h_1 + \Delta s = 313\,\mathrm{m} + 795\,\mathrm{m} = 1100\,\mathrm{m}.$$

K7. Kúla rúllar upp skábretti, stoppar og rúllar síðan niður til baka. Allan tímann rúllar hún án þess að renna og engin orka tapast vegna núnings. Í hvaða stefnu verkar núningskrafturinn á kúluna þegar hún rúllar? Stefnur í svarmöguleikunum eru samsíða skábrettinu.

(A) Upp á leiðinni upp og niður á leiðinni niður.

(B) Niður á leiðinni upp og upp á leiðinni niður.

(C) Það verkar enginn núningskraftur á kúluna.

(D) Alltaf upp.

(E) Alltaf niður.

Núningskrafturinn er að hægja á snúningnum. Það þýðir að þegar kúlan er að rúlla upp skábrettið þá er núningskrafturinn upp skábrettið. Síðan þegar kúlan byrjar að rúlla aftur niður þá er það aftur núningskrafturinn sem er að verki við að auka hornhraða kúlunnar en þá þarf núningskrafturinn að vera aftur upp skábrettið. Svarið er því alltaf upp eða (D).

K8. Gegnheil stálkúla, giftingarhringur og kerti rúlla án þess að renna niður skábretti úr kyrrstöðu á sama tíma. Hvaða hlutur verður fyrstur niður skábrettið?

(A) Stálkúlan.

(B) Giftingarhringurinn.

(C) Kertið.

(D) Hlutirnir koma allir niður á sama tíma.

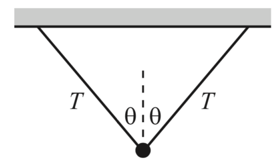
(E) Ekki er hægt að segja til um það.

Lausn: Látum σ tákna stuðulinn fyrir framan hverfitregður hlutanna. Þá er $I = \sigma m r^2$ fyrir alla hlutina. En við fáum að þar sem að hlutirnir rúlla án þess að renna niður skábrettið að:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{cm}}^2 + \frac{1}{2}I_{\mathrm{cm}}\omega^2 = \frac{1}{2}(1+\sigma)mv_{\mathrm{cm}}^2 \implies v_{\mathrm{cm}} = \sqrt{\frac{2gh}{1+\sigma}}$$

og við ályktum því að hraði hlutanna þegar þeir koma niður minnkar þegar σ stækkar en þar af leiðandi þá kemur sá hlutur niður fyrstur sem hefur minnst σ. En $\sigma_{\text{stálkúla}} = \frac{2}{5} < \sigma_{\text{kerti}} = \frac{1}{2} < \sigma_{\text{giftingarhringur}} = 1$ svo við ályktum að stálkúlan kemur fyrst niður, síðan kertið og loks giftingarhringurinn. Takið líka eftir að niðurstaðan er óháð massa hlutanna og geisla þeirra!

K9. Tveir strengir halda uppi massa m. Hver er togkrafturinn, T, í strengjunum?

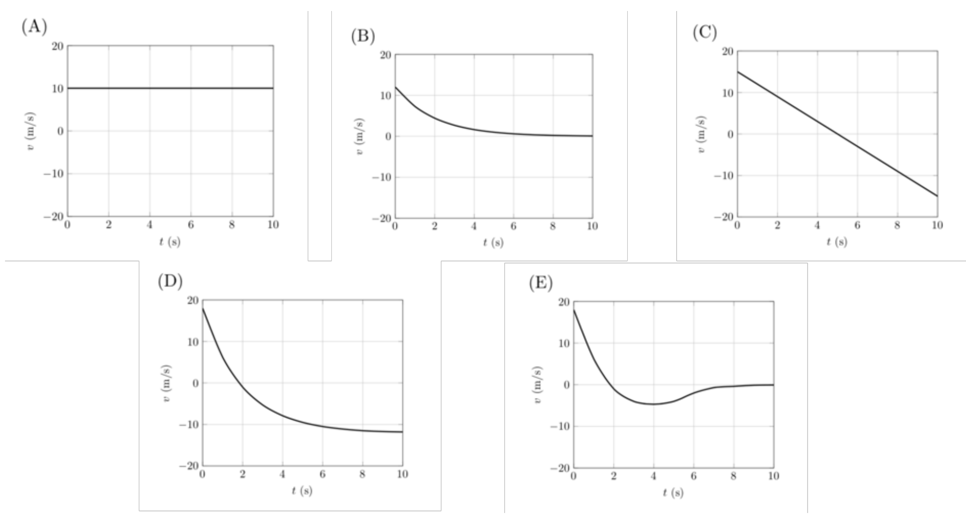


(A) $\frac{1}{2}mg$ (B) $\frac{1}{2}mg\sin\theta$ (C) $\frac{1}{2}mg\cos\theta$ (D) $\frac{mg}{2\sin\theta}$ (E) $\frac{mg}{2\cos\theta}$

Lausn: Höfum þá að:

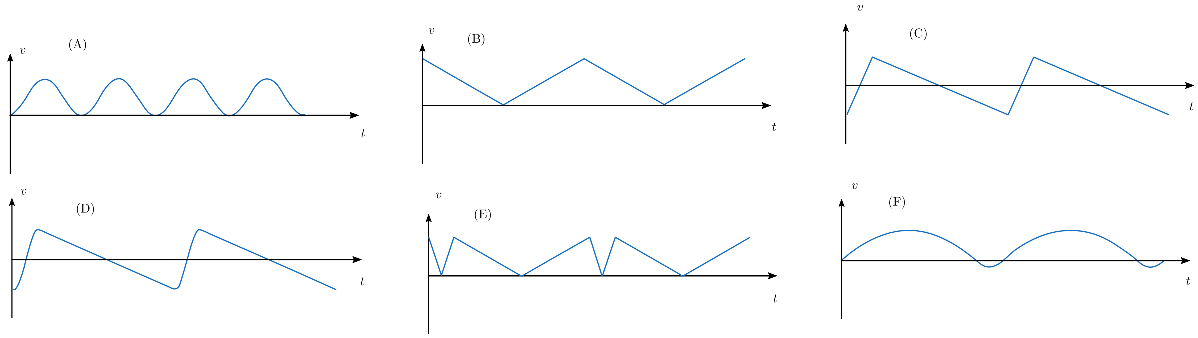
$$mg = 2T\cos\theta \implies T = \frac{mg}{2\cos\theta}.$$

K10. Lítum á bolta sem er kastað upp í loftið. Loftmótstaða verkar á boltann. Hvert af eftirfarandi gröfum lýsir best hraða boltans sem fall af tíma?



Svar: (D).

K11. Lítum á manneskju sem er að hoppa á trampólíni. Hvert af eftirfarandi gröfum lýsir best hraða-tíma grafi manneskjunnar frá því að hún lendir á trampólíninu við tímann $t = 0$ og þar til að hún hefur skoppað tvisvar á trampólíninu.



Svar: (D) en líka gefið rétt fyrir (C) þó að það sé ekki samfellt diffranlegt.

K12. Tvær plánetur, A og B, hafa sama eðlismassa. Pláneta A hefur tvisvar sinnum stærri geisla en B. Þyngdarhröðunin á plánetu A er g_A og á plánetu B er hún g_B. Hvert er hlutfallið g_A/g_B?

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2 (E) 4

Lausn: Rifjum upp að

$$mg = G\frac{Mm}{R^2} \implies g = \frac{GM}{R^2}$$

Við fáum því að:

$$\frac{g_A}{g_B} = \frac{\frac{GM_A}{R_A^2}}{\frac{GM_B}{R_B^2}} = \frac{M_A}{M_B}\frac{R_B^2}{R_A^2}$$

En $M = \rho V = \rho\frac{4\pi}{3}R^3$ þannig að:

$$\frac{g_A}{g_B} = \frac{M_A}{M_B}\frac{R_B^2}{R_A^2} = \frac{\rho\frac{4\pi}{3}R_A^3}{\rho\frac{4\pi}{3}R_B^3}\frac{R_B^2}{R_A^2} = \frac{R_A}{R_B} = \frac{2R_B}{R_B} = 2.$$

K13. Tvær plánetur, A og B, eru á hringhreyfingu um stjörnu með massann M. Báðar pláneturnar hafa sama massa m. Pláneta B er tvisvar sinnum lengra frá stjörnunni heldur en pláneta A. Látum L_A tákna hverfiþunga plánetu A og L_B tákna hverfiþunga plánetu B. Hvert er hlutfallið L_B/L_A?

(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) 2 (D) $2\sqrt{2}$ (E) 4

Lausn: Fáum samkvæmt þyngdarlögmálinu (og af því að pláneturnar eru á hringhreyfingu) að

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \implies v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

En þar með er

$$\frac{L_B}{L_A} = \frac{mv_Br_B}{mv_Ar_A} = \frac{\sqrt{\frac{GM}{r_B}}r_B}{\sqrt{\frac{GM}{r_A}}r_A} = \sqrt{\frac{r_B}{r_A}} = \sqrt{\frac{2r_A}{r_A}} = \sqrt{2}.$$

K14. Hvert af eftirfarandi mælitækjum er **EKKI** hægt að nota til að mæla þyngdarhröðun jarðar, g?

(A) Gormvog (sem mælir þyngd) og þekktan massa.
(B) Pendúl af þekktri lengd og skeiðklukku.
(C) Skábretti sem hallar um þekkt horn, misþunga vagna með þekktan massa og skeiðklukku.
(D) Fallbyssu sem skýtur byssukúlum, af þekktum massa, með þekktum upphafshraða og málband.
(E) Hús af þekktri hæð H, skeiðklukku og óþekktan massa.

Lausn:

(A) Þá les gormvogin $w = mg$ þar sem m er þekkt er $g = \frac{w}{m}$.

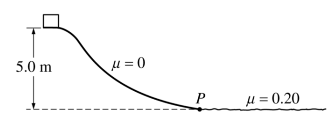
(B) Þá er sveiflutíminn gefinn með: $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ svo $g = \frac{4\pi^2\ell}{T^2}$.

(C) Þetta er ekki hægt því það vantar einhverja leið til að mæla lengdina sem vagnarnir fara. Vagnarnir koma allir niður á sama tíma óháð massa.

(D) Skjótum beint upp í loftið. Þá er $2gh = v_0^2$ svo $g = \frac{v_0^2}{2h}$.

(E) Hendum massanum niður: $H = \frac{1}{2}gt^2$ svo $g = \frac{2H}{t^2}$.

K15. Kubbur með massa 3,0 kg rennur úr kyrrstöðu niður brekku með hverfandi núning úr hæðinni 5,0 m. Eftir að kubburinn hefur runnið framhjá punkti P tekur við hrjúft, lárétt yfirborð þar sem núningsstuðullinn milli kubbsins og yfirborðsins er $0,20$. Hversu langt rennur kubburinn eftir lárétta yfirborðinu áður en hann stöðvast?



(A) 0,40 m (B) 1,0 m (C) 2,5 m (D) 10 m (E) 25 m

Lausn: Notum vinnulögmálið:

$$mgh - \mu mgd = 0 \implies d = \frac{h}{\mu} = \frac{5.0}{0.20} = 25\,\text{m}.$$

K16. Rafkrafturinn sem verkar á milli tveggja rafhleðslna q_1 og q_2 er gefinn með $F_k = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$ þar sem $k = 9{,}0 \cdot 10^9\,\text{N}\,\text{m}^2/\text{C}^2$ er fasti sem kallast fasti Coulombs (stefnan ákvarðast af formerki hleðslanna). Hver þyrfti massi rafeindar að vera til þess að þyngdarkrafturinn milli tveggja rafeinda væri jafn rafkraftinum milli þeirra?

(A) $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg (B) $7{,}76 \cdot 10^{-20}$ kg (C) $1{,}86 \cdot 10^{-9}$ kg (D) 21,6 kg (E) $1{,}16 \cdot 10^{10}$ kg

Lausn: Höfum að:

$$F_k = F_G \implies \frac{Gm^2}{r^2} = \frac{ke^2}{r^2} \implies Gm^2 = ke^2 \implies m = e\sqrt{\frac{k}{G}} = 1{,}86 \cdot 10^{-9}\,\text{kg}.$$

K17. Gormur með gormstuðul k er strekktur um vegalengd x. Það tekur tvöfalt meiri vinnu að strekkja annan gorm um $\frac{1}{3}x$. Gormstuðull seinni gormsins er þá

(A) $\frac{9}{2}k$ (B) $6k$ (C) $9k$ (D) $18k$ (E) $36k$

Lausn: Látum $\tilde{k}$ vera gormstuðulinn á hinum gorminum. Við vitum að:

$$\frac{1}{2}kx^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}\tilde{k}\left(\frac{1}{3}x\right)^2 \implies \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{9}\tilde{k}x^2 \implies \tilde{k} = \frac{9}{2}k.$$

K18. Fyrsta tímaafleiða stöðu er hraði, $v = \frac{dx}{dt}$ og önnur tímaafleiða hennar er hröðun, $a = \frac{d^2x}{dt^2}$. Hins vegar hefur þriðja tímaafleiða stöðunnar ekki fengið ákveðið nafn, en hér verður hún kölluð rykkur og táknuð með $j = \frac{d^3x}{dt^3}$. Punktmassi sem er upphaflega kyrrstæður fær fastan rykk $j = 2{,}0\,\mathrm{m/s^3}$ í fjórar sekúndur. Hve langt fer hann á þeim tíma?

(A) $12\,\mathrm{m}$ (B) $16\,\mathrm{m}$ (C) $21\,\mathrm{m}$ (D) $29\,\mathrm{m}$ (E) $35\,\mathrm{m}$

Lausn: Með því að tegra (eða diffra) fáum við að:

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_0 t^2 + \frac{1}{6}jt^3$$

En $s_0 = v_0 = a_0 = 0$ svo $j(t) = \frac{1}{6}jt^3 = \frac{1}{6}\cdot 2\cdot 4^3 = 21\,\mathrm{m}$.

K19. Jafnþykkt reipi með massa m hangir lóðrétt. Hver er togkrafturinn í miðju reipinu?

(A) mg (B) $\frac{1}{2}mg$ (C) 0 (D) $\frac{1}{\sqrt{2}}mg$ (E) Vita þarf lengd reipisins til að reikna dæmið.

Lausn: Togkrafturinn í miðju reipinu heldur uppi neðri helming reipisins og þar með er hann $T = \frac{1}{2}mg$ í miðju reipinu.

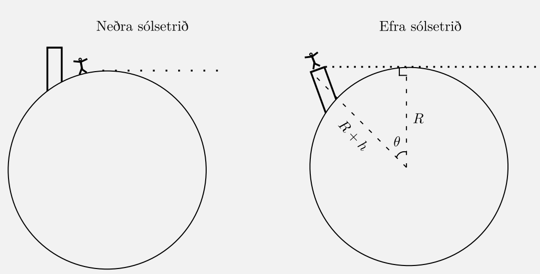
K20. Burj Khalifa turninn er risavaxinn skýjakljúfur í Dúbæ í Sameinuðu arabísku furstadæmunum. Turninn er hæsta mannvirki heims, $828\,\mathrm{m}$ hár. Turninn er svo hár að hægt er að horfa á tvö sólsetur þar sama dag. Hversu langur tími líður milli sólsetra við botn turnsins og við topp hans?

(A) $12\,\mathrm{s}$ (B) $73\,\mathrm{s}$ (C) $220\,\mathrm{s}$ (D) $890\,\mathrm{s}$ (E) $1200\,\mathrm{s}$

Lausn: Jörðin snýst um horn:

$$\theta = \omega_{\text{jörð}}\tau, \qquad \text{þar sem} \qquad \omega_{\text{jörð}} = \frac{2\pi}{T_{\text{jörð}}} = \frac{2\pi}{24\cdot 60^2} = 7{,}27\cdot 10^{-5}\,\mathrm{rad/s}$$

er hornhraði jarðarinnar þegar hún snýst um sjálfa sig. Látum h tákna hæð Burj Khalifa turnsins og látum R tákna geisla jarðarinnar. Lítum á rúmfræðilegu uppsetningu á myndinni hér fyrir neðan.



Við fáum þá samkvæmt kósínusreglunni (og reglu Pýþagórasar) að:

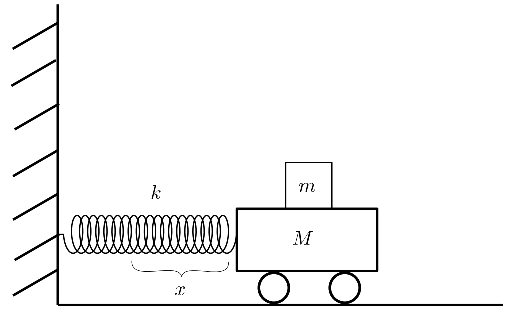
$$\cos\theta = \frac{(R+h)^2 + R^2 - ((R+h)^2 - R^2)}{2R(R+h)} = \frac{R}{R+h}$$

Svo við ályktum að:

$$\omega_{\text{jörð}}\tau = \theta = \arccos\left(\frac{R}{R+h}\right) \implies \tau = \frac{\arccos\left(\frac{R}{R+h}\right)}{\omega_{\text{jörð}}} = 220\,\mathrm{s}.$$

Dæmi 1: Gormkrafturinn (15 stig)

Lítum á vagn með massa M sem stendur á núningslausum, láréttum fleti. Vagninn er festur við gorm með gormstuðul k (sem er festur í hinn endan við stífan vegg). Ofan á vagninum er kassi með massa m. Látum núningsstuðulinn milli kassans og vagnsins vera μ. Hugsum okkur nú að við strekkjum gorminn um vegalengd x frá jafnvægisstöðu sinni og sleppum honum úr kyrrstöðu. Hvert er stærsta gildið á strekkingunni, $x_{\max}$, þannig að kubburinn með massa m haldist kyrr ofan á vagninum og renni ekki af vagninum.



Lausn: Við skrifum niður kraftajöfnur fyrir báða massana. Látum hröðunina, a, vera jákvæða til vinstri. Þá er:

$$\begin{pmatrix} Ma \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx - F_{\text{nún}} \\ Þ_{\text{gólf}} - Mg - Þ \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} ma \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{\text{nún}} \\ Þ - mg \end{pmatrix}.$$

En þar með höfum við með því að leggja saman jöfnurnar að:

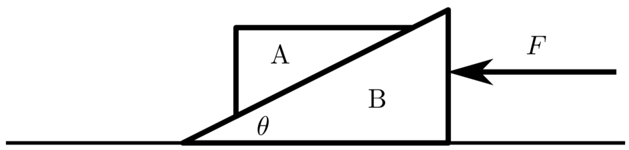
$$(M+m)a = kx \implies x = \frac{a}{k}(M+m)$$

En við athugum að $ma = F_{\text{nún}} \leqslant \mu Þ = \mu mg$ þannig að við ályktum að $a \leqslant \mu g$ og þar með:

$$x = \frac{a}{k}(M+m) \leqslant \frac{\mu g}{k}(M+m).$$

Dæmi 2: Skábretti ofan á skábretti (15 stig)

Tveim skábrettum er komið fyrir á láréttum fleti. Núningsstuðullinn milli skábrettanna er μ_A og núningsstuðullinn milli neðra skábrettisins, B, og lárétta flatarins er μ_B. Neðra skábrettið hallar um θ gráður miðað við lárétt. Massi skábrettis A er m_A og massi skábrettis B er m_B. Láréttur kraftur F verkar á skábretti B eins og sést á myndinni.



Ákvarðið þau gildi á F (sem fall af $m_A, m_B, \mu_A, \mu_B, \theta$ og þyngdarhröðun jarðar, g) þannig að efra skábrettið helst kyrrt miðað við neðra skábrettið (rennur semsagt hvorki upp né niður).

Lausn: Skrifum niður kraftajöfnur fyrir báða massana. Tökum eftir því að núningskrafturinn er annað hvort upp skábrettið eða niður skábrettið. Höfum því að kraftajöfnurnar verða:

$$\begin{pmatrix} m_B a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F - \mu_B Þ_{\text{gólf}} - Þ \sin\theta \pm \mu_A Þ \cos\theta \\ Þ_{\text{gólf}} - m_B g - Þ\cos\theta \mp \mu_A Þ \sin\theta \end{pmatrix}$$

Fyrir m_B annars vegar og

$$\begin{pmatrix} m_A a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Þ \sin\theta \mp \mu_A Þ \cos\theta \\ Þ\cos\theta - m_A g \pm \mu_A Þ \sin\theta \end{pmatrix}$$

fyrir m_A hinsvegar. Takið eftir að núningskraftarnir verka í sitthvora stefnuna fyrir massana. Við sjáum úr neðri kraftajöfnunni fyrir m_A að:

$$Þ = \frac{m_A g}{\cos\theta \pm \mu_A \sin\theta}$$

Sjáum líka með því að leggja saman efri kraftajöfnurnar tvær að:

$$(m_A + m_B)a = F - \mu_B Þ_{\text{gólf}}$$

En við sjáum með því að leggja saman neðri kraftajöfnurnar tvær að:

$$Þ_{\text{gólf}} = (m_A + m_B)g$$

En úr kraftajöfnunni fyrir m_A höfum við einnig að:

$$a = \frac{Þ}{m_A}(\sin\theta \mp \mu_A\cos\theta) = \left(\frac{\sin\theta \mp \mu_A\cos\theta}{\cos\theta \pm \mu_A \sin\theta}\right) g$$

Sem leyfir okkur því að álykta að

$$F = (m_A + m_B)a + \mu_B Þ_{\text{gólf}} = \left(\mu_B + \frac{\sin\theta \mp \mu_A\cos\theta}{\cos\theta \pm \mu_A \sin\theta}\right)(m_A + m_B)g$$

Við ályktum því að

$$F \in \left[\left(\mu_B + \frac{\sin\theta - \mu_A\cos\theta}{\cos\theta + \mu_A \sin\theta}\right)(m_A + m_B)g; \left(\mu_B + \frac{\sin\theta + \mu_A\cos\theta}{\cos\theta - \mu_A \sin\theta}\right)(m_A + m_B)g\right]$$