Sjötta laugardagsæfingin í eðlisfræði 2021

Nafn:

Bekkur:

Fastar

Nafn	Tákn	Gildi
Hraði ljóss í tómarúmi	c	$3{,}00 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
Þyngdarhröðun við yfirborð jarðar	g	$9{,}82\,\mathrm{m\,s^{-2}}$
Frumhleðslan	e	$1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Massi rafeindar	m_e	$9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Gasfastinn	R	$8{,}3145\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$
Fasti Coulombs	k_e	$8{,}988 \cdot 10^{9}\,\mathrm{N\,m^2\,C^{-2}}$
Rafsvörunarstuðull tómarúms	ϵ_0	$8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C^2\,s^2\,m^{-3}\,kg^{-1}}$
Þyngdarfastinn	G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
Geisli jarðarinnar	$R_\oplus$	$6{,}38 \cdot 10^{6}\,\mathrm{m}$
Geisli sólarinnar	$R_\odot$	$6{,}96 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}$
Massi jarðarinnar	$M_\oplus$	$5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$
Massi sólarinnar	$M_\odot$	$1{,}99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$
Stjarnfræðieiningin	AU	$1{,}50 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$

Krossar

Hver kross gildir 3,5 stig. Vinsamlegast skráið svörin ykkar við tilheyrandi krossi hér fyrir neðan:

K1	**K2**	**K3**	**K4**	**K5**	**K6**	**K7**	**K8**	**K9**	**K10**
B	B	C	C	B	D	D	A	C	C

K11	**K12**	**K13**	**K14**	**K15**	**K16**	**K17**	**K18**	**K19**	**K20**
A	E	A	A	D	B	C	A	C	E

Krossar (70 stig)

K1. Jóhanna sér blossa frá flugeldi og heyrir hvellinn 3,00 s síðar. Hve langt frá flugeldinum stendur Jóhanna ef hljóðhraðinn er $v = 350\,\mathrm{m/s}$.

(A) 102 m (B) 1050 m (C) $1{,}30 \cdot 10^5$ m (D) $1{,}10 \cdot 10^6$ m (E) $9{,}00 \cdot 10^8$ m

Lausn: Höfum að: $s = vt = 1050\,\mathrm{m}$.

K2. Bíll ekur á jöfnum hraða $v_0 = 10{,}0\,\mathrm{m/s}$ á hálum ís. Stigið er fast á bremsuna þ.a. dekkin læsast og snúast ekki. Hve langt rennur bíllinn ef massi hans er $m = 1500\,\mathrm{kg}$ og núningsstuðull dekkjanna við ísinn er $\mu = 1/5$.

(A) 12,5 m (B) 25,5 m (C) 36,3 m (D) 42,9 m (E) 51,3 m

Lausn: Fáum samkvæmt vinnulögmálinu að:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \mu mgd = 0 \implies d = \frac{v_0^2}{2\mu g} = 25{,}5\,\mathrm{m}.$$

K3. Fallbyssukúlu með massann 10 kg er skotið af stað undir horni $\theta = 30°$ m.v. lárétt, með upphafshraðann $v_0 = 15\,\mathrm{m/s}$. Hve langt frá upphafsstaðnum lendir kúlan?

(A) 10 m (B) 15 m (C) 20 m (D) 25 m (E) 30 m

Lausn: Höfum að:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + v_0 \cos\theta t \\ y_0 + v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$$

Neðri jafnan gefur þá strax að kúlan lendir þegar $t = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$. En þar með sjáum við að

$$x = v_0 \cos\theta t = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} = 19{,}8\,\mathrm{m/s}.$$

K4. Ölfusá er vatnsmesta á landsins, en meðalrennsli Ölfusár við Selfoss er $400\,\mathrm{m^3/s}$. Hvað eru það margir rúmkílómetrar (km^3) af vatni á ári?

(A) $12\,700\,\mathrm{km}^3$ (B) $1{,}26\,\mathrm{km}^3$ (C) $12{,}6\,\mathrm{km}^3$ (D) $1270\,\mathrm{km}^3$ (E) $126\,\mathrm{km}^3$

Lausn: Fáum þá að:

$$\Phi\Delta t = 400 \cdot 10^{-9} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60^2 = 12{,}6\,\mathrm{km}^3.$$

K5. Hafnaboltaleikmaðurinn Ian Kinsler rennir sér í höfn með miklum tilþrifum. Á hann verkar 470 N núningskraftur. Hver er núningsstuðullinn, μ, milli Kinslers og vallarins ef hann vegur 79 kg?

(A) 0,45 (B) 0,61 (C) 0,77 (D) 0,85 (E) 1,16

Lausn: $F_{\text{nún}} = \mu mg \implies \mu = \frac{F_{\text{nún}}}{mg} = 0{,}61.$

K6. Fróði stekkur um borð í kyrrstæðan fleka í vatni á hraðanum $v_1 = 5{,}00\,\mathrm{m/s}$. Massi Fróða er $m_F = 50\,\mathrm{kg}$ en massi flekans er $m_f = 200\,\mathrm{kg}$. Hver verður hraði flekans þegar Fróði er lentur á honum? Gerið ráð fyrir að vatnið veiti enga mótstöðu.

(A) 5,00 m/s (B) 2,50 m/s (C) 1,25 m/s (D) 1,00 m/s (E) 0,50 m/s

> **Lausn:** Notum skriðþungavarðveislu $m_F v_1 = (m_F + m_f)v_2 \implies v_2 = \frac{m_F}{m_F+m_f}v_1 = 1{,}00\,\mathrm{m/s}$.

K7. Kanadamaðurinn Evan Ungar á heimsmetið í jafnfætishoppi upp á $1,62$ m. Hann vegur 700 N á jörðinni en 112 N á tunglinu. Hvað gæti Evan hoppað hátt á tunglinu?

(A) 1,62 m (B) 0,259 m (C) 4,05 m (D) 10,1 m (E) 63,3 m

> **Lausn:** Þá er $\frac{mg_\mathrm{T}}{mg_\mathrm{J}} = \frac{112}{700} = 0{,}16$ svo $g_\mathrm{T} = 0{,}16 g_\mathrm{J} = 1{,}57\,\mathrm{m/s^2}$. Mesta hæðin sem hann nær ef hann hoppar með upphafshraða v_0 er fundin með orkuvarðveislu:
>
> $$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh \implies h = \frac{v_0^2}{2g} \implies h_\mathrm{T} = \frac{g_\mathrm{J}}{g_\mathrm{T}}h_\mathrm{J} = 10{,}1\,\mathrm{m}.$$

K8. Ökumaður tekur af stað úr kyrrstöðu og keyrir með fastri hröðun $5\,\mathrm{m/s^2}$. Hversu langa vegalengd hefur hann ferðast þegar hann nær hraðanum 100 km/klst?

(A) 77 m (B) 770 m (C) 43 m (D) 4,3 m (E) 67 m

> **Lausn:** Notum tímaóháðu jöfnuna $2a\Delta s = v^2 - v_0^2 \implies \Delta s = \frac{v^2}{2a} = 77\,\mathrm{m}$.

K9. Davíð ætlar að slöngva steini í höfuðið á Golíat. Hann setur stein með massa 1 kg í slöngvuna og byrjar að sveifla henni í hring í láréttu plani. Slöngvan er 40 cm á lengd og miðlægur kraftur sem verkar á steininn er 10 N. Hver er hraði steinsins?

(A) 3,0 m/s (B) 2,5 m/s (C) 2,0 m/s (D) 1,5 m/s (E) 1,0 m/s

> **Lausn:** Fáum þá að $F_\text{mið} = m\frac{v^2}{r} \implies v = \sqrt{\frac{rF_\text{mið}}{m}} = 2{,}0\,\mathrm{m/s}$

K10. Tveir krakkar, Dagur og Hrólfur, leika sér með hringekju á leikvelli. Dagur stendur á ytri brún hringekjunnar á meðan Hrólfur ýtir honum í hringi með hornhraða 1,25 rad/s. Dagur er 50 kg og radíus hringekjunnar er 1,5 m. Hver er heildarkrafturinn sem verkar á Dag á hringhreyfingunni?

(A) 25 N (B) 94 N (C) 117 N (D) 130 N (E) 146 N

> **Lausn:** Fáum þá eins að $F_\text{mið} = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r = 117\,\mathrm{N}$.

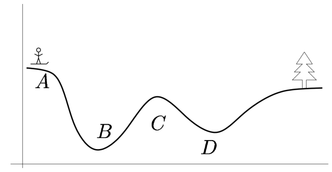
K11. Mario er lítill, þybbinn Ítalskur pípari sem býr í Sveppalandi. Hinn illi Bowser hefur rænt prinsessunni, Peach. Til þess að bjarga henni þarf píparinn þarf að hoppa upp í svalir í 15 m hæð. Með upppréttar hendur er hann 150 cm að hæð. Hver þarf upphafshraði hans að vera hið minnsta svo að hann nái í svalirnar með höndunum?

(A) 16,3 m/s (B) 11,6 m/s (C) 2,67 m/s (D) 1,12 m/s (E) 0,53 m/s

> **Lausn:** Þá er $2a\Delta s = v^2 - v_0^2 \implies v_0 = \sqrt{2gh} = 16{,}3\,\mathrm{m/s}$

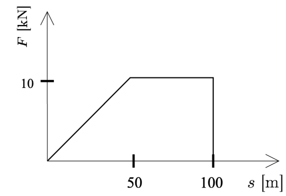
K12. Stúlka rennir sér af stað til hægri frá stað A úr kyrrstöðu eftir brautinni sem sýnd er á myndinni hér fyrir neðan. Hvar nemur hún staðar ef það er enginn núningur?

(A) A (B) B (C) C (D) D (E) Hún klessir á tréð.



> **Svar:** Hún klessir á tréð.

K13. Hlutur hreyfist eftir beinni línu og á hann verkar kraftur F í hreyfistefnuna. Á myndinni hér til hægri er krafturinn sýndur sem fall af staðsetningu s. Hver er vinnan sem krafturinn vinnur á hlutnum?



(A) 750 kJ (B) 1000 kJ (C) 3750 kJ (D) 5000 kJ (E) 7500 kJ

> **Lausn:** Við finnum bara flatarmálið undir ferlinum:
>
> $$W = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 50 + 10 \cdot 50 = 750\,\mathrm{kJ}.$$

K14. Fær bogaskytta dregur bogastrenginn aftur um 50 cm með 150 N krafti og sleppir ör með massa 100 g af stað. Gera má ráð fyrir að krafturinn sem boginn verkar með á örina hegði sér eins og gormur með kraftstuðul k. Hver er hraði örvarinnar um leið og hún losnar af strengnum?

(A) $27\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (B) $35\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (C) $56\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (D) $71\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (E) $83\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

> **Lausn:** Þá er $F_k = kx$ og orkuvarðveisla gefur $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2 \implies v = \sqrt{\frac{kx^2}{m}} = \sqrt{\frac{F_k x}{m}} = 27\,\mathrm{m/s}$

K15. Þyngdarlögmál Newtons lýsir kraftinum, F, sem verkar milli tveggja massa m_1 og m_2 í fjarlægð r frá hvor öðrum. Krafturinn er gefinn með $F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$ þar sem G er fasti sem nefnist þyngdarlögmálsfastinn. Hver er SI-einingin á þyngdarlögmálsfastanum?

(A) $\mathrm{m^2\ kg\ s^{-2}}$ (B) $\mathrm{m^2\ kg^{-2}\ s^{-2}}$ (C) $\mathrm{m^2\ s^3\ kg^{-1}}$ (D) $\mathrm{m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}}$ (E) $\mathrm{m^3\ kg\ s^{-3}}$

> **Lausn:** Við einangrum fyrst fyrir G, þannig að:
>
> $$G = \frac{Fr^2}{m_1m_2}$$
>
> Síðan beitum við víddargreiningu til að fá:
>
> $$[G] = \frac{[F]\,[r]^2}{[m_1]\,[m_2]} = \frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2} = \frac{\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2} = \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}.$$
>
> Það er samt miklu auðveldara að kíkja bara á forsíðuna (tafla með föstum)!

K16. Duge brúin nær yfir kínverska fljótið Beipan. Brúin er sú hæsta í heiminum og hefur hæðina $H = 565\,\text{m}$ yfir vatnsborðinu. Orðrómur er um að hinn frægi frumkvöðull teygjustökksins, A.J. Hackett (sem hefur massa $m = 75\,\text{kg}$), ætli að fara í teygjustökk fram af brúnni og freista þess að snerta vatnsborðið. Gera má ráð fyrir að teygjan sé massalaus og hegði sér líkt og gormur. Hver verður mesta hröðunin, $a_{\max}$, sem Hackett mun finna fyrir ef lengd teygjunnar er $L = 120\,\text{m}$?

(A) $9{,}82\,\text{m/s}^2$ (B) $15{,}1\,\text{m/s}^2$ (C) $19{,}7\,\text{m/s}^2$ (D) $24{,}5\,\text{m/s}^2$ (E) $44{,}2\,\text{m/s}^2$

Lausn: Hackett mun finna fyrir mestri hröðun lengst frá jafnvægisstöðu gormsins, þ.e.a.s. í neðsta punkti stökksins. En þar er kraftajafnan fyrir Hackett gefin með $ma = kx - mg$ svo $a_{\max} = \frac{k}{m}(H-L) - g$ og við þurfum því aðeins að ákvarða gormstuðulinn, k. Athugum því að orkuvarðveislan gefur að:

$$mgH = \frac{1}{2}k(H-L)^2 \implies \frac{k}{m} = \frac{2gH}{(H-L)^2}$$

En þar með sjáum við að:

$$a_{\max} = \frac{k}{m}(H-L) - g = \frac{2gH}{(H-L)} - g = 15{,}1\,\text{m/s}^2.$$

Það er vert að minnast á það að niðurstaðan er óháð massa Hacketts!

K17. Róteind er hraðað úr kyrrstöðu yfir $10\,\text{MV}$ spennu og svo haldið á hringhreyfingu með $100\,\text{m}$ geisla með segulsviði. Hversu sterkt þarf segulsviðið að vera? Massi róteindar er $m_p = 1{,}672 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}$.

(A) $1{,}83\,\text{mT}$ (B) $3{,}23\,\text{mT}$ (C) $4{,}57\,\text{mT}$ (D) $6{,}46\,\text{mT}$ (E) $10{,}87\,\text{mT}$

Lausn: Fáum þá að hraði hennar er fundinn samkvæmt $\frac{1}{2}m_p v^2 = eV \implies v = \sqrt{\frac{2eV}{m_p}}$. Segulsviðið mun valda Lorentz-krafti sem veldur því að ögnin haldis á hringhreyfingu. Þar með höfum við að:

$$evB = m_p\frac{v^2}{r} \implies B = \frac{m_p v}{er} = \sqrt{\frac{2m_p V}{er^2}} = 4{,}57\,\text{mT}.$$

K18. Einlitur ljósgeisli sem hefur bylgjulengdina $\lambda = 500\,\text{nm}$ og tíðni $f = 600\,\text{THz}$ í lofttæmi fellur á vatn með brotsstuðul 1,33. Hvert af eftirfarandi á við um bylgjulengd ljóssins λ' og tíðni þess f' í vatninu?

(A) $\lambda' < \lambda$ og $f' = f$

(B) $\lambda' < \lambda$ og $f' < f$

(C) $\lambda' > \lambda$ og $f' = f$

(D) $\lambda' > \lambda$ og $f' < f$

(E) $\lambda' = \lambda$ og $f' > f$

Lausn: Tíðnin helst óbreytt (því skilgreiningin á tíðni er hversu marga bylgjutoppa þú greinir á sérhverju tímabili). Ljóshraðinn minnkar hinsvegar samkvæmt $c' = \frac{c}{n}$ en þá þarf bylgjulengdin líka að minnka því $c' = \lambda' f'$ svo $\lambda' < \lambda$ og $f' = f$.

K19. 2,9 m langur, 60 cm breiður og 350 kg þungur krókódíll liggur í sólbaði. Ef styrkleiki sólarljóssins sem skín á bakið á honum er $500\,\mathrm{W/m^2}$ og hitastig hans er upphaflega 23 °C, hversu langan tíma tekur það þá fyrir krókódílinn að ná 30 °C? Eðlisvarmi líkamsvefja krókódílsins er að meðaltali 3400 J/(kg K)

(A) 2 mínútur

(B) 1 klukkutíma og 3 mínútur

(C) 2 klukkutíma og 40 mínútur

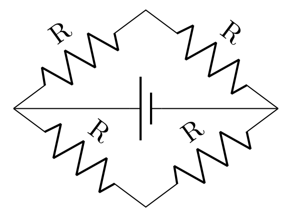
(D) 3 klukkutíma og 50 mínútur

(E) 8 klukkutíma og 30 mínútur

Lausn: Þá er $P = IA = I\ell b = 870\,\mathrm{W}$. Látum τ vera tímann sem það tekur að ná tilskyldu hitastigi. Fáum síðan að orkan sem þarf er:

$$P\tau = Q = cm\Delta T \implies \tau = \frac{cm\Delta T}{P} = 9575\,\mathrm{s} = 2 \text{ klukkutímar og 40 mínútur.}$$

K20. Öll viðnámin í rafrásinni hér til hægri hafa viðnám $R = 10\,\Omega$. Hvert er heildarviðnám rásarinnar?



(A) 40 Ω (B) 80 Ω. (C) 5 Ω. (D) 20 Ω. (E) 10 Ω.

Lausn: Fáum að $R_{\text{heild}} = \left(\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R}\right)^{-1} = 10\,\Omega$.

Dæmi 1: Flugvél í flugtaki (15 stig)

Flugvél með massa $m = 90\,000\,\mathrm{kg}$ tekur af stað með fastri hröðun $a = 3{,}0\,\mathrm{m/s^2}$ niður flugbraut. Hvor vængur vélarinnar er $40\,\mathrm{m}$ langur og meðalbreidd þeirra er $7\,\mathrm{m}$. Vængir vélarinnar eru hannaðir þannig að hraði loftsins fyrir ofan vængi flugvélarinnar er 15% meiri heldur en hraði loftsins fyrir neðan vængina. Hver er lágmarkslengd flugbrautarinnar sem flugvélin þarf til þess að hún nái að taka á loft? Eðlismassi andrúmslofts er $1{,}29\,\mathrm{kg/m^3}$, þyngdarhröðun jarðar er $g = 9{,}82\,\mathrm{m/s^2}$.

Gera má ráð fyrir: að vængir flugvélarinnar séu eini hluti hennar sem gefur lyftikraft; að lögun vængjanna breytist ekki; að hraði loftsins undir vængjunum sé sá sami og hraði flugvélarinnar; að það sé logn þannig að hraði loftsins undir vængjunum er jafn hraða flugvélarinnar; að lögmál Bernoullis gildi í þessu samhengi.

Lausn: Við athugum þá að til þess að vélin taki á loft þá þarf $2(P_1 - P_2)A \geqslant mg$. Látum $p = 1{,}15$ þannig að $v_2 = pv_1$ er hraði loftsins yfir væng flugvélarinnar. Bernoulli gefur síðan að:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \implies P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right) = \frac{1}{2}\rho\left(p^2 - 1\right)v_1^2$$

Hraði flugvélarinnar er þá $v_1 = at$ svo við ályktum að:

$$(P_1 - P_2) = \frac{1}{2}\rho(p^2 - 1)(at)^2$$

En með samanburði við kraftajöfnuna höfum við þá að flugvélin tekur á loft þegar:

$$\rho A(p^2 - 1)a^2t^2 = mg \implies t = \sqrt{\frac{mg}{\rho A(p^2 - 1)a^2}} = 29\,\mathrm{s}$$

En þar með er lágmarkslengd flugbrautarinnar $s = \frac{1}{2}at^2 = 1260\,\mathrm{m}$.

Dæmi 2: Skopparabolti (15 stig)

Skoppstuðull skopparabolta er táknaður með ε og er skilgreindur þannig að:

$$\varepsilon := \frac{\text{hraði eftir árekstur}}{\text{hraði fyrir árekstur}} = \frac{v_\mathrm{e}}{v_\mathrm{f}}$$

Skopparabolta með massann m og skoppstuðul ε er sleppt úr hæðinni h_0 yfir jörðu. Hunsið loftmótstöðu.

(a) Til að byrja með skulum við aðeins skoða hvaða gerist í fyrsta skoppi. Þá skoppar boltinn aftur upp í hæð $h_1 < h_0$. Ákvarðið hæðina h_1 sem einungis sem fall af h_0, m, ε og þyngdarhröðun jarðar, g.

(b) Látum t_0 tákna tímann sem líður frá því að skopparaboltanum er sleppt úr hæð h_0 og þar til að hann skellur á jörðinni í fyrsta skipti. Ákvarðið t_0 sem fall af h_0, m, ε og þyngdarhröðun jarðar, g.

Látum h_n tákna mestu hæðina sem boltinn nær eftir n-ta skopp og látum t_n tákna tímann sem það tekur boltann að detta niður úr hæðinni h_n.

(c) Ákvarðið h_n einungis sem fall af h_0, n og ε. Ákvarðið t_n einungis sem fall af t_0, n og ε.

(d) Hversu lengi er boltinn í loftinu? (Formúlan $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ fyrir $|x| < 1$ gæti komið að góðum notum).

Lausn: Athugum fyrst að hraði boltans þegar hann lendir á jörðinni er $v_0 = \sqrt{2gh_0}$ og hraðinn eftir skoppið er $v_1 = \varepsilon v_0 = \varepsilon\sqrt{2gh_0}$. Mesta hæðin sem boltinn nær eftir skoppið er síðan

$$\sqrt{2gh_1} = v_1 = \varepsilon\sqrt{2gh_0},$$

en þar með ályktum við að $h_1 = \varepsilon^2 h_0$. Við athugum síðan að tíminn sem það tekur boltann að detta úr hæðinni h_0 og niður á jörðina er gefinn með $\frac{1}{2}gt_0^2 = h_0 \implies t_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$. En við sjáum þá að með sömu rökum fáum við að:

$$h_n = \varepsilon^2 h_{n-1} = \ldots = \varepsilon^{2n} h_0, \qquad t_n = \sqrt{\frac{2h_n}{g}} = \varepsilon^n \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = \varepsilon^n t_0.$$

En þar með fáum við að heildartíminn sem boltinn er í loftinu er gefinn með:

$$\tau = t_0 + 2\left(t_1 + t_2 + \ldots\right) = -t_0 + 2t_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n = -t_0 + 2t_0 \frac{1}{1-\varepsilon} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} t_0 = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\sqrt{\frac{2h_0}{g}}.$$