Varmahljómburðarvél

Varmahljómburðarvél er tæki sem breytir varma í hljómburðarafl eða hljóðbylgjur - sem er ein birtingarmynd vélrænnar vinnu. Eins og fyrir margar aðrar varmavélar má snúa varmaferlinu við til þess að búa til kæliskáp. Þá er hljóðið notað til þess að dæla varma frá köldum geymi yfir í heitan geymi. Há tíðni við varmaflutning vélarinnar minnkar varmaleiðni og útilokar því þörf á einangrun. Ólíkt mörgum öðrum vélargerðum þá hefur varmahljómburðarvélin enga hluta sem hreyfast nema sjálft flæðiefnið.

Nýtni varmahljómburðarvéla er iðulega lægri heldur en nýtni annarra gerða af vélum. Þær hafa hinsvegar ýmsa kosti til dæmis hvað varðar uppsetningu og kostnað við viðhald. Þetta skapar ýmis tækifæri í tengslum við endurnýtanlega orku, t.d. fyrir sólarorkuver eða við að nýta úrgangsvarma. Greining okkar í þessu verkefni mun einblína á tilurð hljómburðarorkunnar í kerfinu. Við hugsum ekki um hvernig við ætlum að nýta aflið til að knýja utanaðkomandi tæki.

Hluti A: Hljóðbylgjur í lokaðri pípu (3,7 stig)

Skoðum varmaeinangraða pípu með lengd L sem hefur þverskurðarflatarmál S og pípan liggur eftir x-ásnum. Endar pípunnar eru staðsettir í $x = 0$ og $x = L$. Pípan er fyllt af kjörgasi og er lokuð í báða enda. Þegar gasið er í varmajafnvægi hefur það hitastig T_0, þrýsting p_0 og eðlismassa ρ_0. Gerum ráð fyrir að hunsa megi áhrif seigju og að hreyfing gassins sé einsleit í bæði y og z áttirnar.

Mynd 1

A.1	Þegar staðbylgja myndast byrjar gasið að sveiflast með sveiflutíðni ω í stefnu x-ásins. Útslag sveiflunnar er háð jafnvægisstöðu gassameindarinnar, x, eftir endilangri pípunni. Frávik hverrar gassameindar frá jafnvægisstöðu sinni, x, er gefið með $$u(x,t) = a\sin(kx)\cos(\omega t) = u_1(x)\cos(\omega t) \quad (1)$$ (athugaðu að $u(x,t)$ lýsir tilfærslu gassameindar) þar sem $a \ll L$ er jákvæður fasti, $k = 2\pi/\lambda$ er bylgjutalan og λ er bylgjulengdin. Hver er stærsta leyfilega bylgjulengdin $\lambda_{\max}$ í þessu kerfi?	0.3pt

Við gerum framvegis ráð fyrir að sveifluhættirnir njóti $\lambda = \lambda_{\max}$.

Skoðum nú þunna sneið af gasi sem er staðsett milli x og $x+\Delta x$ ($\Delta x \ll L$). Í samræmi við lið A.1 er sneiðin á flókinni sveifluhreyfingu eftir x-ásnum og því breytist rúmmál hennar sem og aðrir varmafræðilegir eiginleikar sneiðarinnar.

Gerðu ráð fyrir að allar þessar breytingar á varmafræðilegum eiginleikum gassins séu litlar miðað við upphaflegu gildin.

A.2	Rúmmál sneiðarinnar, $V(x,t)$, sveiflast þá um gildið $V_0 = S\Delta x$ og er á forminu $$V(x,t) = V_0 + V_1(x)\cos(\omega t). \qquad (2)$$ Ákvarðaðu $V_1(x)$ sem fall af stærðunum V_0, a, k og x.	0.5pt

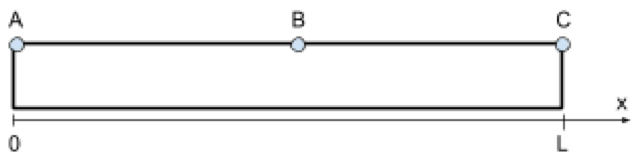
A.3	Hljóðbylgjan veldur að þrýstingurinn í gasinu breytist. Gerum ráð fyrir að heildarþrýstingur gasins sé á forminu $$p(x,t) = p_0 - p_1(x)\cos(\omega t). \qquad (3)$$ Skoðum kraftana sem verka á gassneiðina. Finndu útslag þrýstingsins $p_1(x)$, sem fall x, ρ_0, a, k og ω.	0.7pt

Við þær tíðnir sem mannseyrað getur greint má hunsa varmaleiðni gasins. Við gerum því ráð fyrir því að þensla og þjöppun sneiðarinnar fylgi óvermnu ferli (e. *adiabatic*) og nýtur því $pV^\gamma = fasti$, þar sem γ er fasti.

A.4	Notaðu jöfnuna hér að ofan og niðurstöður fyrri liða til þess að finna hraða hljóðbylgju, $c = \omega/k$ í pípunni með fyrsta stigs nálgun. Táknaðu svarið þitt sem fall af p_0, ρ_0 og γ.	0.3pt

A.5	Hitastig gasins breytist bæði vegna óvermna ferlisins og vegna samþjöppunar gasins sem hljóðbylgjan veldur. Hitastigið er þá gefið með $$T(x,t) = T_0 - T_1(x)\cos(\omega t). \qquad (4)$$ Ákvarðaðu hitastigsútslagið $T_1(x)$ sem fall af T_0, γ, a, k og x.	0.7pt

A.6	Aðeins í þessum lið gerum við ráð fyrir örlitlum varmaflutningi milli pípunnar og gasins. Afleiðing þess er að hljóðbylgjan helst nánast óbreytt, en gasið getur flutt smávegis varma í pípuna. Hunsa má varmann sem myndast vegna seigjunnar. Ákvarðaðu, fyrir hvern af punktunum á mynd 2 (A og C við enda pípunnar og B við miðju hennar), hvort að hitastigið muni aukast, minnka eða haldast óbreytt yfir langt tímabil.	1.2pt

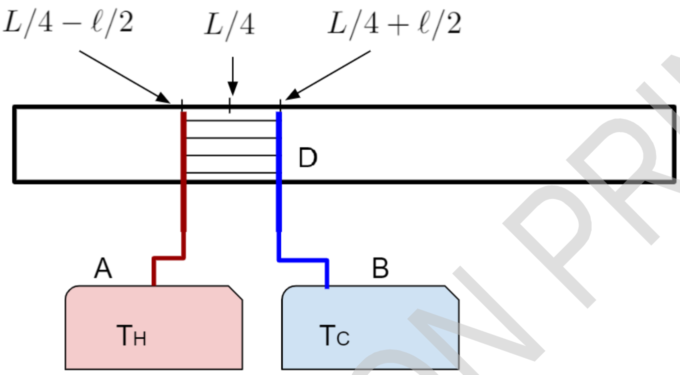


Mynd 2

Hluti B: Mögnun hljóðbylgna með ytri varmasnertingu (6,3 stig)

Stafla af gegnheilum plötum er komið fyrir inni í pípunni. Plötunum er komið fyrir þannig að þær liggja samsíða eftir ás pípunnar svo að þær trufli ekki flæði gassins eftir pípunni. Miðja staflans er í $x_0 = L/4$, og hefur breidd $\ell \ll L$ eftir ás pípunnar. Staflinn þekur allt þverskurðarflatarmálið. Vinstri endi staflans er í $x_H = x_0 - \ell/2$ og er haldið í hitastigi $T_H = T_0 + \tau/2$ með því að nota utanaðkomandi varmageymi. Á sama tíma er hægri endi staflans í $x_C = x_0 + \ell/2$ og er haldið í hitastigi $T_C = T_0 - \tau/2$.

Plötustaflinn leyfir smá varmaflæði til að viðhalda fastri hitastigsbreytingu milli endanna þannig að $T_{\text{plate}}(x) = T_0 - \frac{x-x_0}{\ell}\tau$.



Mynd 3a. Mynd af kerfinu. (A) táknar heita geyminn og (B) táknar kalda geyminn. (D) táknar staflann.

Til þess að greina áhrifin sem varmasnertingin milli plötustaflans og gassins hefur á hljóðbylgjurnar í pípunni má gera ráð fyrir eftirfarandi atriðum

- Eins og í hlutanum á undan eru allar varmafræðilegar breytingar litlar í hlutfalli við upphafsgildi stærðanna.
- Kerfið er í grunnsveifluhætti staðbylgjunnar sem hefur lengsta mögulega bylgjulengd því plötustaflinn hefur lítil áhrif á staðbylgjuna.
- Staflinn er mun styttri heldur en bylgjulengdin, $\ell \ll \lambda_{\text{max}}$. Hægt er að staðsetja staflann þannig að bæði færsla og þrýstingur eru óbreytt eftir lengd staflans, þ.e. $u(x,t) \approx u(x_0,t)$ og $p(x,t) \approx p(x_0,t)$.
- Hunsa má áhrifin sem sneiðin hefur á enda staflans þegar hún sveiflast inn og út úr staflanum.
- Hitastigsbreytingin milli enda plötustaflans, þ.e. á milli heita geymisins og kalda geymisins er lítill í samanburði við hitastigið: $\tau \ll T_0$.
- Varmaleiðni gasins, staflans og pípunnar eru hverfandi. Eini marktæki varmaflutningurinn er vegna varmaburðar gasins og vegna varmaleiðni milli gassins og staflans.

B.1 Skoðum ákveðna sneið af gasi sem er til að byrja með milli $x_0 = L/4$ og $x_0 + \Delta x$ (inni í staflanum). Þegar sneiðin hreyfist innan í staflanum þá breytist hitastigið sem hún finnur fyrir samkvæmt 0.4pt

$$T_{\text{env}}(t) = T_0 - T_{\text{st}} \cos(\omega t). \quad (5)$$

Finndu T_{st} sem fall af stærðunum a, τ og ℓ.

B.2	Látum τ_{cr} tákna þann lægsta hitastigsmun þannig að fyrir öll hærri hitastig þá flytur heitari geymirinn varma til kaldari geymisins. Ákvarðaðu τ_{cr} sem fall af T_0, γ, k og ℓ.	1.0pt

B.3	Finndu nálgunarjöfnu fyrir varmaflæðið $\frac{dQ}{dt}$ inn í litla sneið af gasi sem fall af tímaafleiðu rúmmálsins, $\frac{dV}{dt}$, tímaafleiðu þrýstingsins, $\frac{dp}{dt}$, ásamt óhnikuðu jafnvægisstærðum sneiðarinnar, p_0, V_0 og γ. (Þú mátt nýta þér eftirfarandi jöfnu fyrir mólvarmarýmdina við fast rúmmál: $c_v = \frac{R}{\gamma - 1}$, þar sem R er gasfastinn.)	0.8pt

Varmaflæðið milli sneiðarinnar og staflans veldur fasviki bæði á þrýstingssveiflum og rúmmálssveiflum sneiðarinnar. Við munum sjá hvernig þetta framleiðir vinnu.

Látum varmaflæðið inn í sneiðina frá staflanum vera í hlutfalli við hitastigsmuninn milli sneiðarinnar og aðligjandi hluta staflans, þ.e. $\frac{dQ}{dt} = -\beta V_0 (T_{\mathrm{st}} - T_1)\cos(\omega t)$. Hér tákna T_1 og T_{st} tilheyrandi hitastig úr liðum A.5 og B.1 hvor um sig og $\beta > 0$ er fasti. Gerum ráð fyrir að við þær tíðnir sem vélin er virk við, þá sé breytingin í hitastigi gasins vegna varmaflæðis hverfandi í samanburði við bæði T_1 og T_{st}.

B.4	Til þess að reikna vinnuna þá skoðum við breytingu í rúmmáli sneiðarinnar vegna varmasnertingar við staflann. Látum þrýstingin og rúmmál sneiðarinnar undir áhrifum staflans vera táknuð á forminu $$\begin{aligned} p &= p_0 + p_a \sin(\omega t) - p_b \cos(\omega t), \\ V &= V_0 + V_a \sin(\omega t) + V_b \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (6)$$ Ákvarðaðu fastana V_a og V_b sem fall af stærðunum p_a, p_b, p_0, V_0, γ, τ, τ_{cr}, β, ω, a og ℓ.	1.9pt

B.5	Reiknaðu vinnu hljómburðarins á rúmmálseiningu, w, sem sneið af gasi framleiðir yfir eina lotu. Tegrið yfir rúmmál staflans og finndu heildaraflið W_{tot} sem gasið framleiðir. Finndu W_{tot} sem fall af γ, τ, τ_{cr}, β, ω, a, k og S.	0.8pt

B.6	Finndu varmann, Q_{tot}, sem flyst frá vinstri hlið plansins $x = x_0$ yfir á hægri hliðina yfir eina lotu. Táknaðu svarið sem fall af stærðunum τ, τ_{cr}, β, ω, a, S, ℓ. (Vísbending: Þú mátt nýta þér jöfnuna $j = Q\frac{du}{dt}$ sem gefur hraða varmaburðarins.)	0.8pt

B.7	Finndu nýtni varmahljómburðarvélarinnar, η. Nýtnin er skilgreind sem hlutfallið milli hljómburðarvinnunnar sem myndast og varmans sem tapast úr heita geyminum. Táknaðu svarið sem fall af hitastigsmuninum milli heita og kalda geymisins, τ, markhitastigsmuninum, τ_{cr}, og Carnot-nýtninni $\eta_c = 1 - T_C/T_H$.	0.6pt