Landskeppni í eðlisfræði 2025

Úrslitakeppni

15. mars kl. 09:00-12:00

- **Leyfileg hjálpargögn:** Reiknivél sem geymir ekki texta.
- Keppnin samanstendur af 3 dæmum. Hvert af þessum þremur dæmum gildir 10 stig.
- Athugaðu hvort þú hafir fengið öll dæmin.
- Ekki er dregið niður fyrir röng svör.
- Liðunum í hverju dæmi er ekki endilega raðað eftir erfiðleikastigi.
- Það má alltaf leysa seinni liði þó fyrri liðir hafi ekki verið leystir.
- Skrifaðu lausnirnar þínar snyrtilega á lausnablöðin sem þú færð afhent og merktu þau vel.
- Tekið verður tillit til útreikninga við yfirferð á dæmum.

Þekktir fastar

Nafn	**Tákn**	**Gildi**
Hraði ljóss í tómarúmi	c	$3{,}00 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}$
Segulsvörunarstuðull tómarúms	μ_0	$1{,}26 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{N/A^2}$
Rafsvörunarstuðull tómarúms	ϵ_0	$8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$
Coulombs fastinn	k_e	$8{,}99 \cdot 10^{9}\,\mathrm{N\,m^2/C^2}$
Grunnhleðslan	e	$1{,}60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Massi rafeindar	m_e	$9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Massi róteindar	m_p	$1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Avogadrosar talan	N_A	$6{,}02 \cdot 10^{23}\,\mathrm{1/mól}$
Gasfastinn	R	$8{,}31\,\mathrm{J/(K\,mól)}$
Stefan-Boltzmann fastinn	σ	$5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W/(m^2K^4)}$
Þyngdarhröðun við yfirborð jarðar	g	$9{,}82\,\mathrm{m/s^2}$
Þyngdarlögmálsfastinn	G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3/(kg\,s^2)}$
Planck fastinn	$\hbar$	$1{,}05 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
Boltzmann fastinn	k_B	$1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$

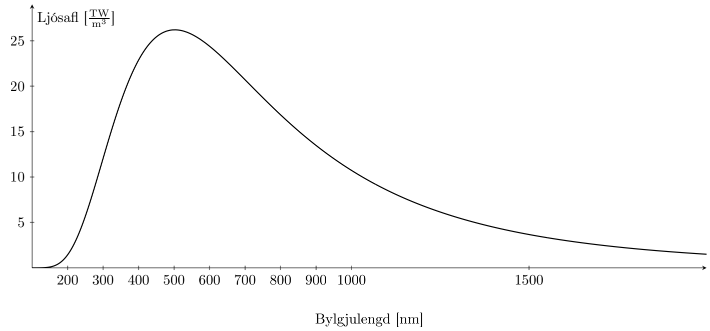
1 Svarthol (10 stig)

Hluti A: Varmafræði sólarinnar (4 stig)

Rifjum upp tvö grunnlögmál varmageislunar:

- **Lögmál Wiens:** hámarksútgeislun hlutar með hitastig T verður við bylgjulengd, $\lambda_W = \frac{b}{T}$, þar sem $b = 2{,}9 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{K\,m}$ er fasti Wiens.

- **Stefan-Boltzmann lögmálið:** hlutur með hitastig T og yfirborðsflatarmál A geislar frá sér með afli $P = \epsilon\sigma A T^4$, þar sem $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\,K^4}}$ er Stefan-Boltzmann fastinn og $0 \leq \epsilon \leq 1$ er eðlisgeislun hlutarins.



(a) **(1 stig)** Grafið sýnir útgeislun sólarinnar sem fall af bylgjulengd. Hvert er hitastig sólarinnar?

(b) **(0,5 stig)** Geisli sólarinnar er $r_S = 6{,}96 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$. Metið geislunarafl sólarinnar.

(c) **(2,5 stig)** Stærsta sólarorkuver heims er að finna í Ürümqi, höfuðborg sjálfstjórnarhéraðsins Xinjiang í norðvesturhluta Kína. Stærð svæðisins sem að sólarsellurnar leggja undir sig þar þekur $1{,}3 \cdot 10^8\,\mathrm{m}^2$ að flatarmáli. Metið hversu mikið rafmagn þetta sólarorkuver getur framleitt á einu ári í einingunni J. Fjarlægðin milli jarðarinnar og sólarinnar er $1\,\mathrm{AU} = 1{,}5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$. Til samanburðar er orkunotkun Íslendinga $2{,}2 \cdot 10^{17}\,\mathrm{J}$ á ári.

Hluti B: Hawking-geislun svarthols (6 stig)

(d) **(1 stig)** Skoðum hnött með massa M og geisla R. Hlut með massa m er skotið frá yfirborði hnattarins með upphafshraða v. Notið orkuvarðveislu til að finna minnsta hraðann v_{lausn} sem hluturinn þarf að hafa til að sleppa í óendanlega fjarlægð frá hnetinum.

(e) **(0,5 stig)** Mesti mögulegi lausnarhraði frá hnetti með massa M og geisla R er ljóshraðinn, $v_{\mathrm{lausn}} = c$. Notið niðurstöðuna úr liðnum hér á undan til að ákvarða þann geisla R_{S} sem hnöttur þarf að hafa til þess að ekkert sleppi frá yfirborði hans, ekki einu sinni ljós. Þessi geisli nefnist Schwarzschild-geisli.

Óvissulögmál Heisenbergs segir að óvissan í staðsetningu, Δx, og óvissan í skriðþunga, Δp, uppfylla sambandið $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ þar sem $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$ er fasti Plancks.

(f) **(0,5 stig)** Metið óvissuna Δx á staðsetningu agnar sem er inni í svartholi.

(g) **(0,5 stig)** Metið óvissuna, Δp, á skriðþunga agnarinnar ef $p = mv$ og hún ferðast hægar en ljós.

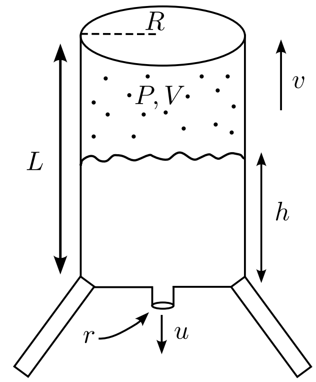
(h) **(1 stig)** Notið skilgreininguna á hitastigi úr varmafræði $E = k_B T$ ásamt $E = mc^2$ til að ákvarða Hawking hitastig svartholsins, T_{H} einungis sem fall af $G, \hbar, k_B, c$ og heildarmassa svartholsins M.

(i) **(1 stig)** Notið Hawking-hitastigið úr liðnum á undan ásamt Stefan-Boltzmann lögmálinu til að ákvarða Hawking-geislunina P_{H}. Orkan sem svartholið tapar vegna varmageislunar er gefin með $P_{\mathrm{H}} = -\frac{d}{dt}(Mc^2)$. Notið þetta til að finna fasta A og veldi n þannig að tímaþróun á massa svartholsins fylgi diffurjöfnunni

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{A}{M^n}.$$

(j) **(1,5 stig)** Leysið diffurjöfnuna og ákvarðið heildartímann, τ, sem líður frá því að svartholið í miðju vetrarbrautarinnar (Sgr A*) hefur gufað upp ef massi þess í dag er $M_0 = 8{,}2 \cdot 10^{34}\,\mathrm{kg}$ (að því gefnu að það stækki ekki í millitíðinni).

2 Vatnseldflaug (10 stig)



Í þessu dæmi skoðum við vatnseldflaug. Hægt er að búa til einfalda heimagerða vatnseldflaug með því að taka 2 L gosflösku og fylla hana að hluta með vatni. Lofti er dælt inn í flöskuna í gegnum stútinn þar til þrýstingurinn inni í henni verður nægur til að stúturinn losni þannig að vatnið þrýstist snögglega út, og samkvæmt þriðja lögmáli Newtons skýst eldflaugin upp. Markmið okkar í þessu dæmi verður að meta hversu hátt vatnseldflaugin kemst.

Uppstillingin sem að við höfum í huga er 2 L vatnsflaska með massa $m_{\text{flaska}} = 45\,\text{g}$ ásamt 1 L af vatni. Hæð gosflöskunnar er $L = 31{,}5\,\text{cm}$ og geisli hennar er $R = 4{,}5\,\text{cm}$. Stúturinn er með geisla $r = 1{,}4\,\text{cm}$. Þegar flaskan losnar frá stútnum er upphafsþrýstingurinn inni í flöskunni $P_0 = 5P_a$ þar sem $P_a = 1\,\text{atm} = 101{,}3\,\text{kPa}$. Eðlismassi vatns er $\rho_v = 1000\,\text{kg/m}^3$ og eðlismassi lofts er $\rho_\ell = 1{,}225\,\text{kg/m}^3$.

(a) **(0,5 stig)** Hvert er rúmmál flöskunnar, V_f, í einingunni m^3? Hvert er rúmmál loftsins, V_0, inni í flöskunni á augnablikinu þegar eldflaugin tekur á loft?

(b) **(0,5 stig)** Hver er massi eldflaugarinnar, M_0, í upphafi og þegar allt vatnið hefur tæmst úr henni, M_f.

(c) **(0,5 stig)** Gerum ráð fyrir að loftið inni í flöskunni fylgi jafnhitaferli en það þýðir að $T = \textit{fasti}$ í ferlinu. Notið gaslögmálið til að ákvarða þrýsting loftsins, P_f, inni í flöskunni á augnablikinu sem að öllu vatninu hefur verið þrýst út úr flöskunni.

(d) **(1,5 stig)** Ákvarðið hraða vatnsins, u, út um stút flöskunnar sem fall af þrýsting inni í flöskunni, $P(t)$. Þið megið nota nálgunina $r \ll R$ og gera ráð fyrir að h sé svo lítið að áhrif þrýstings frá vökvasúlunni ($\rho_v gh$) eru hverfandi.

(e) **(0,5 stig)** Hversu miklum massa tapar eldflaugin á tímaeiningu, $\frac{dM}{dt}$, sem fall af u, r og ρ_v.

(f) **(0,5 stig)** Krafturinn sem knýr eldflaugina upp er gefinn með $T = u\frac{dM}{dt}$. Notið niðurstöðurnar í liðunum hér á undan til að sýna að til séu fastar α og β þannig að $T = \alpha P + \beta$.

(g) **(1 stig)** Notið liðina hér á undan til að ákvarða u_f og T_f þegar vatnið hefur tæmst úr flöskunni.

Með gaslögmálinu má sýna að þrýstingurinn inni í flöskunni fylgir afleiðujöfnunni $\frac{dP}{dt} = -\frac{P^2 A}{P_0 V_0}\sqrt{\frac{2}{\rho}(P - P_a)}$, þar sem að A er þverskurðarflatarmál stútsins. Einungis er hægt að leysa þessa afleiðujöfnu með tölulegum aðferðum en samt er hægt að nota hana til að ákvarða heildartímann τ sem að líður frá því að vatnseldflaugin fer af stað og þar til að allt vatnið hefur tæmst úr flöskunni:

$$\tau = \frac{V_0}{A}\sqrt{\frac{\rho_v}{2P_a}}\left[\sqrt{-1 + \frac{P_0}{P_a}} - \frac{V_f}{V_0}\sqrt{-1 + \frac{P_0 V_0}{P_a V_f}} + \frac{P_0}{P_a}\arctan\left(\sqrt{-1 + \frac{P_0}{P_a}}\right) - \frac{P_0}{P_a}\arctan\left(\sqrt{-1 + \frac{P_0 V_0}{P_a V_f}}\right)\right].$$

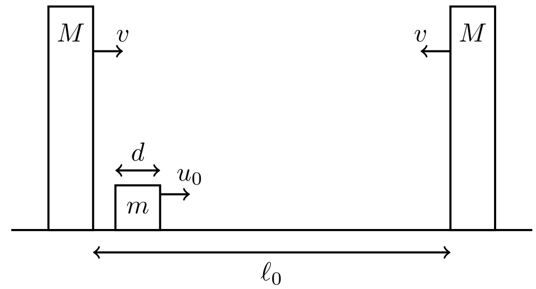
(h) **(1 stig)** Reiknið tölulegt gildi á tímanum τ.

(i) **(3 stig)** Metið hraða eldflaugarinnar $v(\tau)$ þegar eldsneytið þrýtur.

(j) **(1 stig)** Metið hver mesta hæð, $h_{\max}$, vatnseldflaugarinnar verður. Hunsið loftmótsstöðu.

3 Hvers vegna komumst við ekki hraðar en ljós? (10 stig)

Tveir veggir með massa M hreyfast í átt hvor að öðrum með föstum hraða v. Á milli þeirra er kubbur með massa $m \ll M$ og breidd $d \ll \ell_0$, sem upphaflega hefur hraðann $u_0 > v$. Kubburinn og veggirnir renna án núnings, og loftmótsstaða er hunsuð.



Gerum ráð fyrir að allir árekstrar kubbsins við veggina séu alfjaðrandi, þ.e. að engin orka tapist í árekstrunum. Enn fremur haldast veggirnir á stöðugum hraða v í gegnum allt ferlið, t.d. með aðstoð vélar eða annars utanaðkomandi búnaðar. Upphaflegt bil milli veggjanna er ℓ_0, og við tímann $t = 0$ er kubburinn staðsettur við vinstri vegginn og stefnir í átt að hægri veggnum.

(a) **(0,5 stig)** Hversu langur tími, τ, líður þar til bilið á milli veggjanna er orðið jafnt breidd kubbsins, d?

(b) **(1 stig)** Látum u_n tákna hraða kubbsins eftir n árekstra. Sýnið að hraði kubbsins eftir $n + 1$ árekstur uppfyllir rakningarformúluna $u_{n+1} = Au_n + Bv$ þar sem A og B eru fastar. Finnið gildin á A og B að því gefnu að $M \gg m$.

Ábending: Afstæður hraði kubbsins miðað við vegginn er varðveittur í árekstrinum (fyrir utan formerki).

(c) **(0,5 stig)** Notið rakningarformúluna til þess að ákvarða hraða kubbsins eftir N árekstra einungis sem fall af u_0, N og v.

(d) **(1 stig)** Látum $\ell_n \gg d$ tákna bilið á milli veggjanna þegar n-ti árekstur á sér stað. Sýnið að til séu fastar α, β, γ og δ (hugsanlega háðir n) þannig að ℓ_n uppfylli rakningarformúluna:

$$\ell_n = \frac{\alpha u_0 + \beta v}{\gamma u_0 + \delta v} \ell_{n-1}.$$

(e) **(1 stig)** Notið rakningarformúluna til að ákvarðið bilið, ℓ_N, á milli veggjanna við N-ta árekstur einungis sem fall af u_0, v, N og ℓ_0.

(f) **(1 stig)** Metið fjölda árekstra, N, sem eiga sér stað þar til að $\ell_N = d$.

(g) **(1 stig)** Veljið gildi á ℓ_0, v, u_0 og d þ.a. kubburinn nái hraða sem er meiri en ljóshraði, c, í ferlinu.

Ástæðan fyrir þessari mótsögn er sú að hingað til höfum við notað sígilda skilgreiningu á skriðþunga, $p = mv$. Samkvæmt takmörkuðu afstæðiskenningunni verður hins vegar að nota eftirfarandi leiðréttingu

$$p = \gamma(v)mv, \qquad \text{þar sem} \qquad \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

er Lorentz-stuðullinn og hreyfiorkan sömuleiðis leiðréttist með $K = (\gamma(v) - 1)mc^2$. Þrátt fyrir þessar breytingar er eitt merkilegt atriði enn satt: Afstæður hraði kubbsins miðað við vegginn helst óbreyttur í hverjum árekstri, nú í ljósi hraðasamlagningarformúlunnar í takmörkuðu afstæðiskenningunni:

$$w = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}.$$

Takið eftir að formerki í teljara og nefnara breytast eftir því hvort u og v séu samstefna eða gagnstefna.

(h) **(2 stig)** Sýnið að rakningarformúlan fyrir hraða kubbsins verði:

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}.$$

og ákvarðið fastana a,b,c og d.

(i) **(2 stig)** Rökstyðjið að þegar fjöldi árekstra stefnir á óendanlegt, þá stefnir hraði kubbsins á c.