Landskeppni í eðlisfræði 2020

Úrslitakeppni (LAUSNIR)

23. maí kl. 09:00-12:00

Leyfileg hjálpargögn: Reiknivél sem geymir ekki texta.

Keppnin samanstendur af 3 dæmum. Athugaðu hvort þú hafir fengið öll dæmin.

Öll dæmin 3 vega jafnt og ekki verður dregið frá fyrir röng svör. Liðunum í hverju dæmi er ekki endilega raðað eftir erfiðleikastigi. Það má alltaf leysa seinni liði þó fyrri liðir hafi ekki verið leystir.

Skrifaðu lausnir þínar snyrtilega á lausnablöð sem þú færð afhent og merktu þau vel.

Tekið verður tillit til útreikninga við yfirferð á dæmum.

Góður frágangur hefur jákvæð áhrif!

Tafla yfir þekkta fasta

Nafn	Tákn	Gildi
Hraði ljóss í tómarúmi	c	$3{,}00 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}$
Þyngdarhröðun við yfirborð jarðarinnar	g	$9{,}82\,\mathrm{m/s^2}$
Massi rafeindar	m_e	$9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Rafsvörunarstuðull tómarúms	ϵ_0	$8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C^2\,s^2/(m^3\,kg)}$
Frumhleðslan	e	$1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Þyngdarfastinn	G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3/(kg\,s^2)}$
Fasti Plancks	h	$6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$

1 Sterki kjarnakrafturinn

Umfjöllun um sterka kjarnakraftinn er gjarnan sleppt í inngangsnámskeiðum í eðlisfræði. Samkvæmt atómlíkaninu samanstanda frumeindir af kjarna þar sem róteindum með jákveða hleðslu og óhlöðnum nifteindum er pakkað þétt saman og rafeindaskýi þar sem rafeindir með neikvæða hleðslu sveima umhverfis kjarnann. Í þessu verkefni munum við einblína á kjarnann og við hunsum því öll áhrif rafeindanna.

Stærð kjarnans er breytileg eftir frumefnum og er aðallega háð því hversu margar róteindir og nifteindir, sem saman kallast kjarneindir, eru í kjarnanum. Látum n tákna fjölda nifteinda og látum p tákna fjölda róteinda í kjarnanum. Heildarfjöldi kjarneindanna er þá gefinn með $A = n + p$. Skoðum einfalt líkan af kjarnanum þar sem við lítum á kjarneindirnar sem gegnheilar kúlur með geisla $r_0 = 0{,}85\,\mathrm{fm} = 0{,}85 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$ og massa $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$.

(a) **(0,5 stig)** Finnið tölulegt gildi á eðlismassa kjarneindar, $\rho = \frac{m}{V}$, þar sem V er rúmmál hennar.

> Við höfum þá að:
>
> $$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4\pi}{3} r_0^3} = 6{,}5 \cdot 10^{17}\,\mathrm{kg/m^3}.$$
>
> Til samanburðar er eðlismassi vatns $\rho_{\mathrm{vatn}} = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$.

(b) **(1,5 stig)** Lítum á kjarna með geisla R sem samanstendur af n nifteindum og p róteindum. Kjarneindirnar koma sér þannig fyrir að kjarninn hafi sama eðlismassa og kjarneindirnar. Ákvarðið ræðar tölur $a,b \in$ þannig að:

$$R = A^a r_0^b.$$

[*Ef þér tekst ekki að leysa þennan lið máttu nota að* $a = b = 1$ *framvegis í dæminu*]

> Við höfum þá að:
>
> $$\frac{Am}{\frac{4\pi}{3} R^3} = \rho = \frac{m}{\frac{4\pi}{3} r_0^3} \implies R^3 = A r_0^3 \implies R = A^{\frac{1}{3}} r_0$$
>
> Svo við ályktum að $a = \frac{1}{3}$ en $b = 1$.

Skoðum nú kraftana sem verka á milli tveggja aðliggjandi róteinda í kjarnanum. Þar sem eindirnar hafa massa verkar á þær aðdráttarkraftur vegna þyngdarlögmálsins sem er gefinn með:

$$F_G = \frac{Gm^2}{r^2}$$

þar sem $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3/kg\,s^2}$ er fasti sem kallast þyngdarfasti Newtons og r er fjarlægðin milli massamiðja róteindanna. Þar sem róteindirnar hafa hleðslu $q_e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ verkar einnig á þær fráhrindandi Coulombskraftur sem er gefinn með:

$$F_k = \frac{kq_e^2}{r^2}$$

þar sem $k = 8{,}99 \cdot 10^9\,\mathrm{N\,m^2/C^2}$ er fasti sem nefnist fasti Coulombs og r er fjarlægðin milli massamiðja róteindanna.

(c) **(0,5 stig)** Sýnið að $F_k \gg F_G$ svo við getum hunsað áhrif þyngdarkraftsins framvegis í dæminu.

> Við höfum að fjarlægðin á milli róteindanna er $r = 2r_0 = 1{,}7\,\mathrm{fm}$ svo:
>
> $$F_k = 80\,\mathrm{N} \quad \text{og} \quad F_G = 6{,}4 \cdot 10^{-35}\,\mathrm{N},$$
>
> svo við ályktum að $F_k \gg F_G$.

(d) **(0,5 stig)** Finnið hröðunina sem róteindin myndi finna fyrir vegna Coulombskraftsins.

> Höfum þá:
>
> $$F_{\text{heild}} = F_k = ma \implies a = \frac{F_k}{m} = 4{,}8 \cdot 10^{28}\,\mathrm{m/s^2}.$$

(e) **(1 stig)** Árið 1935 sýndi japanski eðlisfræðingurinn Hideki Yukawa fram á að lýsa mætti kjarnakraftinum með:

$$F_Y = -\frac{\alpha}{r}\left(\frac{1}{r} + \beta\right)\exp(-\beta r)$$

þar sem $\beta = 6{,}9 \cdot 10^{14}\,\mathrm{m^{-1}}$ er fasti og r er fjarlægðin á milli massamiðja eindanna. Ákvarðið tölulegt gildi á fastanum α þannig að kjarninn haldist stöðugur.

[*Ef þér tekst ekki að leysa þennan lið máttu nota að* $\alpha = 1{,}3 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{m^2}$ *framvegis í dæminu*]

> Þar sem $F_k \gg F_G$ nægir okkur að athuga að ef $F_k = F_Y$ þá höfum við að:
>
> $$\frac{kq_e^2}{(2r)^2} = \frac{\alpha}{2r}\left(\frac{1}{2r} + \beta\right)\exp(-2\beta r) \implies \alpha = \frac{kq_e^2\exp(2\beta r)}{(1+2\beta r)} = 3{,}5 \cdot 10^{-28}\,\mathrm{m^2}$$

(f) **(1 stig)** Stöðuorka Yukawa kraftsins F_Y er gefin með:

$$U_Y = -\frac{\alpha}{r}\exp(-\beta r)$$

Metið stöðuorkuna, ΔU, sem losnar við það að skilja tvær róteindir frá hver annarri.

[*Ef þér tekst ekki að leysa þennan lið máttu nota að* $\Delta U = 7{,}8 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{J}$ *framvegis í dæminu*]

> Við tökum eftir því að $U_Y(\infty) = 0$. Því er orkan sem losnar gefin með:
>
> $$\Delta U = -U_Y(2r_0) = \frac{\alpha}{2r_0}\exp(-2\beta r_0) = 4{,}2 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{J}$$

(g) **(1 stig)** Við skoðum nú úraníum atómið U^{235} sem hefur 92 róteindir og 143 nifteindir. Athugið að Yukawa krafturinn verkar einnig á milli róteinda og nifteinda í kjarnanum. Hugsum okkur að við ætlum að fjarlægja eina kjarneind úr kjarna úraníum atómsins. Við metum orkuna sem losnar við það að fjarlægja eina kjarneind úr kjarnanum sem $A \cdot \Delta U$ þar sem A er fjöldi kjarneinda í kjarnanum. Hugsum okkur nú að við höldum áfram að fjarlægja róteindir og nifteindir úr úraníumkjarnanum (eina í einu) þar til við höfum breytt úrankjarnanum í sesínkjarnan, Cs^{137}, sem hefur 55 róteindir og 82 nifteindir. Hversu mikil orka losnar við það?

Látum A_1 vera upphaflega fjölda kjarneindanna og A_2 vera fjölda kjarneindanna í lokin. Látum $x := A_1 - A_2$ tákna heildarfjölda kjarneinda sem við fjarlægjum. Við höfum þá þegar við tökum eina kjarneind í einu að:

$$\begin{aligned}\Delta E_1 &= (A_1 - 1)\Delta U + (A_1 - 2)\Delta U + \ldots + (A_1 - x)\Delta U \\ &= xA_1\Delta U - (1 + 2 + \ldots + x)\Delta U \\ &= xA_1\Delta U - \frac{x(x+1)}{2}\Delta U\end{aligned}$$

Í okkar tilfelli höfum við $A_1 = 235$ og $A_2 = 137$ þannig að $x = 235 - 137 = 98$ svo

$$\Delta E_1 = (98 \cdot 235 - 49 \cdot 99) \cdot 4{,}2 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{J} = 18179 \cdot 4{,}2 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{J} = 7{,}6 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J}.$$

(h) **(1 stig)** Hugsum okkur nú að úr þeim 37 róteindum og 61 nifteindum sem við fjarlægðum úr úraníum atóminu í lið (g) smíðum við rúbidín atóm, Rb^{95} sem hefur 37 róteindir og 58 nifteindir (3 nifteindir verða afgangs). Hversu mikla orku kostar að smíða rúbidínkjarna?

Látum nú A vera lokafjölda kjarneindanna. Við höfum þá:

$$\Delta E_2 = \Delta U + 2\Delta U + \ldots (A-1)\Delta U = \frac{A(A-1)}{2}\Delta U = 95 \cdot 47 \cdot 4{,}2 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{J} = 1{,}9 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J}$$

Sem þýðir að orkan sem losnaði í heild sinni við þetta ferli var:

$$\Delta E = \Delta E_1 - \Delta E_2 = 5{,}7 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J}.$$

(i) **(2 stig)** Fyrsta kjarnorkusprengjan, sem notuð var í hernaði, "Little Boy", innihélt 64 kg af úrani. Þar af hvarfaðist um það bil 1 kg af úrani og myndaði efnahvarf af gerðinni:

$$U^{235} + n^1 \to Cs^{137} + Rb^{95} + 4n^1 + \Delta E$$

Metið orkuna, ΔE, sem losnaði í þessari kjarnorkusprengju.

Nokkrar upplýsingar sem gætu komið að gagni:

- Mólarmassi úrans er $M_U = 235{,}04\,\mathrm{g/ml}$.
- Mólarmassi sesíums er $M_{Cs} = 136{,}91\,\mathrm{g/ml}$.
- Mólarmassi rúbidíums er $M_{Rb} = 94{,}93\,\mathrm{g/ml}$.
- Avogadrosartalan er $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$.

Við þurfum þá að finna hversu mörg úraníum atóm eru í 1 kg af úraníumi. Við höfum því að ef n_U táknar mól úraníums þá:

$$n_U = \frac{1000\,\mathrm{g}}{235{,}04\,\mathrm{g/ml}} = 4{,}255\,\mathrm{ml}$$

og ef heildarfjöldi úraníum atóma í hvarfinu er táknaður með k þá höfum við:

$$k = n_U \cdot N_A = 2{,}562 \cdot 10^{24}$$

Þá er heildarorkan sem myndaðist í sprengingunni:

$$k \cdot \Delta E = 2{,}562 \cdot 10^{24} \cdot 5{,}7 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J} = 1{,}5 \cdot 10^{15}\,\mathrm{J}.$$

2 Lögmál Snells

Ljós ferðast hægar í vatni heldur en í lofti. Þessu er lýst með brotstuðlinum, n, sem er skilgreindur þ.a.

$$n_{\text{efni}} = \frac{c}{c_{\text{efni}}},$$

þar sem c er hraði ljósins í tómarúmi og c_{efni} er hraði ljósins í efninu sem um ræðir. Sem dæmi má nefna að gildi brotstuðulsins í vatni er $n_{\text{vatn}} = 1{,}33$ en í lofti er hann $n_{\text{loft}} = 1{,}00029 \approx 1$.

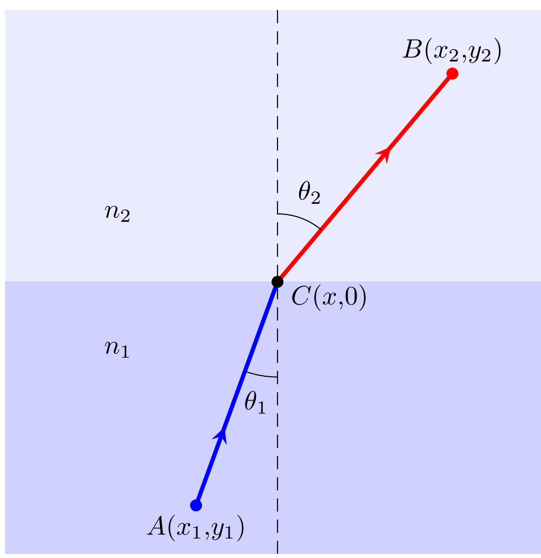
Í fyrri hluta þessa verkefnis munum við sýna hvernig lögmál Snells fæst sem afleiðing af lögmáli Fermats. Í seinni hluta verkefnisins munum við skoða hvernig nota má lögmál Snells til þess að leysa hin ýmsu verkefni. Hlutarnir tveir eru náskyldir að efnistökum en ef þú lendir í vandræðum í fyrri hlutanum máttu gefa þér niðurstöðuna í jöfnu (1) í lið **(b)** og halda áfram í seinni hlutann.

A Lögmál Fermats (3 stig)

Lögmál Fermats í einfaldaðari mynd segir að:

> *„Ljósið ferðast ávallt þá leið milli tveggja punkta sem tekur stystan tíma að ferðast.“*

Lítum á uppsetningu eins og á mynd 1. Látum $A(x_1,y_1)$ og $B(x_2,y_2)$ vera fasta punkta í efnum með brotstuðla n_1 og n_2. Hraði ljóss er fasti inni í hvoru efninu fyrir sig þannig að innan þeirra ferðast ljósið eftir beinum línum. Við viljum ákvarða punkt $C(x,0)$ á skilfleti efnanna þannig að það taki ljósið sem stystan tíma að ferðast vegalengdina $|AC| + |CB|$. Við hugsum um punktinn C þannig að honum fylgi rennimál sem leyfir okkur að draga hann fram og tilbaka meðfram skilfletinum sem fall af breytistærðinni x.



Mynd 1: Upsetningin sýnir hugsanlega braut ljósgeisla sem fer frá A til B með viðkomu í C.

(a) **(1 stig)** Látum t_{AC} tákna tímann sem það tekur ljósið að ferðast frá A til C og látum t_{CB} tákna tímann sem það tekur ljósið að ferðast frá C til B. Sýnið að heildartíminn, t, sem það tekur ljósið að ferðast frá A til B með viðkomu í C sé gefinn með:

$$t = t_{AC} + t_{CB} = \frac{n_1}{c}\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2} + \frac{n_2}{c}\sqrt{(x - x_2)^2 + y_2^2}\,.$$

Við höfum að $v = s/t$ og því $t = s/v$ þar sem að s er vegalengdin sem hluturinn ferðast og v er hraðinn. Látum $c_1 = c/n_1$ og $c_2 = c/n_2$ vera hraða ljósins í hvoru efni um sig. Þá fæst:

$$t_{AC} = \frac{|AC|}{c_1} = \frac{n_1}{c}\sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2}, \qquad t_{CB} = \frac{|CB|}{c_2} = \frac{n_2}{c}\sqrt{(x-x_2)^2 + y_2^2}.$$

(b) **(2 stig)** Sýnið að lögmál Snells:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \tag{1}$$

fæst sem afleiðing þess að lágmarka tímann t. Hornin θ_1 og θ_2 eru skilgreind á mynd 1.

Við athugum fyrst að við höfum:

$$\sin\theta_1 = \frac{x - x_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2}}, \qquad \text{á meðan,} \qquad \sin\theta_2 = \frac{x_2 - x}{\sqrt{(x-x_2)^2 + y_2^2}},$$

þar sem við höfum notað að $x_1 < x < x_2$. Útgildi t með tilliti til x ákvarðast af afleiðunni:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{n_1}{c}\frac{(x-x_1)}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2}} + \frac{n_2}{c}\frac{(x-x_2)}{\sqrt{(x-x_2)^2 + y_2^2}} = \frac{n_1}{c}\sin\theta_1 - \frac{n_2}{c}\sin\theta_2 = 0.$$

Við margföldum í gegn með ljóshraðanum c og höfum því lögmál Snells:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2.$$

B Ekki er allt sem sýnist (3,5 stig)

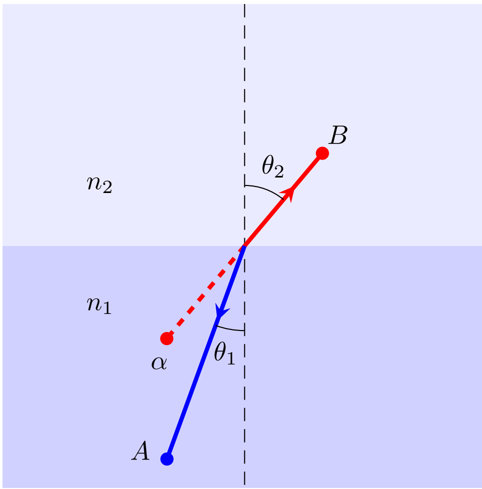
Fiskurinn Anna situr á dýpi d í miðri hringlaga tjörn með geisla r. Þrösturinn Baldur situr í hæð h í tré sem er í láréttri fjarlægð k frá tjörninni. Látum A tákna punktinn sem Anna er í og látum B tákna punktinn sem Baldur er í.

(c) **(0,5 stig)** Hver er rúmfræðilega fjarlægðin, $\ell = |AB|$, milli Önnu og Baldurs?

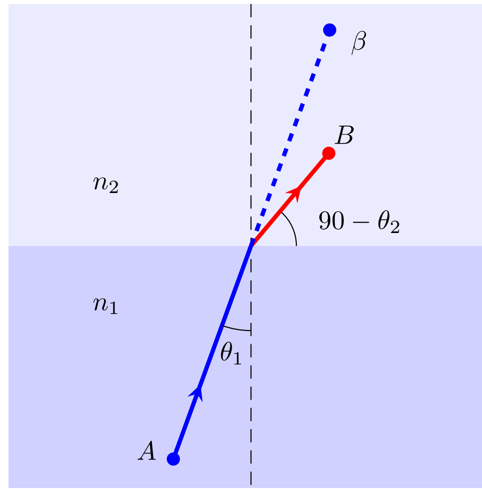
Við höfum að:

$$\ell = |AB| = \sqrt{(r+k)^2 + (d+h)^2}.$$

Augun okkar eiga hinsvegar erfitt með að greina ljóssveigjuna sem verður við það að ljósið ferðast úr einum miðli í annan. Augun okkar halda að ljósið ferðist alltaf eftir beinum línum óháð því úr hvaða miðli ljósið kemur. Það er ástæðan fyrir því að reglustikur virðast bogna í vatni og að fiskar séu ekki þar sem að þeir virðast vera undir vatninu. Látum nú α vera punktinn sem fuglinum Baldri sýnist fiskurinn Anna vera í og látum β vera punktinn sem Önnu sýnist Baldur vera í (sjá myndir 2 og 3). Takið eftir að punktarnir α og β eru í lóðréttri línu við punktana A og B.



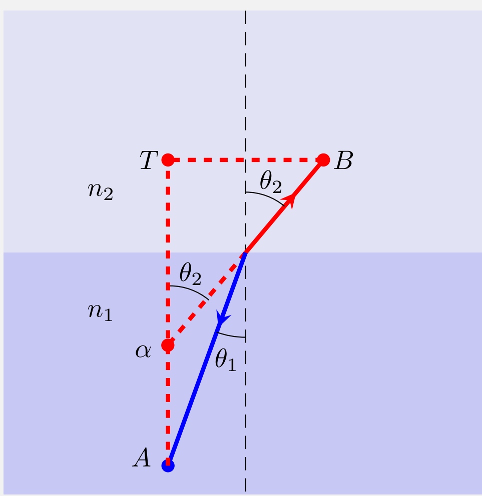
Mynd 2: Baldur er í punktinum B.
Honum sýnist Anna vera í punktinum α.

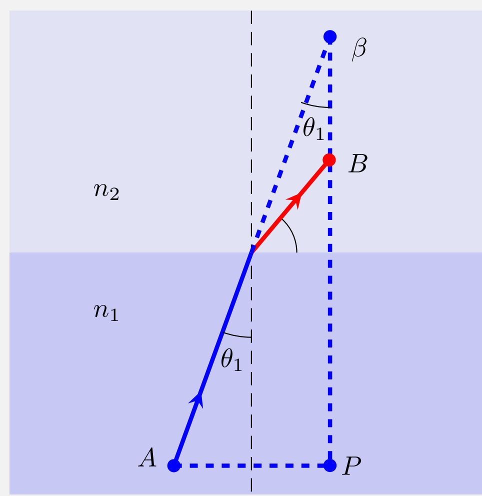


Mynd 3: Anna er í punktinum A.
Henni sýnist Baldur vera í punktinum β

(d) (1 stig) Látum $\ell_A = |A\beta|$ og $\ell_B = |B\alpha|$ tákna vegalengdirnar sem Anna og Baldur skynja hvort um sig sem fjarlægðina á milli þeirra. Sýnið að:

$$\frac{\ell_A}{n_1} = \frac{\ell_B}{n_2}.$$





Út frá myndunum að ofan að er ljóst að $|BT| = |AP|$. Við höfum þá að:

$$\ell_B \sin\theta_2 = |BT| = |AP| = \ell_A \sin\theta_1$$

Þar með höfum við með lögmáli Snells að:

$$\frac{\ell_A}{\ell_B} = \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{n_1}{n_2}.$$

(e) (0,5 stig) Ákvarðið stærðarröð lengdanna ℓ, ℓ_A og ℓ_B, það er, hvert eftirtalinna er rétt?

$$\ell < \ell_A < \ell_B, \quad \ell < \ell_B < \ell_A, \quad \ell_A < \ell < \ell_B, \quad \ell_A < \ell_B < \ell, \quad \ell_B < \ell_A < \ell, \quad \ell_B < \ell < \ell_A.$$

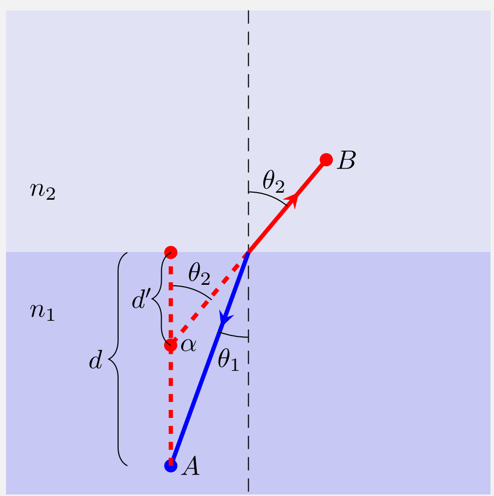
Af myndum 2 og 3 er ljóst að $\ell_B < \ell < \ell_A$. Frekari rökstuðning þarf ekki, en af liðnum á undan höfum við að:

$$\frac{\ell_A}{\ell_B} = \frac{n_1}{n_2}$$

og þar sem $n_1 > n_2$ ályktum við að $\ell_A > \ell_B$. Með mynd 3 til hliðsjónar sjáum við að punktarnir B og β eru í sömu láréttu fjarlægð frá A en β er alltaf fyrir ofan B óháð hornunum θ_1 og θ_2, því ályktum við að $\ell_A > \ell$. Eins sjáum við að $\ell_B < \ell$. Þar með er $\ell_B < \ell < \ell_A$.

(f) (1,5 stig) Látum d' vera dýptina sem Baldri sýnist Anna vera í (sjá mynd 2). Sýnið að:

$$\frac{d'}{d} = \frac{n_2 \cos\theta_2}{n_1 \cos\theta_1}.$$



Út frá myndinni að ofan er hægt að sjá að:

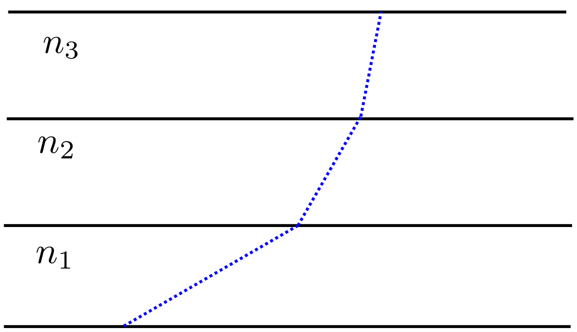
$$d' \tan\theta_2 = d \tan\theta_1,$$

en þar með fáum við með því að nota lögmál Snells að:

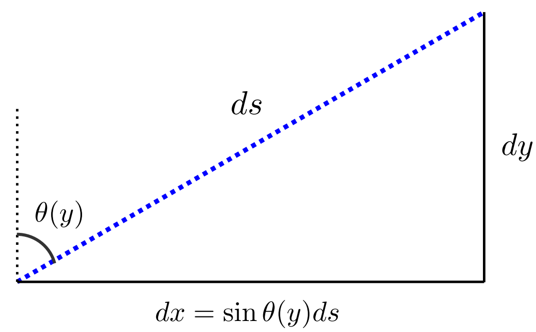
$$\frac{d'}{d} = \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} \cdot \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} = \frac{n_2 \cos\theta_2}{n_1 \cos\theta_1}.$$

C Hillingar (3,5 stig)

Ljós ferðast hraðar í heitu lofti heldur en í köldu en það þýðir að brotstuðull lofts getur breyst samfellt með breytilegu hitastigi. Eins breytist lofthiti með hæð og er oftast hæstur næst yfirborði jarðarinnar en lækkar þegar ofar dregur. Þetta veldur því að fólk getur séð hillingar í eyðimörkum. Þá sýnist fólki það sjá vatn í þurrum eyðimerkursandinum en það er í rauninni ljós frá himininum sem fólk sér. Þetta má skýra með lögmáli Fermats (og með lögmáli Snells) því ljósið velur að fara þá leið sem lágmarkar ferðatímann en sú leið reynist vera sú sem liggur sem næst jörðinni því þar er loftið heitast. Við ætlum í þessum hluta að reyna að skýra þetta fyrirbrigði nánar.



Mynd 4: Sveigja ljósins sem fall af hækkandi hæð.



Mynd 5: Örsmæðarmynd sem sýnir hvernig $\sin\theta(y)$ er háð $y' = dy/dx$.

(g) (0,5 stig) Sýnið, með mynd 5 til hliðsjónar, að almennt gildi að:

$$\sin\theta(y) = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}},$$

þar sem $y' = \frac{dy}{dx}$.

> Við höfum útfrá örsmæðarmyndinni að:
>
> $$dx = \sin\theta(y)ds$$
>
> En það gefur því að:
>
> $$\sin\theta(y) = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{dx}{dx\sqrt{1+(dy/dx)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}.$$

Góð nálgun fyrir því hvernig að brotstuðull andrúmsloftsins breytist sem fall af hæðinni y er gefin með:

$$n(y) = \sqrt{1+\gamma y},$$

þar sem γ er jákvæður fasti sem hefur SI-einingar 1/m. Við höfum þá samkvæmt lögmáli Snells að:

$$n(y)\sin\theta(y) = n(0)\sin\theta(0).$$

En $n(0) = 1$ og ef $\theta_0 = \theta(0)$ þá höfum við fyrir öll $y > 0$ að:

$$n(y)\sin\theta(y) = \sin\theta_0.$$

Við viljum núna ákvarða ferilinn sem ljósið mun fylgja, það er, við viljum ákvarða y sem fall af x í hnitakerfi þar sem að geislinn byrjar í $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

(h) (3 stig) Sýnið að ferli ljóssins sé lýst með:

$$y(x) = \frac{\gamma}{4\sin^2\theta_0}x^2 + \cot\theta_0 x,$$

ef ljósgeislinn byrjar í $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Lausn 1: Við byrjum á því að athuga að:

$$\sin\theta_0 = n(y)\sin\theta(y) = \sqrt{1+\gamma y}\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}$$

Sem er fyrsta stigs diffurjafna fyrir y sem fall af x. Okkur nægir því að sýna að fallið sem okkur var gefið, $y(x) = \frac{\gamma}{4\sin^2\theta_0}x^2 + \cot\theta_0 x$, sé lausn á diffurjöfnunni með tilheyrandi upphafsskilyrði. Við sjáum að $y(0) = 0$ svo að lausnin uppfyllir upphafsskilyrðið. Við athugum fyrst að:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\gamma}{2\sin^2\theta_0}x + \cot\theta_0.$$

En þá höfum þá að:

$$\frac{\sqrt{1+\gamma y}}{\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{\sqrt{1+\gamma\left(\frac{\gamma}{4\sin^2\theta_0}x^2+\cot\theta_0 x\right)}}{\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{2\sin^2\theta_0}x+\cot\theta_0\right)^2}} = \frac{\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{4\sin^2\theta_0}x^2+\gamma\cot\theta_0 x}}{\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{4\sin^4\theta_0}x^2+\frac{\gamma\cot\theta_0}{\sin^2\theta_0}x+\cot^2\theta_0}} = \sin\theta_0.$$

Þar sem að við höfum notað að $1+\cot^2\theta_0 = \frac{1}{\sin^2\theta_0}$. Þetta sýnir því að $y(x) = \frac{\gamma}{4\sin^2\theta_0}x^2+\cot\theta_0 x$ er lausn á diffurjöfnunni. Þar sem að lausn fyrsta stigs diffurjöfnu ákvarðast ótvírætt út frá upphafsskilyrðinu er lausnin einnig ótvíræð.

Lausn 2: Við höfum þá að:

$$\sin\theta_0 = n(y)\sin\theta(y) = \sqrt{1+\gamma y}\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}$$

Sem er fyrsta stigs diffurjafna fyrir y sem fall af x. Við hefjum í annað veldi og fáum:

$$\sin^2\theta_0\left(1+(y')^2\right) = 1+\gamma y$$

sem við getum einangrað fyrir $(y')^2$, þá fáum við:

$$(y')^2 = \frac{1}{\sin^2\theta_0}\left(1-\sin^2\theta_0+\gamma y\right) = \cot^2\theta_0 + \frac{\gamma y}{\sin^2\theta_0}$$

Við tökum síðan rótina og notum að hallatalan $y' = \frac{dy}{dx} > 0$ (eins og ýjað er að á mynd 4).

$$y' = \frac{dy}{dx} = \left(\cot^2\theta_0 + \frac{\gamma y}{\sin^2\theta_0}\right)^{1/2}$$

Við leysum síðan diffurjöfnuna með aðskilnaði breytistærða og fáum:

$$\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{\sqrt{\cot^2\theta_0+\frac{\gamma y}{\sin^2\theta_0}}} = \int_{x_0}^{x} dx = x - x_0 = x.$$

Við notum innsetninguna $u = \cot^2\theta_0 + \frac{\gamma y}{\sin^2\theta_0}$, þá er $du = \frac{\gamma}{\sin^2\theta_0}dy$ og við höfum að:

$$\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{\sqrt{\cot^2\theta_0+\frac{\gamma y}{\sin^2\theta_0}}} = \frac{\sin^2\theta_0}{\gamma}\int_{u(y_0)}^{u(y)} u^{-1/2}du = \frac{\sin^2\theta_0}{\gamma}\left[2u^{1/2}\right]_{u(y_0)}^{u(y)}$$

En nú er $u(y_0) = u(0) = \cot^2\theta_0$ og því fáum við að:

$$\frac{2\sin^2\theta_0}{\gamma}\left(\sqrt{\cot^2\theta_0+\frac{\gamma y}{\sin^2\theta_0}} - \cot\theta_0\right) = x$$

En þessa jöfnu getum við leyst fyrir y, þá fáum við fyrst:

$$\sqrt{\cot^2\theta_0+\frac{\gamma y}{\sin^2\theta_0}} = \frac{\gamma x}{2\sin^2\theta_0} + \cot\theta_0$$

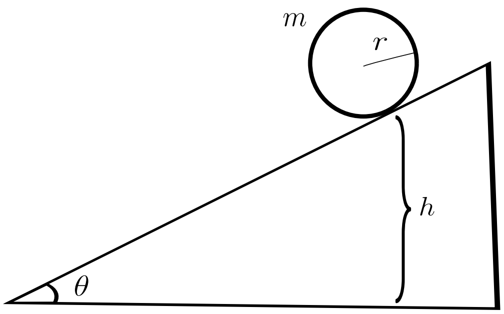
og síðan

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sin^2\theta_0}{\gamma}\left(\left(\frac{\gamma x}{2\sin^2\theta_0}+\cot\theta_0\right)^2 - \cot^2\theta_0\right) \\ &= \frac{\sin^2\theta_0}{\gamma}\left(\frac{\gamma^2}{4\sin^4\theta_0}x^2 + \frac{\gamma\cot\theta_0}{\sin^2\theta_0}x\right) = \frac{\gamma}{4\sin^2\theta_0}x^2 + \cot\theta_0 x \end{aligned}$$

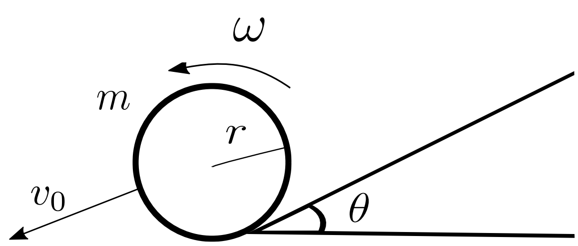
3 Magnuskrafturinn

Í þessu verkefni munum við skoða Magnuskraftinn sem kenndur er við þýska eðlisfræðinginn Heinrich Gustav Magnus. Kraftinn má gjarna sjá að verki í boltaíþróttum þar sem boltinn snýst með ógnarhraða á meðan hann flýgur í gegnum loftið. Krafturinn veldur því að boltinn sveigir burt af leiðinni sem hann hefði annars fylgt í lofttæmi. Þetta má gjarnan sjá í aukaspyrnum í fótbolta sbr. orðatiltækið „Bend It Like Beckham“.

Greining okkar hefst á því að skoða gegnheila kúlu með massa m og geisla r sem rúllar án þess að renna niður skábretti sem hallar um θ gráður miðað við lárétt. Til að byrja með hunsum við bæði loftmótsstöðu og Magnuskraftinn, en við munum reyna að bæta þeim við í lokin á dæminu.



Mynd 6: Gegnheil kúla rúllar án þess að renna niður skábretti.



Mynd 7: Gegnheil kúla rúllar fram af skábretti.

(a) **(1,5 stig)** Látum kúluna byrja að rúlla úr kyrrstöðu niður skábrettið úr hæð h. Hver verður hraði kúlunnar, v og hornhraði kúlunnar, ω, um snúningsásinn þegar kúlan flýgur fram af skábrettinu?

Þar sem kúlan rúllar án þess að renna höfum við $v_{cm} = r\omega$. Snúningsstuðull kúlu er $\sigma = 2/5$ svo við getum ritað hverfitregðu kúlunnar sem $I = \sigma m r^2$. Samkvæmt orkuvarðveislu fæst:

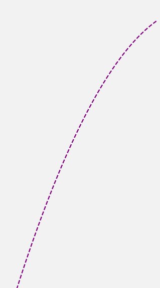
$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\sigma m r^2\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2\left(1+\sigma\right)$$

Svo við ályktum að:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1+\sigma}}, \qquad \omega = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2gh}{1+\sigma}}, \qquad \text{þar sem} \qquad \sigma = \frac{2}{5}.$$

(b) **(0,5 stig)** Skábrettið stendur í hæð y yfir jörðu. Teiknið feril kúlunnar frá því að hún rúllar fram af skábrettinu og þar til að hún lendir á jörðinni. Hunsið áhrif vegna loftmótstöðu og Magnuskraftsins.

Ferilinn mun hafa eftirfarandi lögun:

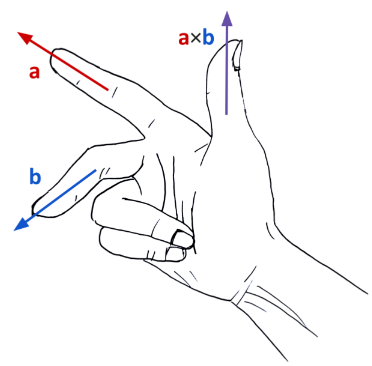


Mynd 8: Ferill boltans án Magnuskraftsins.

Nú kynnum við Magnuskraftinn til sögunnar. Fyrir hlut með hraða $\vec{v}$ og hornhraða $\vec{\omega}$ er hann gefinn með:

$$\vec{F}_M = mS\,\vec{\omega} \times \vec{v}.$$

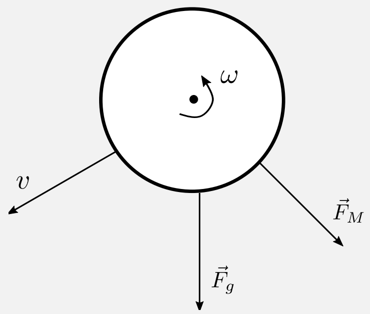
Þar sem S er stuðull sem er háður lögun hlutarins og miðlinum sem hann hreyfist í og m er massi hlutarins. Vigurinn $\vec{\omega}$ er skilgreindur með hægri handar reglu þannig að hann stefnir beint út úr blaðinu á mynd 7 og $\times$ táknar krossfeldi[1] vigranna $\vec{\omega}$ og $\vec{v}$. Ákvarða má stefnu krossfeldisins með hægri handar reglu eins og sést á mynd 9 hér til hægri.



Mynd 9: Hægri handar regla fyrir krossfeldið $a \times b$.

(d) (1 stig) Teiknið kraftamynd af kúlunni andartaki eftir að hún rúllar fram af skábrettinu. Á myndinni eiga Magnuskrafturinn og þyngdarkrafturinn að sjást greinilega.

Kraftamyndin verður eftirfarandi:



Mynd 10: Kraftamynd af kúlunni rétt eftir að hún rúllar af skábrettinu. Athugið að $\vec{F}_M$ er hornréttur á bæði $\vec{\omega}$ og $\vec{v}$.

Við gerum framvegis ráð fyrir því að eftir að kúlan flýgur fram af skábrettinu, þá sé hornhraði hennar, ω, fastur. Þar sem að Magnuskrafturinn hefur þátt í lárétta stefnu er mun erfiðara að finna hvar kúlan lendir eftir að hafa fallið lóðrétta vegalengd y. Við viljum því skoða kraftajöfnuna sem fall af tíma, þ.e.

$$m\vec{a} = \vec{F}_g + \vec{F}_M.$$

Þar sem:

$$\vec{F}_g = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{F}_M(t) = mS\,\vec{\omega} \times \vec{v}(t).$$

(e) (1 stig) Finnið Magnuskraftinn, $\vec{F}_M(t) = mS\,\vec{\omega} \times \vec{v}(t)$, með því að reikna krossfeldi $\vec{\omega}$ og $\vec{v}(t)$.

Út frá athugasemdinni í fótskriftinni fæst að:

$$\vec{F}_M(t) = mS \begin{pmatrix} 0 - \omega v_y(t) \\ \omega v_x(t) - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = mS\omega \begin{pmatrix} -v_y(t) \\ v_x(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[1]Reikna má krossfeldi vigranna $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ með:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}.$$

(f) (0,5 stig) Sýnið að kraftajöfnuna megi rita á eftirfarandi formi:

$$m\begin{pmatrix} v_x'(t) \\ v_y'(t) \\ v_z'(t) \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} -S\omega v_y(t) \\ -g + S\omega v_x(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

þar sem $a_x = v_x' = \frac{dv_x}{dt}$.

Við höfum annars vegar að:

$$m\vec{a} = m\begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} v_x'(t) \\ v_y'(t) \\ v_z'(t) \end{pmatrix},$$

og hinsvegar að:

$$\vec{F}_g + \vec{F}_M = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} + mS\omega\begin{pmatrix} -v_y(t) \\ v_x(t) \\ 0 \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} -S\omega v_y(t) \\ -g + S\omega v_x(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(g) (1 stig) Sýnið, með því að diffra jöfnurnar hnit fyrir hnit, að:

$$v_x''(t) + S^2\omega^2 v_x(t) = S\omega g, \qquad v_y''(t) + S^2\omega^2 v_y(t) = 0. \tag{2}$$

Við fáum:

$$v_x''(t) = -S\omega v_y'(t) = -S\omega\left(-g + S\omega v_x(t)\right) = S\omega g - S^2\omega^2 v_x(t).$$

$$v_y''(t) = S\omega v_y'(t) = -S^2\omega^2 v_y(t).$$

(h) (2,5 stig) Diffurjöfnuhneppið í jöfnu (2) hefur þá lausnina:

$$\begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = -v_0\begin{pmatrix} \cos(\Omega t + \theta) \\ \sin(\Omega t + \theta) \end{pmatrix} - \frac{g}{\Omega}\begin{pmatrix} \cos(\Omega t) - 1 \\ \sin(\Omega t) \end{pmatrix},$$

í hnitakerfi þar sem $-v_0(\cos\theta, \sin\theta)$ er upphafshraði agnarinnar þegar hún fer fram af skábrettinu og $\Omega = S\omega$. Sýnið að:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = -\frac{2v_0}{\Omega}\begin{pmatrix} \sin\left(\frac{1}{2}\Omega t\right)\cos\left(\frac{1}{2}\Omega t + \theta\right) \\ \sin\left(\frac{1}{2}\Omega t\right)\sin\left(\frac{1}{2}\Omega t + \theta\right) \end{pmatrix} + \frac{g}{\Omega^2}\begin{pmatrix} \Omega t - \sin(\Omega t) \\ \cos(\Omega t) - 1 \end{pmatrix}.$$

Hér gætu eftirfarandi hornafallareglur komið að góðum notum:

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right), \quad \textit{og} \quad \cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right),$$

Við nýtum okkur að $v_x = \frac{dx}{dt}$ og þar með fáum við að:

$$
\begin{aligned}
x(t) - \underbrace{x(0)}_{0} &= \int_0^t \left(-v_0\cos(\Omega t + \theta) - \frac{g}{\Omega}\big(\cos(\Omega t) - 1\big)\right) dt \\
&= -\frac{v_0}{\Omega}\big[\sin(\Omega t + \theta)\big]_0^t - \frac{g}{\Omega}\left[\frac{1}{\Omega}\sin(\Omega t) - t\right]_0^t \\
&= -\frac{v_0}{\Omega}\big(\sin(\Omega t + \theta) - \sin(\theta)\big) + \frac{g}{\Omega^2}\big(\Omega t - \sin(\Omega t)\big) \\
&= -\frac{2v_0}{\Omega}\sin\left(\frac{\Omega t + \theta - \theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\Omega t + \theta + \theta}{2}\right) + \frac{g}{\Omega^2}\big(\Omega t - \sin(\Omega t)\big) \\
&= -\frac{2v_0}{\Omega}\sin\left(\frac{1}{2}\Omega t\right)\cos\left(\frac{1}{2}\Omega t + \theta\right) + \frac{g}{\Omega^2}\big(\Omega t - \sin(\Omega t)\big).
\end{aligned}
$$

Eins fáum við að:

$$
\begin{aligned}
y(t) - \underbrace{y(0)}_{0} &= \int_0^t \left(-v_0\sin(\Omega t + \theta) - \frac{g}{\Omega}\sin(\Omega t)\right) dt \\
&= \frac{v_0}{\Omega}\big[\cos(\Omega t + \theta)\big]_0^t + \frac{g}{\Omega^2}\big[\cos(\Omega t)\big]_0^t \\
&= \frac{v_0}{\Omega}\big(\cos(\Omega t + \theta) - \cos(\theta)\big) + \frac{g}{\Omega^2}\big(\cos(\Omega t) - 1\big) \\
&= -\frac{2v_0}{\Omega}\sin\left(\frac{1}{2}\Omega t\right)\sin\left(\frac{1}{2}\Omega t + \theta\right) + \frac{g}{\Omega^2}\big(\cos(\Omega t) - 1\big).
\end{aligned}
$$

(i) (1 stig) Við gerum nú þá nálgun að $\sin\alpha \approx \alpha - \frac{1}{6}\alpha^3$ og $\cos\beta \approx 1 - \frac{1}{2}\beta^2$. Sýnið að þá sé:

$$
x(t) \approx -v_0\cos\theta t + \left(\frac{1}{6}gt^3 + \frac{1}{2}v_0\sin\theta t^2\right)\Omega + \mathcal{O}(\Omega^2).
$$

Þar sem $\mathcal{O}(\Omega^2)$ þýðir að við sleppum öllum þeim liðum sem innihalda Ω^n fyrir $n \geq 2$.

Við höfum að:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= -\frac{2v_0}{\Omega}\sin\left(\frac{1}{2}\Omega t\right)\cos\left(\frac{1}{2}\Omega t + \theta\right) + \frac{g}{\Omega^2}\big(\Omega t - \sin(\Omega t)\big) \\
&\approx -\frac{2v_0}{\Omega}\left(\frac{1}{2}\Omega t\right)\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\Omega t + \theta\right)^2 + \dots\right) + \frac{g}{\Omega^2}\left(\Omega t - \left(\Omega t - \frac{1}{6}(\Omega t)^3\right)\right) \\
&= -v_0 t\left(1 - \frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{2}\theta\Omega t + \dots\right) + \frac{1}{6}gt^3\Omega \\
&= -v_0 t\left(\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta t\Omega\right) + \frac{1}{6}gt^3\Omega \\
&= -v_0\cos\theta t + \left(\frac{1}{2}v_0\sin\theta t^2 + \frac{1}{6}gt^3\right)\Omega.
\end{aligned}
$$

(j) **(1 stig)** Sýnið að í þessari nálgun sé til tími $\tau > 0$ þannig að $x(\tau) = 0$.

Við höfum að $x(\tau) = 0$ ef

$$-v_0 \cos\theta\tau + \frac{1}{2}v_0 \sin\theta\Omega\tau^2 + \frac{1}{6}g\Omega\tau^3 = 0$$

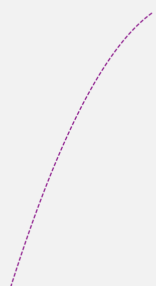
En þetta er 2. stigs margliða í τ. Við athugum að þar sem $\tau > 0$ getum við deilt í gegn með τ og jafnan verður:

$$\frac{1}{6}g\Omega t^2 + \frac{1}{2}v_0 \sin\theta\Omega\tau - v_0 \cos\theta = 0$$

En sú jafna hefur lausn:

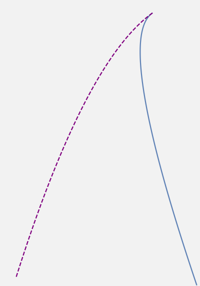
$$\tau = \frac{-\frac{1}{2}v_0 \sin\theta\Omega \pm \sqrt{\frac{1}{4}v_0^2 \sin^2\theta\Omega^2 + \frac{2g}{3}v_0 \cos\theta\Omega}}{\frac{1}{3}g\Omega}.$$

Við veljum jákvæðu lausnina því hún svarar til tíma $\tau > 0$ (neikvæða lausnin gefur $\tau < 0$). Ef við teiknum nálgunarlausnina þá lítur hún einhvern veginn svona út:



Mynd 11: Ferill boltans án Magnuskraftsins.

Mynd 12: Ferill boltans með Magnuskraftinum.



Mynd 13: Samanburður á ferlunum tveim.