

## 1.4 Óvissureikningar

**Dæmi 17** Ef  $x$  hefur óvissu  $\Delta x$ , finnið óvissurnar í  $x^2$ ,  $\sqrt{x}$ ,  $1/x$ ,  $1/x^4$ ,  $\log x$  og  $e^x$ .

**Dæmi 18** Nemandi skýtur sprengju með upphafshraða  $v = 5,0 \pm 0,1 \text{ m s}^{-1}$  í þyngdarsviði þar sem  $g = 9,81 \pm 0,01 \text{ m s}^{-2}$ . Lendingarfjarlægðin mælist  $d = 1,50 \pm 0,02 \text{ m}$ . Gefið að skothornið hafi verið minna en  $45^\circ$ , finnið skothornið ásamt óvissu þess. Gerið ráð fyrir að allar óvissur séu óháðar.

## 1.5 Hvaða graf á ég að gera?

**Dæmi 17** Hraði rafeindalosunar frá föstu efni í rafsviði  $E$  er gefinn með

$$R = \beta e^{-E/E_0},$$

þar sem  $\beta$  og  $E_0$  eru fastar. Þessi formúla byggir á smugi. Ef  $E$  og  $R$  eru mæld, hvernig er hægt að línugera gögnin til að ákvarða  $\beta$  og  $E_0$ ?

**Dæmi 18** Gerum ráð fyrir að  $y$  og  $x$  séu ólínulega tengd með jöfnunni

$$y = bx + ax^2.$$

Til dæmis gæti þetta líkan komið upp fyrir gorm sem fylgir ekki alveg lögmáli Hooks. Með því að mæla  $x$  og  $y$ , hvaða línu má teikna til að ákvarða stuðlana  $a$  og  $b$ ?

**Dæmi 19** [USAPhO 2012, A2] Í óvermnu ferli (adíabatískt) gildir að

$$PV^\gamma = \text{fasti},$$

þar sem  $\gamma$  er óvermnisstuðullinn. Rannsóknaraðili mælir þrýsting og hita gassins við mismunandi tímabil í adíabatísku ferli. Niðurstöðurnar eru gefnar í töflunni hér að neðan (miðað við margfeldi af  $P_0$  og  $T_0$ ):

Þrýstingur	1,21	1,41	1,59	1,73	2,14
Hiti	2,11	2,21	2,28	2,34	2,49

Ákvarðið gildi  $\gamma$  fyrir gasið með beinlínugrafi.

**Dæmi 20** [USAPhO 2011, A2] Mjó, einsleit stöng með lengd  $L$  og massa  $M = 0,258 \text{ kg}$  er hengd upp í punkti í fjarlægð  $R$  frá massamiðju sinni. Þegar stöngin er hreyfð örlítið og látin sveiflast um upphengipunktinn framkvæmir hún einfaldar sveiflur. Mæld er sveiflutíminn  $T$  sem fall af  $R$ . Hver er lengdin  $L$ ? Ekki þarf að taka tillit til skekkju í mælingum.

Tími sveiflu fyrir slíkt pendúl er gefinn með:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgR}} = 2\pi \sqrt{\frac{R^2 + L^2/12}{gR}}.$$

Mælingar á  $T$  og  $R$  eru gefnar í töflunni hér að neðan:

$R$ (m)	0.050	0.075	0.102	0.156	0.198	0.211	0.302	0.387	0.451	0.588
$T$ (s)	3.842	3.164	2.747	2.301	2.115	2.074	1.905	1.855	1.853	1.900

**Dæmi 21** [INPhO 2018, Dæmi 7] Svar fyrir fræðilega:  $v_w = \frac{d^2}{D^2} \sqrt{\frac{2\rho_w g}{\rho_a}} \sqrt{h}$  og  $\sqrt{h} = \sqrt{h_0} - \frac{d^2}{D^2} \sqrt{\frac{\rho_w g}{2\rho_a}} t$ .

**Dæmi 22** [Tölvutilraun 2022 USAPhO]

## 1.6 Fermi-dæmi

**Dæmi 23** Nokkrar spurningar um orku ljóseindar.

- (a) Áætlið fjölda ljóseinda sem venjuleg ljóspera sendir frá sér á hverri sekúndu. (Orka ljóseindar er  $E = hf$ , og tíðni tengist bylgjulengd með  $c = \lambda f$ .)
- (b) Sólin skilar geislunarorku með ljósstyrk  $1400 \text{ W m}^{-2}$  til jarðar. Næsta stjarna er í um það bil 4 ljósára fjarlægð. Gefið að þessi stjarna sé svipuð og sólin – hversu margar ljóseindir frá henni falla á augað þitt á hverri sekúndu?

**Dæmi 24** Áætlið radius stærsta smástirnis sem þið gætuð stokkið frá og aldrei snúið til baka.

**Dæmi 25** Þegar menn léttast er mest af þyngdartapinu vegna útöndunar á kolefni. Um 20% af loftinu í andrúmsloftinu er súrefni. Við inn- og útöndun umbreytist um 25% af súrefninu í koltvísýring.

- (a) Áætlið massa lofts sem fer í einn andardrátt.
- (b) Áætlið hversu mikla þyngd við missum daglega bara með því að anda.

**Dæmi 26** Hversu langa línu getið þið skrifað með einum blýanti?

## 2. Afifræði

Dæmin eru byggð á [M1] [M2] [M3] [M4]. Lausnir: [M1Sol] [M2Sol] [M3Sol] [M4Sol].

### 2.1 Diffurjöfnur í eðlisfræði

**Dæmi 27** Skoðum þunna ræmu með þykkt  $dy$  af lofti í hæð  $h$  yfir jörðu (botn ræmunnar). Látum  $P(h)$  vera þrýstinginn við neðra borð ræmunnar og  $P(h + dy)$  vera þrýstinginn á efra borð ræmunnar. Látum  $\rho(h)$  tákna eðlismassa loftsins í hæð  $h$  yfir jörðu. Sýnið með því að nota kraftajafnvægið:

$$\frac{dP}{dh} = -\rho(h)g.$$

Notið síðan gaslögmálið til þess að sýna að:

$$\frac{dP}{dh} = -\frac{\mu g}{RT(h)}P$$

Þar sem að  $\mu$  táknar mólmassa loftsins. Hitastigið breytist síðan línulega um  $1^\circ\text{C}$  fyrir hverja 200 m hækkun. Leysið diffurjöfnuna og ákvarðið þrýstinginn á toppi Everest.

**Dæmi 28** [USAPhO 2012, B1] Ögn með massa  $m$  hreyfist undir áhrifum krafts sem líkist gormkrafti, nema krafturinn ýtir ögninni frá upphafspunktinum:

$$F = +m\alpha^2 x$$

Í venjulegri, einfaldri sveifluhreyfingu, er staðsetning agnar sem fall af tíma gefin með

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Hér höfum við í staðinn:

$$x(t) = A f_1(t) + B f_2(t),$$

þar sem  $f_1$  og  $f_2$  eru viðeigandi föll.

- (a) Fölin  $f_1(t)$  og  $f_2(t)$  má velja af gerðinni  $e^{rt}$ . Hver eru tvö möguleg gildi  $r$ ?
- (b) Gera má ráð fyrir að ögnin byrji í  $x(0) = x_0$  og með hraða  $v(0) = 0$ . Hvað er þá  $x(t)$ ?
- (c) Önnur, eins ögn, byrjar í stöðu  $x(0) = 0$  og með hraða  $v(0) = v_0$ . Það færir nær og nær fyrri ögninni með tíma. Hvert er gildið á  $v_0$ ?

**Dæmi 29** Bolta með massa  $m$  er kastað beint upp við tíma  $t = 0$  með upphafshraða  $v_0$ . Loftmótstaða verkar á boltann með krafti  $F = -\alpha mv$ .

(a) Leysið fyrsta stigs afleiðujöfnuna fyrir hraða boltans og sýnið að

$$v(t) = e^{-\alpha t} v_0 + \frac{g}{\alpha} (e^{-\alpha t} - 1).$$

(b) Ákvarðið tímann  $\tau$  þannig að  $v(\tau) = 0$ . Þá er boltinn í hæstu hæð.

(c) Ákvarðið hæð boltans,  $h(t)$ , með því að tegra  $v(t)$  og nota upphafsskilyrðið  $h(0) = 0$ .

(d) Hver verður mesta hæð boltans?

(e) Hvort eyðir boltinn meiri tíma á leiðinni upp eða niður?

(f) Er heildartíminn í lofti meiri eða minni en án loftmótstöðu?

(g) Finnið hraðann þegar boltinn kemur niður aftur í upphafshæðina. Er hann minni en  $v_0$ ?

(h) Áætlið hámarkshæðina sem boltinn nær bæði með og án loftmótstöðu. Hversu mikil áhrif hefur loftmótstaðan á hámarkshæðina?

(i) Hvernig breytist hegðun  $v(t)$  ef  $\alpha$  er mjög lítið? Hvað ef það er mjög stórt?

**Dæmi 30** Geislavirkar samsætur hrörna þ.a. heildarfjöldi atóma,  $N(t)$ , við tíma,  $t$ , uppfyllir diffurjöfnuna:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N.$$

Ef það eru í upphafi  $N_0$  atóm í geislavirka sýninu. Ákvarðið heildarfjölda atóma eftir tíma  $t$ .

## 2.2 Stöðujöfnur í einni vídd

**Dæmi 31** (KoMaL 2019). Fallbyss A er staðsett á bjargbrún í 800 m hæð. Fallbyss B er á jörðinni í 600 m fjarlægð lárétt frá fallbyssu A. Fallbyss A skýtur kúlu lárétt í átt að B með hraða 60 m/s. Fallbyss B skýtur samtímis kúlu í átt að A með hraða 40 m/s. Munu kúlurnar rekast saman?

**Dæmi 32** (Wang). Tveimur ögnum er sleppt á sama stað í frásu falli. Önnur ögnin hefur hraða  $v_1$  til vinstri en hin  $v_2$  til hægri. Finnið fjarlægðina á milli agnanna þegar hraðarnir þeirra verða hornréttir hvor á annan.

**Dæmi 33** (Kalda). Tvö hringlaga form með geisla  $r$  skerast þannig að miðpunktar þeirra eru í fjarlægð  $a$  frá hvor öðrum. Ef annar hringurinn færir í átt að hinum með hraða  $v$ , hver er þá hraði skurðpunktunum?

**Dæmi 34** (PPP 3). Bátur getur ferðast með hraða 3 m/s á kyrru vatni. Bátmaðurinn vill fara yfir fljót og lenda sem næst beint á móti upphafsstað sínum, þannig að heildarvegalengdin sem hann fer verði sem styst. Í hvaða stefnu á hann að róa ef straumhraði fljótsins er 2 m/s?

**Dæmi 35** (Kalda). Kubbi er ýtt inn á lárétt færiband. Færibaldið hreyfist með hraðanum 1 m/s, og upphafshraði kubbsins er 2 m/s, hornrétt á stefnu færibandsins. Hver er minnsti hraði kubbsins miðað við jörðina meðan á hreyfingunni stendur? Sjá líka: [\[EuPhO 2023 Þýskaland, T2\]](#)

## 2.3 Kasthreyfing

**Dæmi 36** Skoðum kasthreyfingu þar sem vindur veldur föstum láréttum krafti  $F$ . Undir hvaða horni þarf að kasta massa  $m$  til að hluturinn snúi aftur til kastara?

**Dæmi 37** (EFPhO 2010) Vatnsúðari sprautar vatni með hraða  $v$  í allar áttir yfir hálfkúlu.

(a) Finnið heildarflatarmál jarðar sem vatnið nær að vökva.

(b) Í hvaða fjarlægð frá úðaranum verður jörðin blautust?