Dæmareikningur fyrir íslenska ólympíuliðið í eðlisfræði 2025

1. Stærðfræðilegar undirstöður

Dæmin í þessum kafla eru að mestu byggð á [P1] [P2]. Lausnir er að finna í [P1Sol] [P2Sol].

1.1 Víddargreining

Dæmi 1 Finnið vídd fyrir afl, P, þyngdarlögmálsfastann, G, og rafsvörunarstuðul tómarúms, ϵ_0.

Dæmi 2 Eiginsveiflutíðni stjörnu, ω, er einungis háð geisla stjörnunnar, R, massa hennar, M og þyngdarlögmálsfastanum, G. Notið víddargreiningu til þess að ákvarða ω (upp að einingarlausum fasta sem er í þessu tilviki 2π). Notið niðurstöðuna til þess að meta eiginsveiflutíðni sólarinnar sem hefur geisla $R = 6{,}96 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$ og massa $M = 1{,}99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$.

Dæmi 3 Grunneindir lengdar, tíma og massa eru Planck-lengdin L_P, Planck-tíminn t_P og Planck-massinn m_P. Notið þá staðreynd að þessar stærðir ákvarðast einungis af þyngdarlögmálsfasta Newtons G, Planck-fastanum h og ljóshraðanum í tómarúmi c, en engum öðrum föstum, til að leiða jöfnur fyrir þessar stærðir. Reiknið svo töluleg gildi þeirra.

Dæmi 4 Massi Higgs-bóseindarinnar er um það bil $125\,\mathrm{GeV}$. Ákvarðið massann í kílógrömmum.

Dæmi 5 [IPhO 2007 Íran, T1] Í þessu dæmi ætlum við að beita víddargreiningu til að færa rök fyrir því að svarthol hafi ekkert hár („No-hair theorem“). Til að gera umfjöllunina eins straumlínulagaða og unnt er þá þá gott að kynna til sögunnar grundvallarfastana, en þeir eru Plancks fastinn (há-slá), $\hbar$, ljóshraðinn c, þyngdarlögmálsfastinn, G, og Boltzmann fastinn k_B. Einingar þeirra eru:

$$[\hbar] = \frac{\mathrm{m}^2\,\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}, \qquad [c] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \qquad [G] = \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\,\mathrm{s}^2}, \qquad [k_B] = \frac{\mathrm{m}^2\,\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2\,\mathrm{K}}.$$

(a) Stefan-Boltzmann lögmálið segir að svarthlutur við hitastig T og yfirborðsflatarmál A geislar frá sér orku með aflinu $P = \sigma A T^4$. Fastinn σ kallast Stefan-Boltzmann fastinn. Ákvarðið einingar Stefan-Boltzmann fastans.

(b) Ákvarðið Stefan-Boltzmann fastann sem fall af $\hbar, c, G$ og k_B, þ.e. finnið fasta $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ þ.a:

$$\sigma = \hbar^\alpha c^\beta G^\gamma k_B^\delta.$$

(c) Lítum nú á svarthol með massa m og yfirborðsflatarmál A. Notið víddargreiningu til þess að ákvarða yfirborðsflatarmál svartholsins A sem fall af massa þess, M, þyngdarlögmálsfastanum, G, og ljóshraðanum c, þ.e. finnið fasta α, β, γ þannig að:

$$A = G^\alpha c^\beta m^\gamma.$$

(d) Óreiða er táknuð með S og skilgreind út frá örsmæðaróreiðubreytingu $dS = dQ/T$, þar sem dQ er örsmæðarbreyting í varmaorku hlutarins og T er hitastig hlutarins. Einingar óreiðu eru gefnar með $[S] = \mathrm{J/K} = \mathrm{kg\,m^2/(s^2\,K)}$. Lögmál Bekensteins segir að óreiða svarthols, S er háð yfirborðsflatarmáli þess, A samkvæmt $S = \eta A$ þar sem η er fasti sem nefnist fasti Bekensteins. Ákvarðið fasta Bekensteins sem fall af grundvallarföstunum $\hbar, c, G$ og k_B.

Dæmi 6 [IPhO 2016 Sviss, Liður A4 í T3] Hlaðin ögn sem verður fyrir hröðun geislar frá sér orku á formi rafsegulbylgna. Útgeislaða afl P_{rad} hlaðinnar agnar á hringhreyfingu með föstum hornhraða er háð aðeins hröðun hennar a, hleðslu hennar q, hraða ljósins c og rafsvörunarstuðli tómarúms, ϵ_0. Notið víddargreiningu til þess að finna P_{rad} sem fall af a, q, c og ϵ_0.

Dæmi 7 [IPhO 2021 Litháen, Liður A5 í T1]

Dæmi 8 [IPhO 2024 Íran, Liður B3 í T3]

1.2 Nálganir

Dæmi 11 Skoðum jörðina, sem hefur massa M og geisla R, og hlut með massa m sem er í hæð h yfir jörðu. Þá verkar á hlutinn krafturinn

$$F_G = G\frac{Mm}{(R+h)^2}$$

samkvæmt þyngdarlögmáli Newtons. Sýnið að ef $h \ll R$ þá gildir að:

$$F_G = \frac{GMm}{R^2}\left(1 - \frac{2h}{R}\right).$$

Hver væri næsti liðurinn í Taylor-nálguninni?

Dæmi 12 Samkvæmt takmörkuðu afstæðiskenningu Einsteins er hreyfiorka hlutar gefin með:

$$K = (\gamma - 1)mc^2$$

þar sem m er massi hlutarins, c er ljóshraðinn og

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

er fall (Lorentz-liður) sem er háð hraða hlutarins v. Sýnið að í fyrstu Taylor-nálgun $v \ll c$ sé:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

og að í annarri Taylor-nálgun sé

$$K = \frac{1}{2}mv^2\left(1 + \frac{3v^2}{4c^2}\right).$$

Dæmi 13 Lítum á rafhleðslu q sem er stödd í $x = 0$ og aðra hleðslu $-q$ sem er stödd í $x = d$. Þá er rafsviðið meðfram x-ásnum vegna þessara tveggja hleðslna gefið með:

$$E(x) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-d)^2}\right).$$

Taylor-liðið fyrir stór $x \gg d$ til þess að finna nálgun á rafsviðinu langt í burtu frá hleðslunum.

Dæmi 14 Ef allur ís jarðarinnar myndi bráðna þá myndi hæð sjávarmáls hækka um $h = 60\,\mathrm{m}$. Núverandi geisli jarðarinnar er $R = 6371\,\mathrm{km}$. Metið um hversu mikinn tíma, Δt, sólarhringurinn myndi lengjast.

Dæmi 15 [IPhO 2021 Litháen, Liður A2 í T2]

1.3 Töluleg greining

Dæmi 16 [IPhO 2015 Indland, Liðir A6-A7 í T1] Gefið er fallið

$$\eta(x) = \frac{1}{6}\left(x^3 + 2x^2 + 2x\right)e^{-x}.$$

(a) Teiknið $\eta(x)$. Hvert er tölulegt gildi fallsins og hallatölu þess í $x = 0$ og þegar $x \to \infty$.

(b) Látum x_0 tákna það gildi x þar sem $\eta(x)$ er í hámarki. Ákvarðið gildi x_0 með skekkju $\pm 0{,}25$, og reiknið svo $\eta(x_0)$.