Théorie cosmologique & Cosmogravity

Le résumé de cosmologie présenté ci-dessous est centré sur les relations qui sont utilisées dans le code des simulations.

1 Modèles d'Univers de Friedmann-Lemaître

Les modèles d'Univers de Friedmann-Lemaître répondent au principe cosmologique et à la relativité générale.

Le principe cosmologique postule que l'univers est homogène et isotrope. Les observations des astres semblent valider ce principe mais seulement à grande distance (aujourd'hui à $d > 10^{24}$ m) et celles du rayonnement de fond cosmologique nous le montrent remarquablement homogène et isotrope (à 10^{-5} près en densité) $\sim$ 380 000 ans après le big bang.

La relativité générale est une théorie géométrique relativiste de la gravitation (TGRG) c'est-à-dire une théorie qui relie la géométrie du contenant espace-temps à son contenu matière-énergie et qui, localement, rejoint la relativité restreinte.

Dans une TGRG la symétrie du contenu doit donc se retrouver dans le contenant. On montre que la métrique d'espace-temps la plus générale répondant à une TGRG et au principe cosmologique est celle de Robertson-Walker (RW) ou Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). On appelle «métrique» le carré ds^2 de l'élément de longueur spatio-temporelle ds. Celui de RW a pour expression :

$$\mathbf{ds^2} = -\mathbf{R^2}(\mathbf{t})\left[\frac{\mathbf{dr^2}}{\mathbf{1 - kr^2}} + \mathbf{r^2 d}\theta^\mathbf{2} + \mathbf{r^2}\sin^\mathbf{2}\theta\mathbf{d}\varphi^\mathbf{2}\right] + \mathbf{c^2dt^2} \quad \textbf{avec} \quad \mathbf{k = -1,} \quad \mathbf{0} \;\; \textbf{ou} \;\; \mathbf{+1} \quad (1)$$

où r est une coordonnée radiale et où $R(t)$ est le *«facteur d'échelle»*, une fonction réelle, définie, positive de la variable t qui multiplie la distance entre points fixes de l'espace 3D. Les 3 possibilités pour k définissent les 3 types de topologie spatiale mono-connexes compatibles avec les hypothèses : S^3 (espace [hyper]-sphérique), (espace E^3 euclidien), H^3 (espace [hyper]-hyperbolique).

Le temps t est le *«temps cosmique»*. Il est orthogonal (indépendant des coordonnées spatiales). Il est le même pour tous les observateurs au repos (r, θ et φ constants), qualifiés traditionnellement de *comobiles*.

Le taux d'expansion $H(t)$ est défini comme la dérivée logarithmique de $R(t)$: $H(t) \stackrel{déf}{=} \dot{R}(t)/R(t)$. Sa valeur présente $H_0 = H(t_0)$ est la «constante de Hubble-Lemaître». Sa dimension est l'inverse d'un temps. Pour des raisons historiques de méthode de mesure on l'exprime souvent en km s^{-1} Mpc^{-1} (1 pc $\stackrel{déf}{=}$ 3.0856775814672 10^{16} m.)

En suivant la trajectoire des photons (pour lesquels $ds = 0$) entre émission et réception on en déduit que si une source émet deux signaux lumineux aux temps t_e et $t_e + dt_e$, un observateur les recevra aux temps t_0 et $t_0 + dt_0$ avec :

$$\mathbf{\frac{dt_0}{dt_e} = \frac{R(t_0)}{R(t_e)}} \tag{2}$$

Appliqué aux très petites périodes T ou longueurs d'onde λ de la lumière cela peut s'écrire :

$$\mathbf{\frac{R(t_0)}{R(t_e)} \approx \frac{T_0}{T_e} = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} \overset{\text{déf}}{=} 1 + z} \tag{3}$$

z étant le «décalage spectral» (cosmologique) [1]

L'équation différentielle complète [2] (1917) de la relativité générale d'Einstein s'écrit :

$$\mathbf{\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} - \mathcal{R}_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \mathcal{T}_{\mu\nu}} \tag{4}$$

Avec la relativité générale comme TGRG, en introduisant les coefficients $(g_{\mu\nu})$ de dr^2, $d\theta^2$, $\mathrm{d}\varphi^2$ et dt^2 de la métrique RW dans l'équation d'Einstein elle se transforme en 2 équations différentielles, les équations de Friedmann-Lemaître FL1 et FL2, sur le facteur d'échelle R(t) dans lesquelles $p(t)$ et $\rho(t)$ (pression et masse volumique) sont les deux seuls paramètres physiques décrivant le contenu : p et ρ sont, d'après le principe cosmologique, spatialement homogènes (donc pas fonction de r,θ ou φ) et isotropes (donc scalaires, même pour la pression).

$$\mathbf{-\frac{k}{R^2} - \frac{\dot{R}^2}{c^2R^2} - \frac{2\ddot{R}}{Rc^2} + \Lambda = \frac{8\pi G p}{c^4} \quad (FL1) \quad et \quad \frac{k}{R^2} + \frac{\dot{R}^2}{c^2R^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G\rho}{3c^2} \quad (FL2)} \tag{5}$$

On en déduit FL3 de FL1 et FL2 :

$$\mathbf{\frac{d(\rho R^3)}{dR} + 3p\frac{R^2}{c^2} = 0 \quad (FL3)} \tag{6}$$

FL2 peut aussi s'écrire :

$$\mathbf{\dot{R}^2 = H_\circ^2\, R_\circ^2 \left[\Omega_{r\circ}\, \frac{R_\circ^2}{R^2} + \Omega_{m\circ}\, \frac{R_\circ}{R} + \Omega_{\Lambda\circ}\, \frac{R^2}{R_\circ^2} + \Omega_{k\circ}\right]} \tag{7}$$

avec

$$\mathbf{\Omega_r(t) \overset{\text{déf}}{=} \frac{8\pi G\rho_r(t)}{3H^2(t)}\ ,\ \Omega_m(t) \overset{\text{déf}}{=} \frac{8\pi G\rho_m(t)}{3H^2(t)}\ ,\ \Omega_\Lambda(t) \overset{\text{déf}}{=} \frac{\Lambda c^2}{3H^2(t)} \ \ et\ \ \Omega_k(t) \overset{\text{déf}}{=} -\frac{kc^2}{R^2(t)H^2(t)}} \tag{8}$$

G est la constante de gravitation universelle. $\Omega_r(t)$ est le paramètre de densité de rayonnement (lumière ou particules ultra-relativistes qui ont la même équation d'état : $p = \frac{1}{3}\rho c^2$). $\Omega_m(t)$ est le paramètre de densité (totale) de matière (sombre et non baryonique comprise)et $\Omega_\Lambda(t)$ est le paramètre de densité de Λ. On l'appelle aussi constante cosmologique réduite (mais $\Omega_\Lambda(t)$ n'est généralement pas une constante).

$\Omega_k(t)$ est le paramètre de densité de courbure ou courbure réduite. Elle dépend de k, qui représente la courbure de l'univers. Si :

1. il y a d'autres causes de décalage spectral mais uniquement locales puisque liées aux inhomogénéités ou aux déplacements et ces autres décalages sont généralement très faibles.

2. Λ est la «constante cosmologique» introduite en 1917 par Einstein dans ses équations pour rendre la relativité générale compatible avec son modèle d'univers statique.

— k = 1 : espace (3D) [hyper]-sphérique
— k = 0 : espace (3D) euclidien (dans ce cas $\Omega_k(t) = 0 \quad \forall t$)
— k = -1 : espace (3D) [hyper]-hyperbolique.

Ω_{r0} est le paramètre de densité le mieux connu car la densité d'énergie lumineuse ρ_{r0} est essentiellement celle du rayonnement de fond cosmologique (RFC). On peut vraisemblablement lui rajouter celle des neutrinos primordiaux non encore détectés et qui dans l'hypothèse la plus simple ont une densité d'énergie égale à 68 % de celle du RFC.

On déduit de FL2 :

$$\mathbf{\Omega_r(t) + \Omega_m(t) + \Omega_\Lambda(t) + \Omega_k(t) = 1} \qquad \forall \mathbf{t} \tag{9}$$

Il suffit donc de mesurer trois des quatre Ω_i à un instant donné pour déterminer le quatrième. Comme aujourd'hui Ω_{r0} est bien connu et, de plus, inférieur à 10^{-4}, la connaissance de notre modèle d'univers est essentiellement liée aux mesures de Ω_{m0} et $\Omega_{\Lambda 0}$.

Dans la partie simulation ce sont ainsi les valeurs de Ω_{m0} et $\Omega_{\Lambda 0}$ qui sont laissées au choix (avec par défaut celles du modèle Λ-CDM des résultats 2015 de la mission Planck de l'ESA). Pour Ω_{r0}, le RFC ayant un spectre thermique de corps noir, c'est la température T_0 qui est à choisir. Une option permet également de choisir $\Omega_{k0} = 0 = \Omega_k$.

La masse volumique ρ_r ($\rho_r = u_r c^2$ avec u_r l'énergie volumique) d'un corps noir est liée à sa seule température T :

$$\rho_r = \frac{4\sigma T^4}{c^3} \quad \text{avec} \quad \sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2} \tag{10}$$

Par défaut les constantes fondamentales ont les valeurs de notre univers mais elles restent modifiables au choix dans les simulations (dans l'hypothèse multivers elles pourraient effectivement être différentes) :
— Boltzmann k = 1,38064852 * 10^{-23} $m^2.kg.s^{-2}.K^{-1}$
— Planck h = 6.62607004 * 10^{-34} $m^2.kg.s^{-1}$
— gravitation G = 6.67385 * 10^{-11} $m^3.kg^{-1}.s^{-2}$
— vitesse de la lumière dans le vide c = 299792458 $m.s^{-1}$.

Avec les coordonnées réduites : $\mathbf{a} \overset{\text{déf}}{=} \mathbf{R(t)/R(t_0)}$[3] et $\tau \overset{\text{déf}}{=} \mathbf{H_0(t - t_0)}$ les dérivées première et seconde de $a(\tau)$ s'écrivent :

$$\mathbf{\frac{da}{d\tau} = \left[-\frac{\Omega_{r0}}{a^2} + \frac{\Omega_{m0}}{a} + \Omega_{\Lambda 0}\ a^2 + \Omega_{k0} \right]^{\frac{1}{2}}} \tag{11}$$

$$\mathbf{\frac{d^2a}{d\tau^2} = -\frac{\Omega_{r0}}{a^3} - \frac{1}{2}\frac{\Omega_{m0}}{a^2} + \Omega_{\Lambda 0}\ a} \tag{12}$$

avec les conditions initiales $a(0) \overset{déf}{=} \frac{da}{d\tau}(0) \overset{déf}{=} 1$.

Ainsi les données (déduites des observations de notre univers) H_0, Ω_{r0}, Ω_{m0}, et $\Omega_{\Lambda 0}$ permettent de résoudre l'équation différentielle ci-dessus et donc de connaître $a(\tau)$ pour tout τ (et de là $a(t)$ tour tout t) et donc de tracer son graphique (ce qui est la première action de

3. En conséquence $a = (1+z)^{-1}$ ou $z = (1-a)/a$ si z est purement cosmologique

la partie simulation).

On peut bien sûr remettre en question les valeurs mésurées des paramètres de notre univers ou simplement imaginer des univers différents. Selon les valeurs des Ω_i choisies, nous obtenons alors des modèles différents avec ou sans singularité(s). Si $H_0 > 0$:

— Univers avec Big-Bang et pas de Big Crunch
— Univers avec Big-Bang et Big-Crunch
— Univers sans singularité (ni Big Bang ni Big Crunch)

Si $H_0 < 0$ on peut obtenir des univers sans Big Bang mais avec Big Crunch.

Dans notre univers actuel le paramètre de densité de rayonnement est très faible ($\Omega_{r0} < 10^{-4}$) alors que Ω_{m0} et $\Omega_{\Lambda 0}$ sont voisins de 1/3 et 2/3. Dans ces conditions ce sont essentiellement Ω_{m0} et $\Omega_{\Lambda 0}$ qui déterminent le type d'univers : les séparatrices dans le champ $\{\Omega_{m0}, \Omega_{\Lambda 0}\}$ sont indiquées sur la figure de droite (et interactive) de la simulation.

2 Calcul des durées et des âges

Toujours en suivant la trajectoire des photons on démontre les relations (entre distances, temps, décalages spectraux, diamètres apparents, ...) qui sont utilisées dans Cosmogravity (notamment dans la boite à outils de la fenêtre "Calculs annexes"). Ces expressions utilisent souvent la fonction $E(x)$, très pratique pour simplifier l'écriture des relations. Celle-ci se déduit de :

$$\frac{H(z)}{H_\circ} \overset{déf}{=} E^{\frac{1}{2}}(z) = \Big[\Omega_{r\circ}(1+z)^4 + \Omega_{m\circ}(1+z)^3 + (1-\Omega_{m\circ}-\Omega_{r\circ}-\Omega_{\Lambda\circ})(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda\circ}\Big]^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

en posant :

$$\mathbf{E(x)} \overset{\mathbf{déf}}{=} \boldsymbol{\Omega_{r\circ}(1+x)^4 + \Omega_{m\circ}(1+x)^3 + (1-\Omega_{m\circ}-\Omega_{r\circ}-\Omega_{\Lambda\circ})(1+x)^2 + \Omega_{\Lambda\circ}} \quad (14)$$

On obtient ainsi des expressions simples pour le lien entre dt et dz le long d'une ligne de visée. De $z \overset{déf}{=} \frac{R_0}{R} - 1$ on déduit $dz = -(1+z)\ H(t)dt$ et donc : $\mathbf{dt = -H_0^{-1}(1+z)^{-1}E^{-1/2}(z)dz}$.

En intégrant cette relation on obtient les durées en fonction des décalages :

$$\mathbf{t_2 - t_1 = \frac{1}{H_\circ}\int_{z_2}^{z_1}(1+x)^{-1}E^{-\frac{1}{2}}(x)\ dx} \quad (15)$$

On en déduit l'expression de l'âge ($t_\circ$) d'un univers FL à Big Bang en fonction de ses paramètres $H_\circ$ et $\Omega_{i\circ}$ et celle de l'âge de cet univers lors de l'émission d'une lumière reçue aujourdhui avec un décalage spectral z :

$$\mathbf{t_\circ = \frac{1}{H_\circ}\int_0^\infty(1+x)^{-1}E^{-\frac{1}{2}}(x)\ dx} \ ; \qquad \mathbf{t_e = \frac{1}{H_\circ}\int_z^\infty(1+x)^{-1}E^{-\frac{1}{2}}(x)\ dx} \quad (16)$$

Cosmogravity permet aussi le calcul du problème inverse : z en fontion de t

3 Calcul des distances

On obtient l'expression exacte de la «distance métrique» d_m en «intégrant» la trajectoire d'un photon depuis son émission à l'instant t_e et à la coordonnée r jusqu'à sa réception à l'instant $t_\circ$ en $r = 0$ avec un décalage spectral cosmologique z.

Selon que la courbure spatiale est négative (d_{m-}), nulle ($d_{m\circ}$),ou positive (d_{m+}) [4] :

$$\mathbf{d_{m-}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{H_\circ} \mid \mathbf{\Omega_{k\circ}} \mid^{\frac{1}{2}}} \sinh \left\{ \mid \mathbf{\Omega_{k\circ}} \mid^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{z_c}} \mathbf{E}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x})\mathbf{dx} \right\} \tag{17}$$

$$\mathbf{d_{m\circ}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{H_\circ}} \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{z_c}} \mathbf{E}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x})\mathbf{dx} \tag{18}$$

$$\mathbf{d_{m+}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{H_\circ} \mid \mathbf{\Omega_{k\circ}} \mid^{\frac{1}{2}}} \sin \left\{ \mid \mathbf{\Omega_{k\circ}} \mid^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{z_c}} \mathbf{E}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x})\mathbf{dx} \right\} \tag{19}$$

Cosmogravity permet aussi le calcul du problème inverse inverse : z en fonction de d

4 Calcul des diamètres apparents

En raison de la trajectoire radiale des photons reçus dans un espace-temps isotrope le diamètre apparent d'un objet (ou l'écart angulaire entre deux sources de même z) est défini au moment de l'émission, c'est-à-dire au moment où la distance de la source était $(1 + z)$ fois plus petite qu'au moment de l'observation. Plus mathématiquement la métrique de la surface $r = r$ et $t = t_e$ est celle d'une 2-sphère euclidienne de rayon $R_e r = R_0 r/(1 + z)$ et la relation euclidienne entre diamètre linéaire D_e, distance métrique d_{m0} et diamètre apparent ϕ_0 est donc utilisable :

$$\phi_{\mathbf{0}} = \frac{\mathbf{D_e(1 + z)}}{\mathbf{d_m}} \tag{20}$$

$d_A \overset{déf}{=} d_m/(1 + z)$ est appelé "distance-diamètre apparent" pour retrouver la relation classique $\phi = D/d_A$.

Cosmogravity permet aussi le calcul inverse : z en fonction de ϕ

5 Calculs de photométrie

Avec un calcul similaire au précédent mais sur les "surfaces d'ondes" émises par une source et arrivant sur l'observateur, on montre que l'éclat E_0 d'un astre d'intensité I_e (flux émis par unité d'angle solide dans la direction de l'observateur) et de décalage cosmologique z présente (en l'absence d'absorption sur le trajet) un éclat observé

$$\mathbf{E_0} = \frac{\mathbf{I_e}}{\mathbf{d_m^2(1 + z)^2}} \tag{21}$$

4. Les 3 expressions peuvent être résumées en une seule en définissant une fonction $S_k(x)$, $S_k(x) \overset{déf}{=} \sinh x,\ x \ \text{ ou } \ \sin x$ selon que $k = -1,\ 0,\ \text{ou} +1$: $\mathbf{d_m} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{H_\circ} |\mathbf{\Omega_{k\circ}}|^{\frac{1}{2}}} \ \mathbf{S_k} \left\{ \mid \mathbf{\Omega_{k\circ}} \mid^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{z_c}} \mathbf{E}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x})\mathbf{dx} \right\}$

Si on suppose que l'intensité de l'astre est isotrope, sa «luminosité» (puissance émise)

$$L_e = 4\ \pi\ I_e \quad \text{et} \quad \mathbf{E_0} = \frac{\mathbf{L_e}}{\mathbf{4\ \pi\ d_m^2 (1+z)^2}} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\mathbf{L_e}}{\mathbf{4\ \pi\ d_L^2}} \tag{22}$$

$\mathbf{d_L} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{d_m (1+z)}$ est la "distance luminosité" (qui permet de retrouver la relation classique entre éclat et distance comme on l'a fait ci-dessus avec la "distance diamètre apparent").

Magnitudes et modules de distance. Éclats et luminosités ont une dynamique impressionante en astronomie (l'éclat du soleil est $\sim 10^{25}$ fois celui des galaxies que pourra détecter (en 2027 ?) le télescope ELT). On utilise depuis l'antiquité le concept de "grandeur" qui depuis a été défini sous l'appellation "magnitude apparente" m comme une échelle logarithmique d'éclat E avec $\mathbf{m} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{-2.5 \log_{10} E + cte}$. Et on appele "magnitude absolue" M la magnitude apparente qu'aurait la source si elle était située à un distance de 10 pc, c'est donc une mesure logarithmique de luminosité.

On appelle "module de distance" μ la différence $m - M$ pour un astre. On en déduit aisément que, dans un espace transparent,

$$\mu \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{m - M = -5 + 5 \log_{10} d_{pc}} \tag{23}$$

m comme M peuvent être "bolométriques" (toutes longueurs d'ondes et avec un récepteur parfait) ou dépendre de la courbe de sensibilité spectrale de l'instrumentation mais dans tous les cas le module de distance garde l'expression ci-dessus (en supposant la parfaite transparence du milieu entre la source et l'observateur). Si l'on observe des "standards de luminosité" on connait leur luminosité (donc leur M) et la mesure de leur m permet de connaître leur distance. Bien évidemment pour les distances cosmologiques c'est la distance-luminosité $d_L = d_m(1+z)$ qu'il faut utiliser dans la relation classique :

$$\mu \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{m - M = -5 + 5 \log_{10} d_{L(pc)}} \tag{24}$$

6 Modèles monofluides

Des solutions analytiques existent pour certains des modèles d'univers de Friedmann-Lemaître. C'est notamment (mais pas uniquement) le cas pour ceux dont un seul paramètre de densité Ω_i est non nul. Ces modèles particuliers ont par ailleurs l'avantage d'être des approximations à certaines époques d'un univers FL multi-fluides.

Puisque $\mathbf{\Omega_m(t) + \Omega_r(t) + \Omega_\Lambda(t) + \Omega_k(t) = 1} \quad \forall \mathbf{t}$, si un seul des Ω_i est non nul il est donc toujours égal à 1. Quatre cas se présentent : $\Omega_m(t) = 1$, $\Omega_r(t) = 1$, $\Omega_\Lambda(t) = 1$ et, pourquoi pas, $\Omega_k(t) = 1$.

6.1 Matière, $\Omega_m = 1 \quad \forall t$

Pour cet univers "de poussière" (matière non-relativiste) d'Einstein-de Sitter (1932) $p \approx 0$ et : $\rho_m R^3 = cte = \rho_{m0} R_0^3$

L'équation de Friedmann-Lemaître FL2 entraîne alors (en prenant comme origine (t=0) du temps celui de la singularité : $R(t=0) = 0$)

$$\mathbf{R(t) = (6\pi G \rho_{m0} R_0^3)^{\frac{1}{3}}\ t^{\frac{2}{3}}} \tag{25}$$

$$\Omega_m(t) \overset{déf}{=} \frac{8\pi G\rho_m(t)}{3H^2(t)}, \quad \Rightarrow \quad \rho_{m0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \tag{26}$$

De même puisque

$$H \overset{déf}{=} \frac{\dot{R}}{R}, \qquad H(t) = \frac{2}{3\ t} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{H_0} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3\ t_0}} \tag{27}$$

Il vient

$$\mathbf{a(t)} \overset{\mathbf{déf}}{=} \frac{\mathbf{R(t)}}{\mathbf{R_0}} = \left[\frac{\mathbf{3H_0}}{\mathbf{2}}\right]^{\mathbf{2/3}} \mathbf{t^{\frac{2}{3}}} \tag{28}$$

6.2 Rayonnement, $\Omega_r = 1 \quad \forall t$

Avec $p_r = \frac{1}{3}\rho_r c^2$ et FL3 : $\rho_r R^4 = cte = \rho_{r0} R_0^4$

Dans cet univers de Weinberg l'équation de Friedmann-Lemaître FL2 entraîne :

$$R^2\dot{R}^2 = \frac{8\pi\ G}{3}\ \rho_{r0} R_0^4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R(t)} = \left[\frac{\mathbf{32\pi G\rho_{r0}R_0^4}}{\mathbf{3}}\right]^{\frac{1}{4}}\ \mathbf{t^{\frac{1}{2}}} \tag{29}$$

$$\Omega_r(t) \overset{déf}{=} \frac{8\pi G\rho_r(t)}{3H^2(t)}, \quad \Rightarrow \quad \rho_{r0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \tag{30}$$

De même puisque

$$H \overset{déf}{=} \frac{\dot{R}}{R}, \qquad H = \frac{1}{2\ t} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{H_0} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\ t_0}} \tag{31}$$

Il vient

$$\mathbf{a(t)} \overset{\mathbf{déf}}{=} \frac{\mathbf{R(t)}}{\mathbf{R_0}} = [\mathbf{2H_0}]^{\frac{1}{2}} \mathbf{t^{\frac{1}{2}}} \tag{32}$$

Note : Comme la densité d'énergie de rayonnement d'un corps noir est

$$u_r = \rho_r c^2 = \frac{4\sigma T^4}{c} \ \text{ et que } \ \Omega_r \overset{déf}{=} \frac{8\pi G\rho_r}{3H^2} = 1 \tag{33}$$

la température T_r ne dépend que de H :

$$T_r = \left[\frac{3H^2c^3}{32\pi G\sigma}\right]^{\frac{1}{4}} \quad \text{avec} \quad \sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3} \quad \text{et} \quad \mathbf{T_r} = \left[\frac{\mathbf{45c^5h^3}}{\mathbf{64\pi^6Gk^4}}\right]^{\frac{1}{4}} \mathbf{H^{\frac{1}{2}}} \tag{34}$$

6.3 Constante cosmologique, $\Omega_\Lambda = 1 \quad \forall t$

L'équation de Friedmann-Lemaître FL2 entraîne pour cet univers de de-Sitter

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{\Lambda c^2}{3} = cte \tag{35}$$

Donc $\Lambda \geq 0$ et

$$\mathbf{H} = \pm\ \mathbf{c}\ \left[\frac{\mathbf{\Lambda}}{\mathbf{3}}\right]^{\mathbf{1/2}} = \mathbf{cte} = \mathbf{H_0} \tag{36}$$

et

$$\mathbf{a(t)} \overset{\mathbf{déf}}{=} \frac{\mathbf{R(t)}}{\mathbf{R_0}} = \mathbf{e^{H_0\cdot(t-t_0)}} \tag{37}$$

6.4 Courbure, $\Omega_k = 1 \quad \forall t$

La somme des équations de Friedmann-Lemaître FL1+FL2 entraîne pour l'univers de Milne : $\ddot{R} = 0$. Donc :

$$R(t) = \alpha t + \beta \quad , \quad \dot{R} = \alpha = cte \quad \text{et} \quad H_0 \overset{déf}{=} \frac{\dot{R}_0}{R_0} = \frac{\alpha}{R_0} \tag{38}$$

En conséquence

$$\mathbf{a(t)} \overset{\mathbf{déf}}{=} \frac{\mathbf{R(t)}}{\mathbf{R_0}} = \mathbf{H_0 t} + \frac{\beta}{\mathbf{R_0}} = \mathbf{H_0 \cdot t + cte} \tag{39}$$

En prenant comme origine du temps celui de a=0

$$\mathbf{a(t) = H_0 \cdot t} \quad \text{et} \quad \mathbf{t_0 = (H_0)^{-1}} \tag{40}$$

7 Cosmologies alternatives

7.1 Bref historique

Le modèle ΛCDM (avec Λ constante géométrique) est, avec des valeurs différentes des paramètres, celui publié par G. Lemaître en 1931. Toutefois c'est le modèle d'Einstein-de-Sitter (EdS) de 1932 (sans Λ qu'Einstein avait reniée) qui a été ensuite le plus considéré. Dans les années 1980 les mesures du taux d'expansion et celles de la densité de matière, baryonique ou non, avec un $\Omega_{m0} \approx 0.3$, donnaient un âge de l'univers EdS plus petit que celui des plus vieiles étoiles (13 milliards d'années) qu'expliquait par contre très bien un $\Omega_\Lambda \approx 0.7$.

Mais ce n'est qu'en 1998 que les premières mesures sur les supernovae de type SNIa ont confirmé un $\Omega_\Lambda > 0$ et que les observations par ballon («Boomerang»$>$ et «Maxima») ont mis en évidence le diamètre apparent du premier pic acoustique du rayonnement de fond cosmologique. En croisant les contraintes des observation tirées des relations éclats, décalage stectral des supernovae SNIa avec celles du diamètre apparent ($\phi \approx 1°$) du premier pic acoustique du RFC, le modèle ΛCDM avec $\Omega_{m0} \approx 0.3$ et $\Omega_{\Lambda 0} \approx 0.7$ entrainant un âge de ∼13,8 milliards d'années, est devenu le modèle standard encore utilisé en 2023.

7.2 Tensions

Mais des nouvelles mesures ont fait apparaître des "tensions" avec Le modèle ΛCDM standard. On peut citer :

- "H_0 tension" : les mesures directes des "standards de luminosité" donnent $H_0 \approx 73\ km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}$ alors que celles déduites plus indirectement du RFC s'accordent vers $H_0 \approx 67\ km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}$ avec des écarts statistiques de plusieurs σ.
- "σ_8 tension" : La structuration observée de l'univers à l'échelle d'environ[5] $8h^{-1}$ Mpc est significativement plus faible que celle déduite des simulations de structures déduites des anisotropies du RFC.
- La composante dipolaire observée du RFC interprétée comme l'effet Doppler-Fizeau de notre déplacement (369 ± 1) km/s) par rapport à ce rayonnement (z ∼ 1000) est proche mais significativement différente en module et en orientation de celle que l'on observe à plus "faible" distance sur les quasars (z ∼ 2).

5. $h \overset{déf}{=} H_0(\text{km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1})/100$

7.3 Nouvelles théories

Parallèlement de nouvelles théories cosmologiques ont éte proposées

- Inflations : ces théories ne remettent pas forcément en cause le modèle ΛCDM mais permettraient d'expliquer les valeurs «initiales» (avant $\sim 10^{-30}$ s) de ses paramètres
- Énergie sombre
- et bien d'autres...

Cosmogravity inclue maintenant les simulations d'univers avec l'énergie sombre

8 Énergie sombre

8.1 Équations d'état relativistes

La matière, la radiation, n'interviennent dans le tenseur énergie-quantité de mouvement d'un fluide parfait qu'à travers leur *«équation d'état»* : $p = p(\rho)$. On peut ainsi, tout en restant dans le cadre des équations de Friedmann-Lemaître, prendre en compte différents *«fluides»* i, connus ou hypothétiques, caractérisés par une équation d'état du type $p_i = w_i \rho_i c^2$. Les masse volumique et pression totales d'un univers à n «fluides» sont alors : $\rho = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \quad et \quad p = c^2 \sum_{i=1}^{n} w_i p_i$.

Pour la *«poussière»* (matière non relativiste) $p \ll \rho c^2$ et $w_d = w_{nr} \approx 0$. Pour la radiation (lumière ou les particules ultra-relativistes) $w_r = 1/3$.

L'évolution du facteur d'échelle a et celle des autres paramètres cosmologiques peuvent être généralisées à un mélange de n fluides i. En se restreignant, par exemple, à des fluides de w_i constants on obtient pour l'évolution du taux d'expansion $H = \dot{a}/a$:

$$\frac{H}{H_\circ} = \left[\sum_{i=1}^{n} \Omega_i a^{-3(1+w_i)} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{i=1}^{n} \Omega_i (1+z)^{3(1+w_i)} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{41}$$

L'introduction des termes des autres fluides dans les expressions de la distance métrique d_m ouvre la voie à des tests observationnels et à la contrainte des nouveaux paramètres, en inversant la relation $\{$paramètres$\} \longrightarrow \{$observables$\}$, puisque ces dernières, comme l'éclat ou le diamètre apparent, dépendent de d_m [6].

8.2 De Λ à l'énergie sombre

La constante cosmologique Λ est équivalente à (et peut être interprétée comme [7]) un fluide de «vide», invariant de Lorentz de $w_\Lambda = w_v = -1$ et de masse volumique $\rho_{DE} = \dfrac{\Lambda c^2}{8\Pi G}$. Cette substitution laisse en effet mathématiquement inchangées les équations d'Einstein (et par conséquent celles de Friedmann-Lemaître si l'on conserve le principe cosmologique).

6. Évidemment la multiplication du nombre de paramètres libres du modèle avec les mêmes données élargit les incertitudes sur chacun lors de l'inversion
7. Lemaître, 1934, Proc.National. Acad. Sciences USA, vol 20, pp12-17

Par ailleurs la constante cosmologique géométrique Λ peut poser un problème d'ajustement initial sévère [8] et l'on peut chercher à la remplacer par un fluide physique. Si cette nouvelle entité, pour l'instant spéculative, est décrite par une équation d'état de paramètre w ce paramètre doit être spatialement constant (principe cosmologique) mais différent de -1, voire variable avec le temps t (c'est-à-dire avec z et a), ...

Le caractère géométrique de Λ peut aussi être une des motivations de son remplacement par une entité physique.

On a dans le passé distingué parfois l'*«énergie sombre»* ($w_{DE}(z) \neq -1$), de la «quintessence» ($w_Q \neq \quad cte$), de l'*«énergie fantôme»* ($w_{PE} < -1$) ... mais il est devenu habituel et plus simple de généraliser l'appellation *«énergie sombre»* à l'ensemble des possibilités et d'utiliser la paramétrisation CPL [9] à deux paramètres w_0 et w_1 (ou $w_a = w_1$) :

$$w(z) = w_\circ + w_1 \frac{z}{1+z} \quad ou \quad w(a) = w_0 + w_a(1-a) \tag{42}$$

Dans cette représentation Λ apparaît comme un cas particulier d'une énergie sombre de paramètres $w_0 = -1$ et $w_1 = 0$

Les observations permettent de contraindre la zone de notre univers dans un plan (w_0, w_1) comme on le fait pour le champ des $(\Omega_{m0}, \Omega_{\Lambda 0})$.

La plus que centenaire [10] constante cosmologique géométrique Λ ou son équivalent physique ($w_0 = -1$ et $w_1 = 0$) reste compatible à 1σ avec les contraintes observationnelles.

8.3 Calculs

De même qu'avec $E(x)$ pour le modèle avec la constante Λ, des fonctions simplifient l'écriture des relations, $Y(x)$ et $F(x)$:

$$\mathbf{Y(x)} \overset{\text{déf}}{=} \exp\{\mathbf{-3(1+w_0+w_1)\log x - 3w_1(1-x)}\} \tag{43}$$

$$\mathbf{F(x)} \overset{\text{déf}}{=} \left[\frac{\mathbf{H(x)}}{\mathbf{H_0}}\right]^{\mathbf{2}} = \mathbf{(1+x)^2\Omega_{k0} + (1+x)^3\Omega_{m0} + (1+x)^4\Omega_{r0} + Y((1+x)^{-1})\Omega_{DE0}} \tag{44}$$

De la sorte les dérivées première et seconde de $a(\tau)$ deviennent :

$$\frac{\mathbf{da}}{\mathbf{d}\tau} = \left[-\frac{\mathbf{\Omega_{r0}}}{\mathbf{a^2}} + \frac{\mathbf{\Omega_{m0}}}{\mathbf{a}} + \mathbf{\Omega_{DE0}\ a^2Y(a) + \Omega_{k0}}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{45}$$

$$\frac{\mathbf{d^2a}}{\mathbf{d}\tau^{\mathbf{2}}} = -\frac{\mathbf{\Omega_{r0}}}{\mathbf{a^3}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\frac{\mathbf{\Omega_{m0}}}{\mathbf{a^2}} + \mathbf{\Omega_{DE0}}\left[\mathbf{aY(a)} + \frac{\mathbf{a^2}}{\mathbf{2}}\frac{\mathbf{dY}}{\mathbf{da}}\right] \tag{46}$$

---

8. sa valeur très faible mais constante la rend en effet insignifiante dans l'univers primordial mais si sa valeur était plus grande, l'accélération précoce de l'expansion qu'elle aurait provoquée aurait empêché la formation des structures

9. Chevalier & Polarski 2001,Int. J. Mod. Phys. D10,213 ; Linder 2003 Phys. Rev. Lett. 90,091301

10. Einstein, 1917, Sitzungsberichte der Königlich PreuBischen Akademie der Wissenschaften (Berlin), Seite 142-152

et celle de la distance métrique :

$$\mathbf{d_m} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{H_\circ} \mid \mathbf{\Omega_{k\circ}} \mid^{\frac{1}{2}}} \quad \mathbf{S_k}\left\{\mid \mathbf{\Omega_{k\circ}} \mid^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{z_c}} \mathbf{F}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x})\mathbf{dx}\right\} \tag{47}$$

La suite des expressions servant dans les calculs de E, d_L, d_A, θ, d_{LT}, l …est identique à celles du modèle avec Λ en remplaçant $E(x)$ par $F(x)$.

8.4 Le"Big Rip"

En substituant à la constante cosmologique Λ un fluide dont le paramètre w ($p \stackrel{def}{=} \rho c^2$) peut devenir inférieur à -1 on ouvre la porte à une quatrième possibilité d'accident pour l'univers. En plus du "Big Bang", du "Big Crunch" et du "Big Chill" il est possible d'avoir un "Big Rip" (grand déchirement), c'est-à-dire une croissance infinie de $a(t)$ dans un temps fini.

Contrairement au "Big Chill" du modèle standard ΛCDM où le taux d'expansion tend vers une constante (et plus faible que sa valeur actuelle) qui préserve les structures non actuellement en expansion, en "Big Rip" le taux d'expansion H lui-même tend vers l'infini en un temps fini et désagrége alors jusqu'aux plus petites structures matérielles. Il s'agit donc pour la matière d'une singularité (physique) existentiellement aussi extrême que celle du $a = 0$ du "Big Bang". Les contraintes observationnelles présentes (2023) de notre univers dans le plan (w_0, w_1) sont compatibles avec $w_0 = -1$ et $w_1 = 0$ (la constante cosmologique géométrique Λ) mais également avec des valeurs légèrement différentes de w_0 et w_1 dont certaines prévoient un Big Rip.

Pour les simulations avec l'option énergie sombre (et la paramétrisation CPL), Cosmogravity recherche d'abord s'il y a un "Big Crunch". Si (et seulement si) la réponse est négative il reste alors 4 possibilités :

1. Si $w_1 < 0$ alors $w \to +\infty$ quand $z \to -1$ pas de Big Rip.
2. Si $w_1 > 0$ alors $w \to -\infty$ quand $z \to -1$ Big Rip
3. Si $w_1 = 0$ et $w_0 < -1$ alors w(constant) < -1 Big Rip
4. Si $w_1 = 0$ et $w_0 > -1$ alors w(constant) > -1 pas de Big Rip

Dans les cas 2 et 3 ci-dessus de Big Rip, le temps $t_{BR} - t_0$ restant avant le Big Rip est a lors [11]

$$\mathbf{t_{BR}} - \mathbf{t_0} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{H_\circ}} \int_{\mathbf{-1}}^{\mathbf{0}} (\mathbf{1} + \mathbf{x})^{-\mathbf{1}} \mathbf{F}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x})\ \mathbf{dx} \tag{48}$$

La “durée de l'univers” est évidemment $t_0 + t_{BR}$

11. en fait on intègre de -0,999999 à 0 pour éviter la singularité de $(1 + z)^{-1}$