J.P.Cordoni
25/01/2023

Théorie Trajectoires et Cosmogravity

I - Métriques de Schwarzschild

I.1 Métrique extérieure

On souhaite étudier le mouvement d'une particule (massive ou photon) dans le champ de gravitation extérieur d'une masse centro-symétrique, sans rotation, placée à l'origine de coordonnées spatiales r, θ, φ et temporelle t.
Le modèle est un espace-temps statique à symétrie sphérique de métrique :

$$ds^2 = -e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2) + e^{\nu(r)}c^2dt^2$$

En **relativité générale**, pour une masse M sans rotation, à symétrie sphérique, placée à l'origine des coordonnées, dans un espace-temps vide, la solution des équations d'Einstein est :

$$\lambda + \nu = 0 \qquad e^{\nu} = 1 - \frac{r_s}{r} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{r_s = 2\,\frac{GM}{c^2}}$$

d'où l'expression de la métrique de Schwarzschild :

$$\boxed{ds^2 = -\frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} - r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2) + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)c^2dt^2}$$

c la vitesse de la lumière et G la constante de gravitation universelle.
r_s est appelé « rayon de Schwarzschild » ou « horizon du trou noir ». Il représente la limite de la région d'où lumière et matière ne peuvent s'échapper.
Cette solution de Schwarzschild a une importance remarquable puisqu'elle constitue également l'unique solution aux équations d'Einstein à l'extérieur de tout corps à symétrie sphérique de masse M, sans rotation. Cette métrique n'est donc pas limitée à décrire les seuls trous noirs, elle est aussi valable à l'extérieur d'une étoile, d'une planète, ou de tout autre corps à symétrie sphérique sans rotation. Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Birkhoff (théorème de Gauss en gravitation newtonienne).
Les trajectoires d'une particule libre sont les géodésiques de la métrique.
Par raison de symétrie la trajectoire est plane (on prendra $\theta = \frac{\pi}{2}$).

I.1.1 Particule massive

Les intégrales premières trouvées à l'aide du Lagrangien $\mathcal{L} = \dfrac{ds}{d\tau}$ s'écrivent :

$$(S^e_{pm}1) \quad \frac{dt}{d\tau}(r) = \frac{E_e}{1 - \dfrac{r_s}{r}} \quad et \quad (S^e_{pm}2) \quad \frac{d\varphi}{d\tau}(r) = \frac{c\,L_e}{r^2}$$

Avec deux constantes d'intégration : E_e sans dimension et L_e une longueur. Ces fonctions reportées dans l'expression $ds = c\,d\tau$ entrainent :

$$(S^e_{pm}3) \quad (\frac{dr}{d\tau})^2 + V^e_{Spm} = c^2 E_e^2 \quad avec \quad V^e_{Spm}(r) = c^2(1 - \frac{r_s}{r})(1 + \frac{L_e^2}{r^2})$$

Ces relations vérifient les équations des géodésiques.
En dérivant par rapport à τ l'équation $(S^e_{pm}3)$ et pour des trajectoires non circulaires, on déduit l'équation différentielle suivante utilisée pour faire la simulation :

$$(S^e_{pm}4) \quad \frac{d^2r}{d\tau^2} = -\frac{1}{2}\frac{dV^e_{Spm}}{dr} = \frac{c^2}{2r^4}(-r_s r^2 + 2rL_e^2 - 3r_s L_e^2) = f^e_{Spm}(r)$$

L'étude de la fonction V^e_{Spm} permet de déduire l'existence de deux trajectoires circulaires de rayons :

$$\frac{L_e}{r_s}\left(L_e + \sqrt{L_e^2 - 3r_s^2}\right) \quad (stable) \quad et \quad \frac{L_e}{r_s}\left(L_e - \sqrt{L_e^2 - 3r_s^2}\right) \quad (instable).$$

L'équation $S^e_{pm}4$ est résolue numériquement par la méthode de Runge-Kutta.
Conditions initiales III.6-A.2
L'observateur resté loin du trou noir voit son collègue évoluer de plus en plus lentement et à la limite se figer lorsque celui-ci atteint l'horizon r_s. Un voyageur qui tombe dans le trou noir arrive au centre (r=0) en un temps fini tandis que son collègue a l'impression qu'il reste figé sur l'horizon (et, dans la pratique, disparait à cause du décalage spectral).

I.1.2 Photon

On garde les relations en t et φ avec un paramètre λ différent du temps propre τ puisque pour un photon on a toujours $d\tau = 0$.

$$(S^e_{ph}1) \quad \frac{dt}{d\lambda}(r) = \frac{E_e}{1 - \dfrac{r_s}{r}} \quad et \quad (S^e_{ph}2) \quad \frac{d\varphi}{d\lambda}(r) = \frac{c\,L_e}{r^2}$$

Ces fonctions reportées dans l'expression $ds = cd\tau = 0$ entrainent :

$$(S^e_{ph}3) \quad (\frac{dr}{d\lambda})^2 + V^e_{Sph} = c^2 E_e^2 \quad avec \quad V^e_{Sph}(r) = c^2(1 - \frac{r_s}{r})\frac{L_e^2}{r^2}$$

Ces relations vérifient les équations des géodésiques.
En dérivant par rapport à λ l'équation $(S^e_{ph}3)$ et pour des trajectoires non circulaires, on déduit l'équation différentielle suivante utilisée pour faire la simulation :

$$(S^e_{ph}4) \quad \frac{d^2r}{d\lambda^2} = -\frac{1}{2}\frac{dV^e_{Sph}}{dr} = \frac{c^2}{2r^4}(2rL_e^2 - 3r_s L_e^2) = f^e_{Sph}(r)$$

L'étude de la fonction V^e_{Sph} montre qu'il existe une trajectoire circulaire instable de rayon $\dfrac{3}{2}r_s$.
L'équation $S^e_{ph}4$ est résolue numériquement par la méthode de Runge-Kutta.
Conditions initiales III.6-A.1

I.2 Métrique intérieure

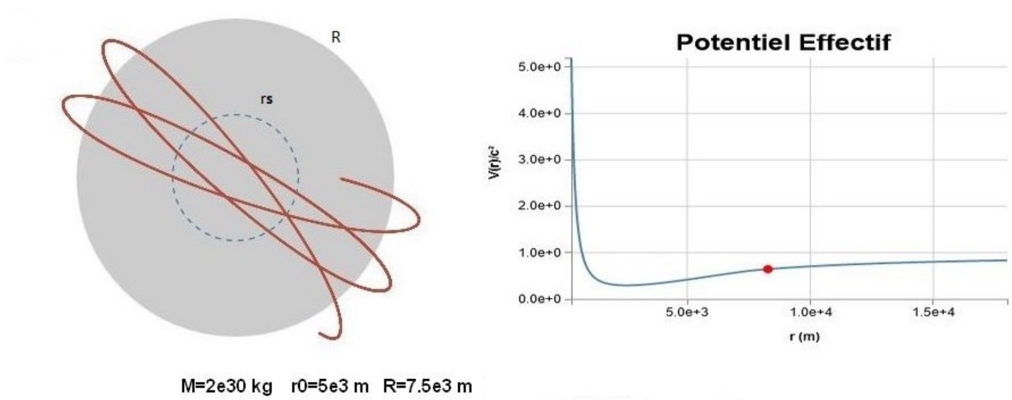
On souhaite étudier le mouvement d'une particule (soumise uniquement à la gravitation) à l'intérieur d'un astre de **masse volumique constante**, centro-symétrique, sans rotation. La masse est placée à l'origine de coordonnées spatiales r, θ, φ et temporelle t. Le modèle est un espace-temps statique à symétrie sphérique. La solution des équations d'Einstein donne la métrique :

$$\boxed{ds^2 = -\alpha(r)dr^2 \;-\; r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) \;+\; \beta(r)^2\, c^2 dt^2}$$

$$\text{où} \quad \boxed{\alpha(r) = 1 - \frac{r^2 r_s}{R^3}} \quad \boxed{\beta(r) = \tfrac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{r_s}{R}} \;-\; \tfrac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{r^2 r_s}{R^3}}} \quad R \text{ rayon de l'astre}$$

Les trajectoires d'une particule libre sont les géodésiques de la métrique. Par raison de symétrie la trajectoire est plane (on prendra $\theta = \dfrac{\pi}{2}$).
Pour l'établissement de cette métrique voir Henri Andrillat - Introduction à l'étude des cosmologies
.

I.2.1 Particule massive



Les intégrales premières trouvées à l'aide du Lagrangien $\mathcal{L} = \dfrac{ds}{d\tau}$ s'écrivent :

$$(S^i_{pm}1) \quad \beta(r)^2 \frac{dt}{d\tau}(r) = E_i \quad et \quad (S^i_{pm}2) \quad \frac{d\varphi}{d\tau}(r) = \frac{c\, L_i}{r^2}$$

Avec deux constantes d'intégration : E_i sans dimension et L_i une longueur. Ces fonctions reportées dans l'expression $ds = c\, d\tau$ entrainent :

$$(S^i_{pm}3) \quad (\frac{dr}{d\tau})^2 \;+\; V^i_{Spm}(r) = c^2 E_i^2 \quad avec \quad V^i_{Spm}(r) = c^2 E_i^2 -\; c^2 \alpha(r)\left[\frac{E_i^2}{\beta(r)^2} - \frac{L_i^2}{r^2} - 1\right]$$

Ces relations vérifient les équations des géodésiques.
En dérivant par rapport à τ l'équation $(S^i_{pm}3)$ et pour des trajectoires non circulaires, on déduit l'équation différentielle suivante utilisée pour faire la simulation :

$$(S^i_{pm}4) \quad \frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\frac{1}{2}\frac{dV^i_{Spm}}{dr} = -\frac{c^2\, r\, r_s}{R^3}\left[\frac{E_i^2}{\beta(r)^2} - \frac{L_i^2}{r^2} - 1\right] + \frac{c^2\, \alpha(r)}{2}\left[\frac{-E_i^2\, r\, r_s}{\beta(r)^3\sqrt{\alpha(r)}R^3} + 2\frac{L_i^2}{r^3}\right] = f^i_{Spm}(r)$$

L'équation $S^i_{pm}4$ est résolue numériquement par la méthode de Runge-Kutta.
Conditions initiales III.6-B.2

I.2.2 Photon

On garde les relations en t et φ :

$$(S^i_{ph}1) \quad \beta(r)^2 \frac{dt}{d\lambda}(r) = E_i \qquad et \qquad (S^i_{ph}2) \quad \frac{d\varphi}{d\lambda}(r) = \frac{c\,L_i}{r^2}$$

Ces fonctions reportées dans l'expression $ds = 0$ entrainent :

$$(S^i_{ph}3) \quad (\frac{dr}{d\lambda})^2 + V^i_{Sph}(r) = c^2 E_i^2 \quad et \quad V^i_{Sph}(r) = c^2 E_i^2 - \; c^2 \alpha(r) \left[\frac{E_i^2}{\beta(r)^2} - \frac{L_i^2}{r^2}\right]$$

En dérivant par rapport à λ l'équation $(S^i_{ph}3)$ et pour des trajectoires non circulaires, on déduit l'équation différentielle suivante utilisée pour faire la simulation :

$$(S^i_{ph}4) \quad \frac{d^2 r}{d\lambda^2} = -\frac{1}{2}\frac{dV^i_{Sph}}{dr} = -\frac{c^2\,r\,r_s}{R^3}\left[\frac{E_i^2}{\beta(r)^2} - \frac{L_i^2}{r^2}\right] + \frac{c^2\,\alpha(r)}{2}\left[\frac{-E_i^2\,r\,r_s}{\beta(r)^3\sqrt{\alpha(r)}R^3} + 2\frac{L_i^2}{r^3}\right] = f^i_{Sph}(r)$$

L'équation $S^i_{ph}4$ est résolue numériquement par la méthode de Runge-Kutta.
Conditions initiales III.6-B.1

II - Métrique de Kerr

II.1 Théorie générale

On souhaite étudier le mouvement d'une particule (massive ou photon) dans le champ de gravitation d'une masse centro-symétrique, en rotation uniforme, placée à l'origine des coordonnées .
En **relativité générale** , pour une masse M en rotation, à symétrie sphérique, placée à l'origine des coordonnées de Boyer-Lindquist r, θ, φ, t, dans un espace-temps vide, la solution des équations d'Einstein est la métrique de Kerr :

$$\boxed{ds^2 = \frac{-\rho^2}{\Delta}dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - (r^2 + a^2 + \frac{r_s\,r\,a^2}{\rho^2}\sin^2\theta)\sin^2\theta\,d\varphi^2 + \frac{2\,r_s\,r\,a}{\rho^2}\sin^2\theta\,c\,dt\,d\varphi + (1 - \frac{r_s\,r}{\rho^2})\,c^2 dt^2}$$

où $\boxed{\rho^2(r) = r^2 + a^2\cos^2\theta}$ $\boxed{\Delta(r) = r^2 - r_s\,r + a^2}$ $\boxed{a = \frac{J}{c\,M}}$ (J moment angulaire)

Au contraire de la métrique de Schwarzschild, il n'existe pas d'équivalent du théorème de Birkhoff en métrique de Kerr. Cette géométrie ne décrit donc que les trous noirs en rotation, et non pas l'espace temps extérieur à d'autres objets telles que des étoiles ou des planètes en rotation.
Les trajectoires d'une particule libre sont les géodésiques de la métrique.
On étudiera uniquement les trajectoires planes (on prendra $\theta = \frac{\pi}{2}$).
L' horizon des évènements correspond au changement de signe de g_{rr} , c'est à dire aux solutions de l'équation $\Delta = 0$. Si $a < \frac{r_s}{2}$ on obtient deux valeurs :

$\boxed{R_{H+} = \frac{r_s + \sqrt{r_s^2 - 4a^2}}{2}}$ et $\boxed{R_{H-} = \frac{r_s - \sqrt{r_s^2 - 4a^2}}{2}}$ donc $\boxed{\Delta(r) = (r - R_{H+})(r - R_{H-})}$

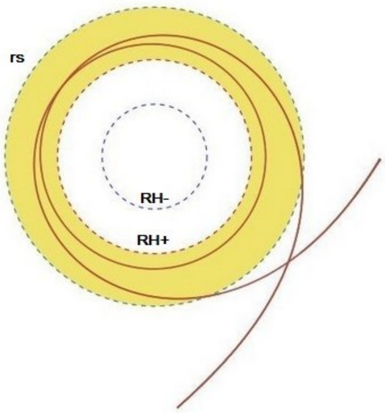
Le domaine compris entre r_s et R_{H+} est appelé ergorégion (dans la métrique de Schwarzschild il n'y a pas d'ergorégion $a = 0$ et $R_{H+} = r_s$) voir Éric Gourgoulhon - Relativité générale .

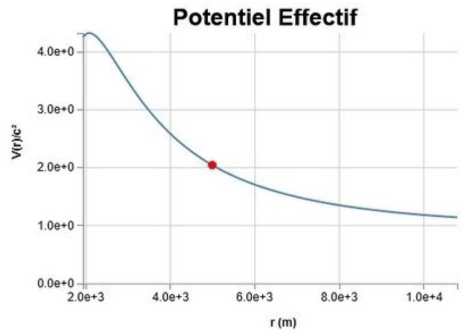
II.2 Particule massive

Les intégrales premières trouvées à l'aide du Lagrangien $\mathcal{L} = \frac{ds}{d\tau}$ s'écrivent :

$$(K_{pm}1) \quad \frac{dt}{d\tau}(r) = \frac{1}{\Delta(r)}\left[(r^2 + a^2 + \frac{r_s}{r}a^2)\,E - \frac{r_s\,a}{r}\,L\right] \quad et \quad (K_{pm}2) \quad \frac{d\varphi}{d\tau}(r) = \frac{c}{\Delta(r)}\left[\frac{r_s\,a}{r}\,E + (1 - \frac{r_s}{r})\,L\right]$$

Avec deux constantes d'intégration : E sans dimension et L une longueur.





M=2e30kg r0=4.5e3 m a=1.418e3 m

Ces fonctions reportées dans l'expression $ds = c\,d\tau$ entrainent :

$$(K_{pm}3) \quad (\frac{dr}{d\tau})^2 + V_{Kpm} = c^2 E^2 \quad avec \quad V_{Kpm}(r) = c^2 - \frac{r_s}{r}\,c^2 - \frac{c^2}{r^2}\,(\,a^2\,(E^2-1) - L^2\,) - \frac{r_s\,c^2}{r^3}\,(L - a\,E)^2$$

Ces relations vérifient les équations des géodésiques.
En dérivant par rapport à τ l'équation $(K_{pm}3)$ et pour des trajectoires non circulaires, on déduit l'équation différentielle suivante utilisée pour faire la simulation :

$$(K_{pm}4) \quad \frac{d^2r}{d\tau^2} = -\frac{1}{2}\frac{dV_{Kpm}}{dr} = \frac{c^2}{2\,r^4}\left[r_s\,r^2 + 2\,r\,(a^2(E^2-1) - L^2) + 3\,r_s\,(L - aE)^2\right] = f_{Kpm}(r)$$

L'équation $K_{pm}4$ est résolue numériquement par la méthode de Runge-Kutta.
Conditions initiales III.7-A.2

II.3 Photon

On garde les relations en t et φ :

$$(K_{ph}1) \quad \frac{dt}{d\lambda}(r) = \frac{1}{\Delta(r)}\left[(r^2 + a^2 + \frac{r_s}{r}\,a^2)\,E - \frac{r_s\,a}{r}\,L\right] \quad et \quad (K_{ph}2) \quad \frac{d\varphi}{d\lambda}(r) = \frac{c}{\Delta(r)}\left[\frac{r_s\,a}{r}\,E + (1 - \frac{r_s}{r})\,L\right]$$

Ces fonctions reportées dans l'expression $ds = 0$ entrainent :

$$(K_{ph}3) \quad (\frac{dr}{d\lambda})^2 + V_{Kph}(r) = c^2\,E^2 \quad avec \quad V_{Kph}(r) = -\frac{c^2}{r^2}\,(\,a^2\,E^2 - L^2\,) - \frac{r_s\,c^2}{r^3}\,(L - a\,E)^2$$

Ces relations vérifient les équations des géodésiques.

En dérivant par rapport à λ l'équation $(K_{ph}3)$ et pour des trajectoires non circulaires, on déduit l'équation différentielle suivante utilisée pour faire la simulation :

$$(K_{ph}4) \quad \frac{d^2r}{d\lambda^2} = -\frac{1}{2}\frac{dV_{Kph}}{dr} = -\frac{c^2}{2\,r^4}\left[2\,r\,(a^2E^2 - L^2) + 3\,r_s\,(L - aE)^2\right] = f_{Kph}(r)$$

Il existe deux trajectoires circulaires instables de rayons (voir James M. Bardeen) :

$$r_s\{1 + \cos[\frac{2}{3}\arccos(\frac{2a}{r_s})]\} \quad et \quad r_s\{1 + \cos[\frac{2}{3}\arccos(\frac{-2a}{r_s})]\}$$

L'équation $K_{ph}4$ est résolue numériquement par la méthode de Runge-Kutta.
Conditions initiales III.7-A.1

III - Annexes

III.1 Equations d'Euler-Lagrange

Soit $\mathcal{L}\,(x^1(\lambda), x^2(\lambda), ..., x^n(\lambda)\,,\, \dot{x}^1(\lambda), \dot{x}^2(\lambda), ..., \dot{x}^n(\lambda))$ une fonction de 2n variables indépendantes où $\dot{x}^i = \dfrac{dx^i}{d\lambda}$.

Alors, la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{\lambda_a}^{\lambda_b} \mathcal{L}\,(\lambda)\, d\lambda$ est extrémale pour les courbes $\{x^i(\lambda)\}_{i\in\{1,2...,n\}}$ qui vérifient les équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^k} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^k} \;=\; 0 \quad \forall k \in \{1, 2, ...n\}$$

III.2 Métriques et géodésiques

Pour une étude exhaustive voir Eric Gourgoulhon - Geometry and physics of black holes et Eric Gourgoulhon - Relativité générale .

Métriques

Dans un espace-temps, on représente par ds^2 l'intervalle infinitésimal entre deux évènements repérés par les coordonnèes $(x^1, x^2, x^3, x^4 = ct)$ et $(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3, ct + cdt)$ où

$$ds^2 \;=\; \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} g_{ij}(x^1, x^2, x^3, x^4)\, dx^i\, dx^j \;=\; g_{ij}\, dx^i\, dx^j \;\; (avec\, la\, convention\, de\, sommation\, d'Einstein)$$

Par abus de langage, on parlera de « distance » entre ces deux évènements.
La matrice symétrique 4x4 des 16 fonctions g_{ij} (coefficients de la métrique) admettant une inverse (dont les coefficients sont notés $g^{\alpha\beta}$) en tout point où est définie la métrique.

Propriétés fondamentales de cette « distance » :

- C'est un invariant pour tout changement de coordonnées

$$ds^2 \;=\; \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} g_{ij}(x^1, x^2, x^3, x^4)\, dx^i\, dx^j \;=\; \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} \bar{g}_{pq}(y^1, y^2, y^3, y^4)\, dy^p\, dy^q \qquad (g_{ij}\, dx^i\, dx^j \;=\; \bar{g}_{pq}\, dy^p\, dy^q)$$

- Elle s'écrit $ds = c\, d\tau$ où τ est le temps propre mesuré (par une horloge) entre les évènements (x^1, x^2, x^3, x^4) et $(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3, x^4 + dx^4)$

- Pour un photon on a toujours $ds = 0$

Géodésiques

Les courbes qui rendent extrémale la « distance » entre deux évènements de l'espace-temps sont appelées géodésiques. On montre qu'elles vérifient les équations différentielles :

$$\frac{d^2x^k}{d\lambda^2} \;+\; \Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda} \;=\; 0 \quad k \in \{1, 2, 3, 4\}$$

avec les coefficients de connexion (symboles de Christoffel de deuxième espèce)

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj} = \frac{1}{2}g^{ip}(\frac{\partial g_{pk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{pj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^p})$$

Soit la fonction : $\mathcal{L}\,(..,x^p(\lambda),..,\,..,\dot{x}^q(\lambda),..) \;=\; \sqrt{\epsilon\, g_{ij}\,\dfrac{dx^i}{d\lambda}\,\dfrac{dx^j}{d\lambda}} \;=\; \dfrac{ds}{d\lambda}$

où $\epsilon = 1$ pour les courbes du genre temps ($ds^2 > 0$) et $\epsilon = -1$ pour les courbes du genre espace ($ds^2 < 0$) (pour une signature $-\;-\;-\;+$) .

Les courbes $\{x^k(\lambda)\}_{k\in\{1,2,3,4\}}$ qui rendent l'intégrale $\displaystyle\int_a^b ds \;=\; \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} \mathcal{L}\,(\lambda)\,d\lambda \;=\; s(b) - s(a)$ extrémale sont les géodésiques.

Pour trouver des intégrales premières des équations des géodésiques on pourra chercher des solutions aux équations d'Euler-Lagrange : $\quad \dfrac{d}{d\lambda}\,\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^k} - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^k} \;=\; 0 \quad k\in\{1,2,3,4\}$

III.3 Application

Pour les métriques de Schwarzschild et de Kerr les fonctions g_{ij} sont indépendantes de t et φ :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = 0 \quad et \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{t}} = constante1 \qquad et \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = constante2$$

En imposant $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ la combinaison des deux relations précédentes donnent les équations $S1, S2, K1, K2$.

III.4 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

Méthode pour résoudre numériquement l'équation différentielle : $\dfrac{d^2r}{d\lambda^2}(r) = f(r)$

avec les conditions initiales $\quad \lambda = \lambda_0 \;\;,\;\; r = r_0 \quad$ et $\quad \dfrac{dr}{d\lambda}(r_0)$.

On calcule les valeurs r_n , $y'_n = \dfrac{dr}{d\lambda}(r_n)$ et φ_n en partant de $(r_0\;,\;\dfrac{dr}{d\lambda}(r_0)\;,\;\varphi_0)$ avec un pas de h pour la variable λ.

$$k_1 = f(r_n) \quad , \quad k_2 = f(r_n + \frac{h}{2}\,y'_n) \quad , \quad k_3 = f(r_n + \frac{h}{2}\,y'_n + \frac{h^2}{4}\,k_1) \quad , \quad k_4 = f(r_n + h\,y'_n + \frac{h^2}{2}\,k_2)$$

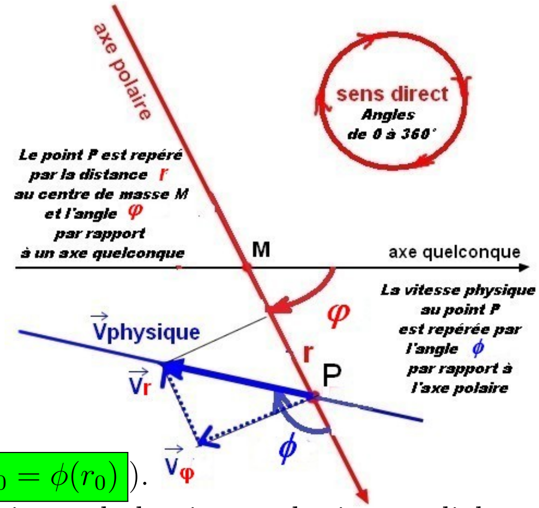
$$r_{n+1} = r_n + h\,y'_n + \frac{h^2}{6}\,(k_1 + k_2 + k_3)$$

$$y'_{n+1} = y'_n + \frac{h}{6}\,(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4)$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + d\varphi \quad voir \quad S2 \quad ou \quad K2$$

voir ici

III.5 Vitesses physiques



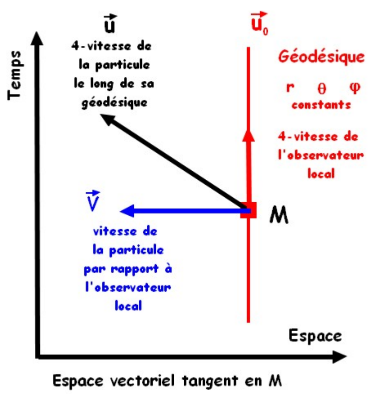
La vitesse physique d'un mobile qui passe au point r, θ, φ de l'espace temps est celle qui serait mesurée dans un référentiel orthonormé attaché à un observateur (ne pas confondre avec "l'observateur lointain") situé au point r, θ, φ.
Pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ on notera :
- r et φ les coordonnées polaires d'un point P de la trajectoire (valeurs initiales r_0 et φ_0).
- ϕ l'angle polaire du vecteur vitesse physique (valeur initiale ϕ_0).
- V le module de la vitesse physique ($\boxed{v_0 = V(r_0) \quad \phi_0 = \phi(r_0)}$).
- $V_r = V\,cos(\phi)$ et $V_\varphi = V\;sin(\phi)$ les valeurs algèbriques de la vitesse physique radiale et de la vitesse physique tangentielle

III.6 Vitesses physiques en métrique de Schwarzschild

Le tenseur de la métrique (intérieure et extérieure) de Scharwzschild peut s'écrire :

$$ds^2 = g_{t,t}(r)\,dt^2 \;+\; g_{r,r}(r)\,dr^2 \;+\; g_{\theta,\theta}(r)\,d\theta^2 \;+\; g_{\varphi,\varphi}(r)\,d\varphi^2$$

dans un système de coordonnées $\{t, r, \theta, \varphi\}$.



Au point M, l'observateur (de masse nulle) (géodésique r, θ, φ constants, avec une quadri-vitesse $\vec{u_0}$), détermine la vitesse physique $\vec{V}$ d'une particule de quadri-vitesse $\vec{u}$.
La base générique de l'espace vectoriel tangent en M sera notée : $\{\vec{\partial_t}, \vec{\partial_r}, \vec{\partial_\theta}, \vec{\partial_\varphi}\}$ et une base orthonormée $\{\vec{e^t}, \vec{e^r}, \vec{e^\theta}, \vec{e^\varphi}\}$, ainsi la vitesse $\vec{V}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{V} \;&=\; V^r\vec{\partial_r} \;+\; V^\theta\vec{\partial_\theta} \;+\; V^\varphi\vec{\partial_\varphi} \\ &=\; V_r\vec{e^r} \;+\; V_\theta\vec{e^\theta}, + V_\varphi\vec{e^\varphi} \end{aligned}$$

Avec la base orthonormée évidente : $\{\vec{e^t} = \frac{1}{\sqrt{g_{t,t}}}\,\vec{\partial_t},\; \vec{e^r} = \frac{1}{\sqrt{g_{r,r}}}\,\vec{\partial_r},\; \vec{e^\theta} = \frac{1}{\sqrt{g_{\theta,\theta}}}\,\vec{\partial_\theta},\; \vec{e^\varphi} = \frac{1}{\sqrt{g_{\varphi,\varphi}}}\,\vec{\partial_\varphi}\}$

on trouve : $\qquad V_r^2 \;=\; g_{r,r}V^{r\,2} \qquad V_\theta^2 \;=\; g_{\theta,\theta}V^{\theta\,2} \qquad V_\varphi^2 \;=\; g_{\varphi,\varphi}V^{\varphi\,2}$

La 4-vitesse de l'observateur local $\vec{u_0} = (\dfrac{dt}{d\tau_{loc}}, \dfrac{dr}{d\tau_{loc}}, \dfrac{d\theta}{d\tau_{loc}}, \dfrac{d\varphi}{d\tau_{loc}}) = (\dfrac{c}{\sqrt{g_{t,t}}}, 0, 0, 0)$ et la 4-vitesse de la particule $\vec{u} = (\dfrac{dt}{d\lambda}, \dfrac{dr}{d\lambda}, \dfrac{d\theta}{d\lambda}, \dfrac{d\varphi}{d\lambda})$ (le paramètre λ pour le photon et τ pour le temps propre des autres particules).
Avec l'hypothèse $\vec{u} = \Gamma(\vec{u_0} + \vec{V})$ et le produit scalaire $\vec{u_0}.\vec{V}$ nul le carré de la vitesse physique est égal à : $V_r^2 + V_\theta^2 + V_\varphi^2$.
On détermine Γ par $\vec{u}.\vec{u_0} = \Gamma(\vec{u_0}.\vec{u_0} + \vec{u_0}.\vec{V})$ soit :

$$g_{\alpha,\beta}u^\alpha u_0^\beta = g_{t,t}\frac{c}{\sqrt{g_{t,t}}}\frac{dt}{d\lambda} = \Gamma g_{\alpha,\beta}u_0^\alpha u_0^\beta = \Gamma c^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \Gamma = \frac{\sqrt{g_{t,t}}}{c}\frac{dt}{d\lambda}$$

.
D'autre part :

$$\Gamma V^r = \frac{dr}{d\lambda} \;\; et \;\; V_r^2 = \frac{g_{r,r}}{\Gamma^2}(\frac{dr}{d\lambda})^2 \qquad \Gamma V^\theta = \frac{d\theta}{d\lambda} \;\; et \;\; V_\theta^2 = \frac{g_{\theta,\theta}}{\Gamma^2}(\frac{d\theta}{d\lambda})^2 \qquad \Gamma V^\varphi = \frac{d\varphi}{d\lambda} \;\; et \;\; V_\varphi^2 = \frac{g_{\varphi,\varphi}}{\Gamma^2}(\frac{d\varphi}{d\lambda})^2$$

D'où l'expression de la vitesse physique au carré :

$$\frac{c^2}{\mid g_{t,t} \mid}\left[g_{r,r}(\frac{dr}{d\lambda})^2 + g_{\theta,\theta}(\frac{d\theta}{d\lambda})^2 + g_{\varphi,\varphi}(\frac{d\varphi}{d\lambda})^2\right](\frac{d\lambda}{dt})^2$$
$$= \boxed{\frac{c^2}{\mid g_{t,t} \mid}\left[g_{r,r}(\frac{dr}{dt})^2 + g_{\theta,\theta}(\frac{d\theta}{dt})^2 + g_{\varphi,\varphi}(\frac{d\varphi}{dt})^2\right]}$$

Cette méthode est la mise en forme de notes manuscrites d'**Eric Gougoulhon** venu présenter une conférence à Montpellier en 2017.

A - Métrique de Scharwzschild extérieure - cas particulier $\theta = \frac{\pi}{2}$

Métrique à l'extérieur d'un astre centro-symétrique, de masse M, sans rotation.

Les coefficients de la métrique sont :

$$g_{t,t} = -c^2(1-\frac{r_s}{r}) \qquad g_{r,r} = \frac{1}{(1-\frac{r_s}{r})} \qquad g_{\theta,\theta} = 0 \qquad g_{\varphi,\varphi} = r^2$$

A.1 Photons

Intégrales premières :

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{E}{1-\frac{r_s}{r}} \qquad \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{c\,L}{r^2}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{E}\,(1-\frac{r_s}{r})\,\frac{c\,L}{r^2} \qquad (\frac{dr}{dt})^2 = \frac{c^2}{E^2}\,(1-\frac{r_s}{r})^2\left[E^2-(1-\frac{r_s}{r})\frac{L^2}{r^2}\right]$$

Calcul de la vitesse physique au carré :

$$\frac{1}{(1-\frac{r_s}{r})^2}\left[(\frac{dr}{dt})^2 + (1-\frac{r_s}{r})\,r^2\,(\frac{d\varphi}{dt})^2\right] = \boxed{c^2}$$

Conditions initiales III.6-A.1

$$V_r(r_0) = c\,cos(\phi_0) \qquad V_\varphi(r_0) = c\,sin(\phi_0)$$

d'où

$$E = 1 \qquad L = \frac{r_0\,sin(\phi_0)}{\sqrt{1-\frac{r_s}{r_0}}}$$

A.2 Autres particules

Intégrales premières :

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{1-\frac{r_s}{r}} \qquad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{c\,L}{r^2}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{E}\,(1-\frac{r_s}{r})\,\frac{c\,L}{r^2} \qquad (\frac{dr}{dt})^2 = \frac{c^2}{E^2}\,(1-\frac{r_s}{r})^2\left[E^2-(1-\frac{r_s}{r})(1+\frac{L^2}{r^2})\right]$$

Calcul de la vitesse physique au carré :

$$\frac{1}{(1-\frac{r_s}{r})^2}\left[(\frac{dr}{dt})^2 \;+\; (1-\frac{r_s}{r})\,r^2\,(\frac{d\varphi}{dt})^2\right] \;=\; \boxed{\frac{c^2}{E^2}\left[E^2-(1-\frac{r_s}{r})\right]}$$

Conditions initiales III.6-A.2

$$V_r(r_0) = v_0\,cos(\phi_0) \qquad\qquad V_\varphi(r_0) = v_0\,sin(\phi_0)$$

d'où

$$E = \frac{\sqrt{1-\dfrac{r_s}{r_0}}}{\sqrt{1-\dfrac{v_0^2}{c^2}}} \qquad\qquad L = \frac{v_0}{c}\,\frac{r_0 E\sin(\phi_0)}{\sqrt{1-\dfrac{r_s}{r_0}}}$$

B - Métrique de Scharwzschild intérieure - cas particulier $\theta = \frac{\pi}{2}$

Métrique à l'intérieur d'un astre de rayon R, de masse M, de masse volumique constante , sans rotation.

Les coefficients de la métrique sont :

$$g_{t,t} = -c^2\left[\frac{3}{2}\,\sqrt{1-\frac{r_s}{R}} \;-\; \frac{1}{2}\,\sqrt{1-\frac{r^2 r_s}{R^3}}\;\right]^2 \qquad g_{r,r} = \frac{1}{1-\dfrac{r^2 r_s}{R^3}} \qquad g_{\theta,\theta} = 0 \qquad g_{\varphi,\varphi} = r^2$$

On pose $\quad \alpha(r) = 1-\dfrac{r^2 r_s}{R^3} \qquad\qquad \beta(r) = \frac{3}{2}\,\sqrt{1-\dfrac{r_s}{R}} \;-\; \frac{1}{2}\,\sqrt{1-\dfrac{r^2 r_s}{R^3}}$

B.1 Photons

Intégrales premières : $\qquad \beta(r)^2\dfrac{dt}{d\lambda} = E \qquad\qquad \dfrac{d\varphi}{d\lambda} = \dfrac{cL}{r^2}$

$$\frac{d\varphi}{dt} \;=\; \frac{\beta(r)^2}{E}\,\frac{c\,L}{r^2} \qquad\qquad (\frac{dr}{dt})^2 \;=\; \frac{c^2}{E^2}\,\alpha(r)\,\beta(r)^4\left[\frac{E^2}{\beta(r)^2} \;-\; \frac{L^2}{r^2}\right]$$

Calcul de la vitesse physique au carré :

$$\frac{1}{\beta(r)^2\alpha(r)}\left[(\frac{dr}{dt})^2 \;+\; \alpha(r) r^2\,(\frac{d\varphi}{dt})^2\right] \;=\; \boxed{c^2}$$

Conditions initiales III.6-B.1

$$V_r(r_0) = c\,cos(\phi_0) \qquad\qquad V_\varphi(r_0) = c\,sin(\phi_0)$$

d'où

$$E = 1 \qquad\qquad L = \frac{r_0\,sin(\phi_0)}{\beta(r_0)}$$

B.2 Autres particules

Intégrales premières : $\beta(r)^2 \dfrac{dt}{d\tau} = E \qquad \dfrac{d\varphi}{d\tau} = \dfrac{cL}{r^2}$

$$\frac{d\varphi}{dt} \;=\; \frac{\beta(r)^2}{E}\,\frac{c\,L}{r^2} \qquad\qquad (\frac{dr}{dt})^2 \;=\; \frac{c^2}{E^2}\,\alpha(r)\,\beta(r)^4\left[\frac{E^2}{\beta(r)^2} \;-\; \frac{L^2}{r^2} \;-1\right]$$

Calcul de la vitesse physique au carré :

$$\frac{1}{\beta(r)^2\alpha(r)}\left[(\frac{dr}{dt})^2 \;+\; \alpha(r)r^2\,(\frac{d\varphi}{dt})^2\right] \;=\; \boxed{\frac{c^2}{E^2}\,\left[E^2-\beta(r)^2\right]}$$

Conditions initiales III.6-B.2

$$V_r(r_0) = v_0\,cos(\phi_0) \qquad\qquad V_\varphi(r_0) = v_0\,sin(\phi_0)$$

d'où

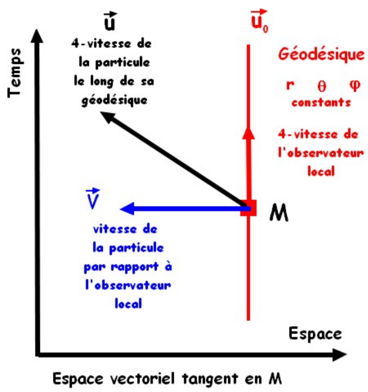
$$E = \frac{\beta(r_0)}{\sqrt{1-\dfrac{v_0^2}{c^2}}} \qquad\qquad L = \frac{v_0}{c}\,\frac{r_0\sin\phi_0}{\sqrt{1-\dfrac{v_0^2}{c^2}}}$$

III.7 Vitesses physiques en métrique de Kerr

Le tenseur de la métrique de Kerr peut s'écrire :

$$ds^2 = g_{t,t}(r)\,dt^2 \;+\; g_{t,\varphi}(r)\,dt\,d\varphi \;+ g_{\varphi,t}(r)\,d\varphi\,dt \;+\; g_{r,r}(r)\,dr^2 \;+\; g_{\theta,\theta}(r)\,d\theta^2 \;+\; g_{\varphi,\varphi}(r)\,d\varphi^2$$

dans un système de coordonnées $\{t, r, \theta, \varphi\}$.



Au point M, l'observateur (de masse nulle) (géodésique r, θ, φ constants, avec une quadri-vitesse $\vec{u_0}$), détermine la vitesse physique $\vec{V}$ d'une particule de quadri-vitesse $\vec{u}$.
La base générique de l'espace vectoriel tangent en M sera notée : $\{\vec{\partial_t}, \vec{\partial_r}, \vec{\partial_\theta}, \vec{\partial_\varphi}\}$ et une base orthonormée $\{\vec{e^t}, \vec{e^r}, \vec{e^\theta}, \vec{e^\varphi}\}$, ainsi la vitesse $\vec{V}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{V} \;&=\; V^r\vec{\partial_r} \;+\; V^\theta\vec{\partial_\theta} \;+\; V^\varphi\vec{\partial_\varphi}\\ &=\; V_r\vec{e^r} \;+\; V_\theta\vec{e^\theta}, + V_\varphi\vec{e^\varphi}\end{aligned}$$

Avec la base orthonormée :

$$\{ \quad \vec{e^t} = \frac{1}{\sqrt{g_{t,t}}}\,\vec{\partial_t} \qquad \vec{e^r} = \frac{1}{\sqrt{g_{r,r}}}\,\vec{\partial_r} \qquad \vec{e^\theta} = \frac{1}{\sqrt{g_{\theta,\theta}}}\,\vec{\partial_\theta}$$

$$\vec{e^\varphi} = \frac{-g_{t,\varphi}}{g_{t,t}\sqrt{\dfrac{g_{t,t}\,g_{\varphi,\varphi} \;-\; g_{t,\varphi}\,g_{\varphi,t}}{g_{t,t}}}}\,\vec{\partial_t} \;+\; \frac{1}{\sqrt{\dfrac{g_{t,t}\,g_{\varphi,\varphi} \;-\; g_{t,\varphi}\,g_{\varphi,t}}{g_{t,t}}}}\,\vec{\partial_\varphi} \quad \}$$

on trouve : $\quad V_r^2 \;=\; g_{r,r}V^{r\,2} \qquad V_\theta^2 \;=\; g_{\theta,\theta}V^{\theta\,2} \qquad V_\varphi^2 \;=\; \dfrac{(g_{t,t}\,g_{\varphi,\varphi} \;-\; g_{t,\varphi}\,g_{\varphi,t})}{g_{t,t}}V^{\varphi\,2}$

La 4-vitesse de l'observateur local $\vec{u_0} = (\frac{dt}{d\tau_{loc}}, \frac{dr}{d\tau_{loc}}, \frac{d\theta}{d\tau_{loc}}, \frac{d\varphi}{d\tau_{loc}}) = (\frac{c}{\sqrt{g_{t,t}}}, 0, 0, 0)$ et la 4-vitesse de la particule $\vec{u} = (\frac{dt}{d\lambda}, \frac{dr}{d\lambda}, \frac{d\theta}{d\lambda}, \frac{d\varphi}{d\lambda})$ (le paramètre λ pour le photon et τ pour le temps propre des autres particules). Avec l'hypothèse $\vec{u} = \Gamma(\vec{u_0} + \vec{V})$ et le produit scalaire $\vec{u_0}.\vec{V}$ nul le carré de la vitesse physique est égal à : $V_r^2 + V_\theta^2 + V_\varphi^2$.
On détermine Γ par $\vec{u}.\vec{u_0} = \Gamma(\vec{u_0}.\vec{u_0} + \vec{u_0}.\vec{V})$ soit :

$$g_{\alpha,\beta} u^\alpha u_0^\beta = g_{t,t} \frac{c}{\sqrt{g_{t,t}}} \frac{dt}{d\lambda} + g_{t,\varphi} \frac{c}{\sqrt{g_{t,t}}} \frac{d\varphi}{d\lambda} = \Gamma g_{\alpha,\beta} u_0^\alpha u_0^\beta = \Gamma c^2 \quad \Longrightarrow \quad \Gamma = \frac{1}{c}[\sqrt{g_{t,t}} \frac{dt}{d\lambda} + \frac{g_{t,\varphi}}{\sqrt{g_{t,t}}} \frac{d\varphi}{d\lambda}]$$

D'autre part :

$$\Gamma V^r = \frac{dr}{d\lambda} \quad et \quad V_r^2 = \frac{g_{r,r}}{\Gamma^2} (\frac{dr}{d\lambda})^2 \qquad\qquad \Gamma V^\theta = \frac{d\theta}{d\lambda} \quad et \quad V_\theta^2 = \frac{g_{\theta,\theta}}{\Gamma^2} (\frac{d\theta}{d\lambda})^2$$

$$\Gamma V^\varphi = \frac{d\varphi}{d\lambda} \quad et \quad V_\varphi^2 = \frac{(g_{t,t}\, g_{\varphi,\varphi} \; - \; g_{t,\varphi}\, g_{\varphi,t})}{\Gamma^2\, g_{t,t}} (\frac{d\varphi}{d\lambda})^2$$

D'où l'expression de la $\boxed{\text{vitesse physique au carré}}$:

$$\frac{c^2}{(\sqrt{g_{t,t}} \frac{dt}{d\lambda} + \frac{g_{t,\varphi}}{\sqrt{g_{t,t}}} \frac{d\varphi}{d\lambda})^2} \left[g_{r,r} (\frac{dr}{d\lambda})^2 \; + \; g_{\theta,\theta} (\frac{d\theta}{d\lambda})^2 \; + \; \frac{(g_{t,t}\, g_{\varphi,\varphi} \; - \; g_{t,\varphi}\, g_{\varphi,t})}{g_{t,t}} (\frac{d\varphi}{d\lambda})^2 \right]$$

$$= \boxed{\frac{c^2}{(\sqrt{g_{t,t}} + \frac{g_{t,\varphi}}{\sqrt{g_{t,t}}} \frac{d\varphi}{dt})^2} \left[g_{r,r} (\frac{dr}{dt})^2 \; + \; g_{\theta,\theta} (\frac{d\theta}{dt})^2 \; + \; \frac{(g_{t,t}\, g_{\varphi,\varphi} \; - \; g_{t,\varphi}\, g_{\varphi,t})}{g_{t,t}} (\frac{d\varphi}{dt})^2 \right]}$$

Ce qui précède est une application de la méthode décrite dans des notes manuscrites d'**Eric Gougoulhon** venu présenter une conférence à Montpellier en 2017.

A - Métrique de Kerr

Métrique à l'extérieur d'un trou noir centro-symétrique, de masse M, avec rotation constante.

Les coefficients de la métrique sont :

$$g_{t,t} = -c^2 (1 - \frac{r_s\, r}{\rho^2}) \qquad g_{t,\varphi} = g_{\varphi,t} = -\frac{c\, r_s\, a\, r}{\rho^2} \sin^2(\theta)$$

$$g_{r,r} = \frac{\rho^2}{\Delta} \qquad g_{\theta,\theta} = \rho^2 \qquad g_{\varphi,\varphi} = \left[r^2 + a^2 + \frac{r_s\, a^2\, r}{\rho^2} \sin^2(\theta) \right] \sin^2(\theta)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \qquad \Delta = r^2 - r_s\, r + a^2$$

A.1 Photons - Cas particulier $\theta = \frac{\Pi}{2}$

Intégrales premières :

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{\Delta} \left[(r^2 + a^2 + \frac{r_s}{r} a^2)\, E - \frac{r_s\, a}{r}\, L \right] \qquad\qquad \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{c}{\Delta} \left[\frac{r_s\, a}{r}\, E + (1 - \frac{r_s}{r})\, L \right]$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c \left[\frac{r_s\, a}{r}\, E + (1 - \frac{r_s}{r})\, L \right]}{\left[(r^2 + a^2 + \frac{r_s}{r} a^2)\, E - \frac{r_s\, a}{r}\, L \right]}$$

$$(\frac{dr}{dt})^2 \;=\; c^2\;\frac{\left[E^2+\dfrac{(a^2\,E^2-L^2)}{r^2}+r_s\,\dfrac{(L-a\,E)^2}{r^3}\right](a^2+r^2-r\,r_s)^2}{\left[(r^2+a^2+\dfrac{r_s}{r}\,a^2)\,E-\dfrac{r_s\,a}{r}\,L\right]^2}$$

Calcul de la vitesse physique au carré :

$$\frac{(1-\dfrac{r_s}{r})}{\left[(1-\dfrac{r_s}{r})+\dfrac{r_s\,a}{c\,r}\,(\dfrac{d\varphi}{dt})\right]^2}\left[\frac{r^2}{\Delta}\,(\frac{dr}{dt})^2\;+\;\frac{\Delta}{(1-\dfrac{r_s}{r})}\,(\frac{d\varphi}{dt})^2\right]\;=\;\boxed{c^2}$$

Conditions initiales III.7-A.1

$$V_r(r_0)=c\,cos(\phi_0)\qquad\qquad V_\varphi(r_0)=c\,sin(\phi_0)$$

d'où

$$E=1\qquad\qquad L=\frac{1}{(r_0-r_s)}\left[r_0\,sin(\phi_0)\,\sqrt{\Delta(r_0)}\;-\;a\,r_s\right]$$

A.2 Autres particules - Cas particulier $\theta=\frac{\Pi}{2}$

Intégrales premières :

$$\frac{dt}{d\tau}=\frac{1}{\Delta}\left[(r^2+a^2+\frac{r_s}{r}\,a^2)\,E-\frac{r_s\,a}{r}\,L\right]\qquad\qquad \frac{d\varphi}{d\tau}=\frac{c}{\Delta}\left[\frac{r_s\,a}{r}\,E+(1-\frac{r_s}{r})\,L\right]$$

$$\frac{d\varphi}{dt}\;=\;\frac{c\left[\dfrac{r_s\,a}{r}\,E+(1-\dfrac{r_s}{r})\,L\right]}{\left[(r^2+a^2+\dfrac{r_s}{r}\,a^2)\,E-\dfrac{r_s\,a}{r}\,L\right]}$$

$$(\frac{dr}{dt})^2\;=\;c^2\;\frac{\left[E^2-1+\dfrac{r_s}{r}+\dfrac{(a^2(E^2-1)-L^2)}{r^2}+r_s\,\dfrac{(L-a\,E)^2}{r^3}\right](a^2+r^2-r\,r_s)^2}{\left[(r^2+a^2+\dfrac{r_s}{r}\,a^2)\,E-\dfrac{r_s\,a}{r}\,L\right]^2}$$

Calcul de la vitesse physique au carré :

$$\frac{(1-\dfrac{r_s}{r})}{\left[(1-\dfrac{r_s}{r})+\dfrac{r_s\,a}{c\,r}\,(\dfrac{d\varphi}{dt})\right]^2}\left[\frac{r^2}{\Delta}\,(\frac{dr}{dt})^2\;+\;\frac{\Delta}{(1-\dfrac{r_s}{r})}\,(\frac{d\varphi}{dt})^2\right]\;=\;\boxed{\frac{c^2}{E^2}\left[E^2-(1-\frac{r_s}{r})\right]}$$

Conditions initiales III.7-A.2

$$V_r(r_0)=v_0\,cos(\phi_0)\qquad\qquad V_\varphi(r_0)=v_0\,sin(\phi_0)$$

d'où

$$E=c\sqrt{\frac{r_0-r_s}{r_0\,(c^2-v_0^2)}}\qquad\qquad L=\frac{-1}{\sqrt{(c^2-v_0^2)(r_0-r_s)}}\left[\frac{a\,c\,r_s}{\sqrt{r_0}}\;-\;v_0\,sin(\phi_0)\,\sqrt{r_0\,\Delta(r_0)}\right]$$