Analyse

Raphaël Casanova
raphael.casanova@centrale.centralelille.fr

D'après le cours d'Emmanuel Fricain à l'université de Lille

DÉPARTEMENT DE
MATHÉMATIQUES

Université
de Lille

Table des matières

Ce document est une transciption en LaTeX plus ou moins fidèle au cours d'analyse d'Emmanuel Fricain en première année de master, en 2024-2025.
En terme de notation, j'ai préféré utiliser les notations en **gras** pour les ensembles :

$$\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$$

plutôt que celles en :

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

pour coller à la norme ISO 80000-2.
La notation

$$f_n \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} f$$

indique que la suite de fonction (f_n) converge uniformément vers f.
Dans le présent document, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, (K, d) est un espace métrique compact et l'on munit l'espace

$$C(K, \mathbf{K}) = \{f : K \longrightarrow \mathbf{K} \text{ continues }\}$$

de la norme

$$||f||_\infty := \sup \{f(x)|, \ x \in K\}.$$

Suivant le contexte, la norme opérateur, pour E et F deux espaces vectoriels normés et $T \in \mathcal{L}(E, F)$,

$$||T|| = \sup \{||Tx||, x \in E \text{ t.q. } ||x|| = 1\}$$

sera notée $|| \cdot ||_{\text{op}}$ pour la distinguer des normes sur E ou F (dans la littérature, on rencontre parfois la notation $||| \cdot |||$).

Le symbole $\square$ signifie *C.Q.F.D.*, le symbole ($\bullet$) indique plusieurs hypothèses à vérifier, le symbole $\star$ indique une étape de la preuve et le symbole † indique une disjonction de cas.

Première partie
Espace des fonctions continues sur un compact

On commence par (re)voir quelques notions de topologies qui vont nous servir au cours de ce chapitre :

1 3 notions importantes

- densité : si (E, d) est un espace métrique, $A \subset E$ est dite *dense dans* E si, et seulement si

$$\forall x \in E,\ \exists\,(a_n) \in A \text{ t.q. } d(a_n, x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- compacité : l'espace métrique (E, d) est *compact* si, et seulement si toute suite dans E admet une sous-suite convergente.

C'est équivalent à : pour tout recouvrement de E par une collection quelconque d'ouverts $(V_i)_{i\in I}$, il existe un sous-recouvrement fini, *i.e.*

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} V_k.$$

- complétude : l'espace métrique (E, d) est *complet* si toute suite de Cauchy à valeur dans E converge dans E.

Dans le contexte d'espaces de fonctions,
la densité s'identifie avec une approximation par des fonctions régulières et la compacité / complétude s'identifie avec l'existence de limites et de valeurs d'adhérences de suites de fonctions.

rq : on montre que $(C(K, \mathbf{K}), ||\cdot||_\infty)$ est un espace de Banach, *i.e*; un espace vectoriel normé complet.

2 Théorème de Dini

On sait, depuis la *spé* que la convergence uniforme implique la convergence simple, et qu'il n'y a *à priori* pas de réciproque (un contre-exemple est $f_n : t \in]0,1[\longmapsto t^n$, qui converge simplement vers la fonction nulle, mais dont la norme infinie est constante égale à 1).
Le théorème suivant nous donne un critère de réciproque :

Théorème 1 (*Dini*) **:** soit $(f_n) \in C(K, \mathbf{R})$, avec K un compact, on suppose
($\bullet$) f_n converge simplement vers $f : K \longrightarrow \mathbf{R}$,
($\bullet\bullet$) f est continue,
($\bullet\bullet\bullet$) $\forall x \in K,\ (f_n(x))$ est croissante,

alors f_n converge uniformément vers f.

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$, pour tout $n \geqslant 1$, on pose

$$\Omega_n := \{x \in K \mid f_n(x) > f(x) - \varepsilon\},$$

chaque Ω_n est un ouvert car c'est la pré-image d'un ouvert de $\mathbf{R}$ par une application continue. On a aussi

$$K = \bigcup_{n \geqslant 1} \Omega_n$$

K étant compact, on peut re-numéroter les Ω_n de façon à avoir

$$K = \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_{N_i}.$$

Quitte à réarranger la suite (n_i), on la suppose croissante. Puisque chaque $(f_n(x))$ est croissante, on a aussi les inclusions

$$\forall i \in [\![1, N]\!],\ \Omega_{n_i} \subset \Omega_{n_N}$$

donc

$$K = \Omega_{m_n}.$$

Autrement dit,

$$\exists N \in \mathbf{N} \mid \forall x \in K,\ f_n(x) > f(x) - \varepsilon.$$

Puisque $f_n(x)$ tend par valeurs inférieurs vers $f(x)$, on a aussi l'inégalité

$$\forall x \in K,\ f(x) - f_n(x) > 0.$$

On peut donc écrire

$$\exists N \in \mathbf{N} \mid \forall x \in K, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Et comme la suite $(f_n(x))$ est croissante et converge vers $f(x)$, on a finalement

$$\forall n \geqslant N,\ \forall x \in K,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

et f_n converge uniformément vers f. □

▷*ex :* si l'on pose

$$\begin{cases} P_0(t) &= 0 \\ P_{n+1}(t) &= P_n(t) + \dfrac{1}{2}(t - P_n^2(t)) \end{cases}$$

alors P_n est une suite de polynômes convergeant uniformément vers $t \in [0,1] \longmapsto \sqrt{t}$.

Démonstration

On montre par récurrence que

$$\forall t \in [0,1],\ \forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leqslant P_n(t) \leqslant \sqrt{t}$$

ce qui nous montre que la suite $P_n(t)$ est croissante et bornée, donc converge (vers f).
On passe à la limite dans la relation de récurrence

$$f(t) = f(t) + \frac{1}{2}(t - f^2(t))$$

donc (puisqe $f \geqslant 0$)

$$f(t) = \sqrt{t}.$$

Le théorème de Dini s'applique, et P_n converge uniformément sur $[0,1]$ vers $t \mapsto \sqrt{t}$. □

3 Théorème(s) de Stone-Weierstraß

On commence par une parenthèse algébrique : soit $\mathcal{A}$ un ensemble, muni des lois $(+, ., \times)$.

Définition : On dit que $\mathcal{A}$ est une *algèbre* si, et seulement si
(•) $(\mathcal{A}, +, .)$ est un espace vectoriel,
(••) $\times : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ est bilinéaire.

$\mathcal{A}$ est *unitaire* si il contient une élement neutre pour $+$.

Définition : Une partie $\mathcal{B}$ de l'algèbre $\mathcal{A}$ est une *sous-algèbre de*$\mathcal{A}$ si, et seulement si
(•) $(\mathcal{B}, +, .)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{A}, +, .)$,
(••) $\mathcal{B}$ est stable pour la loi $\times$.

La question à laquelle répond ce paragraphe est comme suit : si $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre unitaire de $C(K, \mathbf{K})$, à quelle condition est-ce-que $\mathcal{A}$ est dense dans $C(K, \mathbf{K})$?

***rq* :** si $\mathcal{A}$ est dense dans $C(K, \mathbf{K})$, alors $\mathcal{A}$ sépare les points, *i.e.*

$$\forall (x, y) \in K,\ x \neq y,\ \exists f \in \mathcal{A} \mid f(x) \neq f(y).$$

Démonstration

soit $x \neq y$ dans K et $g : z \longmapsto d(x, z)$, on a alors

$$g(x) = 0 \text{ et } g(y) > 0$$

g est une distance donc est 1-lipschitzienne donc est continue. Soit $\varepsilon := g(y)$, par densité de $\mathcal{A}$ il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que

$$||f - g||_\infty < \varepsilon/2$$

On a

$$|f(x)| = |f(x) - g(x)| \leqslant ||f - g||_\infty < \varepsilon/2$$

On a aussi (inégalité triangulaire)

$$|g(y)| = |(g(y) - f(y)) + f(y)| \leqslant |g(y) - f(y)| + |f(y)|$$

d'où

$$|f(y)| \geqslant |g(y)| - |g(y) - f(y)| > \varepsilon - \varepsilon/2 = \varepsilon/2$$

donc

$$|f(y)| > |f(x)|$$

et $\mathcal{A}$ sépare les points. □

Avant de passer aux théorèmes de Stone-Weierstraß, on montre quelques propriétés générales sur les sous-algèbres unitaires de $C(K, \mathbf{K})$.

Propriété 2 : Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre unitaire de $C(K, \mathbf{K})$, soient $f, g \in \mathcal{A}$,

alors
(1) $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$,

(2) $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g) \in \overline{\mathcal{A}}$.

Démonstration du (1)

Si $f = 0$, alors $f = |f|$ et le résultat est vrai, on peut donc supposer $f \neq 0$ et l'on pose

$$g := \frac{f}{||f|_\infty} \in \mathcal{A}$$

on a alors

$$0 \leqslant g^2 \leqslant 1$$

on peut donc composer g^2 par la suite des P_n définie précedemment, donc pour $\varepsilon > 0$, on a

$$\exists N \in \mathbf{N} \mid \forall n \geqslant N,\ \sup_{x \in K} \left| P_n(g^2(x)) - |g(x)| \right| \leqslant \varepsilon.$$

$\mathcal{A}$ étant stable par $+$ et $\times$, $x \longmapsto P_n(g^2(x)) \in \mathcal{A}$, donc l'inégalité nous indique que $|g| \in \overline{\mathcal{A}}$. $\overline{\mathcal{A}}$ étant aussi stable par multiplication par un scalaire, on en déduit que $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$. □

Démonstration du (1)

C'est une conséquence immédiate du premier point, en écrivant nos fonctions sous les formes suivantes :

$$\sup(f, g) = \frac{1}{2}\left(f + g + |f - g|\right)$$

et

$$\inf(f, g) = \frac{1}{2}\left(f + g - |f - g|\right).$$

□

Théorème 3 (*Stones-Weierstraß, cas réel*) **:** Soit (K, d) un espace métrique compact, $\mathcal{A}$ une sous-algèbre unitaire de $C(K, \mathbf{R})$ qui sépare les points,
alors $\mathcal{A}$ est dense dans $C(K, \mathbf{R})$.

avant de démontrer ce théorème, on aura besoin des trois lemmes suivants :

Lemme 1 : Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre unitaire de $C(K, \mathbf{R})$ séparant les points,

alors $\forall (x, y) \in K$ distincts, $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que

$$f(x) = \alpha \text{ et } f(y) = \beta.$$

Démonstration

puisque $\mathcal{A}$ sépare les points, il existe $g \in \mathcal{A}$ telle que

$$g(x) \neq g(y).$$

Soit le système d'équations linéaires

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda g(x) + \mu & = & \alpha \\ \lambda g(y) + \mu & = & \beta \end{array} \right.$$

Ce système a pour déterminant

$$\det S = g(x) - g(y) \neq 0$$

il est donc inversible et admet une solution.

On vérifie que l'application

$$t \longmapsto \lambda g(t) + \mu$$

convient et est dans $\mathcal{A}$. $\square$

Lemme 2 : Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre unitaire de $C(K, \mathbf{R})$ séparant les points, soient $\varphi \in C(K, \mathbf{R})$ et $\varepsilon > 0$,

alors $\forall x \in K,\ \exists f_x \in \overline{\mathcal{A}}$ telle que

$$\begin{cases} f_x(x) = x \\ \forall x \in K,\ f_x(z) > \varphi(x) - \varepsilon. \end{cases}$$

Démonstration

Soit $x \in K$, on sait, d'après le lemme précédent que pour $y \in K$, il existe $f^y \in \mathcal{A}$ telle que

$$f^y(x) = \varphi(x) \text{ et } f^y(y) = \varphi(y).$$

(on considère ici que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, si ce n'est pas le cas, on prend $f^y = \varphi(x)$)
Par continuité de f^y et de φ, il existe des voisinages V^y de y tels que

$$\forall z \in V^y,\ f^y(z) > \varphi(z) - \varepsilon.$$

La famille $(V^y)_{y \in K}$ est un recouvrement par ouverts du compact K donc il existe une numérotation des y telle que

$$K = \bigcup_{i=1}^{p} V^{y_i}.$$

Soit

$$f_x := \sup\left\{f^{y_1}, \cdots, f^{y_p}\right\}$$

$f_x \in \overline{\mathcal{A}}$ et par définition des f^y, on a $f_x(x) = \varphi(x)$. De plus,

$$\forall z \in K, \exists i \in [\![1, p]\!] \mid z \in V^{y_p}$$

donc

$$f_x(z) \geqslant f^{y_i}(z) > \varphi(x) - \varepsilon.$$

$\square$

Lemme 3 : Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre unitaire de $C(K, \mathbf{R})$ séparant les points, soit $\varphi \in \overline{\mathcal{A}}$ et $\varepsilon > 0$,

alors il existe $f \in \overline{\mathcal{A}}$ telle que $||f - \varphi||_\infty < \varepsilon$.

Démonstration

Soit $x \in K$ et f_x telle que décrite dans le lemme 2. Puisque f_x et φ sont continues, il existe un voisinage V_x de x tel que

$$\forall x \in V_x,\ f_x(z) < \varphi(z) + \varepsilon.$$

La famille $(V_x)_{x \in K}$ est un recouvrement par ouverts du compact K, donc il existe une numérotation des x telle que

$$K = \bigcup_{i=1}^{m} V_{x_i}.$$

Soit
$$f := \text{int}\{f_{x_1}, \cdots, f_{x_m}\}$$
$f \in \overline{\overline{\mathcal{A}}} = \overline{\mathcal{A}}$ et comme dans la démonstration du lemme précédent,

$$\forall z \in K,\ f(z) < \varphi(z) + \varepsilon \qquad (i).$$

Par ailleurs, tous les f_x vérifient aussi

$$\forall z \in K, \forall x_i \mid f_{x_i}(z) > \varphi(z) - \varepsilon$$

chacun des f_{x_i} est supérieur à $\varphi - \varepsilon$, par passage à l'inf on a

$$\forall z \in K,\ f(z) > \varphi - \varepsilon \qquad (ii).$$

En combinant (i) et (ii), on obtient l'encadrement suivant :

$$\forall z \in K,\ \varphi(z) - \varepsilon < f(z) < \varphi(z) + \varepsilon$$

autrement dit
$$||f - \varphi||_\infty < \varepsilon.$$

□

On peut enfin prouver le théorème :

Démonstration

Soient $\varphi \in C(K, \mathbf{R})$ et $\varepsilon > 0$, d'après le lemme 3, il existe $f \in \overline{\mathcal{A}}$ telle que

$$||f - \varphi|| < \varepsilon/2.$$

Puisque $f \in \overline{\mathcal{A}}$, il existe $g \in \mathcal{A}$ telle que

$$||fg|| < \varepsilon/2$$

donc

$$\begin{aligned} ||\varphi - g|| &= ||(\varphi - f) + (f - g)|| \\ &\leqslant ||\varphi - f|| + ||f - g|| \\ &\leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

et $\mathcal{A}$ est bien dense dans $C(K, \mathbf{R})$. □

Corollaire 1 : Soient $a < b \in \mathbf{R}$,

alors $\mathbf{R}[X]$ est dense dans $C([a, b], \mathbf{R})$.

Démonstration

Vérifier que $\mathbf{R}[X]$ est une sous-algèbre unitaire de $C([a, b], \mathbf{R})$ qui sépare les points (le polynôme identité convient pour la séparation). □

On peut même expliciter un (il n'y a pas unicité de l'approximation) polynôme convenable, soit $f \in C([0, 1], \mathbf{R})$, alors

$$B_n(f)(X) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} X^i (1 - X)^{n-i}$$

est une suite de polynômes convergeant uniformément sur $[0,1]$ vers f.

ce résultat est faux sur tout $\mathbf{R}$ entier, puisque si il existe P_n une suite de polynômes convergeant uniformément vers $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$, alors f est polynômiale.

Démonstration

Puisque P_n CVU vers f, il existe N tel que

$$\forall n \geqslant N,\ ||P_N - f||_\infty \leqslant 1$$

donc, par inégalité triangulaire,

$$\forall n \geqslant N,\ ||P_N - P_n||_\infty = ||(P_N - f) + (f - P_n)||_\infty \leqslant 2$$

Les seuls polynômes bornés sont des constantes, donc

$$\forall n \geqslant N,\ \exists \lambda_n \mid Pn - P_N = \lambda_n.$$

On évalue cette expression en 0 et on trouve que

$$\lambda_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(0) - P_N(0) =: \lambda_\infty.$$

Donc

$$P_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} P_N + \lambda_\infty$$

et par unicité de la limite,

$$f = P_N + \lambda_\infty.$$

□

ce résultat est aussi faux sur $\mathbf{C}$ si la sous-algèbre considérée n'est pas stable par conjugaison.

Démonstration

On considère l'application $f : z \longmapsto \overline{z}$,
$\mathbf{C}[X]$ est bien une sous-algèbre unitaire de $C(\mathbf{U}, \mathbf{C})$ qui sépare les points, donc si le théorème de Stones-Weierstraß est vrai, alors $\mathbf{C}[X]$ est dense dans $C(\mathbf{U}, \mathbf{C})$, alors il existe $P_n \in \mathbf{C}[X]$ convergeant uniformément vers f.
On a

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{int}\mathrm{e}^{it}\mathrm{d}t = 0$$

donc par linéarité de l'intégrale,

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \int_0^{2\pi} P_n\left(\mathrm{e}^{it}\right)\mathrm{e}^{it}\mathrm{d}t = 0$$

par convergeance uniforme des P_n vers f, on a aussi

$$\int_0^{2\pi} f\left(\mathrm{e}^{it}\right)\mathrm{e}^{it}\mathrm{d}t = 0$$

or on peut calculer

$$\int_0^{2\pi} f\left(\mathrm{e}^{it}\right)\mathrm{e}^{it}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-it}\mathrm{e}^{it}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1\mathrm{d}t = 2\pi.$$

c'et absurde donc le théorème est effectivement faux sur $\mathbf{C}$. □

Définition : Une partie P de $\mathbf{C}$ est dite *stable par conjugaison* si, et seulement si

$$x \in E \Rightarrow \overline{x} \in E.$$

Théorème 4 (*Stones-Weierstraß, cas complexe*) **:** Soit (K, d) un espace métrique compact, $\mathcal{A}$ une sous-algèbre unitaire de $C(K, \mathbf{C})$ qui sépare les points et est stable par conjugaison,

alors $\mathcal{A}$ est dense dans $C(K, \mathbf{C})$.

Démonstration

Soit $f \in C(K, \mathbf{C})$, on pose

$$\mathcal{A}_{\mathbf{R}} := A \cap C(K, \mathbf{R}),$$

c'est une sous-algèbre unitaire de $C(K, \mathbf{R})$ et, grâce à la stabilité par conjugaison,

$$\Re\, f = \frac{f + \overline{f}}{2} \text{ et } \Im\, f = \frac{f - \overline{f}}{2}$$

sont tous deux dans $\mathcal{A}_{\mathbf{R}}$.
Vérifions que $\mathcal{A}_{\mathbf{R}}$ sépare les points, soit $(x, y) \in \mathbf{C}$ distincts, puisque $\mathcal{A}$ sépare les points, il existe $\varphi \in \mathcal{A}$ telle que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, donc soit

$$\Re\varphi(x) \neq \Re\varphi(y)$$

soit

$$\Im\varphi(x) \neq \Im\varphi(y)$$

et $\mathcal{A}_{\mathbf{R}}$ sépare aussi les points. On applique donc le théorème de Stone-Weierstraß, cas réel à $\Re\, f$ et $\Im\, f$, on fixe $\varepsilon > 0$ et il existe $(g, h) \in \mathcal{A}_{\mathbf{R}}$ tels que

$$\begin{cases} ||g - \Re\, f||_\infty < \varepsilon/2 \\ ||h - \Im\, f||_\infty < \varepsilon/2. \end{cases}$$

On pose

$$\varphi := g + ih \in \mathcal{A}$$

et on a alors

$$\begin{aligned} ||f - \psi||_\infty &= ||\Re\, f + i\Im\, f - g - ih||_\infty \\ &\leqslant ||g - \Re\, f||_\infty + ||h - \Im\, f||_\infty \\ &\leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

et ψ CVU vers f, donc $\mathcal{A}$ est dense dans $C(K, \mathbf{C})$. □

Corollaire 1 (*Féjer*) **:** L'ensemble

$$\{z \longmapsto z^n,\ n \in \mathbf{Z}\}$$

est dense dans $C(\mathbf{U}, \mathbf{C})$

Démonstration

On vérifie que le théorème de Stone-Weierstraß, cas complexe s'applique. □

Un polynôme trigonométrique est une application de la forme

$$P : t \longmapsto \sum_{k \in [\![-N,N]\!]} c_k \mathrm{e}^{ikt}$$

où les c_k sont des coefficents complexes.
En passant à la forme trigonométrique de e^{ikt}, on peut ré-écrire P comme

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{k \in [\![-N,N]\!]} c_k \left[\cos(kt) + i\sin(kt)\right] \\ &= \sum_{k \in [\![-N,N]\!]} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt). \end{aligned}$$

Corollaire 2 : Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ continue et 2π-périodique,

alors il existe une suite de polynômes trigonométriques convergeant uniformément vers f.

Démonstration

il suffit de constater que

$$C_{2\pi}(\mathbf{R}) \simeq C(\mathbf{U})$$

via l'application

$$\varphi : f \in C_{2\pi}(\mathbf{R}) \longmapsto \tilde{f}(t) := f(\mathrm{e}^{it}) \in C(\mathbf{U}).$$

□

4 Espaces séparables

Définition : (E,d) est dit séparable si, et seulement si il existe $A \subset E$ dénombrable et dense dans E.

On rappelle que A est dénombrable si, et seulement si A est fini ou $A \simeq \mathbf{N}$.
▷*ex :* $\mathbf{R}$ est séparable car $\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$ et $\mathbf{Q} \simeq \mathbf{N}^2 \simeq \mathbf{N}$.
On montre (en TD) que tout espace vectoriel de dimension finie est séparable. On a même la propriété suivante, qui est une version un peu plus forte :

Propriété 5 : Soit (E,d) un espace vectoriel normé, on suppose qu'il existe une famille $(e_n) \in E$ telle que

$$\overline{\mathrm{Vect}(e_i,\ i \in \mathbf{N})} = E$$

alors E est séparable.

Démonstration

Idée de la preuve : il s'agira de montrer que

$$\left\{ \sum i \in I \lambda_i e_i,\ \lambda_i \in \mathbf{Q},\ I \subset \mathbf{N} \text{ finie} \right\}$$

est dense et dénombrable. □

Propriété 6 : Soit (E,d) et $(O_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'ouverts deux à deux disjoints,

alors si E est séparable, I est dénombrable.

▷ *ex :* soit $1 \leqslant p < \infty$, on rappelle que

$$\ell^p := \left\{ x : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{C} \mid \sum_{n\in\mathbf{N}} |x(n)|^p < \infty \right\}$$

muni de la norme

$$|| \cdot ||_p : x \in \ell^p \longmapsto \left(\sum_{n\in\mathbf{N}} |x(n)|^p \right)^{1/p}$$

est un espace (vectoriel normé) séparable.

Démonstration

Soit $e_n = \mathbf{1}_{\{n\}} = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ où le 1 est en n-ème position et soit $x_n \in \ell^p$, alors

$$\left\| u - \sum_{i=1}^{N} x_i e_i \right\|_p = \left(\sum_{i=N+1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui montre que (puisque chaque e_n est dans ℓ^p

$$\overline{\mathrm{Vect}(e_i,\ i \in \mathbf{N})} = \ell^p$$

donc ℓ^p est bien séparable. □

Lemme 1 : Soit (K,d) compact,

alors K est séparable.

Démonstration

Soit $n \geqslant 1$, on a
$$K = \bigcup_{x\in K} B(x, 1/n)$$
par compacité de K, on peut numéroter ces boules donc
$$K = \bigcup_{i=1}^{N_n} B(x_j^n 1/n)$$
et l'ensemble
$$\mathcal{D} := \left\{x_j^n,\ 1 \leqslant j \leqslant N_n,\ n \in \mathbf{N}\right\}$$
est dénombrable, montrons qu'il est dense,
soit $x \in K$, alors
$$\forall n \in \mathbf{N},\ x \in \bigcup_{i=1}^{N_n} B(x_i^n, 1/n)$$
autrement dit,
$$\forall n \in \mathbf{N},\ \exists i_n \in [\![1, N_n]\!] \mid x \in B(x_{i_n}^n, 1/n)$$
puisque le rayon de la boule tend vers 0 quand $n \to +\infty$, on peut écrire
$$x_{i_n}^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$$
ce qui montre que $\mathcal{D}$ est bien dense dans K, et K est séparable. □

Lemme 2 : Soit (K,d) compact,

alors $C(K,\mathbf{R})$ est séparable.

Démonstration

K est compact, donc d'après le lemme précédent, il existe $\{a_n\}$ une suite dense dans K. Pour $n \geqslant 1$, on pose
$$f_n : t \longmapsto d(a_n, t),$$
les applications f_n sont continues et on pose $f_0 := 1$.
On considère l'ensemble $\mathcal{A}$ définit comme suit :
$$\mathcal{A} := \text{Vect}\left(\prod_{i\in I} f_i,\ I \text{ finie}\right)$$
c'est une sous-algèbre unitaire et on va montrer que $\mathcal{A}$ sépare les points.
Soient $(t_1,t_2) \in K$ distincts, alors $\varepsilon := d(t_1,t_2) > 0$. Par densité des $\{a_n\}$ dans K, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que
$$d(t_1, a_n) < \varepsilon/2$$
donc
$$f_n(t_1) = d(a_n, t_1) < \varepsilon/2$$

et de plus,

$$\begin{aligned} f_n(t_2) &= d(t_2, a_n) \\ &\geqslant d(t_2, t_1) - d(t_1, a_n) \\ &> \varepsilon - \varepsilon/2 \\ f_n(t_2) &> \varepsilon/2 \end{aligned}$$

donc $\mathcal{A}$ sépare les points, ce qui nous permet d'appliquer le théorème de Stone-Weierstraß, donc $\mathcal{A}$ est dense dans $C(K, \mathbf{R})$, donc $C(K, \mathbf{R})$ est séparable. $\square$

5 Théorème d'Ascoli

Le fil directeur de cette partie est la question suivante : peut-on caractériser les partie compacte de $C(K)$?

Définition : Soit $\mathcal{F} \in C(K)$,
$\mathcal{F}$ est dite *équicontinue en x* si, et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ \forall f \in \mathcal{F}, \forall y \in B(x, \delta) \cap K,\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

$\mathcal{F}$ est dite *équicontinue* si, et seulement si $\mathcal{F}$ est équicontinue en tout point de K.

▷*ex :* pour $\ell > 0$, l'ensemble des fonctions ℓ-lipschitzienne forme une famille équicontinue.

Théorème 7 (*Ascoli, v1*) **:** Soient (K, d) un compact et $\mathcal{F} = \{f_n\}$ une famille dans $C(K)$, si,
($\bullet$) $\forall x \in K,\ (f_n(x))$ est une suite bornée de K,
($\bullet\bullet$) $\mathcal{F}$ est équicontinue,

alors il existe une sous-suite des f_n qui converge uniformément dans $C(K)$.

Démonstration

Puisque K est un compact, il est séparable et il existe une famille $\mathcal{D} = \{a_n\}$ dense dans K.
Par hypothèse, la suite $(f_n(a_0))$ est bornée, donc on peut en extraire une sous-suite convergente, donc il existe $\varphi_0 : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante telle que $\left(f_{\varphi_0(n)}(a_0)\right)_n$ converge.
De même, la suite $\left(f_{\varphi_0(n)}(a_1)\right)_n$ est bornée donc admet un extractrice φ_1 telle que $\left(f_{\varphi_0 \circ \varphi_1(n)}(a_1)\right)_n$ converge.
Par récurrence, on va construire les itérations succssives de φ_n comme suit, autrement dit

$$\forall k \in \mathbf{N},\ \left(f_{\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_k(n)}(a_k)\right)_n \text{ converge}$$

Soit $\varphi : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \varphi(n) = \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(n).$$

Vérifions, par récurrence, que φ est strictement croissante.
$\star$ pour $n = 1$, on a (par croissante stricte de φ_1 et φ_0) $\varphi(1) = \varphi_1(\varphi_0(0)) > \varphi(0)$.
$\star$ Soit $n \in \mathbf{N}$,

$$\varphi(n+1) = \varphi_{n+1}(\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(n+1))$$

et puisque $\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n$ est strictement croissante, $\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(n+1) > \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(n)$ et en composant par φ_{n+1}, on trouve bien

$$\varphi(n+1) > \varphi(n)$$

ce qui conclut la récurrence.
Donc $\left(f_{\varphi(n)}\right)$ est une sous-suite de f_n telle que

$$\forall k \in \mathbf{N},\ \left(f_{\varphi(n)}(a_k)\right) \text{ converge}$$

puisque

$$\forall n \geqslant k,\ \left(f_{\varphi(n)}(a_k)\right) = \left(f_{\varphi_{k+1} \circ \cdots \circ \varphi_n(\varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_k(n))}(a_k)\right)$$

où la suite $\varphi_{k+1} \circ \cdots \circ \varphi_n$ est strictement croissante.

Soit $\varepsilon > 0$, par équicontinuité des f_n, pour tout $z \in K$, il existe $\delta_z > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall u \in B(z, \delta_z),\ \left| f_{\varphi(n)}(u) - f_{\varphi(n)}(z) \right| \leqslant \varepsilon$$

par inégalité triangulaire,

$$\forall (u, v) \in B(z, \delta_z), \left| f_{\varphi(n)}(u) - f_{\varphi(n)}(v) \right| \leqslant \varepsilon \qquad (i).$$

On peut écrire K comme

$$K = \bigcup_{z \in K} B(z, \delta_z)$$

par compacité de K, on a

$$K = \bigcup_{j=1}^{N} B(z_j, \delta z_j).$$

Par densité de $\mathcal{D}$ dans K, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe un $a_{n_j} \in \mathcal{D}$ tel que

$$a_n \in B(z_j, \delta_{z_j})$$

où a_n est tel que $\left(f_{\varphi(n)}(a_{n_j}) \right)_{n \geqslant 0}$ converge donc est de Cauchy, donc $\exists N_j$ tel que

$$\forall p, q \geqslant N_j,\ \left| f_{\varphi(q)}(a_{n_j}) - f_{\varphi(p)}(a_{n_j}) \right| \leqslant \varepsilon \qquad (ii).$$

Soit $x \in K$, $\exists z_j \in K$ tel que $x \in B(z_j, \delta_{z_j})$ et $\exists a_{n_j} \in \mathcal{D}$ tel que $a_{n_j} \in B(z_j, \delta_{z_j})$, donc les hypothèses de l'inégalité (i) sont valides et

$$\forall n \geqslant 1, \left| f_{\varphi(n)}(x) - f_{\varphi(n)}(a_{n_j}) \right| \leqslant 2\varepsilon$$

pour $p, q \geqslant \max\{N_j,\ j \in [\![1, N]\!]\}$

$$\begin{aligned} \left| f_{\varphi(q)}(x) - f_{\varphi(p)}(x) \right| &\leqslant \underbrace{\left| f_{\varphi(q)}(x) - f_{\varphi(q)}(a_{n_j}) \right|}_{\leqslant 2\varepsilon \text{ d'après } (i)} + \underbrace{\left| f_{\varphi(q)}(a_{n_j}) - f_{\varphi(p)}(a_{n_j}) \right|}_{\leqslant \varepsilon \text{ d'après } (ii)} + \underbrace{\left| f_{\varphi(q)}(a_{n_j}) - f_{\varphi(p)}(x) \right|}_{\leqslant 2\varepsilon \text{ d'après } (i)} \\ &\leqslant 2\varepsilon + \varepsilon + 2\varepsilon \\ \left| f_{\varphi(q)}(x) - f_{\varphi(p)}(x) \right| &\leqslant 5\varepsilon \end{aligned}$$

par passage au sup, $||f_{\varphi(q)} - f_{\varphi(p)}|| \leqslant 5\varepsilon$, donc la suite $f_{\varphi(n)}$ est de Cauchy à valeurs dans le complet $C(K)$, donc est convergente. □

Définition : Une partie $A \subset X$ de l'espace topologique X est *relativement compacte* si, et seulement si elle est inclue dans une partie compacte de X.

Si X est séparé, alors A est relativement compacte si, et seulement si $\overline{A}$ est compacte.

Théorème 8 (*Ascoli, v2*) **:** Soit (K, d) compact,

(1) les partie compactes de $C(K)$ sont exactement les parties fermées, bornées et équicontinues de $C(K)$,
(2) les parties relativement compactes de $C(K)$ sont exactement les parties bornées et équicontinues.

Démonstration

⋆ Soit $\mathcal{F} \subset C(K)$ compacte fermée et bornée, montrons que cette famille est équicontinue.
Soit $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} K &= \bigcup_{f \in \mathcal{F}} B(f, \varepsilon) \\ &= \bigcup i = 1^N B(f_n, \varepsilon) \end{aligned}$$

Pour $i \in [\![1, N]\!]$, pour $z \in K$, par continuité de f_i, $\exists \delta_{z,i} > 0$ tel que

$$\forall u \in B(z, \delta_{z,i}), \ \left|f_i' u) - f_i(z)\right| < \varepsilon \qquad (i)$$

On pose

$$\delta_z := \min\{\delta_{z,i}, \ i \in [\![1, N]\!]\} > 0.$$

Soit $f \in \mathcal{F}$, donc

$$\exists i \in [\![1, N]\!] \text{ t.q. } ||f - f_i||_\infty < \varepsilon \qquad (ii)$$

soit $i \in [\![1, N]\!]$, $u \in B(z, \delta_z) \subset B(z, \delta_{z,i})$, on a

$$\begin{aligned} |f(u) - f(z)| &\leqslant \underbrace{|f(u) - f_i(u)|}_{\leqslant \varepsilon \text{ d'après } (i)} + \underbrace{|f_i(u) - f_i(z)|}_{\leqslant \varepsilon \text{ d'après } (2)} + \underbrace{|f_i(z) - f(z)|}_{\leqslant \varepsilon \text{ d'après } (i)} \\ &\leqslant 3\varepsilon \end{aligned}$$

donc $\mathcal{F}$ est équicontinue.

⋆ Réciproquement, si on prend $F \subset C(K)$ fermée bornée équicontinue, montrons que $\mathcal{F}$ est compacte.
Soit $(f_n) \in \mathcal{F}$, c'est une famille bornée et équicontinue donc d'après le théorème d'Ascoli, elle admet une sous-suite convergente, qui appartient à $\mathcal{F}$ car c'est un fermé, donc F vérifie la propriété de Weierstraß, c'est un compact. □

Démonstration

Se déduit de la proposition précédente en considérant la fermeture de $\mathcal{F}$. □

Théorème 9 (*Ascoli, v3*) **:** Soit (E, d) séparable, (F, δ) métrique et $f_n \in C(E, F)$, si
(•) $\forall x \in E, \ \{f_n(x)\}_{n \geqslant 0}$ est relativement compacte dans F,
(••) $\{f_n\}$ est une famille équicontinue,

alors f_n admet une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact de E vers une application continue.

Le théorème suivant découle du théorème d'Ascoli, et est quant à lui censé avoir plein d'applications :

Théorème 10 (*Ascoli-Arzèla-Peano*) **:** soit $t_0 \in \mathbf{R}, \ x_0 \in \mathbf{R}^n, (a, r) > 0$, on pose

$$K := [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B(x_0, r)}$$

(qui est compact car fermé borné de R^{n+1})
on prend $f : K \longrightarrow \mathbf{R}^n$ continue, on pose

$$M := \sup_{(x,t) \in K} ||f(x, t)|| \text{ et } c := \min(a, {}^a\!/_r).$$

Enfin on considère le problème de Cauchy suivant

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & f(t,x(t)) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array}\right.$$

alors le problème admet une solution $x : [t_0 - a, t_0 + a] \longrightarrow \overline{B(x_0, r)}$

Démonstration

Le principe va être de discrétiser $[t_0, t_0 + c]$ puis de construire selon la méthode d'Euleur une suite de fonction qui vérifie cette discrétisation.
Puis on appliquera le théorème d'Ascoli pour montrer que cette suite de fonction CVU vers une fonction, qui sera solution du problème.

$\star$ On considère une subdivision de $[t_0, t_0+c]$, de pas $h := {}^{c}/_{n+1}$, donc $\forall i \in [\![0, n]\!],\ t_i = t_0 + i\frac{c}{n+1}$.
On a alors (méthode d'Euler)

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, x(t))\mathrm{d}t.$$

On construit par récurrence les points x_i tels que

$$x_{i+1} = x_i + \frac{c}{n+1} f(t, x_i)$$

On montre alors

$$||x_i - x_0|| \leqslant i\frac{cM}{n+1}.$$

Pour $t \in [t_i, t_{i+1}]$, on pose

$$X_n(t) := a_i t + b_i$$

où les a_i et b_i sont tels que

$$\left\{\begin{array}{rcl} X_n(t_i) & = & x_i \\ X_n(t_{i+1}) & = & x_{i+1} \end{array}\right.$$

Ainsi on a

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_i & = & \frac{x_{i+1}-x_i}{t_{i+1}-t_i} \\ b_i & = & x_i - a_i t_i \end{array}\right.$$

Chaque x_n est continue sur son $[t_0, t_0 + c]$, et de pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}]$, x_n y est dérivable et

$$X_n'(t) = a_i = \frac{{}^{c}/_{n+1} f(t_i, x_i)}{{}^{c}/_{n+1}} = f(t_i, x_i)$$

donc

$$\sup_{t \in]t_i, t_{i+1}[} ||X_n'(t)|| \leqslant M$$

donc (inégalité des accroissements finis) les (x_n) forment une famille M-lipschitzienne donc équicontinue.
On a aussi

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbf{N},\ t \in [t_0, t_0 + c],\ ||X_n(t) - x_0|| &= ||X_n(t) - X_n(t_0)|| \\ &\leqslant M|t - t_0| \\ &\leqslant \\ ||X_n(t) - x_0|| &\leqslant r \end{aligned}$$

Donc $X_n(t) \in \overline{B(x_0, r)}$ qui est un fermé bornée de $\mathbf{R}^n$, donc compact. Ainsi, $\forall t \in [t_0, t_0 + c]$, $\{X_n(t)\}_{n \geqslant 0}$ est relativement compact dans $\mathbf{R}^n$.
D'après le théorème d'Ascoli (quitte à considérer une sous-suite, ce qu'on ne fait pas pour alléger les notations), (X_n) CVU vers $X : [t_0, t_0 + c] \longrightarrow \overline{B(x_0, r)}$, où X est continue.
Soit $t \in [t_i, t_{i+1}]$,

$$\begin{aligned} ||X_n(t) - f(t, X_n(t))|| &= ||f(ti_, x_i) - f(t, X_n(t))|| \\ &\leqslant \omega \frac{(M+1)c}{n+1} \end{aligned}$$

où

$$\omega := \sup \{||(t, x) - t(u, y), \ |t - u| < \delta, ||x - y|| < \delta\} < \infty$$

avec $\delta > 0$ Donc

$$X_n(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(u, X_n(u)) \mathrm{d}u \leqslant \omega_f c \frac{M+1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc

$$X(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, X_n(u) \mathrm{d}u$$

autrement dit, X est solution. □

Deuxième partie
Théorèmes fondamentaux de l'analyse fonctionnelle

1 Théorème de Baire

On rappelle le théorème suivant, déjà vu en topologie de L3 :

Théorème 1 (*des fermés emboités :*) **:** Soit (E, d) un espace métrique complet, F_n une suite de fermés non-vide de E, si

$$\forall n \in \mathbf{N},\ F_{n+1} \subset F_n$$

et

$$\text{diam } F_n = \sup\{d(a,b),\ (a,b) \in\ F_n\} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

alors $\bigcap_{n\geqslant 0} F_n$ est un singleton.

Démonstration

Pour $n \in \mathbf{N}$, soit $x(n) \in F_n$, pour $p < q$, on a $x_q \in F_q \subset F_p$ donc

$$d(x_p, x_q) \leqslant \text{diam } F_q \leqslant \text{diam } F_p \longrightarrow 0$$

et les x_n sont une suite de Cauchy dans E qui est complet, donc $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \in E$.
Pour tout $m \geqslant n$, $x_n \in F_m \subset F_n$ donc (F_n étant fermé) $x \in F_n$ donc

$$x \in \bigcap_{n\geqslant 0} F_n.$$

De plus, pour $(a,b) \in \bigcap F_n$,

$$d(a,b) \leqslant \text{diam } F_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $\bigcap_{n\geqslant 0} F_n$ est un singleton, ce qui conclut. □

Théorème 2 (*de Baire, v1*) **:** Soit (E, d) métrique complet, soit (O_n) une suite d'ouverts denses dans E,

alors $\bigcap_{n\geqslant 0} O_n$ est dense dans E.

on a une autre version, où on parle de fermés :

Théorème 3 (*de Baire, v2*) **:** Soit (E, d) métrique complet, soit (F_n) une suite de fermés d'intérieurs non-vides dans E,

alors $\bigcup_{n\geqslant 0} F_n$ est d'intérieur vide.

Démonstration

Soit O_n une suite d'ouverts, tous denses, soit Ω un ouvert de E, il s'agit de montrer que

$$\Omega \cap \bigcap_{n \geqslant 0} O_n \neq \emptyset.$$

O_0 est un ouvert dense dans E, donc

$$\Omega \cap O_0$$

est un ouvert non-vide et l'on peut prendre $x_0 \in E,\ r_0 \in]0,1[$ tels que

$$\overline{B(x_0, r_0)} \subset \Omega \cap O_0.$$

O_1 est un ouvert dense dans E donc

$$O_1 \cap B(x_0, r_0)$$

est un ouvert non-vide et l'on peut prendre $x_1 \in E,\ r_1 \in]0, 1/2[$ tels que

$$\overline{B(x_1, r_1)} \subset O_1 \cap B(x_0, r_0) \subset \Omega \cap_0 \cap O_1.$$

On va construire par récurrence les $B_n = B(x_n, r_n)$ tels que

$$\overline{B_{n+1}} \subset B_n,\ r_n \leqslant 1/2^n \text{ et } \overline{B_n} \subset \Omega \cap O_n.$$

$\left(\overline{B_n}\right)$ est une suite décroissante de fermés dont le diamètre tend vers 0, donc le théorème des fermés emboîtés s'applique et $\bigcap_{n \geqslant 0} \overline{B_n} \neq \emptyset$ et puisque $\overline{B_n} \subset \Omega \cap O_n$, alors

$$\Omega \cap \bigcap_{n \geqslant 0} O_n \neq \emptyset,$$

autrement dit, $\bigcap_{n \geqslant 0} O_n$ est dense dans E. □

On passe maintenant à la v2, *i.e.* la formulation avec des fermés. Il va suffire pour ça de "passer" des fermés à des ouverts, puis d'appliquer la première version du théorème.

Démonstration

Soit F_n une suite de fermés d'intérieurs non vides, on pose

$$O_n := E \backslash F_n$$

qui est une suite d'ouverts et

$$\overline{O_n} = \overline{E \backslash F_n} = E \backslash \text{int } F_n = E$$

on peut donc appliquer la première version du théorème de Baire et $\bigcap_{n \geqslant 0} O_n$ est dense dans E donc

$$\text{int} \bigcup_{n \geqslant 0} F_n = \text{int } E \backslash \bigcap_{n \geqslant 0} O_n = E \backslash \overline{\bigcap_{n \geqslant 0} O_n} = \emptyset.$$

□

rq : si l'on écrit $\mathbf{Q}$ (qui est dénombrable) sous la forme

$$\mathbf{Q} = (r_n)_{n \in \mathbf{N}}$$

et que l'on choisit comme collection d'ouverts les

$$O_n := \mathbf{R} \backslash \{r_n\}$$

qui sont tous des ouverts denses dans $\mathbf{R}$, on a alors

$$\begin{aligned}\bigcap_{n\geqslant 0} O_n &= \bigcap_{n\geqslant 0} R\backslash\{r_n\}\\ &= \mathbf{R}\backslash\bigcup_{n\geqslant 0}\{r_n\}\\ &= \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}\end{aligned}$$

qui n'est pas un ouvert.
rq bis : le théorème n'est pas valide pour une réunion non-dénombrable, si l'on pose par exemple

$$O_x := \mathbf{R}\backslash\{x\}$$

alors

$$\bigcap_{x\in R} O_x = \emptyset$$

qui n'est pas dense dans $\mathbf{R}$.
rq ter : petit rappel de topologie, pour E un espace topologique et $X \subset E$, on a

$$\text{int } E\backslash X = E\backslash\overline{X}.$$

Démonstration

$\star$ Soit $x \in \text{int } E\backslash X$, donc il existe un voisinage V de x tel que

$$x \in V \subset E\backslash X$$

donc $V \cap X = \emptyset$, autrement dit $x \notin \overline{X}$, donc $x \in E\backslash\overline{X}$.
$\star$ Réciproquement, soit $x \in E\backslash\overline{X}$, puisque $\overline{X}$ est un fermé, $E\backslash\overline{X}$ est un ouvert donc il existe un voisinage U de x tel que

$$x \in V \subset E\backslash\overline{X} \subset E\backslash X$$

donc x est intérieur à $X \subset E\backslash X$, ce qui conclut. □

Corollaire 1 : Soit (E, d) métrique complet et (F_n) une suite de fermées tels que

$$\bigcup_{n\geqslant 0} F_n = E,$$

alors $\Omega := \bigcup_{n\geqslant 0} \text{int } F_n$ est un ouvert dense dans E, donc à fortiori il existe au moins un int $F_{n_0} \neq \emptyset$.

Démonstration

On a l'équivalence suivante

$$\Omega \text{ dense } \Leftrightarrow E\backslash\Omega \text{ d'intérieur vide}$$

on remarque que

$$\begin{aligned}E\backslash\Omega &= \bigcup k \geqslant 0 F_n\backslash\bigcup_{n\geqslant 0} \text{int } F_n\\ &\subset \bigcup_{k\geqslant 0} F_k\backslash\text{int } F_k.\end{aligned}$$

Et $\partial F_k = F_k\backslash\text{int } F_k$ est un fermé d'intérieur vide, donc le théorème de Baire s'applique et

$\bigcup k \geqslant 0 \partial F_k$ est d'intérieur vide, donc $E \backslash \Omega$ est aussi d'intérieur vide, donc d'après l'équivalence du début, Ω est bien dense dans E. □

▷ *ex :* soient (E, d) complet, $f_n : E \longrightarrow \mathbf{R}$ une suite de fonctions continues et f la limite simple des f_n, alors

$$\text{cont } f := \{x \in E \mid f \text{ est continue en } x\}$$

est dense dans E.

Démonstration

Soit $n, k \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$, on définit

$$\begin{aligned} F_n^k :&= \{x \in E \text{ t.q. } \forall p, \geqslant n,\ |f_p(x) - f_q(x) < 1/k\} \\ &= \bigcap_{p,q \geqslant n} (f_p - f_q)^{-1} ([-1/k, 1/k]) \end{aligned}$$

Chacun des F_n^k est fermé en tant que pré-image d'un fermé par une application continue.
De plus, pour $k \in \mathbf{N}^*$ et $x \in E$, $f_n(x)$ converge donc est de Cauchy donc appartient à au moins un F_n^k, ainsi $E = \bigcup_{n \geqslant 0} F_n^k$.
D'après le corollaire du théorème de Baire, $O_k := \bigcup_{n \geqslant 0} \text{int } F_n^k$ est un ouvert dense dans E donc, en y ré-applicant le théorème de Baire,

$$\Omega := \bigcap_{k \geqslant 0} \bigcup_{n \geqslant 0} \text{int } F_n^k$$

est un dense dans E, montrons que $\Omega \subset \text{cont } f$.
Soit $x_0 \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$. Soit $k \geqslant 1$ tel que $1/k \leqslant \varepsilon$.
$x_0 \in \Omega$ donc en particulier $x_0 \in O_k = \bigcup_{n \geqslant 0} \text{int } F_n^k$, donc il existe n_0 tel que $x_0 \in \text{int } F_{n_0}^k$ et

$$\exists r > 0 \text{ t.q. } B(x_0, r) \subset \text{int } F_n^k \subset F_n^k$$

donc

$$\forall x \in B(x_0, r),\ \forall p \geqslant n_0,\ |f_p(x) - f_{n_0}(x)| \leqslant 1/k \geqslant \varepsilon.$$

Puisque $p \geqslant n_0$, on peut le faire tendre vers $+\infty$ et

$$\forall x \in B(x_0, r),\ |f(x) - f_{n_0}(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Par inégalité triangulaire, pour tout $x \in B(x_0, r)$, on a

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |(f(x) - f_{n_0}(x)) + (f_{n_0}(x_0) - f(x_0)) + (f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0))| \\ &\leqslant 2\varepsilon + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| \end{aligned}$$

f_{n_0} est continue en x_0 donc il existe $\tilde{r}$ tel que

$$\forall x \in B(x_0, \tilde{r}),\ |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| \leqslant \varepsilon$$

donc, en posant $R := \min(r, \tilde{r})$, on a

$$\forall x \in N(x_0, R),\ |f(x) - f(x_0)| \leqslant 3\varepsilon$$

donc f est continue en x_0, ainsi Ω est bien dense dans E, donc cont $f \supset \Omega$ est dense dans E
□

rq ***:*** si $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est dérivable, alors f' est continue sur un ensemble dense, puisque la suite de fonction

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \left(f\left(x - 1/n\right) - f(x) \right)$$

est une suite de fonctions continues qui CV vers f', ainsi l'exemple s'applique.

2 Quelques rappels sur les applications linéaires continues

X et Y sont deux espaces vectoriels normés, $T : X \longrightarrow Y$ est une application linéaire.

T est continue si, et seulement si $\exists c > 0$ tel que

$$\forall x \in X,\ ||Tx||_Y \leqslant c||x||_X.$$

On note

$$\mathcal{L}(X,Y) := \{T : X \longrightarrow Y \text{ linéaire continue}\}$$

Pour $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, on note

$$||T|| := \inf\{c > 0 \mid \forall x \in X,\ ||Tx|| \leqslant c||x||\}$$

on montre que cette définition est équivalente à

$$\begin{aligned} ||T|| &= \sup\{||Tx||,\ x \in X \mid ||x|| \leqslant 1\} \\ &= \sup\{||Tx||,\ x \in X \mid ||x|| = 1\} \\ &= \sup\left\{\frac{||Tx||}{||x||}, x \in X\backslash\{0\}\right\} \end{aligned}$$

on montre aussi que cette norme est *sous-multiplicative*, *i.e.*

$$\forall T \in \mathcal{L}(Y,Z),\ S \in \mathcal{L}(X,Y),\ ||TS|| \leqslant ||T|| \times ||S||$$

on généralise pour les itérations successives de T,

$$\forall n \in \mathbf{N},\ ||T^n|| = ||\underbrace{T \circ T \cdots \circ T}_{n \text{ fois}}|| \leqslant ||T||^n.$$

Propriété 4 : Soient (X,Y) deux espaces vectoriels normés, où Y est un Banach,

alors $\mathcal{L}(X,Y)$ est un Banach (*i.e.* un e.v.n. complet).

Démonstration

Soit (T_n) une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(X,Y)$, et soit $\varepsilon > 0$,

$$\exists n_0 \in \mathbf{N} \text{ t.q. } \forall p,q \geqslant n_0,\ ||T_p - T_p|| \leqslant \varepsilon$$

soient $x \in X,\ p,q \geqslant n_0$

$$||T_px - T_qx|| = ||\left(T_p - T_q\right)x|| \leqslant ||T_p - T_q||\ ||x|| \leqslant \varepsilon||x|| \qquad (i)$$

donc $(T_n(x))$ est une suite de Cauchy à valeurs dans Y, donc elle est convergente et on peut poser

$$T(x) := \lim_{n\to+\infty} T_n(x).$$

Montrons que T est bien linéaire, soient $(u,v) \in X,\ \lambda \in \mathbf{K}$,

$$\begin{aligned} T(\lambda u + v) &= \lim_{n\to+\infty} T_n(\lambda u + v) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \lambda T_n(u) + \lim_{n\to+\infty} T_n(v) \\ &= \lambda \lim_{n\to+\infty} T_n(u) + \lim_{n\to+\infty} T_n(v) \\ T(\lambda u + v) &= \lambda T(u) + T(v) \end{aligned}$$

donc T est bien linéaire et pour montrer la continuité de T, on fait tendre $p \to +\infty$ dans (i), on obtient alors

$$||T - T_q||\ ||x|| \leqslant \varepsilon ||x||$$

donc $T - T_p$ est continue, et puisque T_q est continue, donc T l'est et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. $\square$

Définition : Soit X, Y deux espaces vectoriels, un *opérateur compact* est une application continue (un *opérateur* continu donc) $T : X \longrightarrow Y$ tel que pour tout $A \in X$ borné, $T(A)$ est une partie relativement compacte de Y.
Si la topologie sur X est la topologie métrique habituelle, alors T est compact si, et seulement si $T(B(0,1))$ est une partie relativement compacte.

▷ *ex :* soient $-\infty < a < b < +\infty$ et $K : [a, b] \times [a, b] \longrightarrow \mathbf{C}$ continue. Pour $f \in C([a, b], \mathbf{C})$ et $x \in [a, b]$, on pose

$$T_K(f)(x) := \int_a^b K(x, y) f(y) \mathrm{d}y.$$

Vérifions que $T_K : C([a, b], \mathbf{C}) \longrightarrow C([a, b], \mathbf{C})$
$(x, y) \longmapsto K(x, y) f(y)$ est continue et l'on intègre des fonctions continues sur un segment, donc $T_K(f)$ est bien continue. Par linéarité de l'intégrale, T_K est aussi linéaire.
Soit $x \in [a, b]$,

$$|T_K(f)(x)| \leqslant ||K||_\infty (b - a)^2 ||f||_\infty = c||f||_\infty$$

avec $||f||_\infty < \infty$ car f est continue sur un segment, donc T_K est bien une application linéaire continue.
Montrons que T_K est compact, *i.e.* montrons que

$$T_K(\overline{B(0,1)})$$

est relativement compact dans $C([a, b], \mathbf{C})$.
On a

$$T_K(\overline{B(0,1)}) = \{T_K(f),\ f \in C([a, b], \mathbf{C}) \text{ t.q.} ||f||_\infty \leqslant 1\}.$$

Montrons que la famille

$$\left\{T_K(f),\ f \in \overline{B(0,1)}\right\}$$

est équicontinue, soit $\varepsilon > 0$ et $x \in [a, b]$, alors pour tout $z \in [a, b]$

$$T_K(f)(x) - T_K(f)(z) = \int_a^b [K(x, y) - K(z, y)] f(y) \mathrm{d}y \qquad (i)$$

K est continue sur le compact $[a, b] \times [a, b]$ donc K est équicontinue et il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall (x, z) \in [a, b] \times [a, b],\ |x - z| \leqslant \delta \Longrightarrow \forall y \in [a, b],\ |K(x, y) - K(z, y)| \leqslant \varepsilon$$

soit $y \in B(x, \delta)$, d'après (i) on a

$$\begin{aligned} |T_K(f)(x) - T_K(f)(z)| &\leqslant \varepsilon \int_a^b |f(y) \mathrm{d}y \\ &\leqslant \varepsilon ||f||_\infty (b - a) \\ &\leqslant \varepsilon (b - a) \end{aligned}$$

on va donc change de δ, on va prendre le $\tilde{\delta}$ définie à partir de ${}^{\varepsilon}/_{b-a}$ et on a maintenant

$$\forall |x - a| \leqslant \tilde{\delta},\ |T_K(f)(x) - T_K(f)(z)| \leqslant \varepsilon$$

donc la famille est bien équicontinue et on peut appliquer le théorème d'Ascoli, et

$$T_K(\overline{B(0,1)})$$

est relativement compacte.

Propriété 5 : Soient X un espace vectoriel normé, Y un espace de Banach et $E \subset X$ un sous-espace dense, soit $T \in \mathcal{L}(E, Y)$,

alors il existe un unique $\tilde{T} \in \mathcal{L}(X, Y)$ tel que

$$\forall x \in E,\ \tilde{T}x = Tx$$

et plus, ces applications sont de normes égales, *i.e.*

$$||\tilde{T}||_{\mathcal{L}(X,Y)} = ||T||_{\mathcal{L}(E,Y)}.$$

Démonstration

La preuve est en trois partie ; la construction de $\hat{T}$, s'assurer que cette application est continue puis s'assurer qu'elle est unique.
$\star$ Pour la construction de $\hat{T}$, on considère $x \in X \backslash E$. Par densité il existe $e : \mathbf{N} \longrightarrow E$ telle que

$$e_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e$$

et pour $x \in E$, on considère la suite constante, donc pour tout $x \in X$, il existe une suite e_n à valeur dans E convergeant vers x.
Montrons que Te_n converge dans Y, on a

$$\begin{aligned} ||Te_n - Te_m|| &= ||T(e_n - e_m)|| \\ &\leqslant ||T||\ ||e_n - e_m|| \end{aligned}$$

la suite e_n étant convergente, elle est de Cauchy donc Te_n est aussi de Cauchy, et Y étant un espace de Banach, cette suite est convergente et on peut poser,

$$\hat{T}x := \lim_{n \to +\infty} Te_n.$$

Vérifions que $\hat{T}$ est bien définie, *i.e.* que la définition n'est pas fonction du choix de la suite convergeant vers $x \in X$. Soient $x \in X$ et e_n, e'_n deux suites convergeants vers x

$$||Te_n - Te'_n|| \leqslant ||t||\ ||e_n - e'_n|| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc

$$Te_n - Te'_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

et $\hat{T}x$ est correctement définie.
$\star$ Pour la linéarité, soient $(x, y) \in X$, $\lambda \in \mathbf{K}$. On considère $y_n \longrightarrow y$ et $x_n \longrightarrow x$, alors

$$\begin{aligned} \hat{T}(\lambda x + y) &= \lim_{n \to +\infty} T(\lambda x_n + y_n) \\ &= \lambda \lim_{n \to +\infty} Tx_n + \lim_{n \to +\infty} Ty_n \\ \hat{T}(\lambda x + y) &= \lambda \hat{T}x + \hat{T}y \end{aligned}$$

et $\hat{T}$ est bien une application linéaire.
$\star$ Pour la continuité de $\hat{T}$, soient $x \in X$ et $x_n \longrightarrow x$, on sait, puisque T est continue, que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ ||Te_n|| \leqslant ||T||\ ||e_n||$$

par passage à la limite simple
$$||\hat{T}x|| \leqslant ||T||\ ||x||$$
donc $\hat{T}$ est continue, et on a même l'inégalité des normes $||\hat{T}|| \leqslant ||T||$.
$\star$ Quant aux normes, on a $\hat{T}\big|_E = T$ donc pour $e \in E$,

$$||Te|| = ||\hat{T}e|| \leqslant ||\hat{T}||\ ||e||$$

donc $||T|| \leqslant ||\hat{T}||$ ainsi on a l'égalité des normes recherchée.
$\star$ Pour l'unicité, on suppose qu'il existe U distinct de $\hat{T}$ qui convient, alors $\forall x \in X$, il existe $x_n \longrightarrow x$ une suite d'élements de E, alors

$$\begin{aligned} U(x) &= \lim_{n\to+\infty} Ue_n \\ &= \lim_{n\to+\infty} Te_n \\ &= \lim_{n\to+\infty} \hat{T}e_n \\ Ux &= \hat{T}x \end{aligned}$$

ainsi $U = \hat{T}$, donc $\hat{T}$ est effectivement unique. $\square$

Théorème 6 (*Banach-Steinhaus*) **:** Soient X un espace de Banach, Y un espace vectoriel normé et $\{T_i,\ i \in I\}$ une suite quelconque d'application linéaires $X \longrightarrow Y$,
alors exactement l'une des assertions suivantes est vraie

(i)) $\sup_{i\in I} ||T_i|| < \infty$

(ii) $\{x \in X \text{ t.q. } \sup_{i\in I} ||T_i x|| = +\infty\}$ est dense dans X.

Démonstration

On suppose que l'assertion (ii) est fausse, donc que

$$\{x \in X \text{ t.q. } \sup_{i\in I} ||T_i x|| = +\infty\}$$

n'est pas dense dans X, autrement dit son complémentaire, noté F est d'intérieur non vide.
Soit $n \geqslant 0$, on pose

$$\begin{aligned} F_n :&= \left\{ x \in X \text{ t.q. } \sup_{i\in I} ||T_i x|| \leqslant n \right\} \\ &= \bigcap_{i\in I} T_i^{-1}\left(\overline{B(0,1)}\right) \end{aligned}$$

Les F_n sont tous fermés car ils sont des intersection de pré-images de fermés par l'application continue T_i, donc le théorème de Baire s'applique et

$$\exists n_0 \geqslant 0, x_0 \in X, r > 0 \text{ t.q. } \overline{B(x_0,r)} \subset F_{n_0}$$

pour $x \in X$ tel que $||x|| \leqslant r$, on écrit

$$x = \frac{1}{2}\left((x + x_0) + (x - x_0)\right)$$

donc, puisque T_i est linéaire

$$T_i x = \frac{1}{2}T(x_0 + x) - \frac{1}{2}T(x_0 - x)$$

et puisque $x_0 + r$ et $x_0 - x$ sont tous deux dans $\overline{B(x_0, r)}$,

$$\begin{cases} T_i(x_0 + x) \in F_{n_0} \\ T_i(x_0 - x) \in F_{n_0} \end{cases}$$

d'où la majoration suivante

$$||T_i x|| \leqslant n_0.$$

Dans le cas général, pour $u \in X$, on pose $x := r\frac{u}{||u||}$ (on suppose $u \neq 0$), alors $||x|| \leqslant r$ et on est dans le cadre du cas précédent,

$$\begin{aligned} ||T_i u|| &= \left\| T_i\left(\frac{||u||}{r}x\right)\right\| \\ &= \frac{||u||}{r}\left\| T_i\left(x\right)\right\| \\ &\leqslant \frac{||u||}{r}n_0 \end{aligned}$$

en faisant varier $||u||$ sur le disque unité, on a (passage au sup)

$$||T_i|| \leqslant \frac{n_0}{r}$$

ainsi

$$\sup_{i\in I}||T_i|| < \infty$$

et l'on est bien dans le cas *1*. □

▷ *ex :* application au séries de Fourier, pour $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbf{C}$ intégrable, on définit les coefficients de Fourier comme suit :

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-ikt}\mathrm{d}t$$

et la somme partielle de Fourier comme

$$S_n(f)(t) := \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\mathrm{e}^{ikt}$$

On va voir dans quel cas on a, pour $f \in C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$,

$$S_n f \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f \text{ CVS}$$

On montre d'abord que

$$\left\{ f \in C([-\pi, \pi]) \mid \sup_{n\geqslant 0}|S_n f(0)| = +\infty \right\}$$

est dense dans $C([-\pi, \pi])$, muni de la norme $|| \cdot ||_\infty$.

Démonstration

Soit, pour $n \in \mathbf{N}$,

$$\ell_n : \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{C}[-\pi, \pi] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ f & \longmapsto & S_n f(0) \end{array} \right.$$

ℓ_n est une application linéaire.

$\star$ Montrons que ℓ_n est continue, soit $f \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$, on calcule

$$\ell_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2_i} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-ikt}\mathrm{d}t$$
$$\ell_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{-ikt}\mathrm{d}t$$

On définit

$$D_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{-ikt}$$

le noyau de Dirichlet, que l'on peut calculer

$$D_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2n+1/2t)}{\sin(t/2)} & \text{si } t \neq 0 \\ 2n+1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Avec ces notations, on a

$$\begin{aligned} |\ell_n(f)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t)\mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant ||f||_\infty \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\mathrm{d}t \right| \\ |\ell_n(f)| &\leqslant ||f||_\infty \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\,\mathrm{d}t \qquad (i) \end{aligned}$$

donc ℓ_n est continue.
$\star$ Montrons que $\sup\limits_{n\geqslant 0} ||\ell_n|| = +\infty$
On montre d'abord que $||\ell_n|| = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |D_n|\mathrm{d}t$.
$\star\star$ L'inégalité (i) nous donne la moitié de l'égalité

$$||\ell_n|| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\,\mathrm{d}t.$$

$\star\star$ On va chercher à montrer l'autre sens de cette inégalité, soit $\varepsilon > 0$ et

$$f_\varepsilon : t \longmapsto \frac{D_n(t)}{|D_n(t)| + \varepsilon}$$

sin étant 2π-périodique, f_ε l'est aussi donc $f_\varepsilon \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$ et

$$\ell_n(f_\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{D_n^2(t)}{|D_n(t)| + \varepsilon}\mathrm{d}t$$

De plus,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{D_n^2(t)}{|D_n(t)| + \varepsilon} = |D_n(t)|$$

et on peut dominer l'intégrande par $|D_n|$, qui est dans $\mathcal{L}_1$, donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée et

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{D_n^2(t)}{|D_n(t)| + \varepsilon}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\mathrm{d}t.$$

De plus, $\forall \varepsilon > 0,\ ||f_\varepsilon||_\infty \leqslant 1$ donc $||f_\varepsilon||_1 \leqslant 1$ et $||\ell_n|| \geqslant |\ell_n(f_\varepsilon)|$, donc par passage à la limite,

$$||\ell_n|| \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\mathrm{d}t.$$

Ainsi on a les deux majorations / minorations, donc

$$||\ell_n|| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\mathrm{d}t.$$

On peut maintenant passer au calcul de $||\ell_n||$;

$$\begin{aligned}
||\ell_n|| &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\sin\left(t^{(2n+1)}/2\right)}{\sin\left(t/2\right)}\right|\mathrm{d}t \\
&\geqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin\left(t^{(2n+1)}/2\right)|}{|t|}\mathrm{d}t \\
&\geqslant \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{|\sin\left(t^{(2n+1)}/2\right)|}{|t|}\mathrm{d}t \\
&\geqslant \frac{2}{\pi}\int_{0}^{2n+1/2} \frac{|\sin u|}{2u/2n+1}\,\frac{2\mathrm{d}u}{2n+1} \\
||\ell_n|| &\geqslant \frac{2}{\pi}\int_{0}^{2n+1/2} \frac{|\sin u|}{u}\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

et puisque

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{2n+1/2} \frac{|\sin u|}{u}\mathrm{d}u \longrightarrow \int_{0}^{\infty} \frac{|\sin u|}{u}\mathrm{d}u = \infty \text{ quand } n \to \infty,$$

$||\ell_n|| \longrightarrow \infty$, donc $\sup\limits_{n\geqslant 0} ||\ell_n|| = +\infty$. □

Théorème 7 (*de majoration automatique*) **:** Soient (X, Y) des espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, si T est surjective,
alors il existe $c > 0$ tel que $\forall y \in Y,\ \exists x \in X$ tel que

$$y = Tx \text{ et } ||x|| \leqslant c||y|| = c||Tx||$$

Démonstration

⋆ On commence par montrer qi'il existe $M > 0$ tel que $B(0,1) \subset \overline{T\left[B(0,M)\right]}$. On a l'écriture suivante pour X,

$$X = \bigcup_{n\geqslant 1} B(0,)$$

Par surjectivité de T, on a aussi

$$Y = T(X) = \bigcup_{n\geqslant 1} T\left[B(0,n)\right]$$

et on a aussi, en posant $F_n := \overline{T\left[B(0,n)\right]}$

$$Y = \bigcup_{n\geqslant 1} F_n.$$

Les F_n sont tous fermés et Y est un espace de Banach, on peut donc y appliquer le théorème de Baire, donc il existe n_0 tel que $F_n n_0$ est d'intérieur non vide, donc

$$\exists y_0 \in Y,\ \exists r > 0 \text{ t.q. } B(y_0, r) \subset F_{n_0} \subset \overline{T\left[B(0,n)\right]}.$$

Montrons que $B(y_0, r) \subset F_{n_0}$, soit $y \in B(0, r)$ alors

$$y_0 - y, y_0 = Y \in B(y_0, r)$$

donc, pour $(u_n, v_n) \in B(y_0, n_0)$ tellle que

$$T(u_n) \longrightarrow y_0 + y \text{ et } T(v_n) \longrightarrow y_0 - y$$

,

$$T\left(\frac{1}{2}(u_n + v_n)\right) \longrightarrow y$$

et $\forall n \in \mathbf{N},\ \frac{1}{2}(u_n + v_n) \in B(0, n_0)$.
Puisque F_{n_0} est un fermé, $y \in F_{n_0}$ et $B(0, r) \subset \overline{T\left[B(0, n_0)\right]}$, autrement dit (linéarité ??? oui), en posant $M := {}^{n_0}/_{r}$, on obtient

$$B(0, 1) \subset \overline{T\left[B(0, M)\right]}.$$

□

⋆ On va maintenant montrer qu'il existe $c_1 > 0$ tel que $B(0, 1) \subset \left[B(0, c_1)\right]$. Soit $z_0 \in B(0, 1) \subset \overline{T\left[B(0, M)\right]}$ alrs il existe $x_0 \in B(0, M)$ tel que

$$||z_0 - Tx_0|| < \frac{1}{2}$$

on pose $z_1 := z_0 - Tx_0$, alors $z_1 \in B(0, {}^1/_2) \subset\subset \overline{T\left[B(0, {}^M/_2)\right]}$ donc il existe $x_1 \in B(0, {}^M/_2)$ tel que

$$||z_1 - Tx_1|| < \frac{1}{4}$$

on pose (encore) $z_2 := z_1 - Tx_1$ et on montre (par récurrence) qu'il existe x_n, x_n telles que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ z_n \in B\left(0, \frac{1}{2^n}\right),\ x_n \in B\left(0, \frac{M}{2^n}\right) \text{ t.q. } z_{n+1} = z_n - Tx_n$$

Ainsi

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||x_n|| < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{2^n} = 2M$$

X étant un espace de Banach, la convergence absolue implique la convergence et l'on peut définir

$$x := \sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

et $x \in B(0, 2M)$.
On peut calculer Tx,

$$Tx = \sum_{n=0}^{\infty} Tx_n = \sum_{n=0}^{\infty} z_n - z_{n+1}$$

et puisque $z_n \longrightarrow 0$, on a alors $Tx = z_0$ et $c_1 := 2M$ convient. □

$\star$ Pour conclure, soit $y \in Y \backslash 0$ et $z := \frac{y}{2||y||}$, alors $z \in B(0,1)$ donc il existe $x_1 \in X$ tel que $||x_1|| \leqslant c_1$ et $z = Tx_1$, donc

$$y = T(2||y||x_1) = Tx$$

(en posant $x := 2||y||x_1$) et l'on a

$$||x|| = 2||y||\,||x_1|| < 2c_1||y||.$$

$\square$

Théorème 8 (*d'isomorphisme de Banach*) **:** Soient X, Y est espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, si T est bijective,
alors $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$.

Démonstration

D'après le théorème de majoration automatique, il existe $c > 0$ tel que

$$\forall y \in Y,\ \exists x \in X \text{ t.q. } y = Tx \text{ et } ||x|| \leqslant c||y||$$

puisque T est bijective, le x est unique, donc on peut ré-écrire

$$\forall x \in X,\ ||x|| \leqslant c||y||$$

et puisque $x = T^{-1}y$, on a

$$\forall y \in Y,\ ||T^{-1}y|| \leqslant c||x||$$

autrement dit, T^{-1} est continue. $\square$

Théorème 9 (*de l'application ouverte*) **:** Soient X, Y des espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, si T est surjective,

alors T est ouverte, *i.e.* $\forall O$ ouvert, $T(O)$ est un ouvert.

Démonstration

On applique le théorème de majoration automatique, donc il existe $c > 0$ tel que

$$B(0,1) \subset T\left(B(0,c)\right),$$

ce qui conclut. $\square$

Propriété 10 : Soient X un espace vectoriel normé et $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ deux normes sur X. On suppose que X est complet pour les deux normes et qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $x \in X$, $||x||_2 \leqslant c||x||_1$,

alors $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_2$ sont équivalentes.

Démonstration

Soit $\mathrm{Id} : (X, ||\cdot||_1) \longrightarrow (X, ||\cdot||_2)$, cette application est bijective et linéaire. L'hypothèse $||\cdot||_2 \leqslant c||\cdot||_1$ nous indique que Id est continue, donc le théorème d'isomorphisme de Banach s'applique et $\mathrm{Id}^{-1} : (X, ||\cdot||_2) \longrightarrow (X, ||\cdot||_1)$ est continue, donc

$$\exists c_2 > 0 \mid \forall x \in X,\ |x||_1 \leqslant c||x||_2$$

et les normes $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_2$ sont effectivement équivalentes. $\square$

3 Théorème du graphe fermé

Propriété 11 : Soient X, Y deux Banach, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, on suppose que pour $x_n \in X$, $y_n \in Y$ telles que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \in X$, $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y \in Y$, alors $Tx = y$,

alors T est continue

Démonstration

On muni l'espace $X \times Y$ de la norme

$$||(x,y)||_{(X\times Y)} := \max(||x||, ||y||)$$

et on a alors les inégalités

$$\forall (x,y) \in X \times Y,\ ||(x,y)||_{(X\times Y)} \geqslant ||x|| \text{ et } ||(x,y)||_{(X\times Y)} \geqslant ||y||.$$

$\star$ Montrons que $(X \times Y, ||\cdot||_{(X\times Y)})$ est un espace de Banach, soit $Z_n = (x_n, y_n)$ une suite de Cauchy à valeurs dans $X \times Y$ est $\varepsilon > 0$, alors

$$\exists N \geqslant 0 \text{ t.q. } \forall (p,q) \geqslant N,\ ||Z_p - Z_q||_{(X\times Y)} \leqslant \varepsilon$$

donc

$$\forall (p,q) \geqslant N,\ \max(||x_p - x_p||, ||y_p - y_p||) \leqslant \varepsilon$$

donc

$$\begin{cases} ||x_p - x_q|| \leqslant \varepsilon \text{ donc } (x_n) \text{ est de Cauchy, donc } \exists x \text{ t.q. } x_n \longrightarrow x \\ ||y_p - y_q|| \leqslant \varepsilon \text{ donc } (y_n) \text{ est de Cauchy, donc } \exists y \text{ t.q. } y_n \longrightarrow y \end{cases}$$

et on vérifie alors que $Z_n \longrightarrow (x,y)$. □

$\star$ Soit

$$G_x(T) := \{(x, Tx),\ x \in X\} \subset X \times Y$$

le graphe de T, montrons qu'il est fermé, soit (x_n, Tx_n) une suite dans $G_x(T)$ telle que

$$(x_n, Tx_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (x,y) \text{ dans } X \times Y$$

donc

$$\begin{cases} x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \\ Tx_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y \end{cases}$$

donc par hypothèse, $Tx = y$ et $(x,y) \in G_x(T)$ ce qui montre que le graphe est bien fermé.
$\star$ On note $\pi_X : G_x(T) \longrightarrow X$ et $\pi_Y : G_x(T) \longrightarrow Y$ les projecteurs, on a

$$\begin{array}{rcccl} ||\pi_x(x,Tx)|| & = & ||x|| & \leqslant & ||(x,Tx)||_{(X\times Y)} \\ ||\pi_x(x,Tx)|| & = & ||Tx|| & \leqslant & ||(x,Tx)||_{(X\times Y)} \end{array}$$

donc ces deux applications sont (linéaires) continues et de surcroît π_x est bijective, donc on peut calculer

$$\begin{aligned} \forall x \in X,\ \pi_y \circ \pi_x^{-1}(x) &= \pi_y\left(\pi_x^{-1}(x)\right) \\ &= \pi_y(x, Tx) \\ &= Tx \end{aligned}$$

ainsi $T = \pi_y \circ \pi_x^{-1}$ est continue □

$\triangleright$*ex :* application en analyse complexe, soit

$$H^2 := \left\{ f \in \text{Hol } D(0,1),\ f(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n z^n \text{ t.q. } \sum_{n\in\mathbf{Z}} |a_n|^2 = ||f||_2^2 < \infty \right\}$$

l'espace de Hardy, qui est un espace de Banach car l'application

$$T : \left| \begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbf{C}) & \longrightarrow & H^2 \\ a_n & \longmapsto & f(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n z^n \end{array} \right.$$

est un isomorphisme isométrique, donc la complétude de $\ell^2(\mathbf{C})$ implique la complétude de H^2.

On pose, pour $|\lambda| < 1$, $E_\lambda : f \in H^2 \longmapsto f(\lambda)$ et l'on a (inégalité de Cauchy-Schwarz),

$$E_\lambda(f)| = \left| \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n \lambda^n \right| \leqslant \sqrt{\sum_{n\in\mathbf{Z}} |a_n|^2} \sqrt{\sum_{n\in\mathbf{Z}} |\lambda|^{2n}} \longrightarrow 0 \text{ quand } ||f||_2 \to 0$$

donc E_λ est (linéaire) continue en 0, E_λ est continue, ainsi pour $f_n \to f$ dans H^2, on a

$$\forall \lambda \in D(0,1),\ f_n(\lambda) \longrightarrow f(\lambda).$$

Soit $X \subset H^2$ un espace de Banach de fonctions holomorphes sur $D(0,1)$ telle que

$$f_n \longrightarrow f \text{ dans } X \Rightarrow \forall \lambda \in D(0,1),\ f_n(\lambda) \longrightarrow f(\lambda)$$

alors $i : X \longrightarrow H^2$ (c'est l'*injection canonique*) est continue :

Démonstration

i est linéaire, H^2 et X sont complets et soit f_n convergeante dans X, donc il existe $f \in X$ telle que $f_n \longrightarrow f$ dans X. f_n est une suite de fonction convergeante, donc il existe aussi $g \in H^2$ telle que $f_n \longrightarrow g$ dans H^2.
Par hypothèse, on a

$$\begin{cases} f_n(\lambda) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\lambda) \\ f_n(\lambda) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(\lambda) \end{cases}$$

par unicité de la limite, $f(\lambda) = g(\lambda)$, d'où $i(f) = g$.
On peut donc appliquer le théorème du graphe fermé et i est continue. $\square$

Pourquoi ce résultat est non-trivial ? question pour demain.

4 Théorème de Hahn-Banach

Soit E un espace vectoriel normé, on note E^* ou E' l'ensemble des formes linéaires continues

$$E^* := \{\varphi : E \longrightarrow \mathbf{R} \text{ linéaire continue }\},$$

muni de la norme d'opérateur

$$||\varphi|| = \sup_{x \in E\{0\}} \frac{|\varphi(x)|}{||x||}.$$

On montre que c'est un espace de Banach, *i.e.* un espace vectoriel normé complet.
▷*ex :* si $\dim E < \infty$, en considérant $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E, alors $\forall \varphi \in E^*$,

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) x_i$$

où $x = (x_1, \cdots, x_n)$.
▷*ex :* pour les espaces ℓ^p avec $p < \infty$, on note q le conjugué de p, on se donne $a = \{a_n\} \in \ell^q$, on pose

$$\varphi_a : \left| \begin{array}{ccc} \ell^p & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ u & \longmapsto & \sum_{n \in \mathbf{N}} u_n a_n \end{array} \right.$$

φ_a est bien définie (inégalité de Hölder) et est continue, avec

$$\varphi_a|| \leqslant ||a||_q.$$

On rappelle la propriété suivante :

Propriété 12 : Soit $\varphi : E \longrightarrow \mathbf{C}$ linéaire, alors $\varphi \in E^* \Leftrightarrow \ker\ \varphi$ est fermé dans E

Démonstration

⋆ si φ est continue, alors

$$\ker\ \varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$$

est un fermé en tant que pré-image du fermé $\{0\}$ par l'application continue φ.
⋆ Réciproquement, on suppose que $\ker\ \varphi$ est fermé et on procède par l'absurde, c'est à dire qu'on suppose que φ n'est pas continue, donc que $\sup_{||x||=1} |\varphi(x)| = +\infty$. Ainsi il existe une suite $x_n \in E$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ ||x_n|| = 1 \text{ et } |\varphi(x_n)| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

En particulier, il existe $N \geqslant 0$ tel que $x_n \neq 0$, pour $n \geqslant N$.
On considère la suite y_n telle que

$$\forall n \geqslant N,\ y_n := x_N - \frac{\varphi(x_N)}{\varphi(x_n)} x_n,$$

par le calcul, on vérifie que $\forall n \geqslant N,\ y_n \in \ker\ \varphi$.
De plus, on a

$$||y_n - x_N|| = \left| \frac{\varphi(x_N)}{\varphi(x_n)} \right| ||x_n|| = \left| \frac{\varphi(x_N)}{\varphi(x_n)} \right| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc x_N est la limite d'une suite d'éléments de $\ker\ \varphi$ qui est un fermé, donc $x_N \in \ker\ \varphi$ ce qui est absurde, donc φ est nécessairement continue. □

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel, on prend $\varphi : F \longrightarrow \mathbf{K}$ linéaire continue, on va se demander si il existe un prolongement de φ sur E de même norme que φ. Plus formellement, on cherche $f : E \longrightarrow \mathbf{K}$ telle que

$$f|_F = \varphi \text{ et } ||f|_E = ||\varphi||_F.$$

Définition : Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, une application $p : E \longrightarrow \mathbf{R}$ est une *fonctionnelle sous-linéaire* si, et seulement si
($\bullet$) $\forall (x, y) \in E,\ p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$
($\bullet\bullet$) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbf{R}_+,\ p(\lambda x) = \lambda p(x)$.

▷*ex :* toute forme linéaire est une fonctionnelle sous-linéaire.

▷*ex bis :* toute norme est une une fonctionnelle sous-linéaire.

On fait d'abord une parenthèse en théorie des ensembles, on se donne $(\mathcal{E}, \preccurlyeq)$ un *ensemble ordonné*, *i.e.* muni d'une relation d'ordre.
$A \subset \mathcal{P}(\mathcal{E})$ est *totalement ordonné* si, et seulement si

$$\forall (x, y) \in A, x \preccurlyeq y \text{ ou } y \preccurlyeq x.$$

On dit que $(\mathcal{E}, \preccurlyeq)$ est *inductif* si toute partie de $\mathcal{E}$ totalement ordonnée admet un majorant.
On dit que $z \in \mathcal{E}$ est un *élément maximal* si, et seulement si

$$\forall x \in \mathcal{E}, z \preccurlyeq x \Rightarrow z = x.$$

▷*ex :* soit Ω un ensemble de cardinal supérieur à 2, pour $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, on pose

$$A \preccurlyeq B \Leftrightarrow A \subset B,$$

alors $(\mathcal{P}(\Omega), \preccurlyeq)$ est un ensemble ordonné non totalement ordonné donc Ω est un élément maximal.

On a le résultat / axiome suivant (en fait, c'est équivalent à l'axiome du choix) ;

Théorème 13 (*lemme de Zorn*) **:** Tout ensemble non vide, ordonné et inductif possède un élément maximal.

Théorème 14 (*de Hann-Banach*) **:** Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, $p : E \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonctionnelle sous-linéaire, V un sous-espace vectoriel de E, soit $\varphi : V \longrightarrow \mathbf{R}$ une forme linéaire telle que $\forall x \in V,\ \varphi(x) \leqslant p(x)$.

Alors il existe $\tilde{\varphi} : E \longrightarrow \mathbf{R}$ prolongeant φ et majorée par p.

Avant de prouver ce résultat, on pose la définition suivante : $h : G \longrightarrow \mathbf{R}$, où $G \subset E$ est un sous-espace vectoriel, est un *prolongement admissible* si, et seulement si
($\bullet$) $F \subset G$
($\bullet\bullet$) $h|_F = \varphi$
($\bullet\bullet\bullet$) $\forall x \in G,\ h(x) \leqslant p(x)$.

On aura besoin du lemme suivant :

Lemme 1 : Soit $h : G \longrightarrow \mathbf{R}$ un prolongement admissible de φ et $x_0 \in E \backslash G$, alors il existe $\tilde{h} : G \oplus x_0\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ qui est un prolongement admissible de φ.

Démonstration

on pose $G_1 := G \oplus x_0\mathbf{R} \subset E$ et

$$\tilde{h} : \left| \begin{array}{ccc} G_1 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x + \lambda x_0 & \longmapsto & \varphi(x) + \lambda\alpha \end{array} \right.$$

où α est un paramètre à choisir de façon à avoir $\tilde{h}\big|_F = \varphi$ et $\tilde{h}(x+\lambda x_0) = \varphi(x)+\lambda\alpha \leqslant p(x+\lambda_0)$.
Puisque $\tilde{h}$ est linéaire, il nous faut « juste »

$$\forall \lambda > 0,\ \forall x \in \tilde{G},\ \begin{cases} \varphi(x) + \alpha\lambda \leqslant p(x + \lambda x_0) \\ \varphi(x) - \alpha\lambda \leqslant p(x - \lambda x_0) \end{cases}$$

c'est équivalent à

$$\forall \lambda > 0,\ \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) - p\left(\frac{x}{\lambda} - x_0\right) \leqslant \alpha \leqslant p\left(\frac{x}{\lambda} + x_0\right) - \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

Ainsi pour qu'α existe, il suffit que

$$\sup\left\{\varphi\left(v\right) - p\left(v - x_0\right), v \in G\right\} \leqslant \inf\left\{p\left(u - x_0\right) - \varphi\left(u\right), u \in G\right\}.$$

Cette condition est vérifiée puisque

$$\forall (u, v) \in G,\ \varphi(u) + \varphi(v) = \varphi(u + v) \leqslant p(u + v) \leqslant p(u - x_0) + p(v + x_0)$$

autrement dit

$$\varphi(u) - p(u - x_0) \leqslant p(v - x_0) - \varphi(v).$$

Donc α existe bien, et puisque $F \subset G \subset E$, $\tilde{h}$ est bien un prolongement admissible. □

Démonstration

démonstration du théorème On note X l'ensemble des couples

$$(G, h)$$

où $F \subset G \subset E$ et où $h : G \longrightarrow \mathbf{R}$ est un prolongement admissible.
On peut munir X de la relation d'ordre (partielle) suivante

$$(G_1, h_1) \preccurlyeq (G_2, h_2) \Leftrightarrow \begin{cases} G_1 \subset G_2 \\ \forall x \in G_1,\ h_1(x) = h_2(x) \end{cases}$$

$\star$ Montrons que $(X, \preccurlyeq)$ est inductif, soit $(G_i, h_i)_{i\in I}$ une famille totalement ordonné d'éléments de X, on va montrer que (G_i, h_i) possède un majorant.
Soit

$$G := \bigcup_{i\in I} G_i$$

et h vérifiant

$$\forall x \in G,\ \forall i \in I \text{ t.q. } x \in G_i,\ h(x) := h_i(x).$$

On a bien défini h car si « conflit » de définition, pour $x \in G_i \cap G_j$, on a (car la famille est totalement ordonnée) (sans perte de généralité)

$$(G_i, h_i) \preccurlyeq (G_j, h_j)$$

donc $h_i = h_j\big|_{G_i}$ et $h_i(x) = h_j(x)$.
$\star\star$ G est un espace vectoriel : soient $(x, y) \in G,\ \lambda \in \mathbf{R}$, il existe un couple (i, j) tel que

$$x \in G_i,\ y \in G_j$$

puisque la famille est totalement ordonnée, on a (sans perte de généralité) $G_i \subset G_j$ donc $x \in G_j$ et (car G_j est un espace vectoriel) $x + \lambda y \in G_j \subset G$.
$\star\star$ h est admissible : soit $x \in G$ donc $x \in G_i$ et

$$|h(x)| = |h_i(x)| \leqslant p(x)$$

donc h est admissible et $(G, h) \in X$.
On vérifie alors que (G, h) est un majorant de $(G_i, h_i)_{i \in I}$, donc $(X, \preccurlyeq)$ est inductif.

On applique le lemme de Zorn, donc il existe $(\tilde{G}, \tilde{\varphi})$ maximal.

† Si $\tilde{G} = E$, alors $\tilde{\varphi}$ convient.
† Si $\tilde{G} \neq E$, alors il existe $x_0 \in E \backslash g$ et en considérant le prolongement admissible du lemme, il existe $(G_1, \tilde{\varphi}_0)$ tel que

$$(\tilde{G}, \tilde{\varphi}) \preccurlyeq (G_1, \tilde{\varphi}_0)$$

c'est absurde, donc $G = E$ et le théorème est prouvé. □

Théorème 15 (*Hann-Banach, cas réel*) **:** Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel, soit $\varphi \in F^*$,

alors il existe $\tilde{\varphi} \in E^*$ telle que

$$\tilde{\varphi}\big|_F = \varphi \text{ et } ||\varphi||_{F^*} = ||\tilde{\varphi}||_{E^*}$$

Démonstration

On pose

$$\forall x \in E,\ p(x) := ||\varphi||\ ||x||$$

d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $\tilde{\varphi} : E \longrightarrow \mathbf{R}$ prolongeant φ et telle que

$$\forall x \in E,\ \tilde{\varphi}(x) \leqslant ||\varphi||\ ||x||.$$

Par linéarité, on a aussi

$$\forall x \in E,\ |\tilde{\varphi}(x)| \leqslant ||\varphi||\ ||x||$$

donc $\tilde{\varphi}$ est continue et telle que $||\tilde{\varphi}|| \leqslant ||\varphi||$ Et comme $\tilde{\varphi}$ est un prolongement de φ, on a aussi $||\tilde{\varphi}|| \geqslant ||\varphi||$ donc

$$\tilde{\varphi}\big|_F = \varphi \text{ et } ||\tilde{\varphi}|| = ||\varphi||.$$

□

On peut étendre ce théorème dans le cas complexe,

Théorème 16 (*Hahn-Banach, cas complexe*) **:** Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel, soit $\varphi \in F^*$,

alors il existe $\tilde{\varphi} \in E^*$ telle que

$$\tilde{\varphi}\big|_F = \varphi \text{ et } ||\varphi||_{F^*} = ||\tilde{\varphi}||_{E^*}$$

Démonstration

$\varphi_{\mathbf{R}} := \Re\ \varphi$ est une forme linéaire réelle continue, donc on peut appliquer le théorème de Hahn-Banach réel. Il existe donc $\tilde{\varphi}_{\mathbf{R}} \in E^*$ telle que

$$\tilde{\varphi}_{\mathbf{R}}\big|_F = \tilde{\varphi}_{\mathbf{R}} \text{ et } ||\tilde{\varphi}_{\mathbf{R}}|| = ||\varphi_{\mathbf{R}}||$$

En posant

$$\tilde{\varphi} : x \in E \longmapsto \tilde{\varphi}_{\mathbf{R}}(x) - i\tilde{\varphi}_{\mathbf{R}}(ix)$$

on vérifie que $\tilde{\varphi} : E \longrightarrow \mathbf{C}$ est linéaire continue et

$$\tilde{\varphi}\big|_F = \varphi \text{ et } ||\varphi|| = ||\tilde{\varphi}||$$

□

Corollaire 1 : Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $x \in E$,

alors
(*1*) $\exists x^* \in E^*$ t.q. $||x^*|| = 1$ et $x^*(x) = ||x||$

(*2*) $||x|| = \sup\{|x^*(x)|,\ x^* \in E^* \text{ t.q. } ||x^*|| = 1\}$.

Démonstration du (1)

Soit $x \in E$, on considère

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}x & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ \lambda x & \longmapsto & \lambda ||x|| \end{array} \right.$$

φ est une application linéaire isométrique (donc de norme 1) donc φ est continue, donc d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $x^* \in E^*$ t.q. $||x^*|| = ||\varphi|| = 1$ et $\varphi = x^*\big|_{\mathbf{K}x}$.
En particulier, $x^*(x) = \varphi(x) = ||x||$, ce qui conclut. □

Démonstration du (2)

Soit $x^* \in E^*$ telle que $||x^*|| = 1$, alors

$$|x^*(x)| \leqslant ||x^*||\ ||x|| = ||x||$$

donc

$$\sup\{|x^*(x)|,\ x^* \in E^* \text{ t.q. } ||x^*|| = 1\} \leqslant ||x||$$

et le point (1) du corollaire nous indique que $||x||$ est atteinte, d'où l'égalité annoncée. □

Corollaire 2 : Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel,

alors E^* sépare les points, *i.e.*

$\forall (a,b) \in E$ t.q. $a \neq b$, $\exists f \in E^*$ t.q. $f(a) \neq f(b)$.

Démonstration

Soit $(a,b) \in E$ distincts, on pose $x := a - b$, d'après le corolaire précédent, il existe $x^* \in E^*$ tel que $x^*(x) = ||x||$, donc

$$x^*(a) - x^*(b) = ||x|| \neq 0.$$

□

Corollaire 3 : Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $F \subset E$ un sous-espace vectoriel fermé et $a \in E \backslash F$,

alors il existe $x^* \in E^*$ tel que

$$x^*(a) = 1 \text{ et } x^*|_F = 0.$$

Démonstration

Soit

$$\varphi_a : \left| \begin{array}{ccc} F \oplus \mathbf{K}a & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x + \lambda a & \longmapsto & \lambda \end{array} \right.$$

φ_a est linéaire et de noyau $\ker\ \varphi_a = F$ fermé (par hypothèse) donc φ_a est continue.
D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $x* \in E^*$ telle que

$$||x^*|| = ||\varphi_a|| \text{ et } x^*|_{F \oplus \mathbf{K}a} = \varphi_a$$

on vérifie alors que ce x^* convient, *i.e.*

$$x^*(a) = \varphi_a(a) = 1 \text{ et } x^*|_F = 0.$$

□

Définition : Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $F \subset E$ un sous-espace vectoriel, on définit *l'orthogonale de* F par

$$F^\perp := \left\{ x^* \in E^* \text{ t.q. } x^*|_F = 0 \right\}$$

Corollaire 4 : Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $F \subset E$ un sous-espace vectoriel fermé,

alors les proposition suivantes sont équivalentes,
(i) $\overline{F} = E$
(ii) $F^\perp = \{0\}$

Démonstration

$\star$ Si $\overline{F} = E$, soit $x^* \in F^\perp$ donc $x^*|_F = 0$, montrons que $x^* = 0$.
Soit $x \in E$, par densité de F dans E, il existe $x_n \in F$ convergeant vers x.
Par continuité, on a

$$x^*(x) = \lim_{n\to\infty} x^*(x_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

et $F^\perp = \{0\}$
$\star$ Réciproquement, si $F^\perp = \{0\}$ on va supposer que $\overline{F} \neq E$, donc il existe $x \in E \backslash \overline{F}$.

Puisque $\overline{F}$ est un fermé, on applique le corollaire précédent et il existe $x^* \in E^*$ tel que

$$x^*(x) = 1 \text{ et } x^*|_{\overline{F}} = 0,$$

puisque $F \subset \overline{F}$, on a aussi $x^*|_F = 0$ donc $x^* \in F^\perp$, ce qui est absurde car x^* est non nul (en x), ce qui contredit l'hypothèse sur $F^\perp$ □

▷*ex :* soit $a_i \in \mathbf{C}$ avec $|a| > 1$, on considère

$$f_a : \left| \begin{array}{rcl} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & \frac{1}{a-t} \end{array} \right.$$

et on prend $(a_n) \in \mathbf{C}$ tel que $\forall n \in \mathbf{N},\ |a_n| > 1$ et $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$,

alors $\mathrm{Vect}\,(f_{a_n},\ n \in \mathbf{N})$ est dense dans $(C[-1,1], ||\cdot||_\infty)$.

Démonstration

Soit $\varphi \in C([-1,1])$ (éventuellement nulle) telle que

$$\forall n \geqslant 0,\ \varphi(f_{a_n}) = 0.$$

Montrons que φ est nécessairement nulle, soit $t \in [-1,1]$, on a

$$\begin{aligned} f_a(t) & \frac{1}{a\,(1 - {}^t\!/\!_a)} \\ & = \frac{1}{a} \sum k = 0^\infty \frac{t^k}{a^k} \\ & = \sum k = 0^\infty \frac{t^k}{a^{k+1}} \end{aligned}$$

Puisque

$$\sup\left\{ \frac{t^k}{a^{k+1}},\ t \in [-1,1] \right\} = \frac{1}{a^{k+1}}$$

et que $\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{a^{k+1}} < \infty$,

$$\sum k = 0^\infty \frac{t^k}{a^{k+1}} \text{ CVN sur } [-1,1].$$

Soit $e_n : t \in [-1,1] \longmapsto t^n$, alors

$$f_a = \sum k = 0^\infty \frac{e_n}{a^{k+1}}$$

donc

$$\varphi(f_a) = \sum k = 0^\infty \varphi(e_k) \frac{1}{a^{k+1}}.$$

On pose

$$L(z) := \sum k = 0^\infty \frac{{t^k}^k}{z}$$

et on a l'inégalité suivante

$$\forall k \in \mathbf{N},\ \varphi(e_k) \leqslant ||\varphi||\ ||e_k||_\infty \leqslant ||\varphi||$$

donc pour $|z| < 1$, $L(z)$ converge et le rayon de convergeance de cette série est plus grand que 1.
f est holomorphe, f est nulle en $\frac{1}{a_n}$, pour $n \in \mathbf{N}$ et $\frac{1}{a_n} \longrightarrow 0$, donc en vertu du principe des zéros isolés, $f = 0$.

En particulier, pour tout $k \in \mathbf{N},\ \varphi(e_k) = 0$, donc par linéarité,

$$\forall P \in \mathbf{C}[X],\ \varphi(P) = 0$$

or $C[X]$ est dense dans $C([-1,1])$ donc φ est nulle.
Or $\varphi \in \operatorname{Vect}(f_{a_n},\ n \in \mathbf{N})^{\perp}$, donc $\varphi \in \operatorname{Vect}(f_{a_n},\ n \in \mathbf{N})^{\perp} = \{0\}$ donc d'après le lemme précédent, $\operatorname{Vect}(f_{a_n},\ n \in \mathbf{N})$ est effectivement dense dans $C([-1,1])$. $\square$

Troisième partie

Espaces de Hilbert

1 Rappels sur les espaces préhilbertiens

Définition : Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \longrightarrow E$ une application,

$(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un *espace préhilbertien* si, et seulement si
$\forall (x,y,z) \in E,\ \forall \lambda \in \mathbf{K}$,
$(\bullet)$ $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$
$(\bullet\bullet)$ $\langle x+y,z\rangle = \langle y,z\rangle + \langle y,z\rangle$
$(\bullet\bullet\bullet)$ $\langle \lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$
$(\bullet\bullet\bullet\bullet)$ $\langle x,x\rangle \geqslant 0$
$(\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet)$ $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

rq *:* Si $\langle\cdot,\cdot\rangle$ vérifie uniquement les deux premiers points, c'est une *forme hermitienne*, si il vérifie les quatres premiers points c'est une *forme hermitienne positive* et si il vérifies tous ces points, on peut dire que c'est un *produit scalaire* ou une *forme hermitienne définie positive*,

Propriété 1 (*Cauchy-Schwarz*) **:** Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espaces préhilbertien,

alors
$$\forall (x,y) \in E,\ |\langle x,y\rangle| \leqslant \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle},$$
une autre version est
$$\forall (x,y) \in E,\ \langle x,y\rangle^2 \leqslant ||x||\ ||y||.$$
De plus, en posant
$$||\cdot|| : x \longmapsto \sqrt{\langle x,x\rangle}$$
on obtient un espace vectoriel normé $(E, ||\cdot||)$.

$\triangleright$*ex :* soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbf{C})$ une matrice hermitienne, alors
$$f_A : \begin{array}{ccc} \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ (u,v) & \longmapsto & \langle Au, v\rangle \end{array}$$
est une forme hermitienne et
$$f_a \text{ positive } \Leftrightarrow \text{Sp } A \subset \mathbf{R}_+,$$
$$f_a \text{ définie positive } \Leftrightarrow \text{Sp } A \subset \mathbf{R}_+^*,$$
$\triangleright$*ex :* si
$$\ell^2(\mathbf{C}) := \left\{ u : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{C} \text{ t.q. } \sum_{n\geqslant 0} |u_n|^2 < \infty \right\}$$
alors
$$\langle u,v\rangle := \sum_{n\geqslant 0} u_n \overline{v_n}$$
est un produit scalaire, dit *canonique* sur $\ell^2(\mathbf{C})$.

Propriété 2 (*identité du parallélogramme*) **:** Pour H un espace préhilbertien et $(x,y) \in H$, on a
$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2\left(||x||^2 + ||y||^2\right).$$

Démonstration. Soient $(x, y) \in H$,

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= ||x||^2 + ||y||^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle \\ &= ||x||^2 + ||y||^2 + \langle x, y\rangle + \overline{\langle y, x\rangle} \\ ||x+y||^2 &= ||x||^2 + ||y||^2 + \Re\langle x, y\rangle \qquad (i) \end{aligned}$$

et la même manière, on a

$$||x-y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 - \Re\langle x, y\rangle \qquad (ii)$$

on obtient donc, en sommant les points (i) et (ii)

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2\left(||x||^2 + ||y||^2\right).$$

□

Propriété 3 (*identité de polarisation*) **:** Pour H un espace préhilbertien et $(x, y) \in H$, on a

$$\text{si } \mathbf{K} = \mathbf{R},\ \langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2\right),$$

$$\text{si } \mathbf{K} = \mathbf{C},\ \langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{3} i^k ||x + i^k y||\right).$$

Démonstration

Par le calcul. □

Propriété 4 : Soient H un espace préhilbertien, $(x_n) \in H$ telle que $x_n \longrightarrow x$ et $y_n \in H$ telle que $y_n \longrightarrow y$,

alors

$$\langle x_n, y_n\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \langle x, y\rangle$$

Démonstration

Soit $n \in \mathbf{N}$, on calcule :

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n - x, y_n\rangle + \langle x, y_n - y\rangle| \\ &\leqslant |\langle x_n - x, y_n\rangle| + |\langle x, y_n - y\rangle| \\ &\leqslant \|x_n - x\|\ \ \|y_n\| + \|x\|\ \ \|y_n - y\| \end{aligned}$$

et $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$, $\|y_n - y\| \longrightarrow 0$ donc

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Définition : Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un préhilbertien,
• $(x, y) \in H$ sont dits *orthogonaux* si, et seulement si

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

• pour $A \subset H$, l'*orthogonal de* A, noté $A^\perp$, est défini tel que

$$A^\perp := \{x \in H \text{ t.q. } \forall y \in A,\ \langle x, y \rangle = 0\}.$$

• $A \subset H$ et $B \subset H$ sont *orthogonaux*, noté $A \perp B$, si, et seulement si

$$\forall x \in A,\ \forall b \in B,\ \langle a, b \rangle = 0.$$

Propriété 5 (*caractérisation de l'orthogonal*) **:** Soit H préhilbertien, pour $(x, y) \in H$,

alors
$$x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

Démonstration

Par le calcul. □

on a aussi les propriétés générales suivantes, que l'on ne démontrera pas (par flemme + déjà vu en prépa)

Propriété 6 (*propriétés générales*) **:** Soit H préhilbertien et $(A, B, C) \subset H$,

(*1*) $A \subset B \Rightarrow A^\perp \supset B^\perp$
(*2*) $\overline{A} = H \Rightarrow A^\perp = \{0\}$
(*3*) est un sous-espace vectoriel fermé de H, même si A n'est pas un sous-espace vectoriel.

2 Système orthonormé

Dans ce chapitre, $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien et $(x_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ est un ensemble de vecteurs de H.

Définition :
- Le système (x_i) est un *système orthogonal* si, et seulement si

$$\forall (i,j) \in \mathbf{Z},\ \langle x_i, x_j \rangle = 0,$$

- le système (x_i) est un *système orthonormé* si, et seulement si il est orthogonal et

$$\forall i \in \mathbf{Z},\ ||x_i|| = 1.$$

▷*ex :* sur $\ell^1(\mathbf{C})$, les

$$e_i := (\underbrace{0, \cdots, 0}_{i-1}, 1, 0, \cdots)$$

forment un système orthonormé.
▷*ex bis :* on pose

$$L^2([-\pi,\pi]) := \left\{ f : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbf{C} \text{ mesurable} \ \text{ t.q. } \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t \right\}$$

muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t$$

alors les

$$e_n : t \longmapsto \mathrm{e}^{int}$$

forme un système orthonormé.

Propriété 7 : Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ préhilbertien,
(*1*) pour $(x_1, \cdots, x_n)$ un système orthogonal, on a

$$\sum_{i=1}^{n} ||x_i||^2 = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2$$

(*2*) pour $(e_i)_{i\geqslant 0}$ un système orthonormé, on a

$$\forall x \in H,\ \sum_{n=0}^{\infty} |\langle e_n, x \rangle| \leqslant ||x||^2.$$

Démonstration du (1)

Par récurrence sur n, à l'aide de l'égalité de Pythagore. □

Démonstration du (2)

Soit $N \in \mathbf{N}$, on pose

$$u := \sum_{n=0}^{N} \langle x, e_n \rangle \, e_n$$

et $v := x - u$. On calcule

$$\begin{aligned}
\langle u, v\rangle &= \left\langle \sum_{n=0}^{N} \langle e_n, x\rangle e_n, x - \sum_{n=0}^{N} \langle x, e_n\rangle e_n \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{n=0}^{N} \langle e_n, x\rangle e_n, x \right\rangle - \left\langle \sum_{n=0}^{N} \langle e_n, x\rangle e_n, \sum_{n=0}^{N} \langle x, e_n\rangle e_n \right\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{N} \langle x, e_n\rangle \langle e_n, x\rangle - \left\| \sum_{n=0}^{N} \langle x, e_n\rangle e_n \right\|^2 \\
\langle u, v\rangle &= \sum_{n=0}^{N} |\langle x, e_n\rangle|^2 - \left\| \sum_{n=0}^{N} \langle x, e_n\rangle e_n \right\|^2
\end{aligned}$$

puisque la famille (e_n) est orthonormée, l'égalité de Pythagore s'applique et

$$\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{N} |\langle x, e_n\rangle|^2 - \sum_{n=0}^{N} |\langle x, e_n\rangle|^2 = 0.$$

Par ailleurs, on a aussi

$$\begin{aligned}
||x^2|| = ||u + v||^2 &= ||u||^2 + ||v||^2 + 2\Re \langle u, v\rangle \\
&= ||u||^2 + ||v|| & \geqslant ||u||^2
\end{aligned}$$

ainsi

$$|xx||^2 \geqslant \sum n = 0^N |\langle x, e_n\rangle|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} |\langle e_n, x\rangle|$$

□

3 Espace de Hilbert

Définition : Un *espace de Hilbert* est un espac préhilertien complet.

rq ***:*** En dimension finie, tout espace préhilbertien est un espace de Hilbert
▷*ex :* $\ell^2(\mathbf{C})$ muni du produit scalaire habituel est un espace de Hilbert.

▷*ex :* pour $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de Hilbert.

▷*contre-ex :* Soit $C([0,1])$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t$$

n'est pas un espace de Hilbert.

Théorème 8 (*de projection sur un convexe fermé*) **:** Soit H de Hilbert et K (non vide) un convexe fermé de H,

alors pour tout $x \in H$, il existe un unique $u \in K$ tel que

$$||x-u|| = d(x, K) = \inf\{||x-z||,\ z \in K\}$$

l'élement en question est le *projeté de x sur K*, on le note $P_K(x)$.

une formulation équivalente de ce théorème est

Théorème 9 (*formulation variationelle*) **:** Soit H de Hilbert et K (non vide) un convexe fermé de H,

les assertions suivantes sont équivalentes
(*1*) $u = P_K(x)$
(*2*) $u \in K$ et $\forall v \in K,\ \Re\langle x-u, v-u\rangle \leqslant 0$

Démonstration du théorème de projection

Soit H un espace de Hilbert, $K \subset H$ un convexe fermé et non vide, soit $x \in H$,
$\star$ Existence : soit $d := \operatorname{dist}(x, K)$, par caractérisation de l'inférieur d'une partie, il existe $u_n \in K$ telle que

$$||u_n - x|| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} d.$$

Montrons que (u_n) est de Cauchy, soit $\alpha_n := x - u_n$, on calcule

$$||a_n + a_m||^2 + ||a_n - a_m||^2 = 2\left(||a_n||^2 + ||a_m||^2\right)$$

d'après l'égalité du parallélogramme, donc

$$||2x - (u_n+u_m)||^2 + ||u_n - u_m||^2 = 2\left(||x-u_n||^2 + ||x-u_m||^2\right)$$

et

$$||u_n - u_m||^2 = 2\left(||x-u_n||^2 + ||x-u_m||^2\right) - 4\left\|x - \frac{u_n+u_m}{2}\right\|^2. \qquad (i)$$

K étant convexe, $\dfrac{u_n+u_m}{2} \in K$ donc

$$||x - \frac{u_n+u_m}{2}||^2 \geqslant d^2$$

et l'égalité (i) devient

$$||u_n - u_m||^2 \leqslant 2\left(||x-u_n||^2 + ||x-u_m||^2\right) - 4d^2$$

puisque $||x-u_n||^2 \longrightarrow d^2$, on a

$$||u_n - u_m|| \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(u_n) est donc de Cauchy, donc elle converge vers $u \in E$ car E est complet, et puisque K est fermé, $u_n \longrightarrow u \in K$. De plus,

$$d = \lim_{n\to\infty} ||x-u_n|| = ||x-u||$$

et la distance est donc atteinte.
$\star$ Unicité : on suppose qu'il existe aussi $u \in K$ telle que $d = ||x-u||$, alors d'après l'égalité du parallélogramme, on a

$$||(x-u)+(x-v)||^2 + ||(x-u)-(x-v)||^2 = 2\left(||x-u||^2 + ||x-v||^2\right)$$

donc

$$||2x-(u+v)||^2 + ||v-u||^2 = 4d^2.$$

Puisque K est convexe, on a la majoration suivante ;

$$|u-v||^2 \leqslant 4d^2 - \underbrace{4\left\|x - \frac{u+v}{2}\right\|^2}_{\leqslant 4d^2} \leqslant 0$$

donc $u = v$ et le projeté est effectivement unique. □

Démonstration de la formulation variationelle

$\star$ Si $u = P_K(x)$, alors pour $t \in [0,1]$, $v \in K$, on pose

$$w(t) := (1-t)u + tv$$

par convexité de K, $w \in K$ et on a

$$\begin{aligned} ||x-u||^2 &\leqslant ||x-w||^2 = ||x-(1-t)u-tw||^2 \\ &\leqslant ||(x-u)-t(v-u)||^2 \\ ||x-u||^2 &\leqslant ||x-u||^2 + t^2||u-v|| - 2\Re\langle x-u, v-u\rangle \end{aligned}$$

donc

$$2\Re\langle x-u, v-u\rangle \geqslant t||u-v||$$

en faisant tendre t vers 0^+, on obtient bien

$$2\Re\langle x-u, v-u\rangle \geqslant 0.$$

$\star$ Réciproquement, si $u \in K$ et (2) est vérifiée, alors

$$\begin{aligned} ||x-v||^2 &= ||(x-u)+(u-v)||^2 \\ &= ||x-u||^2 + ||u-v||^2 + 2\Re\langle x-u, u-v\rangle \\ ||x-v||^2 &= ||x-u||^2 + ||u-v||^2 - 2\Re\langle x-u, v-u\rangle \end{aligned}$$

donc, puisque $2\Re\langle x-u, v-u\rangle \leqslant 0$,

$$||x-v|| \geqslant ||x-u||$$

et

$$||x-u|| \leqslant \inf\{||x-v||, v \in K\} = P_K(x).$$

□

▷*ex :* Soit $K = \overline{B(0,1)}$, montrons que

$$\forall ||x|| \geqslant 1,\ P_K(x) = \frac{x}{||x||}.$$

Soit $||x|| \geqslant 1$, on a utiliser la caractérisation variationelle :

⋆ il est clair que $\dfrac{x}{||x||} \in \mathbf{K}$

⋆ soit $v \in K$, on a

$$\begin{aligned}
\left\langle x - \frac{x}{||x||}, v - \frac{x}{||x||}\right\rangle &= \langle x, v\rangle - ||x|| - \frac{1}{||x||}\langle x, v\rangle + 1 \\
&= 1 - ||x|| + \langle x, v\rangle \left(1 - \frac{1}{||x||}\right) \\
&= 1 - ||x|| + \left\langle \frac{x}{||x||}, v\right\rangle (||x|| - 1) \\
\left\langle x - \frac{x}{||x||}, v - \frac{x}{||x||}\right\rangle &= (1 - ||x||)\left(1 - \left\langle \frac{x}{||x||}, v\right\rangle\right)
\end{aligned}$$

on passe à la partie réelle :

$$\Re\left\langle x - \frac{x}{||x||}, v - \frac{x}{||x||}\right\rangle = \underbrace{(1 - ||x||)}_{\leqslant 0}\left(1 - \underbrace{\Re\left\langle \frac{x}{||x||}, v\right\rangle}_{\leqslant 1}\right) \leqslant 0$$

donc pour $||x|| \geqslant 1$, on a bien $P_K(x) = \dfrac{x}{||x||}$ et pour $x \in K,\ P_K(x) = x$.

Propriété 10 : Soit H de Hilbert, K un convexe non-vide et fermé de E,

alors

$$\forall (x,y) \in H,\ \|P_K(x) - P_K(y)\| \leqslant \|x - y\|$$

donc P_K est une application continue.

Démonstration

À FAIRE □

Propriété 11 (*projection sur un s.e.v. fermé*) **:** Soit H de Hilbert et $M \subset H$ un sous-espace vectoriel fermé de E, pour $x \in H$ et $u \in H$,

alors les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $u = P_M(x)$
(ii) $u \in M$ et $\forall v \in M,\ \langle x - u, v\rangle = 0$.

rq **:** M étant un sous-espace vectoriel, M est convexe donc la définition de P_M ne pose aucun poblème.

Démonstration

$\star$ Si $u = P_M(x)$, alors d'après la caractérisation variationelle, on a $u \in M$ et

$$\forall m \in M,\ \Re\langle x-u, m-u\rangle \leqslant 0. \qquad (i)$$

Puisque M est un espace vectoriel, $m - u \in M$ et on peut reformuler (i) en

$$\forall v \in M,\ \Re\langle x-u, v\rangle \leqslant 0.$$

Par linéarité du produit scalaire (car $v \in M \Rightarrow -v \in M$), on a aussi

$$\Re\langle x-u, -v\rangle \leqslant 0 \Leftrightarrow -\Re\langle x-u, v\rangle \leqslant 0 \Leftrightarrow \Re\langle x-u, v\rangle = 0.$$

ainsi on a

$$\forall v \in M,\ \Re\langle x-u, v\rangle = 0.$$

† Si H est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, c'est fini.
† Si H est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel, alors en considérant $v \to iv$, on a

$$\Re\langle x-u, iv\rangle = 0 \Leftrightarrow -\Im\langle x-u, v\rangle = 0$$

donc $\langle x-u, v\rangle = 0$ et c'est fini.
$\star$ Réciproquement, si (ii) est vérifiée, puisque $v - u \in M$, on a

$$\forall v \in M,\ \langle x-u, v-u\rangle = 0$$

donc à fortiori

$$\forall v \in M,\ \Re\langle x-u, v-u\rangle \leqslant 0$$

puisque $u \in M$, la caractérisation variationnelle est vérifié et $u = P_M(x)$. □

Corollaire 1 : Soit H de Hilbert et $M \subset H$ un sous-espace vectoriel fermé de E, pour $x \in H$ et $u \in H$,

(1) P_M est linéaire continue et de norme 1,
(2) $P_M^2 = P_M$,
(3) $\forall (x,y) \in H, \langle P_M(x), P_M(y)\rangle = \langle x, P_M(y)\rangle = \langle P_M(x), y\rangle$.

Démonstration du (1)

Soient $(x,y) \in H$, $\lambda \in \mathbf{K}$, on a

$$\forall v \in M,\ \langle x - P_M(x), v\rangle = 0 \text{ et } \langle \lambda y - \lambda P_M(y), v\rangle = 0$$

par linéarité par rapport à la première variable, on a

$$\forall v \in M,\ \langle (x+\lambda y) - (P_M(x) + \lambda P_M(y)), v\rangle = 0$$

donc

$$P_M(x+\lambda y) = P_M(x) + \lambda P_M(y)$$

et P_M est linéaire. P_M est 1-lipschitzienne et, pour $x \neq 0$ et $x \in M$, $P_M(x) = x$ donc $||P_M|| = 1$. □

Corollaire 2 : Soit H de Hilbert et $M \subset H$ un sous-espace vectoriel fermé de E, pour $x \in H$ et $u \in H$,

(1) $H = M \oplus M^{\perp}$
(2) $\forall x \in H,\ x = P_M(x) + P_{M^{\perp}}(x)$

rq : La décomposition de x est orthogonale, c'est à dire que l'on a

$$||x||^2 = ||P_M(x)||^2 + ||Pm_{M^{\perp}}(x)||^2.$$

Démonstration

À FAIRE □