Master 1re année
parcours Mathématiques

2024–2025
Analyse

DM 1, Raphaël Casanova

Exercice 11

a) Soit $f, g \in \mathcal{C}([0,1])$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 f(t)t^n \,\mathrm{d}t = \int_0^1 g(t)t^n \,\mathrm{d}t \iff f = g$$

b) Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée.

(i) Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{C}([0,1])$ telle que pour tout $n \geqslant 2$

$$\int_0^{+\infty} f(x)e^{-nx}\mathrm{d}x = \int_0^1 g(t)t^{n-2}\,\mathrm{d}t.$$

(ii) En déduire que si, pour tout $n \geqslant 2$, $\int_0^{+\infty} f(x)e^{-nx}dx = 0$ alors $f = 0$.

---

a) si $f = g$, il est clair que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \int_0^1 f(t)t^n\mathrm{d}t = \int_0^1 g(t)t^n\mathrm{d}t.$$

Réciproquement, si cette condition est remplie, on a (par linéarité de l'intégrale)

$$\forall P \in \mathbf{R}[X], \int_0^1 (f-g)(t)P(t)\mathrm{d}t = 0 \qquad (i)$$

$f - g$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc d'après le théorème de Weierstraß, il existe une suite (P_n) de polynômes convergeant uniformément vers $f - g$, donc

$$\forall n \in \mathbf{N}, \int_0^1 (f-g)(t)P_n(t)\mathrm{d}t = 0$$

par passage à la limite uniforme,

$$\int_0^1 (f-g)^2(t)\mathrm{d}t = 0$$

et comme $(f-g)^2 \geqslant 0$, $f - g = 0$ et comme f et g sont continues, $f = g$.

b)i)On commence par ré-écrire l'intégrale sous la forme suivante :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f(t)\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^n \mathrm{d}t.$$

Soit le changement de variable bijectif strictement décroissant de classe C^1

$$\begin{array}{rclcrcl} u & = & \mathrm{e}^{-x} & \Leftrightarrow & x & = & -\ln u \\ \mathrm{d}u & = & -\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x & \Leftrightarrow & \mathrm{d}x & = & -\frac{1}{u}\mathrm{d}u \end{array}$$

donc (il n'y a pas de problème de définition de f puisque $-\ln]0,1] = [0,+\infty[$)

$$\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x = \int_0^1 f(-\ln u)u^{n-1}\mathrm{d}u$$

ce qui se ré-écrit

$$\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x = \int_0^1 \underbrace{f(-\ln u)u}_{:=g(u)} u^{n-2}\mathrm{d}u.$$

g est continue sur $]0,1[$ et, puisque f est bornée,

$$\forall t > 0,\ |f(-\ln t)t| \leqslant ||f||_\infty t \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

ainsi g est continue sur $[0,1]$ et c'est bon.

b)ii)Si f vérifie

$$\forall n \geqslant 2,\ \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x = 0$$

alors en gardant les notations précédentes, on a

$$\forall n \geqslant 2,\ \int_0^1 g(t)t^{n-2}\mathrm{d}t = 0$$

autrement dit, en prenant $m := n-2$,

$$\forall m \in \mathbf{N},\ \int_0^1 g(t)t^m\mathrm{d}t = 0 = \int_0^1 0_{C([0,1]}t^n\mathrm{d}t.$$

D'après la question a), $g = 0$ donc

$$\forall t \in]0,1],\ tf(-\ln t) = 0$$

donc

$$\forall t > 0,\ f(-\ln t) = 0$$

et comme $t \mapsto -\ln t$ parcours $[0,+\infty[$, alors

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = 0$$

autrement dit $f = 0$.