The University of New South Wales

School of Electrical Engineering and
Computer Science and Engineering

The Élan Am386SC300 Portable Computer

John Zaitseff (2120715)

Bachelor of Engineering (Computer Engineering)

October 1995

Supervisor: A/Prof. Branko Celler
Assessor: Dr. Tim Hesketh

Contents

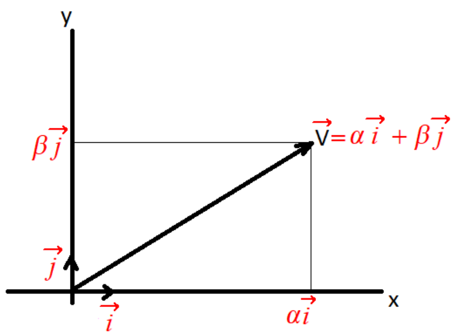
List of Figures

List of Tables

Chapter 1

Seminario de Robótica

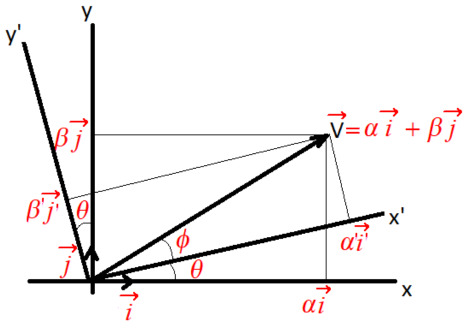
Comencemos con el proceso de posicionamiento. Primero que todo es ubicarnos en el espacio y generar un punto de referancia que se llamará origen de coordenadas.
Dos conceptos especiales que se tienen que tener presentes es el de vector de posición y el de espacio vectorial. Recuerde el concepto de base que es el conjunto generador del espacio vectorial.
Considere el plano cartesiano como origen, base y espacio vectorial. Considere un vector escrito en dicha base. Dicho vector en la base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$ se escribe como $\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}}$.



Note si el vector $\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j}$ donde $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ entonces

$$\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j} = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

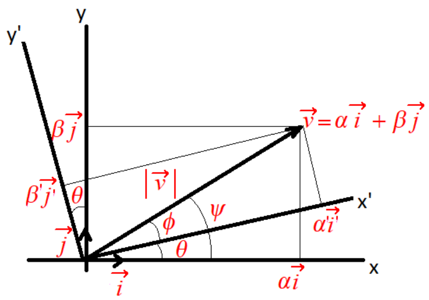
Ahora considere en rotar el sistema xy un ángulo θ como se muestra en la figura



Piense como se escribe el vector $\overrightarrow{v}$ en la nueva base $\left\{\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}\right\}$. Observe que el vector en la nueva base en el gráfico se denotó como:

$$\overrightarrow{v} = \alpha' \overrightarrow{i'} + \beta' \overrightarrow{j'}$$

Si el vector mide $v = |\overrightarrow{v}|$ entonces $\alpha' = |\overrightarrow{v}| \cos(\phi)$ y $\beta' = |\overrightarrow{v}| \sin(\phi)$



Sea ψ el ángulo del vector con respecto eje x del plano cartesiano original, note que $\phi = \psi - \theta$. Además observe que $\alpha = |\overrightarrow{v}| \cos(\psi)$ y $\beta = |\overrightarrow{v}| \sin(\psi)$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\alpha' &= |\overrightarrow{v}| \cos(\phi) = |\overrightarrow{v}| \cos(\psi - \theta) = |\overrightarrow{v}| (\cos(\psi) \cos(\theta) + \sin(\psi) \sin(\theta)) \\
\beta' &= |\overrightarrow{v}| \sin(\phi) = |\overrightarrow{v}| \sin(\psi - \theta) = |\overrightarrow{v}| (\sin(\psi) \cos(\theta) - \cos(\psi) \sin(\theta))
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\alpha' &= |\overrightarrow{v}| \cos(\psi) \cos(\theta) + |\overrightarrow{v}| \sin(\psi) \sin(\theta) = (|\overrightarrow{v}| \cos(\psi)) \cos(\theta) + (|\overrightarrow{v}| \sin(\psi)) \sin(\theta) \\
&= \alpha \cos(\theta) + \beta \sin(\theta) \\
\beta' &= |\overrightarrow{v}| \sin(\psi) \cos(\theta) - |\overrightarrow{v}| \cos(\psi) \sin(\theta) = (|\overrightarrow{v}| \sin(\psi)) \cos(\theta) - (|\overrightarrow{v}| \cos(\psi)) \sin(\theta) \\
&= \beta \cos(\theta) - \alpha \sin(\theta)
\end{aligned}$$

o mejor aún:

$$\begin{aligned}
\alpha' &= \alpha \cos(\theta) + \beta \sin(\theta) \\
\beta' &= -\alpha \sin(\theta) + \beta \cos(\theta)
\end{aligned}$$

o lo que es lo mismo de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Donde la matriz $M^* = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ es conocida como la matriz de rotación del espacio vectorial. Tenga presente que si yo soy el observador y me ubico en el sistema coordenado, al rotar el sistema coordenado en sentido contrario a las manecillas del reloj el vector se vera rotando en favor de las manecillas del reloj.
Despeje el vector $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$. Esto es

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En donde $M = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ rota el vector en sentido contrario de las manecillas del relo. Es decir M rota el vector no al sistema.

1.1 Matriz de traslación

Considere un vector ubicado en el punto de coordenadas $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ y suponga que se desea llevar en el plano al punto $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, tenga presente que $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ se encuentra en el origen de coordenadas, entonces para visualizar mejor este esquema considere al vector $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ como $\begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{bmatrix}$ donde $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es el origen de coordenadas. Por lo tanto si se desea trasladas el vector a que nazca en $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ y finalece en $\begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix}$ entonces es necesario encontrar una matriz tal que al multiplicarla por $\begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{bmatrix}$ se obtenga $\begin{bmatrix} a & x+a \\ b & y+b \end{bmatrix}$, es decir:

$$\begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & x+a \\ b & y+b \end{bmatrix}$$

es decir:

$$\begin{aligned} mx+ny &= x+a \\ px+qy &= y+b \end{aligned}$$

Pero observe que:

$$\begin{aligned} m(0)+n(0) &= a \\ p(0)+q(0) &= b \end{aligned}$$

es un sistema de ecuaciones que es imposible de resolver ya que no hay solución. Por lo que lo anterior no presenta solución, es decir que no existe en $\mathbb{R}^2$ dicha matriz que satisfaga el modelo anterior. Sin embargo en $\mathbb{R}^3$ si existe dicha matriz. Pero para lograrlo es necesario presentar otro modelo matricial de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} m & n & p \\ q & r & s \\ t & u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & y \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & x+a \\ b & y+b \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

en este caso se presenta el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} p &= a \quad mx+ny+p=x+a \\ s &= b \quad qx+ry+s=y+b \\ v &= 1 \quad tx+uy+v=1 \end{aligned}$$

Al resolver el anterior sistema de ecuaciones lineales se obtiene que:

$$\begin{aligned} p &= a \quad m=1 \text{ y } n=0 \\ s &= b \quad q=0 \text{ y } r=1 \\ v &= 1 \quad u=0 \text{ y } t=0 \end{aligned}$$

Por lo que dicha matriz tiene la forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & y \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & x+a \\ b & y+b \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Con lo cual se obtiene dicha matriz de trslación en las componentes matriciales. Al valor unitario colocado al final (última fila de la matriz) de la matriz anterior se le llama escala y es el tamaño al cual se apliaría el vector, minetras que la componente unitaria agregada al vector original es el factor operador para registrar el producto de operación que conserve la posición y la forma requerida.

Example 1 *: Usando matlab el código sería*

```
clc;clear all;close all;
A=[0 1;0 1;1 1];
plot(A(1,:),A(2,:))
a=5;
axis([-a a -a a])
tr=[1;3];
for i=1:50
tras=[1 0 i*tr(1)/50;0 1 i*tr(2)/50;0 0 1];
v=tras*A;
pause(0.02)
plot(v(1,:),v(2,:))
axis([-a a -a a])
end
```

Para construir en simulación un sólido en 3d lo más conveniente es saber usar la geometria de la variable compleja, así:

```
cla;clear all; close all;
n=30;
t=0:2*pi/n:2*pi;
x=cos(t);
y=sin(t);
z=0*ones(1,length(t));
z1=ones(1,length(t));
A=[x x;y y;z z1]
for q=1:n
caras(q,:)=[q q+1 q+n+2 q+n+1];
end
tapas=[1:n;n+2:2*n+1];
patch('faces',caras,'vertices',A','facecolor','b','edgecolo','b')
patch('faces',tapas,'vertices',A','facecolor','b','edgecolo','b')
view([135 25])
```