



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

SEDE MEDELLÍN

Óptica

**Cuarto parcial: Difracción de Fraunhofer para
avertura rectangular y otra en forma de anillo
separadas una distancia D**

Presentado por:
Mauricio Ríos Hernández

2024-2

Índice

Índice de figuras	3
1. Teoría y contexto	4
2. Desarrollo del problema	7
3. Análisis de la integral de interferencia para el anillo	8
4. Análisis de la integral de interferencia para la rendija desplazada	10
5. Análisis de intensidad y patrón de difracción	10

Índice de figuras

1.	Sistema de interferencia de dos pequeños agujeros.	4
2.	Sistema de interferencia de agujero continuo.	5
3.	Sistema de interferencia frentes de onda planas.	6
4.	Geometría del problema.	8
5.	Geometría del problema 3D.	8

1. Teoría y contexto

Para desarrollar el problema es importante entender la teoría detrás de la integral de difracción. Se sabe que la ecuación de un campo electromagnético está dado por:

$$E(\vec{r}, t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{i(|\vec{k}|R - \omega t + \varphi_0)}$$

$$E(\vec{r}, t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{i(|\vec{k}|R - \omega t + \varphi_0)}$$

y Para una onda de frente de onda plana:

$$E(\vec{r}, t) = \varepsilon e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_0)}$$

Ahora considerando el siguiente sistema, para analizar la difracción:

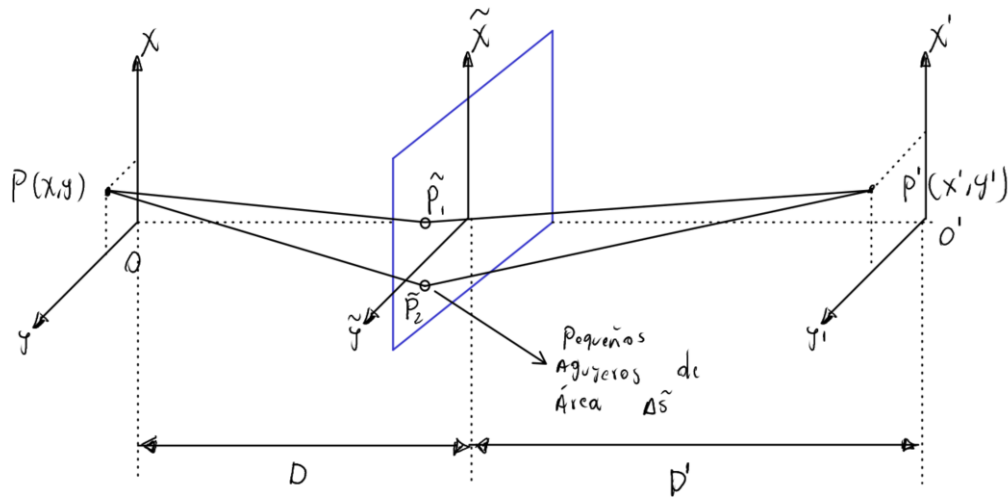


Figura 1: Sistema de interferencia de dos pequeños agujeros.

de esta forma los campos que llegan a las rendijas y a la pantalla de observación son respectivamente:

$$E' = C \frac{\tilde{E}}{R_1'} e^{i(|\vec{k}|R_1' - \omega t)} \Delta \tilde{S}$$

$$\tilde{E} = \frac{E}{R_1} e^{i|\vec{k}|R_1}$$

Manipulando estas expresiones:

$$E' = C \frac{\frac{E}{R_1} e^{i|\vec{k}|R_1}}{R_1'} e^{i(|\vec{k}|R_1' - \omega t)} \Delta \tilde{S} = C E e^{-i\omega t} e^{\frac{i|\vec{k}|(R_1 + R_1')}{R_1 R_1'}} \Delta \tilde{S}$$

$$\rightarrow E_1' = C E e^{-i\omega t} e^{\frac{i|\vec{k}|(R_1 + R_1')}{R_1 R_1'}} \Delta \tilde{S}, E_2' = C E e^{-i\omega t} e^{\frac{i|\vec{k}|(R_2 + R_2')}{R_2 R_2'}} \Delta \tilde{S}$$

$$E' = E_1' + E_2' = C E e^{-i\omega t} \left\{ \frac{e^{\frac{i|\vec{k}|(R_1 + R_1')}{R_1 R_1'}}}{R_1 R_1'} + \frac{e^{\frac{i|\vec{k}|(R_2 + R_2')}{R_2 R_2'}}}{R_2 R_2'} \right\} \Delta \tilde{S}$$

$$\tilde{E}_1 = \frac{E}{R_1} e^{i|\vec{k}|R_1}, \tilde{E}_2 = \frac{E}{R_1} e^{i|\vec{k}|R_2}$$

$$\rightarrow E' = C e^{-i\omega t} \left\{ \frac{\tilde{E}_1 e^{\frac{i|\vec{k}|R_1'}{R_1}}}{R_1'} + \frac{\tilde{E}_2 e^{\frac{i|\vec{k}|R_2'}{R_2}}}{R_2'} \right\} \Delta \tilde{S}$$

Generalizando para

$$\tilde{P}_j (j = 1, 2, \dots N)$$

$$E' = C e^{-i\omega t} \sum_{j=1}^N \frac{\tilde{E}_j e^{i|\vec{k}|R'_j}}{R'_j} \Delta \tilde{S}$$

Ahora suponiendo que se tiene una abertura $\tilde{\sigma}_0$, como se enseña en el sistema de la figura 2

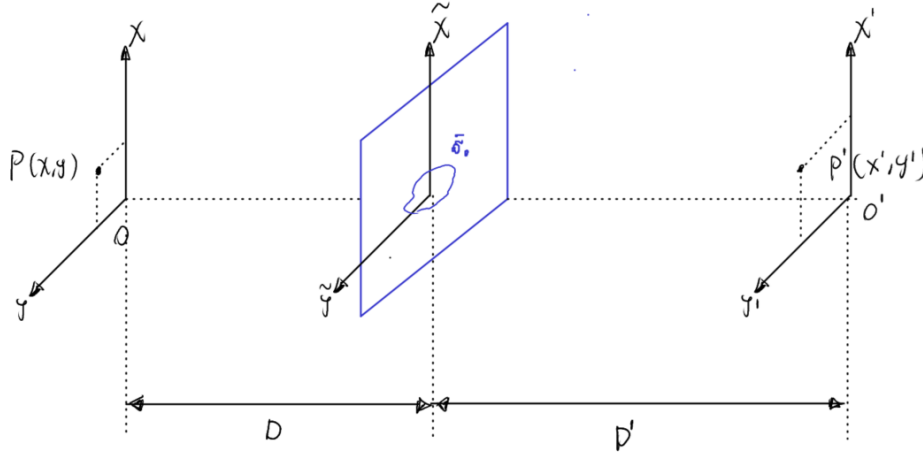


Figura 2: Sistema de interferencia de agujero continuo.

En este caso se tiene

$$N \rightarrow \infty$$

$$E' = C e^{-i\omega t} \iint_{\tilde{\sigma}_0} \frac{\tilde{E} e^{i|\vec{k}|R'}}{R'} d\tilde{S}$$

Y se define la función:

$$\tilde{\tau}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \begin{cases} 1, & \text{si } (\tilde{x}, \tilde{y}) \text{ está dentro de la abertura } \tilde{\sigma}_0 \\ 0, & \text{si } (\tilde{x}, \tilde{y}) \text{ está fuera de la abertura } \tilde{\sigma}_0 \end{cases}$$

La cuál permite expresar la integral de interferencia como:

$$E' = C e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\tau}(\tilde{x}, \tilde{y}) \tilde{E} e^{i|\vec{k}|R'}}{R'} d\tilde{x} d\tilde{y}$$

Manipulando esta expresión:

$$\tilde{E} = \frac{E}{R} e^{i|\vec{k}|R}$$

$$\rightarrow E' = E e^{-i\omega t} C \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\tau}(\tilde{x}, \tilde{y}) e^{i|\vec{k}|(R+R')}}{RR'} d\tilde{x} d\tilde{y}$$

Ahora se define el factor Q que nos permite evitar que la expresión sea genere frentes de ondas en cada fuente puntual de Huygens:

$$Q = \frac{1}{2} (\cos \theta_{\hat{n}} + \cos \theta'_{\hat{n}})$$

Si $\theta'_{\hat{n}} = \pi - \theta_{\hat{n}}$ entonces $Q \approx 0$

Si $\theta'_{\hat{n}} \approx \theta_{\hat{n}} \approx 0$ entonces $Q \approx 1$

Finalmente la integral de difracción queda dada por:

$$E' = E e^{-i\omega t} C \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Q \frac{\tilde{\tau}(\tilde{x}, \tilde{y}) e^{i|\vec{k}|(R+R')}}{RR'} d\tilde{x} d\tilde{y}$$

$$\rightarrow E' = E e^{-i\omega t} C \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Q \frac{\tilde{\tau}(\tilde{x}, \tilde{y}) e^{i|\vec{k}|(R')}}{R'} d\tilde{x} d\tilde{y}$$

Es importante mencionar que este análisis solo se analizando el caso de ondas planas:

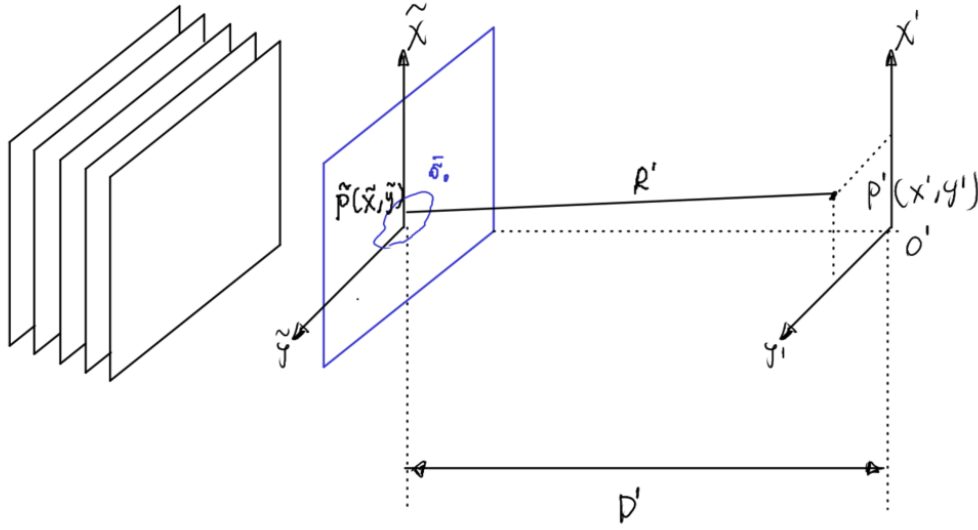


Figura 3: Sistema de interferencia frentes de onda planas.

Con

$$R' = \sqrt{D'^2 + (x' - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2} = D' \sqrt{1 + \frac{(x' - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2}{D'^2}}$$

Utilizando la aproximación del binomio de Newton:

$$R' \approx D' \left(1 + \frac{1}{2} \frac{(x' - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2}{D'^2} \right) = \left(D' + \frac{(x' - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2}{2D'} \right)$$

$$= \left(D' + \frac{x'^2 - 2x'\tilde{x} + \tilde{x}^2 + y'^2 - 2y'\tilde{y} + \tilde{y}^2}{2D'} \right)$$

Aquí solo se va a trabajar en campo lejano o régimen de Fraunhofer, por lo que para que esto se cumpla:

$$\frac{x'^2 + \tilde{y}^2}{2D'} \simeq 0$$

$$\rightarrow R' \approx D' + \frac{x'^2 + y'^2}{2D'} - \frac{x'\tilde{x} + y'\tilde{y}}{D'}$$

$$\left| \vec{k} \right| \frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}{2D'} \ll 2\pi \rightarrow D' \gg n \frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}{2\lambda_0}$$

y bajo aproximaciones paraxiales, se modifica la expresión así:

$$\begin{aligned}
E' &= Ee^{-i\omega t} C \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Q \frac{\tilde{\tau}(\tilde{x}, \tilde{y}) e^{i|\vec{k}| \left(D' + \frac{x'^2 + y'^2}{2D'} - \frac{x'\tilde{x} + y'\tilde{y}}{D'} \right)}}{D' + \frac{x'^2 + y'^2}{2D'} - \frac{x'\tilde{x} + y'\tilde{y}}{D'}} d\tilde{x} d\tilde{y} \\
&\quad D' \gg x'^2 + y'^2 \wedge D' \gg x'\tilde{x} + y'\tilde{y} \\
&\quad \rightarrow \frac{1}{D' + \frac{x'^2 + y'^2}{2D'} - \frac{x'\tilde{x} + y'\tilde{y}}{D'}} \approx \frac{1}{D'} \\
\rightarrow E' &= Ee^{-i\omega t} C \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Q \frac{\tilde{\tau}(\tilde{x}, \tilde{y}) e^{i|\vec{k}| \left(D' + \frac{x'^2 + y'^2}{2D'} - \frac{x'\tilde{x} + y'\tilde{y}}{D'} \right)}}{D' + \frac{x'^2 + y'^2}{2D'} - \frac{x'\tilde{x} + y'\tilde{y}}{D'}} d\tilde{x} d\tilde{y} \\
&\approx Ee^{-i\omega t} C \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Q \frac{\tilde{\tau}(\tilde{x}, \tilde{y}) e^{i|\vec{k}| \left(D' + \frac{x'^2 + y'^2}{2D'} - \frac{x'\tilde{x} + y'\tilde{y}}{D'} \right)}}{D'} d\tilde{x} d\tilde{y}
\end{aligned}$$

Para efectos de este parcial se considera $Q \approx 1$

$$\begin{aligned}
\rightarrow E' &= Ee^{-i\omega t} \frac{C}{D'} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\tau}(\tilde{x}, \tilde{y}) e^{i|\vec{k}| \left(D' + \frac{x'^2 + y'^2}{2D'} - \frac{x'\tilde{x} + y'\tilde{y}}{D'} \right)} d\tilde{x} d\tilde{y} \\
&= Ee^{-i|\vec{k}| \left(D' + \frac{x'^2 + y'^2}{2D'} + \frac{\omega t}{|\vec{k}|} \right)} \frac{C}{D'} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\tau}(\tilde{x}, \tilde{y}) e^{-i|\vec{k}| \left(\frac{x'\tilde{x} + y'\tilde{y}}{D'} \right)} d\tilde{x} d\tilde{y}
\end{aligned}$$

En este punto se definen las frecuencias espaciales:

$$\begin{aligned}
f_x &\equiv \frac{k_x}{2\pi} = \frac{|\vec{k}|}{2\pi} \frac{x'}{D'} \approx \frac{|\vec{k}|}{2\pi} \sin \theta'_x \\
f_y &\equiv \frac{k_y}{2\pi} = \frac{|\vec{k}|}{2\pi} \frac{y'}{D'} \approx \frac{|\vec{k}|}{2\pi} \sin \theta'_y
\end{aligned}$$

Lo que permite escribir la integral de difracción en terminos de la transformada de Fourier espacial 2D:

$$\begin{aligned}
E' &= Ee^{-i|\vec{k}| \left(D' + \frac{x'^2 + y'^2}{2D'} + \frac{\omega t}{|\vec{k}|} \right)} \frac{C}{D'} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\tau}(\tilde{x}, \tilde{y}) e^{-i(k_x \tilde{x} + k_y \tilde{y})} d\tilde{x} d\tilde{y} \\
&= Ee^{-i|\vec{k}| \left(D' + \frac{x'^2 + y'^2}{2D'} + \frac{\omega t}{|\vec{k}|} \right)} \frac{C}{D'} \mathfrak{F} \{ \tilde{\tau}(\tilde{x}, \tilde{y}) \}
\end{aligned}$$

y de esta manera se puede encontrar el patrón de difracción:

$$I' = \frac{1}{2} \frac{1}{\eta} E'(E')^* = I_{fuente} \frac{|C|^2}{D'^2} [\mathfrak{F} \{ \tilde{\tau}(\tilde{x}, \tilde{y}) \}]^2$$

Con

$$\begin{aligned}
C &= \frac{n}{i\lambda_0} \text{ (Esto se conoce analizando la difracción de Fresnel)} \\
\rightarrow I' &= I_{fuente} \frac{n^2}{\lambda_0^2 D'^2} [\mathfrak{F} \{ \tilde{\tau}(\tilde{x}, \tilde{y}) \}]^2
\end{aligned}$$

2. Desarrollo del problema

Usando los conceptos vistos en clase, incluido los casos de aberturas estudiadas, determine la expresión analítica del patrón de difracción de Fraunhofer por las dos aberturas, una rectangular y la otra en forma de anillo separadas una distancia D como se muestra en la figura abajo.

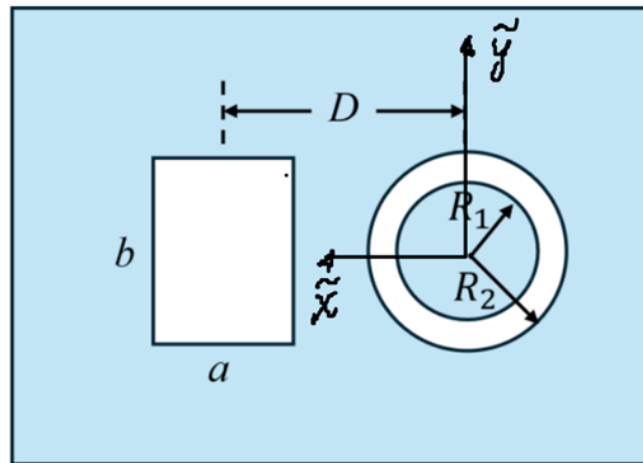


Figura 4: Geometría del problema.

O el sistema en 3D está dado por:

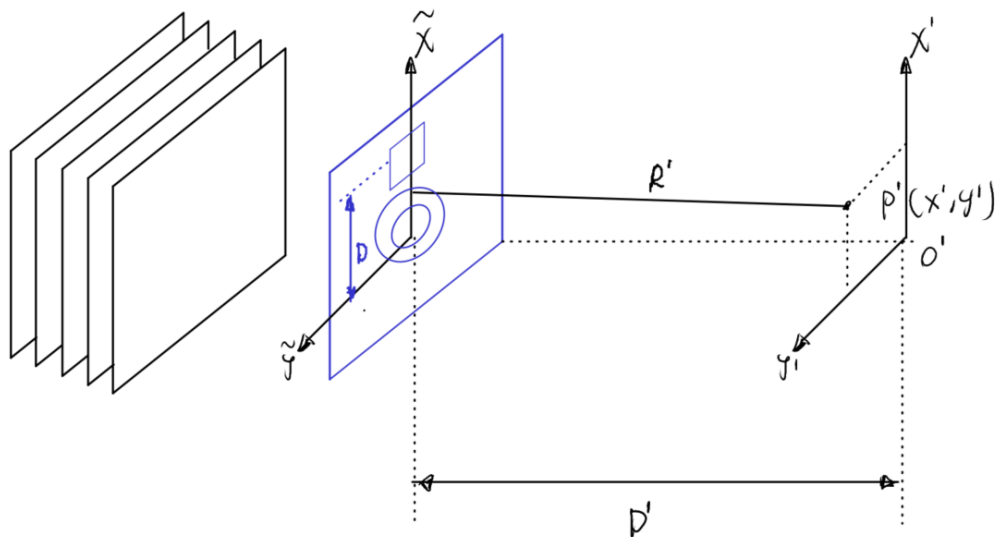


Figura 5: Geometría del problema 3D.

3. Análisis de la integral de interferencia para el anillo

Para el anillo

$$\tilde{\tau}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \begin{cases} 1 & \text{si } R_1 < \tilde{r} < R_2 \\ 0, & \text{otras condiciones} \end{cases} = \tilde{\tau}(\tilde{r})$$

$$\Im \{ \tilde{\tau}(\tilde{x}, \tilde{y}) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\tau}(\tilde{x}, \tilde{y}) e^{-i(k_x \tilde{x} + k_y \tilde{y})} d\tilde{x} d\tilde{y}$$

Coordenadas polares:
$$\begin{cases} \tilde{x} = \tilde{r} \sin \tilde{\phi} \\ \tilde{y} = \tilde{r} \cos \tilde{\phi} \\ d\tilde{x} d\tilde{y} = \tilde{r} d\tilde{\phi} d\tilde{r} \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{Se define: } \begin{cases} k_r = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \sqrt{\left(\left|\vec{k}\right| \frac{x'}{D'}\right)^2 + \left(\left|\vec{k}\right| \frac{y'}{D'}\right)^2} = n \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{r'}{D'} \\ k_x = k_r \sin \phi' \\ k_y = k_r \cos \phi' \end{cases}$$

$$\rightarrow \Im \{ \tilde{\tau}(\tilde{x}, \tilde{y}) \} = \int_{R_1}^{R_2} \tilde{r} d\tilde{r} \int_0^{2\pi} e^{-i(k_r \sin \phi' \tilde{r} \sin \tilde{\phi} + k_r \cos \phi' \tilde{r} \cos \tilde{\phi})} d\tilde{\phi}$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \tilde{r} d\tilde{r} \int_0^{2\pi} e^{-i \frac{\lambda_0 D'}{2\pi n} \tilde{r} (\sin \phi' \sin \tilde{\phi} + \cos \phi' \cos \tilde{\phi})} d\tilde{\phi} = \int_{R_1}^{R_2} \tilde{r} d\tilde{r} \int_0^{2\pi} e^{-i k_r \tilde{r} \cos(\tilde{\phi} - \phi')} d\tilde{\phi}$$

Se sabe que:

$$J_0(W) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iW \cos(\tilde{\phi} - \phi')} d\tilde{\phi}$$

$$\rightarrow 2\pi J_0(W) = \int_0^{2\pi} e^{-iW \cos(\tilde{\phi} - \phi')} d\tilde{\phi}$$

Para este caso $W = k_r \tilde{r}$

$$\Im \{ \tilde{\tau}(\tilde{x}, \tilde{y}) \} = \int_{R_1}^{R_2} \tilde{r} d\tilde{r} \int_0^{2\pi} e^{-i \frac{\lambda_0 D'}{2\pi n} k_r \tilde{r} \cos(\tilde{\phi} - \phi')} d\tilde{\phi} = \int_{R_1}^{R_2} \tilde{r} 2\pi J_0(k_r \tilde{r}) d\tilde{r}$$

$$= 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \tilde{r} J_0(k_r \tilde{r}) d\tilde{r}$$

Usando la identidad:

$$W \frac{dJ_n(W)}{dW} + nJ_n(W) = WJ_{n-1} \xrightarrow{n=1} W \frac{dJ_1(W)}{dW} + J_1(W) = WJ_0$$

$$W \frac{dJ_1(W)}{dW} + J_1(W) = \frac{d(WJ_1)}{dW} \rightarrow \frac{d(WJ_1)}{dW} = WJ_0 \rightarrow WJ_1 = \int_0^{W'} W' J_0 dW'$$

$$\rightarrow \Im \{ \tilde{\tau}(\tilde{x}, \tilde{y}) \} = \frac{2\pi}{k_r^2} \int_{k_r R_1}^{k_r R_2} k_r \tilde{r} J_0(k_r \tilde{r}) k_r d\tilde{r} = \frac{2\pi}{k_r^2} \left(\int_0^{k_r R_2} k_r \tilde{r} J_0(k_r \tilde{r}) d\tilde{r} - \int_0^{k_r R_1} k_r \tilde{r} J_0(k_r \tilde{r}) d\tilde{r} \right)$$

$$= \frac{2\pi}{k_r^2} (k_r R_2 J_1(k_r R_2) - k_r R_1 J_1(k_r R_1)) = \frac{2\pi}{k_r} (R_2 J_1(k_r R_2) - R_1 J_1(k_r R_1))$$

Finalmente, se puede expresar el campo en la pantalla de observación:

$$\Im \{ \tilde{\tau}(\tilde{x}, \tilde{y}) \} = \frac{2\pi}{k_r} (R_2 J_1(k_r R_2) - R_1 J_1(k_r R_1)) = 2\pi \left(R_2^2 \frac{J_1(k_r R_2)}{k_r R_2} - R_1^2 \frac{J_1(k_r R_1)}{k_r R_1} \right)$$

$$E'_{ring} = E e^{-i|\vec{k}| \left(D' + \frac{x'^2 + y'^2}{2D'} + \frac{\omega t}{|\vec{k}|} \right)} \frac{C}{D'} \left\{ 2\pi \left(R_2^2 \frac{J_1(k_r R_2)}{k_r R_2} - R_1^2 \frac{J_1(k_r R_1)}{k_r R_1} \right) \right\}$$

Con

$$k_r = n \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{r'}{D'} = n \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{D'}$$

4. Análisis de la integral de interferencia para la rendija desplazada

Para el rectángulo:

$$\tilde{\tau}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \begin{cases} 1 & \text{si } D - \frac{a}{2} < \tilde{x} < D + \frac{a}{2} \wedge |\tilde{y}| < \frac{b}{2} \\ 0 & \text{otras condiciones} \end{cases}$$

$$\Im \{ \tilde{\tau}(\tilde{x}, \tilde{y}) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\tau}(\tilde{x}, \tilde{y}) e^{-i(k_x \tilde{x} + k_y \tilde{y})} d\tilde{x} d\tilde{y}$$

$$= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{D-\frac{a}{2}}^{D+\frac{a}{2}} e^{-i(k_x \tilde{x} + k_y \tilde{y})} d\tilde{x} d\tilde{y} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-ik_y \tilde{y}} d\tilde{y} \int_{D-\frac{a}{2}}^{D+\frac{a}{2}} e^{-ik_x \tilde{x}} d\tilde{x}$$

$$= \frac{1}{-ik_y} \left(e^{-ik_y \frac{b}{2}} - e^{ik_y \frac{b}{2}} \right) \frac{1}{-ik_x} \left(e^{-ik_x \{D+\frac{a}{2}\}} - e^{-ik_x \{D-\frac{a}{2}\}} \right)$$

$$= \frac{1}{-ik_y} \left(e^{-ik_y \frac{b}{2}} - e^{ik_y \frac{b}{2}} \right) \frac{e^{-ik_x D}}{-ik_x} \left(e^{-ik_x \frac{a}{2}} - e^{ik_x \frac{a}{2}} \right)$$

Usando la identidad de Euler:

$$e^{-ik_y \frac{b}{2}} - e^{ik_y \frac{b}{2}} = \cos\left(-k_y \frac{b}{2}\right) + i \sin\left(-k_y \frac{b}{2}\right) - \cos\left(k_y \frac{b}{2}\right) - i \sin\left(k_y \frac{b}{2}\right)$$

$$= -2i \sin\left(k_y \frac{b}{2}\right)$$

De esta forma:

$$\Im \{ \tilde{\tau}(\tilde{x}, \tilde{y}) \} = e^{-ik_x D} \frac{1}{-ik_y} \left(e^{-ik_y \frac{b}{2}} - e^{ik_y \frac{b}{2}} \right) \frac{1}{-ik_x} \left(e^{-ik_x \frac{a}{2}} - e^{ik_x \frac{a}{2}} \right)$$

$$= e^{-ik_x D} \frac{1}{-ik_y} \left\{ -2i \sin\left(k_y \frac{b}{2}\right) \right\} \frac{1}{-ik_x} \left\{ -2i \sin\left(k_x \frac{a}{2}\right) \right\}$$

$$= e^{-ik_x D} \frac{ab}{-ibk_y} \left\{ -2i \sin\left(k_y \frac{b}{2}\right) \right\} \frac{1}{-iak_x} \left\{ -2i \sin\left(k_x \frac{a}{2}\right) \right\}$$

$$= abe^{-ik_x D} \sin c\left(\frac{\beta_y}{2}\right) \sin c\left(\frac{\beta_x}{2}\right)$$

Con

$$\beta_y \equiv k_y b \wedge \beta_x \equiv k_x a$$

Finalmente, el campo está dado por:

$$E'_{Abertura} = E e^{-i|\vec{k}| \left(D' + \frac{x'^2 + y'^2}{2D'} + \frac{\omega t}{|\vec{k}|} \right)} \frac{C}{D'} \left\{ abe^{-ik_x D} \sin c\left(\frac{\beta_y}{2}\right) \sin c\left(\frac{\beta_x}{2}\right) \right\}$$

5. Análisis de intensidad y patrón de difracción

El campo en la pantalla de observación está dado por:

$$E' = E'_{Abertura} + E'_{Ring}$$

$$= E e^{-i|\vec{k}| \left(D' + \frac{x'^2 + y'^2}{2D'} + \frac{\omega t}{|\vec{k}|} \right)} \frac{C}{D'} \left\{ abe^{-ik_x D} \sin c\left(\frac{\beta_y}{2}\right) \sin c\left(\frac{\beta_x}{2}\right) + 2\pi \left(R_2^2 \frac{J_1(k_r R_2)}{k_r R_2} - R_1^2 \frac{J_1(k_r R_1)}{k_r R_1} \right) \right\}$$

Finalmente, el patrón de difracción estará dado por:

$$I' = I_{\text{máx}} \left| abe^{-ik_x D} \sin c\left(\frac{\beta_y}{2}\right) \sin c\left(\frac{\beta_x}{2}\right) + 2\pi \left(R_2^2 \frac{J_1(k_r R_2)}{k_r R_2} - R_1^2 \frac{J_1(k_r R_1)}{k_r R_1} \right) \right|^2$$

$$\frac{I'}{I_{\text{máx}}} = \left| a b e^{-i k_x D} \sin c \left(\frac{\beta_y}{2} \right) \sin c \left(\frac{\beta_x}{2} \right) + 2\pi \left(R_2^2 \frac{J_1(k_r R_2)}{k_r R_2} - R_1^2 \frac{J_1(k_r R_1)}{k_r R_1} \right) \right|^2$$

Con:

$$\begin{aligned} k_r &= n \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{r'}{D'} = n \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{D'} \\ \beta_y &= k_y b = \left| \vec{k} \right| \frac{y'}{D'} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{y'}{D'} b \\ \beta_x &= k_x a = \left| \vec{k} \right| \frac{x'}{D'} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{x'}{D'} a \\ D' &\gg x'^2 + y'^2 \wedge D' \gg x' \tilde{x} + y' \tilde{y} \\ \left| \vec{k} \right| \frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}{2D'} &\ll 2\pi \rightarrow D' \gg n \frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}{2\lambda_0} \end{aligned}$$