THE UNIVERSITY OF NEW SOUTH WALES

SCHOOL OF ELECTRICAL ENGINEERING AND
COMPUTER SCIENCE AND ENGINEERING

The Élan Am386SC300 Portable Computer

John Zaitseff (2120715)

Bachelor of Engineering (Computer Engineering)

October 1995

Supervisor: A/Prof. Branko Celler
Assessor: Dr. Tim Hesketh

Contents

List of Figures

List of Tables

Chapter 1

Repaso

Definition 1 *: (Transformada de Laplacé) Considere una función $y = f(t)$ continua a tramos con un número finito de discontinuidades en el intervalo $[0, \infty)$, se define la transformada de Laplace de $y = f(t)$ como:*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt$$

tenga presente que esta integral debe existir para que exista la transformada de lo contrario no existe dicha transformada y si t representa el tiempo entonces las unidades de st debe ser adimensional, es decir, $[st] = 1$ pero si t es el tiempo, entonces $[st] = [s][t] = 1$ siendo $[t] = seg$ por lo que:$[s] = \frac{1}{[t]} = \frac{1}{seg} = Hertz$ por lo que al calcular la integral $\int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt$ desaparece t dado que está evaluada, de donde las unidades en la que se encuentra la transformada es la frecuencia dado que s es la variable que predominaría libre. Por lo que la transformada de Laplacé esta en términos de la frecuencia. Además tenga presente que $s = \sigma + j\omega$ con σ y ω en $\mathbb{R}$

Example 2 *: Halle la transformada de Laplacé de las siguientes funciones.*
1.$f\ (t) = e^{-\alpha t}$ para $t \geq 0$ y $\alpha > 0$.
2. $f\ (t) = \alpha g(t) + \beta h(t)$ es decir que la T.L (transformada de Laplacé) es una transformación lineal, (TL)
3. $f(t) = \sinh(\alpha t)$
4. $f(t) = \cosh(\alpha t)$
5. $f(t) = \cos(\beta t)$
6. $f(t) = \sin(\beta t)$

Solution 3 *: Como*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt$$

1.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{e^{-\alpha t}\right\} &= \int_0^\infty e^{-\alpha t}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-\alpha t - st}dt = \int_0^\infty e^{-(\alpha+s)t}dt \\
&= \left.\frac{e^{-(\alpha+s)t}}{-(\alpha+s)}\right|_0^\infty = -\frac{0-1}{(\alpha+s)} = \frac{1}{s+\alpha}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{\alpha g(t) + \beta h(t)\} = \int_0^\infty (\alpha g(t) + \beta h(t))\, e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty \left(\alpha g(t)\, e^{-st} + \beta h(t)\, e^{-st}\right) dt \\
&= \int_0^\infty \alpha g(t)\, e^{-st}dt + \int_0^\infty \beta h(t)\, e^{-st}dt \\
&= \alpha \int_0^\infty g(t)\, e^{-st}dt + \beta \int_0^\infty h(t)\, e^{-st}dt \\
&= \alpha\mathcal{L}\{g(t)\} + \beta\mathcal{L}\{h(t)\}.
\end{aligned}$$

Por lo que la tarnsformada de Laplacé es una transformación lineal.

3.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{\sinh(\alpha t)\} = \int_0^\infty \sinh(\alpha t)\, e^{-st}dt = \int_0^\infty \left(\frac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{2}\right) e^{-st}dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}\left\{e^{\alpha t}\right\} - \mathcal{L}\left\{e^{-\alpha t}\right\}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\alpha} - \frac{1}{s+\alpha}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{s+\alpha-(s-\alpha)}{(s-\alpha)(s+\alpha)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha}{s^2-\alpha^2}\right) \\
&= \frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{\cosh(\alpha t)\} = \int_0^\infty \cosh(\alpha t)\, e^{-st}dt = \int_0^\infty \left(\frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2}\right) e^{-st}dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}\left\{e^{\alpha t}\right\} + \mathcal{L}\left\{e^{-\alpha t}\right\}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\alpha} + \frac{1}{s+\alpha}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{s+\alpha+(s-\alpha)}{(s-\alpha)(s+\alpha)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2s}{s^2-\alpha^2}\right) \\
&= \frac{s}{s^2-\alpha^2}
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{f\left(t\right)\right\} &= \mathcal{L}\left\{\cos\left(\beta t\right)\right\} = \int_0^{\infty} \cos\left(\beta t\right) e^{-st}dt = \int_0^{\infty}\left(\frac{e^{j\beta t}+e^{-j\beta t}}{2}\right)e^{-st}dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}\left\{e^{j\beta t}\right\}+\mathcal{L}\left\{e^{-j\beta t}\right\}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\beta}+\frac{1}{s+j\beta}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{s+j\beta+\left(s-j\beta\right)}{\left(s-j\beta\right)\left(s+j\beta\right)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2s}{s^2+\beta^2}\right) \\
&= \frac{s}{s^2+\beta^2}
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{f\left(t\right)\right\} &= \mathcal{L}\left\{\sin\left(\beta t\right)\right\} = \int_0^{\infty} \sin\left(\beta t\right) e^{-st}dt = \int_0^{\infty}\left(\frac{e^{j\beta t}-e^{-j\beta t}}{2j}\right)e^{-st}dt \\
&= \frac{1}{2j}\left[\mathcal{L}\left\{e^{j\beta t}\right\}-\mathcal{L}\left\{e^{-j\beta t}\right\}\right] = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\beta}-\frac{1}{s+j\beta}\right) \\
&= \frac{1}{2j}\left(\frac{s+j\beta-\left(s-j\beta\right)}{\left(s-j\beta\right)\left(s+j\beta\right)}\right) = \frac{1}{2j}\left(\frac{2j\beta}{s^2+\beta^2}\right) \\
&= \frac{\beta}{s^2+\beta^2}
\end{aligned}$$

Example 4 *: Halle la transformada de laplacé de las siguientes funciones.*
1. $f\left(t\right) = e^{\alpha t}h\left(t\right)$
2. $f\left(t\right) = \frac{dh(t)}{dt}$
3. $f\left(t\right) = \frac{d^2h(t)}{dt^2}$
4. $f\left(t\right) = \frac{d^3h(t)}{dt^3}$
5. $f\left(t\right) = \frac{d^nh(t)}{dt^n}$
6. $f\left(t\right) = \int_0^t h\left(\tau\right)d\tau$

Solution 5 *: 1.*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{f\left(t\right)\right\} &= \mathcal{L}\left\{e^{\alpha t}h\left(t\right)\right\} = \int_0^{\infty} e^{\alpha t}h\left(t\right)e^{-st}dt \\
&= \int_0^{\infty} h\left(t\right)e^{-(s-\alpha)t}dt = H\left(s-\alpha\right)
\end{aligned}$$

siendo $H\left(s\right) = \mathcal{L}\left\{h\left(t\right)\right\} = \int_0^{\infty} h\left(t\right)e^{-st}dt.$
2.

$$\mathcal{L}\left\{f\left(t\right)\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{dh\left(t\right)}{dt}\right\} = \int_0^{\infty}\frac{dh\left(t\right)}{dt}e^{-st}dt$$

integrando por partes se hace $u = e^{-st}$ *y* $dv = \dfrac{dh\left(t\right)}{dt}dt$ *de donde* $du = -se^{-st}dt$ *y*

$v = h(t)$ por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{dh(t)}{dt}\right\} = \int_0^\infty \frac{dh(t)}{dt} e^{-st} dt \\
&= e^{-st} h(t)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty h(t)\left(-se^{-st}\right) dt \\
&= -h(0) + s\int_0^\infty h(t)\, e^{-st} dt = sH(s) - h(0)
\end{aligned}$$

siendo $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \int_0^\infty h(t)\, e^{-st} dt$.

3.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d^2h(t)}{dt^2}\right\} = \int_0^\infty \frac{d^2h(t)}{dt^2} e^{-st} dt$$

integrando por partes se hace $u = e^{-st}$ y $dv = \dfrac{d^2h(t)}{dt^2}dt$ de donde $du = -se^{-st}dt$ y $v = \dfrac{dh(t)}{dt}$ por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{d^2h(t)}{dt^2}\right\} = \int_0^\infty \frac{d^2h(t)}{dt^2} e^{-st} dt \\
&= e^{-st}\frac{dh(t)}{dt}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{dh(t)}{dt}\left(-se^{-st}\right) dt \\
&= -\frac{dh(0)}{dt} + s\int_0^\infty \frac{dh(t)}{dt} e^{-st} dt \\
&= -\frac{dh(0)}{dt} + s\left(sH(s) - h(0)\right) \\
&= s^2H(s) - sh(0) - \frac{dh(0)}{dt}
\end{aligned}$$

siendo $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \int_0^\infty h(t)\, e^{-st} dt$.

4.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d^3h(t)}{dt^3}\right\} = \int_0^\infty \frac{d^3h(t)}{dt^3} e^{-st} dt$$

integrando por partes se hace $u = e^{-st}$ y $dv = \dfrac{d^3h(t)}{dt^3}dt$ de donde $du = -se^{-st}dt$ y

$v=\dfrac{d^2h(t)}{dt^2}$ *por lo tanto:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{d^3h(t)}{dt^3}\right\}=\int_0^\infty \frac{d^3h(t)}{dt^3}e^{-st}dt \\
&= e^{-st}\frac{d^2h(t)}{dt^2}\bigg|_0^\infty-\int_0^\infty \frac{d^2h(t)}{dt^2}\left(-se^{-st}\right)dt \\
&= -\frac{d^2h(0)}{dt^2}+s\int_0^\infty \frac{d^2h(t)}{dt^2}e^{-st}dt \\
&= -\frac{d^2h(0)}{dt^2}+s\left(s^2H(s)-sh(0)-\frac{dh(0)}{dt}\right) \\
&= s^3H(s)-s^2h(0)-s\frac{dh(0)}{dt}-\frac{d^2h(0)}{dt^2}
\end{aligned}$$

siendo $H(s)=\mathcal{L}\{h(t)\}=\int_0^\infty h(t)\,e^{-st}dt.$

5.

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\left\{\frac{d^nh(t)}{dt^n}\right\}=\int_0^\infty \frac{d^nh(t)}{dt^n}e^{-st}dt$$

integrando por partes se hace $u=e^{-st}$ *y* $dv=\dfrac{d^nh(t)}{dt^n}dt$ *de donde* $du=-se^{-st}dt$ *y* $v=\dfrac{d^{(n-1)}h(t)}{dt^{n-1}}$ *por lo tanto:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{d^{n3}h(t)}{dt^n}\right\}=\int_0^\infty \frac{d^nh(t)}{dt^n}e^{-st}dt \\
&= e^{-st}\frac{d^{(n-1)}h(t)}{dt^{n-1}}\bigg|_0^\infty-\int_0^\infty \frac{d^{(n-1)}h(t)}{dt^{(n-1)}}\left(-se^{-st}\right)dt \\
&= -\frac{d^{(n-1)}h(0)}{dt^{n-1}}+s\int_0^\infty \frac{d^{(n-1)}h(t)}{dt^{n-1}}e^{-st}dt \\
&= -\frac{d^{(n-1)}h(0)}{dt^{n-1}}+s\left(s^{n-1}H(s)-s^{n-2}h(0)-s^{n-3}\frac{dh(0)}{dt}-...-\frac{d^{n-2}h(0)}{dt^{n-2}}\right) \\
&= s^nH(s)-s^{n-1}h(0)-s^{n-2}\frac{dh(0)}{dt}-...-\frac{d^{(n-1)}h(0)}{dt^{(n-1)}}
\end{aligned}$$

siendo $H(s)=\mathcal{L}\{h(t)\}=\int_0^\infty h(t)\,e^{-st}dt.$

6.

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\left\{\int_0^t h(\tau)\,d\tau\right\}=\int_0^\infty\int_0^t h(\tau)\,d\tau e^{-st}dt$$

integrando por partes se tiene que al hacer $u=\int_0^t h(\tau)\,d\tau$ *y* $dv=e^{-st}dt$ *se tiene que*

$du = h(t)\,dt$ (por teorema fundamental del cálculo) y $v = -\dfrac{e^{-st}}{s}$ por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\left\{\int_0^t h(\tau)\,d\tau\right\} = \int_0^\infty \int_0^t h(\tau)\,d\tau e^{-st} dt \\
&= -\frac{e^{-st}}{s}\int_0^t h(\tau)\,d\tau\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{e^{-st}}{s} h(t)\,dt \\
&= \frac{1}{s}\int_0^\infty h(t)\,e^{-st}dt = \frac{1}{s}H(s)
\end{aligned}$$

siendo $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \int_0^\infty h(t)\,e^{-st}dt$.

Exercise 6 *: Halle la transformada de Laplace de las siguientes funciones.*

1. $f(t) = th(t)$
2. $f(t) = t^2 h(t)$
3. $f(t) = t^3 h(t)$
4. $f(t) = t^n h(t)$
5. $f(t) = \sin(t)\,h(t)$
6. $f(t) = \cos(t)\,h(t)$
7. $f(t) = t^n \sin(t)\,h(t)$
8. $f(t) = t^n \cos(t)\,h(t)$

Solution 7 *: 1. Se pide hallar la transformada de Laplacé de la función $f(t) = th(t)$*

$$\begin{aligned}
F(s) &= \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\,e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty th(t)\,e^{-st}dt
\end{aligned}$$

Sea $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \int_0^\infty h(t)\,e^{-st}dt$ note que:

$$\begin{aligned}
\frac{dH(s)}{ds} &= \frac{d\mathcal{L}\{h(t)\}}{ds} = \frac{d}{ds}\int_0^\infty h(t)\,e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty \frac{d}{ds}\left(h(t)\,e^{-st}\right)dt = \int_0^\infty h(t)\frac{d}{ds}\left(e^{-st}\right)dt \\
&= \int_0^\infty h(t)(-t)\,e^{-st}dt = -\int_0^\infty th(t)\,e^{-st}dt
\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\int_0^\infty th(t)\,e^{-st}dt = -\frac{dH(s)}{ds}$$

pero

$$\begin{aligned}
F(s) &= \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\,e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty th(t)\,e^{-st}dt = -\frac{dH(s)}{ds}
\end{aligned}$$

por lo que:

$$\mathcal{L}\left\{th\left(t\right)\right\} = -\frac{dH\left(s\right)}{ds}$$

con $H\left(s\right) = \mathcal{L}\left\{h\left(t\right)\right\}$

2. Se pide hallar la transformada de Laplacé de la función $f\left(t\right) = t^2h\left(t\right)$

$$\begin{aligned} F\left(s\right) &= \mathcal{L}\left\{f\left(t\right)\right\} = \mathcal{L}\left\{t^2h\left(t\right)\right\} = \int_0^\infty f\left(t\right)e^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty t^2h\left(t\right)e^{-st}dt \end{aligned}$$

Sea $H\left(s\right) = \mathcal{L}\left\{h\left(t\right)\right\} = \int_0^\infty h\left(t\right)e^{-st}dt$ *note que:*

$$\begin{aligned} \frac{d^2H\left(s\right)}{ds^2} &= \frac{d^2\mathcal{L}\left\{h\left(t\right)\right\}}{ds^2} = \frac{d^2}{ds^2}\int_0^\infty h\left(t\right)e^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty \frac{d^2}{ds^2}\left(h\left(t\right)e^{-st}\right)dt = \int_0^\infty h\left(t\right)\frac{d^2}{ds^2}\left(e^{-st}\right)dt \\ &= \int_0^\infty h\left(t\right)\left(t^2\right)e^{-st}dt = \int_0^\infty t^2h\left(t\right)e^{-st}dt \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\int_0^\infty t^2h\left(t\right)e^{-st}dt = \frac{d^2H\left(s\right)}{ds^2}$$

pero

$$\begin{aligned} F\left(s\right) &= \mathcal{L}\left\{f\left(t\right)\right\} = \int_0^\infty f\left(t\right)e^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty t^2h\left(t\right)e^{-st}dt = \frac{d^2H\left(s\right)}{ds^2} \end{aligned}$$

por lo que:

$$\mathcal{L}\left\{t^2h\left(t\right)\right\} = \frac{d^2H\left(s\right)}{ds^2}$$

con $H\left(s\right) = \mathcal{L}\left\{h\left(t\right)\right\}$

3. Se pide hallar la transformada de Laplacé de la función $f\left(t\right) = t^3h\left(t\right)$

$$\begin{aligned} F\left(s\right) &= \mathcal{L}\left\{f\left(t\right)\right\} = \int_0^\infty f\left(t\right)e^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty t^3h\left(t\right)e^{-st}dt \end{aligned}$$

Sea $H\left(s\right) = \mathcal{L}\left\{h\left(t\right)\right\} = \int_0^\infty h\left(t\right)e^{-st}dt$ *note que:*

$$\begin{aligned} \frac{d^3H\left(s\right)}{ds^3} &= \frac{d^3\mathcal{L}\left\{h\left(t\right)\right\}}{ds^3} = \frac{d^3}{ds^3}\int_0^\infty h\left(t\right)e^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty \frac{d^3}{ds^3}\left(h\left(t\right)e^{-st}\right)dt = \int_0^\infty h\left(t\right)\frac{d^3}{ds^3}\left(e^{-st}\right)dt \\ &= \int_0^\infty h\left(t\right)\left(-t^3\right)e^{-st}dt = -\int_0^\infty t^3h\left(t\right)e^{-st}dt \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\int_0^{\infty} t^3 h(t)\, e^{-st} dt = -\frac{d^3 H(s)}{ds^3}$$

pero

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} t^3 h(t)\, e^{-st} dt = -\frac{d^3 H(s)}{ds^3} \end{aligned}$$

por lo que:

$$\mathcal{L}\left\{t^3 h(t)\right\} = -\frac{d^3 H(s)}{ds^3}$$

con $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$

4. Se pide hallar la transformada de Laplacé de la función $f(t) = t^n h(t)$

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} t^n h(t)\, e^{-st} dt \end{aligned}$$

Sea $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \int_0^{\infty} h(t)\, e^{-st} dt$ *note que:*

$$\begin{aligned} \frac{d^n H(s)}{ds^n} &= \frac{d^n \mathcal{L}\{h(t)\}}{ds^n} = \frac{d^n}{ds^n} \int_0^{\infty} h(t)\, e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d^n}{ds^n} \left(h(t)\, e^{-st}\right) dt = \int_0^{\infty} h(t) \frac{d^n}{ds^n} \left(e^{-st}\right) dt \\ &= \int_0^{\infty} h(t) (-t)^n e^{-st} dt = (-1)^n \int_0^{\infty} t^n h(t)\, e^{-st} dt \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\int_0^{\infty} t^n h(t)\, e^{-st} dt = (-1)^n \frac{d^n H(s)}{ds^n}$$

pero

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} t^n h(t)\, e^{-st} dt = (-1)^n \frac{d^n H(s)}{ds^n} \end{aligned}$$

por lo que:

$$\mathcal{L}\{t^n h(t)\} = (-1)^n \frac{d^n H(s)}{ds^n}$$

con $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$

5. Recuerde que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{e^{\alpha t}h(t)\right\} &= \int_0^\infty e^{\alpha t}h(t)\,e^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty h(t)\,e^{-st+\alpha t}dt \\ &= \int_0^\infty h(t)\,e^{-(s-\alpha)t}dt\end{aligned}$$

si $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \int_0^\infty h(t)\,e^{-st}dt$ *entonces*

$$H(s-\alpha) = \int_0^\infty h(t)\,e^{-(s-\alpha)t}dt = \mathcal{L}\left\{e^{\alpha t}h(t)\right\}$$

Note que $\mathcal{L}\left\{e^{j\alpha t}h(t)\right\} = H(s-j\alpha)$. *Ahora como*

$$\sin(\alpha t) = \frac{e^{j\alpha t} - e^{-j\alpha t}}{2j}$$

entonces

$$\sin(\alpha t)\,h(t) = \left(\frac{e^{j\alpha t} - e^{-j\alpha t}}{2j}\right)h(t) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\alpha t}h(t) - e^{-j\alpha t}h(t)\right)$$

y su transformada estaría dado por:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sin(\alpha t)\,h(t)\} &= \mathcal{L}\left\{\left(\frac{e^{j\alpha t} - e^{-j\alpha t}}{2j}\right)h(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2j}\left(e^{j\alpha t}h(t) - e^{-j\alpha t}h(t)\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2j}\left(\mathcal{L}\left\{e^{j\alpha t}h(t) - e^{-j\alpha t}h(t)\right\}\right) = \frac{1}{2j}\left(\mathcal{L}\left\{e^{j\alpha t}h(t)\right\} - \mathcal{L}\left\{e^{-j\alpha t}h(t)\right\}\right) \\ &= \frac{1}{2j}\left(H(s-\alpha) - H(s+\alpha)\right)\end{aligned}$$

6. Análogamente

$$\mathcal{L}\{\cos(\alpha t)\,h(t)\} = \mathcal{L}\left\{\left(\frac{e^{j\alpha t} + e^{-j\alpha t}}{2}\right)h(t)\right\} = \frac{1}{2}\left(H(s-\alpha) + H(s+\alpha)\right)$$

7. Ahora

$$\mathcal{L}\{t^n\sin(\alpha t)\,h(t)\} = (-1)^n\,\frac{d^nQ(s)}{ds^n}$$

siendo

$$Q(s) = \mathcal{L}\{\sin(\alpha t)\,h(t)\} = \frac{1}{2j}\left(H(s-\alpha) - H(s+\alpha)\right)$$

Por lo tanto

$$\mathcal{L}\{t^n\sin(\alpha t)\,h(t)\} = \frac{(-1)^n}{2j}\frac{d^n\left(H(s-\alpha) - H(s+\alpha)\right)}{ds^n}$$

8. De forma análoga

$$\mathcal{L}\{t^n\cos(\alpha t)\,h(t)\} = \frac{(-1)^n}{2}\frac{d^n\left(H(s-\alpha) + H(s+\alpha)\right)}{ds^n}$$

Definition 8 *: Se define la transformada inversa de Laplace de una función $F(s)$ a la función original $f(t)$ tal que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ y se denota $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.*

Example 9 *: La transformada inversa de Laplacé de la función $F(s) = \dfrac{1}{s-\alpha}$ es $f(t) = e^{\alpha t}$ ya que $\mathcal{L}\left\{e^{\alpha t}\right\} = \dfrac{1}{s-\alpha}$*
Ahora la transformada inversa de Laplacé de $\frac{3}{s^2-3^2}$ es $\sinh(3t)$ ya que $\mathcal{L}\{\sinh(3t)\} = \frac{3}{s^2-3^2}$. Observe que esta transformada se pudo haber realizado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{s^2-3^2} &= \frac{3}{(s-3)(s+3)} = \left(\frac{1}{2(s-3)} - \frac{1}{2(s+3)}\right) \\
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2-3^2}\right\} &= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3} - \frac{1}{s+3}\right\} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{3t} - e^{-3t}\right) = \sinh(3t)
\end{aligned}$$

1.1 Funciones de excitación

Las funciones de excitación o activación de un mivimiento son variadas y la respuesta de un sistema a dicha excitación puede manifestarse a través de un movimiento o un desplazamiento, giro y demás. Estas funciones deben convertirse en voltajes o fuerzas o presión o nivel o temperatura etc, en general en variables que deben ser controladas o variables que activan una acción.
La principal de las funciones es el escalón unitario tambien conocida como la la función de Heaviside y denotada por $\mu(t-t_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq t_0 \\ 0 & \text{si } t < t_0 \end{cases}$. Otra de las funciones es la Delta de Dirac denotada por $\delta(t-t_0) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = t_0 \\ 0 & \text{si } t \neq t_0 \end{cases}$. Es de recordar que $\frac{d\mu(t-t_0)}{dt} = \delta(t-t_0)$ y las treansformadas de dichas funciones están dadas por:
1. Recuerde que $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) f(t)\, dt = f(t_0)$. Por lo tanto $\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\}$ es:

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = \int_0^\infty \delta(t-t_0)\, e^{-st} dt = e^{-st_0}$$

2. Por otro lado

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\mu(t-t_0)\} &= \int_0^\infty \mu(t-t_0)\, e^{-st} dt = \int_{t_0}^\infty e^{-st} dt = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_{t_0}^{\infty} = 0 - \frac{e^{-st_0}}{-s} \\
&= \frac{e^{-st_0}}{s}
\end{aligned}$$

Note que cuando $t_0 = 0$ entonces

$$\mathcal{L}\{\mu(t)\} = \frac{1}{s}$$

Nuestro interés es conocer como responde un sistema frente a una excitación, con el fin de poderlo controlar a través de su función de energía. Esa función de energía puede ser llevada a cualquier tipo de variables, modificando la entrada y observando el valor de la salida.

Example 10 *: Suponga que un sistema me presenta una función de transferencia o energía dada por*

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+9s+20}$$

halle la respuesta a la excitación escalón.

Solution 11 *:*

En si el sistema responde:

$$Y(s) = G(s)\,X(s) = \frac{s+1}{s^2+9s+20}\frac{1}{s}$$

En si lo que se pide es encontrar a $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ *en efecto:*

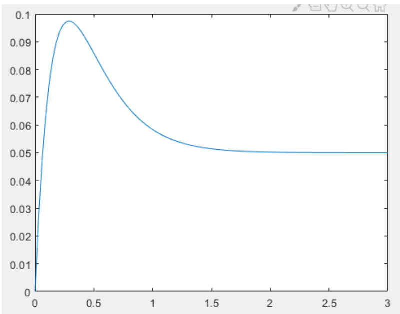
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+9s+20}\frac{1}{s}\right\}$$

luego

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s+1}{s^2+9s+20}\frac{1}{s} = \frac{s+1}{s(s+5)(s+4)} \\ &= \frac{1}{20s} - \frac{4}{5(s+5)} + \frac{3}{4(s+4)} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+9s+20}\frac{1}{s}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{20s} - \frac{4}{5(s+5)} + \frac{3}{4(s+4)}\right\} \\ &= \frac{1}{20}\mu(t) - \frac{4}{5}e^{-5t} + \frac{3}{4}e^{-4t} \end{aligned}$$



Este gráfico representa la forma en como responde el sistema frente a la excitación escalón. En este caso el sistema responde inicialmente con un sobreimpulso que sube hasta 0.1 y luego se estabiliza en 0.05.
En realidad lo que sucedió es que al sistema se le ha pedido que vaya a establecerse en 1 cuando se le introduce el escalón, pero el sistema trató de hacerlo y la carga no lo permitió. Sin enbargo el sistema fue capaz de soportar la carga hasta un valor de 0.05.

Chapter 2

Covolución

Considere un sistema que responde a una excitación $x(t)$ como $y(t)$. Se define la convolución entre $g(t)$ y $x(t)$ como:

$$y(t) = g(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

¿Quién es $g(t)$?
En matemáticas especiales se observó que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y(t)\} &= \mathcal{L}\{g(t) * x(t)\} = \int_0^{\infty} (g(t) * x(t))\, e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau e^{-st} dt \\
&= \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\, x(t-\tau)\, e^{-st} d\tau dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} g(\tau)\, x(t-\tau)\, e^{-st} dt d\tau
\end{aligned}$$

Sea $u = t - \tau$ como la derivada es con respecto a t entonces $du = dt$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{g(t) * x(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\tau}^{\infty} g(\tau)\, x(u)\, e^{-s(u+\tau)} du d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \int_{-\tau}^{\infty} x(u)\, e^{-su} e^{-s\tau} du d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\, e^{-s\tau} \left(\int_{-\tau}^{0} x(u)\, e^{-su} du + \int_0^{\infty} x(u)\, e^{-su} du \right) d\tau
\end{aligned}$$

Como el sistema debe ser causal (el sistema se excita en u=0) entoncces $\int_{-\tau}^{0} x(u)\, e^{-su} du = 0$ por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{g(t) * x(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\, e^{-s\tau} \left(\int_0^{\infty} x(u)\, e^{-su} du \right) d\tau \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\, e^{-s\tau} d\tau \right) \left(\int_0^{\infty} x(u)\, e^{-su} du \right)
\end{aligned}$$

Igualmente al ser el sistema causal se consigue que $g(\tau)$ solo responde cuando $x(u)$ se active o excite la función sobre $g(\tau)$, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\, e^{-s\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{0} g(\tau)\, e^{-s\tau} d\tau + \int_0^{\infty} g(\tau)\, e^{-s\tau} d\tau$$

como $\int_{-\infty}^{0} g(\tau) e^{-s\tau} d\tau = 0$ por ser el sistema causal, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \int_{0}^{\infty} g(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y(t)\} &= \mathcal{L}\{g(t) * x(t)\} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-s\tau} d\tau\right)\left(\int_{0}^{\infty} x(u) e^{-su} du\right) \\
&= \left(\int_{0}^{\infty} g(\tau) e^{-s\tau} d\tau\right)\left(\int_{0}^{\infty} x(u) e^{-su} du\right) \\
&= \mathcal{L}\{g(t)\} \cdot \mathcal{L}\{x(t)\} \\
Y(s) &= G(s) X(s)
\end{aligned}$$

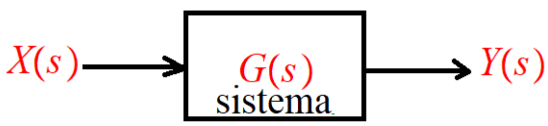
Ahora si es posible responder quien es $g(t)$ ya que

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Salida}{Entrada}$$

que se continuará llamando como función de transferencia en transformada que también vista desde la transformada de Fourier se calculó que era la función de energía del sistema gracias al teorema de parseval. Por lo que

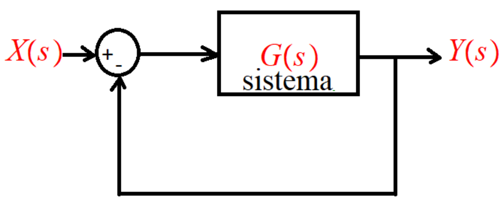
$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Y(s)}{X(s)}\right\}$$

Graficamente esto se puede ver como:



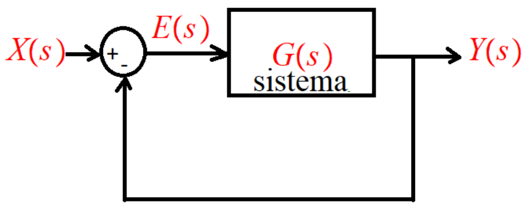
$$Y(s) = G(s) X(s)$$

Ahora que sucede si el sistema se realimenta:



donde el símbolo

es un comparador, que significa simplemente la operación menos $(-)$ o diferencia en este caso $X(s) - Y(s)$. Observe que en este sentido quien le entra al sistema ya no es $X(s)$ si no, que un error, $E(s) = X(s) - Y(s)$



por lo que

$$Y(s) = G(s)\,E(s)$$

por lo tanto:

$$Y(s) = G(s)\,(X(s) - Y(s))$$

que al distribuirlo y despejar $\dfrac{Y(s)}{X(s)}$ que es la función de transferencia en lazo cerrado se obtiene que:

$$Y(s) = G(s)\,X(s) - G(s)\,Y(s)$$

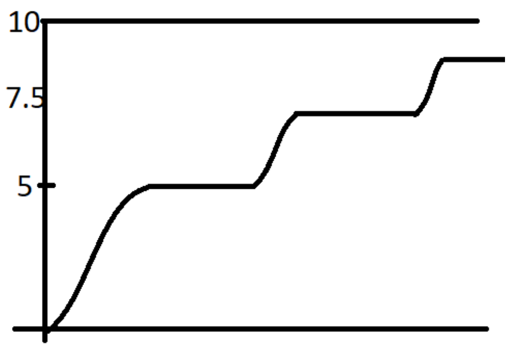
$$Y(s) + G(s)\,Y(s) = G(s)\,X(s)$$

$$Y(s)\,(1 + G(s)) = G(s)\,X(s)$$

de donde

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

Que es la función de transferencia del sistema en lazo cerrado. ¿Que hace ésto?¿Que observa usted? ¿Intuya que fue lo que observó Laplacé y como lo explicó?



2.1 Error en estado estable

Definition 12 *: Se define el error en estado estable como*

$$e_{ss} = \lim_{s\longrightarrow 0} \left(sX\left(s\right) - G\left(s\right)\right) = \lim_{t\longrightarrow\infty} \left(x\left(t\right) - y\left(t\right)\right)$$

Para observar el error en estado estable es necesario identificar los tipos de funciones de transferencia de sistemas. Los casos más estudiados son:
Considere a

$$G\left(s\right) = \frac{\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Recuerde que las unidades de s son:De la transformada de Laplace

$$L\left\{f\left(t\right)\right\} = \int_0^\infty f\left(t\right) e^{-st} dt$$

donde $[st] = 1$ *adimensional. Como la unidad de t es el tiempo medido en segundos, entonces*

$$\begin{aligned} [st] &= 1 \\ [s][t] &= 1 \end{aligned}$$

de donde

$$[s] = \frac{1}{[t]} = \frac{1}{seg} = Hertz = Hz$$

Que son unidades de frecuencia.
Note que

$$\begin{aligned} G\left(s\right) &= \frac{\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n}{\left(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \left(\zeta\omega_n\right)^2\right) + \omega_n^2 - \left(\zeta\omega_n\right)^2} \\ &= \frac{\omega_n}{\left(s + \zeta\omega_n\right)^2 + \omega_n^2\left(1 - \zeta^2\right)} \end{aligned}$$

Caso 1: Si $1 - \zeta^2 < 0$ *Se obtiene entonces una solución en el denominador de valor real*

$$\begin{aligned} G\left(s\right) &= \frac{\omega_n}{\left(s + \zeta\omega_n\right)^2 - \omega_n^2\left(\zeta^2 - 1\right)} = \frac{\omega_n}{\left(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\left(s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}\right)} \\ &= \frac{A}{s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\left(\zeta^2 - 1\right)}} + \frac{B}{s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\left(\zeta^2 - 1\right)}} \end{aligned}$$

Frente a la excitación del escalón unitario se tiene que la respuesta del sistema esta dada por:

$$\begin{aligned} Y\left(s\right) &= G\left(s\right) X\left(s\right) = \frac{\omega_n}{\left(s + \zeta\omega_n\right)^2 - \omega_n^2\left(\zeta^2 - 1\right)}\frac{1}{s} \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\left(\zeta^2 - 1\right)}} + \frac{C}{s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\left(\zeta^2 - 1\right)}} \end{aligned}$$

Al hacer transformada inversa de Laplacé se tiene que:

$$y(t) = A\mu(t) + Be^{-\omega_n\left(\zeta - \sqrt{(\zeta^2-1)}\right)t} + Ce^{-\omega_n\left(\zeta + \sqrt{(\zeta^2-1)}\right)t}$$

Note que si $\zeta - \sqrt{\left(\zeta^2 - 1\right)} > 0$, *es decir que* $\zeta > \sqrt{\left(\zeta^2 - 1\right)}$ *esto es* $\zeta^2 > \zeta^2 - 1$ *de donde* $0 > -1$ *el sistema es estable porque de lo contrario* $e^{-\omega_n\left(\zeta - \sqrt{(\zeta^2-1)}\right)t} \longrightarrow \infty$ *cuando* $t \longrightarrow \infty$, *lo cual lo haría inestable. Luego el error en estado estable esta dado por:*

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty}(x(t) - y(t)) = 1 - A$$

Este modelo es llamado subamortiguado.

Caso 2: $\zeta^2 = 1$. *Sucede que:e obtiene entonces una solución en el denominador de valor real*

$$G(s) = \frac{\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 - \omega_n^2\left(\zeta^2 - 1\right)} = \frac{\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2}$$

Frente a la excitación del escalón unitario se tiene que la respuesta del sistema esta dada por:

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)X(s) = \frac{\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2}\frac{1}{s} \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\zeta\omega_n} + \frac{C}{(s+\zeta\omega_n)^2} \end{aligned}$$

Al hacer transformada inversa de Laplacé se tiene que:

$$y(t) = A\mu(t) + Be^{-\zeta\omega_n t} + Cte^{-\zeta\omega_n t}$$

Como $\zeta\omega_n > 0$ *entonces cuando* $t \longrightarrow \infty$ *entonces* $e^{-\zeta\omega_n t} \longrightarrow 0$ *igualmente* $\lim_{t\to\infty} te^{-\zeta\omega_n t} = \lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{\zeta\omega_n t}} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\zeta\omega_n e^{\zeta\omega_n t}} = 0$ *por lo tanto,*

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty}(x(t) - y(t)) = 1 - A$$

A este modelo se le llama sobreamortiguado.

Caso 3 $1 - \zeta^2 > 0$. *Sucede que:e obtiene entonces una solución en el denominador de valor real*

$$G(s) = \frac{\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2\left(1 - \zeta^2\right)} = \frac{\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 - \omega_n^2\left|1 - \zeta^2\right| j^2}$$

Frente a la excitación del escalón unitario se tiene que la respuesta del sistema esta dada por:

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)X(s) = \frac{\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 - \omega_n^2\left|1-\zeta^2\right| j^2}\frac{1}{s} \\ &= \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2\left(1 - \zeta^2\right)} \end{aligned}$$

Al hacer transformada inversa de Laplacé se tiene que:

$$y(t) = A\mu(t) + B^* e^{-\zeta\omega_n t}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right) + C^* e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right)$$

Como $\zeta\omega_n > 0$ *entonces cuando* $t \longrightarrow \infty$ *entonces* $e^{-\zeta\omega_n t} \longrightarrow 0$ *igualmente*

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\zeta\omega_n t}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right) = 0$$

ya que

$$-1 \leq \cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right) \leq 1$$

como

$$e^{-\zeta\omega_n t} > 0$$

entonces

$$-e^{-\zeta\omega_n t} \leq e^{-\zeta\omega_n t}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right) \leq e^{-\zeta\omega_n t}$$

luego

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} -e^{-\zeta\omega_n t} &\leq \lim_{t\to\infty} e^{-\zeta\omega_n t}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right) \leq \lim_{t\to\infty} e^{-\zeta\omega_n t} \\
0 &\leq \lim_{t\to\infty} e^{-\zeta\omega_n t}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right) \leq 0
\end{aligned}$$

que por el teorema del sanduche

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\zeta\omega_n t}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right) = 0$$

Análogamente

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right) = 0$$

por lo tanto,

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty}(x(t) - y(t)) = 1 - A$$

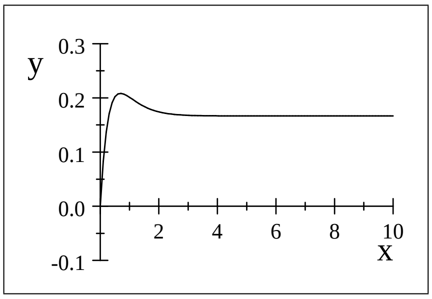
A este modelo se le llama criticamente amortiguado.

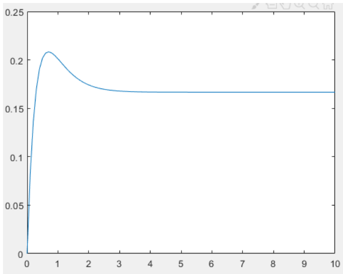
Example 13 *: Identifique el tipo de modelo y grafíquelo frente a la excitación escalón.*

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}$$

Solution 14 *:*

$$\begin{aligned}
Y(s) &= G(s)X(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}\frac{1}{s} \\
&= \frac{s+1}{s(s^2+5s+6)} = \frac{s+1}{s(s+3)(s+2)} \\
&= \frac{1}{6s} - \frac{2}{3(s+3)} + \frac{1}{2(s+2)} \\
y(t) &= \frac{1}{6}\mu(t) - \frac{2}{3}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-2t}
\end{aligned}$$





El código en matlab es simple

t=0:0.1:10;

*y=(1/6)-(2/3)*exp(-3*t)+(1/2)*exp(-2*t);*

plot(t,y)

En matlab se pudo haber hecho todo:

syms s t

X=1/s;

*G=((s+1)/(s^2+5*s+6));*

*y=ilaplace(G*X)*

t1=0:0.1:10;

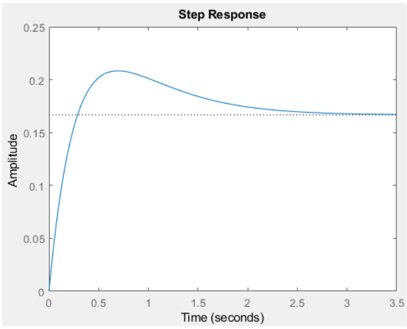
y1=eval(subs(y,t,t1))

plot(t1,y1)

Otra forma solo para ver el gráfico de salida es:

G1=tf([1 1],[1 5 6])

step(G1)



El anterior tipo de modelo es subamortiguado.

Observe que

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{6}\mu(t) - \frac{2}{3}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\right) = \frac{1}{6}$$

Igualmente

$$\lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{s+1}{s^2+5s+6}\right) = \frac{1}{6}$$

Por último

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty}(x(t) - y(t)) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} = 0.83333$$

:

Example 15 *: Considere la función de transferencia de un sistema dado por:*

$$G(s) = \frac{s+3}{s^2+4s+4}$$

Halle la respuesta del sistema al escalón $X(s) = \frac{1}{s}$.

Solution 16 *:*

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)X(s) = \frac{s+3}{s^2+4s+4}\frac{1}{s} \\ &= \frac{s+3}{s(s+2)^2} = \frac{3}{4s} - \frac{B}{(s+2)} - \frac{1}{2(s+2)^2} \end{aligned}$$

: Considere la función de transferencia de un sistema dado por:

$$G(s) = \frac{s+3}{s^2+4s+4}$$

Halle la respuesta del sistema al escalón $X(s) = \frac{1}{s}$.

Solution 17 *:*

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)X(s) = \frac{s+3}{s^2+4s+4}\frac{1}{s} \\ &= \frac{s+3}{s(s+2)^2} = \frac{3}{4s} - \frac{B}{(s+2)} - \frac{1}{2(s+2)^2} \end{aligned}$$

Si $s = -1$.

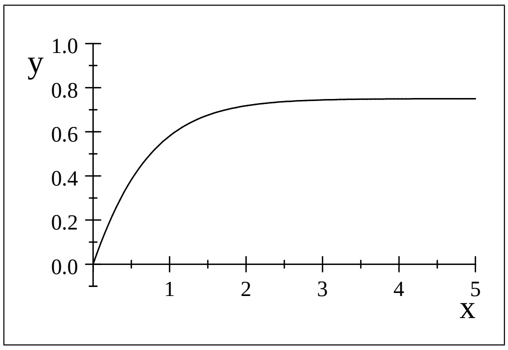
$$\begin{aligned} \frac{-1+3}{-1(-1+2)^2} &= \frac{3}{4(-1)} - \frac{B}{(-1+2)} - \frac{1}{2(-1+2)^2} \\ -2 &= -\frac{3}{4} - B - \frac{1}{2} \\ B &= -\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + 2 = -\frac{3}{4} - \frac{2}{4} + \frac{8}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Luego

$$Y(s) = \frac{3}{4s} - \frac{3}{4(s+2)} - \frac{1}{2(s+2)^2}$$

por lo que:

$$y(t) = \frac{3}{4}\mu(t) - \frac{3}{4}e^{-2t} - \frac{1}{2}te^{-2t}$$



Es modelo sobreamortiguado, que se estabiliza en:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{3}{4}\mu(t) - \frac{3}{4}e^{-2t} - \frac{1}{2}te^{-2t}\right) = \frac{3}{4}$$

Igualmente

$$\lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{s+3}{s^2+4s+4}\right) = \frac{3}{4}$$

Por último

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty}(x(t) - y(t)) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Example 18 *: Considere la función de transferencia de un sistema dado por:*

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+6s+10}$$

Halle la respuesta del sistema al escalón $X(s) = \frac{1}{s}$*.*

Solution 19 *:*

$$\begin{aligned}
Y(s) &= G(s)X(s) = \frac{s+1}{s^2+6s+10}\frac{1}{s} \\
&= \frac{s+1}{s[(s^2+6s+9)+1]} = \frac{s+1}{s\left[(s+3)^2+1\right]} \\
&= \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{(s+3)^2+1} \\
&= \frac{1}{10s} + \frac{Bs+C}{(s+3)^2+1}
\end{aligned}$$

Para $s = 1$

$$\begin{aligned}
\frac{1+1}{(1+3)^2+1} &= \frac{1}{10} + \frac{B+C}{(1+3)^2+1} \\
\frac{2}{17} - \frac{1}{10} &= \frac{B+C}{17} \\
B+C &= \left(\frac{2}{17} - \frac{1}{10}\right)17 = \frac{3}{10}
\end{aligned}$$

Para $s=-11$

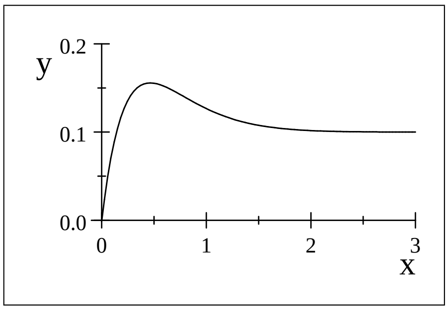
$$\begin{aligned}
\frac{-1+1}{-1\left[(-1+3)^2+1\right]} &= -\frac{1}{10}+\frac{-B+C}{(-1+3)^2+1}\\
0+\frac{1}{10} &= \frac{C-B}{5}\\
-B+C &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Por lo que se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned}
B+C &= \frac{3}{10}\\
-B+C &= \frac{1}{2}\\
2C &= \frac{4}{5}\\
C &= \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

Luego $B=\frac{3}{10}-\frac{2}{5}=-\frac{1}{10}$ *por lo que:*

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1}{10s}+\frac{Bs+C}{(s+3)^2+1}=\frac{1}{10s}+\frac{-\frac{1}{10}s+\frac{2}{5}}{(s+3)^2+1}\\
&= \frac{1}{10}\left(\frac{1}{s}-\frac{s-4}{(s+3)^2+1}\right)\\
&= \frac{1}{10}\left(\frac{1}{s}-\frac{s+3-7}{(s+3)^2+1}\right)\\
&= \frac{1}{10}\left(\frac{1}{s}-\frac{s+3}{(s+3)^2+1}+\frac{7}{(s+3)^2+1}\right)\\
y(t) &= \frac{1}{10}\left(\mu(t)-e^{-3t}\cos(t)+7e^{-3t}\sin(t)\right)
\end{aligned}$$



El sistema es criticamente amortiguado que se estabiliza en:

$$\lim_{t\to\infty} y(t)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{10}\left(\mu(t)-e^{-3t}\cos(t)+7e^{-3t}\sin(t)\right)\right)=\frac{1}{10}$$

Igualmente

$$\lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{s+1}{s^2+6s+10}\right) = \frac{1}{10}$$

Por último

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty}\left(x(t) - y(t)\right) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} = 0.9$$

Usando matlab para resolver los modelos anteriores para encontrar las respuestas de los sistemas al escalón.

```
Num=[1]
Den=[1 7 10]
G=tf(Num,Den)
step(G)
syms x t
Num1=poly2sym(Num);
Den1=poly2sym(Den);
G1=Num1/Den1
escalon=1/x
yt=ilaplace(G1*escalon)
yt1=string(yt)
title(yt1)
```