METODOS NUMERICOS 3006907
SEMESTRE 02, 2020, TALLER 3

1. Calcule $\|x\|_\infty$, $\|x\|_1$ y $\|x\|_2$ para cada uno de los siguientes vectores:

   a) $x = [2, -1, 0, -1/2]^T$

   b) $x = [-2, 3, 4, -3, -1, 2]^T$

   c) $x = [1, -1, 5]^T$

2. Para las siguientes matrices encuentre:

   a) El polinomio característico de A.

   b) Los valores propios de A. ¿Cuántos hay?

   c) Establezca si dichos valores propios son simples o tienen multiplicidad mayor que 1.

   d) Cada una de las normas $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$, $\|A\|_2$, $\|A\|_F$

   Para hacer estas cuentas usando MATLAB, basta generar las matrices e invocar para cada una de ellas los comandos poly, eig y norm. Más precisamente:

```
p = poly(a) % polinomio característico
s = eig(a) % valores propios
[v,d]=eig(a) % matriz de vectores propios y matriz diagonal de valores propios
s = norm(a,1) % norma 1
s = norm(a,inf) % norma infinito
s = norm(a,2) o simplemente s = norm(a) % norma 2
s = norm(a,'fro') % norma de Frobenius
```

   i. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, ii. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ iii. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ iv. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$,
   v. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, vi. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, vii. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,

3. Para cada una de las siguientes matrices utilice MATLAB para estimar

$$\lim_{n\to\infty} A^n$$

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}5 \\ -0{,}2 & 1{,}2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}5 \\ -0{,}16 & 1{,}2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}5 \\ -0{,}1 & 1{,}2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 1{,}0 \\ 0 & 0{,}9 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0{,}99 & 1{,}0 \\ 0 & 0{,}99 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1{,}0 & 1{,}0 \\ 0 & 1{,}0 \end{bmatrix}$$

4. Las siguientes matrices se llaman matrices de Markov, ya que la suma de sus columnas es 1. En cada caso encuentre los valores propios y estime $\lim_{n\to\infty} A^n$.

   Nota: En todos los caso propuestos la matriz es diagonalizable, es decir, existe una matriz invertible V y una matriz diagonal D tales que $A = VDV^{-1}$. En MATLAB se pueden obtener con la instrucción `[V,D]=eig(A)`

   En este caso las potencias de A se pueden calcular asi: $A^n = VD^nV^{-1}$ que es mucho más fácil de calcular.

a) $A = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 0 & 1/4 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 2/3 & 1/5 \\ 1/3 & 1/6 & 1/5 \\ 1/6 & 1/6 & 3/5 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/6 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/6 & 1/4 \end{bmatrix}$

5. Para un cierto sistema lineal de ecuaciones, la matriz de iteración de Jacobi es $\boldsymbol{T}_{\mathrm{J}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ y la de Gauss - Seidel es $\boldsymbol{T}_{\mathrm{GS}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{8} \\ 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$. Los respectivos vectores constantes son $\boldsymbol{c}_{\mathrm{J}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{c}_{\mathrm{GS}} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{16} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{12} \end{bmatrix}$.

   a. Calcule $\|\boldsymbol{T}_{\mathrm{J}}\|_1$, $\|\boldsymbol{T}_{\mathrm{J}}\|_\infty$, $\|\boldsymbol{T}_{\mathrm{GS}}\|_1$, $\|\boldsymbol{T}_{\mathrm{GS}}\|_\infty$ y $\rho(\boldsymbol{T}_{\mathrm{GS}})$.

   b. Decida sobre la convergencia o divergencia de cada uno de estos métodos.

   c. Con $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, calcule $x^{(1)}$ en ambos procesos iterativos.

6. En cada caso, utilice los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel para aproximar las soluciones de los sistemas lineales $Ax = b$. En todos los casos use el vector nulo como primera aproximación.

   a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ `b=6*ones(5,1)` $= \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$

   b) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

   c) $A = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 25 \\ -11 \\ -11 \end{bmatrix}$

7. Considere el siguiente código MATLAB:

```
A=gallery('tridiag',100,-1,2,-1)
b=A * ones(100,1)
p=zeros(100,1)
```

   Significa que queremos trabajar con la matriz tridiagonal A que tiene -1 en su subdiagonal, 2 en su diagonal y -1 en su superdiagonal. Además, definimos también el vector b y el iterado inicial p. El vector b se define de manera que la solución del sistema $Ax = b$ sea el vector $x = ones(100, 1)$. Para más información sobre la galería de matrices que trae MATLAB, use el sistema de ayuda en línea, por ejemplo, escriba *doc gallery* en la línea de comandos.

Utilice *jacobi.m* y *gseid.m* para resolver el sistema $Ax = b$ con primera aproximación el vector p.

8. Resuelva el problema anterior para la matriz

```
A=gallery('dorr',20)
```

y los vectores b y p generados de forma análoga.

9. Utilice los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel para resolver sistemas $Ax = b$ con la matriz tridiagonal

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & \\ -1 & 4 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 4 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

y con vector b conocido para saber de antemano la solución exacta. La matriz A es estrictamente diagonalmente dominante y también es simétrica definida positiva para cualquier tamaño n. Esta última definición se considera en las clases de la semana próxima.

10. Utilice el método de Gauss-Seidel con primera aproximación $p = \begin{bmatrix} 0{,}33116 \\ 0{,}7 \end{bmatrix}$ para resolver el problema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}96326 & 0{,}81321 \\ 0{,}81321 & 0{,}68654 \end{bmatrix} \text{ y } b = \begin{bmatrix} 0{,}88824 \\ 0{,}74988 \end{bmatrix}$$

Explique detalladamente lo que ocurre.

11. Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1 & -1/4 \\ 1 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1/5 \\ -1{,}425 \\ 2 \end{bmatrix}$

   a. Nos interesa resolver $Ax = b$ por los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel. Demuestre que los dos métodos iterativos convergen.

   b. En lugar de -1 utilice -2 en la componente $(1, 3)$ de A. ¿Siguien siendo convergentes los dos métodos?

   c. Las siguientes instrucciones MATLAB pueden ayudar a resolver este ejercicio:

```
a=[1, 0, -1;-0.5, 1, -0.25;1, -0.5, 1];
% a=[1, 0, -2;-0.5, 1, -0.25;1, -0.5, 1];
b=[0.2,-1.425, 2]';
d=diag(diag(a));
l=d-tril(a);
u=d-triu(a);
tj=inv(d)*(l+u);
cj=inv(d)*b;
retj= max(abs(eig(tj)))
tg=inv(d-l)*u;
 cg=inv(d-l)*b;
retg=max(abs(eig(tg)))
```