PROGRAMACIÓN Y MÉTODOS NUMÉRICOS
2503506

INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Andrés Agudelo
Departamento de Ingeniería Mecánica
andres.agudelos@udea.edu.co

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Ingeniería

Contenido

Introducción

Integración

La integración es operación inversa a la diferenciación o derivación en matemáticas. Es un proceso estrechamente relacionado con la operación de suma.

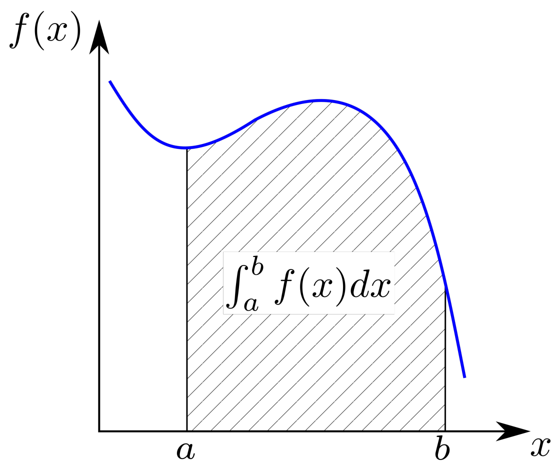
La integración definida se representa como:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Donde:

$f(x)$:	Integrando
a, b :	Límites de integración

Integración



Integración

Integración

La integración se usa comúnmente en problemas de ingeniería, como por ejemplo:

Determinación de fuerzas distribuidas:

- Resistencia de materiales
- Mecánica de fluidos
- Diseño de estructuras civiles

Cálculos termodinámicos:

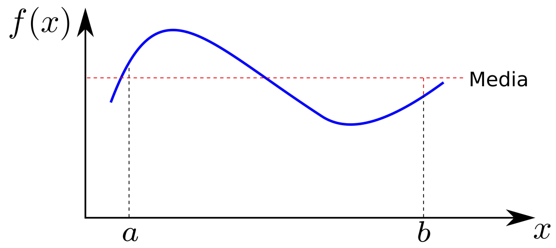
- Trabajo, potencia
- Propiedades termodinámicas

Cálculos estadísticos:

- Distribuciones de probabilidad

Integración

Valor medio de una función en un intervalo



Cálculo de la media de funciones continuas:

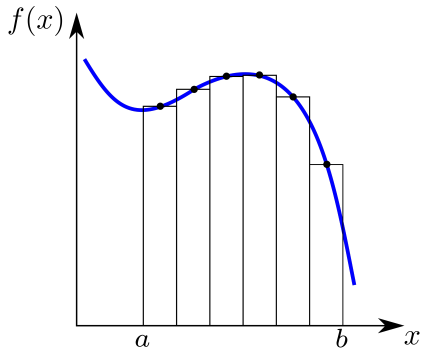
$$\boxed{\bar{f}(x)_{[a,\ b]} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}} \quad (1)$$

Introducción

Integración numérica

Es frecuente tener que recurrir a técnicas numéricas para realizar integración, ya que en muchos casos no se cuenta con funciones, sino con datos tabulados.

Además, en ocasiones en que se conocen las funciones, éstas son muy complicadas para realizar la solución analítica.



Fórmulas de Newton–Cotes

Fórmulas de Newton–Cotes

Las fórmulas de integración de Newton–Cotes son las más usadas.

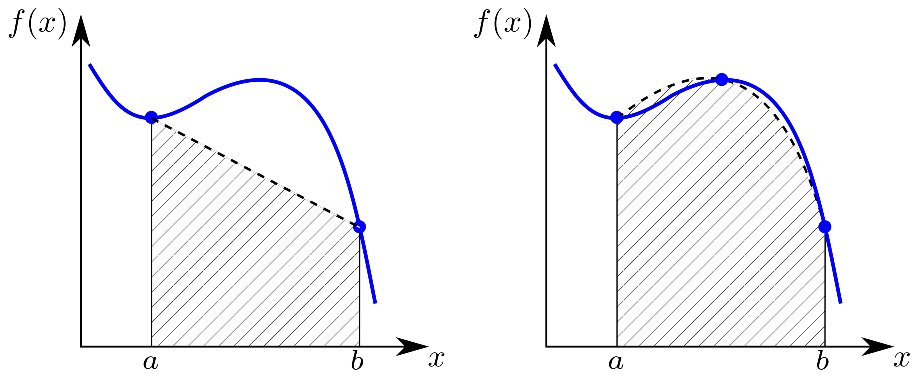
Su principio se basa en reemplazar los datos tabulados o la función complicada, por una función de aproximación que es fácil de integrar:

$$\boxed{I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_n(x)dx} \quad (2)$$

Donde $f_n(x)$ es un polinomio de la forma:

$$\boxed{f_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n} \quad (3)$$

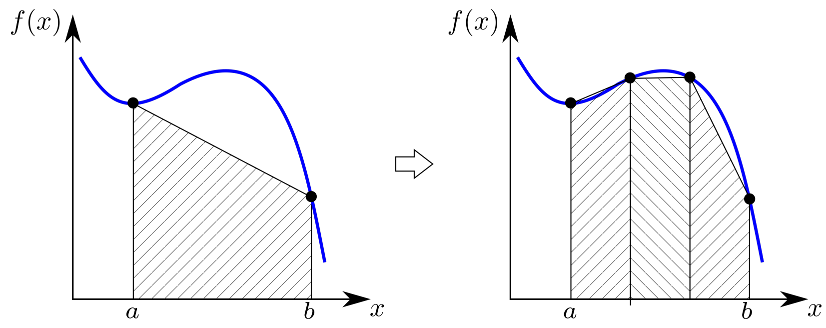
Fórmulas de Newton–Cotes



Fórmulas de Newton–Cotes

Fórmulas de Newton–Cotes

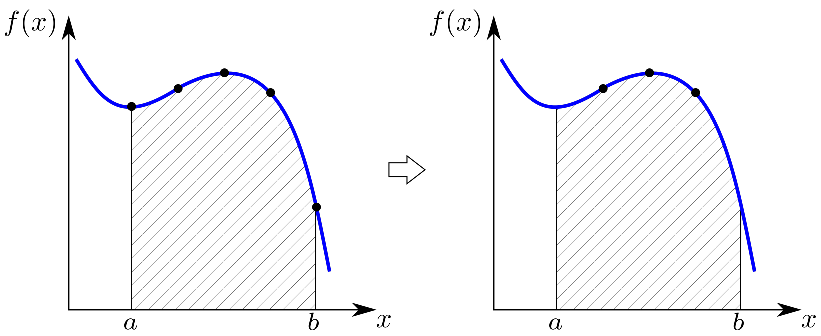
Estas fórmulas se pueden utilizar por partes, dividiendo el intervalo de integración en segmentos iguales.



Fórmulas de Newton–Cotes

Fórmulas de Newton–Cotes

Existen formas cerradas y abiertas.



Regla trapezoidal

Regla trapezoidal

Esta es la primera fórmula cerrada de Newton–Cotes, en la cual la función se aproxima mediante un polinomio de primer orden (línea recta entre $f(a)$ y $f(b)$).

Función de aproximación:

$$\boxed{f_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n} \qquad (3)$$

$$\Downarrow$$

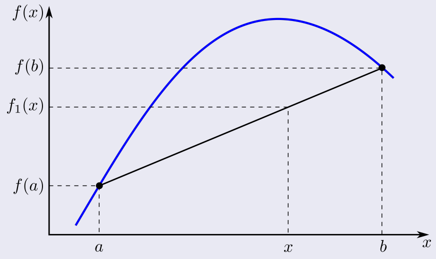
$$f_1(x) = a_0 + a_1\, x$$

Regla trapezoidal

Regla trapezoidal

$$\boxed{f_1(x) = a_0 + a_1\, x}$$

Valores de las constantes a_0 y a_1:



$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a)$$

Regla trapezoidal

Regla trapezoidal

El área bajo la curva se determina usando la aproximación lineal anterior, la cual se reemplaza en la ecuación (2) para llegar a:

$$I \cong \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a) \right] dx$$

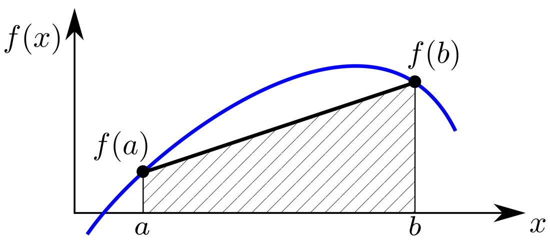
Resolviendo esta integral se obtiene la regla trapezoidal:

$$\boxed{I \cong (b - a)\,\frac{f(a) + f(b)}{2}} \qquad (4)$$

Regla trapezoidal

Regla trapezoidal

Geométricamente, la regla trapezoidal equivale a aproximar la integral como el área del trapecio formado por los límites de integración, y una línea recta que conecta $f(a)$ y $f(b)$.



Regla trapezoidal

Regla trapezoidal – Error

Cuando se emplea un segmento de línea recta para aproximar el área bajo una curva se puede incurrir en un error considerable.

El error de truncamiento para la aplicación simple de la regla trapezoidal se estima mediante la siguiente expresión:

$$\boxed{E_t = -\frac{1}{12} f''(\xi)(b - a)^3} \qquad (5)$$

Donde ξ es algún punto en el intervalo $[a,\, b]$.

La ecuación (5) muestra que si la función a integrar es lineal, la regla trapezoidal será exacta. En cualquier otro caso (funciones con curvatura, $f'' \neq 0$), habrá error de truncamiento.

Regla trapezoidal

Ejemplo 1

Use la regla trapezoidal para integrar numéricamente la siguiente función desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$.

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

Solución:

El valor real de la integral se determina fácilmente: $I = 1.640533$

Se debe aplicar la fórmula de integración correspondiente:

$$\boxed{I \cong (b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2}} \qquad (4)$$

Regla trapezoidal

Ejemplo 1

Los valores de la función en los extremos del intervalo son:

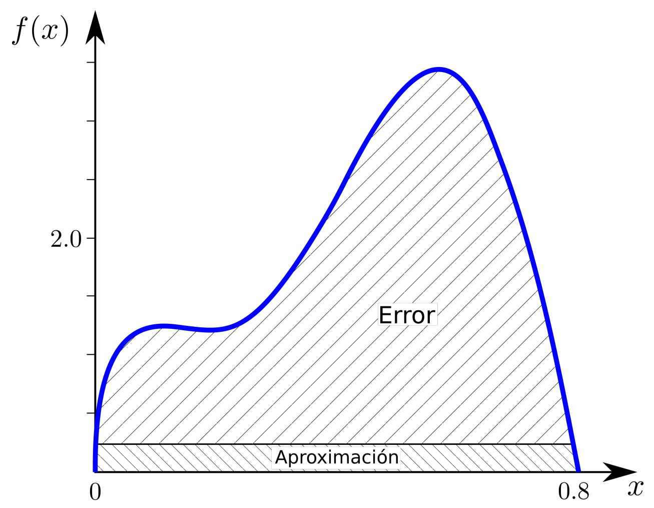
$$f(a) = f(0) = 0.2$$
$$f(b) = f(0.8) = 0.232$$

Reemplazando los valores conocidos en la ecuación (4), se obtiene:

$$I \cong (0.8)\frac{0.2 + 0.232}{2} = 0.1728$$

$$\Rightarrow \quad E_t = 1.467733 \; (\varepsilon_t = 89.5\,\%)$$

Regla trapezoidal – Ejemplo 1



Regla trapezoidal

Ejemplo 1

En situaciones reales no se conoce de antemano el valor real de la integral, de modo que se debe definir un error aproximado, usando la ecuación (5).

$$\boxed{E_t = -\frac{1}{12} f''(\xi)(b-a)^3} \qquad (5)$$

Para usar esta ecuación hace falta conocer la segunda derivada de la función $f(x)$, la cual se puede determinar fácilmente en este caso:

$$f''(x) = -400 + 4{,}050\,x - 10{,}800\,x^2 + 8{,}000\,x^3$$

Se usará como aproximación de $f''(\xi)$, el valor medio de la segunda deriva en el intervalo de integración (ecuación (1)):

$$\bar{f}''(x) = \frac{\int_0^{0.8} \left(-400 + 4{,}050x - 10{,}800x^2 + 8{,}000x^3\right) dx}{0.8 - 0} = -60$$

Regla trapezoidal

Ejemplo 1

Usando el resultado anterior en la ecuación (5) se obtiene el error aproximado:

$$E_a = -\frac{1}{12}(-60)(0.8)^3 = 2.56$$

Este valor, aunque discrepa del error exacto, E_t, es del mismo orden de magnitud.

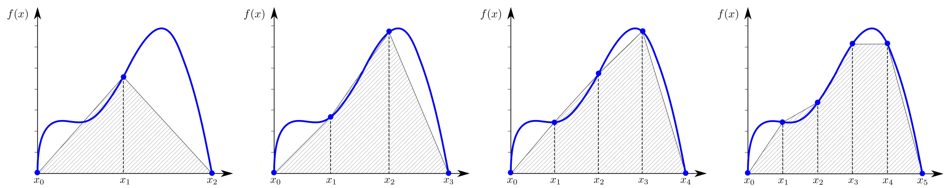
La discrepancia radica en que para esta función, en el intervalo de integración dado, la media de la segunda derivada no es necesariamente una buena aproximación de $f''(\xi)$.

Regla trapezoidal compuesta

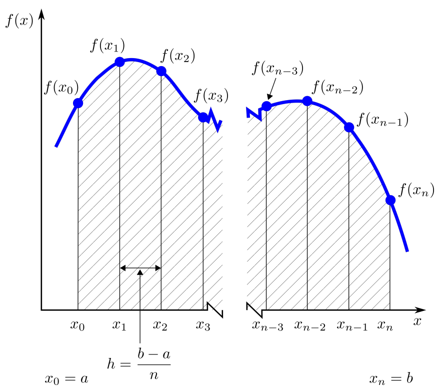
Regla trapezoidal compuesta

La exactitud de la regla trapezoidal se puede mejorar dividiendo el intervalo de integración $[a, b]$ en un número determinado de segmentos, y aplicar la regla a cada uno de éstos.

Las áreas de los segmentos individuales se suman para obtener la aproximación a la integral para todo el intervalo.



Regla trapezoidal compuesta



Regla trapezoidal compuesta

Si se definen n segmentos de tamaño igual, habrá $n + 1$ puntos base igualmente espaciados: $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$

Se puede definir un paso de integración, h:

$$\boxed{h = \frac{b-a}{n}} \qquad (6)$$

Regla trapezoidal compuesta

Regla trapezoidal compuesta

Con a y b designados como x_0 y x_n, respectivamente, la integral total se puede determinar como:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

Al sustituir la regla trapezoidal en esta expresión, se obtiene:

$$I \cong h\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + h\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \cdots + h\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}$$

Agrupando términos se llega a:

$$I \cong \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right] \qquad (7)$$

Regla trapezoidal compuesta

Regla trapezoidal compuesta

Usando la definición de h de la ecuación (6), la ecuación (7) se puede escribir como:

$$\boxed{I \cong (b-a)\left[\frac{f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(b)}{2n}\right]} \quad (8)$$

$$\Downarrow$$

Regla trapezoidal compuesta

Regla trapezoidal compuesta

Regla trapezoidal compuesta

El error aproximado de aplicar la regla trapezoidal compuesta se puede estimar mediante la siguiente expresión:

$$\boxed{E_a = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}\bar{f}''} \quad (9)$$

Donde:

$$\bar{f}'' \cong \frac{\sum_{i=1}^{n} f''(\xi)}{n} = \frac{\int_a^b f''(x)dx}{b-a} \quad (10)$$

La ecuación (9) muestra que si se duplica el número de segmentos en los cuales se divide el intervalo de integración, el error aproximado se reducirá a aproximadamente la cuarta parte.

Regla trapezoidal compuesta

Ejemplo 2

Use la regla trapezoidal compuesta para integrar numéricamente la función del ejemplo 1, dividiendo el intervalo $[0,\, 0.8]$ en 5 segmentos.

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

Se conoce el valor real de la integral: $I = 1.640533$

Solución:

El número de segmentos es $n = 5 \rightarrow$ El tamaño del paso de integración se determina usando la ecuación (6):

$$h = \frac{0.8-0}{5} = 0.16$$

Regla trapezoidal compuesta

Ejemplo 2

$f(0) = 0.2$ $\quad f(0.16) = 1.296919$ $\quad f(0.32) = 1.743393$

$f(0.48) = 3.186015$ $\quad f(0.64) = 3.181929$ $\quad f(0.8) = 0.232$

Reemplazando los valores respectivos en la ecuación (8), se obtiene:

$$I \cong (0.8)\frac{0.2 + 2\,(1.296919 + 1.743393 + 3.186015 + 3.181929) + 0.232}{2\,(5)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I \cong 1.539881}$$

Regla trapezoidal compuesta

Ejemplo 2

El error de truncamiento será:

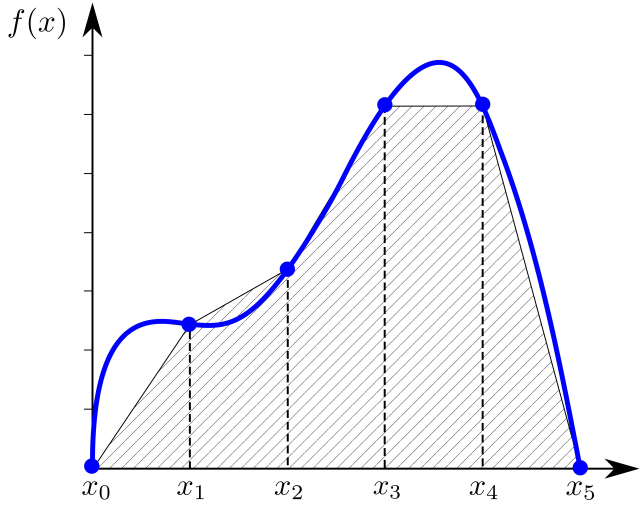
$$E_t = 0.100652 \qquad (\varepsilon_t = 6.1\,\%)$$

Del ejemplo 1 se sabe que $\bar{f}'' = -60$. Por lo tanto, usando la ecuación (9), se tiene que:

$$E_a = -\frac{(0.8-0)^3}{12(5)^2}(-60) = 0.1024 \qquad (\varepsilon_a = 6.24\,\%)$$

Se observa que en esta ocasión, la media de la segunda derivada representa una mejor aproximación a $f(\xi)$ para cada segmento, ya que la discrepancia entre los errores de truncamiento exacto y aproximado es mucho menor.

Regla trapezoidal compuesta – Ejemplo 2



Regla de Simpson 1/3

Regla de Simpson 1/3

Con la regla trapezoidal compuesta se logró mejorar la exactitud de la aproximación a la integral, al dividir el intervalo en varios segmentos.

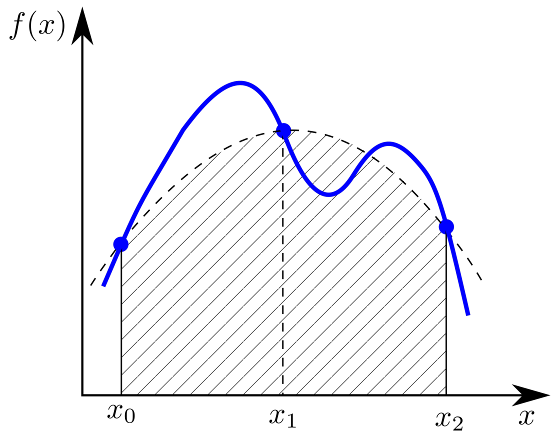
Otra forma de lograr una mejora es usar un polinomio de mayor orden para conectar los puntos de la curva.

Si se tiene un punto medio entre a y b, se puede usar un polinomio de grado 2 (parábola) para conectar estos tres puntos. Por lo tanto:

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_2(x)dx$$

Si a y b se designan como x_0 y x_2, el punto medio será x_1, y se puede ajustar un polinomio de segundo orden a estos tres puntos.

Regla de Simpson 1/3



Regla de Simpson 1/3

Regla de Simpson 1/3

Se escoge un polinomio de Lagrange para realizar el ajuste:

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i) \qquad \text{Donde:} \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Por lo tanto, un polinomio de Lagrange de segundo orden tendrá la siguiente forma:

$$f_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$

Regla de Simpson 1/3

Regla de Simpson 1/3

Al ajustar un polinomio de Lagrange de segundo orden a los tres puntos, se puede simplificar el resultado, y resolver la integral de la aproximación. Con esto se obtiene la regla de integración de Simpson 1/3:

$$\boxed{I \cong \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]} \qquad (11)$$

Esta ecuación también se puede escribir de la siguiente forma:

$$\boxed{I \cong (b-a)\left[\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}\right]} \qquad (12)$$

Estas fórmulas son válidas únicamente para un número impar de puntos, que definen un número par de segmentos.

Regla de Simpson 1/3

Regla de Simpson 1/3

El error de truncamiento de la regla de Simpson 1/3 se determina como:

$$\boxed{E_t = -\frac{(b-a)^5}{2{,}880} f^{(4)}(\xi)} \qquad (13)$$

Se observa que esta regla es más exacta que la regla trapezoidal $\rightarrow$ Su error es proporcional a la cuarta derivada.

Esta aproximación tiene precisión de tercer orden, a pesar de estar basada en una parábola.

$$\Downarrow$$

Es exacta para polinomios de tercer orden.

Regla de Simpson 1/3

Ejemplo 3

Use la regla de Simpson 1/3 para integrar numéricamente la función del ejemplo 1 entre 0 y 0.8.

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

Se conoce el valor real de la integral: $I = 1.640533$

Solución:

Se deben tener dos segmentos (tres puntos), por lo cual $h = 0.4$ y:

$$f(0) = 0.2 \qquad f(0.4) = 2.456 \qquad f(0.8) = 0.232$$

Regla de Simpson 1/3

Ejemplo 3

Aplicando la regla de Simpson 1/3 (ecuación 11):

$$I \cong \frac{0.4}{3}\left[0.2 + 4(2.456) + 0.232\right] = 1.367467$$

Este resultado representa un error verdadero de truncamiento de:

$$E_t = 0.2730667 \qquad (\varepsilon_t = 16.6\,\%)$$

El error aproximado se puede estimar mediante la ecuación (13). Para esto se aproxima $f^{(4)}(\xi)$ mediante $\bar{f}^{(4)}(x)$ en el intervalo $[0\ 0.8]$ usando la ecuación (1): $\bar{f}^{(4)}(x) = -2{,}400$. Por lo tanto:

$$E_a = -\frac{(0.8)^5}{2{,}880}(-2{,}400) = 0.2730667 \qquad (\varepsilon_a = 16.6\,\%)$$

Regla de Simpson 1/3 compuesta

Regla de Simpson 1/3 compuesta

Procediendo del miso modo que en el caso de la regla trapezoidal compuesta, se obtiene la regla de Simpson 1/3 compuesta:

$$\boxed{I \cong (b-a)\left[\frac{f(x_0) + 4\sum\limits_{i=1,\,3,\,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum\limits_{j=2,\,4,\,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}\right]} \qquad (14)$$

La validez de esta regla está limitada a un número par de segmentos.

El error de truncamiento aproximado en este caso se calcula como:

$$\boxed{E_a = -\frac{(b-a)^5}{180\,n^4}\bar{f}^{(4)}} \qquad (15)$$

Regla de Simpson 1/3 compuesta

Ejemplo 4

Use la regla de Simpson 1/3 compuesta para integrar numéricamente la función del ejemplo 1 entre 0 y 0.8 usando 4 segmentos.

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

Se conoce el valor real de la integral: $I = 1.640533$

Solución:

$$\begin{array}{ll} f(0) = 0.2 & f(0.2) = 1.288 \\ f(0.4) = 2.456 & f(0.6) = 3.464 \\ f(0.8) = 0.232 & \end{array}$$

Regla de Simpson 1/3 compuesta

Ejemplo 4

Aplicando la regla de Simpson 1/3 compuesta (ecuación 14), se obtiene:

$$I \cong (0.8)\left[\frac{0.2 + 4(1.288 + 3.464) + 2(2.456) + 0.232}{12}\right] = 1.623467$$

Este resultado representa un error exacto de truncamiento de:

$$E_t = 0.017067 \qquad (\varepsilon_t = 1.04\,\%)$$

El error aproximado es:

$$E_a = -\frac{(0.8)^5}{180(4)^4}(-2{,}400) = 0.017067 \qquad (\varepsilon_a = 1.04\,\%)$$

Regla de Simpson 3/8

Regla de Simpson 3/8

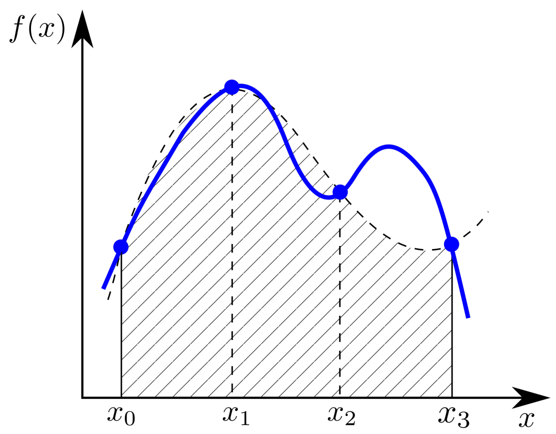
La regla de Simpson 1/3 es significativamente más precisa que la regla trapezoidal. Por este motivo se prefiere en la mayoría de los casos.

Sin embargo esta regla está limitada a un número par de segmentos de igual tamaño (número impar de puntos igualmente espaciados).

Para obtener una aproximación equivalente que sea válida para un número impar de segmentos (número par de puntos), se procede como antes, pero esta vez ajustando un polinomio de tercer orden, para lo cual se necesitan 4 puntos:

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_3(x)dx$$

Regla de Simpson 3/8



Regla de Simpson 3/8

Regla de Simpson 3/8

Al ajustar un polinomio de Lagrange de tercer orden a los cuatro puntos, y simplificar el resultado, se obtiene la regla de integración de Simpson 3/8:

$$\boxed{I \cong \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right]} \qquad (16)$$

Donde $h = (b-a)/3$. Esta ecuación también se puede escribir de la siguiente forma:

$$\boxed{I \cong (b-a)\left[\frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8}\right]} \qquad (17)$$

Estas fórmulas son válidas únicamente para un número par de puntos, que definen un número impar de segmentos.

Regla de Simpson 3/8

Regla de Simpson 3/8

El error de truncamiento de la regla de Simpson 3/8 se determina como:

$$\boxed{E_t = -\frac{(b-a)^5}{6{,}840} f^{(4)}(\xi)} \qquad (18)$$

Se observa que esta regla es ligeramente más exacta que la regla de Simpson 1/3, ya que el denominador es mayor en la ecuación (18) que en la (13).

Esta aproximación tiene precisión de tercer orden, pero normalmente se prefiere usar la regla de Simpson 1/3, debido a que tiene la misma precisión usando sólo 3 puntos.

La regla de Simpson 3/8 se vuelve útil cuando el número de segmentos es impar.

Regla de Simpson 3/8

Ejemplo 5

Use la regla de Simpson 3/8 para integrar numéricamente la función del ejemplo 1 entre 0 y 0.8 usando 3 segmentos.

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

Se conoce el valor real de la integral: $I = 1.640533$

Solución:
Se deben tener 3 segmentos (4 puntos), por lo cual:

$$f(0) = 0.2 \qquad f(0.2667) = 1.432724$$
$$f(0.5333) = 3.487177 \qquad f(0.8) = 0.232$$

Regla de Simpson 3/8

Ejemplo 5

Aplicando la regla de Simpson 3/8 (ecuación 17):

$$I \cong (0.8)\left[\frac{0.2 + 3(1.432724 + 3.487177) + 0.232}{8}\right] = 1.519170$$

Este resultado representa un error exacto de truncamiento de:

$$E_t = 0.1213630 \qquad (\varepsilon_t = 7.4\,\%)$$

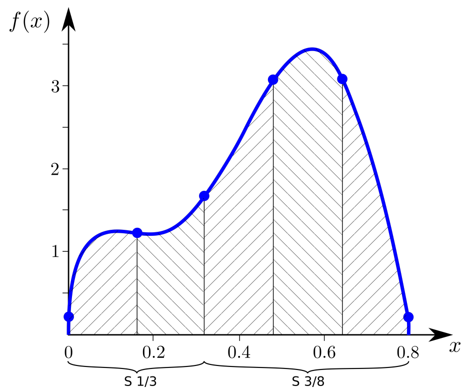
El error aproximado es:

$$E_a = -\frac{(0.8)^5}{6{,}480}(-2{,}400) = 0.1213630 \qquad (\varepsilon_a = 7.4\,\%)$$

Combinación de las reglas de Simpson

Ejemplo 6

Combine el uso de las dos reglas de Simpson para resolver el problema del ejemplo 2 (5 segmentos).



Combinación de las reglas de Simpson

Ejemplo 6

Función original:

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

Se conoce el valor real de la integral: $I = 1.640533$

Solución:
Del ejemplo 2 se sabe que:

$$f(0) = 0.2 \qquad f(0.16) = 1.296919 \qquad f(0.32) = 1.743393$$
$$f(0.48) = 3.186015 \qquad f(0.64) = 3.181929 \qquad f(0.8) = 0.232$$

Combinación de las reglas de Simpson

Ejemplo 6

La integral para los dos primeros segmentos se obtiene usando la regla de Simpson 1/3:

$$I \cong (0.32)\left[\frac{0.2+4(1.296919)+1.743393}{6}\right] = 0.3803237$$

Para los tres últimos segmentos se usa la regla de Simpson 3/8:

$$I \cong (0.48)\left[\frac{1.743393+3(3.186015+3.181929)+0.232}{8}\right] = 1.264754$$

La integral para el intervalo total será la suma de estos dos valores:

$$I \cong 0.3803237 + 1.264754 = 1.645077$$

$$\Rightarrow \quad E_t = -0.00454383 \qquad (\varepsilon_a = 0.28\,\%)$$

Fórmulas de orden superior

Fórmulas de orden superior

Existen fórmulas de orden superior, de 5 y 6 puntos, que se obtienen usando polinomios de cuarto y quinto orden, respectivamente, para unir los puntos.

Ambas fórmulas de orden superior tienen el mismo grado de precisión, por lo cual se prefiere la de 5 puntos, ya que requiere menos cálculos.

En aplicaciones de ingeniería rara vez se emplean estas fórmulas de orden superior. → Lo más empleado son las reglas de Simpson, usando las versiones compuestas para mejorar la precisión cuando se requiere.

Integración con segmentos de tamaño diferente

Integración con segmentos de tamaño diferente

Las fórmulas de integración vistas hasta ahora se basan en puntos de datos uniformemente espaciados.

$$\boxed{\text{Práctica de ingeniería}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Datos con espaciamiento no uniforme}}$$
$$\Uparrow$$
$$\boxed{\text{Mediciones experimentales}}$$

Integración con segmentos de tamaño diferente

Integración con segmentos de tamaño diferente

En estos casos se puede usar la regla trapezoidal para cada segmento, y sumar los resultados:

$$\boxed{I \cong h_1\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + \cdots + h_i\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2} + \cdots + h_n\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}} \qquad (19)$$

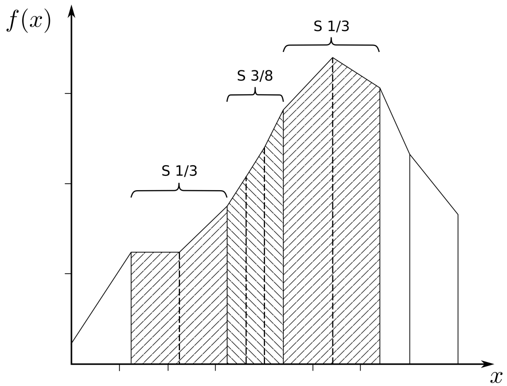
Donde h_i es el ancho del segmento i.

Esta es la misma aproximación usada para determinar la regla trapezoidal compuesta.

Integración con segmentos de tamaño diferente

Integración con segmentos de tamaño diferente

En ocasiones los datos tienen espaciamientos uniformes por tramos. En estos casos, si es posible, lo mejor es combinar las reglas de Simpson.



Extrapolación de Richardson

Extrapolación de Richardson

Este método permite obtener una estimación mejorada a partir de dos aproximaciones de la regla trapezoidal compuesta con diferente paso de integración:

$$I \cong I(h_2) + \frac{1}{(h_1/h_2)^2 - 1}\left[I(h_2) - I(h_1)\right]$$

En el caso especial de que $h_2 = h_1/2$, esta expresión se reduce a:

$$\boxed{I \cong \frac{4}{3}I(h_2) - \frac{1}{3}I(h_1)} \qquad (20)$$

Extrapolación de Richardson

Ejemplo 8

Use la extrapolación de Richardson para obtener estimaciones mejoradas a las integrales numéricas de la función del ejemplo 1:

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

Integre entre 0 y 0.8, usando la regla trapezoidal para 1, 2, y 4 segmentos.

Se conoce el valor real de la integral: $I = 1.640533$

Solución:

Los resultados de aplicar la regla trapezoidal y su forma compuesta a este problema se presentan a continuación:

No. de segmentos	h	I	$\varepsilon_t[\%]$
1	0.8	0.1728	89.5
2	0.4	1.0688	34.9
4	0.2	1.4848	9.5

Extrapolación de Richardson

Ejemplo 8

Los resultados para 1 y 2 segmentos se pueden combinar para dar:

$$I \cong \frac{4}{3}(1.0688) - \frac{1}{3}(0.1728) = 1.367467$$

$$\Rightarrow \quad E_t = 0.273067 \qquad (\varepsilon_t = 16.6\,\%)$$

Se procede de la misma forma para los resultados de usar 2 y 4 segmentos:

$$I \cong \frac{4}{3}(1.4848) - \frac{1}{3}(1.0688) = 1.623467$$

$$\Rightarrow \quad E_t = 0.017067 \qquad (\varepsilon_t = 1.0\,\%)$$

No. de segmentos	h	I	$\varepsilon_t[\%]$
1	0.8	0.1728	89.5
2	0.4	1.0688	34.9
4	0.2	1.4848	9.5

$\varepsilon_t = 16.6\%$ (segmentos 1 y 2)

$\varepsilon_t = 1.0\%$ (segmentos 2 y 4)

Integrales múltiples

Integrales múltiples

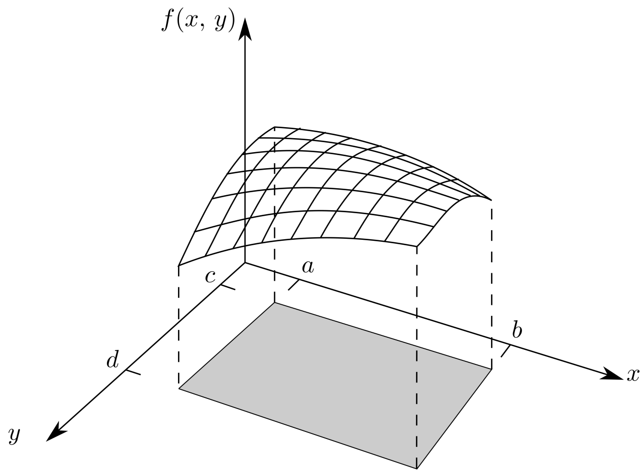
En ingeniería es común encontrar integrales múltiples, especialente dobles y triples.

Por ejemplo, el valor promedio de una función de dos variables en una zona de integración rectangular ($a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d$) se puede determinar como:

$$\boxed{\bar{f} = \frac{\int_c^d \left(\int_a^b f(x,\, y)dx \right) dy}{(d-c)(b-a)}} \qquad (21)$$

El rectángulo de interés está definido por los límites de integración: $[a,\, b]$ en dirección x, y $[c,\, d]$ en dirección y.

Integrales múltiples



Integrales múltiples

Integrales múltiples

Para resolver integrales múltiples se pueden usar las técnicas vistas antes.

Basta con resolver primero la integral en una dimensión, y luego en las siguientes, una por una, usando el resultado de la integración previa.

El orden de integración es irrelevante.

La solución numérica consiste en aplicar la regla trapezoidal compuesta o las reglas de Simpson en la primera dimensión, manteniendo constante cada valor de la segunda dimensión. Luego se hace lo mismo con la segunda dimensión, y con las demás.

Integrales múltiples

Ejemplo 7

Se tiene una placa rectangular de 8 m de largo (dimensión x) y 6 m de ancho (dimensión y), con una distribución de temperatura definida por la siguiente función:

$$T(x{,}y)[°C] = 2xy + 2x - x^2 - 2y^2 + 72$$

Determine la temperatura media de la placa, dividiéndola en dos segmentos en ambas dimensiones. Use la regla trapezoidal compuesta y la regla de Simpson 1/3.

Integrales múltiples

Ejemplo 7

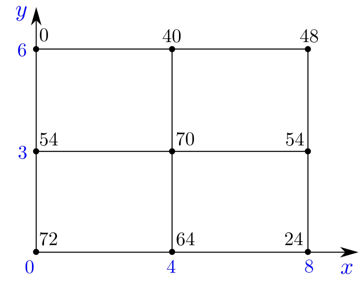
Solución:

Después de discretizar el dominio, se aplica la regla trapezoidal compuesta en la dimensión $x(0,\, 4,\, 8\ m)$, para cada uno de los valores de $y(0,\, 3,\, 6\ m)$ (3 puntos). Lego se integran los tres puntos resultantes.

Temperatura en los nodos:

	$y = 0$	$y = 3$	$y = 6$
$x = 0$	72	54	0
$x = 4$	64	70	40
$x = 8$	24	54	48

Integrales múltiples – Ejemplo 7 – Regla trapezoidal



$$(8-0)\frac{0+2(40)+48}{4} \longrightarrow \mathbf{256}$$

$$(8-0)\frac{54+2(70)+54}{4} \longrightarrow \mathbf{496}$$

$$(8-0)\frac{72+2(64)+24}{4} \longrightarrow \mathbf{448}$$

$$(6-0)\frac{448+2(496)+256}{3} = \mathbf{3,392}$$

Según la ecuación (21), la media será el valor de esta integral, divido por el área del intervalo de integración:

$$\bar{T}_{Trap.} \cong \frac{3{,}392}{8(6)} = 70.67°C$$

Integrales múltiples

Ejemplo 7

Realizando el mismo procedimiento con la regla de Simpson 1/3 (número par de segmentos), se obtiene un valor de 2,816 para la integral doble, por lo cual, en este caso:

$$\bar{T}_{Simp.} \cong \frac{2{,}816}{8(6)} = 58.66667°C$$

La ecuación (21) se puede resolver de forma analítica para la función dada, con lo cual se conoce el valor exacto de la temperatura media:

$$\bar{T} = 58.66667°C$$

Por lo tanto, con la regla trapezoidal se obtiene un error de truncamiento de 20.45 %, mientras que la regla de Simpson 1/3 es exacta. Esto se debe a que dicha regla es exacta para funciones hasta de grado 3, y la distribución de temperatura es de grado 2.

Resumen de fórmulas de integración

Valor medio de una función en un intervalo:

$$\boxed{\bar{f}(x)_{[a,\ b]} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}}$$

Regla trapezoidal simple:

$$\boxed{I \cong (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}}$$

Regla trapezoidal compuesta:

$$\boxed{I \cong \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]}$$

Resumen de fórmulas de integración

Regla de Simpson 1/3: (No. par de segmentos)

$$\boxed{I \cong \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]}$$

Regla de Simpson 1/3 compuesta: (No. par de segmentos)

$$\boxed{I \cong \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{i=1,\ 3,\ 5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,\ 4,\ 6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)\right]}$$

Regla de Simpson 3/8: (No. impar de segmentos)

$$\boxed{I \cong \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right]}$$

Resumen de fórmulas de integración

Extrapolación de Richardson:

$$I \cong I(h_2) + \frac{1}{(h_1/h_2)^2 - 1}\left[I(h_2) - I(h_1)\right]$$

Si $h_2 = h_1/2$: $$\boxed{I \cong \frac{4}{3}I(h_2) - \frac{1}{3}I(h_1)}$$

A continuación

Próxima clase

Solución de ecuaciones de una variable: raíces de ecuaciones

- Método gráfico
- Métodos cerrados o de intervalos
- Métodos abiertos