

# 6

## CAPITULO

# APLICACIONES A SISTEMAS LINEALES

### 6.1 SISTEMAS LINEALES

En todo sistema hay una *función de entrada* (o función de excitación) y una *función de salida* (o función de respuesta). Un sistema está completamente caracterizado si se conoce la naturaleza de la dependencia de la salida sobre la entrada.

Si se supone que la respuesta de un sistema a la excitación  $f_i(t)$  es la función  $f_o(t)$ , y si la respuesta de ese sistema a la excitación  $f_i(t) = a_1f_{i,1}(t) + a_2f_{i,2}(t)$  es  $f_o(t) = a_1f_{o,1}(t) + a_2f_{o,2}(t)$ , se dice que es un *sistema lineal*. (Ver la figura 6.1.)

Por tanto, un sistema lineal se puede definir como un sistema al cual se le puede aplicar el principio de superposición.

Si la respuesta de un sistema a la excitación  $f_i(t)$  es la función  $f_o(t)$ , y si la respuesta de ese sistema a la excitación  $f_i(t - t_o)$  es la función  $f_o(t - t_o)$ , se dice que es un *sistema invariante en el tiempo* (o un sistema de parámetros constantes).

Otra definición de sistema lineal es la de que la función de la excitación y la función de la respuesta del sistema, están relacionadas por una *ecuación diferencial lineal*, es decir:

$$a_n \frac{d^n f_o(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} f_o(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{df_o(t)}{dt} + a_0 f_o(t) \\ = b_m \frac{d^m f_i(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} f_i(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{df_i(t)}{dt} + b_0 f_i(t). \quad (6.1)$$

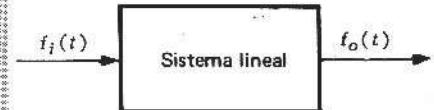


Figura 6.1 Entrada y salida de un sistema lineal

### 6.2 FUNCIONES OPERACIONALES DEL SISTEMA

Si se denota  $d/dt$  por el operador  $p$ , tal que

$$pf(t) = \frac{df(t)}{dt}, \quad p^n f(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n},$$

entonces, la ecuación (6.1) se puede expresar como

$$\sum_{n=0}^n a_n p^n f_o(t) = \sum_{m=0}^m b_m p^m f_i(t) \quad (6.2)$$

$$A(p) f_o(t) = B(p) f_i(t), \quad (6.3)$$

donde

$$A(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0$$

$$B(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0.$$

En un sistema lineal los coeficientes  $a_n$  y  $b_m$  son *independientes* de la función de respuesta. En el sistema invariante (o de parámetros constantes) los coeficientes  $a_n$  y  $b_m$  son *constantes*.

La ecuación (6.3) se puede expresar simbólicamente en la forma

$$f_o(t) - \frac{B(p)}{A(p)} f_i(t) = H(p) f_i(t), \quad (6.4)$$

donde  $H(p) = B(p) / A(p)$ . Se entiende que la ecuación (6.4) es una expresión operacional de la ecuación diferencial (6.1). El operador  $H(p)$  que opera sobre la función de entrada para producir la función de salida, se denomina *función operacional del sistema*. Utilizando el símbolo  $L$  para  $H(p)$ , la ecuación (6.4) se puede expresar como

$$L[f_i(t)] = f_o(t). \quad (6.5)$$

El símbolo  $L$  operador lineal  $L$  en la ecuación (6.5) indica la ley que determina la función de salida,  $f_o(t)$ , dada la función de entrada,  $f_i(t)$ . A veces se menciona la ecuación (6.5) como una transformación  $L$  de la función  $f_i(t)$  en la función  $f_o(t)$ .

Con la notación de (6.5), un *sistema lineal e invariante en el tiempo* está definido por

$$L[a_1 f_{i1}(t) + a_2 f_{i2}(t)] = a_1 L[f_{i1}(t)] + a_2 L[f_{i2}(t)], \quad (6.6)$$

$$L[f_i(t + t_0)] = f_o(t + t_0), \quad (6.7)$$

donde  $f_o$  es una constante arbitraria.

**PROBLEMA 6.1** Obtener la expresión operacional para la respuesta de la corriente  $i(t)$ , al voltaje  $v(t)$ , del circuito que se muestra en la figura 6.2(a).

**Solución:** la fuente es el voltaje aplicado  $v(t)$ , y la respuesta es la corriente  $i(t)$ , como se muestra en la figura 6.2(b). La ecuación diferencial que relaciona  $i(t)$  y  $v(t)$  se puede obtener utilizando la ley de Kirchhoff, así:

$$R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt = v(t). \quad (6.8)$$

Diferenciando ambos miembros, se obtiene

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = \frac{dv(t)}{dt}, \quad (6.9)$$

donde el símbolo  $L$  representa la inductancia y no al operador  $L$ .

Utilizando el operador  $p = d/dt$ , la ecuación (6.9) se puede expresar como

$$\left( Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} \right) i(t) = p v(t). \quad (6.10)$$

Por tanto,

$$i(t) = \frac{p}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}} v(t) = H(p) v(t), \quad (6.11)$$

donde

$$H(p) = \frac{p}{\left( Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} \right)} = \frac{1}{\left( R + Lp + \frac{1}{Cp} \right)} = \frac{1}{Z(p)} = Y(p).$$

En el circuito eléctrico de la figura 6.2(a),  $Y(p)$  se denomina *función de admittance operacional*, y  $Z(p) = 1/Y(p)$  se denomina *función de impedancia operacional*.

**PROBLEMA 6.2** Considerar el sistema mecánico simple que se muestra en la figura 6.3(a). Obtener la expresión operacional de  $x(t)$ , que representa el desplazamiento de una masa  $m$  desde su posición de equilibrio.

**Solución:** la fuente es la fuerza aplicada  $f(t)$ , y la respuesta es el desplazamiento  $x(t)$  de la masa  $m$  desde su posición de equilibrio [figura 6.3(b)].

Las fuerzas que actúan sobre la masa son las siguientes:

- (1) la fuerza aplicada  $f(t)$ ;
- (2) la reacción por inercia ( $-md^2 x/d^2 t$ );
- (3) la fuerza de amortiguamiento (resistencia por fricción) ( $-k_d dx/dt$ ), y
- (4) la fuerza restauradora elástica ( $-k_s x$ ).

En los numerales (3) y (4),  $k_d$  y  $k_s$  son el coeficiente dinámico de fricción y la constante del resorte, respectivamente.

Aplicando el principio de d'Alembert, se tiene

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + k_d \frac{dx(t)}{dt} + k_s x(t) = f(t). \quad (6.12)$$

Utilizando operadores, la ecuación (6.12) se convierte en

$$(mp^2 + k_d p + k_s) x(t) = f(t). \quad (6.13)$$

Por tanto,

$$x(t) = \frac{1}{mp^2 + k_d p + k_s} f(t) = H(p) f(t), \quad (6.14)$$

donde  $H(p) = 1/(mp^2 + k_d p + k_s)$ .

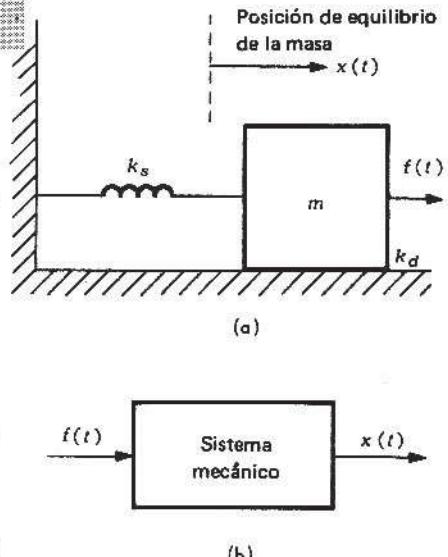


Figura 6.3 (a) El sistema mecánico del problema 6.2.  
(b) Representación del sistema mecánico de la figura 6.3(a).

### 6.3 RESPUESTA A FUNCIONES EXPONENCIALES DE ENTRADA - FUNCIONES PROPIAS Y FUNCIONES DEL SISTEMA

La respuesta de sistemas lineales a funciones de entrada que sean funciones exponenciales del tiempo, son de especial importancia en el análisis de sistemas lineales.

**PROBLEMA 6.3** Demostrar que la respuesta de un sistema lineal e invariable a una función exponencial  $e^{j\omega t}$ , también es una función exponencial y proporcional a la entrada, es decir,

$$\mathcal{L}\{e^{j\omega t}\} = k e^{j\omega t}. \quad (6.15)$$

**Solución:** sea  $f_o(t)$  la respuesta a  $e^{j\omega t}$ . Entonces,

$$\mathcal{L}\{e^{j\omega t}\} = f_o(t). \quad (6.16)$$

Puesto que el sistema es invariante, entonces por (6.7), se tiene

$$\mathcal{L}\{e^{j\omega(t+t_0)}\} = f(t+t_0). \quad (6.17)$$

Pero según (6.6), se tiene

$$\mathcal{L}\{e^{j\omega(t+t_0)}\} = \mathcal{L}\{e^{j\omega t_0} e^{j\omega t}\} = e^{j\omega t_0} \cdot \mathcal{L}\{e^{j\omega t}\}. \quad (6.18)$$

De donde,

$$f_o(t+t_0) = e^{j\omega t_0} f_o(t). \quad (6.19)$$

Haciendo  $t = 0$ , se obtiene

$$f_o(t_0) = f_o(0) e^{j\omega t_0}. \quad (6.20)$$

Como  $t_0$  es arbitrario, se cambia  $t_0$  por  $t$  y se expresa la ecuación (6.20) como

$$f_o(t) = f_o(0) e^{j\omega t} = k e^{j\omega t},$$

Es decir, la salida es proporcional a la entrada, siendo  $k = f_o(0)$  la constante de proporcionalidad. En general,  $k$  es compleja y depende de  $\omega$ .

**Otra forma de solución:** supóngase que la excitación en la ecuación (6.3), es la función  $f_i(t) = e^{j\omega t}$ ; entonces

$$A(p) f_o(t) = B(p) e^{j\omega t}, \quad (6.21)$$

donde  $f_o(t)$  es la respuesta del sistema. Ahora bien;

$$B(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0,$$

$$B(p) e^{j\omega t} = B(j\omega) e^{j\omega t}$$

dado que

$$p^m e^{j\omega t} = \frac{d^m}{dt^m} (e^{j\omega t}) = (j\omega)^m e^{j\omega t}.$$

Por tanto, la respuesta  $f_o(t)$  está definida por la ecuación diferencial lineal

$$A(p) f_o(t) = B(j\omega) e^{j\omega t}. \quad (6.22)$$

La función excitadora de la ecuación (6.22) es  $B(j\omega) e^{j\omega t}$ , una función exponencial, y según la teoría de las ecuaciones diferenciales, se puede suponer que la respuesta  $f_o(t)$  también es exponencial. De donde, si  $f_o(t) = k e^{j\omega t}$ , entonces

$$A(p) f_o(t) = A(p) [k e^{j\omega t}] = k_1 A(p) [e^{j\omega t}] = k_1 A(j\omega) e^{j\omega t} = A(j\omega) f_o(t). \quad (6.23)$$

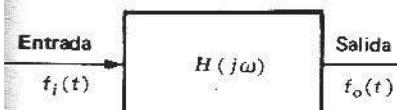
Sustituyendo (6.23) en la ecuación (6.22), se obtiene:

$$A(j\omega) f_o(t) = B(j\omega) e^{j\omega t}. \quad (6.24)$$

Por tanto, si  $A(j\omega) \neq 0$ , entonces

$$f_o(t) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} e^{j\omega t} = H(j\omega) e^{j\omega t}. \quad (6.25)$$

La figura 6.4 muestra un diagrama que ilustra la relación entre la entrada y la salida, dada por (6.25).



La entrada  $f_i(t) = e^{j\omega t}$  y  
la salida  $f_o(t) = H(j\omega) e^{j\omega t}$ .

Figura 6.4 Función del sistema.

La ecuación (6.25) se puede expresar en forma simbólica como

$$\mathcal{L}\{e^{j\omega t}\} = H(j\omega) e^{j\omega t}. \quad (6.26)$$

En lenguaje matemático, una función  $f(t)$  que satisface la ecuación

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = K f(t), \quad (6.27)$$

se denomina *función propia* (o función característica) y el valor correspondiente de  $K$ , *valor propio* (o valor característico). Según la ecuación (6.26), se puede decir que la función característica de un sistema lineal e invariante es una función exponencial. El valor propio  $H(j\omega)$  del sistema está definido como la *función del sistema*.

**PROBLEMA 6.4** Hallar la respuesta del sistema especificado por  $H(j\omega)$ , a una constante  $K$ .

**Solución:** según la ecuación (6.26) y por la linealidad del sistema, se tiene

$$\mathcal{L}\{K\} = K \mathcal{L}\{1\}, \quad (6.28)$$

donde  $H(0) = H(j\omega)|_{\omega=0}$ .

**PROBLEMA 6.5** Si la función de entrada de un sistema lineal especificado por  $H(j\omega)$  es una función periódica, con período  $T$ , hallar la respuesta del sistema.

**Solución:** puesto que la función de entrada  $f_i(t)$  es periódica, entonces

$$f_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad (6.29)$$

donde

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_i(t) e^{-jn\omega_0 t} dt. \quad (6.30)$$

De la ecuación (6.26) se sigue que

$$f_{on}(t) = H(jn\omega_0) c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (6.31)$$

es la salida en respuesta a la componente de entrada

$$f_{in}(t) = c_n e^{jn\omega_0 t}. \quad (6.32)$$

Como el sistema es lineal, su respuesta total a  $f_i(t)$  es la suma de las componentes  $f_{on}(t)$ . De este modo

$$f_o(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t}. \quad (6.33)$$

La ecuación (6.33) indica que si la entrada a un sistema lineal es periódica, entonces la salida también es periódica. Se debe observar que la expresión (6.33) es la respuesta en estado estacionario.

#### 6.4 RESPUESTAS SENOSOIDALES EN ESTADO ESTACIONARIO

La respuesta senoidal en estado estacionario de un sistema lineal se puede deducir como un caso especial de la respuesta a funciones exponenciales.

**PROBLEMA 6.6** Demostrar que las respuestas en estado estacionario del sistema especificado por  $H(j\omega)$ , a las funciones de entrada  $\cos \omega t$  y  $\sin \omega t$  están dadas por  $Re[H(j\omega) e^{j\omega t}]$  e  $Im[H(j\omega) e^{j\omega t}]$  respectivamente, donde  $Re$  denota "la parte real de" e  $Im$  denota "la parte imaginaria de".

**Solución:** supóngase que la respuesta en estado estacionario del sistema a la entrada  $\cos \omega t$  es  $r_c(t)$ , y que la respuesta en estado estacionario a  $\sin \omega t$  es  $r_s(t)$ ; es decir

$$L\{\cos \omega t\} = r_c(t), \quad (6.34)$$

$$L\{\sin \omega t\} = r_s(t). \quad (6.35)$$

De la propiedad de linealidad (6.6) se sigue que

$$L\{\cos \omega t + j \sin \omega t\} = r_c(t) + j r_s(t). \quad (6.36)$$

Pero como  $\cos \omega t + j \sin \omega t = e^{j\omega t}$ ,

$$L\{e^{j\omega t}\} = r_c(t) + j r_s(t). \quad (6.37)$$

Según (6.26) se sigue que

$$r_c(t) + j r_s(t) = H(j\omega) e^{j\omega t}. \quad (6.38)$$

Puesto que  $r_c(t)$  y  $r_s(t)$  son funciones reales de  $t$ , se tiene

$$r_c(t) = \operatorname{Re} [H(j\omega) e^{j\omega t}], \quad (6.39)$$

$$r_s(t) = \operatorname{Im} [H(j\omega) e^{j\omega t}]. \quad (6.40)$$

Por consiguiente,

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \operatorname{Re} [H(j\omega) e^{j\omega t}], \quad (6.41)$$

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \operatorname{Im} [H(j\omega) e^{j\omega t}]. \quad (6.42)$$

En análisis de estado estacionario senoidal se suelen emplear fasores para representar funciones senoidales. Así, una función coseno  $v(t)$  se puede expresar como

$$v(t) = v_m \cos(\omega t + \beta) = \operatorname{Re} [V_m e^{j\omega t}],$$

donde  $V_m = v_m e^{j\theta} = v_m / \beta$ . La cantidad compleja  $V_m$  es el falso que representa a la función  $v(t)$ .

**PROBLEMA 6.7** Si la función del sistema  $H(j\omega)$  se expresa en forma de falso, es decir,

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\theta(\omega)} = |H(j\omega)| / \theta(\omega),$$

demonstrar que las respuestas en estado estacionario del sistema a las entradas  $v_m \cos(\omega t + \beta)$  y  $v_m \sin(\omega t + \beta)$  están dadas, respectivamente, por

$$\operatorname{Re} [H(j\omega) V_m e^{j\omega t}] = v_m |H(j\omega)| \cos(\omega t + \beta + \theta),$$

$$\operatorname{Im} [H(j\omega) V_m e^{j\omega t}] = v_m |H(j\omega)| \sin(\omega t + \beta + \theta).$$

**Solución:** se procede como se hizo en el problema 6.6. Sea

$$\mathcal{L}\{v_m \cos(\omega t + \beta)\} = r_c(t), \quad (6.43)$$

$$\mathcal{L}\{v_m \sin(\omega t + \beta)\} = r_s(t). \quad (6.44)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{v_m [\cos(\omega t + \beta) + j \sin(\omega t + \beta)]\} &= \mathcal{L}\{v_m e^{j(\omega t + \beta)}\} \\ &= \mathcal{L}\{v_m e^{j\beta} e^{j\omega t}\}. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Sea  $v_m e^{j\beta} = V_m$ ; entonces, de la ecuación (6.26), se tiene

$$\mathcal{L}\{V_m e^{j\omega t}\} = V_m \mathcal{L}\{e^{j\omega t}\} = V_m H(j\omega) e^{j\omega t}. \quad (6.46)$$

Por tanto,

$$r_c(t) + j r_s(t) = V_m H(j\omega) e^{j\omega t}. \quad (6.47)$$

Puesto que  $V_m H(j\omega) e^{j\omega t} = v_m |H(j\omega)| e^{j(\omega t + \beta + \theta)}$ ,

$$r_c(t) = \operatorname{Re} [V_m H(j\omega) e^{j\omega t}] = v_m |H(j\omega)| \cos(\omega t + \beta + \theta), \quad (6.48)$$

$$r_s(t) = \operatorname{Im} [V_m H(j\omega) e^{j\omega t}] = v_m |H(j\omega)| \sin(\omega t + \beta + \theta). \quad (6.49)$$

De este modo,

$$\mathcal{L}\{v_m \cos(\omega t + \beta)\} = v_m |H(j\omega)| \cos(\omega t + \beta + \theta), \quad (6.50)$$

$$\mathcal{L}\{v_m \sin(\omega t + \beta)\} = v_m |H(j\omega)| \sin(\omega t + \beta + \theta). \quad (6.51)$$

De los resultados anteriores se concluye que la salida  $f_o(t)$  se puede representar por el falso  $V_m H(j\omega)$ , si la entrada  $f_i(t)$  está representada por el falso  $V_m$ . Por consiguiente, si la entrada y la salida son funciones senoidales estacionarias, entonces la función del sistema  $H(j\omega)$  es el cociente de los valores complejos de la salida y la entrada.

**PROBLEMA 6.8** Hallar la respuesta  $f_o(t)$  de un sistema lineal cuando la entrada  $f_i(t)$  es periódica con período  $T$ , y está expresada en serie de Fourier por

$$f_i(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (6.52)$$

**Solución:** del principio de superposición y de los resultados de los problemas 6.4 y 6.7, se sigue que

$$\begin{aligned} f_o(t) &= L\{f_i(t)\} \\ &= L\left\{C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n)\right\} \\ &= L\{C_0\} + \sum_{n=1}^{\infty} L\{C_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n)\} \\ &= C_0 H(0) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n |H(jn\omega_0)| \cos[n\omega_0 t + \phi_n + \theta(n\omega_0)]. \end{aligned} \quad (6.53)$$

## 6.5 APLICACIONES A CIRCUITOS ELECTRICOS

En esta sección se aplicarán las ideas desarrolladas hasta ahora, a algunos de los problemas que se presentan en el tratamiento de los circuitos eléctricos.

**PROBLEMA 6.9** Una fuente de voltaje  $v(t) = v_m \cos(\omega t + \beta)$  se aplica al circuito en serie  $RLC$ , que se muestra en la figura 6.5. Hallar la corriente de respuesta  $i_s(t)$  en estado estacionario.

**Solución:** según el resultado del problema 6.1, la respuesta de la corriente  $i(t)$  está relacionada con la fuente de voltaje por

$$i(t) = H(p)v(t) = \frac{1}{Z(p)}[v(t)], \quad (6.54)$$

donde  $H(p) = 1/Z(p)$  y  $Z(p) = R + Lp + \frac{1}{Cp}$ . Utilizando ahora la notación fasorial, se tiene

$$v(t) = v_m \cos(\omega t + \beta) = \operatorname{Re}[\mathbf{V}_m e^{j\omega t}], \quad (6.55)$$

donde  $\mathbf{V}_m = v_m e^{j\beta}$ .

Entonces según (6.50), la respuesta senoidal en estado estacionario  $i_s(t)$ , está dada por

$$i_s(t) = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{Z(j\omega)} \mathbf{V}_m e^{j\omega t}\right]. \quad (6.56)$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &= R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \\ &= |Z(j\omega)| e^{j\theta(\omega)} = |Z(j\omega)| / \theta(\omega), \end{aligned} \quad (6.57)$$

donde

$$|Z(j\omega)| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad \theta(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right).$$

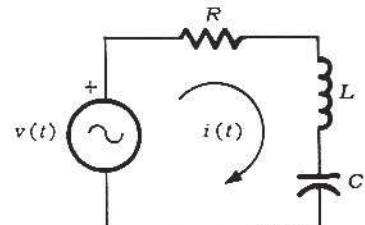


Figura 6.5 El circuito en serie  $RLC$  del problema 6.9.

Entonces,

$$i_s(t) = \frac{V_m}{|Z(j\omega)|} \cos [\omega t + \beta - \theta(\omega)]. \quad (6.58)$$

Mediante la notación fasorial, la ecuación (6.56) se puede expresar como

$$i_s(t) = \operatorname{Re}[I_m e^{j\omega t}] \quad (6.59)$$

Entonces el fasor  $I_m$ , que representa a  $i_s(t)$ , está relacionado con el fasor  $V_m$ , que representa a  $v(t)$ , por

$$I_m = \frac{1}{Z(j\omega)} V_m = Y(j\omega) V_m \quad (6.60)$$

$$\frac{V_m}{I_m} = Z(j\omega), \quad \frac{I_m}{V_m} = Y(j\omega), \quad (6.61)$$

donde  $Z(j\omega)$  y  $Y(j\omega)$  se denominan funciones senoidales de impedancia y admittance del circuito, respectivamente.

**PROBLEMA 6.10** Una fuente de voltaje  $v(t)$ , cuya forma es una onda cuadrada, como se muestra en la figura 6.6(a), se aplica al circuito en serie  $RL$  que se muestra en la figura 6.6(b). Hallar la corriente de respuesta  $i_s(t)$ , en estado estacionario.

**Solución:** la expansión en serie de Fourier de la onda cuadrada está dada por (2.38). Con  $\omega_0 = 2\pi/T = 1$ , se tiene

$$v(t) = \frac{4V}{\pi} \left[ \cos t - \frac{1}{3} \cos 3t + \frac{1}{5} \cos 5t - \dots \right]. \quad (6.62)$$

La impedancia del circuito  $RL$  (figura 6.6(b)) a cualquier frecuencia angular  $\omega$  está dada por

$$Z(j\omega) = R + j\omega L.$$

Por consiguiente, para el armónico enésimo la impedancia es:

$$Z(jn\omega_0) = R + jn\omega_0 L.$$

Para este problema,  $R = 1\Omega$  y  $L = 1h$ ; por consiguiente,

$$Z(jn\omega_0) = Z(jn) = 1 + jn = |Z(jn)| \angle \theta(n),$$

donde

$$|Z(jn)| = \sqrt{1 + n^2}, \quad \theta(n) = \tan^{-1} n.$$

Según el principio de superposición, se sigue que la respuesta en estado estacionario  $i_s(t)$ , está dada por

$$i_s(t) = \frac{4V}{\pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(t - \tan^{-1} 1) - \frac{1}{3\sqrt{10}} \cos(3t - \tan^{-1} 3) \right. \\ \left. + \frac{1}{5\sqrt{26}} \cos(5t - \tan^{-1} 5) + \dots \right]. \quad (6.63)$$

**PROBLEMA 6.11** El voltaje de entrada al circuito  $RC$ , de dos fuentes, que se muestra en la figura 6.7, es la serie finita de Fourier

$$v_i(t) = 100 \cos t + 10 \cos 3t + \cos 5t.$$

Hallar la respuesta resultante  $v_{os}(t)$  en estado estacionario.

**Solución:** puesto que la fuente es

$$v_i(t) = R i(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt = \left( R + \frac{1}{pC} \right) i(t), \quad (6.64)$$

la respuesta es

$$v_o(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt = \frac{1}{pC} i(t). \quad (6.65)$$

Dividiendo el resultado (6.65) por (6.64), se obtiene

$$\frac{v_o(t)}{v_i(t)} = \frac{\frac{1}{pC}}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{1}{1 + pRC}.$$

Por consiguiente, la respuesta  $v_o(t)$  y la entrada  $v_i(t)$  están relacionados por

$$v_o(t) = \frac{\frac{1}{pC}}{R + \frac{1}{pC}} v_i(t) = H(p) v_i(t), \quad (6.66)$$

donde

$$H(p) = \frac{\frac{1}{pC}}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{1}{1 + pRC}.$$

Ahora la razón de fasores  $V_o/V_i$  a cualquier frecuencia angular  $\omega$  es

$$\frac{V_o}{V_i} = H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} e^{-j\tan^{-1} \omega RC}. \quad (6.67)$$

Puesto que  $\omega_0 = 1$ , la razón de fasores del armónico enésimo es

$$\frac{V_o}{V_i}|_n = H(jn\omega_0) = H(jn) = \frac{1}{\sqrt{1 + (nRC)^2}} e^{-j\tan^{-1} nRC}.$$

Por tanto, según el principio de superposición se sigue que la respuesta en estado estacionario,  $v_{os}(t)$ , está dada por

$$v_{os}(t) = \frac{100}{\sqrt{1 + R^2 C^2}} \cos(t - \tan^{-1} RC) + \frac{10}{\sqrt{1 + 9R^2 C^2}} \cos(3t - \tan^{-1} 3RC) \\ + \frac{1}{\sqrt{1 + 25R^2 C^2}} \cos(5t - \tan^{-1} 5RC). \quad (6.68)$$

En este problema,  $H(j\omega)$  de (6.67), se denomina *función de transferencia de voltaje*.

### 6.5a Cálculo de potencia en estado estacionario

**PROBLEMA 6.12** El voltaje  $v_{ab}(t)$ , en los terminales  $a-b$  del circuito de la figura 6.8, es periódico y está definido por la serie de Fourier

$$v_{ab}(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos(n\omega_0 t + \beta_n), \quad (6.69)$$

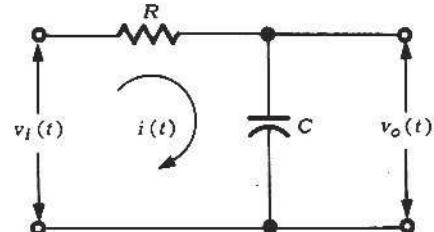


Figura 6.7 El circuito  $RC$  de dos fuentes del problema 6.11.

y la corriente  $i_s(t)$ , en estado estacionario que entra por el terminal  $a$  es

$$i_s(t) = I_o + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos(n\omega_0 t + \alpha_n). \quad (6.70)$$

Demostrar que la potencia promedio de entrada  $P_{ab}$  definida por

$$P_{ab} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v_{ab}(t) i_s(t) dt \quad (6.71)$$

es igual a

$$P_{ab} = V_o I_o + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \cos(\beta_n - \alpha_n). \quad (6.72)$$

**Solución:** sustituyendo (6.69) y (6.70) en (6.71), se tiene

$$\begin{aligned} P_{ab} &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[ V_o + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos(n\omega_0 t + \beta_n) \right] \left[ I_o + \sum_{k=1}^{\infty} I_k \cos(k\omega_0 t + \alpha_k) \right] dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[ V_o I_o + V_o \sum_{k=1}^{\infty} I_k \cos(k\omega_0 t + \alpha_k) + I_o \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos(n\omega_0 t + \beta_n) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} V_n I_k \cos(n\omega_0 t + \beta_n) \cos(k\omega_0 t + \alpha_k) \right] dt \\ &= V_o I_o \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt + V_o \sum_{k=1}^{\infty} I_k \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(k\omega_0 t + \alpha_k) dt \\ &\quad + I_o \sum_{n=1}^{\infty} V_n \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t + \beta_n) dt \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \sum_{k=1}^{\infty} I_k \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t + \beta_n) \cos(k\omega_0 t + \alpha_k) dt. \end{aligned} \quad (6.73)$$

Utilizando las relaciones de ortogonalidad de la sección 1.3, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t + \beta_n) dt &= 0, \\ \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t + \beta_n) \cos(k\omega_0 t + \alpha_k) dt &= \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \frac{T}{2} \cos(\beta_n - \alpha_n), & k = n. \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto, (6.73) se puede expresar como

$$P_{ab} = V_o I_o + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \cos(\beta_n - \alpha_n).$$

Denotando la raíz cuadrática media del armónico enésimo del voltaje por  $V_{eff,n}$  y la del armónico enésimo de la corriente por  $I_{eff,n}$ , se tiene

$$\frac{1}{2} V_n I_n = V_{eff,n} I_{eff,n}. \quad (6.74)$$

Sea

$$\theta_n = \beta_n - \alpha_n. \quad (6.75)$$

Entonces  $\theta_n$  denota la diferencia de fase entre los armónicos enésimos del voltaje y de la corriente. Introduciendo (6.74) y (6.75) en (6.72), se obtiene

$$\begin{aligned} P_{ab} &= V_o I_o + \sum_{n=1}^{\infty} V_{eff,n} I_{eff,n} \cos \theta_n \\ &= P_0 + P_1 + P_2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n, \end{aligned} \quad (6.76)$$

donde  $P_n$  es la potencia promedio del armónico enésimo.

**La ecuación (6.76) muestra que la potencia promedio entregada por una excitación periódica a un circuito es la suma de la potencia promedio entregada por los armónicos individuales. No hay contribuciones a la potencia promedio, por parte de la corriente a una frecuencia y del voltaje a otra frecuencia.**

**PROBLEMA 6.13** Determinar la potencia promedio entregada al circuito de un puerto, de la figura 6.8, si se sabe que

$$v_{ab}(t) = 10 + 2 \cos(t + 45^\circ) + \cos(2t + 45^\circ) + \cos(3t - 60^\circ),$$

$$i(t) = 5 + \cos t + 2 \cos(3t + 75^\circ).$$

**Solución:** para  $V_i, I_i, \theta_i$  y  $p_i$ , siendo  $i = 0, 1, 2, 3$ , se tiene

$$V_0 = 10, \quad I_0 = 5, \quad P_0 = 50,$$

$$V_1 = 2, \quad I_1 = 1, \quad \theta_1 = 45^\circ, \quad P_1 = \frac{1}{2} 2 \cos 45^\circ = 0.707,$$

$$V_2 = 1, \quad I_2 = 0, \quad P_2 = 0,$$

$$V_3 = 1, \quad I_3 = 2, \quad \theta_3 = -135^\circ, \quad P_3 = \frac{1}{2} 2 \cos(-135^\circ) = -0.707.$$

Por tanto, la potencia promedio entregada al circuito es

$$P_{ab} = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 50 + 0.707 + 0 - 0.707 = 50 \text{ W.}$$

## 6.6 APPLICACIONES A SISTEMAS MECÁNICOS

El método presentado en la sección precedente se puede aplicar también a sistemas mecánicos.

**PROBLEMA 6.14** Considerar el sistema mecánico ilustrado en la figura 6.9 que consiste de un resorte, una masa y un amortiguador. Si el sistema se perturba por una fuerza  $f(t) = f_0 \cos(\omega t + \beta)$ , hallar el desplazamiento  $x_s(t)$ , de la respuesta en estado estacionario.

**Solución:** la respuesta  $x_s(t)$  y la función excitadora  $f(t)$  están relacionadas por la siguiente ecuación diferencial:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + B \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = f(t), \quad (6.77)$$

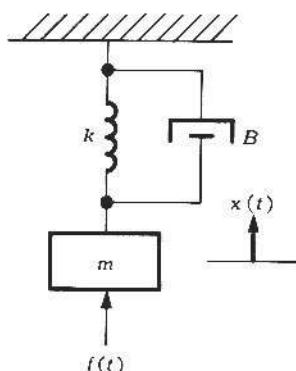


Figura 6.9 El sistema mecánico del problema 6.14.

donde  $m$ ,  $B$  y  $k$  representan la masa, el coeficiente de amortiguamiento y la constante del resorte, respectivamente. La ecuación (6.77) se puede expresar en forma operacional como

$$x(t) = \frac{1}{mp^2 + Bp + k} f(t) = H(p) f(t), \quad (6.78)$$

donde

$$H(p) = \frac{1}{(mp^2 + Bp + k)}.$$

Dado que se pide la respuesta en estado estacionario, mediante notación fasorial, se tiene

$$f(t) = f_o \cos(\omega t + \beta) = \operatorname{Re}[F_o e^{j\omega t}],$$

donde  $F_o = f_o e^{j\beta}$ .

Entonces, según (6.50), se tiene que la respuesta en estado estacionario,  $x_s(t)$ , está dada por

$$x_s(t) = \operatorname{Re}[F_o H(j\omega) e^{j\omega t}]. \quad (6.79)$$

Ahora bien;

$$H(j\omega) = \frac{1}{m(j\omega)^2 + B(j\omega) + k} = \frac{1}{k - m\omega^2 + j\omega B} = |H(j\omega)| e^{j\theta(\omega)},$$

donde

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 B^2}}, \quad \theta(\omega) = -\tan^{-1} \left( \frac{\omega B}{k - m\omega^2} \right).$$

Entonces,

$$x_s(t) = \frac{f_o}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 B^2}} \cos \left( \omega t + \beta - \tan^{-1} \frac{\omega B}{k - m\omega^2} \right). \quad (6.80)$$

El ángulo  $\theta(\omega)$  se denomina *ángulo de fase en retraso*.

**PROBLEMA 6.15** Analizar el movimiento en estado estacionario del sistema que se muestra en la figura 6.10(a), si la fuerza perturbadora  $f(t)$  es la que se muestra en la figura 6.10(b).

**Solución:** la respuesta  $x(t)$ , el desplazamiento de la masa  $m$  desde su posición de equilibrio, y la fuerza perturbadora están relacionadas por

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + k x(t) = f(t), \quad (6.81)$$

ecuación que se puede expresar también como:

$$x(t) = \frac{1}{mp^2 + k} f(t) = H(p) f(t), \quad (6.82)$$

donde

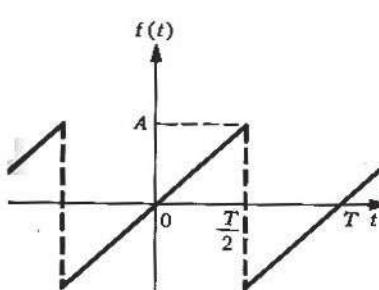
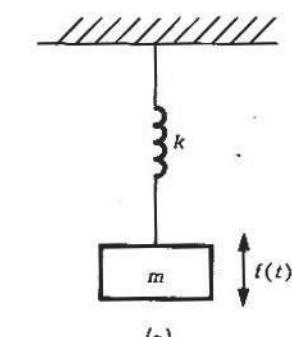
$$H(p) = \frac{1}{(mp^2 + k)}.$$

La expansión en serie de Fourier de  $f(t)$ , se obtiene del resultado del problema 2.15, esto es,

$$f(t) = -\frac{A}{\pi} \left( \sin \omega_0 t + \frac{1}{2} \sin 2\omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \dots \right),$$

donde  $\omega_0 = 2\pi/T$ .

- 6.10 (a) El sistema mecánico del problema 6.15. (b) La fuerza perturbadora del problema 6.15.



Puesto que interesa sólo el movimiento forzado o movimiento en estado estacionario del sistema, se procede a utilizar la notación fasorial. Entonces, se tiene

$$H(j\omega) = \frac{1}{m(j\omega)^2 + k} = \frac{1}{k - m\omega^2} = |H(j\omega)| \angle \theta(\omega)$$

y

$$H(jn\omega_0) = \frac{1}{[k - m(n\omega_0)^2]}.$$

Dado que el ángulo de fase en retraso  $\theta(\omega)$  es cero, entonces, por (6.51), se obtiene

$$x_s(t) = -\frac{A}{\pi} \left[ \frac{\sin \omega_0 t}{k - m\omega_0^2} + \frac{1}{2} \frac{\sin 2\omega_0 t}{k - 4m\omega_0^2} + \frac{1}{3} \frac{\sin 3\omega_0 t}{k - 9m\omega_0^2} + \dots \right]. \quad (6.83)$$

## 6.7 RESPUESTA DE UN SISTEMA LINEAL A UN IMPULSO UNITARIO—FUNCION DEL SISTEMA

Ahora se considerará una situación más general en la cual la excitación de un sistema es cualquier función dada del tiempo.

La respuesta de un sistema lineal al impulso unitario  $\delta(t)$ , se denota por  $h(t)$ .

Simbólicamente esto se expresa como

$$L\{\delta(t)\} = h(t). \quad (6.84)$$

Si el sistema es invariante (o de parámetros constantes), entonces, según la ecuación (6.7) se observa que su respuesta a  $\delta(t-\tau)$  está dada por  $h(t-\tau)$ , es decir,

$$L\{\delta(t-\tau)\} = h(t-\tau). \quad (6.85)$$

**PROBLEMA 6.16** Demostrar que la respuesta  $f_o(t)$  de un sistema lineal e invariante, a una entrada arbitraria  $f_i(t)$ , se puede expresar como la convolución de la entrada  $f_i(t)$  y de la respuesta del sistema al impulso unitario  $h(t)$ , es decir,

$$f_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(\tau) h(t-\tau) d\tau = f_i(t) * h(t) \quad (6.86)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t-\tau) h(\tau) d\tau = h(t) * f_i(t). \quad (6.87)$$

**Solución:** según la propiedad (2.68) de la función  $\delta$ ,  $f_i(t)$  se puede expresar como

$$f_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(\tau) \delta(t-\tau) d\tau. \quad (6.88)$$

Entonces, según la linealidad del operador  $L$ , dada por (6.6) y en razón de la ecuación (6.85), se tiene

$$f_o(t) = L\{f_i(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(\tau) L\{\delta(t-\tau)\} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(\tau) h(t-\tau) d\tau. \quad (6.89)$$

Según la definición (4.105) y la propiedad (4.108) de la convolución, la ecuación (6.89) se puede expresar como

$$\begin{aligned} f_o(t) &= f_i(t) * h(t) = h(t) * f_i(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t-\tau) h(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

La ecuación (6.86) o (6.87) presenta un resultado muy interesante, pues implica que la respuesta de un sistema lineal está determinado únicamente por el conocimiento de la respuesta al impulso unitario  $h(t)$  del sistema.

### 6.7 a Función del sistema

La transformada de Fourier de la respuesta al impulso unitario de un sistema lineal, se denomina *función del sistema*.

$$H(\omega) = \mathcal{F}[h(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (6.90)$$

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (6.91)$$

Las ecuaciones (6.90) y (6.91) indican que la respuesta al impulso unitario, y la función del sistema constituyen un par de transformadas de Fourier.

**PROBLEMA 6.17** Si  $F_i(\omega)$  y  $F_o(\omega)$  denotan las transformadas de Fourier, de la entrada  $f_i(t)$  y de la salida  $f_o(t)$  de un sistema lineal, respectivamente, demostrar que

$$F_o(\omega) = F_i(\omega) H(\omega), \quad (6.92)$$

$$f_o(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_i(\omega) H(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (6.93)$$

donde  $H(\omega)$  es la función del sistema definido por (6.90).

**Solución:** por (6.86), se tiene

$$f_o(t) = f_i(t) * h(t).$$

Por consiguiente, aplicando el teorema de convolución en el tiempo, dado por (4.122), se obtiene

$$F_o(\omega) = F_i(\omega) H(\omega).$$

Aplicando la fórmula (4.16), de la transformada inversa de Fourier, se obtiene

$$f_o(t) = \mathcal{F}^{-1}[F_o(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_i(\omega) H(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

**PROBLEMA 6.18** Verificar que la función del sistema  $H(\omega)$  definida por (6.90), es exactamente la misma función del sistema  $H(j\omega)$  definida por (6.26).

**Solución:** si  $f_i(t) = e^{j\omega_0 t}$ , entonces de (5.21), se tiene

$$F_i(\omega) = \mathcal{F}[f_i(t)] = \mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi \delta(\omega - \omega_0). \quad [5.21]$$

De donde,

$$F_i(\omega) H(\omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0) H(\omega) = 2\pi H(\omega_0) \delta(\omega - \omega_0), \quad (6.94)$$

en razón de la propiedad (2.74), de la función  $\delta$ . Entonces, por (6.93), se tiene

$$\begin{aligned} f_o(t) &= L\{e^{j\omega_0 t}\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi H(\omega_0) \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega \\ &= H(\omega_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega \\ &= H(\omega_0) e^{j\omega_0 t}. \end{aligned} \quad (6.95)$$

Dado que (6.95) se cumple para cualquier valor de  $\omega_0$ , se puede cambiar  $\omega_0$  por  $\omega$  y se obtiene

$$f_o(t) = L\{e^{j\omega t}\} = H(\omega) e^{j\omega t}. \quad (6.96)$$

Por (6.26), se tiene

$$f_o(t) = L\{e^{j\omega t}\} = H(j\omega) e^{j\omega t}. \quad (6.26)$$

Comparando (6.96) y (6.26), se concluye que

$$H(\omega) = H(j\omega).$$

De hecho, en la definición de la transformada de Fourier de  $f(t)$ , se tiene

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad [4.15]$$

La variable  $\omega$  siempre aparece con  $j$ , y por consiguiente, la integral se puede expresar como función de  $j\omega$ . De este modo, se puede expresar la definición (4.15) como

$$F(j\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt,$$

y, en consecuencia,

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Por consiguiente,  $F(\omega)$  y  $F(j\omega)$  representan la misma función  $\mathcal{F}[f(t)]$ . La distinción es sólo cuestión de notación. En el resto de este libro  $F(\omega)$  y  $F(j\omega)$  se utilizarán indistintamente. De este modo, la relación (6.92) se puede expresar también como

$$F_o(j\omega) = F_i(j\omega) H(j\omega). \quad (6.97)$$

Por (6.92) o (6.97), se tiene

$$H(j\omega) = \frac{F_o(j\omega)}{F_i(j\omega)} = \frac{\mathcal{F}[f_o(t)]}{\mathcal{F}[f_i(t)]}. \quad (6.98)$$

La ecuación (6.98) indica que la función del sistema  $H(j\omega)$  también es el cuociente entre la transformada de la respuesta y la transformada de la fuente.

**PROBLEMA 6.19** Hallar la respuesta al impulso unitario, del circuito  $RC$  que se muestra en la figura 6.11(a).

**Solución:** la función del sistema  $H(j\omega)$ , obtenida en el resultado (6.67) del problema 6.11, está dada por

$$H(j\omega) = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{RC \left( j\omega + \frac{1}{RC} \right)}. \quad (6.99)$$

Por consiguiente, según el resultado del problema 4.11, se tiene

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(j\omega)] = \frac{1}{RC} \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{1}{j\omega + \frac{1}{RC}} \right] = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t). \quad (6.100)$$

La respuesta  $h(t)$  al impulso unitario está trazada en la figura 6.11(b).

**PROBLEMA 6.20** Una fuente de voltaje  $v_i(t) = e^{-t} u(t)$  se aplica al circuito  $RC$  de la figura 6.11(a); hallar la respuesta, el voltaje  $v_o(t)$ , si  $R = 1/2\Omega$  y  $C = 1\text{ f}$ .

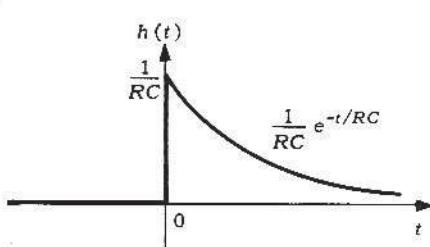
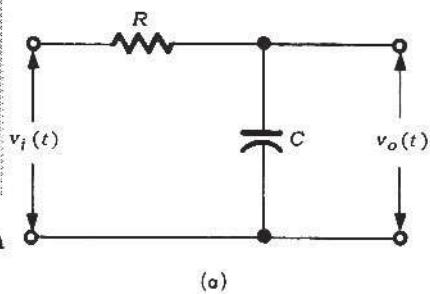


Figura 6.11 (a) El circuito  $RC$  del problema 6.19. (b) La respuesta al impulso unitario.

**Solución:** sustituyendo  $R = 1/2\Omega$  y  $C = 1 \text{ f}$  en (6.100) se obtiene

$$h(t) = 2 e^{-2t} u(t). \quad (6.101)$$

Por tanto, según (6.86), se tiene

$$\begin{aligned} v_o(t) &= v_i(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} v_i(\tau) h(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau} u(\tau) 2e^{-2(t-\tau)} u(t - \tau) d\tau \\ &= 2 e^{-2t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(\tau) u(t - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Dado que

$$u(\tau) u(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{para } \tau < 0, \tau > t \\ 1 & \text{para } 0 < \tau < t, \end{cases}$$

se tiene

$$\begin{aligned} v_o(t) &= \left( 2 e^{-2t} \int_0^t e^{\tau} d\tau \right) u(t) \\ &= 2 e^{-2t} (e^t - 1) u(t) \\ &= 2 (e^{-t} - e^{-2t}) u(t). \end{aligned} \quad (6.102)$$

La expresión  $u(t)$  en el resultado (6.102) indica que no hay respuesta debida a la fuente, antes de que ésta se aplique.

**PROBLEMA 6.21** Hallar la respuesta del circuito  $RC$  de la figura 6.11(a), al escalón unitario  $u(t)$ , por convolución.

**Solución:** por (6.100), se tiene

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t).$$

Por tanto, según (6.86), se obtiene

$$\begin{aligned} v_o(t) &= v_i(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} v_i(\tau) h(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \frac{1}{RC} e^{-(t-\tau)/RC} u(t - \tau) d\tau \\ &= \left[ \frac{1}{RC} \int_0^t e^{-(t-\tau)/RC} d\tau \right] u(t) \\ &= \left( \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \int_0^t e^{\tau/RC} d\tau \right) u(t) \\ &= (1 - e^{-t/RC}) u(t). \end{aligned} \quad (6.103)$$

### 6.7b Sistema causal

Un sistema físico pasivo tiene la propiedad de que si la fuente es cero para  $t < t_0$ , entonces la respuesta también es cero para  $t < t_0$ ; es decir, si

$$f_i(t) = 0 \text{ para } t < t_0 \quad (6.104)$$

entonces

$$f_o(t) = L[f_i(t)] = 0 \text{ para } t < t_0. \quad (6.105)$$

Un sistema que satisface (6.104) y (6.105) se llama *sistema causal*. Una función  $f(t)$  se denominará *causal* si su valor es cero para  $t < 0$ ; es decir,  $f(t) = 0$  para  $t < 0$ . Se puede demostrar que todos los sistemas físicamente realizables son causales.

**PROBLEMA 6.22** Demostrar que la respuesta  $f_o(t)$  de un sistema lineal causal, a cualquier fuente  $f_i(t)$ , está dada por

$$f_o(t) = \int_{-\infty}^t f_i(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (6.106)$$

$$= \int_0^\infty f_i(t - \tau) h(\tau) d\tau. \quad (6.107)$$

**Solución:** de (6.104) y (6.105) se sigue que  $h(t)$ , la respuesta al impulso unitario, es causal; es decir,

$$h(t) = 0 \text{ para } t < 0. \quad (6.108)$$

Esto significa que

$$h(\tau) = 0 \text{ para } \tau < 0 \quad (6.109)$$

y

$$h(t - \tau) = 0 \text{ para } t - \tau < 0 \text{ ó } -\tau > t. \quad (6.110)$$

Si se aplica (6.110), se tiene que el integrando en la ecuación (6.86) es cero en el intervalo  $\tau = t$  a  $\tau = \infty$ . De (6.86) se tiene, entonces,

$$f_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^t f_i(\tau) h(t - \tau) d\tau.$$

Análogamente, si se aplica (6.109) se tiene que el integrando en (6.87) es cero en el intervalo  $\tau = -\infty$  a  $\tau = 0$ . Por (6.87) se tiene, entonces,

$$f_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t - \tau) h(\tau) d\tau$$

$$= \int_0^\infty f_i(t - \tau) h(\tau) d\tau.$$

**PROBLEMA 6.23** Si la función de la fuente  $f_i(t)$  es causal, es decir, si la fuente  $f_i(t)$  se aplica en  $t = 0$ , demostrar que la respuesta  $f_o(t)$  del sistema lineal causal es

$$f_o(t) = \int_0^t f_i(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (6.111)$$

**Solución:** Si  $f_i(\tau) = 0$  para  $\tau < 0$ , entonces el límite inferior de la integral que aparece en la ecuación (6.106), se puede cambiar a cero, pues en el intervalo  $\tau = -\infty$  a  $\tau = 0$ , el integrando es cero. De este modo,

$$f_o(t) = \int_{-\infty}^t f_i(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_i(\tau) h(t - \tau) d\tau.$$

### 6.8 RESPUESTA DE UN SISTEMA LINEAL A UN ESCALON UNITARIO—INTEGRAL DE SUPERPOSICION

Las ecuaciones (6.86) y (6.87) expresan la respuesta de un sistema lineal en términos de la respuesta al impulso unitario. En algunos casos también es conveniente expresar la respuesta en términos de la respuesta del sistema al escalón unitario.

La respuesta de un sistema al escalón unitario  $u(t)$  se denota por  $a(t)$ , es decir,

$$\mathcal{L}[u(t)] = a(t). \quad (6.112)$$

**PROBLEMA 6.24** Demostrar que  $a(t)$ , la respuesta de un sistema lineal a un escalón unitario, se puede expresar como

$$a(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau, \quad (6.113)$$

$$a(\infty) = a(t)|_{t=\infty} = H(0), \quad (6.114)$$

donde  $H(\omega)$  es la función del sistema y  $h(t)$  es la respuesta al impulso unitario. Si el sistema es causal, demostrar que

$$a(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau. \quad (6.115)$$

**Solución:** puesto que  $f_i(t) = u(t)$  y  $f_o(t) = a(t)$ , se sigue de (6.87) que

$$a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t - \tau) h(\tau) d\tau. \quad (6.116)$$

Dado que

$$u(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{para } \tau > t \\ 1 & \text{para } \tau < t, \end{cases}$$

se tiene

$$a(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau.$$

Haciendo  $t = \infty$ , se obtiene

$$a(\infty) = a(t)|_{t=\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau.$$

En realidad, esta integral se puede expresar como

$$a(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau|_{\omega=0} = H(\omega)|_{\omega=0} = H(0).$$

aparece esto que  $h(\tau) = 0$  para  $\tau < 0$ , la ecuación (6.113), para un sistema causal, se convierte en 0,

$$a(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau.$$

**PROBLEMA 6.25** Utilizando (6.115), resolver de nuevo el problema 6.21.

**Solución:** por (6.100), se tiene

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t). \quad [6.100]$$

sustituyendo (6.100) en (6.115), se obtiene

$$\begin{aligned} v_o(t) &= a(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{1}{RC} e^{-\tau/RC} d\tau \\ &= \left[ \frac{1}{RC} \int_0^t e^{-\tau/RC} d\tau \right] u(t) \\ &= (1 - e^{-t/RC}) u(t), \end{aligned}$$

cual es exactamente el mismo resultado de (6.103).

**PROBLEMA 6.26** Demostrar que la transformada de Fourier de  $a(t)$  está dada por

$$A(\omega) = \mathcal{F}[a(t)] = \pi H(0) \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} H(\omega). \quad (6.117)$$

Si el

nde  $H(\omega)$  es la función del sistema.

**Solución:** por (5.35), se tiene

$$\mathcal{F}[f_t(t)] = \mathcal{F}[u(t)] = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}. \quad [5.35]$$

ahora  $\mathcal{F}[f_o(t)] = \mathcal{F}[a(t)] = A(\omega)$ , entonces, por (6.92), se tiene

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \left[ \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] H(\omega) \\ &= \pi \delta(\omega) H(\omega) + \frac{1}{j\omega} H(\omega) \\ &= \pi H(0) \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} H(\omega), \end{aligned}$$

razón de (2.74), una propiedad de la función  $\delta$ .

ra forma de solución: puesto que según (6.113), se tiene

$$a(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau,$$

resultado (5.55), del problema 5.12, se sigue que

$$A(\omega) = \frac{1}{j\omega} H(\omega) + \pi H(0) \delta(\omega).$$

**PROBLEMA 6.27** Si  $a(t)$  es la respuesta al escalón unitario de un sistema lineal cuya función es  $H(\omega)$ , demostrar que la respuesta  $f_o(t)$  del sistema, a cualquier fuente  $f_o(t)$ , es dada por

$$f_o(t) = f_i(-\infty) H(0) + \int_{-\infty}^{\infty} f'_i(\tau) a(t-\tau) d\tau, \quad (6.118)$$

dónde  $f'_i(\tau) = df_i(\tau)/d\tau$ .

**Solución:** cualquier función de entrada  $f_i(t)$  se puede expresar en la forma

$$\begin{aligned} f_i(t) &= f_i(-\infty) + \int_{-\infty}^t f'_i(\tau) d\tau \\ &= f_i(-\infty) + \int_{-\infty}^{\infty} f'_i(\tau) u(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (6.119)$$

puesto que

$$u(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < \tau \\ 1 & \text{para } t > \tau. \end{cases}$$

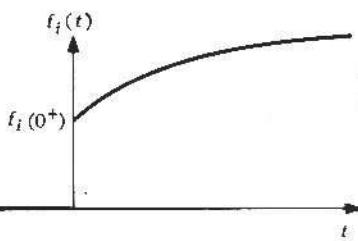
Entonces, por (6.28) y (6.112), se tiene

$$L\{K\} = K H(0) \quad \text{y} \quad L\{u(t)\} = a(t) \longrightarrow L\{u(t-\tau)\} = a(t-\tau).$$

De este modo,

$$\begin{aligned} f_o(t) &= L\{f_i(t)\} = L\{f(-\infty)\} + \int_{-\infty}^{\infty} f'_i(\tau) L\{u(t-\tau)\} d\tau \\ &= f_i(-\infty) H(0) + \int_{-\infty}^{\infty} f'_i(\tau) a(t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

**PROBLEMA 6.28** En un sistema lineal y causal, la función de entrada  $f_i(t) = 0$  para  $t < 0$ , tiene una discontinuidad de valor  $f_i(0+)$  en  $t = 0$ , y es continua para  $t > 0$ , como se muestra en la figura 6.12. Demostrar que la respuesta  $f_o(t)$  del sistema, está dada por la integral de superposición, o integral de Duhamel.



$$f_o(t) = f_i(0+) a(t) + \int_{0+}^t f'_i(\tau) a(t-\tau) d\tau. \quad (6.120)$$

**Solución:** como  $f_i(-\infty) = 0$ , por (6.119), se tiene

$$f_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f'_i(\tau) a(t-\tau) d\tau. \quad (6.121)$$

Figura 6.12 La función de entrada  $f_i(t)$ , del problema 6.27.

Como  $f_i(t)$  tiene una discontinuidad de valor  $f_i(0+)$  en  $t = 0$ , se tiene, entonces, según el resultado (2.94) del problema 2.28, que

$$f'_i(t) = f_i(0+) \delta(t) + f'_{i+}(t), \quad (6.122)$$

dónde  $f'_{i+}(t) = f'_i(t)u(t)$ , es decir, la derivada de  $f_i(t)$ , para  $t > 0$ . Sustituyendo (6.122) en (6.121), se obtiene

$$\begin{aligned} f_o(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} [f_i(0+) \delta(\tau) + f'_i(\tau) u(\tau)] a(t-\tau) d\tau \\ &= f_i(0+) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) a(t-\tau) d\tau + \int_{0+}^{\infty} f'_i(\tau) a(t-\tau) d\tau \\ &= f_i(0+) a(t) + \int_{0+}^t f'_i(\tau) a(t-\tau) d\tau \end{aligned}$$

puesto que,  $a(t-\tau) = 0$ , para  $\tau > t$  en el sistema causal.

1.118 La ecuación (6.120) expresa la respuesta de un sistema causal en términos de  $a(t)$ , la respuesta a un escalón unitario.

**PROBLEMA 6.29** Explicar de qué manera la integral de superposición (6.120), expresa realmente la respuesta de un sistema, como una suma continua de las respuestas a las componentes en escalón, de la función  $f_i(t)$ .

**Solución:** una función de entrada  $f_i(t)$  se puede aproximar por la suma de un gran número de escalones infinitesimales, como se muestra en la figura 6.13. Un escalón infinitesimal localizado en  $\tau$  se puede expresar como

$$\frac{df_i(\tau)}{d\tau} \Delta \tau u(t - \tau) = f'_i(\tau) \Delta \tau u(t - \tau). \quad (6.123)$$

En la figura 6.13 se observa que  $f_i(t)$  se puede expresar como

$$f_i(t) = f_i(0+) u(t) + \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{\tau=0}^t f'_i(\tau) \Delta \tau u(t - \tau). \quad (6.124)$$

Puesto que la respuesta del sistema al escalón unitario  $u(t)$  es  $a(t)$ , la respuesta debida a un escalón infinitesimal (6.123) está dada por

$$f'_i(\tau) \Delta \tau a(t - \tau).$$

De donde  $f_o(t)$ , la respuesta del sistema a la fuente  $f_i(t)$ , estará expresada como la suma continua de las respuestas a los componentes escalonados de  $f_i(t)$ , es decir

$$\begin{aligned} f_o(t) &= f_i(0+) a(t) + \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{\tau=0}^t f'_i(\tau) \Delta \tau a(t - \tau) \\ &= f_i(0+) a(t) + \int_{0+}^t f'_i(\tau) a(t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (6.125)$$

**PROBLEMA 6.30** Resolver el problema 6.20 utilizando la integral de superposición, dada en (6.120).

**Solución:** respecto a la figura 6.14, hacer:  $v_i(t) = e^{-t} u(t)$ . De este modo, se tiene

$$v_i(0+) = 1, \quad v'_i(t) = -e^{-t} \text{ para } t > 0.$$

21)  $a(t)$ , la respuesta al escalón unitario, se obtiene del resultado (6.103) como

$$a(t) = (1 - e^{-2t}) u(t).$$

1 el De donde, utilizando (6.120), se obtiene

$$\begin{aligned} v_o(t) &= v_i(0+) a(t) + \int_{0+}^t v'_i(\tau) a(t - \tau) d\tau \\ &= (1 - e^{-2t}) u(t) + \int_{0+}^t -e^{-\tau} [1 - e^{-2(t-\tau)} u(t - \tau)] d\tau \\ &= (1 - e^{-2t}) u(t) - \left[ \int_0^t e^{-\tau} d\tau - e^{-2t} \int_0^t e^\tau d\tau \right] u(t) \\ &= (1 - e^{-2t}) u(t) + (e^{-t} - 1) u(t) + e^{-2t} (e^t - 1) u(t) \\ &= 2(e^{-t} - e^{-2t}) u(t), \end{aligned}$$

lo cual es el resultado (6.102).

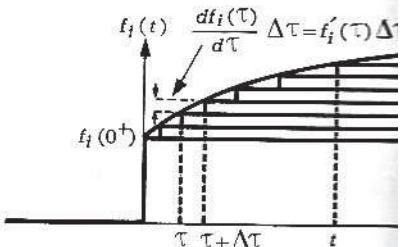


Figura 6.13 La función de entrada  $f_i(t)$  aproximada por la suma de funciones escalones.

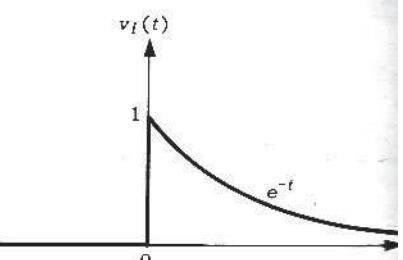


Figura 6.14 La fuente de voltaje del problema 6.30.

### 6.9 TRANSMISIÓN SIN DISTORSIÓN

Para que un sistema de transmisión no introduzca distorsión en las señales, se requiere que la forma de onda de la respuesta sea una réplica exacta de la forma de onda de la entrada, aunque la amplitud de la respuesta puede diferir de la amplitud de la entrada.

**PROBLEMA 6.31** Supongase que la función  $H(j\omega)$  de un sistema lineal, está dada por

$$H(j\omega) = K e^{-j\omega t_0}, \quad (6.126)$$

donde  $K$  y  $t_0$  son constantes positivas. Hallar la respuesta del sistema,  $f_o(t)$ , a la excitación,  $f_i(t)$ .

**Solución:** sea

$$\mathcal{F}[f_i(t)] = F_i(j\omega), \quad \mathcal{F}[f_o(t)] = F_o(j\omega).$$

Según (6.92), se tiene que  $F_i(j\omega)$  y  $F_o(j\omega)$  están relacionadas por

$$\begin{aligned} F_o(j\omega) &= F_i(j\omega) H(j\omega) \\ &= K F_i(j\omega) e^{-j\omega t_0} \end{aligned} \quad (6.127)$$

De donde,

$$\begin{aligned} f_o(t) &= \mathcal{F}^{-1}[F_o(j\omega)] \\ &= \frac{K}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [F_i(j\omega) e^{-j\omega t_0}] e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{K}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_i(j\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega. \end{aligned}$$

En razón de que

$$f_i(t) = \mathcal{F}^{-1}[F_i(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_i(j\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

$f_o(t)$  se puede expresar como

$$f_o(t) = K f_i(t - t_0). \quad (6.128)$$

La ecuación (6.128) muestra que la respuesta es una réplica retardada de la función de entrada, con la magnitud de la respuesta alterada por el factor constante  $K$ , lo cual se ilustra en la figura 6.15.

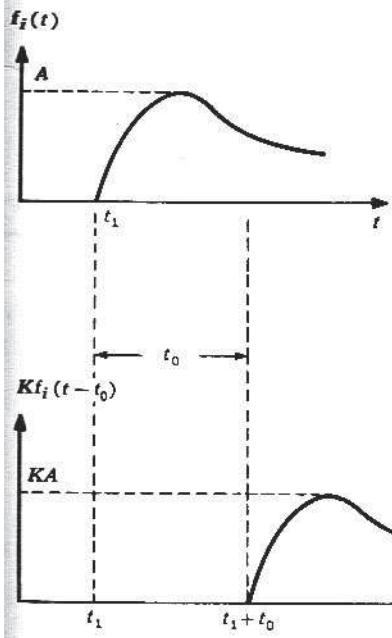


Figura 6.15 La función de entrada del problema 6.31 y su réplica retardada.

En general, se tiene

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\theta(\omega)},$$

donde  $|H(j\omega)|$  se conoce como la *amplitud de la respuesta del sistema*, y  $\theta(\omega)$  como la *fase de la respuesta*. Del resultado del problema 6.31 se concluye que la función del sistema que conduce a una transmisión sin distorsión, tiene una amplitud constante y una fase lineal, es decir,

$$\begin{aligned} |H(j\omega)| &= K_1, \quad \text{una constante (independiente de } \omega\text{),} \\ \theta(\omega) &= \omega K_2, \quad \text{una función lineal de } \omega, \end{aligned} \quad (6.129)$$

donde  $K_1$  y  $K_2$  son constantes arbitrarias.

**PROBLEMA 6.32** Hallar  $h(t)$ , la respuesta al impulso unitario de un sistema de transmisión sin distorsión.

**Solución:** según la definición de la función de un sistema, dada por (6.91), se tiene

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Sustituyendo ahora  $H(j\omega)$ , del sistema de transmisión sin distorsión, dada por (6.126), en la anterior expresión, se obtiene

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega \\ &= K \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-t_0)} d\omega \\ &= K \delta(t - t_0) \end{aligned} \quad (6.130)$$

resultado que se obtiene mediante la identidad (5.6).

**PROBLEMA 6.33** La constante de propagación  $\gamma(\omega)$ , de una línea de transmisión bajo condiciones de estado senoidal, está definida como

$$\gamma(\omega) = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)},$$

donde  $R$  es la resistencia,  $L$  la inductancia en serie,  $G$  la conductancia, y  $C$  la capacitancia en paralelo, por unidad de longitud de la línea. Demostrar que la condición para que la línea no introduzca distorsión está dada por

$$\frac{L}{R} = \frac{C}{G} \quad (6.131)$$

**Solución:** si  $v(x, t)$  es el voltaje en un punto distante  $x$  de la entrada, y en un tiempo  $t$ , entonces para una entrada senoidal de frecuencia  $\omega$ , el voltaje se puede expresar como

$$v(x, t) = Re[\mathbf{V}_m e^{j\omega t - \gamma(\omega)x}], \quad (6.132)$$

donde  $\mathbf{V}_m$  es la amplitud compleja del voltaje a la entrada y  $\gamma(\omega)$  es la constante de propagación.

Entonces, el voltaje de entrada está dado por  $v_i(t) = v(0, t)$ , y el voltaje de salida por  $v_o(t) = v(l, t)$  donde  $l$  es la longitud de la línea de transmisión. De este modo, mediante notación fasorial, se tiene

$$v_i(t) = Re[\mathbf{V}_m e^{j\omega t}]$$

y

$$v_o(t) = Re[\mathbf{V}_m e^{j\omega t - \gamma(\omega)l}] = Re[\mathbf{V}_m e^{-\gamma(\omega)l} e^{j\omega t}].$$

De donde, la función del sistema  $H(j\omega)$  para la línea de transmisión está dada por

$$H(j\omega) = \frac{\mathbf{V}_m e^{-\gamma(\omega)l}}{\mathbf{V}_m} = e^{-\gamma(\omega)l}. \quad (6.133)$$

Si  $\gamma(\omega) = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha(\omega) + j\beta(\omega)$ , entonces

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= e^{-\gamma(\omega)l} = e^{-[\alpha(\omega) + j\beta(\omega)]l} \\ &= e^{-\alpha(\omega)l} e^{-j\beta(\omega)l} \\ &= |H(j\omega)| e^{j\theta(\omega)}, \end{aligned} \quad (6.134)$$

donde

$$[H(j\omega)] = e^{-\alpha(\omega)t}, \quad \theta(\omega) = -\beta(\omega)t.$$

Según las condiciones para transmisión sin distorsión, dadas por (6.129), se concluye que  $\alpha(\omega)$  debe ser constante e independiente de  $\omega$ , y  $\beta(\omega)$  debe ser una función lineal de  $\omega$ ; es decir

$$\alpha(\omega) = K_1, \quad \beta(\omega) = K_2\omega.$$

Entonces,  $\gamma(\omega)$  se puede expresar como

$$\begin{aligned} \gamma(\omega) &= \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \\ &= \sqrt{RG \left(1 + \frac{j\omega L}{R}\right) \left(1 + \frac{j\omega C}{G}\right)} \\ &= \alpha(\omega) + j\beta(\omega) \\ &= K_1 + jK_2\omega. \end{aligned} \quad (6.135)$$

Es obvio que la ecuación (6.135) se cumple si

$$\frac{L}{R} = \frac{C}{G}.$$

Entonces, la constante de propagación está dada por

$$\gamma(\omega) = \sqrt{RG \left(1 + \frac{j\omega L}{R}\right)^2} = \sqrt{RG} + j\omega L \sqrt{\frac{G}{R}} = \alpha(\omega) + j\beta(\omega).$$

De donde,

$$\alpha(\omega) = \sqrt{RG} = K_1, \quad \beta(\omega) = \omega L \sqrt{\frac{G}{R}} = \omega L \sqrt{\frac{C}{L}} = \omega \sqrt{LC} = \omega K_2.$$

De este modo, cuando la condición (6.131) se cumple, se tiene la línea sin distorsión.

## 6.10 FILTROS IDEALES

La ecuación (6.97) muestra que el espectro de frecuencia de la respuesta,  $F_o(\omega)$ , está relacionado con el espectro de frecuencia de la fuente,  $F_i(\omega)$ , por medio de la función del sistema,  $H(j\omega)$ , según

$$F_o(\omega) = F_i(\omega) H(j\omega). \quad [6.97]$$

Esto se ilustra en la figura 6.16.

Se observa que  $H(j\omega)$  actúa como una función ponderadora de las componentes de diferente frecuencia en la entrada. En este sentido, la relación (6.97) indica la característica de filtro del sistema lineal. Si la característica ponderadora o característica de filtro es el interés principal, entonces generalmente se hace referencia al sistema como al *filtro*.

El llamado *filtro ideal para frecuencias bajas* se define como un sistema para el cual la función del sistema,  $H(j\omega)$ , está dada por

$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_c} & \text{para } |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{para } |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (6.136)$$

donde a  $\omega_c$  se le conoce como la *frecuencia de corte*.

**PROBLEMA 6.34** Hallar  $h(t)$ , la respuesta al impulso unitario, de un filtro ideal para frecuencias bajas y comentar el resultado.

**Solución:** la figura 6.17(a) muestra las características de un filtro ideal para frecuencias bajas. Según (6.91), la respuesta al impulso unitario,  $h(t)$ , se obtiene por

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(j\omega)]$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(t-t_0)} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi(t-t_0)2j} e^{j\omega(t-t_0)} \Big|_{-\omega_c}^{\omega_c} \\ &= \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c(t-t_0)}{\omega_c(t-t_0)}. \end{aligned} \quad (6.137)$$

El resultado (6.137) está dibujado en la figura 6.17(b), de la cual se sacan las siguientes conclusiones:

- (1) La entrada aplicada es distorsionada por el sistema, debido al hecho de que el filtro transmite sólo una limitada banda de frecuencias.
- (2) El valor pico de la respuesta  $\omega_c/\pi$  es proporcional a la frecuencia de corte  $\omega_c$ . El ancho del pulso principal es  $2\pi/\omega_c$ ; se puede hacer referencia a esta cantidad, como la duración efectiva del pulso de salida,  $T_d$ . Se observa que cuando  $\omega_c \rightarrow \infty$  (es decir, cuando el filtro permite el paso de todas las frecuencias),  $T_d \rightarrow 0$ , y el pico de la respuesta  $\rightarrow \infty$ ; en otros términos, la respuesta se approxima a un impulso, tal como debe ser.
- (3) También se observa que la respuesta no es cero antes de  $t = 0$ , es decir, antes de que se aplique la entrada. Esta es la característica de un sistema físicamente no realizable. Los filtros ideales no son físicamente realizables, y por consiguiente, no son necesariamente sistemas causales.

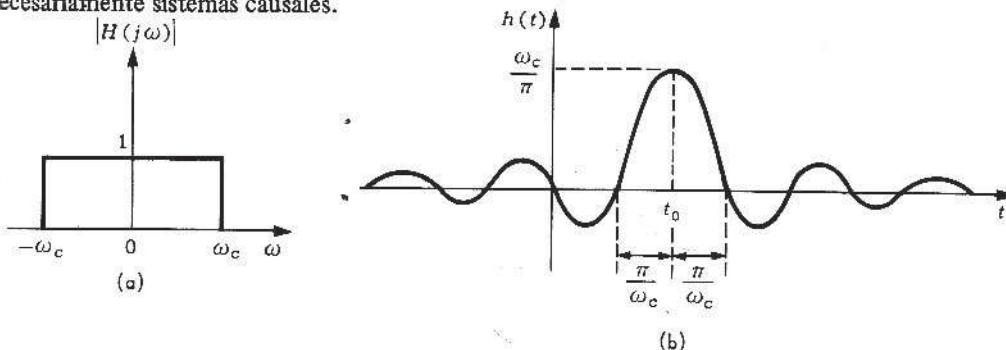


Figura 6.17 (a) Características de frecuencia de un filtro ideal para frecuencias bajas.  
 (b) La respuesta al impulso unitario de un filtro ideal para frecuencias bajas.

*La función seno-integral (del límite superior  $y$ ) es*

$$Si(y) = \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^y Sa(x) dx.$$

**PROBLEMA 6.35** (a) Evaluar la función seno-integral. (b) Hallar  $a(t)$ , la respuesta al escalón unitario de un filtro ideal para frecuencias bajas y comentar el resultado.

**Solución:** (a) dado que  $Sa(x) = \frac{\sin x}{x}$  es una función par, entonces

$$Si(-y) = -Si(y).$$

Según la definición, cuando  $y = 0$ , entonces

$$Si(0) = 0.$$

Dado que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi,$$

se tiene

$$Si(\infty) = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad Si(-\infty) = -\frac{\pi}{2}.$$

En la figura 6.18 se muestra una gráfica de  $Si(y)$ .

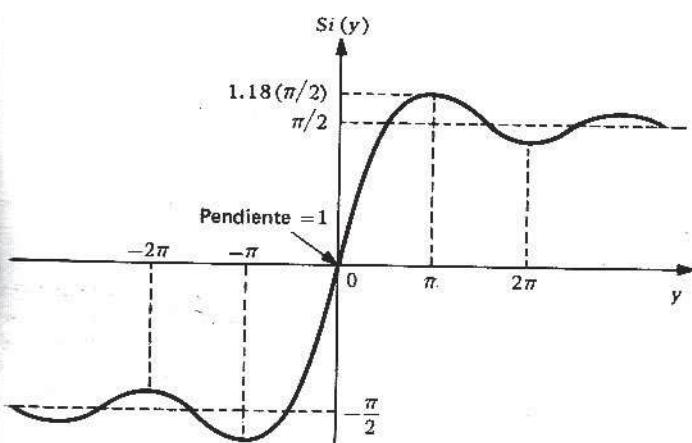


Figura 6.18 La función seno-integral.

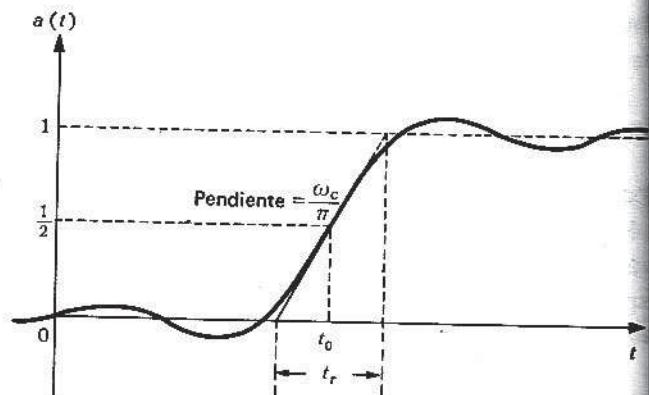


Figura 6.19 La respuesta al escalón unitario de un filtro ideal para frecuencias bajas.

(b) A partir de (6.113),  $a(t)$  la respuesta al escalón unitario, se puede obtener de  $h(t)$ , la respuesta al impulso unitario; es decir,

$$a(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \quad [6.113]$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^t \frac{\sin \omega_c(\tau - t_0)}{(\tau - t_0)} d\tau. \quad (6.138)$$

Cambiando la variable  $\omega_c(\tau - t_0)$  por  $x$ , en la integral (6.138), se obtiene

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\omega_c(t-t_0)} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\sin x}{x} dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c(t-t_0)} \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c(t-t_0)} \frac{\sin x}{x} dx. \end{aligned} \quad (6.139)$$

Mediante la función seno-integral, la ecuación (6.139) se puede expresar como

$$a(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} Si[\omega_c(t - t_0)]. \quad (6.140)$$

En la figura 6.19 se muestra una gráfica de  $a(t)$ , la respuesta al escalón unitario.

En el resultado anterior se observa lo siguiente:

- (1) se observa nuevamente la distorsión debida a la banda limitada del filtro;
- (2) se observa nuevamente que la respuesta no es cero antes de  $t = 0$ ;
- (3) utilizando  $Si(\pm\infty) = \pm\pi/2$ , se observa que cuando  $\omega_c \rightarrow \infty$ ,

$$a(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{para } t < t_0$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{para } t > t_0,$$

y la respuesta se convierte en  $u(t - t_0)$ , un escalón unitario retardado, tal como debe ser, y

- (4) la entrada, un escalón unitario, tiene un súbito ascenso mientras la respuesta muestra un ascenso gradual.

Si se define el *tiempo de ascenso* de la respuesta  $a(t)$ , como al intervalo  $t_r$  entre las intercepciones de la tangente en  $t = t_0$ , con las líneas  $a(t) = 0$  y  $a(\infty) = 1$ , entonces, como es evidente según la figura 6.19, se tiene

$$\left. \frac{da(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = \frac{1}{t_r} = \frac{\omega_c}{\pi}$$

Por tanto,

$$t_r = \frac{\pi}{\omega_c} \quad (6.141)$$

$$\omega_c t_r = \pi \quad (6.142)$$

El tiempo de ascenso (o tiempo de subida)  $t_r$  está dado por la ecuación (6.141) y es inversamente proporcional al ancho de banda del filtro. La ecuación (6.142) indica que

$$(\text{ancho de banda}) \times (\text{tiempo de ascenso}) = \text{constante}$$

## 6.11 PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

**PROBLEMA 6.36** Hallar el voltaje de salida en estado estacionario, del circuito de la figura 6.20(a), cuando la corriente de entrada tiene la forma de onda que se muestra en la figura 6.20(b). Hacer  $R = 1\Omega$  y  $C = 1\text{f}$ .

$$\begin{aligned} \text{Respuesta: } v_{os}(t) = & \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{1+\pi^2}} \sin(\pi t - \tan^{-1}\pi) \right. \\ & \left. + \frac{1}{3\sqrt{1+9\pi^2}} \sin(3\pi t - \tan^{-1}3\pi) + \dots \right]. \end{aligned}$$

**PROBLEMA 6.37** Calcular la potencia entregada al circuito del problema 6.36 y los valores de las raíces cuadráticas medias de  $i(t)$  y  $v_o(t)$ .

**Respuesta:**  $P = 0,2689$  vatios,  $I = 0,707$ , y  $V = 0,519$ .

**PROBLEMA 6.38** La corriente de entrada del circuito  $RLC$  de la figura 6.21(a), tiene la forma de onda que se muestra en la figura 6.21(b). La inductancia es  $L = 10\text{ mH}$  y el voltaje de salida es una onda senoidal de 300 hertz. Si el valor pico en el voltaje de salida de las otras frecuencias, es menor que  $1/20$  del valor pico de la componente de 300 hz, hallar los valores de  $C$  y de  $R$ .

**Respuesta:**  $C = 28.2\text{ }\mu\text{f}$ ,  $R = 590\Omega$ .

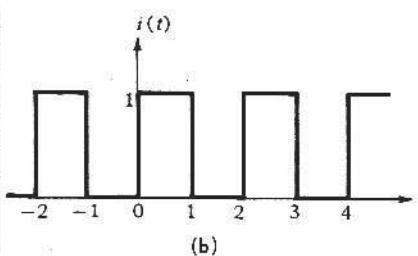
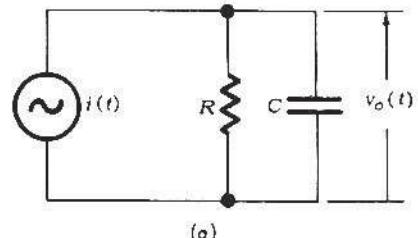


Figura 6.20 (a) El circuito del problema 6.36. (b) La forma de onda de la corriente de entrada en el problema 6.36.

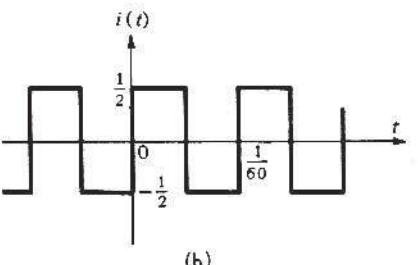
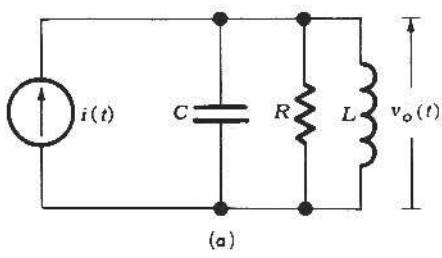


Figura 6.21 (a) El circuito  $RLC$  del problema 6.38. La forma de onda de la corriente de entrada, circuito de la figura 6.21(a).

**PROBLEMA 6.39** Analizar el movimiento en estado estacionario, del sistema mecánico que se muestra en la figura 6.10, si la fuerza perturbadora  $f(t)$  es una onda sinusoidal rectificada,  $f(t) = |A \operatorname{sen} \omega_0 t|$ .

$$\text{Respuesta: } x_s(t) = \frac{2A}{k\pi} - \frac{4A}{\pi} \left[ \frac{1}{3} \frac{\cos 2\omega_0 t}{(k - m\omega_0^2)} + \frac{1}{15} \frac{\cos 4\omega_0 t}{(k - 4m\omega_0^2)} + \dots \right].$$

**PROBLEMA 6.40** Cuando el pulso rectangular  $f_i(t) = u(t) - u(t-1)$  se aplica a cierto sistema lineal, la respuesta es  $f_0(t) = \frac{1}{2} [u(t-2) - u(t-4)]$ . Hallar: (a) la función del sistema  $H(j\omega)$ , y (b) la respuesta al impulso unitario,  $h(t)$ .

$$\text{Respuesta: (a) } H(j\omega) = \frac{1}{2} (e^{-j2\omega} + e^{-j3\omega}), \text{ (b) } h(t) = \frac{1}{2} [\delta(t-2) + \delta(t-3)].$$

**PROBLEMA 6.41** Hallar la corriente del circuito  $RL$ , figura 6.22, debida a un impulso unitario

$$\text{Respuesta: } h(t) = \frac{1}{L} e^{-(R/L)t} u(t).$$

**PROBLEMA 6.42** Una fuente de voltaje  $v_i(t) = 2e^{-t} u(t)$ , se aplica al circuito  $RL$  de la figura 6.22. Hallar la respuesta  $i(t)$ , donde  $R = 2\Omega$  y  $L = 1\text{ h}$ .

$$\text{Respuesta: } 2(e^{-t} - e^{-2t}) u(t).$$

**PROBLEMA 6.43** La respuesta al impulso unitario de un sistema lineal es  $e^{-t} \cos t u(t)$ . Hallar la respuesta debida al escalón unitario  $u(t)$ , por convolución.

$$\text{Respuesta: } \frac{1}{2} [e^{-t} (\operatorname{sen} t - \cos t) + 1] u(t).$$

**PROBLEMA 6.44** Si la respuesta al impulso unitario de un sistema lineal es  $h(t) = t e^{-t} u(t)$ , y la entrada es  $f_i(t) = e^{-t} u(t)$ , hallar el espectro de frecuencia de la salida.

$$\text{Respuesta: } 1/(1 + j\omega)^3.$$

**PROBLEMA 6.45** Demostrar que si la función de entrada a un sistema lineal es diferenciada, entonces la respuesta también es diferenciada.

[Sugerencia: demostrar que  $f'_i(t) * h(t) = [f_i(t) * h(t)]' = f'_0(t)$ .]

**PROBLEMA 6.46** Demostrar que si  $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$ , donde  $h(t)$  es la respuesta al impulso unitario de un sistema lineal, entonces la respuesta del sistema a cualquier entrada acotada también es acotada.

[Sugerencia: utilizar  $|f_0(t)| = |f_i(t) * h(t)|$ .]

**PROBLEMA 6.47** Si  $H(\omega) = R(\omega) + j X(\omega)$  es la función del sistema, de un sistema lineal, demostrar que la respuesta del sistema a la entrada  $f_i(t) = \cos \omega_0 t u(t)$ , se puede expresar como

$$\begin{aligned} f_0(t) &= R(\omega) \cos \omega_0 t + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega X(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos \omega t d\omega \\ &= -X(\omega_0) \operatorname{sen} \omega_0 t + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega R(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2} \operatorname{sen} \omega t d\omega. \end{aligned}$$

[Sugerencia: utilizar el resultado del problema 5.28.]

**PROBLEMA 6.48** Hallar  $h(t)$ , la respuesta al impulso unitario de un sistema lineal cuya función es

$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-j\theta_0} & \text{para } \omega > 0 \\ e^{j\theta_0} & \text{para } \omega < 0. \end{cases}$$

[Sugerencia: observar que  $H(\omega) = \cos \theta_0 - j \operatorname{sen} \theta_0 \operatorname{sgn} \omega$ , y utilizar el resultado del problema 5.33.]

Respuesta:  $h(t) = \cos \theta_0 \delta(t) + \frac{\operatorname{sen} \theta_0}{\pi t}$ .

**PROBLEMA 6.49** El sistema del problema 6.48 se denomina *defasador*. Demostrar que la respuesta del sistema del problema 6.48 a  $\cos \omega_c t$ , es  $\cos(\omega_c t - \theta_0)$ .

**PROBLEMA 6.50** Demostrar que si la señal de entrada a un sistema lineal, cuya función  $H(j\omega)$  está definida por

$$H(j\omega) = -j \operatorname{sgn} \omega = \begin{cases} -j & \text{para } \omega > 0 \\ +j & \text{para } \omega < 0, \end{cases}$$

es una función real del tiempo, entonces la salida de este sistema también es una función real del tiempo.

[Sugerencia: utilizar el problema 4.7.]

**PROBLEMA 6.51** Hallar la salida  $\hat{m}(t)$  si la entrada  $m(t)$  es (a)  $\cos \omega_c t$ , y (b)  $(1/1+t^2)$ , para el sistema del problema 6.50, que es un defasador de  $-\pi/2$  ( $0 - 90^\circ$ ) dado que la función del sistema se puede expresar como

$$H(j\omega) = -j \operatorname{sgn} \omega = \begin{cases} e^{-j\pi/2} & \text{para } \omega > 0 \\ e^{j\pi/2} & \text{para } \omega < 0. \end{cases}$$

Respuesta: (a)  $\operatorname{sen} \omega_c t$ , (b)  $t/(1+t^2)$ .

**PROBLEMA 6.52** Sea un sistema formado por la conexión en cascada de dos defasadores idénticos, como el defasador del problema 6.51. Demostrar que la salida de este sistema es  $-m(t)$  cuando la entrada es  $m(t)$ .

**PROBLEMA 6.53** La entrada de un filtro ideal para frecuencias bajas, cuya función es

$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0} & \text{para } |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{para } |\omega| > \omega_c, \end{cases}$$

es un tren de impulsos

$$f_i(t) = T f(t) \delta_T(t) = T f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

cuya envolvente  $f(t)$  tiene un espectro de banda limitada,  $|F(\omega)| = 0$  para  $|\omega| > \omega_c$ . Demostrar que si  $T < \pi/\omega_c$ , entonces la respuesta del filtro es  $f_0(t) = f(t - t_0)$ :

**PROBLEMA 6.54** Hallar  $h(t)$ , la respuesta al impulso unitario del *filtro ideal para frecuencias altas*, cuya función  $H(j\omega)$  es

$$H(j\omega) = \begin{cases} 0 & \text{para } |\omega| < \omega_c \\ e^{-j\omega t_0} & \text{para } |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

[Sugerencia: utilizar el resultado del problema 6.34, y observar que  $H(j\omega) = e^{-j\omega t_0} - H_l(j\omega)$ , donde  $H_l(j\omega)$  es la función del sistema de un filtro ideal para frecuencias bajas.]

$$\text{Respuesta: } h(t) = \delta(t - t_0) - \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c (t - t_0)}{\omega_c (t - t_0)}.$$

**PROBLEMA 6.55** Hallar  $a(t)$ , la respuesta al escalón unitario de un filtro ideal para frecuencias altas.

[Sugerencia: utilizar el resultado del problema 6.35.]

$$\text{Respuesta: } a(t) = u(t - t_0) - \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sin [\omega_c (t - t_0)] \right\}.$$

**PROBLEMA 6.56** Un *filtro gaussiano* es un sistema lineal cuya función es

$$H(\omega) = e^{-\alpha\omega^2} e^{-j\omega t_0}.$$

Hallar la respuesta de este filtro a un impulso unitario.

$$\text{Respuesta: } h(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-(t-t_0)^2/4\alpha}.$$

**PROBLEMA 6.57** Si  $H(\omega) = R(\omega) + j X(\omega)$  es la función de un sistema lineal y causal, demostrar que  $h(t)$ , la respuesta al impulso unitario del sistema, se puede expresar, ya sea como una función de  $R(\omega)$  o de  $X(\omega)$ ; es decir,

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R(\omega) \cos \omega t d\omega = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty X(\omega) \sin \omega t d\omega.$$

[Sugerencia:  $h(t) = 0$  para  $t < 0$ ; de donde  $h(t)$  se puede expresar como  $h(t) = 2h_e(t) = 2h_o(t)$  para  $t > 0$ , donde  $h_e(t)$  y  $h_o(t)$  son las componentes par e impar de  $h(t)$ , respectivamente.]

**PROBLEMA 6.58** Demostrar que si  $H(\omega) = R(\omega) + j X(\omega)$  es la función de un sistema lineal y causal, entonces, (a) la transformada de Fourier de  $a(t)$ , la respuesta del sistema al escalón unitario, está dada por

$$\mathcal{F}[a(t)] = \pi R(0) \delta(\omega) + \frac{X(\omega)}{\omega} - j \frac{R(\omega)}{\omega},$$

(b) la respuesta al escalón unitario,  $a(t)$ , se puede expresar como

$$a(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{R(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega = R(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{X(\omega)}{\omega} \cos \omega t d\omega.$$

# 7

## CAPITULO

# APLICACIONES EN TEORIA DE COMUNICACIONES

### 7.1 TEORIA DE MUESTREO

*El teorema del muestreo uniforme en el dominio del tiempo*

afirma que si una función del tiempo,  $f(t)$ , no contiene componentes de frecuencias superiores a  $f_M$  ciclos por segundo, entonces  $f(t)$  se puede determinar por completo mediante sus valores separados por intervalos uniformes menores de  $1/(2f_M)$  segundos.

**PROBLEMA 7.1** Probar el teorema del muestreo uniforme en el dominio del tiempo.

**Solución:** el teorema del muestreo se puede probar con la ayuda de (4.125), el teorema de convolución en la frecuencia; es decir,

$$\mathcal{F}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} [F_1(\omega) * F_2(\omega)], \quad [4.125]$$

donde  $F_1(\omega) = \mathcal{F}[f_1(t)]$  y  $F_2(\omega) = \mathcal{F}[f_2(t)]$ .

Como  $f(t)$  no tiene componentes frecuenciales superiores a  $f_M$  ciclos por segundo, entonces  $f(t)$  es una *función de banda limitada*, como se muestra en la figura 7.1(a), lo cual significa que

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = 0 \quad \text{para } |\omega| > \omega_M = 2\pi f_M \quad (7.1)$$

[Ver figura 7.1(b)].

Considerar ahora a  $f_s(t)$ , una función muestreada definida por el producto de la función  $f(t)$  y  $\delta_T(t)$ , que es una función periódica de impulsos unitarios [ver la figura 7.1(c)]:

$$f_s(t) = f(t)\delta_T(t). \quad (7.2)$$

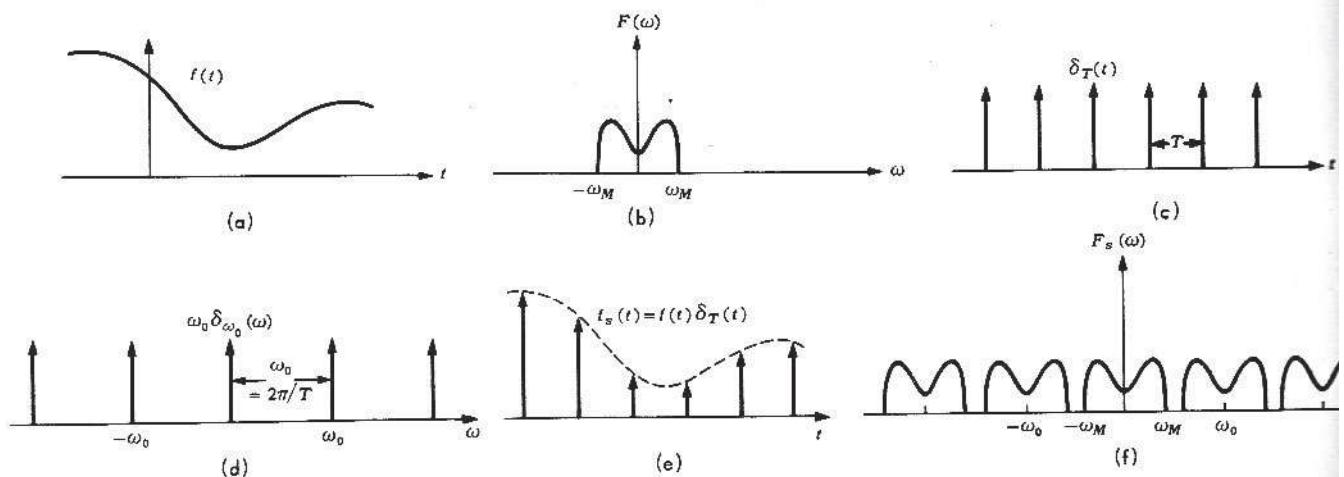


Figura 7.1 (a) La función de banda limitada  $f(t)$ . (b) El espectro de  $f(t)$ . (c) El tren de impulsos unitarios. (d) El espectro del tren de impulsos unitarios. (e) La función muestreada  $f_s(t)$ . (f) El espectro de  $f_s(t)$ .

Recordando la definición de  $\delta_T(t)$  dada por (2.104), y sus propiedades, se tiene

$$\begin{aligned} f_s(t) &= f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT). \end{aligned} \quad (7.3)$$

[Ver figura 7.1(e).] La ecuación (7.3) muestra que la función  $f_s(t)$  es una sucesión de impulsos localizados a intervalos regulares de  $T$  segundos y cuyos valores son iguales a los de  $f(t)$  en los instantes del muestreo [figura 7.1(c)].

Del resultado del problema 5.15, se tiene

$$\mathcal{F}[\delta_T(t)] = \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0). \quad [5.66]$$

De acuerdo con el teorema de convolución en la frecuencia, dado por (4.125), se tiene

$$\mathcal{F}[f_s(t)] = F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} [F(\omega) * \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega)]. \quad (7.4)$$

Sustituyendo  $\omega_0 = 2\pi/T$ , se obtiene

$$\begin{aligned} F_s(\omega) &= \frac{1}{T} [F(\omega) * \delta_{\omega_0}(\omega)] \\ &= \frac{1}{T} \left[ F(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \right] \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega) * \delta(\omega - n\omega_0). \end{aligned} \quad (7.5)$$

En el capítulo cuarto se demostró que

$$f(t) * \delta(t) = f(t), \quad [4.119]$$

$$f(t) * \delta(t - T) = f(t - T). \quad [4.120]$$

Por consiguiente, el resultado (7.5) se puede expresar como

$$F_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_0). \quad (7.6)$$

La ecuación (7.6) muestra que la transformada de Fourier de  $f_s(t)$ , se repite cada  $\omega_0$  rad/seg., como se muestra en la figura 7.1(f). Se debe observar que  $F(\omega)$  se repetirá periódicamente sin solaparse en tanto que  $\omega_0 > 2\omega_M$ , ó  $2\pi/T > 2(2\pi f_M)$ ; es decir,

$$T < \frac{1}{2f_M}. \quad (7.7)$$

Por consiguiente, mientras que se tomen muestras de  $f(t)$  a intervalos regulares menores de  $1/(2f_M)$  segundos, el espectro de Fourier de  $f_s(t)$  será una réplica periódica de  $F(\omega)$ , y contendrá toda la información acerca de  $f(t)$ .

Se puede investigar el resultado anterior, utilizando una técnica diferente, la cual, naturalmente, ha de conducir a las mismas conclusiones. El espectro de Fourier  $F(\omega)$ , de una función de banda limitada  $f(t)$ , es el que se muestra en la figura 7.1(b).

Supóngase ahora, que el espectro  $F(\omega)$  es esa porción del espectro periódico  $F_s(\omega)$  [Figura 7.1(f)] que se encuentra entre  $-1/2\omega_0$  y  $1/2\omega_0$ , donde  $\omega_0 = 2\pi/T$  y  $\omega_0 > 2\omega_M$ . Como  $F_s(\omega)$  es una función periódica de  $\omega$ , cuyo período es  $\omega_0$ , se puede expandir en una serie de Fourier, esto es,

$$F_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn2\pi\omega/\omega_0}, \quad (7.8)$$

donde, por definición,

$$c_n = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} F_s(\omega) e^{-jn2\pi\omega/\omega_0} d\omega. \quad (7.9)$$

Como  $F_s(\omega) = F(\omega)$  para  $-\omega_M < \omega < \omega_M$ , y  $(1/2)\omega_0 > \omega_M$ , entonces la expresión

(7.9) se puede expresar como

$$c_n = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} F(\omega) e^{-jn2\pi\omega/\omega_0} d\omega. \quad (7.10)$$

Ahora bien,

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (7.11)$$

Puesto que  $f(t)$  es de banda limitada, es decir,  $F(\omega) = 0$  para  $|\omega| > \omega_M$ , entonces la expresión (7.11) se convierte en

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (7.12)$$

Seleccionando como puntos de muestreo los localizados en  $t = -nT = -n2\pi/\omega_0$ , por

(7.12) se tiene que

$$f(-nT) = f\left(-\frac{n2\pi}{\omega_0}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} F(\omega) e^{-jn2\pi\omega/\omega_0} d\omega. \quad (7.13)$$

Comparando (7.13) y (7.10), se obtiene

$$c_n = \frac{2\pi}{\omega_0} f\left(-\frac{n2\pi}{\omega_0}\right) = T f(-nT). \quad (7.14)$$

La ecuación (7.14) indica que  $c_n$  puede encontrarse únicamente a partir de los valores de la función, en los puntos de muestreo. Pero conociendo  $c_n$ , se puede hallar  $F_s(\omega)$  si se utiliza (7.8), y en consecuencia, también se halla  $F(\omega)$ . Si se conoce  $F(\omega)$ , se puede hallar  $f(t)$  para todos los valores del tiempo mediante la relación (7.11).

Ahora, de la suposición  $\omega_0 > 2\omega_M$ , se tiene

$$\frac{2\pi}{T} > 4\pi f_M,$$

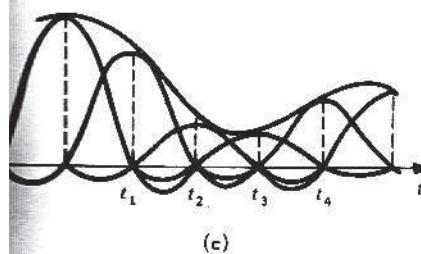
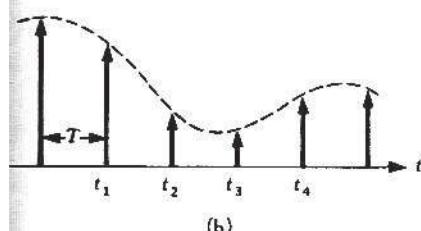
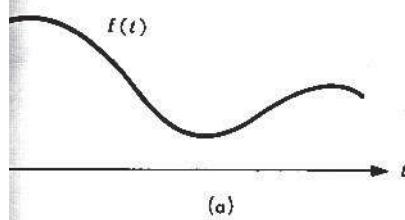
$$T < \frac{1}{2f_M}. \quad (7.15)$$

Lo cual completa la prueba.

El intervalo máximo de muestreo  $T = 1/(2f_M)$  se denomina a veces *intervalo de Nyquist*.

En la sección anterior se demostró que  $f(t)$  se puede reproducir completamente a partir del conocimiento de las muestras de  $f(t)$ , a intervalos uniformes. A continuación se mostrará cómo se puede reconstruir  $f(t)$  a partir de las muestras.

**PROBLEMA 7.2** Considerar una señal de banda limitada  $f(t)$  muestreada a la mínima tasa requerida ( $2f_M$  muestras por segundo). [Ver la figura 7.2(a-b).] Demostrar que la señal  $f(t)$  se puede expresar como



**Figura 7.2** (a) La función de banda limitada  $f(t)$ . (b) La función muestreada. (c) Reconstrucción de una forma de onda.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(-nT) \frac{\sin \omega_M(t - nT)}{\omega_M(t - nT)} \quad (7.16)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\omega_M}\right) \frac{\sin (\omega_M t - n\pi)}{\omega_M t - n\pi}, \quad (7.17)$$

donde  $\omega_M = 2\pi f_M$  y  $T = 1/(2f_M) =$  el intervalo de muestreo.

**Solución:** como  $T = 1/(2f_M)$ , entonces  $\omega_0 = 2\pi/T = 4\pi f_M = 2\omega_M$ . Por tanto, (7.8) se convierte en

$$F_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn2\pi\omega/2\omega_M} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnT\omega}. \quad (7.18)$$

Por (7.14), se tiene

$$c_n = T f(-nT) = \frac{\pi}{\omega_M} f(-nT). \quad (7.19)$$

Sustituyendo (7.19) en (7.18), se obtiene

$$F_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\omega_M} f(-nT) e^{jnT\omega}. \quad (7.20)$$

Puesto que  $F_s(\omega) = F(\omega)$  para  $-\omega_M < \omega < \omega_M$ , entonces (7.20) se puede reemplazar en (7.12), de lo cual se obtiene

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\omega_M} f(-nT) e^{jnT\omega} \right] e^{j\omega t} d\omega. \quad (7.21)$$

Intercambiando los signos de la integración y de la sumatoria, se tiene

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ f(-nT) \int_{-\omega_M}^{\omega_M} \frac{1}{2\omega_M} e^{j\omega(t+nT)} d\omega \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(-nT) \frac{\sin \omega_M(t + nT)}{\omega_M(t + nT)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \frac{\sin \omega_M(t - nT)}{\omega_M(t - nT)}. \end{aligned}$$

En la última ecuación,  $(-n)$  se reemplazó por  $n$  porque todos los valores positivos y negativos de  $n$  están incluidos en la sumatoria. Puesto que  $T = \pi/\omega_M$ , la expresión (7.16) se puede expresar también como

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\omega_M}\right) \frac{\sin (\omega_M t - n\pi)}{\omega_M t - n\pi}.$$

Matemáticamente, la expresión (7.16) indica que cada muestra de la función está multiplicada por una función "muestreadora"

$$\text{Sa}[\omega_M(t - nT)] = \frac{\sin \omega_M(t - nT)}{\omega_M(t - nT)},$$

y todas las formas de ondas resultantes se suman para obtener  $f(t)$ . Esto se ilustra en la figura 7.2(c).

**El teorema de muestreo en el dominio de la frecuencia** establece que si una función  $f(t)$  es cero en toda su extensión excepto en el intervalo  $-T < t < T$ , entonces su

transformada de Fourier  $F(\omega)$ , se puede determinar unívocamente a partir de sus valores  $F(n\pi/T)$ , localizados en puntos equidistantes, separados en  $\pi/T$ . De hecho,  $F(\omega)$  está dada por

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{n\pi}{T}\right) \frac{\sin(\omega T - n\pi)}{\omega T - n\pi} \quad (7.22)$$

### PROBLEMA 7.3 Verificar la expresión (7.22).

**Solución:** supóngase que

$$f(t) = 0 \quad \text{para } |t| > T. \quad (7.23)$$

Entonces, en el intervalo,  $-T < t < T$ , la función  $f(t)$  se puede expandir en una serie de Fourier

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi nt/2T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\pi t/T}, \quad (7.24)$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-j2\pi nt/2T} dt = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-jn\pi t/T} dt. \quad (7.25)$$

Puesto que  $f(t) = 0$  para  $t > T$ , y  $t < -T$ , entonces la ecuación (7.25) se puede expresar como

$$c_n = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jn\pi t/T} dt = \frac{1}{2T} F\left(\frac{n\pi}{T}\right), \quad (7.26)$$

donde

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

y

$$\omega = \frac{n\pi}{T}.$$

Sustituyendo la expresión (7.26) en la expresión (7.24), se obtiene

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2T} F\left(\frac{n\pi}{T}\right) e^{jn\pi t/T}. \quad (7.27)$$

Ahora bien,

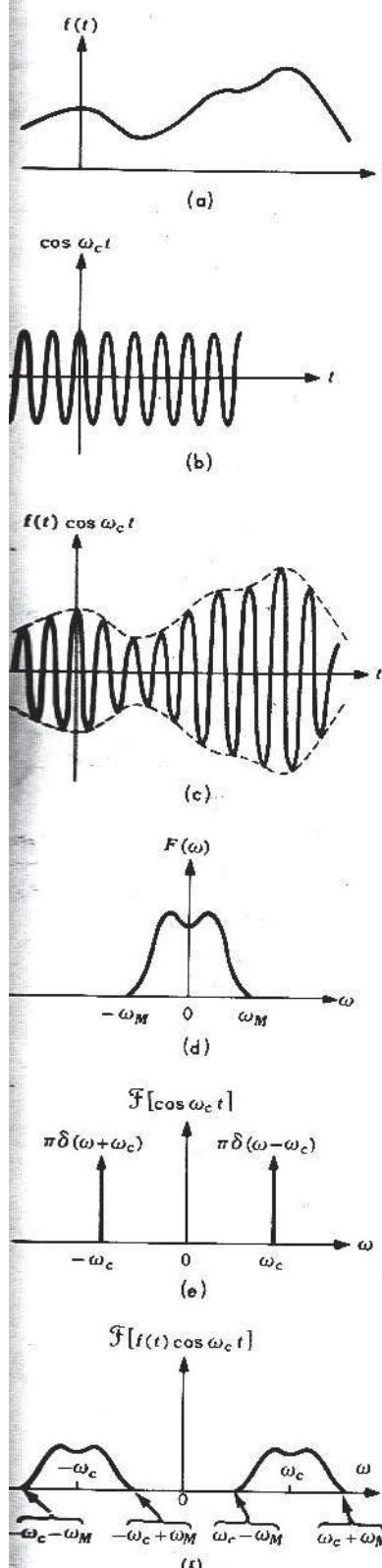
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^T f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (7.28)$$

en razón del supuesto (7.23).

Sustituyendo (7.27) en (7.28), e intercambiando los signos de sumatoria y de integración, se obtiene

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-T}^T \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2T} F\left(\frac{n\pi}{T}\right) e^{jn\pi t/T} \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ F\left(\frac{n\pi}{T}\right) \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{-j(\omega - n\pi/T)t} dt \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{n\pi}{T}\right) \frac{\sin(\omega T - n\pi)}{\omega T - n\pi}. \end{aligned}$$

De este modo, se completa la prueba del teorema de muestreo en la frecuencia.



7.3 (a) La señal de banda limitada  $f(t)$  del problema 7.5. (b) La función  $\cos \omega_c t$ . (c) La función  $f(t) \cos \omega_c t$ . (d) El espectro de  $f(t)$ . (e) El espectro de  $\cos \omega_c t$ . (f) El espectro de  $f(t) \cos \omega_c t$ .

## 7.2 MODULACION DE AMPLITUD

Se denomina *modulación* al método de procesar una señal para obtener una transmisión más eficiente. Un tipo de modulación comúnmente utilizado, se basa en el siguiente *teorema de translación de la frecuencia* (algunas veces denominado *teorema de la modulación*) de la transformada de Fourier. El teorema establece que la multiplicación de una señal  $f(t)$  por una señal senoidal de frecuencia  $\omega_c$  translada su espectro en  $\pm \omega_c$  radianes.

**PROBLEMA 7.4** Verificar el teorema de translación de la frecuencia.

**Solución:** supóngase que  $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ . Por (5.22) y (5.23), se tiene

$$\mathcal{F}[\cos \omega_c t] = \frac{1}{2} [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)],$$

$$\mathcal{F}[\sin \omega_c t] = j \frac{1}{2} [\delta(\omega - \omega_c) - \delta(\omega + \omega_c)].$$

Por consiguiente, de acuerdo con el teorema de convolución en la frecuencia, dado por (4.125), se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t) \cos \omega_c t] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) * [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] d\omega \\ &= \frac{1}{2} F(\omega) * \delta(\omega - \omega_c) + \frac{1}{2} F(\omega) * \delta(\omega + \omega_c) \\ &= \frac{1}{2} F(\omega - \omega_c) + \frac{1}{2} F(\omega + \omega_c) \end{aligned} \quad (7.29)$$

resultado que se obtiene mediante (4.120). Análogamente, se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t) \sin \omega_c t] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) * [-j \delta(\omega - \omega_c) + j \delta(\omega + \omega_c)] d\omega \\ &= -\frac{1}{2} j F(\omega) * \delta(\omega - \omega_c) + \frac{1}{2} j F(\omega) * \delta(\omega + \omega_c) \\ &= -\frac{1}{2} j F(\omega - \omega_c) + \frac{1}{2} j F(\omega + \omega_c). \end{aligned} \quad (7.30)$$

Las ecuaciones (7.29) y (7.30) indican que la multiplicación de una señal  $f(t)$ , por una señal senoidal de frecuencia  $\omega_c$ , translada su espectro en  $\pm \omega_c$  radianes. El proceso de translación de la frecuencia se ilustra en la figura 7.3.

**PROBLEMA 7.5** Demostrar que si  $f(t)$  es una señal de banda limitada, sin componentes espectrales por encima de la frecuencia  $\omega_M$ , entonces el espectro de la señal  $f(t) \cos \omega_c t$ , es también de banda limitada.

**Solución:** como la señal  $f(t)$  es una señal de banda limitada, se tiene que

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = 0 \text{ para } |\omega| > \omega_M.$$

De los resultados (7.29) del problema 7.4, y de la figura 7.3, se sigue que la señal  $f(t) \cos \omega_c t$  también es de banda limitada, y su espectro es igual a cero fuera de la banda  $(\omega_c - \omega_M)$  a  $(\omega_c + \omega_M)$  para  $\omega > 0$ . Se debe observar que este resultado está basado en la suposición de que  $\omega_c > \omega_M$ .

Una señal ordinaria, modulada en amplitud (AM), usualmente se expresa en la forma

$$I(t) = K[1 + m(t)] \cos \omega_c t, \quad (7.31)$$

donde  $m(t)$  es la señal de banda limitada, tal que

$$\mathcal{F}[m(t)] = M(\omega) = 0 \text{ para } |\omega| > \omega_M \quad \text{y} \quad |m(t)| < 1 \text{ para } \omega_c > \omega_M. \quad (7.32)$$

En la expresión (7.31), a la senoide  $\cos \omega_c t$  se le denomina *portadora*, y a la frecuencia  $f_c = \omega_c / 2\pi$  se le denomina *frecuencia portadora*. Un ejemplo de la forma de onda de una señal modulada en amplitud, se muestra en la figura 7.4. Como  $|m(t)| < 1$ , se observa que  $K[1 + m(t)] > 0$  para  $K > 0$ .

**PROBLEMA 7.6** Hallar el espectro de frecuencia de una señal modulada en amplitud (7.31).

**Solución:** mediante la propiedad de superposición y el teorema de translación de la frecuencia, dado en (7.29), se tiene que la transformada de Fourier de  $f(t)$  está dada por

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] \\ &= \mathcal{F}[K[1 + m(t)] \cos \omega_c t] \\ &= \mathcal{F}[K \cos \omega_c t] + \mathcal{F}[K m(t) \cos \omega_c t] \\ &= K \pi \delta(\omega - \omega_c) + K \pi \delta(\omega + \omega_c) \\ &\quad + \frac{1}{2} K M(\omega - \omega_c) + \frac{1}{2} K M(\omega + \omega_c). \end{aligned} \quad (7.33)$$

donde  $\mathcal{F}[m(t)] = M(\omega)$ .

En la figura 7.5 se observa que el espectro de la frecuencia de una señal modulada en amplitud, consta de impulsos localizados en la frecuencia portadora  $\omega_c$  y del espectro de  $m(t)$ , centrado alrededor de  $\omega_c$ . La porción del espectro superior a  $\omega_c$  se denomina *banda lateral superior* del espectro, y la porción simétrica inferior a  $\omega_c$  se denomina *banda lateral inferior*. Notese que las bandas laterales son las que contienen la información de la señal modulada.

**PROBLEMA 7.7** Hallar el espectro de la señal modulada en amplitud, la cual está dada por (7.31), si la señal moduladora es una señal senoidal, esto es

$$m(t) = m_0 \cos \omega_m t, \quad \omega_m < \omega_c, \quad 0 < m_0 < 1.$$

**Solución:** la señal de AM, en este caso, está dada por

$$f(t) = K(1 + m_0 \cos \omega_m t) \cos \omega_c t. \quad (7.34)$$

Utilizando identidades trigonométricas, la relación (7.34) se puede expresar también como

$$f(t) = K \cos \omega_c t + \frac{1}{2} K m_0 \cos (\omega_m - \omega_c) t + \frac{1}{2} K m_0 \cos (\omega_m + \omega_c) t. \quad (7.35)$$

De lo cual, mediante (5.22), se tiene

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] - K \pi [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] \\ &\quad + \frac{1}{2} K m_0 \pi [\delta(\omega - \omega_m + \omega_c) + \delta(\omega + \omega_m - \omega_c) \\ &\quad + \delta(\omega - \omega_m - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_m + \omega_c)]. \end{aligned} \quad (7.36)$$

El espectro de este ejemplo se muestra en la figura 7.6. En este caso, las bandas laterales constan de los impulsos localizados en  $\omega = \omega_c \pm \omega_m$ .

**PROBLEMA 7.8** Para la señal de AM del problema 7.7, hallar el contenido relativo de potencia, en la portadora y en las bandas laterales que llevan la información.

**Solución:** la señal AM del problema 7.7, está dada por

$$\begin{aligned} f(t) &= K[1 + m_0 \cos \omega_m t] \cos \omega_c t \\ &= K \cos \omega_c t + \underbrace{\frac{1}{2} K m_0 \cos (\omega_m - \omega_c) t}_{\text{portadora}} + \underbrace{\frac{1}{2} K m_0 \cos (\omega_m + \omega_c) t}_{\text{bandas laterales}}. \end{aligned}$$

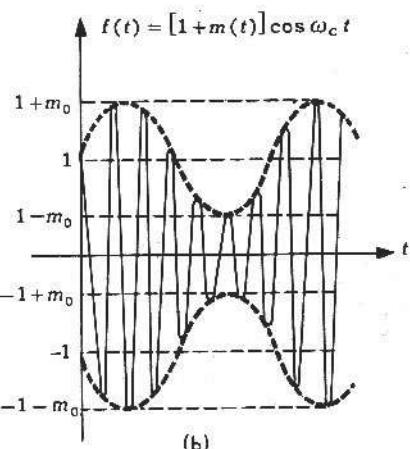
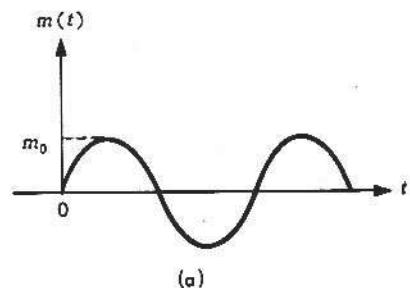


Figura 7.4 (a) La señal mensaje de banda limitada,  $f(t)$ . (b) La forma de onda de una señal modulada en amplitud.

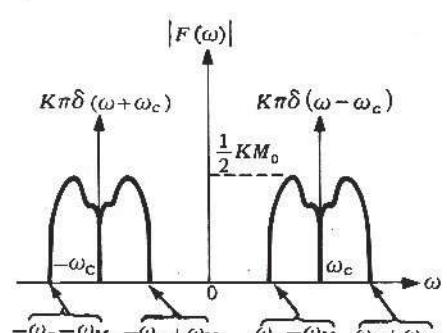
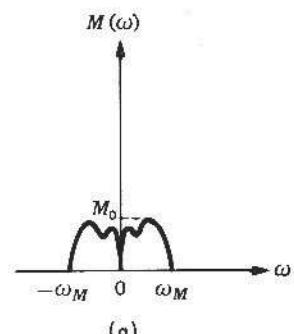


Figura 7.5 (a) El espectro de  $m(t)$ . (b) El espectro de una señal ordinaria modulada en amplitud.

En la expresión anterior aparecen los términos correspondientes a la portadora y a las bandas laterales. Es obvio que el promedio total de potencia,  $P_t$ , entregada por  $f(t)$  (referida a una resistencia de  $1\Omega$ ) está dada por

$$P_t = \frac{1}{2} K^2 + \frac{1}{8} K^2 m_0^2 + \frac{1}{8} K^2 m_0^2 = \frac{1}{2} K^2 \left(1 + \frac{1}{2} m_0^2\right). \quad (7.37)$$

Luego la potencia en la portadora,  $P_c$ , y la potencia transportada por las bandas laterales,  $P_s$ , están dadas por

$$P_c = \frac{1}{2} K^2, \quad P_s = \frac{1}{4} K^2 m_0^2.$$

Obsérvese que  $P_s = K^2 m_0^2 / 8$ , en cada una de las bandas laterales. El porcentaje de potencia contenida en las bandas laterales es

$$\frac{P_s}{P_t} \times 100 = \frac{m_0^2}{2 + m_0^2} \times 100\%. \quad (7.38)$$

Por ejemplo, si  $m_0 = 1/2$ , entonces

$$\frac{P_s}{P_t} = \frac{\frac{1}{4}}{2 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{9}, \quad \text{o sea, cerca del } 11\%,$$

cuando  $m_0 = 1$ ,  $[P_s/P_t]_{\max} = 1/3$ , o sea, cerca del 33%.

Se debe recordar que la señal  $m(t)$  que contiene la información, da lugar a las bandas laterales y sólo una fracción de la potencia de  $f(t)$ , dada por la expresión (7.38), está contenida en esas bandas laterales. La potencia contenida en la portadora representa un desperdicio

**Una señal de AM con doble banda lateral y portadora suprimida (DBLPS) está dada por**

$$f(t) = m(t) \cos \omega_c t, \quad (7.39)$$

donde  $m(t)$  es una señal de banda limitada, como antes. La figura 7.7 muestra a  $f(t)$  para una senoidal  $m(t)$ .

**PROBLEMA 7.9** Hallar el espectro de una señal de AM (DBLPS) dada por la ecuación (7.39).

**Solución:** si  $\mathcal{F}[m(t)] = M(\omega)$ , entonces, se tiene

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}[m(t) \cos \omega_c t] = \frac{1}{2} [M(\omega - \omega_c) + M(\omega + \omega_c)], \quad (7.40)$$

resultado que se obtiene aplicando (7.29), el teorema de translación en la frecuencia. El espectro de una señal DBLPS se muestra en la figura 7.8.

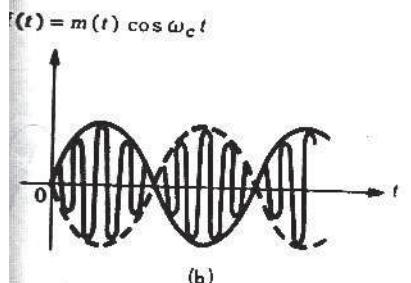
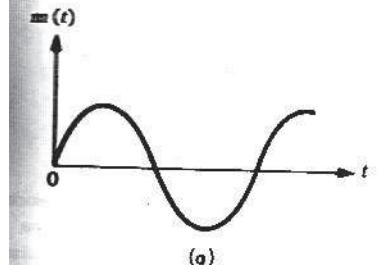


Figura 7.7 (a) La señal senoide de banda limitada  $m(t)$ . (b) La función  $f(t) = m(t) \cos \omega_c t$ .

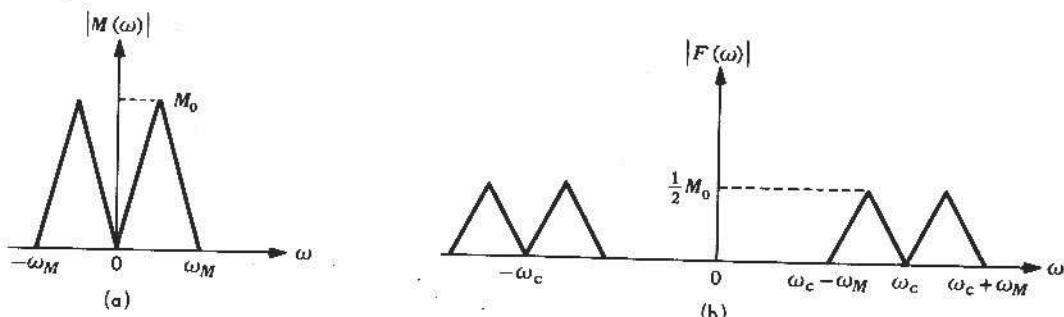


Figura 7.8 (a) El espectro de  $m(t)$ . (b) El espectro de la señal DBLPS.

El proceso de separar la señal moduladora de la señal modulada se denomina **demodulación o detección**.

**PROBLEMA 7.10** Demostrar que el espectro de la señal modulada puede ser transladado a su posición original, si se multiplica la señal modulada por  $\cos \omega_c t$ , en el extremo receptor.

**Solución:** sea la señal modulada la expresada por

$$f(t) = m(t) \cos \omega_c t. \quad (7.41)$$

Entonces, como se muestra en la figura 7.9(a), en el receptor se multiplica la señal recibida,  $f(t)$ , por  $\cos \omega_c t$  para obtener, mediante el uso de una identidad trigonométrica, el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} f(t) \cos \omega_c t &= m(t) \cos^2 \omega_c t \\ &= m(t) \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega_c t) \\ &= \frac{1}{2} m(t) + \frac{1}{2} m(t) \cos 2\omega_c t. \end{aligned} \quad (7.42)$$

Ahora bien, si  $\mathcal{F}[m(t)] = M(\omega)$  y  $M(\omega) = 0$  para  $|\omega| > \omega_M$ , entonces, se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t) \cos \omega_c t] &= \mathcal{F}[m(t) \cos^2 \omega_c t] \\ &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{2} m(t)\right] + \mathcal{F}\left[\frac{1}{2} m(t) \cos 2\omega_c t\right] \\ &= \frac{1}{2} M(\omega) + \frac{1}{4} M(\omega - 2\omega_c) + \frac{1}{4} M(\omega + 2\omega_c). \end{aligned} \quad (7.43)$$

El espectro de  $f(t) \cos \omega_c t = m(t) \cos^2 \omega_c t$ , se muestra en la figura 7.9(c). Del espectro que se muestra en la figura 7.9(b), se concluye que la señal original  $m(t)$  se puede recuperar mediante un filtro para bajas frecuencias, que permita el paso del espectro hasta la frecuencia  $\omega_M$ . El proceso de demodulación se muestra en el diagrama de bloques de la figura 7.9(a).

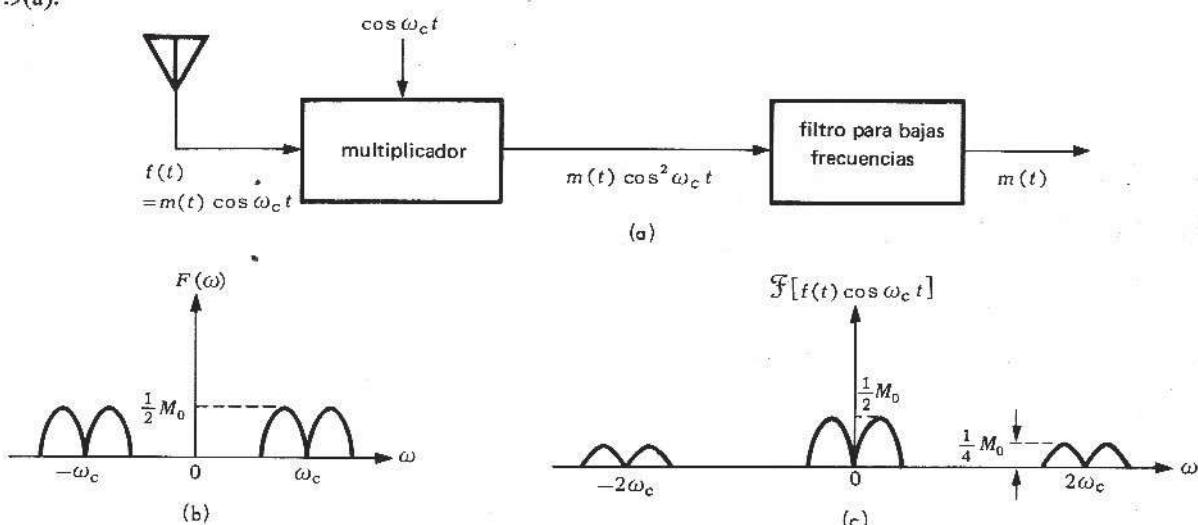


Figura 7.9 (a) El sistema de demodulación. (b) El espectro de la señal modulada  $f(t)$ . (c) El espectro de la señal  $f(t) \cos \omega_c t$ .

**PROBLEMA 7.11** Demostrar que la demodulación también se puede lograr multiplicando la señal modulada  $f(t) = m(t) \cos \omega_c t$ , por cualquier señal periódica de frecuencia  $\omega_c$ .

**Solución:** si  $p(t)$  es una señal periódica de frecuencia  $\omega_c$  y de la forma

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_c t}, \quad (7.44)$$

entonces, según el resultado (5.57), su transformada de Fourier se puede expresar como

$$\mathcal{F}[p(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_c). \quad (7.45)$$

Ahora bien, según (7.40), se tiene

$$\mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{2} M(\omega - \omega_c) + \frac{1}{2} M(\omega + \omega_c).$$

De donde, de acuerdo con (4.125), la transformada de Fourier de  $f(t)p(t)$ , está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t)p(t)] &= \pi [M(\omega - \omega_c) + M(\omega + \omega_c)] * \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_c) \\ &= \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n [M(\omega - \omega_c) + M(\omega + \omega_c)] * \delta(\omega - n\omega_c) \\ &= \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \{M[\omega - (n+1)\omega_c] + M[\omega - (n-1)\omega_c]\} \end{aligned} \quad (7.46)$$

mediante la relación (4.121).

Es obvio que este espectro contiene el término  $M(\omega)$ , el espectro de  $m(t)$ , el cual se puede recuperar mediante un filtro para bajas frecuencias, que permita el paso de frecuencias hasta la frecuencia  $\omega_M$ .

### 7.3 MODULACION ANGULAR

En la modulación de amplitud, la amplitud de la portadora es modulada por la señal  $m(t)$ , la cual contiene la información, y por consiguiente, la información transportada está contenida en la variación de amplitud de la portadora. La modulación de amplitud, sin embargo, no es el único medio de modular una portadora senoidal. También es posible modular, ya sea la frecuencia o la fase de la portadora, de acuerdo con la señal que contiene la información.

De la señal

$$f(t) = A \cos [\omega_c t + \phi(t)] \quad (7.47)$$

se dice que es una señal modulada en ángulo.

Si se tiene

$$\phi(t) = k_p m(t),$$

donde  $k_p$  es una constante, entonces, de la señal modulada en ángulo

$$f_{PM}(t) = A \cos [\omega_c t + k_p m(t)] \quad (7.48)$$

se dice que es una señal modulada en fase (PM) cuya señal moduladora es  $m(t)$ , y a la relación

$$\phi_m = |k_p m(t)|_{\max} \text{ radianes} \quad (7.49)$$

se le denomina índice de modulación de la señal PM.

Si se tiene

$$\phi(t) = k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau,$$

donde  $k_f$  es una constante, entonces, de la relación

$$f_{FM}(t) = A \cos \left[ \omega_c t + k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \right] \quad (7.50)$$

se dice que es una señal de *frecuencia modulada* (FM), y a la relación

$$\phi_m = \left| k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \right|_{\max} \quad (7.51)$$

se le denomina *índice de modulación* de la señal FM.

Sea

$$\theta(t) = \omega_c t + \phi(t); \quad (7.52)$$

entonces la señal modulada en ángulo dada por (7.47), se puede expresar como

$$f(t) = A \cos \theta(t). \quad (7.53)$$

Se define ahora la *frecuencia angular instantánea*,  $\omega_i$ , de la señal (7.53) modulada en ángulo como

$$\omega_i(t) = \frac{d}{dt} \theta(t). \quad (7.54)$$

**PROBLEMA 7.12** Demostrar que  $\omega_i$ , para las señales PM y FM está dada por

$$\omega_{IPM}(t) = \omega_c + k_p \frac{d}{dt} m(t), \quad (7.55)$$

$$\omega_{IFM}(t) = \omega_c + k_f m(t), \quad (7.56)$$

respectivamente.

**Solución:** en el caso de una señal PM, se tiene

$$\omega_i(t) = \frac{d}{dt} \theta(t) = \frac{d}{dt} [\omega_c t + k_p m(t)] = \omega_c + k_p m'(t).$$

En el caso de una señal FM, se tiene

$$\omega_i(t) = \frac{d}{dt} \theta(t) = \frac{d}{dt} \left[ \omega_c t + k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \right] = \omega_c + k_f m(t).$$

Las ecuaciones (7.55) y (7.56) indican que en modulación de fase, la frecuencia instantánea varía *linealmente con la derivada* de la señal moduladora, mientras que en frecuencia modulada, la frecuencia instantánea varía *directamente* con la señal moduladora.

**PROBLEMA 7.13** Si la señal moduladora  $m(t)$  es senoidal, es decir, si se tiene

$$m(t) = m_0 \cos \omega_m t, \quad \omega_m < \omega_c, \quad (7.57)$$

demostrar que las señales PM y FM tendrán las formas dadas por

$$f_{PM}(t) = A \cos (\omega_c t + \phi_m \cos \omega_m t), \quad (7.58)$$

$$f_{FM}(t) = A \cos (\omega_c t + \phi_m \sin \omega_m t), \quad (7.59)$$

respectivamente, donde  $\phi_m$  es el índice de modulación de la señal PM (o FM).

**Solución:** si  $m(t) = m_0 \cos \omega_m t$ , entonces por (7.48), se tiene

$$f_{PM}(t) = A \cos (\omega_c t + k_p m_0 \cos \omega_m t).$$

Por la relación (7.49), se tiene que  $\phi_m = k_p m_0$ , porque la magnitud máxima de  $m(t)$  es  $m_0$ ; de esta manera, se tiene

$$f_{PM}(t) = A \cos (\omega_c t + \phi_m \cos \omega_m t), \quad \phi_m = k_p m_0.$$

Dado que para la señal FM,  $\phi(t) = k_f \int m(t) dt = \frac{k_f m_0}{\omega_m} \operatorname{sen} \omega_m t$ ,

$$\begin{aligned} f_{FM}(t) &= A \cos \left( \omega_c t + \frac{k_f m_0}{\omega_m} \operatorname{sen} \omega_m t \right) \\ &\approx A \cos (\omega_c t + \phi_m \operatorname{sen} \omega_m t), \quad \phi_m = \frac{k_f m_0}{\omega_m}. \end{aligned}$$

**PROBLEMA 7.14** Demostrar que en una señal FM de modulación senoidal, el índice de modulación se puede definir como

$$\phi_m = \frac{\Delta f}{f_m}, \quad (7.60)$$

donde  $f_m$  es la frecuencia de la señal moduladora, y  $\Delta f$  es la desviación frecuencial definida como

$$\Delta f = \left[ \frac{1}{2\pi} (\omega_i - \omega_c) \right]_{\max}$$

**Solución:** según la fórmula (7.56), para una señal FM se tiene

$$\omega_i = \omega_c + k_f m(t) = \omega_c + k_f m_0 \cos \omega_m t.$$

De donde,

$$\omega_i - \omega_c = k_f m_0 \cos \omega_m t. \quad (7.61)$$

En la relación (7.61) se observa que

$$(\omega_i - \omega_c)_{\max} = k_f m_0 = 2\pi \Delta f,$$

es decir, la máxima diferencia entre  $\omega_i$  y  $\omega_c$  se denomina *desviación de frecuencia angular* de la señal FM. Por consiguiente,

$$\phi_m = \frac{k_f m_0}{\omega_m} = \frac{2\pi \Delta f}{2\pi f_m} = \frac{\Delta f}{f_m}.$$

No existe un teorema general sencillo, que relacione el espectro de  $\cos [\omega_c t + \phi(t)]$  con el espectro de  $\phi(t)$ , y el análisis espectral de una señal general modulada en ángulo es, por consiguiente, bastante complicado. En consecuencia, a continuación se considerará únicamente el caso especial de modulación por una señal senoidal.

**PROBLEMA 7.15** Hallar el espectro de una señal FM, en la cual la modulación se hace por una señal senoidal

**Solución:** por (7.59), se tiene

$$\begin{aligned} f(t) &= A \cos (\omega_c t + \phi_m \operatorname{sen} \omega_m t) \\ &= A \cos \omega_c t \cos (\phi_m \operatorname{sen} \omega_m t) - A \sin \omega_c t \operatorname{sen} (\phi_m \operatorname{sen} \omega_m t). \end{aligned} \quad (7.62)$$

En la expresión (7.62), los términos

$$\cos (\phi_m \operatorname{sen} \omega_m t) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} (\phi_m \operatorname{sen} \omega_m t)$$

son funciones periódicas, cuyo período es  $T = 2\pi/\omega_m$ . Por consiguiente, estos términos se pueden expandir en serie de Fourier. Se debe observar que

$$e^{j\phi_m \operatorname{sen} \omega_m t} = \cos (\phi_m \operatorname{sen} \omega_m t) + j \operatorname{sen} (\phi_m \operatorname{sen} \omega_m t). \quad (7.63)$$

Considérese, por tanto, la expansión en serie de Fourier de (7.63), es decir,

$$e^{j\phi_m \operatorname{sen} \omega_m t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_m t}, \quad (7.64)$$

donde

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j(\phi_m \operatorname{sen} \omega_m t)} e^{(-jn\omega_m t)} dt \quad (7.65)$$

y  $T = 2\pi/\omega_m$ . De esta manera, se tiene

$$c_n = \frac{\omega_m}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\phi_m \operatorname{sen} \omega_m t - n\omega_m t)} dt. \quad (7.66)$$

Al hacer,  $\omega_m t = x$ , se obtiene

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\phi_m \operatorname{sen} x - nx)} dx. \quad (7.67)$$

Los coeficientes de Fourier dados por la ecuación (7.67), son las funciones de Bessel de primera clase. De la función generadora de las funciones de Bessel, se tiene

$$e^{z(x^2 - 1)/2x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) x^n, \quad (7.68)$$

donde  $J_n(z)$  es la función de Bessel de primera clase, orden  $n$  y argumento  $z$ .

Al hacer,  $x = e^{j\omega t}$  en la ecuación (7.68), se obtiene

$$\frac{z(x^2 - 1)}{2x} = z \frac{1}{2} \left( x - \frac{1}{x} \right) = jz \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) = jz \operatorname{sen} \omega t. \quad (7.69)$$

De donde,

$$e^{jz \operatorname{sen} \omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{jn\omega t}. \quad (7.70)$$

Comparando las ecuaciones (7.70) y (7.64) resulta

$$e^{j\phi_m \operatorname{sen} \omega_m t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_m t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\phi_m) e^{jn\omega_m t}. \quad (7.71)$$

De esta manera, por (7.67), se obtiene

$$c_n = J_n(\phi_m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\phi_m \operatorname{sen} x - nx)} dx. \quad (7.72)$$

Las propiedades de las funciones de Bessel y las curvas que ilustran su comportamiento, se encuentran en muchos libros de matemáticas. Por (7.72), se obtiene

$$J_{-n}(\phi_m) = (-1)^n J_n(\phi_m). \quad (7.73)$$

Ahora bien, por (7.71), se obtiene

$$\begin{aligned} e^{j\phi_m \operatorname{sen} \omega_m t} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\phi_m) e^{jn\omega_m t} \\ &= J_0(\phi_m) + J_1(\phi_m) (\cos \omega_m t + j \operatorname{sen} \omega_m t) \\ &\quad + J_{-1}(\phi_m) (\cos \omega_m t - j \operatorname{sen} \omega_m t) \\ &\quad + J_2(\phi_m) (\cos 2\omega_m t + j \operatorname{sen} 2\omega_m t) \\ &\quad + J_{-2}(\phi_m) (\cos 2\omega_m t - j \operatorname{sen} 2\omega_m t) \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (7.74)$$

Si se igualan las partes real e imaginaria y se utiliza la relación (7.73), se obtiene

$$\cos(\phi_m \operatorname{sen} \omega_m t) = J_0(\phi_m) + 2J_2(\phi_m) \cos 2\omega_m t + 2J_4(\phi_m) \cos 4\omega_m t + \dots$$

$$= J_0(\phi_m) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\phi_m) \cos 2n\omega_m t, \quad (7.75)$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\phi_m \operatorname{sen} \omega_m t) &= 2 J_1(\phi_m) \operatorname{sen} \omega_m t + 2 J_3(\phi_m) \operatorname{sen} 3 \omega_m t + \dots \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(\phi_m) \operatorname{sen}(2n+1) \omega_m t.\end{aligned}\quad (7.76)$$

Las ecuaciones (7.75) y (7.76) son las expansiones en serie de Fourier de los términos  $\cos(\phi_m \operatorname{sen} \omega_m t)$ , y  $\operatorname{sen}(\phi_m \operatorname{sen} \omega_m t)$ .

La distribución espectral de la señal FM se puede obtener ahora, por sustitución de (7.75) y (7.76) en la ecuación (7.62), de esta manera,

$$\begin{aligned}f(t) &= A \cos(\omega_c t + \phi_m \operatorname{sen} \omega_m t) \\ &= A \cos \omega_c t [J_0(\phi_m) + 2[J_2(\phi_m) \cos 2\omega_m t + J_4(\phi_m) \cos 4\omega_m t + \dots]] \\ &\quad - 2A \operatorname{sen} \omega_c t [J_1(\phi_m) \operatorname{sen} \omega_m t + J_3(\phi_m) \operatorname{sen} 3\omega_m t + \dots].\end{aligned}\quad (7.77)$$

Mediante las fórmulas trigonométricas de suma y diferencia

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) + \cos(A+B)],$$

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) - \cos(A+B)],$$

se obtiene

$$\begin{aligned}f(t) &= A \{J_0(\phi_m) \cos \omega_c t - J_1(\phi_m) [\cos(\omega_c - \omega_m)t - \cos(\omega_c + \omega_m)t] \\ &\quad + J_2(\phi_m) [\cos(\omega_c - 2\omega_m)t + \cos(\omega_c + 2\omega_m)t] \\ &\quad - J_3(\phi_m) [\cos(\omega_c - 3\omega_m)t - \cos(\omega_c + 3\omega_m)t] \\ &\quad + \dots\}.\end{aligned}\quad (7.78)$$

La ecuación (7.78) muestra que la señal FM, representada por  $f(t)$ , consta de una portadora y un número infinito de bandas laterales, separadas en las frecuencias  $(\omega_c + \omega_m)$ ,  $(\omega_c + 2\omega_m)$ ,  $(\omega_c + 3\omega_m)$ , etc., como se muestra en la figura 7.10. Las amplitudes de los términos de la portadora y de las bandas laterales, dependen de  $\phi_m$ , el índice de modulación; esta dependencia está expresada por las funciones apropiadas de Bessel.

#### 7.4 MODULACION DE PULSOS

En un sistema de modulación de pulsos, la portadora consta de una sucesión periódica de pulsos. Tanto la amplitud, como la duración o la posición del pulso, se pueden modular de acuerdo con la señal de entrada. La base teórica de la técnica de modulación de pulsos es la teoría de muestreo presentada en la sección 7.1. En un sistema de modulación de pulsos, se tiene un tren de pulsos no modulados que consta de pulsos idénticos, separados uniformemente, que se suceden a una tasa de muestreo, apropiada para la señal moduladora (es decir, a una tasa superior al doble de la frecuencia de la componente de más alta frecuencia de la señal moduladora).

En esta sección se considerará únicamente el caso de *modulación de amplitud de pulsos* (MAP). Una señal MAP se define como sigue:

Supongase que  $m(t)$  es una señal de banda limitada, con  $M(\omega) = \mathcal{F}[m(t)] = 0$  para  $|\omega| > \omega_M (= 2\pi f_M)$ , y que  $g(t)$  es un tren de pulsos periódicos con periodo  $T$ ; entonces, el producto

$$f(t) = m(t) g(t) \quad (7.79)$$

es una señal MAP si se cumple que  $T \leq 1/(2f_M)$ .

**PROBLEMA 7.16** Hallar el espectro de la señal MAP (7.79) si  $g(t)$  es un tren de pulsos rectangulares periódicos, el ancho del pulso es  $d$  segundos, y se repiten cada  $T = 1/(2f_M)$  segundos.

**Solución:** sea

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[m(t)] &= M(\omega), \\ M(\omega) &= 0 \text{ para } |\omega| > \omega_M. \end{aligned} \quad (7.80)$$

De acuerdo con el teorema de convolución en la frecuencia, dado por (4.125), la transformada de Fourier de  $f(t) = m(t) g(t)$  es

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}[m(t) g(t)] \\ &= \frac{1}{2\pi} M(\omega) * G(\omega), \end{aligned} \quad (7.81)$$

donde  $G(\omega) = \mathcal{F}[g(t)]$ .

La función  $G(\omega)$  se puede obtener de (5.77), si se hace

$$T = \frac{1}{(2f_M)} = \frac{\pi}{\omega_M} \quad \text{y} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\omega_M.$$

Entonces;

$$G(\omega) = 2\omega_M d \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}(n\omega_M d) \delta(\omega - 2n\omega_M). \quad (7.82)$$

Sustituyendo (7.82) en (7.81), se obtiene

$$\begin{aligned} F(\omega) &= 2\omega_M d M(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}(n\omega_M d) \delta(\omega - 2n\omega_M) \\ &= 2\omega_M d \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}(n\omega_M d) M(\omega) * \delta(\omega - 2n\omega_M) \\ &= 2\omega_M d \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}(n\omega_M d) M(\omega - 2n\omega_M), \end{aligned} \quad (7.83)$$

mediante la relación (4.120).

Si  $m(t)$  es una señal de banda limitada, como se muestra en la figura 7.11(a), entonces el espectro de amplitud de la señal MAP es el que ilustra la figura 7.11(f).

En el problema 7.16 se utiliza como  $g(t)$  un tren de pulsos rectangulares. El análisis espectral del ejemplo siguiente muestra que la forma de onda del pulso no es pertinente.

**PROBLEMA 7.17** Hallar el espectro de la señal MAP, dado por la ecuación (7.79), si  $g(t)$  es un tren de pulsos periódicos de forma de onda arbitraria, que se repiten cada  $T < 1/(2f_M)$  segundos.

**Solución:** puesto que  $g(t)$  es una función periódica, se puede expandir en una serie de Fourier; de esta manera,

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

Entonces, según (7.79), la señal MAP  $f(t) = m(t) g(t)$  se puede expresar como

$$\begin{aligned} f(t) &= m(t) \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n m(t) e^{jn\omega_0 t} \end{aligned} \quad (7.84)$$

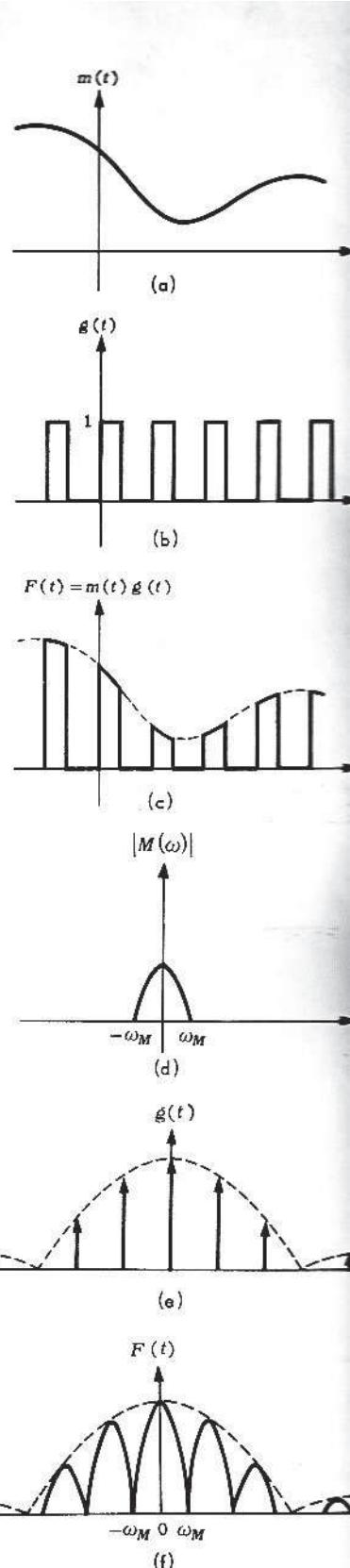


Figura 7.11 (a) La señal de banda limitada  $m(t)$  del problema 7.16. (b) Un tren periódico de pulsos rectangulares  $g(t)$ . (c) La señal MAP  $f(t) = m(t) g(t)$ . (d) El espectro de  $m(t)$ . (e) El espectro de  $g(t)$ . (f) El espectro de la señal MAP  $f(t)$ .

De esta manera

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n m(t) e^{jn\omega_0 t}\right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathcal{F}[m(t) e^{jn\omega_0 t}]. \end{aligned} \quad (7.85)$$

Ahora bien, de acuerdo con la propiedad de desplazamiento en la frecuencia de la transformada de Fourier, dada por 4.74, si  $\mathcal{F}[m(t)] = M(\omega)$ , entonces, se tiene

$$\mathcal{F}[m(t) e^{jn\omega_0 t}] = M(\omega - n\omega_0).$$

De donde,

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n M(\omega - n\omega_0). \quad (7.86)$$

La figura 7.12(b) ilustra el espectro de amplitud de la señal MAP, el cual consta de pulsos espaciados periódicamente, cuya amplitud es modificada por los coeficientes de Fourier de  $g(t)$ . En la figura 7.12,  $\omega_0$  se selecciona de tal manera que  $T < 1/(2f_M)$ .

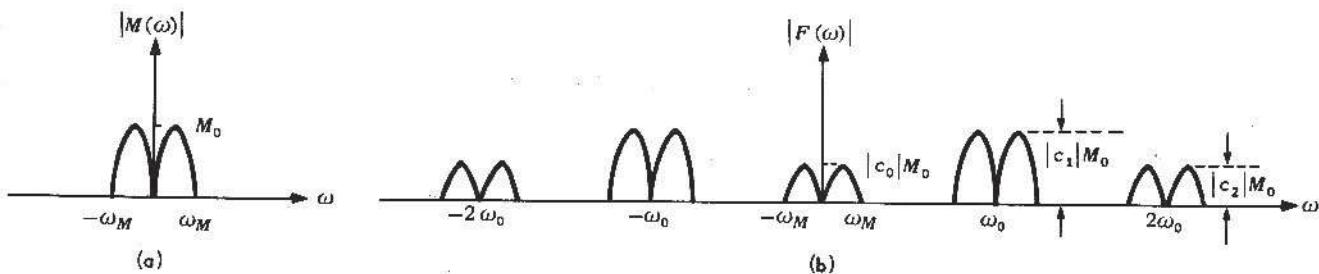


Figura 7.12 (a) El espectro de la señal de banda limitada  $m(t)$ . (b) El espectro de la señal MAP del problema 7.17.

## 7.5 FUNCIONES DE CORRELACION PROMEDIO

El concepto de funciones de correlación se presentó en la sección 4.9. Para señales periódicas o de ruido que existan a lo largo del intervalo de tiempo  $(-\infty, \infty)$ , el contenido de energía será infinito, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt = \infty.$$

Luego es obvio que las funciones de correlación tal como fueron definidas en la sección 4.9, no existen. En tales casos se consideran las siguientes funciones de correlación promedio.

La función de *autocorrelación promedio* de  $f_1(t)$ , denotada por  $\bar{R}_{11}(r)$ , está definida por el límite

$$\bar{R}_{11}(r) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) f_1(t - r) dt. \quad (7.87)$$

Análogamente, la función de *correlación promedio* de  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$ , denotada por  $\bar{R}_{12}(r)$ , está definida por el límite

$$\bar{R}_{12}(r) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) f_2(t - r) dt. \quad (7.88)$$

**PROBLEMA 7.18** Para funciones periódicas (con período  $T_1$ ) demostrar que

$$\bar{R}_{11}(\tau) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) f_1(t - \tau) dt, \quad (7.89)$$

$$\bar{R}_{12}(\tau) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) f_2(t - \tau) dt. \quad (7.90)$$

**Solución:** sean  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  dos funciones periódicas con período  $T_1$ , entonces, se tiene

$$f_1(t) = f_1(t + T_1), \quad (7.91)$$

$$f_1(t - \tau) = f_1(t - \tau + T_1), \quad (7.92)$$

$$f_2(t - \tau) = f_2(t - \tau + T_1). \quad (7.93)$$

Por consiguiente, los integrandos en (7.87) y (7.88) son funciones periódicas en la variable  $t$  y con período  $T_1$ . La integral de tal función en cada período es la misma, por tanto, no es importante si las funciones de correlación son promediadas en un intervalo muy grande,  $T \rightarrow \infty$ , o en un intervalo de un período  $T_1$ .

Luego para funciones periódicas, se tiene que

$$\bar{R}_{11}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) f_1(t - \tau) dt = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) f_1(t - \tau) dt,$$

$$\bar{R}_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) f_2(t - \tau) dt = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) f_2(t - \tau) dt.$$

**PROBLEMA 7.19** Demostrar que las funciones de autocorrelación y correlación promedios, de señales periódicas cuyo período es  $T_1$ , son también funciones periódicas y de igual período.

**Solución:** por el resultado (7.89), se tiene

$$\begin{aligned} \bar{R}_{11}(\tau - T_1) &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) f_1[t - (\tau - T_1)] dt \\ &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) f_1(t - \tau + T_1) dt. \end{aligned}$$

Pero según (7.93), se tiene que

$$\bar{R}_{11}(\tau - T_1) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) f_1(t - \tau) dt = \bar{R}_{11}(\tau). \quad (7.94)$$

Análogamente, por (7.90) y (7.93), se tiene

$$\begin{aligned} \bar{R}_{12}(\tau - T_1) &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) f_2[t - (\tau - T_1)] dt \\ &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) f_2(t - \tau + T_1) dt \\ &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) f_2(t - \tau) dt = \bar{R}_{12}(\tau). \\ &= \bar{R}_{12}(\tau). \end{aligned} \quad (7.95)$$

Las ecuaciones (7.94) y (7.95) muestran que  $\bar{R}_{11}(\tau)$  y  $\bar{R}_{12}(\tau)$  son funciones periódicas cuyo período es  $T_1$ .

**PROBLEMA 7.20** Hallar la función de autocorrelación promedio de la onda sinusoidal dada por

$$f(t) = A \operatorname{sen}(\omega_1 t + \phi), \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

**Solución:** puesto que  $f(t)$  es periódica, entonces de (7.89), se tiene

$$\begin{aligned} \bar{R}_{ff}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t) f(t - \tau) dt \\ &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) f(t - \tau) dt \\ &= \frac{A^2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \operatorname{sen}(\omega_1 t + \phi) \operatorname{sen}[\omega_1(t - \tau) + \phi] dt \\ &= \frac{A^2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \operatorname{sen}(\omega_1 t + \phi) \operatorname{sen}(\omega_1 t + \phi - \omega_1 \tau) dt. \end{aligned} \quad (7.96)$$

Utilizando la identidad trigonométrica  $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)]$ , se tiene

$$\begin{aligned} \bar{R}_{ff}(\tau) &= \frac{A^2}{2T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} [\cos(\omega_1 \tau) - \cos(2\omega_1 t + 2\phi - \omega_1 \tau)] dt \\ &= \frac{A^2}{2T_1} \cos(\omega_1 \tau) \int_{-T_1/2}^{T_1/2} dt \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(\omega_1 \tau). \end{aligned} \quad (7.97)$$

La ecuación (7.97) muestra que  $\bar{R}_{ff}(\tau)$  es independiente de la fase  $\phi$  de  $f(t)$ .

**PROBLEMA 7.21** Demostrar que si  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  son funciones reales y periódicas, que tienen el mismo período  $T_1$ , entonces

$$\bar{R}_{12}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [c_{1n}^* c_{2n}] e^{-jn\omega_1 \tau}, \quad (7.98)$$

donde  $\omega_1 = 2\pi/T_1$  y  $c_{1n}$ ,  $c_{2n}$  son los coeficientes complejos de Fourier de  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$ , respectivamente, y  $c_{1n}^*$  denota el conjugado complejo de  $c_{1n}$ .

**Solución:** en el caso de funciones periódicas, según (7.90) se tiene

$$\bar{R}_{12}(\tau) = \frac{1}{T_1} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f_1(t) f_2(t - \tau) dt.$$

Sean las expansiones en series de Fourier de  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  las dadas por

$$f_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{1n} e^{jn\omega_1 t}, \quad (7.99)$$

$$f_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n} e^{jn\omega_1 t}, \quad (7.100)$$

donde

$$c_{1n} = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) e^{-jn\omega_1 t} dt, \quad (7.101)$$

$$c_{2n} = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_2(t) e^{-jn\omega_1 t} dt. \quad (7.102)$$

Expresando  $f_2(t - \tau)$  de la ecuación (7.90), en la forma dada en (7.100), se obtiene

$$\begin{aligned} \bar{R}_{12}(\tau) &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) f_2(t - \tau) dt \\ &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n} e^{jn\omega_1(t-\tau)} \right] dt. \end{aligned} \quad (7.103)$$

Intercambiando el orden de la sumatoria y de la integral, se tiene

$$\bar{R}_{12}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n} e^{-jn\omega_1 \tau} \left[ \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) e^{jn\omega_1 t} dt \right]. \quad (7.104)$$

La integral dentro del paréntesis angular se reconoce, comparando con la expresión (7.101), como el conjugado complejo de  $c_{1n}$ . Por tanto,

$$\bar{R}_{12}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [c_{1n}^* c_{2n}] e^{-jn\omega_1 \tau}.$$

Obsérvese que  $\bar{R}_{12}(\tau)$  también es una función periódica de  $\tau$  cuyo período es  $T_1$ .

**PROBLEMA 7.22** Demostrar que si  $f(t)$  es una función real y periódica con período  $T$ , entonces

$$\bar{R}_{ff}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 e^{jn\omega_0 \tau}, \quad (7.105)$$

donde  $\omega_0 = 2\pi/T$  y  $c_n$  son los coeficientes complejos de Fourier de  $f(t)$ .

**Solución:** si se hace  $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$ , y  $T_1 = T$ , entonces, de (7.98) en el problema 7.21, se obtiene

$$(18) \quad \bar{R}_{ff}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* c_n e^{-jn\omega_0 \tau} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 e^{-jn\omega_0 \tau} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 e^{jn\omega_0 \tau}$$

dado que  $|c_{-n}|^2 = |c_n|^2$ .

Obsérvese que la ecuación (7.105) es una expansión en serie de Fourier de  $\bar{R}_{ff}(\tau)$ , y por consiguiente,  $R_{ff}(\tau)$  es una función de  $\tau$ , periódica y de igual período que el de la función  $f(t)$ . La ecuación (7.105) también muestra que los coeficientes de Fourier de  $\bar{R}_{ff}(\tau)$ , sólo contienen los valores absolutos de los coeficientes de Fourier de  $f(t)$ . Por consiguiente, se sigue que todas las funciones periódicas en el tiempo, que tienen las mismas magnitudes de los coeficientes de Fourier y la misma periodicidad, tienen la misma función de autocorrelación, aun cuando las fases de los coeficientes de Fourier sean diferentes.

## 7.6 IDENTIFICACION DE SEÑALES MEDIANTE CORRELACION

A continuación se considera el caso de señales que están contaminadas por ruido. Normalmente se denomina ruido a cualquier perturbación espuria o indeseada que tiende a oscurecer o encubrir la señal transmitida. La señal de ruido que se encuentra en la práctica, es una señal cuya amplitud varía al azar. En lo que sigue, se supone que el ruido tiene un valor promedio de cero, es decir,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} n(t) dt = 0. \quad (7.106)$$

En general, de dos señales  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  se dice que no están correlacionadas si

$$\begin{aligned} R_{ff}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) f_2(t - \tau) dt \\ &= \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) dt \right] \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_2(t) dt \right]. \end{aligned} \quad (7.107)$$

**PROBLEMA 7.23** Sean  $s(t)$  una señal útil y  $n(t)$  una señal que representa el ruido.

Demostrar que si  $s(t)$  y  $n(t)$  no están correlacionadas, entonces

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) n(t - \tau) dt = 0 \quad \text{para todo valor de } \tau. \quad (7.108)$$

**Solución:** si  $s(t)$  y  $n(t)$  no están correlacionadas, entonces, por la relación (7.107), se tiene que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) n(t - \tau) dt = \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt \right] \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} n(t) dt \right] = 0$$

en razón de la suposición dada por la relación (7.106).

Si se denota como  $\bar{R}_{sn}(\tau)$  a la función de correlación promedio de  $s(t)$  y  $n(t)$ , entonces la relación (7.108) se puede expresar como

$$\bar{R}_{sn}(\tau) = 0 \quad \text{para todo valor de } \tau. \quad (7.109)$$

Para señales de ruido al azar, cuyo valor promedio es cero, se tiene

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \bar{R}_{nn}(\tau) = 0. \quad (7.110)$$

**PROBLEMA 7.24** Demostrar que la función de autocorrelación promedio de la suma de la señal y del ruido, es la suma de las funciones individuales de autocorrelación de la señal y del ruido, respectivamente.

**Solución:** sea  $f(t) = s(t) + n(t)$ ; entonces, se tiene

$$\begin{aligned} \bar{R}_{ff}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) f(t - \tau) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [s(t) + n(t)][s(t - \tau) + n(t - \tau)] dt \\ &= \bar{R}_{ss}(\tau) + \bar{R}_{nn}(\tau) + \bar{R}_{sn}(\tau) + \bar{R}_{ns}(\tau). \end{aligned} \quad (7.111)$$

Puesto que la señal  $s(t)$  y el ruido  $n(t)$  no están correlacionadas, se tiene

$$\bar{R}_{sn}(\tau) = \bar{R}_{ns}(\tau) = 0.$$

De esta manera,

$$\bar{R}_{ff}(\tau) = \bar{R}_{ss}(\tau) + \bar{R}_{nn}(\tau). \quad (7.112)$$

**PROBLEMA 7.25** Utilizando el resultado (7.112) del problema 7.24, demostrar que la función de autocorrelación se puede usar para detectar señales.

**Solución:** sea  $f(t)$  la señal recibida, que es la suma de la señal útil  $s(t)$  y el ruido  $n(t)$ . Ahora bien, si se conoce la naturaleza del ruido, tal como el espectro de potencia que se estudiará en la sección siguiente, entonces se puede calcular  $\bar{R}_{nn}(\tau)$ , la función de

correlación promedio del ruido. Si  $\bar{R}_{ss}(\tau)$  difiere de  $\bar{R}_{ff}(\tau)$ , se puede concluir que la señal útil  $s(t)$ , existe en la señal recibida  $f(t)$ , puesto que  $\bar{R}_{ss}(\tau)$  es diferente de cero.

La ecuación (7.112) también ofrece un medio de detectar una señal periódica oculta en el ruido. Puesto que en este caso  $s(t)$  es una señal periódica y  $n(t)$  es una señal no periódica, del resultado del problema 7.19 y de la relación (7.110), se sigue que  $\bar{R}_{ss}(\tau)$  es periódica, mientras que  $\bar{R}_{nn}(\tau)$  se hace muy pequeña para valores grandes de  $\tau$ . Por consiguiente, para valores suficientemente grandes de  $\tau$ ,  $\bar{R}_{ff}(\tau)$  será casi igual a  $\bar{R}_{ss}(\tau)$ , y  $\bar{R}_{ff}(\tau)$  mostrará una naturaleza periódica.

**PROBLEMA 7.26** Demostrar que la función de autocorrelación entre las señales transmitida y recibida, es la misma función de autocorrelación entre la señal transmitida y la señal útil recibida.

**Solución:** sean  $g(t)$  y  $f(t)$  la señal transmitida y la señal recibida, respectivamente. Entonces, se tiene que

$$f(t) = s(t) + n(t),$$

donde  $s(t)$  es la señal útil recibida y  $n(t)$  es el ruido. Si ahora se correlaciona la señal recibida  $f(t)$  con la señal transmitida, se obtiene

$$\bar{R}_{fg}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [s(t) + n(t)] g(t - \tau) dt = \bar{R}_{sg}(\tau) + \bar{R}_{ng}(\tau). \quad (7.113)$$

Puesto que  $n(t)$  y  $g(t)$  no están correlacionadas, es decir,  $\bar{R}_{ng}(\tau) = 0$ , se tiene que

$$\bar{R}_{fg}(\tau) = \bar{R}_{sg}(\tau). \quad (7.114)$$

**PROBLEMA 7.27** Partiendo del resultado (7.114) del problema (7.25), demostrar que la correlación promedio se puede utilizar para la detección de señales.

**Solución:** si la señal recibida  $f(t)$  es únicamente ruido, es decir, si  $s(t) = 0$ , entonces la función de correlación promedio  $\bar{R}_{sg}(\tau) = 0$ , y por tanto  $\bar{R}_{fg}(\tau) = 0$ . Por consiguiente, se concluye que si la función de correlación promedio entre la señal transmitida y la señal recibida no es cero, entonces existe una señal útil en la señal recibida. La ecuación (7.114) también puede ser utilizada en la detección de una señal periódica contaminada por el ruido. Puesto que la señal útil  $s(t)$  y la señal transmitida  $g(t)$  son señales de la misma frecuencia, se sigue del resultado del problema 7.19, que  $\bar{R}_{sg}(\tau)$  también es una función periódica de igual período. Por consiguiente, del resultado (7.114) se concluye que si la función de correlación promedio, de la señal recibida  $f(t)$  y la señal transmitida  $g(t)$ , es periódica, entonces  $f(t)$  debe contener una señal periódica.

Se debe observar que en el método de correlación,  $\bar{R}_{fg}(\tau) = \bar{R}_{sg}(\tau)$ , sin ningún término adicional del ruido, tal como  $\bar{R}_{nn}(\tau)$ , encontrado en la técnica de detección mediante autocorrelación; por tanto, es posible detectar una señal periódica en la señal recibida  $f(t)$  a cualquier valor de  $\tau$ .

## 7.7 ESPECTROS DE POTENCIA PROMEDIO: SEÑALES AL AZAR

En la sección 4.8, se presentó el concepto de espectro de energía o densidad de energía de  $f(t)$ , en esa sección se supuso que el contenido de energía de  $f(t)$  es finito, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \text{finito}. \quad (7.115)$$

Para tales funciones, la potencia promedio en el intervalo  $T$  se approxima a cero a medida que  $T$  se aproxima a infinito; de esta manera, se tiene

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = 0, \quad (7.116)$$

En relación con los cálculos de ruido, es necesario considerar señales sin contenido finito de energía. En este caso, la potencia promedio de  $f(t)$  es la cantidad

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt. \quad (7.117)$$

Cuando este límite existe, la cantidad

$$P(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega t} dt \right|^2 \quad (7.118)$$

se denomina *espectro de potencia* o *densidad espectral de potencia* de la función  $f(t)$ .

Si sólo se especifica la densidad espectral de potencia de la función  $f(t)$ , no se puede conocer su forma de onda, porque sólo se conoce el espectro promediado en el tiempo.

Las señales especificadas de esta manera se denominan *señales al azar*. Las señales al azar generalmente se describen en términos de sus propiedades estadísticas; sin embargo, aquí no se analizarán estas propiedades.

Aunque la cantidad dada por la ecuación (7.118) se conoce como la densidad espectral de potencia de la función  $f(t)$ , la densidad espectral de potencia (o simplemente densidad espectral) de la función  $f(t)$  se define generalmente como la transformada de Fourier de la función de autocorrelación promedio de  $f(t)$ . De esta manera, se define

$$P(\omega) = \mathcal{F}[\bar{R}_{ff}(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{R}_{ff}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (7.119)$$

$$\bar{R}_{ff}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[P(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad (7.120)$$

**PROBLEMA 7.28** Demostrar que la potencia promedio total (o valor cuadrático medio) de una función  $f(t)$ , está dada por

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} P(2\pi\nu) d\nu, \quad (7.121)$$

donde  $\omega = 2\pi\nu$ .

**Solución:** de la relación (7.120), se sigue que

$$\bar{R}_{ff}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} P(2\pi t) dt. \quad (7.122)$$

Ahora bien, por (7.87), se tiene que

$$\bar{R}_{ff}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) f(t - \tau) dt. \quad [7.87]$$

Por consiguiente,

$$\bar{R}_{ff}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt. \quad (7.123)$$

Comparando (7.123) con (7.122), se obtiene

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} P(2\pi\nu) d\nu.$$

La ecuación (7.121) establece que la potencia promedio total (o valor cuadrático medio) de una función  $f(t)$ , está dada por la integral de  $P(\omega)$  a lo largo de todo el intervalo de frecuencia. Por esta razón la cantidad  $P(\omega)$  se denomina *spectro de potencia* o *densidad espectral de potencia* de  $f(t)$ .

**PROBLEMA 7.29** Hallar la densidad espectral de potencia de una función periódica  $f(t)$  cuyo período es  $T$ .

**Solución:** supóngase que la serie de Fourier de la función  $f(t)$ , está dada por

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (7.124)$$

En el problema 7.22 se demostró que la función de autocorrelación promedio de  $f(t)$  está dada por

$$\bar{R}_{ff}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 e^{jn\omega_0 \tau}. \quad [7.105]$$

Si se toma la transformada de Fourier de  $\bar{R}_{ff}(\tau)$ , se obtiene

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \mathcal{F}[\bar{R}_{ff}(\tau)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \mathcal{F}[e^{jn\omega_0 \tau}] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi |c_n|^2 \delta(\omega - n\omega_0) \end{aligned} \quad (7.125)$$

mediante la relación (5.21).

Por tanto,  $P(\omega)$  consta de una serie de impulsos localizados en las frecuencias armónicas de  $f(t)$ . Cada impulso tiene un valor igual a la potencia contenida en esa componente frecuencial y es una clara medida de la distribución de potencia en  $f(t)$ .

**PROBLEMA 7.30** Demostrar que la potencia promedio por período en una función periódica  $f(t)$ , está dada por

$$\frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} [f(t)]^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2. \quad (7.126)$$

**Solución:** dado que  $f(t)$  es periódica, entonces de la ecuación (7.89), se tiene que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} [f(t)]^2 dt, \quad (7.127)$$

donde  $T_1$  es el período de  $f(t)$ .

Sustituyendo (7.125) en (7.127) y utilizando la relación (7.127), se obtiene

$$\frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \delta(\omega - n\omega_0) \right] d\omega.$$

Si se intercambia el orden de la sumatoria y de la integral, y se utiliza la propiedad de la función  $\delta$ , se obtiene

$$\frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} [f(t)]^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

La ecuación (7.126) es exactamente el teorema de Parseval para una función periódica, expresado en la ecuación (3.85).



El ruido blanco se define como cualquier señal al azar cuya densidad espectral de potencia es una constante (independiente de la frecuencia).

**PROBLEMA 7.31** Hallar la función de autocorrelación promedio del ruido blanco.

**Solución:** según la definición de ruido blanco, se tiene que

$$P(\omega) = K. \quad (7.12)$$

De la relación (7.120), se sigue que

$$\bar{R}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[P(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = K \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Según la identidad (5.4) de la función  $\delta$ , es decir,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} d\omega = \delta(\tau),$$

se tiene.

$$\bar{R}(\tau) = K \delta(\tau). \quad (7.129)$$

Por consiguiente, la función de autocorrelación promedio del ruido blanco resulta ser un impulso.

**PROBLEMA 7.32** La función de autocorrelación promedio de la corriente del ruido térmico está dada por

$$\bar{R}_{ti}(\tau) = kTG\alpha e^{-\alpha|\tau|}, \quad (7.130)$$

donde

$k$  = constante de Boltzmann,  $k = 1,38 \times 10^{-23}$  julios/ $^{\circ}\text{K}$ ,

$T$  = temperatura ambiente en grados Kelvin,

$G$  = conductancia de la resistencia en mhos,

$\alpha$  = número promedio de colisiones de un electrón, en un segundo.

Hallar la densidad espectral de potencia promedio, para la corriente del ruido térmico.

**Solución:** si se toma la transformada de Fourier de (7.130), se tiene

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \mathcal{F}[\bar{R}_{ti}(\tau)] \\ &= kTG\alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= kTG\alpha \int_{-\infty}^0 e^{\alpha\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{2kTG\alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{2kTG}{1 + \frac{\omega^2}{\alpha^2}}. \end{aligned} \quad (7.131)$$

Puesto que  $\alpha$ , el número de colisiones por segundo, es del orden de  $10^{12}$ , el factor  $1 + \omega^2/\alpha^2$  está cercano a la unidad para frecuencias inferiores a  $10^{10}$  hz. Por consiguiente, para frecuencias inferiores a  $10^{10}$  hz, la densidad espectral de potencia promedio, para la corriente del ruido térmico, se puede aproximar por medio de

$$P(\omega) = 2kTG. \quad (7.132)$$

### 7.8 RELACIONES ENTRE LA ENTRADA Y LA SALIDA: CALCULO DEL RUIDO

Las relaciones entre la entrada y la salida estudiadas en el capítulo sexto, determinan la salida de un sistema lineal de parámetros constantes, cuando la entrada es una función del tiempo conocida. Dado que las señales al azar, tal como la del ruido, no se pueden expresar como funciones deterministas del tiempo, entonces las técnicas desarrolladas en el capítulo sexto no se pueden aplicar directamente cuando la entrada es una señal al azar.

En esta sección se estudiará la aplicación de funciones de correlación y densidades espectrales de potencia, a problemas de análisis de sistemas que involucran señales al azar.

**PROBLEMA 7.33** Sean  $x(t)$  y  $y(t)$  las señales al azar de entrada y salida, respectivamente, de un sistema lineal, estable, y de parámetros constantes, caracterizado por la función  $H(\omega)$ . Demostrar que las autocorrelaciones promedios de la entrada y de la salida están relacionadas por:

$$\bar{R}_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) \bar{R}_{xx}(\tau + \sigma - \lambda) d\sigma d\lambda, \quad (7.133)$$

donde  $h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(\omega)]$  = respuesta del sistema al impulso unitario

**Solución:** en la ecuación (6.87) se demostró que la salida  $y(t)$  está relacionada con la entrada  $x(t)$ , por la integral de convolución, es decir,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau. \quad (7.134)$$

Ahora bien, según la relación (7.87), se tiene que

$$\bar{R}_{yy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) y(t - \tau) dt. \quad (7.135)$$

Por la relación (7.134), se puede expresar  $y(t)$  y  $y(t - \tau)$  como

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) x(t - \lambda) d\lambda, \quad (7.136)$$

$$y(t - \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) x(t - \tau - \sigma) d\sigma. \quad (7.137)$$

Sustituyendo (7.136) y (7.137) en (7.135), se obtiene

$$\bar{R}_{yy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) x(t - \lambda) d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) x(t - \tau - \sigma) d\sigma \right] dt. \quad (7.138)$$

Intercambiando el orden de la integración se puede expresar la relación (7.138) como

$$\bar{R}_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t - \lambda) x(t - \tau - \sigma) dt \right] d\sigma d\lambda. \quad (7.139)$$

Dado que,

$$\bar{R}_{xx}(\tau + \sigma - \lambda) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t - \lambda) x(t - \tau - \sigma) dt, \quad (7.140)$$

la ecuación (7.139) se convierte en

$$\bar{R}_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) \bar{R}_{xx}(\tau + \sigma - \lambda) d\sigma d\lambda.$$

**PROBLEMA 7.34** Demostrar que  $P_o(\omega)$ , la densidad espectral de potencia de la salida, y  $P_i(\omega)$ , la densidad espectral de potencia de la entrada, de un sistema lineal, están relacionados por

$$P_o(\omega) = |H(\omega)|^2 P_i(\omega), \quad (7.141)$$

donde  $H(\omega)$  es la función del sistema.

**Solución:** por la ecuación 7.119, se tiene que  $P_o(\omega)$  está dado por

$$P_o(\omega) = \mathcal{F}[\bar{R}_{yy}(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{R}_{yy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (7.142)$$

Sustituyendo (7.133) en (7.142), se obtiene

$$P_o(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) \bar{R}_{xx}(\tau + \sigma - \lambda) d\sigma d\lambda \right] e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (7.143)$$

Con el cambio de la variable  $\mu = \tau + \sigma - \lambda$ , seguido por una separación de variables, se obtiene

$$\begin{aligned} P_o(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\mu) e^{-j\omega(\mu - \sigma + \lambda)} d\mu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) e^{-j\omega\lambda} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) e^{j\omega\sigma} d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \bar{R}_{xx}(\mu) e^{-j\omega\mu} d\mu. \end{aligned} \quad (7.144)$$

Puesto que

$$P_i(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

y  $h(t)$  es siempre real,

$$H^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau.$$

Entonces, la ecuación (7.144) se puede expresar como

$$P_o(\omega) = H(\omega) H^*(\omega) P_i(\omega). \quad (7.145)$$

Dado que  $H(\omega) H^*(\omega) = |H(\omega)|^2$ , se tiene

$$P_o(\omega) = |H(\omega)|^2 P_i(\omega).$$

Para las señales al azar no se tiene ni se puede obtener, una expresión explícita del ruido de entrada, o de la respuesta de un sistema a tal fuente. En consecuencia, no se dispone de una relación tal como la (6.92) para señales al azar. Sin embargo, por medio de densidades espectrales de potencia, se puede establecer y utilizar la relación (7.141) en problemas que involucran señales al azar, aplicadas a un sistema lineal.

**PROBLEMA 7.35** Hallar la función de autocorrelación promedio, de la salida del circuito  $RC$  para bajas frecuencias, que se muestra en la figura 7.13, cuando la entrada es ruido blanco. Así mismo, hallar la media cuadrática del voltaje del ruido en la salida.

**Solución:** según el resultado (6.100) del problema (6.19), la respuesta impulsiva  $h(t)$  del circuito está dada por,

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t),$$

mientras que, según (7.129), la función de autocorrelación promedio de la entrada (que es ruido blanco) está dada por

$$\bar{R}_{xx}(\tau) = K\delta(\tau).$$

Entonces, mediante la relación (7.133), se obtiene

$$\begin{aligned} \bar{R}_{yy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{RC} e^{-\lambda/RC} u(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K}{RC} e^{-\sigma/RC} u(\sigma) \delta(\tau + \sigma - \lambda) d\sigma d\lambda \\ &= \frac{K}{(RC)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma/RC} u(\sigma) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau + \sigma - \lambda) e^{-\lambda/RC} u(\lambda) d\lambda d\sigma. \quad (7.146) \end{aligned}$$

Recordando la propiedad (2.68) de la función  $\delta$ , se tiene

$$\begin{aligned} \bar{R}_{yy}(\tau) &= \frac{K}{(RC)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma/RC} u(\sigma) e^{-(\tau+\sigma)/RC} d\sigma \\ &= \frac{K}{(RC)^2} \int_0^{\infty} e^{-\tau/RC} e^{-2\sigma/RC} d\sigma \end{aligned}$$

dado que  $u(\sigma) = 0$ , para  $\sigma < 0$ , y  $u(\sigma) = 1$ , para  $\sigma > 0$ .

De donde,

$$\bar{R}_{yy}(\tau) = \frac{K}{(RC)^2} e^{-\tau/RC} \int_0^{\infty} e^{-2\sigma/RC} d\sigma = \frac{K}{2RC} e^{-\tau/RC}. \quad (7.147)$$

La ecuación (7.147) es válida sólo para valores positivos de  $\tau$ ; sin embargo, como la función de autocorrelación es una función par de  $\tau$  [ver 4.148], se tiene

$$\bar{R}_{yy}(\tau) = \frac{K}{2RC} e^{-|\tau|/RC}, \quad -\infty < \tau < \infty. \quad (7.148)$$

La media cuadrática del voltaje del ruido en la salida está dada por

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [y(t)]^2 dt = \bar{R}_{yy}(0) = \frac{K}{2RC}. \quad (7.149)$$

**PROBLEMA 7.36** Hallar la densidad espectral de potencia, para la salida del circuito  $RC$ , que se muestra en la figura 7.13, cuando la entrada es ruido blanco. Así mismo, comparar la media cuadrática del voltaje del ruido en la salida, con el valor obtenido mediante la relación (7.121).

**Solución:** según (6.99), la función del sistema,  $H(\omega)$ , del circuito  $RC$ , está dada por

$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega + \frac{1}{RC}}. \quad [6.99]$$

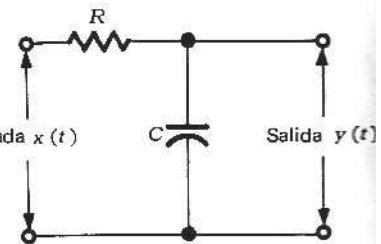


Figura 7.13 El circuito  $RC$  para bajas frecuencias del problema 7.35.

La densidad espectral de potencia de la entrada (ruido blanco), está dada por

$$P_i(\omega) = K. \quad [7.128]$$

De esta manera, según (7.141), la densidad espectral de potencia de la salida, está dada por

$$P_o(\omega) = |H(\omega)|^2 P_i(\omega) = \frac{\left(\frac{1}{RC}\right)^2}{\omega^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2} K. \quad (7.150)$$

Por (7.121), se tiene que la media cuadrática del voltaje de salida, se puede evaluar a partir de  $P_o(\omega)$ ; de esta manera, se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [y(t)]^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_o(\omega) d\omega \\ &= \frac{K}{2\pi (RC)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2} \\ &= \frac{K}{2RC} \end{aligned} \quad (7.151)$$

lo cual está de acuerdo con el resultado (7.149).

## 7.9 PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

**PROBLEMA 7.37** Demostrar que una función periódica de banda limitada, sin armónicos de orden superior a  $N$ , se puede especificar únicamente por su valor en  $2N + 1$  instantes de un período.

[Sugerencia: con  $2N + 1$  incógnitas, una función periódica de banda limitada tiene la forma

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^N C_n \cos(\omega_0 t + \phi_n), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

**PROBLEMA 7.38** Considerar las funciones muestradoras

$$\phi_n(t) = \frac{\sin \omega_M (t - nT)}{\omega_M (t - nT)}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

donde  $\omega_M = 2\pi f_M$ , y  $T = 1/(2f_M)$ . Demostrar que (a)  $\phi_n(t)$  son ortogonales en el intervalo  $-\infty < t < \infty$ , y (b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(t) \phi_m(t) dt = T \delta_{nm},$$

donde  $\delta_{nm}$  es la delta de Kronecker.

[Sugerencia: utilizar el resultado del problema 4.23, y el teorema de Parseval.]

**PROBLEMA 7.39** Si  $f(t)$  es una señal de banda limitada, esto es,  $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = 0$ , para  $|\omega| > \omega_c$ , demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi_n(t) dt = T f(nT),$$

donde  $\phi_n(t)$  es la función muestral del problema 7.38, para todo  $\phi_n(t)$  del mismo problema, con  $\omega_M > \omega_c$ .

[Sugerencia: multiplicar (7.16) por  $\phi_n(t)$ , integrar entre  $-\infty$  e  $\infty$ , y utilizar el resultado del problema 7.38.]

**PROBLEMA 7.40** Utilizando el teorema de convolución en el tiempo, dado por (4.122), verificar el resultado del problema 7.39.

[Sugerencia: ver el problema 4.95.]

**PROBLEMA 7.41** Sea  $f(t)$  una señal de banda limitada, cuyo espectro es cero fuera del intervalo de  $-f_M$  a  $f_M$  Hertz. Si  $f(t)$  se muestrea a una tasa de  $2f_M$  muestras por segundo, probar que

$$\frac{1}{2f_M} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ f\left(\frac{n}{2f_M}\right) \right]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt.$$

**PROBLEMA 7.42** Demostrar que el producto de una señal de AM, con una onda periódica cuya frecuencia fundamental es la frecuencia de la portadora de la señal AM, incluye un término proporcional a la señal  $m(t)$ .

**PROBLEMA 7.43** Demostrar que la señal DBLPS se puede demodular, multiplicando la señal por cualquier señal periódica, cuya frecuencia fundamental es la frecuencia portadora de la señal DBLPS.

**PROBLEMA 7.44** La eliminación de una banda lateral en una señal DBLPS, produce una señal denominada señal de AM de *banda lateral única* (BLU). La figura 7.14 muestra un diagrama de bloques del método de defasamiento para producir una señal BLU. Obtener: (a) la señal DBLPS,  $f_1(t)$ , multiplicando el mensaje dado,  $m(t)$ , por una portadora  $\cos \omega_c t$ , y (b) la señal DBLPS,  $f_2(t)$ , multiplicando la portadora defasada en  $-\frac{1}{2}\pi$ , por el mensaje también defasado en  $-\frac{1}{2}\pi$ . Demostrar también que  $f_1(t) - f_2(t)$ , produce una señal BLU.

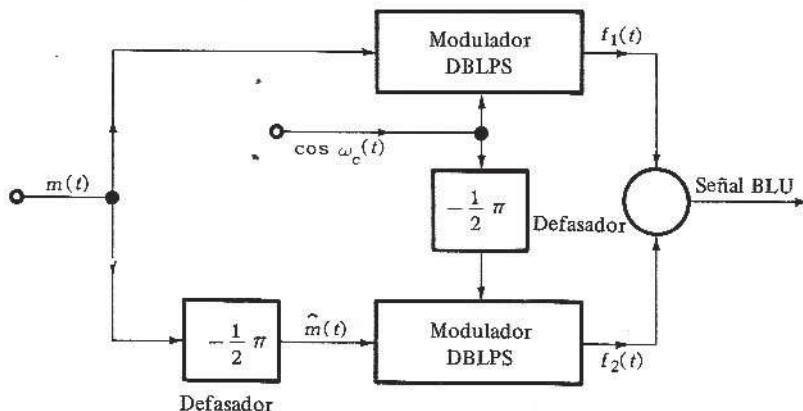


Figura 7.14 Diagrama de bloques del método de defasamiento para producir una señal BLU.

**PROBLEMA 7.45** (a) Demostrar que la señal  $f(t) = m(t) \cos \omega_c t$ , donde  $m(t)$  es una onda periódica cuadrada, se puede expresar como la señal modulada en fase  $\cos [\omega_c t + \phi(t)]$ . (b) Hallar  $\phi(t)$ .

Respuesta: si se tiene

$$m(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 < t < T/2 \\ -1 & \text{para } T/2 < t < T \end{cases} \quad \text{y} \quad m(t+T) = m(t),$$

entonces  $\phi(t)$  también es una onda periódica cuadrada, es decir,

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 < t < T/2 \\ \pi & \text{para } T/2 < t < T \end{cases} \quad \text{y} \quad \phi(t+T) = \phi(t).$$

**PROBLEMA 7.46** Las señales de FM con  $\phi(t) = k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \ll \frac{1}{2}\pi$  para todo valor de  $t$ , se denominan señales de FM de *banda angosta*. Hallar la ecuación y el espectro de frecuencia de una señal de FM de banda angosta.

*Respuesta:*  $A \cos \omega_c t - A \phi(t) \sin \omega_c t$ ,

$$\frac{A}{2} [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] - \frac{Ak_f}{2\omega} [M(\omega - \omega_c) - M(\omega + \omega_c)],$$

donde  $M(\omega) = \mathcal{F}[m(t)]$ .

**PROBLEMA 7.47** Comparar y hallar las diferencias entre una señal de FM de banda angosta y una señal ordinaria de AM. (Cf., problema 7.46.)

**PROBLEMA 7.48** Hallar el espectro de la señal MAP (7.79), si  $g(t)$  es el pulso rectangular periódico y simétrico, que se muestra en la figura 7.15. Esta señal especial MAP también se denomina señal *recortada*.

*Respuesta:*  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} a_{2n-1} [M\{\omega - (2n-1)\omega_0\} + M\{\omega + (2n-1)\omega_0\}]$ , con

$$a_{2n-1} = \begin{cases} \frac{4}{(2n-1)\pi} & \text{para } (2n-1) = 1, 5, \dots \\ \frac{-4}{(2n-1)\pi} & \text{para } (2n-1) = 3, 7, \dots \end{cases}$$

(Cf., problema 2.13.)

**PROBLEMA 7.49** Demostrar que la función de autocorrelación promedio  $R_{11}(\tau)$ , es una función par de  $\tau$ .

**PROBLEMA 7.50** Demostrar que la derivada de la función de autocorrelación promedio de  $f(t)$ , es el negativo de la función de correlación promedio de  $f(t)$  y  $df/dt$ ; esto es,  
 $d\bar{R}_{ff}/d\tau = -\bar{R}_{f df/dt}$ .

**PROBLEMA 7.51** De dos señales periódicas  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  con período  $T$ , se dice que no están *correlacionadas* o son incoherentes, si para todo valor de  $\tau$ , se cumple que

$$\bar{R}_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) f_2(t - \tau) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) dt \times \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_2(t) dt; \quad (b)$$

es decir, la función de correlación promedio de  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$ , es igual al producto del promedio de  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  en un período.

Demostrar que el valor cuadrático medio de la suma de dos señales periódicas incoherentes, es la suma de los valores cuadráticos medios de las dos señales, cuando el valor promedio de cada señal es cero

**PROBLEMA 7.52** Demostrar que el espectro de la densidad de potencia de una onda senoidal  $A \sin \omega_1 t$  ( $\delta A \cos \omega_1 t$ ), es  $P(\omega) = \frac{1}{4} A^2 [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)]$ .  
[Sugerencia: utilizar el resultado del problema 7.20.]

**PROBLEMA 7.53** Dos señales  $f_a(t)$  y  $f_b(t)$  se aplican a dos sistemas, como se muestra en la figura 7.16, siendo las salidas resultantes  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$ , respectivamente. Expresar la función de correlación promedio  $\bar{R}_{12}$ , de  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$ , en términos de  $\bar{R}_{ab}$ ,  $h_1(t)$  y  $h_2(t)$ , donde  $h_1(t)$  y  $h_2(t)$  son las respectivas respuestas de los dos sistemas al impulso unitario.

Respuesta:  $\bar{R}_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \bar{R}_{ab}(\tau + \sigma - \lambda) h_2(\sigma) d\sigma d\lambda$ .

**PROBLEMA 7.54** Si la densidad espectral  $S_{12}(\omega)$ , de dos funciones  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$ , está definida por  $S_{12}(\omega) = \mathcal{F}[\bar{R}_{12}(\tau)]$ , demostrar que para los dos sistemas del problema 7.53, se cumple

$$S_{12}(\omega) = H_1(\omega) H_2^*(\omega) S_{ab}(\omega),$$

donde  $S_{ab}(\omega)$  es la densidad espectral de  $f_a(t)$  y  $f_b(t)$ ;  $H_1(\omega)$  y  $H_2(\omega)$  son las funciones respectivas de los sistemas.

**PROBLEMA 7.55** Hallar la función de autocorrelación promedio, de la salida del circuito para bajas frecuencias que se muestra en la figura 7.13, cuando la entrada tiene una función de autocorrelación promedio de la forma  $\bar{R}_{xx}(\tau) = \frac{1}{2} \alpha K e^{-\alpha|\tau|}$ .

Respuesta:  $\bar{R}_{yy}(\tau) = \frac{b^2 \alpha K}{2(b^2 - \alpha^2)} \left[ e^{-\alpha|\tau|} - \frac{\alpha}{b} e^{-b|\tau|} \right]$ , donde  $b = \frac{1}{RC}$ .

**PROBLEMA 7.56** El coeficiente  $\frac{1}{2} \alpha K$ , de  $\bar{R}_{xx}(\tau)$  del problema 7.55, ha sido seleccionado de tal manera que la entrada tenga una densidad espectral  $K$  cuando  $\omega = 0$ . Luego, a bajas frecuencias la densidad espectral es la misma del ruido blanco. Demostrar que cuando  $\alpha \gg 1/RC = b$ , el resultado del problema 7.55 se aproxima al resultado (7.148) del ruido blanco.  
[Sugerencia: expresar  $\bar{R}_{yy}(\tau)$  como

$$\bar{R}_{yy}(\tau) = \frac{bK}{2} e^{-b|\tau|} \left[ \frac{1}{(1 - b^2/\alpha^2)} \left( 1 - \frac{b}{\alpha} e^{-(\alpha-b)|\tau|} \right) \right].$$

**PROBLEMA 7.57** Sea  $F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$ , la transformada de Fourier de una función real  $f(t)$ , y  $\hat{F}(\omega)$  la transformada de Fourier de  $\hat{f}(t)$ , donde  $\hat{f}(t)$  está definida por

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [X(\omega) \cos \omega t + R(\omega) \sin \omega t] d\omega.$$

Demostrar que (a) la relación entre  $\hat{f}(t)$  y  $f(t)$  es

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x) \sin \omega(t-x) dx d\omega;$$

(b) la relación entre  $\hat{F}(\omega)$  y  $F(\omega)$  es

$$\hat{F}(\omega) = -j \operatorname{sgn} \omega F(\omega).$$

[Sugerencia: (a) utilizar 4.19-20; (b) sustituir

$$R(\omega) = \frac{1}{2} [F(\omega) + F(-\omega)] \quad \text{y} \quad X(\omega) = \frac{1}{2j} [F(\omega) - F(-\omega)]$$

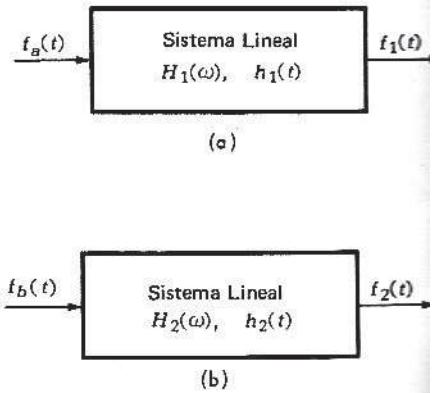


Figura 7.16 Los dos sistemas del problema 7.53.

en la definición de  $\hat{f}(t)$ , y observar que  $\hat{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ . [Ver los problemas 6.50 y 9.55.]

**PROBLEMA 7.58** La señal analítica  $f_+(t)$  relacionada con la señal real  $f(t)$  está definida por

$$f_+(t) = f(t) + j\hat{f}(t),$$

donde  $\hat{f}(t)$  es la señal definida en el problema 7.57. Demostrar que si  $\mathcal{F}[f_+(t)] = F_+(\omega)$ , entonces

$$F_+(\omega) = 2F(\omega)u(\omega) = \begin{cases} 2F(\omega), & \omega > 0 \\ 0, & \omega < 0, \end{cases}$$

donde  $u(\omega)$  es el escalón unitario.

**PROBLEMA 7.59** Hallar la señal analítica relacionada con la señal  $f(t) = \cos \omega t$ . [Sugerencia: ver el problema 6.51.]

*Respuesta:*  $f_+(t) = \cos \omega t + j \operatorname{sen} \omega t = e^{j\omega t}$ .

**PROBLEMA 7.60** Con frecuencia es conveniente representar una señal real arbitraria  $f(t)$ , como una senoide de la forma  $f(t) = A(t) \cos \theta(t)$ , que es una onda modulada en amplitud y en ángulo; en esta expresión,  $A(t)$  se denomina la *función envolvente*,  $\theta(t)$  la *función de fase*, y  $\omega_i = d\theta(t)/dt$  la frecuencia instantánea de la señal  $f(t)$ . Sea  $\hat{f}(t)$  la señal definida en el problema 7.57; entonces la función envolvente  $A(t)$  se puede definir mediante

$$A(t) = \frac{f(t)}{\cos \{\tan^{-1} [\hat{f}(t)/f(t)]\}},$$

y la función de fase se puede definir mediante

$$\theta(t) = \tan^{-1} [\hat{f}(t)/f(t)].$$

Utilizando las anteriores definiciones, expresar  $f(t) = A \operatorname{sen} \omega t$ , donde  $A$  y  $\omega$  son constantes, en la forma de una senoide modulada en amplitud y en ángulo.

*Respuesta:*  $f(t) = A \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right)$ .

**PROBLEMA 7.61** Hallar la frecuencia instantánea de la señal  $f(t) = 1/(1+t^2)$ . [Sugerencia: ver el problema 6.51(b).]

*Respuesta:*  $\omega_i = 1/(1+t^2)$ .

# 8

CAPITULO

## APLICACIONES A PROBLEMAS DE VALOR EN LA FRONTERA

### 8.1 SEPARACION DE VARIABLES Y SERIES DE FOURIER

Muchos problemas de valor en la frontera que se encuentran en las matemáticas de ingeniería, se pueden resolver adecuadamente por el método denominado "separación de variables". Se ilustrará la esencia del método por medio de ejemplos particulares.

**PROBLEMA 8.1** Considerese la siguiente ecuación que regula las vibraciones transversales pequeñas de un cordel elástico que se estira a una longitud  $l$  y luego se fijan sus extremos:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (8.1)$$

donde  $u(t, x)$  es la deflexión de la cuerda, y  $c^2 = T/\rho$ , donde  $\rho$  es la masa de la cuerda por unidad de longitud, y  $T$  la tensión de la cuerda. La ecuación (8.1) se conoce como la *ecuación de onda en una dimensión*; las condiciones de frontera son

$$u(0, t) = 0 \quad \text{y} \quad u(l, t) = 0 \quad \text{para todo valor de } t. \quad (8.2)$$

Las condiciones iniciales son:

$$u(x, 0) = f(x), \quad \text{y} \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x). \quad (8.3)$$

Hallar la solución  $u(x, t)$  de la ecuación (8.1), que satisfaga las condiciones (8.2) y (8.3).

**Solución:** primero supóngase que la solución  $u(x, t)$  de la ecuación (8.1) será de la forma

$$u(x, t) = X(x) T(t), \quad (8.4)$$

que es el producto de dos funciones, una de las cuales depende sólo de la variable  $x$  y la otra sólo de la variable  $t$ . Mediante diferenciación de (8.4), se obtiene

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = X''(x) T(t) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = X(x) T''(t), \quad (8.5)$$

donde las primas denotan diferenciación con respecto al argumento de cada factor.

Sustituyendo (8.5) en la ecuación (8.1), se obtiene

$$X'(x) T(t) = \frac{1}{c^2} X(x) T''(t). \quad (8.6)$$

Dividiendo por  $X(x) T(t)$ , y luego separando las variables una a cada lado de la ecuación, se obtiene

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)}. \quad (8.7)$$

Ahora bien, el primer miembro de la ecuación (8.7) es independiente de  $t$ , y por consiguiente el segundo miembro también lo es; el segundo miembro es independiente de  $x$ , y así mismo debe ser el primero. Por tanto, las expresiones del primero y del segundo miembro de la ecuación (8.7), deben ser iguales a una constante, independiente tanto de  $x$  como de  $t$ .

De esta manera, se tiene

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = -k^2. \quad (8.8)$$

La constante, que se denota por  $-k^2$ , se denomina *constante de separación*. La ecuación (8.8) conduce a dos ecuaciones diferenciales, lineales ordinarias

$$X''(x) + k^2 X(x) = 0, \quad (8.9)$$

$$T''(t) + c^2 k^2 T(t) = 0. \quad (8.10)$$

Ahora se determinan las soluciones  $X(x)$  y  $T(t)$  de las ecuaciones (8.9) y (8.10), de tal manera que  $u(x, t) = X(x) T(t)$ , satisaga las condiciones (8.2) y (8.3). Las soluciones generales de (8.9) y (8.10) son

$$X(x) = A \cos kx + B \operatorname{sen} kx, \quad (8.11)$$

$$T(t) = C \cos kct + D \operatorname{sen} kct. \quad (8.12)$$

Según las condiciones de frontera, dadas por (8.2), se tiene

$$u(0, t) = X(0) T(t) = 0.$$

Aquí se tiene el producto de dos términos, el cual es igual a cero. Puesto que  $T(t)$  no es idénticamente cero, entonces  $X(0)$  debe ser igual a cero. Análogamente, la segunda condición

$$u(l, t) = X(l) T(t) = 0$$

implica que  $X(l) = 0$ .

Por  $X(0) = 0$ , se concluye que

$$X(0) = A \cos 0 + B \operatorname{sen} 0 = A = 0; \quad (8.13)$$

por tanto,

$$X(x) = B \operatorname{sen} kx.$$

Por la segunda condición, se tiene

$$X(l) = B \operatorname{sen} kl = 0.$$

Pero si  $B = 0$ ,  $X(x) = 0$ , y por tanto,  $u(x, t) = 0$ . Esto contradice las condiciones iniciales dadas por (8.3), de que  $u(x, 0) = f(x) \neq 0$ . Por consiguiente, se concluye que

$$\operatorname{sen} kl = 0,$$

de donde,

$$kl = n\pi \quad \text{o} \quad k = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (8.14)$$

De esta manera se consigue un conjunto infinito de soluciones  $X(x) = X_n(x)$ , donde

$$X_n(x) = B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (8.15)$$

La solución (8.12) se convierte en

$$T_n(t) = C_n \cos \frac{cn\pi}{l} t + D_n \operatorname{sen} \frac{cn\pi}{l} t, \quad (8.16)$$

Por tanto, las funciones

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = \sin \frac{n\pi x}{l} \left( E_n \cos \frac{cn\pi}{l} t + F_n \sin \frac{cn\pi}{l} t \right) \quad (8.17)$$

son las soluciones de la ecuación (8.1), que satisfacen las condiciones de frontera dadas por (8.2). En la expresión (8.17), los coeficientes  $E_n$  y  $F_n$  todavía no han sido determinados. Observar que  $B_n C_n = E_n$ , y  $B_n D_n = F_n$ .

Evidentemente, la sola solución  $u_n(x, t)$ , dada en (8.17), no satisfacerá, en general, las condiciones iniciales dadas por (8.3). Como la ecuación (8.1) es lineal, se considera la serie infinita

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \left( E_n \cos \frac{cn\pi}{l} t + F_n \sin \frac{cn\pi}{l} t \right) \quad (8.18)$$

Si ahora se requiere que (8.18) satisfaga las condiciones iniciales dadas en (8.3), se encuentra que los coeficientes  $E_n$  y  $F_n$  deben satisfacer las ecuaciones

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin \frac{n\pi x}{l} = f(x), \quad (8.19)$$

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \frac{cn\pi}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} = g(x). \quad (8.20)$$

La ecuación (8.19) muestra que los coeficientes  $E_n$  deben ser escogidos de tal manera que  $u(x, 0)$  sea la expansión de  $f(x)$  en una serie de Fourier en términos de senos (ver la sección 2-3); es decir,

$$E_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.21)$$

Análogamente, la ecuación (8.20) indica que los coeficientes  $F_n$  se deben escoger de tal manera que  $\partial u(t, x)/\partial t|_{t=0}$  sea la expansión de  $g(x)$  en una serie de Fourier en términos de senos; es decir,

$$F_n \frac{cn\pi}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (8.22)$$

$$F_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.23)$$

Por tanto, la solución deseada es la (8.18), donde los coeficientes  $E_n$  y  $F_n$  son los dados por (8.21) y (8.23).

**PROBLEMA 8.2** Hallar la solución de la ecuación (8.1), con las condiciones de frontera dadas por (8.2), pero con deflexión inicial triangular (figura 8.1) y velocidad inicial cero;

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{l} x & \text{para } 0 < x < \frac{1}{2} l \\ \frac{2k}{l} (l - x) & \text{para } \frac{1}{2} l < x < l, \end{cases} \quad (8.24)$$

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x) = 0. \quad (8.25)$$

**Solución:** puesto que  $g(x) = 0$ , entonces, por (8.23), se concluye que,  $F_n = 0$ . Por el resultado del problema 2.19, se observa que los coeficientes  $E_n$  de (8.21), están dados por (2.63); es decir,

$$E_n = \frac{8k}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

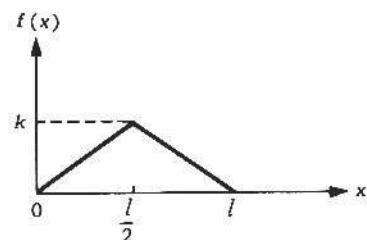


Figura 8.1 Deflexión inicial triangular.

Por tanto, la serie de Fourier de  $f(x)$  en términos de senos, está dada por (2.64); es decir,

$$u(x, 0) = \frac{8k}{\pi^2} \left( \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{3^2} \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^2} \operatorname{sen} \frac{5\pi x}{l} - \dots \right).$$

Luego, por (8.18), se tiene

$$u(x, t) = \frac{8k}{\pi^2} \left( \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} \cos \frac{c\pi t}{l} - \frac{1}{3^2} \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{l} \cos \frac{3c\pi t}{l} + \dots \right). \quad (8.26)$$

**PROBLEMA 8.3** En el problema 8.1, si  $u(x, 0) = f(x)$ , pero  $\partial u(x, t)/\partial t|_{t=0} = g(x)$ , demostrar que la solución de (8.1) se puede expresar como

$$u(x, t) = \frac{1}{2} f_1(x - ct) + \frac{1}{2} f_1(x + ct), \quad (8.27)$$

donde  $f_1(x)$  es la extensión periódica impar de  $f(x)$ , siendo el período  $2l$ . Dar, así mismo, la interpretación física de (8.27).

**Solución:** la solución general de la ecuación (8.1) está dada por (8.18); es decir,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \left( E_n \cos \frac{cn\pi t}{l} + F_n \operatorname{sen} \frac{cn\pi t}{l} \right). \quad [8.18]$$

Puesto que la velocidad inicial  $g(x)$ , es cero, por (8.22) se deduce que los coeficientes  $F_n$  son cero, y la expresión (8.18) se reduce a

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{cn\pi t}{l}. \quad (8.28)$$

Utilizando la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen} A \cos B = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(A - B) + \operatorname{sen}(A + B)],$$

se sigue que

$$\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{cn\pi t}{l} = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} (x - ct) + \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} (x + ct) \right]$$

Por tanto, se puede expresar (8.28) en la forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} (x - ct) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} (x + ct). \quad (8.29)$$

Comparando con (8.19), se concluye que las dos series anteriores son las obtenidas sustituyendo  $(x - ct)$  y  $(x + ct)$ , respectivamente, por la variable  $x$  en la expansión de  $f(x)$ , dada por (8.19). Por consiguiente,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} f_1(x - ct) + \frac{1}{2} f_1(x + ct),$$

donde  $f_1(x)$  es la extensión periódica impar de  $f(x)$ , siendo el período  $2l$ , el cual se muestra en la figura 8.2.

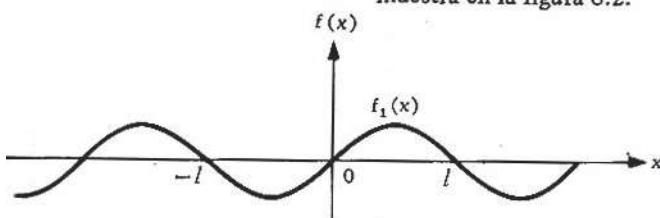


Figura 8.2 Extensión periódica de  $f(x)$  del problema 8.3.

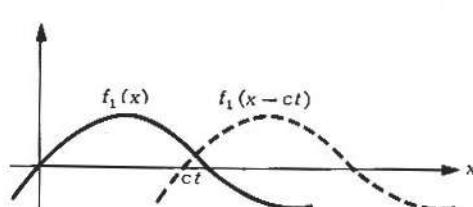


Figura 8.3 Gráfica de  $f_1(x)$  y  $f_1(x - ct)$  del problema 8.3.

La gráfica de  $f_1(x - ct)$  se obtiene de la gráfica de  $f_1(x)$ , desplazándola  $ct$  unidades a la derecha (figura 8.3). Se reconoce, así mismo, que es posible permanecer en un valor particular de la función conservando el argumento,  $x - ct$ , constante; es decir, con movimiento en la dirección  $x$  positiva y velocidad  $c$  mientras  $t$  aumenta. Esto significa que  $f_1(x - ct)$ , ( $c > 0$ ) representa una onda que se propaga hacia la derecha. Análogamente  $f_1(x + ct)$  representa una onda que se propaga hacia la izquierda con velocidad  $c$ . Por consiguiente, la solución  $u(x, t)$  es la superposición de estas dos ondas.

**PROBLEMA 8.4** En problemas de flujo de calor en estado estacionario, o en problemas de potencial electrostático en un plano, siendo el plano  $x - y$ , la función de la distribución de temperatura, o la función de potencial electrostático  $u(x, y)$  en una región libre de fuentes, satisface la siguiente ecuación en dos dimensiones:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0. \quad (8.30)$$

Esta ecuación se conoce como *ecuación de Laplace*.

Hallar la solución de (8.30) con las siguientes condiciones de frontera:

$$u(x, y) = 0 \text{ en } x = 0, y = 0, \quad y = b; \quad (8.31)$$

$$u(x, y) = U_0 \text{ en } x = d, \quad 0 \leq y \leq b. \quad (8.32)$$

**Solución:** supóngase que la solución de la ecuación (8.30) es de la forma

$$u(x, y) = X(x)Y(y), \quad (8.33)$$

donde  $X(x)$  es función de  $x$  solamente, y  $Y(y)$  es función de  $y$  solamente. Si se sustituye (8.33) en (8.30), se obtiene

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0. \quad (8.34)$$

Dividiendo por  $X(x)$   $Y(y)$  y separando las variables, se tiene

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0 \quad (8.35)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}. \quad (8.36)$$

El primer miembro de la ecuación (8.36) es independiente de  $y$ , y por consiguiente, el segundo miembro también lo es. El segundo miembro es independiente de  $x$ , y el primer miembro también debe serlo. Esto significa que las expresiones en ambos miembros de la ecuación (8.36), deben ser independientes de las dos variables  $x$  y  $y$ , e iguales a una constante. Si la constante de separación se denota por  $k^2$ , entonces,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = k^2. \quad (8.37)$$

El signo de la constante de separación se escogió de tal manera que las condiciones de frontera pudieran ser satisfechas. La ecuación (8.37) conduce a las dos ecuaciones diferenciales lineales

$$X''(x) - k^2 X(x) = 0, \quad (8.38)$$

$$Y''(y) + k^2 Y(y) = 0. \quad (8.39)$$

Las soluciones generales de (8.38) y (8.39) son

$$X(x) = A e^{kx} + B e^{-kx}, \quad (8.40)$$

$$Y(y) = C \cos ky + D \sin ky. \quad (8.41)$$

Según las condiciones de frontera, dadas por (8.31), se tiene

$$\begin{aligned} X(0) &= A + B = 0, \\ Y(0) &= C = 0, \quad Y(b) = D \operatorname{sen} kb = 0. \end{aligned}$$

De donde,

$$A = -B, \quad (8.42)$$

$$\operatorname{sen} kb = 0,$$

de lo cual se deduce que

$$kb = n\pi \quad \text{o} \quad k = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.43)$$

De esta manera se obtiene un conjunto infinito de soluciones  $Y(y) = Y_n(y)$ , donde

$$Y_n(y) = D_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.44)$$

Las soluciones generales correspondientes a (8.40) se convierten en

$$\begin{aligned} X_n(x) &= A_n(e^{kx} - e^{-kx}) = 2A_n \operatorname{senh} kx \\ &= 2A_n \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (8.45)$$

Por tanto, las funciones

$$u_n(x, y) = X_n(x) Y_n(y) = E_n \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.46)$$

son las soluciones de (8.30) que satisfacen las condiciones de frontera (8.31). Obsérvese que  $2A_n D_n$  se reemplazó por la nueva constante arbitraria  $E_n$ .

Evidentemente una sola solución,  $u_n(x, y)$ , de (8.46), no satisfacerá la otra condición de frontera dada por (8.32). Dado que la ecuación (8.30) es lineal, se considera la serie infinita

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}. \quad (8.47)$$

Si se aplica la condición de frontera (8.32), se obtiene

$$\begin{aligned} u(d, y) &= U_o = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \operatorname{senh} \frac{n\pi d}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}, \quad 0 < y < b, \end{aligned} \quad (8.48)$$

donde

$$c_n = E_n \operatorname{senh} \frac{n\pi d}{b}.$$

La ecuación (8.48) es una serie de Fourier en términos del seno, y los coeficientes  $c_n$  se pueden determinar como [ver (2.51)]

$$c_n = \frac{2}{b} \int_0^b U_o \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dy = \frac{2U_o}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} \frac{4U_o}{n\pi}, & n = 1, 3, \dots \\ 0, & n = 2, 4, \dots \end{cases}$$

sin embargo,

$$c_n = E_n \operatorname{senh} \frac{n\pi d}{b},$$

y por consiguiente,

$$E_n = \frac{4U_o}{n\pi \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi d}{b} \right)}, \quad n = 1, 3, 5, \dots, \quad (8.49)$$

lo cual se puede sustituir en (8.47) para obtener la solución deseada:

$$u(x, y) = \frac{4U_o}{\pi} \sum_{n=\text{odd}}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\operatorname{senh} \left( \frac{n\pi x}{b} \right)}{\operatorname{senh} \left( \frac{n\pi d}{b} \right)} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}. \quad (8.50)$$

En esta sección se han obtenido soluciones formales de ciertas ecuaciones diferenciales parciales, lineales y de segundo orden, que satisfacen las condiciones iniciales y de frontera dadas, pero no se ha demostrado que las soluciones obtenidas sean únicas. Dado que la prueba de unicidad es complicada, e infelizmente no existe un teorema general al respecto, no se probará la unicidad de las soluciones obtenidas en esta sección, ni en las secciones siguientes.

## 8.2 VIBRACION

La vibración de una cuerda y la ecuación que regula esa vibración, es decir, la ecuación de onda en una dimensión, se estudiaron en el problema 8.1. En las páginas siguientes se aplicará la técnica del análisis de Fourier a varios problemas de vibración.

**PROBLEMA 8.5** La ecuación que regula las vibraciones transversales pequeñas de una membrana, está dada por

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (8.51)$$

donde  $u(x, y, t)$  es la deflexión de la membrana, y  $c^2 = T/\rho$ , siendo  $\rho$  la masa de la membrana por unidad de área, y  $T$  la tensión de la membrana. La ecuación (8.51) se denomina *ecuación de onda en dos dimensiones*. Considerar la membrana rectangular de la figura 8.4 y hallar la solución de (8.51) que satisface la siguiente condición de frontera:

$u(x, y, t) = 0$  en la frontera de toda la membrana y para todo valor de  $t$ , esto es,

$$u(x, y, t) = 0 \text{ para } x = 0, x = a, y = 0, y = b. \quad (8.52)$$

Las condiciones iniciales son

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad (8.53)$$

$$\left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x, y). \quad (8.54)$$

donde  $f(x, y)$  y  $g(x, y)$  son el desplazamiento y la velocidad inicial de la membrana, respectivamente.

**Solución:** supongase que la solución de (8.51) es de la forma

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t). \quad (8.55)$$

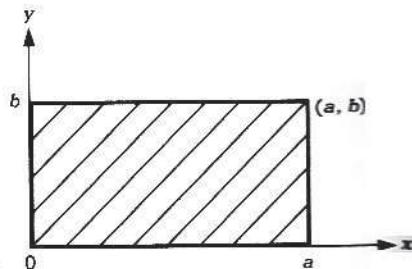


Figura 8.4 Una membrana rectangular.

Si se sustituye (8.55) en (8.51), se obtiene

$$X''(x)Y(y)T(t) + X(x)Y''(y)T(t) - \frac{1}{c^2} X(x)Y(y)T''(t) = 0, \quad (8.56)$$

donde las primas denotan diferenciación con respecto a los argumentos de cada función.

Si se divide por  $X(x)Y(y)T(t)$  y se separan las variables, se obtiene

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)}. \quad (8.57)$$

Como el segundo miembro de (8.57) depende sólo de  $t$ , mientras que el primer miembro no depende de  $t$ , las expresiones de ambos miembros deben ser iguales a una constante.

Denotando esta constante por  $-k^2$ , se tiene

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -k^2.$$

La anterior ecuación conduce a las dos ecuaciones diferenciales

$$T''(t) + c^2 k^2 T(t) = 0, \quad (8.58)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -k_x^2,$$

o

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -k_x^2 - \frac{Y''(y)}{Y(y)}. \quad (8.59)$$

Una vez más, como el primer miembro de (8.59) depende sólo de  $x$ , mientras que el segundo miembro depende sólo de  $y$ , las expresiones de ambos miembros deben ser iguales a una constante, la cual debe ser negativa (de otra manera las condiciones de frontera no podrían ser satisfechas); si  $-k_y^2$ , entonces, se tiene

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -k_x^2 - \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -k_y^2.$$

La anterior expresión conduce a las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$X''(x) + k_x^2 X(x) = 0, \quad (8.60)$$

$$Y''(y) + k_y^2 Y(y) = 0, \quad (8.61)$$

donde

$$k_y^2 = k^2 - k_x^2 \quad \text{o} \quad k_x^2 + k_y^2 = k^2. \quad (8.62)$$

Las soluciones generales de (8.58), (8.60) y (8.61) tienen las formas

$$X(x) = A \cos k_x x + B \sin k_x x, \quad (8.63)$$

$$Y(y) = C \cos k_y y + D \sin k_y y, \quad (8.64)$$

$$T(t) = E \cos k t + F \sin k t. \quad (8.65)$$

Por la condición de frontera (8.52), se tiene

$$X(0) = 0, \quad X(a) = 0, \quad Y(0) = 0, \quad Y(b) = 0.$$

Por consiguiente,

$$X(0) = A = 0, \quad X(a) = B \sin k_x a = 0,$$

de lo cual se deduce que

$$k_x a = m\pi \quad \text{o} \quad k_x = \frac{m\pi}{a} \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (8.66)$$

Análogamente  $Y(0) = C = 0$  y  $Y(b) = D \operatorname{sen} k_y b = 0$ , de donde,

$$k_y b = n\pi \quad 0 \quad k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.67)$$

De esta manera se obtienen las soluciones

$$X_m(x) = B_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

$$Y_n(y) = D_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Puesto que  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ ,

$$k^2 = k_{mn}^2 = \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} \quad (8.68)$$

y la solución general correspondiente de (8.58) es

$$T_{mn}(t) = E_{mn} \cos k_{mn} ct + F_{mn} \operatorname{sen} k_{mn} ct.$$

Se sigue que las funciones

$$\begin{aligned} u_{mn}(x, y, t) &= X_m(x) Y_n(y) T_{mn}(t) \\ &= (G_{mn} \cos k_{mn} ct + H_{mn} \operatorname{sen} k_{mn} ct) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}, \end{aligned} \quad (8.69)$$

donde  $m = 1, 2, \dots$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , y con  $k_{mn}$  dada por (8.68), son soluciones de la ecuación de onda (8.51), las cuales son cero en la frontera de la membrana rectangular de la figura 8.4. Ahora se deben evaluar las constantes arbitrarias  $G_{mn}$  y  $H_{mn}$ .

Para obtener la solución que también satisface las condiciones iniciales (8.53) y (8.54), se procede en forma análoga a la utilizada en el problema 8.1.

Considérese la siguiente serie doble

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(x, y, t) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (G_{mn} \cos k_{mn} ct + H_{mn} \operatorname{sen} k_{mn} ct) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (8.70)$$

Por (8.70) y (8.53), se tiene

$$u(x, y, 0) = f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} G_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}. \quad (8.71)$$

La serie (8.71) se denomina *serie doble de Fourier*, y representa a  $f(x, y)$  en la región  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$ . Los coeficientes de Fourier  $G_{mn}$ , de  $f(x, y)$  en (8.71), se pueden determinar como sigue.

Si se hace

$$f_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{mn} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}, \quad (8.72)$$

se puede expresar (8.71) en la forma

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}. \quad (8.73)$$

Para un valor fijo de  $y$ , la expresión (8.73) es la serie de Fourier en términos del seno, de la función  $f(x, y)$  y se considera como una función de  $x$ . Por (2.52), se sigue que los coeficientes de esta expansión están dados por

$$J_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} dx, \quad (8.47)$$

La expresión (8.72) es la serie de Fourier en términos del seno, de  $J_m(y)$  y por consiguiente, los coeficientes  $G_{mn}$  están dados por

$$G_{mn} = \frac{2}{b} \int_0^b J_m(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dy. \quad (8.75)$$

Sustituyendo (8.74) en (8.75), se obtiene

$$G_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dx dy, \quad (8.76)$$

donde  $m = 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots$

Para determinar  $H_{mn}$  de (8.70), se diferencia (8.70) término a término con respecto a  $t$ , y se utiliza (8.54).

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x, y)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} H_{mn} c k_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}. \quad (8.77)$$

Procediendo como antes, se tiene

$$H_{mn} = \frac{4}{ab ck_{mn}} \int_0^b \int_0^a g(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dx dy, \quad (8.78)$$

donde  $m = 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots$

De donde, (8.70), con los coeficientes dados por (8.76) y (8.78), es la solución deseada.

**PROBLEMA 8.6** Hallar la solución de (8.51), con las siguientes condiciones de frontera y condiciones iniciales:

$$u(x, y, t) = 0 \text{ para } x = 0, \quad x = a, \quad y = 0, \quad y = b,$$

$$u(x, y, 0) = xy(x - a)(y - b),$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

**Solución:** por (8.70), se tiene

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (G_{mn} \cos k_{mn} ct + H_{mn} \operatorname{sen} k_{mn} ct) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}.$$

si se hace  $t = 0$ , se tiene

$$u(x, y, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} G_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}.$$

De acuerdo con (8.76), se tiene

$$\begin{aligned}
 G_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a u(x, y, 0) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \\
 &= \frac{4}{ab} \int_0^a x(x-a) \sin \frac{m\pi x}{a} dx \int_0^b y(y-b) \sin \frac{n\pi y}{b} dy \\
 &= \frac{4}{ab} \frac{2a^3}{m^3 \pi^3} [(-1)^m - 1] \frac{2b^3}{n^3 \pi^3} [(-1)^n - 1] \\
 &= \begin{cases} \frac{64a^2 b^2}{\pi^6 m^3 n^3} & \text{si } n \text{ y } m \text{ son impares} \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Puesto que  $\partial u / \partial t|_{t=0} = 0$ , y de acuerdo con (8.78),  $H_{mn} = 0$ , la solución final es

$$u(x, y, t) = \frac{64a^2 b^2}{\pi^6} \sum_{m=\text{impar}}^{\infty} \sum_{m=\text{impar}}^{\infty} \frac{1}{m^3 n^3} \cos k_{mn} ct \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (8.79)$$

donde  $k_{mn}^2 = (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2$ .

**PROBLEMA 8.7** Las pequeñas vibraciones transversales libres, de una viga uniforme sujeta por un extremo, que se extiende a lo largo del eje  $x$ , está regulada por la ecuación de cuarto orden

$$\frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (8.80)$$

donde  $c^2 = EI/(\rho A)$ ,  $E$  = módulo de elasticidad de Young,  $I$  = momento de inercia de la sección transversal de la viga,  $\rho$  = densidad,  $A$  = área seccional. Hallar la solución de (8.80) que satisface las siguientes condiciones:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad (8.81)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0, \quad (8.82)$$

$$u(x, 0) = x(l-x), \quad (8.83)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (8.84)$$

**Solución:** supóngase que la solución de (8.80) será de la forma

$$u(x, t) = X(x) T(t). \quad (8.85)$$

Sustituyendo (8.85) en (8.80), se tiene

$$X^{(4)}(x) T(t) + \frac{1}{c^2} X(x) T''(t) = 0.$$

Dividiendo por  $X(x) T(t)$  y separando las variables, se obtiene

$$\frac{X^{(4)}(x)}{X(x)} = -\frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)}. \quad (8.86)$$

Puesto que el primer miembro de (8.86) depende sólo de  $x$ , y el segundo miembro depende sólo de  $t$ , las dos expresiones en ambos miembros, deben ser iguales a una constante. La constante, por ejemplo  $k^4$ , debe ser positiva, por consideraciones físicas; en particular, para hacer a  $T(t)$  oscilatorio. De esta manera, se obtienen las dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$X^{(4)}(x) - k^4 X(x) = 0, \quad (8.87)$$

$$T''(t) + c^2 k^4 T(t) = 0. \quad (8.88)$$

Las soluciones generales de (8.87) y (8.88) son

$$X(x) = A \cos kx + B \operatorname{sen} kx + C \cosh kx + D \operatorname{senh} kx, \quad (8.89)$$

$$T(t) = E \cos k^2 ct + F \operatorname{sen} k^2 ct. \quad (8.90)$$

Ahora bien, por las condiciones de frontera (8.81), se obtiene

$$X(0) = A + C = 0, \quad (8.91)$$

$$X(l) = A \cos kl + B \operatorname{sen} kl + C \cosh kl + D \operatorname{senh} kl = 0. \quad (8.92)$$

Puesto que

$$X''(x) = -k^2 (A \cos kx + B \operatorname{sen} kx - C \cosh kx - D \operatorname{senh} kx),$$

utilizando las condiciones de frontera (8.82), se tiene

$$X''(0) = -k^2 (A - C) = 0, \quad (8.93)$$

$$X''(l) = -k^2 (A \cos kl + B \operatorname{sen} kl - C \cosh kl - D \operatorname{senh} kl) = 0. \quad (8.94)$$

Por (8.91) y (8.93),  $A + C = 0$ ,  $A - C = 0$ , y por tanto,  $A = C = 0$ . Entonces, por (8.92) y (8.94), se tiene

$$B \operatorname{sen} kl + D \operatorname{senh} kl = 0,$$

$$B \operatorname{sen} kl - D \operatorname{senh} kl = 0,$$

y por tanto,

$$B \operatorname{sen} kl = 0, \quad D \operatorname{senh} kl = 0.$$

La segunda condición da  $D = 0$ , dado que si  $\operatorname{senh} kl = 0$ , entonces  $k = 0$ , y por tanto,  $X(x) = 0$ , lo cual daría una solución trivial. Entonces, por la primera condición,

$$\operatorname{sen} kl = 0,$$

esto es,

$$kl = n\pi \quad \text{o} \quad k = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (8.95)$$

De esta manera se obtiene el conjunto infinito de soluciones  $X(x) = X_n(x)$ ; es decir,

$$X_n(x) = B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (8.96)$$

Puesto que

$$T'(t) = k^2 c (-E \operatorname{sen} k^2 ct + F \cos k^2 ct),$$

por la condición inicial (8.84), se obtiene

$$T'(0) = k^2 c F = 0.$$

Por consiguiente,  $F = 0$ , y las soluciones correspondientes  $T_n(t)$  se convierten en

$$T_n(t) = E_n \cos \frac{n^2 \pi^2 ct}{l^2}. \quad (8.97)$$

Por consiguiente, las funciones

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n^2 \pi^2 ct}{l^2}, \quad (8.98)$$

donde  $b_n = B_n E_n$ , son las soluciones de (8.80) que satisfacen las condiciones de frontera (8.81), (8.82), y la condición de velocidad inicial cero, dada por (8.84).

Para satisfacer la condición inicial dada por (8.83), se considera

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n^2 \pi^2 c t}{l^2}. \end{aligned} \quad (8.99)$$

Por tanto, según (8.83), se tiene

$$u(x, 0) = x(l - x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}. \quad (8.100)$$

De esta manera los coeficientes  $b_n$  son los coeficientes de Fourier en términos del seno, de la función  $x(l - x)$ , y están dados por

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l x(l - x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \begin{cases} \frac{8 l^2}{n^3 \pi^3} & \text{para } n \text{ impar} \\ 0 & \text{para } n \text{ par.} \end{cases} \end{aligned} \quad (8.101)$$

La solución final es, por consiguiente,

$$u(x, t) = \frac{8 l^2}{\pi^3} \sum_{n=\text{impar}}^{\infty} \frac{1}{n^3} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n^2 \pi^2 c t}{l^2}. \quad (8.102)$$

En el siguiente ejemplo se considerará la vibración de una cuerda infinita; en este caso no se tienen condiciones de frontera, pero sí se tienen condiciones iniciales.

**PROBLEMA 8.8** Determinar el desplazamiento  $u(x, t)$ , de una cuerda infinita con velocidad inicial cero. El desplazamiento inicial está dado por  $f(x)$ , para  $-\infty < x < \infty$ .

**Solución:** la función  $u(x, t)$  satisface la ecuación de onda de una dimensión

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad [8.1]$$

y las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (8.103)$$

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (8.104)$$

Procediendo como en el problema 8.1, se sustituye

$$u(x, t) = X(x) T(t)$$

en la ecuación (8.1), lo cual conduce a dos ecuaciones diferenciales lineales

$$X''(x) + k^2 X(x) = 0, \quad (8.105)$$

$$T''(t) + c^2 k^2 T(t) = 0. \quad (8.106)$$

Las funciones

$$\begin{aligned} X(x) &= A \cos kx + B \operatorname{sen} kx, \\ T(t) &= C \cos kct + D \operatorname{sen} kct \end{aligned}$$

son las soluciones de (8.105) y (8.106), respectivamente.

Utilizando la condición inicial (8.104), se obtiene

$$T'(0) = kc D = 0.$$

De donde,  $D = 0$ , y

$$u(x, t; k) = (F \cos kx + G \operatorname{sen} kx) \cos kct \quad (8.107)$$

es una solución de (8.1) que satisface la condición (8.104).

Cualquier serie de las funciones (8.107), hallada de la manera usual, tomando  $k$  como múltiplos de un número fijo, conduciría a una función que es periódica en  $x$  cuando  $t = 0$ . Sin embargo, como  $f(x)$  en (8.103) no se supone periódica, es natural usar la integral de Fourier en el presente caso en vez de las series de Fourier.

Puesto que  $F$  y  $G$  en (8.107) son arbitrarias, se pueden considerar como funciones de  $k$ , y expresar,  $F = F(k)$ , y  $G = G(k)$ . Como la ecuación de onda (8.1) es lineal y homogénea, la función

$$u(x, t) = \int_0^\infty u(x, t; k) dk = \int_0^\infty [F(k) \cos kx + G(k) \operatorname{sen} kx] \cos kct dk \quad (8.108)$$

también es solución de (8.1).

Por (8.103), se tiene

$$u(x, 0) = f(x) = \int_0^\infty [F(k) \cos kx + G(k) \operatorname{sen} kx] dk. \quad (8.109)$$

Ahora bien, por el teorema de la integral de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega(t-x) dx \right] d\omega, \quad [4.12]$$

se puede expresar

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cos k(x-y) dy \right] dk \quad (8.110)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(y) (\cos kx \cos ky + \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} ky) dy \right] dk$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[ \cos kx \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cos ky dy + \operatorname{sen} kx \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \operatorname{sen} ky dy \right] dk. \quad (8.111)$$

Si se hace

$$F(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cos ky dy, \quad G(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \operatorname{sen} ky dy,$$

entonces la expresión (8.111) se puede expresar en esta forma:

$$f(x) = \int_0^\infty [F(k) \cos kx + G(k) \operatorname{sen} kx] dk. \quad (8.112)$$

Comparando (8.112) y (8.109), se puede expresar (8.109) como

$$u(x, 0) = f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cos k(x-y) dy \right] dk. \quad (8.113)$$

Entonces, por (8.108), se tiene

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cos k(x-y) \cos kct dy \right] dk. \quad (8.114)$$

Mediante la identidad trigonométrica

$$\cos k(x-y) \cos kct = \frac{1}{2} [\cos k(x+ct-y) + \cos k(x-ct-y)],$$

la ecuación (8.114) se convierte en

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[ \int_{-\infty}^\infty f(y) \cos k(x+ct-y) dy \right] dk \\ + \frac{1}{2} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[ \int_{-\infty}^\infty f(y) \cos k(x-ct-y) dy \right] dk. \quad (8.115)$$

Si se reemplaza  $x$  por  $x \pm ct$  en (8.110), se tiene

$$f(x \pm ct) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[ \int_{-\infty}^\infty f(y) \cos k(x \pm ct - y) dy \right] dk,$$

y comparando esto con (8.115), se obtiene

$$u(x, t) = \frac{1}{2} f(x+ct) + \frac{1}{2} f(x-ct) \quad (8.116)$$

que es la ecuación ya conocida, de las ondas viajeras (ver el problema 8.3).

En los capítulos anteriores se ha tratado el par de transformadas de Fourier,  $f(t)$  y  $F(\omega)$ , la primera de las cuales denota una función del tiempo, y la segunda una función de la frecuencia. El uso de la transformada de Fourier no está limitado, bajo ninguna razón, a los dominios de tiempo y frecuencia. Si las funciones  $f(x)$  y  $F(s)$  forman un par de transformadas de Fourier, entonces

$$F(s) = \mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-isx} dx, \quad (8.117)$$

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty F(s) e^{isx} ds. \quad (8.118)$$

En el siguiente ejemplo se aplicará la técnica de la transformada de Fourier, para resolver un problema de valor inicial.

**PROBLEMA 8.9** Utilizando la transformada de Fourier resolver nuevamente el problema 8.8.

**Solución:** sea la transformada de Fourier de la solución  $u(x, t)$  con respecto a  $x$ , la dada por

$$U(s, t) = \mathcal{F}[u(x, t)] = \int_{-\infty}^\infty u(x, t) e^{-isx} dx; \quad (8.119)$$

entonces,

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}[U(s, t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty U(s, t) e^{isx} ds. \quad (8.120)$$

Se supondrá que las soluciones  $u(x, t)$  y  $\partial u(x, t)/\partial x$ , son pequeñas cuando  $|x|$  se hace grande, y tienden a cero si  $x \rightarrow \pm \infty$ .

Sean

$$u_{xx}(x, t) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad u_x(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x},$$

$$u_{tt}(x, t) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \quad u_t(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}.$$

Mediante integraciones parciales sucesivas se encuentra que la transformada de Fourier es

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[u_{xx}(x, t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x, t) e^{-j sx} dx \\
 &= \int_{(x=-\infty)}^{(x=\infty)} e^{-j sx} du_x(x, t) \\
 &= e^{-j sx} u_x(x, t) \Big|_{-\infty}^{\infty} + js \int_{-\infty}^{\infty} u_x(x, t) e^{-j sx} dx \\
 &= js \int_{(x=-\infty)}^{(x=\infty)} e^{-j sx} du(x, t) \\
 &= js e^{-j sx} u(x, t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - js (-js) \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-j sx} dx \\
 &= -s^2 U(s, t)
 \end{aligned} \tag{8.121}$$

dado que  $u_x(\pm\infty, t) = u(\pm\infty, t) = 0$ .

La transformada de Fourier de  $u_{tt}(x, t)$  es (puesto que se está tomando la transformada con respecto a  $x$ )

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[u_{tt}(x, t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{tt}(x, t) e^{-j sx} dx \\
 &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-j sx} dx \\
 &= U_{tt}(s, t).
 \end{aligned} \tag{8.122}$$

Aplicando ahora la transformada de Fourier a la ecuación de onda (8.1) y por (8.121) y (8.122), se obtiene

$$-s^2 U(s, t) - \frac{1}{c^2} U_{tt}(s, t) = 0,$$

o

$$\frac{\partial^2 U(s, t)}{\partial t^2} + s^2 c^2 U(s, t) = 0 \tag{8.123}$$

que es la ecuación de la transformada  $U(s, t)$ .

La solución general de (8.123) es

$$U(s, t) = A(s) e^{j s c t} + B(s) e^{-j s c t}, \tag{8.124}$$

donde  $A(s)$  y  $B(s)$  son constantes con respecto a  $t$ . Aplicando la transformada de Fourier a las condiciones iniciales (8.103) y (8.104) se obtiene

$$\begin{aligned}
 U(s, 0) = \mathcal{F}[u(x, 0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) e^{-j sx} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j sx} dx \\
 &= F(s),
 \end{aligned} \tag{8.125}$$

$$U_t(s, 0) = \mathcal{F}[u_t(x, t)|_{t=0}] = 0. \tag{8.126}$$

Por las relaciones (8.125) y (8.126),  $A(s)$  y  $B(s)$  de (8.124), se pueden evaluar ahora, de la siguiente manera:

$$F(s) = U(s, 0) = A(s) + B(s), \quad 0 = U_t(s, 0) = jsc [A(s) - B(s)].$$

Resolviendo  $A(s)$  y  $B(s)$  en estas dos ecuaciones algebraicas, se obtiene

$$A(s) = B(s) = \frac{1}{2} F(s).$$

Por tanto, según (8.124), se tiene

$$U(s, t) = \frac{1}{2} F(s) e^{jst} + \frac{1}{2} F(s) e^{-jst}. \quad (8.127)$$

La solución deseada  $u(x, t)$ , es la transformada inversa de Fourier de  $U(s, t)$ , en particular,

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}[U(s, t)] = \frac{1}{2} \mathcal{F}^{-1}[F(s) e^{jst}] + \frac{1}{2} \mathcal{F}^{-1}[F(s) e^{-jst}]. \quad (8.128)$$

Por medio de la propiedad de desplazamiento en el tiempo, dada por (4.73), se tiene

$$\mathcal{F}^{-1}[F(s) e^{jst}] = f(x + ct), \quad (8.129)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(s) e^{-jst}] = f(x - ct). \quad (8.130)$$

De esta manera,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} f(x + ct) + \frac{1}{2} f(x - ct)$$

que es el mismo resultado obtenido en (8.116).

### 8.3 CONDUCCION DE CALOR

El flujo de calor en un cuerpo de material homogéneo está determinado por la ecuación del calor

$$\nabla^2 u(x, y, z, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} = 0, \quad (8.131)$$

donde  $u(x, y, z, t)$  es la temperatura del cuerpo, y  $c^2 = K/(\rho\alpha)$ , siendo  $K$  la conductividad térmica,  $\alpha$  el calor específico, y  $\rho$  la densidad del material del cuerpo. El laplaciano de  $u$  es  $\nabla^2 u$ , y en coordenadas rectangulares se puede expresar como

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (8.132)$$

**PROBLEMA 8.10** Considerese la temperatura de una barra uniforme de longitud  $l$ , que está orientada a lo largo del eje  $x$ . Ambos extremos de la barra se mantienen a una temperatura de cero grados. Si la temperatura inicial de la barra es

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{para } 0 < x \leq \frac{1}{2} l \\ l-x & \text{para } \frac{1}{2} l < x < l, \end{cases}$$

donde  $x$  es la distancia medida desde uno de los extremos, hallar la distribución de temperatura después de un tiempo  $t$ .

**Solución:** puesto que la temperatura  $u(x, t)$  depende sólo de  $x$  y  $t$ , la ecuación de calor (8.131) se convierte en la denominada ecuación de calor en una dimensión

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 0. \quad (8.133)$$

Las condiciones de frontera son

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad (8.134)$$

y la condición inicial es

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} x & \text{para } 0 < x < \frac{l}{2} \\ l - x & \text{para } \frac{l}{2} < x < l. \end{cases} \quad (8.135)$$

Nuevamente, suponer que la solución sea de la forma del producto

$$u(x, t) = X(x) T(t) \quad (8.136)$$

y reemplazar en la ecuación (8.133). De donde,

$$X''(x) T(t) - \frac{1}{c^2} X(x) T'(t) = 0. \quad (8.137)$$

Dividiendo por  $X(x) T(t)$  y separando variables, se obtiene

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{T'(t)}{T(t)}. \quad (8.138)$$

La expresión del primer miembro depende solamente de  $x$ , mientras que la expresión del segundo sólo depende de  $t$ , por consiguiente, se concluye que ambas expresiones deben ser igual a una constante. Esta constante, por ejemplo  $K$ , debe ser negativa pues si  $K > 0$  la única solución  $u(x, t) = X(x) T(t)$  que satisface (8.134) es  $u(x, t) = 0$ . Esto se demuestra como sigue: si

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = K = k^2,$$

entonces

$$X''(x) - k^2 X(x) = 0,$$

y la solución general será

$$X(x) = A e^{kx} + B e^{-kx}.$$

Aplicando la condición de frontera (8.134), se obtiene

$$A + B = 0 \quad \text{y} \quad A e^{kl} + B e^{-kl} = 0.$$

Resolviendo para  $A$  y  $B$ , se tiene que  $A = -B = 0$ . De esta manera  $X(x) = 0$ , y en consecuencia,  $u(x, t) = 0$ , lo cual da una solución trivial. Por tanto, haciendo  $K = -k^2$ , se tiene

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = -k^2, \quad (8.139)$$

y de aquí se obtienen dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$X''(x) + k^2 X(x) = 0, \quad (8.140)$$

$$T'(t) + c^2 k^2 T(t) = 0. \quad (8.141)$$

Las soluciones generales de (8.140) y (8.141) son

$$X(x) = A \cos kx + B \operatorname{sen} kx, \quad (8.142)$$

$$T(t) = C e^{-c^2 k^2 t} \quad (8.143)$$

Por la condición de frontera (8.134), se tiene

$$X(0) = A = 0,$$

$$X(l) = B \operatorname{sen} kl = 0.$$

De esta manera,

$$kl = n\pi \quad \text{o} \quad k = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.144)$$

Se obtienen así las soluciones de (8.140), que satisfacen la condición (8.134) como

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.145)$$

Las soluciones correspondientes de (8.141) son

$$T_n(t) = C_n e^{-c^2 k^2 t} = C_n e^{-c^2 n^2 \pi^2 l^2 t/l^2} = C_n e^{-\lambda_n^2 t}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (8.146)$$

donde

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{l}.$$

Por tanto, las funciones

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = b_n e^{-\lambda_n^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad n = 1, 2, \dots, \quad (8.147)$$

donde  $b_n = B_n C_n$ , son las soluciones de la ecuación de calor (8.133) que satisfacen la condición (8.134).

Para hallar una solución que también satisfaga la condición inicial, dada por (8.135), se considera la serie

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}, \end{aligned} \quad (8.148)$$

Por (8.135) y (8.148), se obtiene

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (8.149)$$

Por tanto, para que (8.148) satisfaga la condición (8.135), los coeficientes  $b_n$  deben ser escogidos de tal manera que (8.149) sea la expansión en series de Fourier en términos del seno de  $f(x)$ , es decir,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{2}{l} \left[ \int_0^{l/2} x \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \int_{l/2}^l (l-x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right] \\ &= \begin{cases} 0 & \text{para } n \text{ par} \\ \frac{4l}{n^2 \pi^2} & \text{para } n = 1, 5, 9, \dots \\ -\frac{4l}{n^2 \pi^2} & \text{para } n = 3, 7, 11, \dots \end{cases} \end{aligned} \quad (8.150)$$

Por consiguiente, la solución es

$$u(x, t) = \frac{4l}{\pi^2} \left[ \sin \frac{\pi x}{l} e^{-(\pi^2/l^2)t} - \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi x}{l} e^{-(9\pi^2/l^2)t} + \dots \right]. \quad (8.151)$$

Se observa que la solución  $u(x, t)$ , dada por (8.151), se hace pequeña después de un largo período de tiempo, es decir, tiende a cero a medida que  $t \rightarrow \infty$ .

En el siguiente ejemplo se considerarán soluciones de la ecuación de calor en una dimensión, dada por (8.133), en el caso de una barra que se extiende hacia el infinito en ambos extremos. En este caso, similar al de la vibración de una cuerda infinita (problema 8.8), no se tienen condiciones de frontera, solamente las condiciones iniciales.

**PROBLEMA 8.11** Hallar la distribución de temperatura  $u(x, t)$  en el caso de una barra infinita. La distribución inicial de temperatura está dada por  $f(x)$  para  $-\infty < x < \infty$ .

**Solución:** la función  $u(x, t)$  satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 0. \quad [8.133]$$

y la condición inicial es

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{para } -\infty < x < \infty. \quad (8.152)$$

Procediendo como en el problema 8.10, se reemplaza

$$u(x, t) = X(x) T(t)$$

en la ecuación (8.133), lo cual conduce a dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$X''(x) + k^2 X(x) = 0, \quad (8.153)$$

$$T'(t) + c^2 k^2 T(t) = 0. \quad (8.154)$$

Las soluciones generales de (8.153) y (8.154) son

$$X(x) = A \cos kx + B \sin kx,$$

$$T(t) = C e^{-c^2 k^2 t}.$$

De donde

$$u(x, t; k) = X(x) T(t) = (D \cos kx + E \sin kx) e^{-c^2 k^2 t}, \quad (8.155)$$

es una solución de la ecuación (8.133), donde  $D$  y  $E$  son constantes arbitrarias. Puesto que  $f(x)$ , en general, es no periódica, siguiendo el argumento análogo para el caso de la vibración de una cuerda infinita (problema 8.8), se pueden considerar  $D$  y  $E$  como funciones de  $k$ . Entonces la función

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^\infty u(x, t; k) dk \\ &= \int_0^\infty [D(k) \cos kx + E(k) \sin kx] e^{-c^2 k^2 t} dk \end{aligned} \quad (8.156)$$

también es solución de (8.133).

Por (8.152), se tiene

$$u(x, 0) = f(x) = \int_0^\infty [D(k) \cos kx + E(k) \sin kx] dk. \quad (8.157)$$

Ahora bien, si

$$D(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cos ky dy,$$

$$E(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \sin ky dy,$$

entonces, con el teorema de la integral de Fourier, dado por (4.12), se puede expresar la relación (8.157) como

$$u(x, 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cos k(x-y) dy \right] dk. \quad (8.158)$$

De esta manera, por (8.156), se tiene

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[ \int_{-\infty}^\infty f(y) \cos k(x-y) e^{-c^2 k^2 t} dy \right] dk. \quad (8.159)$$

Suponiendo que se puede intercambiar el orden de integración, se obtiene

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(y) \left[ \int_0^\infty e^{-c^2 k^2 t} \cos k(x-y) dk \right] dy. \quad (8.160)$$

Para evaluar la integral interior se procede como sigue:

De la tabla de fórmulas de integrales se obtiene

$$\int_0^\infty e^{-s^2} \cos 2bs ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}. \quad (8.161)$$

Introduciendo una nueva variable de integración  $k$ , si se hace  $s = ck\sqrt{t}$ , y se selecciona

$$b = \frac{x-y}{2c\sqrt{t}},$$

la fórmula (8.161) se vuelve

$$\int_0^\infty e^{-c^2 k^2 t} \cos k(x-y) dk = \frac{\sqrt{\pi}}{2c\sqrt{t}} e^{-(x-y)^2/(4c^2 t)}. \quad (8.162)$$

Reemplazando (8.162) en (8.160), se obtiene

$$u(x, t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^\infty f(y) e^{-(y-x)^2/(4c^2 t)} dy. \quad (8.163)$$

Introduciendo la nueva variable de integración,  $q = (x-y)/(2c\sqrt{t})$ , la ecuación (8.163) se puede expresar como

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(x - 2cq\sqrt{t}) e^{-q^2} dq. \quad (8.164)$$

**PROBLEMA 8.12** Utilizando la técnica de la transformada de Fourier, resolver nuevamente el problema 8.11..

**Solución:** sea la transformada de Fourier, de la solución  $u(x, t)$ , con respecto a  $x$ , la dada por

$$U(s, t) = \mathcal{F}[u(x, t)] = \int_{-\infty}^\infty u(x, t) e^{-isx} dx; \quad (8.165)$$

entonces,

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}[U(s, t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty U(s, t) e^{isx} ds. \quad (8.166)$$

Se supondrá que las soluciones  $u(x, t)$  y  $\partial u(x, t)/\partial x$  son pequeñas para valores grandes de  $|x|$  y se acercan a cero a medida que  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Según (8.121), la transformada de Fourier de  $u_{xx}(x, t)$  es

$$\mathcal{F}[u_{xx}(x, t)] = \int_{-\infty}^\infty u_{xx}(x, t) e^{-isx} dx = -s^2 U(s, t). \quad (8.167)$$

La transformada de Fourier de  $U_t(x, t)$  es

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[u_t(x, t)] &= \int_{-\infty}^\infty u_t(x, t) e^{-isx} dx = \frac{\partial}{\partial t} U(s, t) \\ &= U_t(s, t). \end{aligned} \quad (8.168)$$

Aplicando ahora la transformada de Fourier a la ecuación del calor (8.133), se obtiene

$$-s^2 U(s, t) - \frac{1}{c^2} U_t(s, t) = 0$$

o

$$\frac{\partial U(s, t)}{\partial t} + c^2 s^2 U(s, t) = 0. \quad (8.169)$$

La solución de la ecuación (8.169) es

$$U(s, t) = U(s, 0) e^{-c^2 s^2 t}. \quad (8.170)$$

Pero aplicando la transformada de Fourier a la condición inicial (8.152), se obtiene

$$\begin{aligned} U(s, 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) e^{-j s x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j s x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-j s y} dy. \end{aligned} \quad (8.171)$$

Reemplazando (8.171) en (8.170), se tiene

$$U(s, t) = e^{-c^2 s^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-j s y} dy. \quad (8.172)$$

Ahora se puede obtener la solución  $u(x, t)$  tomando la transformada de Fourier de (8.172); esto es,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(s, t) e^{j s x} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(j s x - c^2 s^2 t)} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-j s y} dy \right] ds. \end{aligned} \quad (8.173)$$

Suponiendo que se puede intercambiar el orden de integración, se obtiene

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{[j s(x-y) - c^2 s^2 t]} ds \right\} dy. \quad (8.174)$$

Para evaluar la integral interior se procede como sigue:

Por la tabla de integrales, se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} dw = \sqrt{\pi}. \quad (8.175)$$

Ahora bien;

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{[j s(x-y) - c^2 s^2 t]} ds &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ \left( \frac{x-y}{2c\sqrt{t}} + jcs\sqrt{t} \right)^2 - \left( \frac{x-y}{2c\sqrt{t}} \right)^2 \right] ds \\ &= e^{-(x-y)^2/(4c^2 t)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( \frac{x-y}{2c\sqrt{t}} + jcs\sqrt{t} \right)^2 ds. \end{aligned}$$

Introduciendo una nueva variable de integración  $w$ , mediante

$$\frac{x-y}{2c\sqrt{t}} + jcs\sqrt{t} = jw,$$

se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{[js(x-y)-c^2 s^2 t]} ds &= \frac{1}{c\sqrt{t}} e^{-(x-y)^2/(4c^2 t)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} dw \\ &= \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-(x-y)^2/(4c^2 t)}, \end{aligned} \quad (8.176)$$

en razón de (8.175).

Sustituyendo (8.176) en (8.174), se obtiene finalmente

$$u(x, t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-(x-y)^2/(4c^2 t)} dy \quad (8.177)$$

que es exactamente el resultado (8.163).

Ahora (8.174) u (8.177) se pueden expresar como

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) G(x-y, t) dy, \quad (8.178)$$

donde

$$G(x-y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{[js(x-y)-c^2 s^2 t]} ds = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} e^{-(x-y)^2/(4c^2 t)} \quad (8.179)$$

se denomina *función de Green*, de la ecuación del calor (8.133) para el intervalo infinito.

**PROBLEMA 8.13** Hallar la temperatura  $u(x, t)$  de una barra semi-infinita, que se extiende de 0 a  $\infty$ . El extremo en  $x = 0$  se mantiene a una temperatura de cero, y la distribución inicial de la temperatura es  $f(x)$  para  $0 < x < \infty$ . Se supone que la condición en el extremo infinito es tal que  $u(x, t) \rightarrow 0$ , a medida que  $x \rightarrow \infty$ .

**Solución:** hay varias maneras de resolver este problema, pero en este caso se utilizará el método de las imágenes.

Como la temperatura en  $x = 0$  se mantiene en cero, se extiende la función inicial dada,  $f(x)$ ,  $x > 0$ , a una función impar, para  $-\infty < x < \infty$ ; de esta manera, el problema pasa a ser de una barra infinita. (Ver el problema 8.11.)

Por (8.177), se tiene

$$u(x, t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-(x-y)^2/(4c^2 t)} dy. \quad [8.177]$$

Teniendo en cuenta el hecho de que,  $f(-y) = -f(y)$ , se obtiene

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} f(y) e^{-(x-y)^2/(4c^2 t)} dy + \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} f(-y) e^{-(x+y)^2/(4c^2 t)} dy \\ &= \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} f(y) [e^{-(x-y)^2/(4c^2 t)} - e^{-(x+y)^2/(4c^2 t)}] dy \end{aligned} \quad (8.180)$$

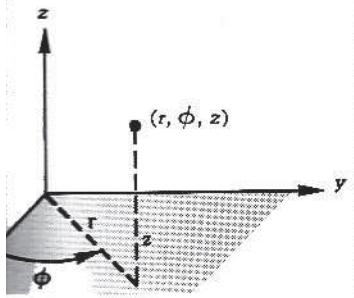
que es la solución deseada.

#### 8.4 TEORÍA DE POTENCIALES

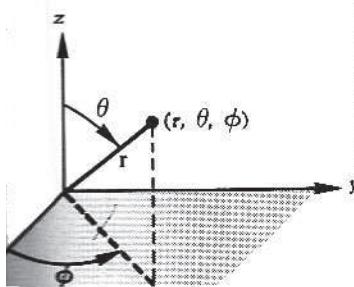
En esta sección se aplicará el análisis de Fourier a la teoría de potenciales, que es la teoría de la solución de la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 u = 0, \quad (8.181)$$

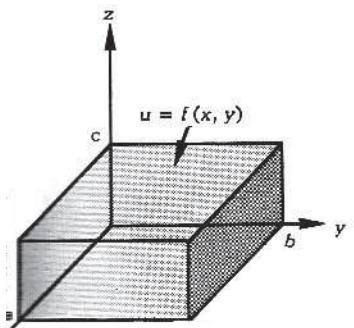
donde  $\nabla^2 u$  es el laplaciano de  $u$ . La ecuación de Laplace se presenta en relación con



### 8.5 Coordenadas cilíndricas.



### 8.6 Coordenadas esféricas.



8.7 La caja rectangular del problema 8.14.

potenciales gravitacionales, potenciales electrostáticos, problemas estacionarios de calor, potenciales de flujo de fluidos incompresibles, etc.

En coordenadas rectangulares, el laplaciano de una función  $u$  en tres dimensiones se puede expresar como

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (8.182)$$

Como se muestra en la figura 8.5, el laplaciano en coordenadas cilíndricas  $(r, \phi, z)$ , es

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (8.183)$$

Como se muestra en la figura 8.6, el laplaciano en coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$ , es

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}. \quad (8.184)$$

La técnica de separación de variables, aplicada a la ecuación de Laplace en dos dimensiones,  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ , se comentó en el problema 8.2; en el ejemplo siguiente se considerará el caso tridimensional.

**PROBLEMA 8.14** Hallar la distribución de potencial, de la caja rectangular que se muestra en la figura 8.7, si el potencial es cero en los lados y en la base, y  $f(x, y)$  en la parte superior.

**Solución:** sea  $u(x, y, z)$  la distribución de potencial en la caja rectangular que se muestra en la figura 8.7. Entonces,  $u(x, y, z)$  satisface la ecuación

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, \quad (8.185)$$

y las condiciones de frontera

$$u(0, y, z) = u(a, y, z) = u(x, 0, z) = u(x, b, z) = u(x, y, 0) = 0, \quad (8.186)$$

$$u(x, y, c) = f(x, y). \quad (8.187)$$

El método de separación de variables, sugiere el suponer una solución a (8.185) de la forma

$$u(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z). \quad (8.188)$$

Reemplazando esta solución en la ecuación (8.185), ésta se reduce a

$$X''(x) Y(y) Z(z) + X(x) Y''(y) Z(z) + X(x) Y(y) Z''(z) = 0. \quad (8.189)$$

Dividiendo por  $X(x) Y(y) Z(z)$  y separando las variables, se obtiene

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = k_x^2, \quad (8.190)$$

donde  $k_x^2$  es la constante de separación. En este caso, la separación depende del hecho de que el primer miembro es independiente de  $y$  y  $z$ , y el segundo miembro es independiente de  $x$ .

Por consiguiente,

$$X''(x) + k_x^2 X(x) = 0. \quad (8.191)$$

Luego de una segunda separación, se tiene

$$-\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \frac{Z''(z)}{Z(z)} - k_x^2 = k_y^2. \quad (8.192)$$

Lo cual conduce a las siguientes ecuaciones:

$$Y''(y) + k_y^2 Y(y) = 0, \quad (8.193)$$

$$Z''(z) - k_z^2 Z(z) = 0, \quad (8.194)$$

donde  $k_z^2 = k_x^2 + k_y^2$ . Las soluciones generales de (8.191), (8.193) y (8.194) son

$$X(x) = A \cos k_x x + B \sin k_x x, \quad (8.195)$$

$$Y(y) = C \cos k_y y + D \sin k_y y, \quad (8.196)$$

$$Z(z) = E \cosh k_z z + F \sinh k_z z. \quad (8.197)$$

Según las condiciones de frontera, dadas por (8.186), se tiene

$$X(0) = X(a) = 0,$$

$$Y(0) = Y(b) = 0,$$

$$Z(0) = 0.$$

Por consiguiente,

$$X(0) = A = 0,$$

$$X(a) = B \sin k_x a = 0;$$

de donde,

$$k_x a = m\pi \quad \text{o} \quad k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (8.198)$$

Análogamente,

$$Y(0) = C = 0,$$

$$Y(b) = D \sin k_y b = 0;$$

de donde,

$$k_y b = n\pi \quad \text{o} \quad k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.199)$$

Así mismo

$$Z(0) = E = 0.$$

Expresando  $k_z$  en términos de  $m$  y  $n$ ,

$$k_z^2 = k_x^2 + k_y^2 = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) = k_{mn}^2$$

o

$$k_z = k_{mn} = \pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}, \quad (8.200)$$

se obtienen las soluciones

$$X(x) = X_m(x) = B_m \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

$$Y(y) = Y_n(y) = D_n \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$Z(z) = Z_{mn}(z) = F_{mn} \sinh k_{mn} z.$$

Luego, expresando  $b_{mn} = B_m D_n F_{mn}$ , se sigue que las funciones

$$\begin{aligned} u_{mn}(x, y, z) &= X_m(x) Y_n(y) Z_{mn}(z) \\ &= b_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sinh k_{mn} z, \end{aligned} \quad (8.201)$$

donde  $m = 1, 2, \dots$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , con  $k_{mn}$  definido por (8.200), son soluciones de la ecuación (8.185), que satisfacen las condiciones de frontera dadas por (8.186).

Para satisfacer la condición de frontera dada por (8.187), se supone la solución deseada en la forma

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(x, y, z) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh} k_{mn} z. \end{aligned} \quad (8.202)$$

Si se hace

$$c_{mn} = b_{mn} \operatorname{senh} k_{mn} c, \quad (8.203)$$

la condición de frontera (8.187) toma la forma

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b. \quad (8.204)$$

De esta manera, los coeficientes  $c_{mn}$  son los coeficientes de la doble serie de Fourier en términos del seno, que representa la función  $f(x, y)$  sobre el rectángulo indicado. Por (8.76), estos coeficientes se determinan fácilmente como

$$c_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (8.205)$$

Con estos valores de  $c_{mn}$ , la notación de (8.203), solución (8.202), se convierte en

$$u(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \frac{\operatorname{senh} k_{mn} z}{\operatorname{senh} k_{mn} c}, \quad (8.206)$$

donde  $k_{mn}$  está definido por (8.200).

**PROBLEMA 8.15** Resolver el problema 8.14, si  $f(x, y) = U_o$ , siendo  $U_o$  una constante.

**Solución:** por (8.205), se tiene

$$\begin{aligned} c_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a U_o \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dx dy \\ &= \frac{4U_o}{ab} \int_0^a \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} dx \int_0^b \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dy \\ &= \begin{cases} \frac{16U_o}{mn\pi^2} & \text{para } m \text{ y } n \text{ impares} \\ 0 & \text{para } m \text{ y } n \text{ pares} \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto, según (8.206), se obtiene

$$u(x, y, z) = \frac{16U_o}{\pi^2} \sum_{m=\text{impar}}^{\infty} \sum_{n=\text{impar}}^{\infty} \frac{1}{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \frac{\operatorname{senh} k_{mn} z}{\operatorname{senh} k_{mn} c}, \quad (8.207)$$

donde  $k_{mn} = \pi [(m^2/a^2) + (n^2/b^2)]^{1/2}$ .

En el siguiente ejemplo se considerará la ecuación de Laplace en coordenadas polares.

**PROBLEMA 8.16** Hallar la distribución de temperatura en estado estacionario, en una placa semicircular de radio  $a$ , en la que las dos caras están aisladas, la parte circular se mantiene a una temperatura constante  $U_0$  y su diámetro se conserva a una temperatura de cero grados (figura 8.8).

**Solución:** en la sección 8.3, la ecuación de flujo de calor se expresó como

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad [8.131]$$

En estado estacionario, la temperatura  $u$  es independiente del tiempo, por tanto,  $\partial u / \partial t = 0$ , y  $u$  satisface la ecuación de Laplace; es decir,

$$\nabla^2 u = 0.$$

Como en este problema el flujo de calor es en dos dimensiones y las fronteras son cilíndricas, se utilizará el laplaciano de  $u$  en dos dimensiones y en coordenadas cilíndricas. En consecuencia, por (8.183), se tiene

$$\nabla^2 u(r, \phi) = \frac{\partial^2 u(r, \phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u(r, \phi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u(r, \phi)}{\partial \phi^2} = 0. \quad (8.208)$$

La temperatura  $u(r, \phi)$ , considerada como función de  $r$  y  $\phi$ , satisface (8.208) y las condiciones de frontera (figura 8.8)

$$u(a, \phi) = U_0, \quad (8.209)$$

$$u(r, 0) = 0, \quad (8.210)$$

$$u(r, \pi) = 0. \quad (8.211)$$

El método de separación de variables, sugiere el suponer una solución a (8.208) de la forma

$$u(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi). \quad (8.212)$$

Reemplazando (8.212) en (8.208), se obtiene

$$R''(r)\Phi(\phi) + \frac{1}{r} R'(r)\Phi(\phi) + \frac{1}{r^2} R(r)\Phi''(\phi) = 0,$$

o

$$r^2 R''(r)\Phi(\phi) + rR'(r)\Phi(\phi) + R(r)\Phi''(\phi) = 0. \quad (8.213)$$

Dividiendo (8.213) por  $R(r)\Phi(\phi)$ , y separando las variables, se obtiene

$$\frac{r^2 R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} = k^2, \quad (8.214)$$

donde  $k^2$  es la constante de separación. En este caso la separación resulta del hecho de que el primer miembro es independiente de  $\phi$  y el segundo es independiente de  $r$ .

El signo de la constante de separación, se escogió de tal manera que la función  $\Phi(\phi)$  estuviera expresada en términos del seno y del coseno en vez de funciones exponenciales.

La ecuación (8.214) conduce entonces a las dos ecuaciones siguientes:

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - k^2 R(r) = 0, \quad (8.215)$$

$$\Phi''(\phi) + k^2 \Phi(\phi) = 0. \quad (8.216)$$

La solución general de (8.216) es

$$\Phi(\phi) = A \cos k\phi + B \sin k\phi. \quad (8.217)$$

Para resolver la ecuación (8.215) se hace la transformación

$$r = e^s.$$

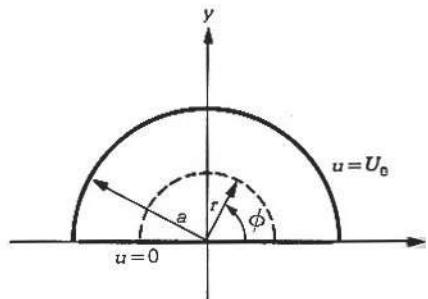


Figura 8.8 La placa semicircular del problema 8.16.

Entonces,

$$R'(r) = \frac{dR}{dr} = \frac{dR}{ds} \frac{ds}{dr} = \frac{1}{r} \frac{dR}{ds},$$

$$R''(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d^2R}{ds^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dR}{ds},$$

y (8.215) se reduce a

$$\frac{d^2R}{ds^2} - k^2 R = 0.$$

La solución general de esta ecuación es

$$R = C e^{ks} + D e^{-ks}.$$

Como  $e^s = r$ , entonces

$$R(r) = C r^k + D r^{-k}. \quad (8.218)$$

Según las condiciones de frontera (8.210) y (8.211), se tiene

$$\Phi(0) = \Phi(\pi) = 0.$$

Por tanto,

$$\Phi(0) = A = 0 \quad y \quad \Phi(\pi) = B \operatorname{sen} k\pi = 0.$$

Puesto que resulta una solución trivial, si  $B = 0$ , se debe tener  $\operatorname{sen} k\pi = 0$ , por lo cual

$$k\pi = n\pi \quad o \quad k = n, \quad n = 1, 2, \dots.$$

De donde se hallan las soluciones

$$\Phi(\phi) = \Phi_n(\phi) = B_n \operatorname{sen} n\phi, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (8.219)$$

En (8.218) se observa que cuando  $r \rightarrow 0$ , el término  $r^{-k} \rightarrow \infty$ , dado que  $k = n > 0$ .

Puesto que en  $r = 0$ ,  $R(0) = 0$ ,  $D$  debe ser igual a cero. De esta manera, se tiene

$$R(r) = R_n(r) = C_n r^n, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (8.220)$$

Entonces, se sigue que las funciones

$$u_n(r, \phi) = R_n(r) \Phi_n(\phi) = b_n r^n \operatorname{sen} n\phi, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (8.221)$$

donde  $b_n = B_n C_n$ , satisfacen la ecuación (8.208), así como las condiciones de frontera (8.210) y (8.211).

Para satisfacer la condición de frontera (8.209), se supone la solución deseada en la forma

$$u(r, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^n \operatorname{sen} n\phi. \quad (8.222)$$

Por (8.209), se tiene

$$u(a, \phi) = U_o = \sum_{n=1}^{\infty} b_n a^n \operatorname{sen} n\phi. \quad (8.223)$$

De esta manera, los términos  $b_n a^n$  son los coeficientes de Fourier en senos, de la función  $U_o$ , y

$$b_n a^n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi U_o \operatorname{sen} n\phi d\phi$$

$$= \begin{cases} \frac{4U_o}{n\pi} & \text{para } n = 1, 3, \dots \\ 0 & \text{para } n = 2, 4, \dots \end{cases}$$

De donde,

$$b_n = \frac{4U_0}{\pi n a^n}, \quad n = 1, 3, \dots.$$

Con estos valores de  $b_n$ , la solución (8.222) se convierte en

$$u(r, \phi) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{n=\text{impar}}^{\infty} \frac{1}{r} \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin n\phi. \quad (8.224)$$

En el siguiente ejemplo se considerará la aplicación de la transformada de Fourier, a la solución de la ecuación de Laplace en el semiplano.

**PROBLEMA 8.17** Hallar la solución  $U(x, y)$  de la ecuación de Laplace en el semiplano  $y > 0$ , si  $u(x, 0) = f(x)$  para  $-\infty < x < \infty$  (figura 8.9).

**Solución:** a la ecuación de Laplace

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0,$$

se aplica la transformada de Fourier con respecto a la variable  $x$ , en particular,

$$U(s, y) = \mathcal{F}[u(x, y)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{-isx} dx.$$

Suponiendo que  $u(x, y)$  y  $u_x(x, y)$  se anulan cuando  $x \rightarrow \pm \infty$ , se obtiene la ecuación para  $U(s, y)$  como [ver (8.121)]

$$\frac{\partial^2 U(s, y)}{\partial y^2} - s^2 U(s, y) = 0. \quad (8.225)$$

La solución general de (8.225) es

$$U(s, y) = A(s) e^{sy} + B(s) e^{-sy}. \quad (8.226)$$

Así mismo, se supondrá que  $u(x, y)$  está acotada cuando  $y \rightarrow +\infty$ . Por tanto, para  $s > 0$ , se hace  $A(s) = 0$ , y

$$U(s, y) = B(s) e^{-sy} \quad \text{para } s > 0. \quad (8.227)$$

Puesto que  $U(s, 0) = B(s)$ , se puede expresar (8.227) como

$$U(s, y) = U(s, 0) e^{-sy} \quad \text{para } s > 0. \quad (8.228)$$

Análogamente, para  $s < 0$ , se hace  $B(s) = 0$ , en (8.226), y se expresa

$$U(s, y) = A(s) e^{sy} \quad \text{para } s < 0. \quad (8.229)$$

Nuevamente, como  $U(s, 0) = A(s)$ , se puede expresar (8.229) como

$$U(s, y) = U(s, 0) e^{sy} \quad \text{para } s < 0. \quad (8.230)$$

Las dos ecuaciones (8.228) y (8.230) se pueden combinar en

$$U(s, y) = U(s, 0) e^{-|s|y}. \quad (8.231)$$

Puesto que,  $u(x, 0) = f(x)$ , se tiene

$$U(s, 0) = \mathcal{F}[u(x, 0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-isx'} dx'. \quad (8.232)$$

Por (8.231), se tiene

$$U(s, y) = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-isx'} dx' \right] e^{-|s|y}. \quad (8.233)$$

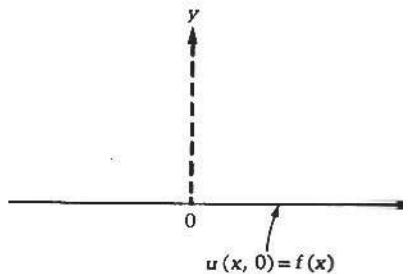


Figura 8.9 El semiplano del problema 8.17.

La solución deseada  $u(x, y)$  es la transformada inversa de Fourier de (8.233); es decir,

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \mathcal{F}^{-1}[U(s, y)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(s, y) e^{jsx} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jsx} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-jsx'} dx' \right] e^{-|s|y} ds. \end{aligned} \quad (8.234)$$

Intercambiando el orden de la integración, se obtiene

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{[js(x-x')-|s|y]} ds \right\} dx'. \quad (8.235)$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{[js(x-x')-|s|y]} ds &= \int_{-\infty}^0 e^{[js(x-x')+sy]} ds + \int_0^{\infty} e^{[js(x-x')-sy]} ds \\ &= \frac{e^{js(x-x')+sy}}{j(x-x')+y} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{e^{js(x-x')-sy}}{j(x-x')-y} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{j(x-x')+y} - \frac{1}{j(x-x')-y} \\ &= \frac{2y}{(x-x')^2+y^2}. \end{aligned} \quad (8.236)$$

Sustituyendo (8.236) en (8.235), se obtiene finalmente

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x') dx'}{(x-x')^2+y^2}, \quad y > 0. \quad (8.237)$$

## 8.5 PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

**PROBLEMA 8.18** Resolver la ecuación (8.1), utilizando las condiciones de frontera dadas por (8.2) y con las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} \frac{k}{a} x & \text{para } 0 < x < a \\ \frac{k}{l-a} (l-x) & \text{para } a < x < l, \end{cases} \quad y \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

Ver la figura 8.10.

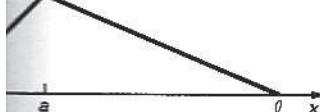
$$\text{Respuesta: } u(x, t) = \frac{2kl^2}{\pi^2 a(l-a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi a}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right).$$

**PROBLEMA 8.19** Si la energía instantánea de una cuerda vibrante es

$$W_{KE} = \frac{1}{2} \rho \int_0^l \left[ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right]^2 dx,$$

hallar la energía cinética de la cuerda vibrante del problema 8.18.

$$\text{Respuesta: } \frac{1}{2} \rho \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2 c^2}{2l} A_n^2 \sin^2\left(\frac{n\pi ct}{l}\right), \quad \text{donde } A_n = \frac{2kl^2}{\pi^2 a(l-a)} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi a}{l}\right).$$



10 La condición inicial de la cuerda elástica del problema 8.18.

**PROBLEMA 8.20** Probar que la función

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

es una solución de la ecuación de onda en una dimensión, dada por (8.1), siempre que  $f$  y  $g$  sean dos funciones diferenciables de una sola variable.

**PROBLEMA 8.21** La temperatura de una barra aislada de longitud  $l$ , satisface las condiciones de frontera  $u(0, t) = 0$ ,  $u(l, t) = 1$ , y la condición inicial  $u(x, 0) = \operatorname{sen}(\pi x/l)$ . Hallar (a) la distribución de temperatura después de un tiempo  $t$ , y (b) la temperatura en estado estacionario, es decir, la temperatura en la barra a medida que  $t \rightarrow \infty$ .

*Respuesta:* (a)  $u(x, t) = \frac{x}{l} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-\lambda_n^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ ,  $\lambda_n = \frac{cn\pi}{l}$ ,

$$(b) u(x, t) \Big|_{t=\infty} = \frac{x}{l}.$$

**PROBLEMA 8.22** Resolver

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{para } 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

con  $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0$ , y  $u(x, 0) = \operatorname{sen} x$ .

*Respuesta:*  $u(x, t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)} e^{-4n^2 c^2 t} \cos 2nx$ .

**PROBLEMA 8.23** Resolver

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{para } 0 < x < a, \quad 0 < y < b,$$

con las siguientes condiciones de frontera e inicial:  $u(0, y) = u(a, y) = u(x, b) = 0$ , y  $u(x, 0) = f(x)$ .

*Respuesta:*  $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\operatorname{senh}[n\pi(b-y)/a]}{\operatorname{senh}(n\pi b/a)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ , donde

$$b_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx.$$

**PROBLEMA 8.24** Resolver

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{para } 0 < x < a, \quad 0 < y < \infty,$$

con  $u(x, y) \rightarrow 0$ , cuando  $y \rightarrow \infty$ ,  $u(0, y) = 0$ ,  $u(a, y) = 0$  y  $u(x, 0) = x(a-x)$ .

*Respuesta:*  $u(x, y) = \frac{4a^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos n\pi)}{n^3} e^{-n\pi y/a} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ .

**PROBLEMA 8.25** Resolver

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \quad \text{para } r < 1, \quad 0 < \phi < \pi,$$

con  $u(r, 0) = u(r, \pi) = 0$  y  $u(1, \phi) = \phi(\pi - \phi)$ .

*Respuesta:*  $u(r, \phi) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} r^{2n-1} \operatorname{sen}(2n-1)\phi.$

**PROBLEMA 8.26** Resolver

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \quad \text{para } r < 1, \quad 0 < \phi < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{con } u(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \phi} \left( r, \frac{1}{2} \pi \right) = 0, \quad \text{y} \quad u(1, \phi) = \phi.$$

*Respuesta:*  $u(r, \phi) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)^2} r^{2n-1} \operatorname{sen}(2n-1)\phi.$

**PROBLEMA 8.27** Hallar la distribución de temperatura  $u(x, t)$  de una barra infinita, si la distribución de temperatura inicial es

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ T & \text{para } x > 0, \end{cases}$$

donde  $T$  es una constante. (Cf., problema 8.11.)

*Respuesta:*  $u(x, t) = \frac{T}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{t}} \right) \right], \quad \text{donde} \quad \operatorname{erf} y = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-\xi^2} d\xi.$

**PROBLEMA 8.28** Utilizando la transformada de Fourier, resolver

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t) \quad \text{para } -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

con la condición inicial  $u(x, 0) = 0$  para  $t > 0$ .

*Respuesta:*  $u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(x-\xi)^2/4(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}} H(t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad \text{donde}$

$$H(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{para } \lambda > 0 \\ 0 & \text{para } \lambda < 0. \end{cases}$$

**PROBLEMA 8.29** Utilizando la transformada de Fourier, en términos del seno, resolver

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \text{para } x > 0, \quad t > 0,$$

con  $u(x, 0) = 0$ , para  $x > 0$ , y  $u(0, t) = g(t)$ , para  $T > 0$ .

*Respuesta:*  $u(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{g(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-x^2/[4(t-\tau)]} d\tau.$