Departamento de Ingeniería Mecánica
Elementos Finitos
Tarea técnicas de aproximación

Mauricio Ríos Hernández

2021-1

1. Plantamiento del problema

Se pide determinar las soluciones aproximadas a la ecuación diferencial dada empleando las tres técnicas de aproximación (método de colocación, método de mínimos cuadrados y método de Galerkin), y el método de elementos finitos, también se pide solucionar el sistema analíticamente y esta se toma como la solución exacta. La ecuación diferencial en cuestión es:

$$Ax^2\frac{d^2y(x)}{dx^2} + Bx\frac{dy(x)}{dx} + Cy(x) = 0$$
$$\text{Dominio: } 1 \leq x \leq 6$$
$$\left.\begin{array}{r} y(1) = 5 \\ y(6) = 5 \end{array}\right\} \text{ Condiciones de frontera}$$

Defina cualquier valor para las constantes A, B y C de la ecuación diferencial (diferente de cero y que no sean los mismos números +/-). **Para este caso se escogió A= 2, B= -1, C= 3**.

2. Solución analítica de la ecuación diferencial

Halle la solución analítica de la ecuación diferencial usando las técnicas vistas en los cursos de ecuaciones diferenciales. Asuma esta solución como la solución exacta del problema.

Entonces nuestro problema reescribiendo el problema de valor inicial:

$$2x^2\frac{d^2y(x)}{dx^2} - x\frac{dy(x)}{dx} + 3y(x) = 0$$
$$\text{Dominio: } 1 \leq x \leq 6$$
$$\left.\begin{array}{r} y(1) = 5 \\ y(6) = 5 \end{array}\right\} \text{ Condiciones de frontera}$$

Entonces primero se halla la solución general a la ecuación diferencial. Observando la ecuación diferencial, esta es una ecuación diferencial homogenea y tiene la forma de *la ecuación de Cauchy-Euler* [2], es decir:

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 xy' + a_0 y = 0$$
$$\text{Siendo } y \text{ función de } x$$

Para nuestro caso:

$$2x^2y^{(2)} - xy' + 3y = 0$$

Ahora proponiendo soluciones de la forma $y = x^m$ tenemos que:

$$y = x^m \rightarrow y' = mx^{m-1} \wedge y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$y = x^m \rightarrow y' = mx^{m-1} \wedge y'' = m(m-1)x^{m-2}$$
$$2x^2m(m-1)x^{m-2} - xmx^{m-1} + 3x^m = 0$$
$$2m(m-1)x^m - mx^m + 3x^m = 0$$
$$x^m\left(2m(m-1) - m + 3\right) = 0$$
$$2m^2 - 2m - m + 3 = 0$$
$$2m^2 - 3m + 3 = 0$$

Aplicando la fórmula cuadrática tenemos que:

$$m = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(3)}}{2(2)} = \frac{3 \pm \sqrt{9-24}}{4}$$

Como se observa el discriminante Δ es menor a 0, por lo que se procede así:

$$m = \frac{3 \pm \sqrt{-15}}{4} = 0{,}75 \pm \frac{\sqrt{15}}{4}i$$

Por lo que las soluciones serían:

$$\begin{gathered} y_1 = x^{\alpha+\beta i} = x^{\alpha}x^{\beta i} \\ y_2 = x^{\alpha-\beta i} = x^{\alpha}x^{-\beta i} \\ y = C_1 x^{\alpha+\beta i} + C_2 x^{\alpha-\beta i} \end{gathered}$$

Usando la formula de Euler [2], entonces:

$$\begin{aligned} x^{\beta i} &= e^{\ln(x^{\beta i})} = e^{\beta i \ln(x)} = \cos(\beta\ln(x)) + i\sin(\beta\ln(x)) \\ x^{-\beta i} &= e^{\ln(x^{-\beta i})} = e^{-\beta i \ln(x)} = \cos(-\beta\ln(x)) + i\sin(-\beta\ln(x)) \\ &= \cos(\beta\ln(x)) - i\sin(\beta\ln(x)) \end{aligned}$$

Sumando y restando los dos resultados anteriores, se tiene que:

$$x^{\beta i} + x^{-\beta i} = 2\cos(\beta\ln x) \text{ y } x^{\beta i} - x^{-\beta i} = 2i\sin(\beta\ln(x))$$

Como

$$y = C_1 x^{\alpha+\beta i} + C_2 x^{\alpha-\beta i}$$

es una solución para cualquier valor de las constantes, note, a su vez, para $C_1 = C_2 = 1$ y $C_1 = 1, C_2 = -1$

$$\begin{gathered} y_3 = x^{\alpha}(x^{\beta i} + x^{-\beta i}) = 2x^{\alpha}\cos(\beta\ln x) \\ y_4 = x^{\alpha}(x^{\beta i} - x^{-\beta i}) = 2ix^{\alpha}\sin(\beta\ln(x)) \end{gathered}$$

Como y_3 y y_4 son combinaciones lineales de y_1 y y_2, entonces también son soluciones de la ecuación diferencial.

Ahora calculando el Wronskiano $W(x^{\alpha}\cos(\beta\ln x), x^{\alpha}\sin(\beta\ln(x))) = \beta x^{2\alpha-1} \neq 0$, (soluciones L.I), entonces, $x^{\alpha}\cos(\beta\ln x)$ y $x^{\alpha}\sin(\beta\ln(x))$ representan un conjunto fundamental de soluciones reales de la ecuación diferencial:

$$\begin{gathered} y = x^{\alpha}[c_1\cos(\beta\ln x) + c_2\sin(\beta\ln(x))] \\ y = x^{0{,}75}\left[c_1\cos\left(\tfrac{\sqrt{15}}{4}\ln x\right) + c_2\sin\left(\tfrac{\sqrt{15}}{4}\ln(x)\right)\right] \end{gathered}$$

Ahora para resolver el problema de valor inicial, usamos las condiciones de frontera:

$$\begin{gathered} 5 = 1^{0{,}75}\left[c_1\cos\left(\tfrac{\sqrt{15}}{4}\ln 1\right) + c_2\sin\left(\tfrac{\sqrt{15}}{4}\ln(1)\right)\right] \\ 5 = c_1 \\ 5 = 6^{0{,}75}\left[5\cos\left(\tfrac{\sqrt{15}}{4}\ln(6)\right) + c_2\sin\left(\tfrac{\sqrt{15}}{4}\ln(6)\right)\right] \\ \frac{\frac{5}{6^{0,75}} - 5\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\ln(6)\right)}{\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\ln(6)\right)} = c_2 \approx -121{,}9996 \simeq -122 \\ \therefore y = x^{0{,}75}\left[5\cos\left(\tfrac{\sqrt{15}}{4}\ln x\right) + c_2\sin\left(\tfrac{\sqrt{15}}{4}\ln(x)\right)\right] \\ y \simeq x^{0{,}75}\left[5\cos\left(\tfrac{\sqrt{15}}{4}\ln x\right) + -120\sin\left(\tfrac{\sqrt{15}}{4}\ln(x)\right)\right] \end{gathered}$$

3. Solución aproximada de la ecuación diferencial usando método de colocación, método de mínimos cuadrados y método de Galerkin

4. Anexos

1. Anexo 1: Grafico.xlsx

Referencias

[1] S. James, CÁLCULO, TRANSENDENTES TEMPRANAS, Octava edi. CENGAGE.

[2] D. Zill, Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado., Novena edi. 2009.