PROGRAMACIÓN Y MÉTODOS NUMÉRICOS 2503506

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Andrés Agudelo
Departamento de Ingeniería Mecánica
andres.agudelos@udea.edu.co

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Ingeniería

Contenido

Introducción

Ecuaciones diferenciales

Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) es aquella que involucra derivadas de una función de una sola variable:

$$a_n \frac{d^{(n)}y(x)}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{(n-1)}y(x)}{dx^{n-1}} + \cdots + a_2\frac{d^{(2)}y(x)}{dx^2} + a_1\frac{dy(x)}{dx} + a_0\, y(x) = f(x,y)$$

- El orden de la ecuación diferencial (ED) es igual al máximo grado de derivación: (n).
- La función $f(x,y)$ no involucra derivadas de $y(x)$.

Introducción

Ecuaciones diferenciales

En general, una EDO se puede escribir de la siguiente forma:

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^{(i)}y(x)}{dx^i} = f(x,y)} \qquad (1)$$

El tipo de ecuación depende de cómo sean los coeficientes de las derivadas (términos a_i):

- Lineal $\rightarrow$ Constantes: $a_i = \text{cte}$.
- No lineal $\rightarrow$ Función de la variable independiente, de la dependiente o de sus derivadas: $a_i = f(x, y, y^{(k)})$.

Introducción

Ecuaciones diferenciales

- Son muy comunes en la práctica de ingeniería:

$$\boxed{\text{Leyes fundamentales de la física}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Cambios temporales y espaciales de variables de los sistemas}}$$

$$\text{Ecuaciones de conservación: } \begin{cases} \text{Masa} \\ \text{Energía} \\ \text{Cantidad de movimiento} \end{cases}$$

- Desafortunadamente, la inmensa mayoría de ecuaciones diferenciales que resultan en la práctica de ingeniería no se pueden resolver por métodos analíticos. $\rightarrow$ **Se debe recurrir a métodos numéricos.**

Introducción

Ecuaciones diferenciales

Una solución de una EDO es una función específica de la variable independiente y de los parámetros de la ecuación (constantes), que satisface la ecuación diferencial original.

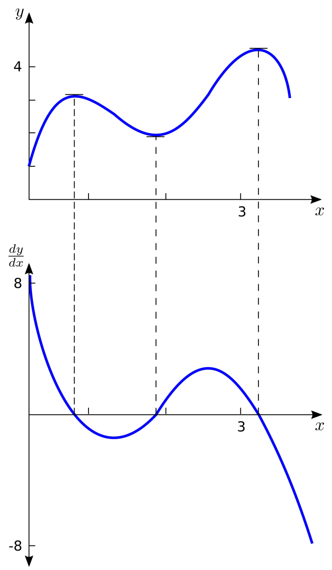
Considere la siguiente función (polinomio de cuarto orden):

$$y = -0.5\,x^4 + 4\,x^3 - 10\,x^2 + 8.5\,x + 1 \quad (2)$$

La primera derivada de esta función es:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = -2\,x^3 + 12\,x^2 - 20\,x + 8.5 \quad (3)$$

Introducción



Relación entre $y(x)$ y $y'(x)$

- Se observa como los puntos en que la derivada se hace cero, corresponden a puntos de la función original sin pendiente.
- Aquí se obtuvo la derivada a partir de la función original. El objetivo es hacer lo contrario: determinar la función original, dada su derivada.
- La función original (ec. 2) representa una solución de la ecuación diferencial (ec. 3).

Introducción

Ecuaciones diferenciales

La solución de (3) se puede obtener integrando esta ecuación:

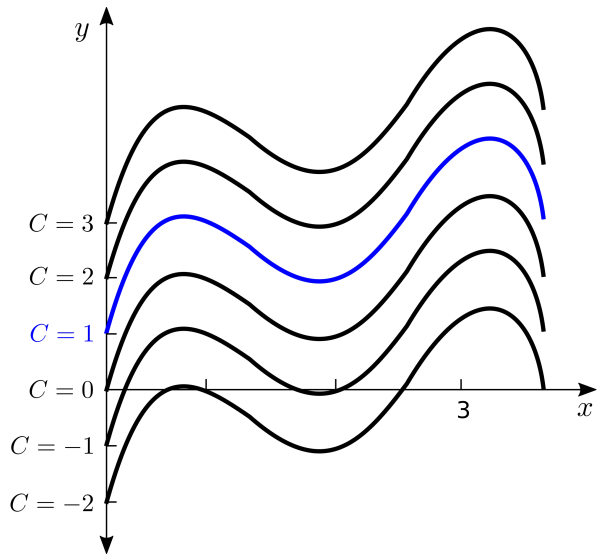
$$y = \int \left(-2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5\right) dx$$

El resultado de esta integral es el siguiente:

$$y = -0{,}5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + C \quad (4)$$

- Este resultado difiere de la función original: se perdió el valor constante de 1, y se obtuvo en su lugar la constante de integración C, mediante la integración indefinida.
- Esto significa que existe un número infinito de soluciones que satisfacen la ecuación diferencial (3), asociados con los posibles valores de la constante C.

Introducción



Introducción

Ecuaciones diferenciales

Por lo tanto, para especificar la solución completamente, una ecuación diferencial generalmente está acompañada de unas condiciones auxiliares.

En el caso de EDO de primer orden, la condición auxiliar se llama valor o condición inicial, el cual se requiere para hallar una solución única de ésta.

Ejemplo: Ecuación (3)

Condición inicial: $y(x = 0) = 1$ $\rightarrow$ Se sustituye en la ecuación (4):

$$1 = -0.5(0)^4 + 4(0)^3 - 10(0)^2 + 8.5(0) + C \quad \rightarrow \quad C = 1$$

Solución única a la ecuación (3) $\rightarrow$ se sustituye $C = 1$ en la ec. (4):

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$$

Introducción

Ecuaciones diferenciales

Al usar la condición inicial se forzó a la solución a pasar por el punto establecido, logrando la solución única deseada para la EDO.

Es común que las condiciones iniciales de ED que provienen de problemas físicos tengan interpretación tangible.

Por ejemplo, en el caso de la caída del paracaidista, la condición inicial refleja que en el instante inicial éste no tiene velocidad vertical.

Introducción

Ecuaciones diferenciales

Cuando se trata con ED de orden n, se necesitan n condiciones para obtener una solución única.

- Si todas las condiciones se establecen en el mismo valor de la variable independiente (por ejemplo en $x = 0$):

  $\Downarrow$

  Problema de valor inicial

- Cuando las condiciones se especifican en diferentes valores de la variable independiente:

  $\Downarrow$

  Problema de valor en la frontera

Métodos de un paso

Métodos de un paso

Se aplican para resolver EDO de primer orden del tipo:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,\, y) \quad (5)$$

Estos métodos usan una aproximación sucesiva con la siguiente forma general:

$$\boxed{\text{Valor nuevo} = \text{valor anterior} + \text{pendiente} \times \text{tamaño de paso}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \phi\, h} \quad (6)$$

Consisten en extrapolar desde un valor anterior y_i a uno nuevo y_{i+1}, usando una estimación de la pendiente ϕ, a lo largo de una distancia h.

Métodos de un paso

Métodos de un paso

Se pueden aplicar paso a paso para estimar valores futuros, permitiendo de este modo trazar una trayectoria de la solución.

Existen varios métodos de un paso, según la forma en la cual se estime la pendiente:

- Método de Euler
- Métodos de Taylor
- Método de Heun (mejora al M. de Euler)
- Métodos de Runge–Kutta (RK)

Método de Euler

Método de Euler

El punto de partida es la ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} = f(x,\, y) \quad (5)$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \phi\, h} \quad (6)$$

Es claro que una estimación directa de la pendiente es la primera derivada:

$$\Rightarrow \phi = f(x_i,\, y_i)$$

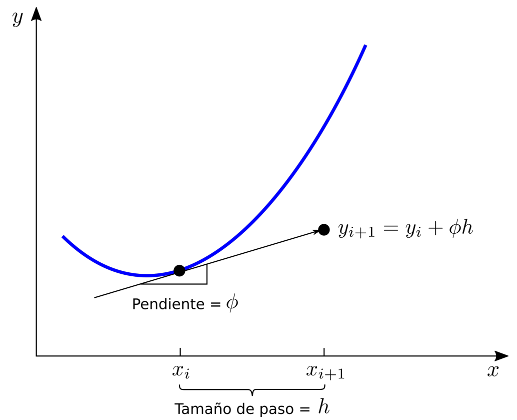
Donde $f(x_i,\, y_i)$ es la ED evaluada en $(x_i,\, y_i)$.

Al reemplazar esta estimación en la ecuación (6), se obtiene:

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + f(x_i,\, y_i)h} \quad (7)$$

Método de Euler

La ecuación (7) define el método de Euler. Se predice un nuevo valor de y usando la pendiente en la ubicación anterior para extrapolar linealmente sobre el paso de tamaño h.



Método de Euler

Ejemplo 1

Use el método de Euler para resolver numéricamente la ecuación diferencial (3), entre $x = 0$ y $x = 4$, con un tamaño de paso $h = 0.5$. La condición inicial es $y = 1$ en $x = 0$.

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5 = f(x,\, y) = f(x)$$

La solución exacta está dada por la ecuación (2):

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$$

Solución:
En este caso la derivada es función únicamente de la variable independiente. Por lo tanto, la ecuación (7), se puede escribir como:

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + f(x_i)h} \qquad f(x) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

Método de Euler

Ejemplo 1

Paso 1:

$$y(0.5) = y(0) + f(0)(0.5)$$

$$y(0) = 1 \quad \text{y} \quad f(0) = -2(0)^3 + 12(0)^2 - 20(0) + 8.5 = 8.5$$

$$\Rightarrow \quad y(0.5) = 1.0 + 8.5(0.5) = 5.25$$

La solución exacta en $x = 0.5$ es:

$$y(0.5) = -0.5(0.5)^4 + 4(0.5)^3 - 10(0.5)^2 + 8.5(0.5) + 1 = 3.21875$$

Por lo tanto, el error relativo de truncamiento es $\varepsilon_{t,1} = 63.1\,\%$

Método de Euler

Ejemplo 1

Paso 2:

$$\begin{aligned} y(1) &= y(0.5) + f(0.5)(0.5) \\ &= 5.25 + \left[-2(0.5)^3 + 12(0.5)^2 - 20(0.5) + 8.5\right](0.5) \\ &= 5.875 \end{aligned}$$

La solución exacta en $x = 1$ es:

$$y(1) = -0.5(1)^4 + 4(1)^3 - 10(1)^2 + 8.5(1) + 1 = 3.0$$

Por lo tanto, el error relativo de truncamiento es $\varepsilon_{t,2} = 95.8\,\%$

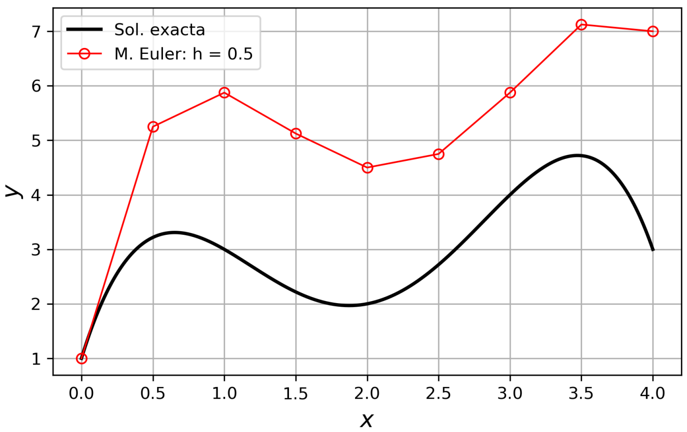
Método de Euler

Ejemplo 1

En los pasos 3 a 8 se procede de la misma forma. Los resultados se presentan en la siguiente tabla:

x	y_{exacta}	y_{Euler}	ε_t [%]
0	1.0000	1.0000	0.0
0.5	3.2188	5.2500	63.1
1	3.0000	5.8750	95.8
1.5	2.2188	5.1250	131.0
2	2.0000	4.5000	125.0
2.5	2.7188	4.7500	74.7
3	4.0000	5.8750	46.9
3.5	4.7188	7.1250	51.0
4	3.0000	7.0000	133.3

Método de Euler – Ejemplo 1



Se observa que la solución numérica tiene un error significativo, aunque sigue la tendencia de la solución exacta.

Método de Euler

Importación de librerías:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

Entrada de datos:

```
f = input('Ecuación diferencial (dy/dx = f(x,y)):    ')
int_sol = eval(input('Intervalo de solución como lista ([a, b]):    '))
a = float(int_sol[0]);    b = float(int_sol[1])
h = float(input('Tamaño de paso (h):    '))
y_0 = float(input('Condición inicial (y_0 = y(a)):    '))
```

Implementación del método de Euler par EDO:

```
x_sol = np.arange(a,b+h,h)
n = len(x_sol)
y_sol = np.zeros((n,1))
y_sol[0] = y_0
for i in range(1,n):
    x = x_sol[i-1]
    y = y_sol[i-1]
    phi = eval(f)
    y_sol[i] = y_sol[i-1] + phi*h
```

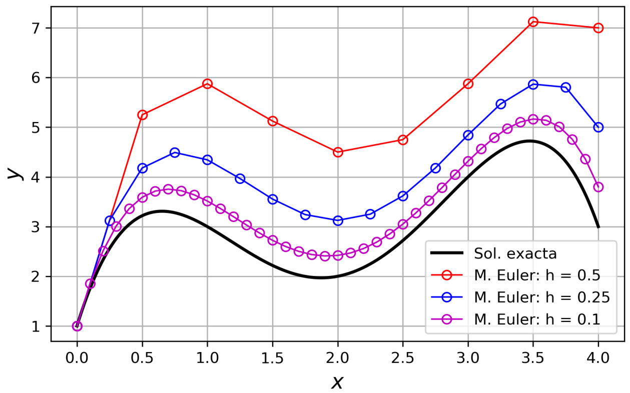
Almacenamiento de resultados:

```
MR_Euler = np.column_stack([x_sol,y_sol])
nom_archivo = 'Res_MEuler'
np.savetxt(nom_archivo,MR_Euler)
```


Método de Euler

Ejemplo 2

El método de Euler tiene un error de truncamiento que es $O(h)$. Por lo tanto, éste varía linealmente con el tamaño del paso. $\rightarrow$ La exactitud se puede mejorar refinando el paso. $\rightarrow$ $h = 0.5,\ 0.25,\ 0.1$



Métodos de Taylor

Métodos de Taylor

Es fácil ver en la ecuación (7) que el método de Euler equivale a una aproximación en serie de Taylor, en la cual se truncó después del término de primer orden:

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + f(x_i,\, y_i)h} \quad (7)$$

Una forma de mejorar este método es conservar más términos de orden superior en dicha expansión.

$$\Downarrow$$

En general se tendrá que la ecuación diferencial es función tanto de la variable independiente, como de la dependiente: $f(x,\, y)$

Métodos de Taylor

Métodos de Taylor

$$f(x,\,y)$$

$$\Downarrow$$

Aparecen derivadas parciales cruzadas en las derivadas de orden superior

$$\Downarrow$$

Aumenta significativamente la cantidad de cálculos

En general, la precisión ganada con esta técnica no compensa el incremento del tiempo de cálculo.

Método de Heun

Método de Heun

Una fuente de error en el método de Euler es que el valor de la derivada en el inicio de un intervalo se aplica a todo el intervalo.

Esto se puede mejorar realizando modificaciones al método. Por ejemplo, el método de Heun propone determinar la pendiente al inicio y al final del intervalo, y usar el valor promedio de ésta para todo el intervalo.

La pendiente al inicio del intervalo se calcula del mismo modo que en el método de Euler:

$$y_i' = f(x_i,\,y_i) \quad (8)$$

Este valor se usa para extrapolar linealmente y obtener el siguiente valor:

$$y_{i+1}^0 = y_i + f(x_i,\,y_i)h \quad (9)$$

Método de Heun

Método de Heun

El valor dado por la ecuación (9) es una predicción intermedia, por lo cual se denota con el superíndice 0 $\rightarrow$ **Ecuación predictora**.

y_{i+1}^0 proporciona una estimación de y_{i+1} que permite calcular una pendiente estimada al final del intervalo:

$$y_{i+1}' = f(x_{i+1},\,y_{i+1}^0) \quad (10)$$

Ahora ambas pendientes se pueden combinar para obtener una pendiente promedio para el intervalo:

$$\bar{y}' = \frac{y_i' + y_{i+1}'}{2} = \frac{f(x_i,\,y_i) + f(x_{i+1},\,y_{i+1}^0)}{2} \quad (11)$$

Método de Heun

Método de Heun

Ahora se puede usar la pendiente promedio de la ecuación (11) para extrapolar linealmente desde y_i hasta y_{i+1} usando el método de Euler:

$$y_{i+1} = y_i + \left[\frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2}\right] h \quad (12)$$

$$\Downarrow$$

Ecuación correctora

Método de Heun

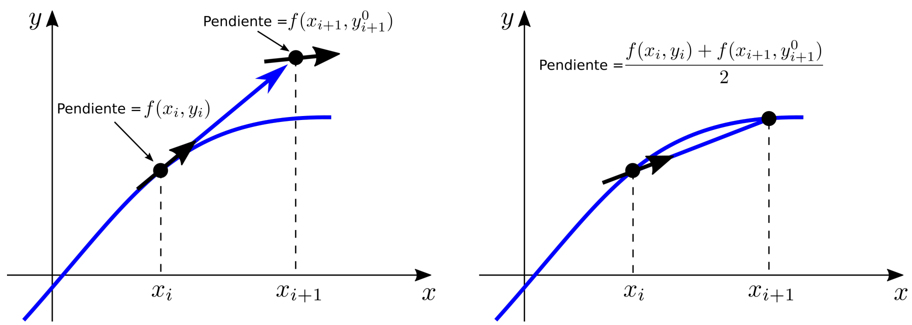
Método de Heun

El método de Heun es de predicción-corrección de un paso, el cual se expresa de manera concisa como:

$$\boxed{y_{i+1}^{0} = y_i + f(x_i,\, y_i)h} \qquad (9)$$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \left[\frac{f(x_i,\, y_i) + f(x_{i+1},\, y_{i+1}^{0})}{2}\right]h} \qquad (12)$$

Método de Heun



Este método tiene una precisión de $O(h^2)$, por lo cual el error de truncamiento disminuye de forma proporcional al cuadrado del paso. $\rightarrow$ Es un orden de magnitud más preciso que el método de Euler.

Método de Heun

Ejemplo 3

Use el método de Heun para resolver numéricamente la ecuación diferencial (3), entre $x = 0$ y $x = 4$, con un tamaño de paso $h = 0.5$. La condición inicial es $y = 1$ en $x = 0$.

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5 = f(x,\, y) \qquad (3)$$

La solución exacta está dada por la ecuación (2):

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$$

Solución:

$$f(x,\, y) = f(x) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

Método de Heun

Ejemplo 3

Paso 1:

$$y_0' = f(0) = -2(0)^3 + 12(0)^2 - 20(0) + 8.5 = 8.5$$

$$y_1^0 = y_0 + f(0)h = 1 + 8.5(0.5) = 5.25$$

$$y_1' = f(0.5,\, 5.25) = -2(0.5)^3 + 12(0.5)^2 - 20(0.5) + 8.5 = 1.25$$

$$\bar{y}_{0-1}' = \frac{y_0' + y_1'}{2} = \frac{8.5 + 1.25}{2} = 4.875$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = y_0 + \bar{y}_{0-1}'h = 1 + 4.875(0.5) = 3.4375$$

Del ejemplo 1 se sabe que la solución exacta en $x = 0.5$ es $y(0.5) = 3.21875$

Por lo tanto, el error relativo de truncamiento es $\varepsilon_{t,1} = 6.8\,\%$

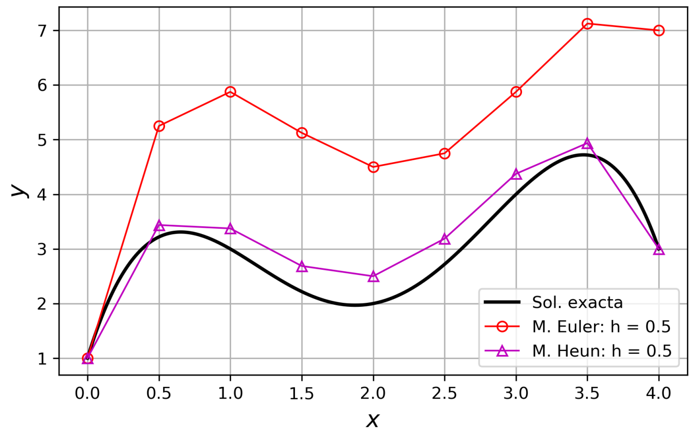
Método de Heun

Ejemplo 3

En los pasos 2 a 8 se procede de la misma forma. Los resultados se presentan en la siguiente tabla:

x	y_{exacta}	y_{Heun}	ε_t [%]
0	1.0000	1.0000	0.0
0.5	3.2188	3.4375	6.8
1	3.0000	3.3750	12.5
1.5	2.2188	2.6875	21.1
2	2.0000	2.5000	25.0
2.5	2.7188	3.1875	17.2
3	4.0000	4.3750	9.4
3.5	4.7188	4.9375	4.6
4	3.0000	3.0000	0.0

Método de Heun – Ejemplo 3

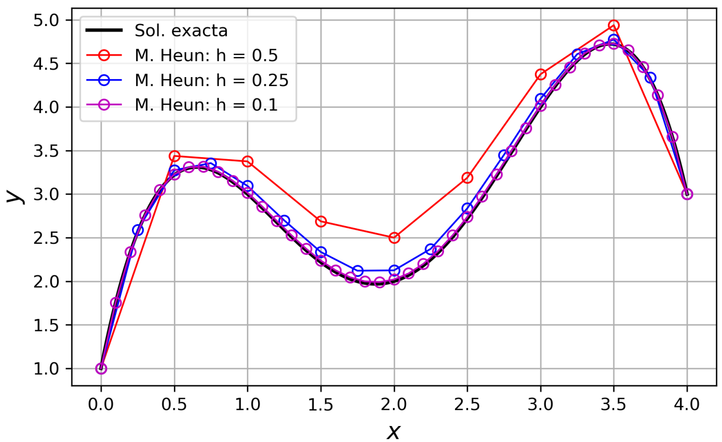


Se observa que la solución numérica con el método de Heun tiene mejor precisión que la correspondiente al método de Euler.

Método de Heun

Ejemplo 4

Se nota un efecto muy significativo en la reducción del error al refinar el paso de cálculo. $\rightarrow \quad h = 0.5,\, 0.25,\, 0.1$



Método de Heun iterativo

Método de Heun iterativo

Debido a que la ecuación (12) tiene el término y_{i+1} en ambos lados, se puede implementar un esquema iterativo para mejorar la estimación:

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \left[\frac{f(x_i,\, y_i) + f(x_{i+1},\, y_{i+1}^0)}{2}\right] h} \qquad (12)$$

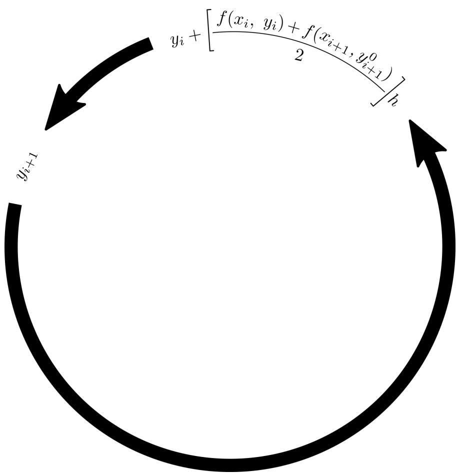
El proceso iterativo no necesariamente convergerá al valor exacto de la solución, pero si lo hará a un valor con un menor error de truncamiento.

El proceso de iteración se detiene cuando se alcance un error relativo aproximado igual o menor que la tolerancia:

$$\varepsilon_a = \left|\frac{y_{i+1}^j - y_{i+1}^{j-1}}{y_{i+1}^j}\right|$$

Donde y_{i+1}^j y y_{i+1}^{j-1} son los valores del corrector en la iteración presente y en la previa, respectivamente.

Método de Heun iterativo



Últil únicamente cuando $y' = f(x,y)$

Método de Heun iterativo– Ejemplo 5

Ejemplo 5

Use el método de Heun convencional, así como su versión iterativa para resolver numéricamente la ecuación diferencial dada, entre $x = 0$ y $x = 4$, con un tamaño de paso $h = 1$.

$$\frac{dy}{dx} = 4e^{0.8x} - 0.5y = f(x,\, y)$$

La condición inicial es $y = 2$ en $x = 0$.

Use una tolerancia de 1×10^{-4} para el método iterativo

La solución exacta está dada por:

$$y = \frac{4}{1.3}\left(e^{0.8x} - e^{-0.5x}\right) + 2e^{-0.5x}$$

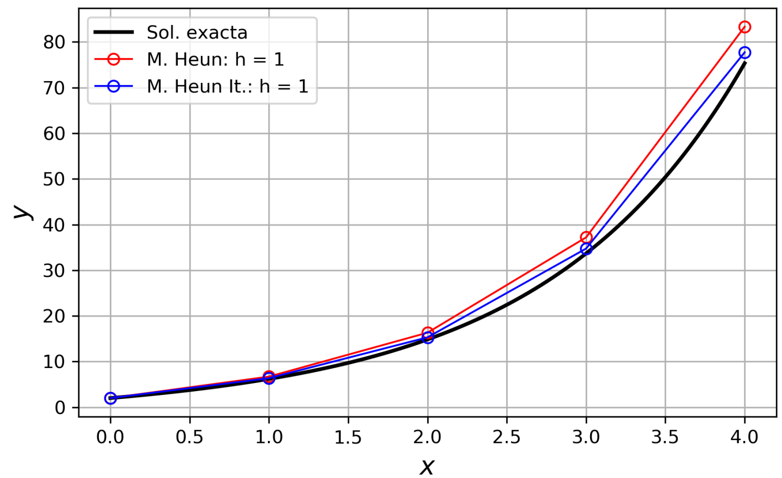
Método de Heun iterativo– Ejemplo 5

Ejemplo 5

x	y_{ex}	y_H	ε_H [%]	$y_{H_{it}}$	N_it	$\varepsilon_{H_{it}}$ [%]
0	2	2	0	2	–	0
1	6.1946634	6.7010818	8.18	6.3609485	7	2.68
2	14.8439219	16.3197819	9.94	15.302483	7	3.09
3	33.6771718	37.199249	10.46	34.7438682	7	3.17
4	75.3389626 6	83.337767	10.62	77.7364445	7	3.18

$\boxed{t_{c,H} = 0.0014\ s}$ $\boxed{t_{c,H_{it}} = 0.002\ s}$

Método de Heun iterativo– Ejemplo 5



Métodos de Runge–Kutta

Métodos de Runge–Kutta

Estos métodos pueden alcanzar la precisión de la aproximación mediante series de Taylor, pero sin requerir el cálculo de derivadas de orden superior.

Existen muchas variaciones de los métodos de Runge–Kutta (RK), pero en general tienen la siguiente forma:

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \phi(x_i,\, y_i,\, h)\, h} \qquad (13)$$

Donde $\phi(x_i,\, y_i,\, h)$ se denomina la función de incremento, la cual se puede interpretar como una pendiente representativa a lo largo del intervalo.

La función de incremento se puede escribir de forma general como:

$$\boxed{\phi(x_i,\, y_i,\, h) = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n} \qquad (14)$$

Métodos de Runge–Kutta

Métodos de Runge–Kutta

En la ecuación (14) los términos a_i son constantes, y los términos k_i se calculan de la siguiente forma:

$$\boxed{\begin{aligned} k_1 &= f(x_i,\, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + p_1 h,\, y_i + q_{1,1} k_1 h) \\ k_3 &= f(x_i + p_2 h,\, y_i + q_{2,1} k_1 h + q_{2,2} k_2 h) \\ &\vdots \\ k_n &= f(x_i + p_{n-1} h,\, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \cdots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h) \end{aligned}} \qquad (15)$$

Donde los términos p_i y $q_{i,j}$ son constantes.

Métodos de Runge–Kutta

Métodos de Runge–Kutta

Se observa que los términos k_i son relaciones de recurrencia, ya que k_1 aparece en la ecuación para k_2, a su vez éstos aparecen en la ecuación para k_3, y así sucesivamente. Debido a que cada término k_i implica una evaluación de función, los métodos de RK son eficientes para cálculos computacionales.

Se pueden obtener varios métodos de RK, dependiendo del número de términos que se usen en la función de incremento, según se especifica por n.

El método de RK de primer orden $(n = 1)$ es el mismo método de Euler.

Para determinar el valor de las constantes a_i, p_i y $q_{i,j}$, se iguala la ecuación (13) a una expansión en serie de Taylor del mismo orden del método (conservando los términos del orden correspondiente).

RK de segundo orden

RK de segundo orden

La versión de segundo orden del método de RK es:

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)\, h} \qquad (16)$$

Donde:

$$\boxed{\begin{aligned} k_1 &= f(x_i,\, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + p_1 h,\, y_i + q_{1,1} k_1 h) \end{aligned}} \qquad (17)$$

Como se mencionó antes, los valores de a_1, a_2, p_1, y $q_{1,1}$ se determinan al igualar la ecuación (16) a una expansión en serie de Taylor de segundo orden. Al hacer esto se obtienen tres ecuaciones con cuatro incógnitas:

RK de segundo orden

RK de segundo orden

Al hacer esto se obtienen tres ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$a_1 + a_2 = 1 \qquad a_2 p_1 = \frac{1}{2} \qquad a_2 q_{1,1} = \frac{1}{2}$$

Debido a que se tiene una incógnita más que el número de ecuaciones, el sistema tiene un grado de libertad. $\rightarrow$ Se debe asumir el valor de una de las incógnitas para determinar el valor de las tres restantes.

Si se asume el valor de a_2, se resuelve el sistema de ecuaciones anterior para las variables a_1, p_1, y $q_{1,1}$.

Se puede dar un número infinito de valores a la constante a_2, por lo cual existen infinitos métodos RK de segundo orden.

RK de segundo orden

RK de segundo orden

El método de RK de segundo orden más comúnmente usado es el llamado método de Ralston, en el cual se toma un valor de $a_2 = 2/3$, con lo cual se minimiza el error de truncamiento.

Con esta aproximación se obtienen los siguientes valores de las demás constantes: $a_1 = 1/3$, $p_1 = q_{1,1} = 3/4$, con lo cual:

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right) h} \tag{18}$$

Donde:

$$\boxed{\begin{aligned} k_1 &= f(x_i,\, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + \frac{3}{4}h,\, y_i + \frac{3}{4}k_1 h) \end{aligned}} \tag{19}$$

RK de segundo orden

Ejemplo 6

Use el método de Ralston para resolver numéricamente la ecuación diferencial (3), entre $x = 0$ y $x = 4$, con un tamaño de paso $h = 0.5$. La condición inicial es $y = 1$ en $x = 0$. Compare los resultados con los obtenidos mediante los métodos de Euler y de Heun.

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5 = f(x,\, y)$$

La solución exacta está dada por la ecuación (2):

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$$

RK de segundo orden

Ejemplo 6

Solución:

Paso 1:

Usando la ecuación (19) se tiene:

$$k_1 = -2(0)^3 + 12(0)^2 - 20(0) + 8.5 = 8.5$$

$$k_2 = -2(0.375)^3 + 12(0.375)^2 - 20(0.375) + 8.5 = 2.58203125$$

La pendiente media se calcula como:

$$\phi = \frac{1}{3}(8.5) + \frac{2}{3}(2.58203125) = 4.5546875$$

Este valor se usa para predecir la función en $x = 0.5$:

$$y(0.5) = 1 + 4.5546875(0.5) = 3.27734375$$

RK de segundo orden

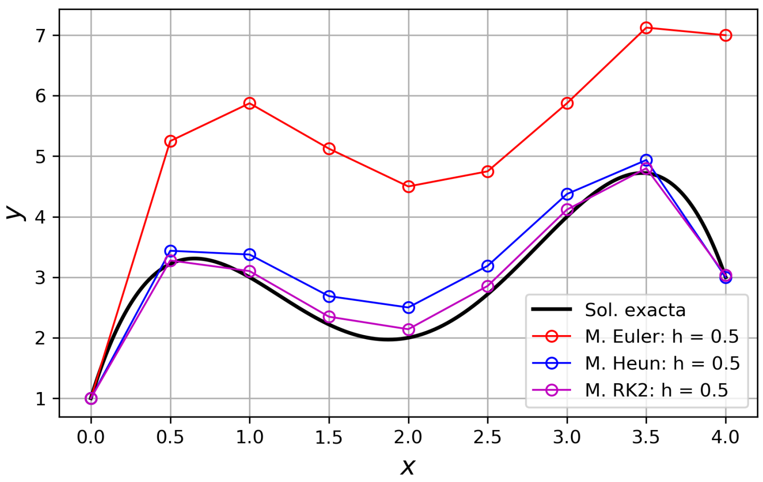
Ejemplo 6

Del ejemplo 1 se sabe que la solución exacta en $x = 0.5$ es $y(0.5) = 3.21875$

Por lo tanto, el error relativo de truncamiento es $\varepsilon_{t,1} = 1.82\,\%$
En los pasos 2 a 8 se procede de la misma forma. Los resultados se presentan en la siguiente tabla:

x	y_{exacta}	y_{RK2}	ε_t [%]
0	1.0000	1.00000	0.0
0.5	3.2188	3.277344	1.8
1	3.0000	3.101563	3.4
1.5	2.2188	2.347656	5.8
2	2.0000	2.140625	7.0
2.5	2.7188	2.855469	5.0
3	4.0000	4.117188	2.9
3.5	4.7188	4.800781	1.7
4	3.0000	3.031250	1.0

RK de segundo orden – Ejemplo 6



RK de tercer orden

RK de tercer orden

Para $n = 3$ se usa una metodología similar a la del caso de segundo orden para determinar las constantes. El resultado es el siguiente:

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 4k_2 + k_3\right) h} \tag{20}$$

Donde:

$$\boxed{\begin{aligned} k_1 &= f(x_i,\, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h,\, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right) \\ k_3 &= f\left(x_i + h,\, y_i - k_1 h + 2k_2 h\right) \end{aligned}} \tag{21}$$

RK de cuarto orden

RK de cuarto orden

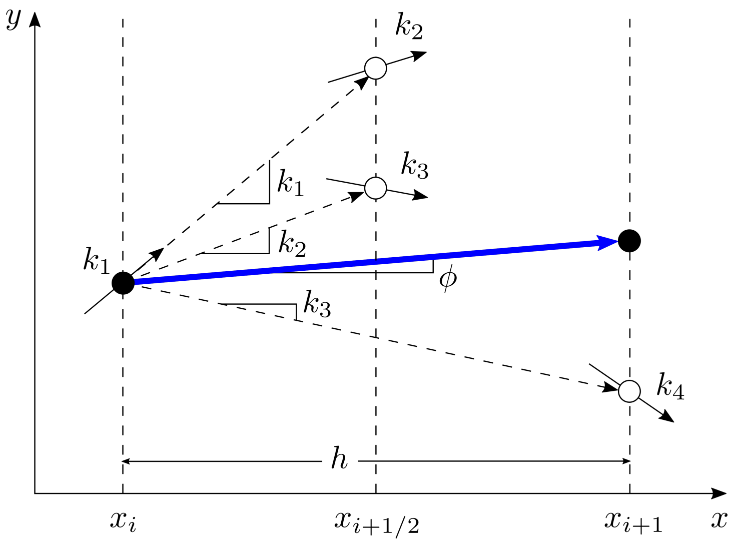
Este es el método de RK más popular, ya que combina precisión y economía de cálculo. Se denomina el método clásico de RK de cuarto orden:

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) h} \tag{22}$$

Donde:

$$\boxed{\begin{aligned} k_1 &= f(x_i,\, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h,\, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right) \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h,\, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right) \\ k_4 &= f(x_i + h,\, y_i + k_3 h) \end{aligned}} \tag{23}$$

RK de cuarto orden



RK de cuarto orden – Ejemplo 7

Ejemplo 7

Repita el ejemplo anterior usando el método clásico de RK de cuarto orden para resolver numéricamente la ecuación diferencial (3), entre $x = 0$ y $x = 4$, con un tamaño de paso $h = 0.5$. La condición inicial es $y = 1$ en $x = 0$. Compare los resultados con los obtenidos mediante los métodos de Euler, de Heun, y el método RK de orden 4.

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5 = f(x,\, y)$$

La solución exacta está dada por la ecuación (2):

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$$

RK de cuarto orden – Ejemplo 7

Ejemplo 7

Solución: Paso 1

Usando la ecuación (23) se tiene:

$k_1 = f(x_0,\, y_0) = f(0,\, 1) = -2(0)^3 + 12(0)^2 - 20(0) + 8.5 = 8.5$

$k_2 = f\left(x_0 + \frac{1}{2}h,\, y_0 + \frac{1}{2}k_1 h\right) = f(0.25,\, 3.125) =$
$-2(0.25)^3 + 12(0.25)^2 - 20(0.25) + 8.5 = 4.21875$

$k_3 = f\left(x_0 + \frac{1}{2}h,\, y_0 + \frac{1}{2}k_2 h\right) = f(0.25,\, 2.0546875) =$
$-2(0.25)^3 + 12(0.25)^2 - 20(0.25) + 8.5 = 4.21875$

$k_4 = f(x_0 + h,\, y_0 + k_3 h) = f(0.5,\, 3.109375) = -2(0.5)^3 + 12(0.5)^2 - 20(0.5) + 8.5 = 1.25$

RK de cuarto orden – Ejemplo 7

Ejemplo 7

Solución: Paso 1

Por lo tanto, usando la ecuación (22):
$y_1 = y(0.5) = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\, h =$
$1 + \frac{1}{6}(8.5 + 2(4.21875) + 2(4.21875) + 1.25)(0.5) = 3.21875$

Del ejemplo 1 se sabe que la solución exacta en $x = 0.5$ es $y_1 = y(0.5) = 3.21875$

Por lo tanto, el error relativo de truncamiento es:

$$\varepsilon_{t,1} = 0.00\,\%$$

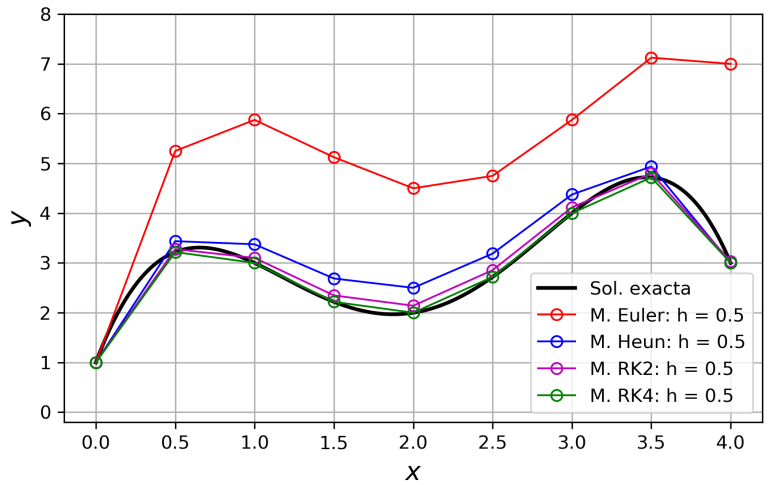
RK de cuarto orden – Ejemplo 7

Ejemplo 7

En los pasos 2 a 8 se procede de la misma forma. Los resultados se presentan en la siguiente tabla:

x	y_{exacta}	y_{RK4}	ε_t [%]
0	1.0000	1.00000	0.00
0.5	3.2188	3.21875	1.55×10^{-5}
1	3.0000	3.00000	0.00
1.5	2.2188	2.21875	2.25×10^{-5}
2	2.0000	2.00000	0.00
2.5	2.7188	2.71875	1.84×10^{-5}
3	4.0000	4.00000	0.00
3.5	4.7188	4.71875	1.06×10^{-5}
4	3.0000	3.00000	0.00

RK de segundo orden – Ejemplo 7



Métodos de Runge–Kutta de orden superior

Métodos de Runge–Kutta de orden superior

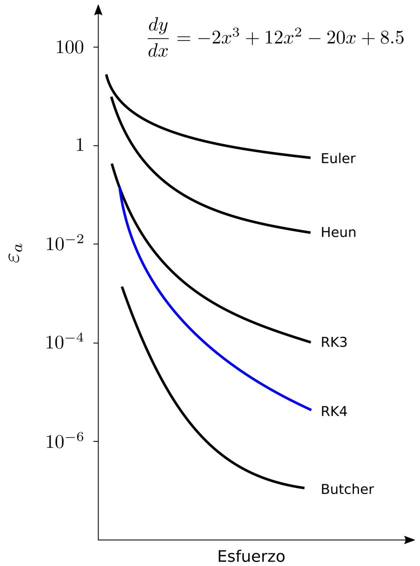
Estos métodos se usan cuando se requiere mayor precisión. El método de de RK de quinto orden se denomina método de Butcher:

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \frac{1}{90}\left(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6\right)h} \quad (24)$$

Donde:

$$\boxed{\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i) \\
k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{4}k_1 h\right) \\
k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{8}k_1 h + \frac{1}{8}k_2 h\right) \\
k_4 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i - \frac{1}{2}k_2 h + k_3 h\right) \\
k_5 &= f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{16}k_1 h + \frac{9}{16}k_4 h\right) \\
k_6 &= f\left(x_i + h, y_i - \frac{3}{7}k_1 h + \frac{2}{7}k_2 h + \frac{12}{7}k_3 h - \frac{12}{7}k_4 h + \frac{8}{7}k_5 h\right)
\end{aligned}} \quad (25)$$

Comparación métodos de RK



$$\text{Esfuerzo} = n_f\left(\frac{b-a}{h}\right)$$

A continuación

Próxima clase

- Solución de sistemas de EDO.
- EDO de orden superior