MÉTODOS NUMÉRICOS 3006907

NOTAS DE CLASE - SEMANA 02

SOLUCIÓN DE ECUACIONES DE UNA VARIABLE

Hemos mencionado expresiones como: converge lentamente, la convergencia es más rápida. Vamos a formalizar estas expresiones.

Definición (Orden de convergencia)**.** *Supongamos que $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión que converge a p, con $p_n \neq p$, $\forall n$. Si existen constantes positivas λ y α tales que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1}-p|}{|p_n-p|^\alpha} = \lambda$$

entonces $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a p con orden α y una constante asintotica λ.
O equivalentemente, existe una constante $C > 0$ tal que

$$|p - p_{n+1}| \leq C|p - p_n|^\alpha \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En general, entre α más grande, la convergencia es más rápida. En particular

- si $\alpha = 1$ la sucesión será linealmente convergente,
- si $\alpha = 2$ la sucesión será cuadráticamente convergente.

El método de bisección genera una sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge linealmente, es decir, el orden de convergencia 1.

El método de punto fijo presenta los siguientes órdenes de convergencia.

Teorema. *Supongamos que g satisface las hipótesis del T.E.U.P.F. en $[a, b]$ y denotemos por p su único punto fijo en $[a, b]$. Si además, se cumple que $g'(p) \neq 0$ entonces el orden de convergencia de la sucesión generada por la iteración $p_{n+1} = g(p_n)$, $n \geq 0$ es lineal.*

Teorema. *Supongamos que g satisface las hipótesis del T.E.U.P.F. en $[a, b]$ y denotemos por p su único punto fijo en $[a, b]$. Si además, se cumple que $g \in \mathcal{C}^2[a, b]$, $g'(p) = 0$ y $g''(p) \neq 0$ entonces el orden de convergencia de la sucesión generada por la iteración $p_{n+1} = g(p_n)$, $n \geq 0$ es cuadrático.*

Entre estos dos resultados, nos llama más la atención el segundo, tener convergencia cuadrática. Pero, ¿cuando se cumplirán esas hipótesis adicionales? Daremos respuesta en un rato!

Antes de continuar, recordemos un resultado útil en varios temas a estudiar en el curso.

Teorema (Taylor)**.** *Supongamos que $f \in \mathcal{C}^n[a, b]$, que $f^{(n+1)}$ existe en (a, b) y $x_0 \in [a, b]$. Para cada $x \in [a, b]$ existe un número $\beta(x)$ entre x_0 y x tal que:*

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(k+1)}(\beta(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

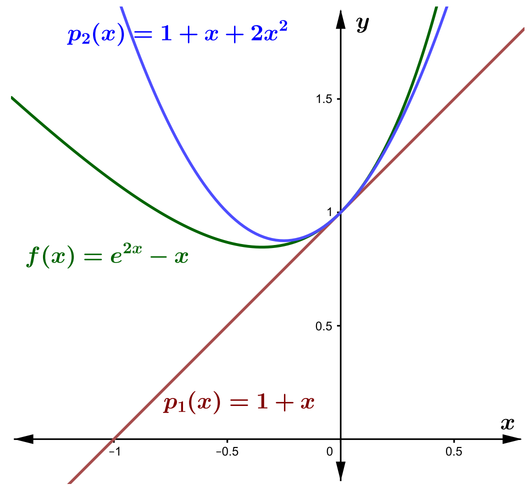
donde P_n es el n-ésimo polinomio de Taylor para f en torno a x_0 y R_n es el término del residuo (error de truncamiento) asociado a P_n.

Coloquialmente hablando, si f es suficientemente regular, la función f se puede aproximar por medio de un polinomio. En particular, si f tiene sus primeras n derivadas continuas alrededor de x, $f^{(n+1)}$ existe alrededor de x y x es muy cercano a x_0, entonces $(x - x_0)^{n+1} \approx 0$ y por lo tanto $f(x) \approx P_n(x)$.

$\boxed{\textbf{\textit{Ejemplo}}}$ Hallar la expansión en serie de Taylor para la función $f(x) = e^{2x} - x$ alrededor de $x_0 = 0$.

<u>*Solución:*</u> La función f es infinitamente diferenciable en todo $\mathbb{R}$. Calculemos las derivadas y evaluemos en $x_0 = 0$:

$$
\begin{array}{lcl}
f(x) = e^{2x} - x & \to & f(0) = 1 \\
f'(x) = 2e^{2x} - 1 & \to & f'(0) = 1 \\
f''(x) = 4e^{2x} & \to & f''(0) = 2^2 \\
f'''(x) = 8e^{2x} & \to & f'''(0) = 2^3 \\
f^{(iv)}(x) = 16e^{2x} & \to & f^{(iv)}(0) = 2^4 \\
\vdots & & \vdots \\
f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x} & \to & f^{(n)}(0) = 2^n
\end{array}
$$

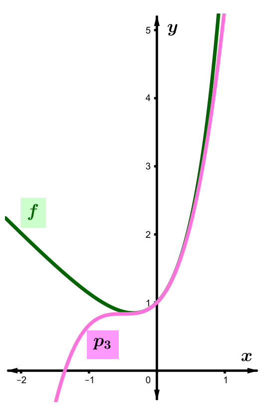


así

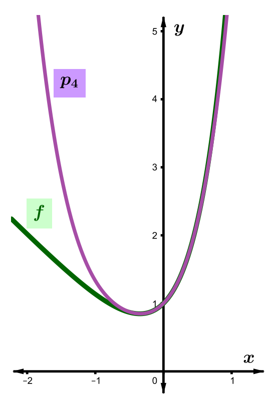
$$e^{2x} - x = 1 + x + \frac{4}{2!}x^2 + \frac{8}{3!}x^3 + \frac{16}{4!}x^4 + \ldots + \frac{2^n}{n!}x^n + \ldots$$

A la derecha vemos las gráficas de la función f y los polinomios de aproximación p_1 y p_2. Los polinomios ofrecen una muy buena aproximación de la función cerca de $x_0 = 0$. Y como se espera, al aproximar f por medio de polinomios de Taylor de mayor orden, a saber p_3, p_4, p_5, obtenemos una mejor aproximación de f en un mayor intervalo centrado en $x_0 = 0$.

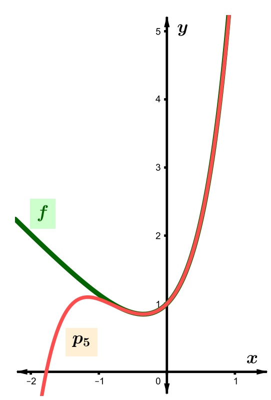
$p_3(x) = 1 + x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3$



$p_4(x) = 1 + x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4$

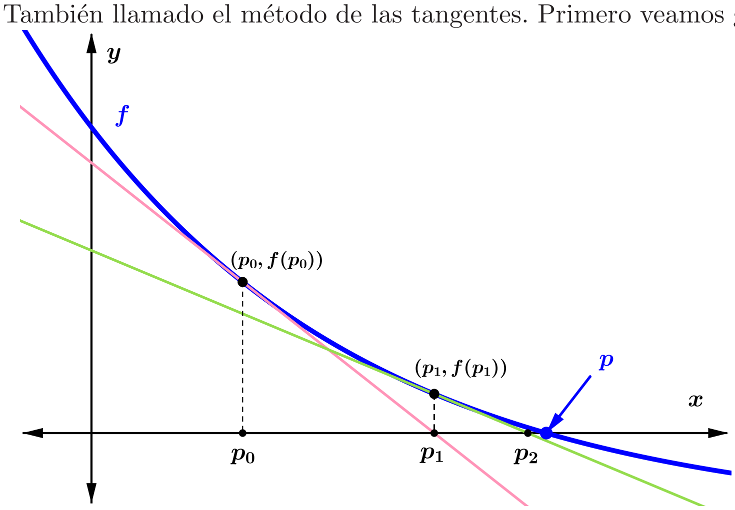


$p_5(x) = 1 + x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5$



MÉTODO DE NEWTON

También llamado el método de las tangentes. Primero veamos gráficamente en que consiste el método de Newton.



Supongamos que f es continua en un intervalo que contenga a p, p tal que $f(p) = 0$, es decir, p raíz de la ecuación $f(x) = 0$. Tomemos p_0 un valor cercano a p y p_1 será la coordenada x del punto de corte de la recta tangente a la curva f en el punto $(p_0, f(p_0))$ (recta rosada) y el eje x, $(p_1, 0)$

$$m_{\text{T}} = f'(p_0) = \frac{f(p_0) - 0}{p_0 - p_1}$$

si $f'(p_0) \neq 0$, si hay punto de corte y podemos despejar

$$p_0 - p_1 = \frac{f(p_0)}{f'(p_0)} \quad \Rightarrow \quad p_1 = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}.$$

Si $f(p_1) \neq 0$, procedemos de manera similar para obtener p_2, trazamos la recta tangente a f en el punto $(p_1, f(p_1))$ y obtenemos las coordenadas del punto de corte con el eje x, $(p_2, 0)$

$$p_2 = p_1 - \frac{f(p_1)}{f'(p_1)}.$$

siempre que $f'(p_1) \neq 0$. Así obtenemos la ecuación de ***iteración de Newton***

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Analíticamente, el método de Newton viene del teorema de Taylor. Citaremos primero el teorema que nos garantiza convergencia de la sucesión generada por la iteración de Newton y una observación del mismo.

Teorema. *Sea $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$. Si $p \in (a, b)$ es tal que $f(p) = 0$ y $f'(p) \neq 0$ entonces existe $\delta > 0$ tal que la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ generada por la iteración de Newton $p_{n+1} = p_n - \dfrac{f(p_n)}{f'(p_n)}$, $n \geq 0$ converge a p para cualquier aproximación inicial $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$.*

Ahora, la pregunta es: ¿quien es δ? Para tener una idea, sigamos algunos pasos de la demostración de este teorema.
Si $f'(p) \neq 0$, como f' es continua en $[a, b]$, f' es continua en p, así que existe al menos un intervalo I centrado en p donde f' no se anula, esto es, $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$.
Usando Taylor de f en torno a $p_0 \in I$, para $x \in I$ existe $\beta(x)$ entre x y p_0 tal que

$$f(x) = f(p_0) + f'(p_0)(x - p_0) + \frac{f''(\beta(x))}{2!}(x - p_0)^2,$$

evaluando en p

$$0 = f(p) = f(p_0) + f'(p_0)(p - p_0) + \frac{f''(\beta(x))}{2!}(p - p_0)^2,$$

si p es “cercano” a p_0 entonces $(p - p_0)^2 \approx 0$ y dado que f'' esta acotado en I

$$0 \approx f(p_0) + f'(p_0)(p - p_0)$$

y como $f'(p_0) \neq 0$ ya que $p_0 \in I$

$$p \approx p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}.$$

Hasta acá lo que podemos decir de δ, es que debe ser tal que $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in [p-\delta, p+\delta]$. Además vimos que otra forma de llegar a la iteración de Newton es partiendo del teorema de Taylor. La segunda parte de la demostración, me garantiza la convergencia y da otra restricción sobre δ (por ahora no enfatizaremos en ella).

Ejemplo Demostrar que la función $f(x) = e^{-x} - 7x + 8$ tiene al menos un cero en $[1,2]$ y aproxímelo usando el método de Newton.

Solución: Para garantizar que la función f tiene al menos un cero en $[1,2]$, verificamos que f sea continua y $f(1)\,f(2) < 0$ y así gracias al T.V.I. tendremos la existencia

- f es continua en todo $\mathbb{R}$ (exponencial, lineal, constante), en particular, es continua en $[1,2]$ ✓
- $f(1) \approx 1{,}3679$ y $f(2) \approx -5{,}8647$, así $f(1)\,f(2) < 0$ ✓

Ahora, para aproximar el cero empleando la iteración de Newton, si queremos garantizar que la sucesión converja verificamos las hipótesis del teorema

- $f(x) = -e^{-x} - 7$, $f''(x) = e^{-x}$, claramente $f \in \mathcal{C}^2[1,2]$ ya que f, f' y f'' son continuas en $[1,2]$ ✓
- existe al menos un $p \in (1,2)$ tal que $f(p) = 0$, gracias al T.V.I. ✓
- $f'(p) \neq 0$: ya que la función $e^{-x} > 0$ en todo $\mathbb{R}$, concluimos que $f'(x) = -(e^{-x} + 7) < 0$ para todo $x \in [1,2]$, en particular $f'(p) < 0$ ✓

concluimos que la sucesión generada por la iteración

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)} = p_n - \frac{e^{-p_n} - 7p_n + 8}{e^{-p_n} - 7}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

converge para todo $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$, para un $\delta > 0$ fijo. Pero, lo que sabemos hasta acá de δ es que en el intervalo $[p-\delta, p+\delta]$ se debe cumplir que $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in [p-\delta, p+\delta]$, y dado que $f'(x) \neq 0$ en $[1,2]$, tomemos, por ejemplo, $p_0 = 1{,}1$, así

n	p_n	$f(p_n)$
0	$p_0 = 1{,}1$	$6{,}3287e-01$
1	$p_1 \approx 1{,}186306042541104$	$1{,}2048e-03$
2	$p_2 \approx 1{,}186470966236433$	$4{,}1525e-09$
3	$p_3 \approx 1{,}186470966804851$	$8{,}8818e-16$
4	$p_4 \approx 1{,}186470966804852$	$-1{,}7764e-15$

si hacemos unas iteraciones más obtenemos que $p_5 = p_3$ y $p_6 = p_4$, queda oscilando entre p_3 y p_4, así la mejor aproximación al cero de la función f será p_3.

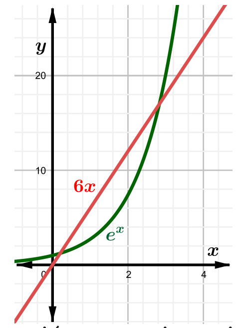
Nota Los valores encontrados dependen de la capacidad de maquina empleada, puede que los valores varíen en maquinas con diferente capacidad de cálculo.

Ejemplo Demostrar que la ecuación $e^x - 3x^2 = 0$ tiene una única solución en $[3,5]$. Aproxímela usando el método de Newton.

Solución: Para demostrar que la ecuación tiene al menos una raíz, si denotamos por $f(x) = e^x - 3x^2$, basta verificar que f sea continua en $[3,5]$ y $f(3)\,f(5) < 0$ y así gracias al T.V.I. tendremos la existencia

- f es continua en todo $\mathbb{R}$ (exponencial, polinomio), en particular, es continua en $[3,5]$ ✓
- $f(3) \approx -6{,}9145$ y $f(5) \approx 73{,}4132$, así $f(3)\,f(5) < 0$ ✓

Ahora, un caso en el cual se puede garantizar que la raíz es única, será cuando f sea monótona, esto es, f creciente o decreciente en $[3, 5]$; veamos si es el caso



$$f'(x) = e^x - 6x\,,$$

notemos que e^x y $6x$ son funciones crecientes en el intervalo $[3, 5]$ y nuevamente, son funciones conocidas, así que al ver la gráfica notamos que $f'(x) > 0$, para toda $x \in [3, 5]$, lo cual nos permite concluir que la raíz de la ecuación $e^x - 3x^2 = 0$ en $[3, 5]$ es única.

Ahora, para aproximar la raíz empleando la iteración de Newton, si queremos garantizar que la sucesión converja verificamos las hipótesis del teorema

- $f''(x) = e^x - 6$, claramente $f \in \mathcal{C}^2[3, 5]$ ya que f, f' y f'' son continuas en $[3, 5]$ ✓
- existe $p \in (3, 5)$ tal que $f(p) = 0$, gracias al T.V.I. ✓
- $f'(p) \neq 0$ ya que $f'(x) > 0$ para todo $x \in [3, 5]$ ✓

concluimos que la sucesión generada por la iteración

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)} = p_n - \frac{e^{p_n} - 3p_n^2}{e^{p_n} - 6p_n} = \frac{p_n e^{p_n} - 3p_n^2 - e^{p_n}}{e^{p_n} - 6p_n}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

converge para todo $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$, para un $\delta > 0$ fijo. Pero, lo que sabemos hasta acá de δ es que en el intervalo $[p - \delta, p + \delta]$ se debe cumplir que $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in [p - \delta, p + \delta]$, y dado que $f'(x) \neq 0$ en $[3, 5]$, tomemos, por ejemplo, $p_0 = 4{,}2$, así

n	p_n	$f(p_n)$
0	$p_0 = 4{,}2$	13,766331040925152
1	$p_1 \approx 3{,}868171884678232$	2,966560745083846
2	$p_2 \approx 3{,}747804038087692$	0,289704448413119
3	$p_3 \approx 3{,}733275947298017$	0,003822720765811
4	$p_4 \approx 3{,}733079064394783$	$6{,}941099073287660e - 07$
5	$p_5 \approx 3{,}733079028632815$	$2{,}131628207280301e - 14$
6	$p_6 \approx 3{,}733079028632814$	$7{,}105427357601002e - 15$

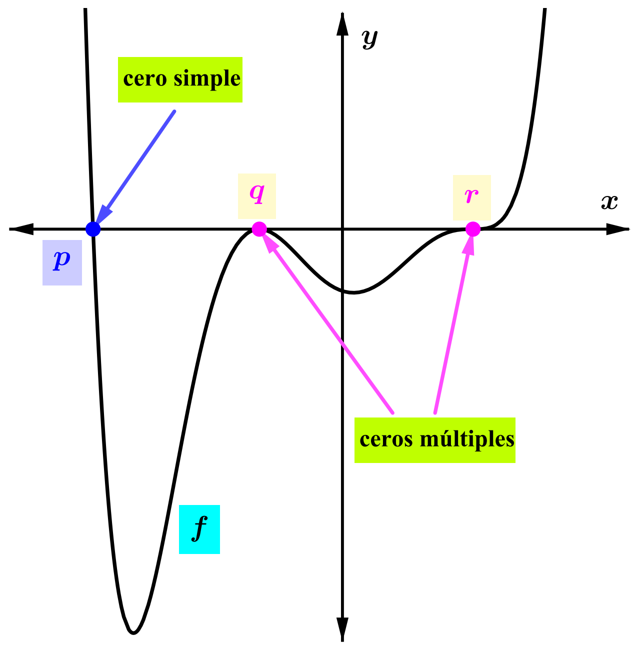
si hacemos una iteración más obtenemos $p_7 \approx 3{,}733079028632814$ que coincide con p_6 y vemos que es muy buena aproximación de la raíz ya que $f(p_6) \approx 7{,}1054 \times 10^{-15} \approxeq 0$.

Observaciones

1. Notemos que el método de Newton no es más que un caso particular de punto fijo tomando $g(x) := x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, motivo por el cual la columna de aproximaciones p_n de la tabla, tiende a un punto fijo.
2. En este caso, vemos que ya en la sexta iteración encontramos una muy buena aproximación a la raíz, siendo este un método muy veloz.
3. Una pregunta que surge ahora es, si Newton es un caso particular de punto fijo y en punto fijo hay convergencia lineal y cuadrática, ¿cómo saber cuál será la convergencia de Newton?

Criterios de parada Dada una tolerancia `tol`, un `epsilon` y un número máximo de iteraciones `nmax`, vamos a parar de generar aproximaciones p_n de la raíz p de la ecuación $f(x) = 0$ cuando se cumpla una de las siguientes condiciones

- $|f(p_n)| <$ `epsilon`
- $|p_{n+1} - p_n| <$ `tol`,
- $n >$ `nmax`



Para responder a la pregunta dada en las observaciones sobre el orden de convergencia en el método de Newton, necesitamos introducir el concepto de multiplicidad. Antes de ello: ¿como podemos aproximar los ceros p, q y r de la función f?

Notemos que las raíces p y r se pueden aproximar usando el método de bisección, p también se podría aproximar usando el método de Newton, pero, q y r no se podrían, en principio, aproximar usando el método de Newton ya que $f'(q) = 0$ y $f'(r) = 0$. En este caso, la función graficada es $f(x) = (x-p)\,(x-q)^2\,(x-r)^3$, podemos decir que q es un cero de f que se '*repite*' dos veces, r se '*repite*' tres veces y p solo una vez. En general, cuando la gráfica de una función, presenta puntos de máximo o mínimo local, tocando el eje x, tendremos un cero par de la función y cuando presenta cambio de concavidad en el eje x, tendremos un cero impar de la función, en estos casos decimos que la función tiene cero múltiple (los ceros q y r de f son múltiples). Cuando simplemente hay un corte con el eje x, se dice que es un cero simple (p es un cero simple de f).

Analíticamente, la multiplicidad de un cero p de una función f esta caracterizado a continuación.

Definición. *Una solución p de $f(x) = 0$ es un **cero de multiplicidad** m de f, si para $x \neq p$ podemos escribir*

$$f(x) = (x-p)^m\, q(x) \qquad \textit{donde} \qquad \lim_{x\to p} q(x) \neq 0.$$

Esta definición no nos da mucho de donde '*pegarnos*' para hallar la función q. Veamos un resultado que nos permite clasificar los ceros de una función, simple o múltiple.

Teorema. *La función $f \in \mathcal{C}^m[a,b]$ tiene un cero de multiplicidad m en $p \in [a,b]$ si y solo si*

$$0 = f(p) = f'(p) = \cdots = f^{(m-1)}(p) \qquad y \qquad f^{(m)}(p) = 0.$$

★ ***Método de Newton converge <u>cuadráticamente</u> para ceros simples***: si $f \in \mathcal{C}^2[a,b]$, $f(p) = 0$ y $f'(p) \neq 0$ (por ser simple), sabemos

$$0 = f(p_n) + f'(p_n)(p-p_n) + \frac{f''(\beta(p_n))}{2!}(p-p_n)^2 \text{ como } f'(p_n) \neq 0$$
$$0 = \frac{f(p_n)}{f'(p_n)} + \frac{f''(\beta(p_n))}{2f'(p_n)}(p-p_n)^2$$

por otro lado, de la iteración de Newton

$$|p - p_{n+1}| = \left| p - p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)} \right| = \left| \frac{f''(\beta(p_n))}{2f'(p_n)} \right| |p-p_n|^2$$

así

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p-p_{n+1}|}{|p-p_n|^2} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{f''(\beta(p_n))}{2f'(p_n)} \right| = \frac{1}{2}\frac{f''(p)}{f'(p)}$$

lo que muestra, por definición, que la sucesión generada por la iteración de Newton converge con orden $\alpha = 2$.

★ ***Método de Newton converge <u>linealmente</u> para ceros múltiples***. Según lo estudiado hasta ahora, el método de Newton no se podría aplicar a un cero múltiple p, ya que $f'(p) = 0$ y en principio podría suceder que $f'(p_n) \approx 0$ y habría una división por casi cero en el término $\dfrac{f(p_n)}{f'(p_n)}$. Pero ojo, no solo el denominador es casi cero, también el numerador, es más, el numerador es más cercano a cero que el denominador, por lo tanto, este término $\dfrac{f(p_n)}{f'(p_n)}$ es '*calculable*' permitiendo aplicar el método de Newton también a ceros múltiples. La convergencia lineal en este caso, queda como ejercicio de consulta.

Nos preguntamos ¿existirá un método que converja cuadráticamente para ceros múltiples? Si, se proponen los métodos de Newton acelerado y Newton modificado.
Supongamos que p es un cero de multiplicidad $m \geq 2$ de la función f:

- Newton acelerado: la ecuación de iteración de este método esta dada por

$$p_{n+1} = p_n - m\frac{f(p_n)}{f'(p_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

- Newton modificado: la ecuación de iteración de este método esta dada por

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)\, f'(p_n)}{[f'(p_n)]^2 - f(p_n)\, f''(p_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

  El método de Newton modificado viene de aplicar el método de Newton a la función $\mu(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, si f tiene un cero de multiplicidad $m \geq 2$ en p se tiene que μ tiene un cero simple en el mismo p. En efecto, existe una función q tal que $\lim_{x\to p} q(x) \neq 0$ y

$$f(x) = (x-p)^m q(x) \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = (x-p)^m q'(x) + m(x-p)^{m-1} q(x)$$

  así

$$\mu(x) = \frac{(x-p)^m q(x)}{(x-p)^m q'(x) + m(x-p)^{m-1} q(x)} = (x-p)\frac{q(x)}{(x-p)q'(x) + mq(x)}$$

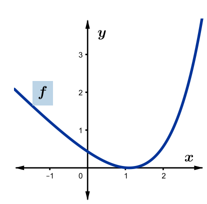
  donde

$$\lim_{x\to p} \frac{q(x)}{(x-p)q'(x) + mq(x)} = \frac{1}{m} \neq 0$$

  lo que muestra, por definición, que μ tiene un cero de simple en p. Luego la convergencia de la sucesión generada a partir de la iteración $p_{n+1} = p_n - \dfrac{\mu(p_n)}{\mu'(p_n)}$ converge cuadráticamente a p.

  Al reemplazar $\mu(p_n)$ y $\mu'(p_n)$ en $p_{n+1} = p_n - \dfrac{\mu(p_n)}{\mu'(p_n)}$ se obtiene la ecuación de iteración dada arriba.

Ejemplo Aproximar el cero de la función $f(x) = \frac{1}{3}e^x - x + \ln 3 - 1$ (ver gráfica de la función a derecha) empleando los métodos de Newton, Newton Modificado y Newton acelerado.



<u>*Solución:*</u> Notemos que f (curva *azul*) tiene un cero múltiple p en el intervalo $[0, 2]$, de hecho, parece que existieran muchas en ese intervalo, pero, como ya lo habíamos visto, se presenta un mínimo aplastando la curva en el eje x, es más, podemos decir de la curva que f tienen un cero de multiplicidad par.
Para saber la multiplicidad, deberíamos obtener la función q de la definición o conocer p para evaluar sus derivadas, dado que no es inmediato alguna de las opciones emplearemos el método de Newton modificado, método que sabemos converge cuadráticamente para ceros múltiples. La ecuación de iteración es

$$p_{n+1} = p_n - \frac{\left(\frac{1}{3}e^{p_n} - p_n + \ln 3 - 1\right)\,\left(\frac{1}{3}e^{p_n} - 1\right)}{\left[\frac{1}{3}e^{p_n} - 1\right]^2 - \left(\frac{1}{3}e^{p_n} - p_n + \ln 3 - 1\right)\,\left(\frac{1}{3}e^{p_n}\right)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

tomando $p_0 = 1$ obtenemos las aproximaciones

n	p_n	$f(p_n)$
0	$p_0 = 1$	$4{,}7062e-03$
1	$p_1 \approx 1{,}097043883774920$	$1{,}2293e-06$
2	$p_2 \approx 1{,}098611878899956$	$8{,}3933e-14$

p_2 es una muy buena aproximación del cero de la función, claro que, por la aritmética del computador, si realizamos una iteración más $p_3 \approx 1{,}098612288452428$, nos dice que $f(p_3) = 0$.
Ahora, para conocer la multiplicidad, evaluemos las derivadas de f en p_3

$$f'(x) = \frac{1}{3}e^x - 1 \ \rightarrow\ f'(p_3) \approx -2{,}1568e-10, \qquad f''(x) = \frac{1}{3}e^x \ \rightarrow\ f''(p_3) \approx 1,$$

así la multiplicidad del cero de f es $m = 2$, por lo tanto la ecuación de iteración de Newton será

$$p_{n+1} = p_n - 2\,\frac{\frac{1}{3}e^{p_n} - p_n + \ln 3 - 1}{\frac{1}{3}e^{p_n} - 1}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Tomando nuevamente $p_0 = 1$, empleando los métodos de Newton acelerado y Newton, obtenemos las aproximaciones

Newton acelerado

n	p_n	$f(p_n)$
0	$p_0 = 1$	$4{,}7062e-03$
1	$p_1 \approx 1{,}100232756631542$	$1{,}3137e-06$
2	$p_2 \approx 1{,}098612726321032$	$9{,}5701e-14$
3	$p_3 \approx 1{,}098612288982680$	$-2{,}2204e-16$
4	$p_4 \approx 1{,}098613700714169$	$9{,}9676e-13$
5	$p_5 \approx 1{,}098612288922363$	$-2{,}2204e-16$
6	$p_6 \approx 1{,}098614035561829$	$1{,}5257e-12$
7	$p_7 \approx 1{,}098612288841773$	$-2{,}2204e-16$
8	$p_8 \approx 1{,}098614846033362$	$3{,}2701e-12$
9	$p_9 \approx 1{,}098612288677340$	0

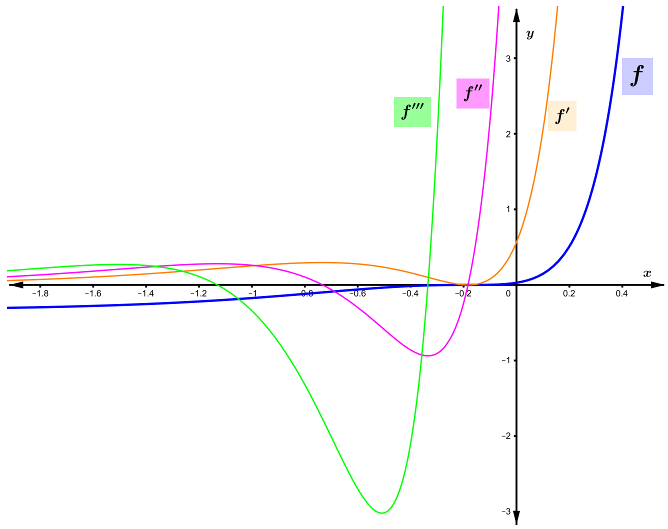
Newton

n	p_n	$f(p_n)$
0	$p_0 = 1$	$4{,}7062e-03$
1	$p_1 \approx 1{,}050116378315771$	$1{,}1571e-03$
2	$p_2 \approx 1{,}074560313586866$	$2{,}8694e-04$
3	$p_3 \approx 1{,}086634508788127$	$7{,}1448e-05$
4	$p_4 \approx 1{,}092635354300419$	$4{,}4521e-06$
5	$p_5 \approx 1{,}095626798461158$	$1{,}1125e-06$
6	$p_6 \approx 1{,}097120286327097$	$2{,}7805e-07$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
22	$p_{22} \approx 1{,}098612261094187$	$4{,}4409e-16$
23	$p_{23} \approx 1{,}098612277199593$	0

Notemos que, en este caso, $f'(x) = 0$ cuando $x = \ln(3)$, esto significa que $\ln(3)$ es el cero de la función f. En este caso, al aproximación obtenida por el método de Newton acelerado es la que presenta menor error relativo. En efecto, si denotamos por p_{N}, p_{NA} y p_{NM} las aproximaciones obtenidas por los métodos de Newton, Newton acelerado y Newton modificado, respectivamente, obtenemos

$$\frac{|\ln(3) - p_{\text{N}}|}{\ln(3)} \approx 1{,}9632e-10,$$
$$\frac{|\ln(3) - p_{\text{NA}}|}{\ln(3)} \approx 8{,}4019e-12 \quad \text{y}$$
$$\frac{|\ln(3) - p_{\text{NM}}|}{\ln(3)} \approx 1{,}0439e-08$$

$\boxed{\textit{\textbf{Ejemplo}}}$ Aproximar el cero de la función $f(x) = e^{6x} + 3(\ln 2)^2\, e^{2x} - \ln 8\, e^{4x} - (\ln 2)^3$ empleando los métodos de Newton, Newton Modificado y Newton acelerado. Se adjuntan las gráficas de las funciones f, f', f'' y f'''.



<u>*Solución:*</u> Notemos que f (curva *azul*) tiene un cero múltiple p en el intervalo $[-0{,}8, 0]$, de hecho, parece que existieran muchas en ese intervalo, pero, como ya lo habíamos visto, se presenta un cambio de concavidad aplastando mucho la curva en el eje x, es más, podemos decir de la curva que f tienen un cero de multiplicidad impar. Para saber exactamente la multiplicidad podemos recurrir al teorema, derivamos f hasta que una de sus derivadas evaluadas en el p de diferente de cero, claro que, como conocemos las gráficas de las derivadas de f podemos ver que

$$f'(p) = 0 \text{ (ver curva naranja)}, \quad f''(p) = 0 \text{ (ver curva rosada)} \quad \text{y} \quad f'''(p) \neq 0 \text{(ver curva verde)},$$

por lo tanto, la multiplicidad del cero p es $m = 3$. Teniendo en cuenta que las dos primeras derivadas de f son

$$f'(x) = 6e^{6x} + 6(\ln 2)^2\, e^{2x} - 4\ln 8\, e^{4x}$$
$$f''(x) = 36e^{6x} + 12(\ln 2)^2 e^{2x} - 16\ln 8 e^{4x}$$

las ecuaciones de iteración de los métodos serán

$$p_{n+1} = p_n - \frac{e^{6p_n} + 3(\ln 2)^2\, e^{2p_n} - \ln 8\, e^{4p_n} - (\ln 2)^3}{6e^{6p_n} + 6(\ln 2)^2\, e^{2p_n} - 4\ln 8\, e^{4p_n}} \qquad \text{Newton}$$

$$p_{n+1} = p_n - \boxed{3}\, \frac{e^{6p_n} + 3(\ln 2)^2\, e^{2p_n} - \ln 8\, e^{4p_n} - (\ln 2)^3}{6e^{6p_n} + 6(\ln 2)^2\, e^{2p_n} - 4\ln 8\, e^{4p_n}} \qquad \text{Newton acelerado}$$

$$p_{n+1} = p_n - \frac{6e^{2x}(e^{2x} - \ln(2))^5}{12e^{2x}\ln(2)(e^{2x} - \ln(2))^4} \qquad \text{Newton modificado}$$

hemos simplificado la iteración de Newton modificado, que viene de

$$p_{n+1} = p_n - \frac{\left(e^{6p_n} + 3(\ln 2)^2 e^{2p_n} - \ln 8 e^{4p_n} - (\ln 2)^3\right)\left(6e^{6p_n} + 6(\ln 2)^2 e^{2p_n} - 4\ln 8 e^{4p_n}\right)}{\left[6e^{6p_n} + 6(\ln 2)^2 e^{2p_n} - 4\ln 8 e^{4p_n}\right]^2 - \left(e^{6p_n} + 3(\ln 2)^2 e^{2p_n} - \ln 8 e^{4p_n} - (\ln 2)^3\right)\left(36e^{6p_n} + 12(\ln 2)^2 e^{2p_n} - 16\ln 8 e^{4p_n}\right)}$$

Tomando como aproximación inicial $p_0 = -0{,}5$

Newton modificado

n	p_n	$f(p_n)$
0	$p_0 = -0{,}5$	$-3{,}4413034830e-02$
1	$p_1 \approx -0{,}265368922711521$	$-1{,}1568429584e-03$
2	$p_2 \approx -0{,}189644492803230$	$-6{,}8132405578e-07$
3	$p_3 \approx -0{,}183297094017397$	$-1{,}7880141812e-13$
4	$p_4 \approx -0{,}183256406428767$	$5{,}5511151231e-17$

Newton acelerado

n	p_n	$f(p_n)$
0	$p_0 = -0{,}5$	$-3{,}4413034830e-02$
1	$p_1 \approx -0{,}057915307318139$	$7{,}7012642542e-03$
2	$p_2 \approx -0{,}168780515364328$	$8{,}4413733548e-06$
3	$p_3 \approx -0{,}183048915074026$	$2{,}3832769092e-11$
4	$p_4 \approx -0{,}183256416998218$	$5{,}5511151231e-17$

Newton

n	p_n	$f(p_n)$
0	$p_0 = -0{,}5$	$-3{,}4413034830e-02$
1	$p_1 \approx -0{,}352638435772713$	$-7{,}9014544629e-03$
2	$p_2 \approx -0{,}285436422563077$	$-2{,}1028165826e-03$
3	$p_3 \approx -0{,}247646487946269$	$-5{,}8752951470e-04$
4	$p_4 \approx -0{,}224739834149390$	$-1{,}6807930411e-04$
5	$p_5 \approx -0{,}210322220957167$	$-4{,}8721720790e-05$
6	$p_6 \approx -0{,}201051649286183$	$-1{,}4235013733e-05$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
27	$p_{27} \approx -0{,}183258651774722$	$-1{,}6653345369e-16$
28	$p_{28} \approx -0{,}183254313204252$	$5{,}5511151231e-17$

Observaciones

- Resaltamos que si una función tiene un cero múltiple, el método de Newton si se puede aplicar, pero, la convergencia será lenta, esto es, converge linealmente. Mientras que los métodos de Newton acelerado y modificado convergen rápido, esto es, converge cuadráticamente.
- Una ventaja del método de Newton acelerado es que es muy fácil de aplicar, la desventaja es que se debe conocer o las gráficas de las derivadas de f para saber cuando deja de ser cero o conocer p para poder ir evaluando las derivadas y así conocer la multiplicidad m.
- Una ventaja del método de Newton modificado es que no se necesita saber la multiplicidad para aplicarlo, pero, la desventaja es que la ecuación de iteración puede ser compleja de calcular.