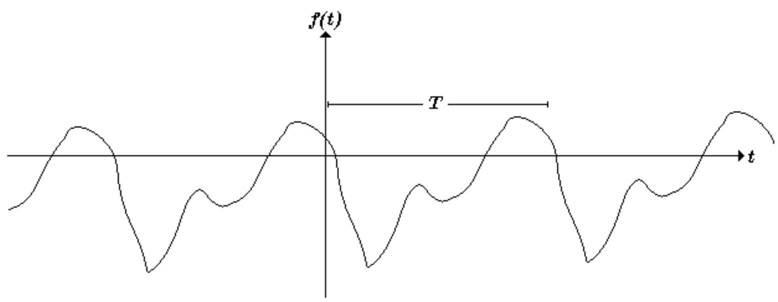
Series de Fourier

Series de Fourier.

Definición 1 *: (Función periódica) Se dice que una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es periódica si existe un número real T tal que para todo $n \in \mathbb{Z}$ la función $f(t) = f(t + nT)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*



Ejemplo 1 *:Encuentre el periodo de la función* $f(t) = sen\left(\frac{t}{5}\right) + \cos\left(\frac{t}{4}\right)$

<u>Solución</u>: Si la función $f(t)$ es periódica entonces de la deficinición anterior se concluye que:

$$sen\left(\frac{t+T}{5}\right) + \cos\left(\frac{t+T}{4}\right) = sen\left(\frac{t}{5}\right) + \cos\left(\frac{t}{4}\right).$$

Como $sen(\theta + 2m\pi) = sen(\theta)$ y también $\cos(\theta + 2n\pi) = \cos(\theta)$ por lo que para cualquier entero m y n se tiene que:

$$\frac{T}{5} = 2m\pi \quad y \quad \frac{T}{4} = 2n\pi$$

Con lo que se consigue que para enteros m y n se tiene:

$$\frac{m}{n} = \frac{4}{5}.$$

O sea que cuando $m = 4$ y $n = 5$ se obtiene el menor valor en que se repite la función $f(t)$. De donde el periodo de f es $T = 40\pi$.

Nota 1 : *En general si la función $f(t) = sen(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)$ es periódica de periodo T entonces es posible encontrar dos enteros m y n tales que:*

$$\omega_1 T = 2m\pi \quad y \quad \omega_2 T = 2n\pi.$$

Cuyo cociente está dado por:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{n}.$$

Esto quiere decir que el cociente $\dfrac{\omega_1}{\omega_2}$ debe ser un racional.

Ejemplo 2 : *Determine si la función $f(t) = \cos(3t) + \cos((5+\pi)t)$ es una fucnión periódica.*

Solución: Si la función $f(t)$ es periódica entonces de la nota anterior se concluye que:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{3}{5+\pi}.$$

El cual no es un racional y por lo tanto $f(t)$ no es periódica.

Ejemplo 3 : *Demuestre que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función periódica, es decir, existe un T tal que $f(t) = f(t+T)$ entonces:*

$$\int_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(t)\, dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, dt \quad y \quad \int_{T}^{T+t} f(t)\, dt = \int_{0}^{t} f(t)\, dt. \tag{1}$$

Solución: Si la función $f(t)$ es periódica entonces, existe un T tal que $f(t) = f(t+T)$, sea $t = \tau - T$ por lo tanto se consigue que:

$$f(t) = f(t+T) \Longleftrightarrow f(\tau - T) = f(\tau - T + T) = f(\tau).$$

Consideremos ahora la integral $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\, dt$ y consideremos la sustitución $t = \tau - T$, conseguimos entonces que cuando $t \longrightarrow \alpha$ entonces $\tau \longrightarrow \alpha + T$ y de igual forma cuando $t \longrightarrow \beta$ entonces $\tau \longrightarrow \beta + T$ por lo tanto:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\, dt = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(\tau - T)\, d\tau = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(\tau)\, d\tau.$$

Como en las integrales las variables internas son mudas entonces $\displaystyle\int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(\tau)\, d\tau = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(t)\, dt$ obteniendo por lo tanto que:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\, dt = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(t)\, dt. \tag{2}$$

Note que $\int_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(t)\,dt = \int_{a-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{2}} f(t)\,dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(t)\,dt$ *de donde si aplicamos el anterior resultado (2) a la primera integral, nos encontramos con que:*

$$\begin{aligned}\int_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(t)\,dt &= \int_{a-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{2}} f(t)\,dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(t)\,dt \\ &= \int_{a+\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(t)\,dt.\end{aligned}$$

Que es idéntico a tener que:

$$\begin{aligned}\int_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(t)\,dt &= \int_{a+\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(t)\,dt \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt.\end{aligned}$$

Para demostrar la segunda identidad solo basta con hacer en (2) a $\alpha = 0$ *y* $\beta = t$ *y se obtiene que:*

$$\int_0^t f(t)\,dt = \int_T^{t+T} f(t)\,dt.$$

Ejemplo 4 *: Sea* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función periódica, es decir, existe un* T *tal que* $f(t) = f(t+T)$ *si*

$$g(t) = \int_0^t f(t)\,dt.$$

Entonces $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función periódica con el mismo periodo* T *tal que* $g(t) = g(t+T)$ *si y solo si* $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt = 0.$

Solución: Sea la función $f(t)$ *es periódica de periodo* T *tal que* $f(t) = f(t+T)$ *puesto que* $g(t) = \int_0^t f(t)\,dt.$

$$g(t+T) = \int_0^{t+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt + \int_T^{t+T} f(t)\,dt.$$

Por lo anterior en la identidad (1) al tomar $a = T$ *se encuentra que*

$$\int_0^T f(t)\,dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt,$$

y también por la identidad (1) se tiene que:

$$\int_T^{t+T} f(t)\,dt = \int_0^t f(t)\,dt.$$

Por lo tanto:

$$g(t+T)=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\,dt+\int_{0}^{t}f(t)\,dt.$$

"$\Longrightarrow$" Si $\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\,dt=0$ *entonces* $g(t+T)=\int_0^t f(t)\,dt=g(t)$ *con lo que se consigue que* $f(t)$ *es periódica de periodo* T.
"$\Longleftarrow$" Si $g(t+T)=\int_0^t f(t)\,dt=g(t)$ *entonces*

$$\begin{aligned}g(t+T)&=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\,dt+\int_{0}^{t}f(t)\,dt=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\,dt+g(t)\\&=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\,dt+g(t+T).\end{aligned}$$

Lo que implica que $\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\,dt=0.$

Ejemplo 5 *: Sea* $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *es una función periódica, es decir, existe un* T *tal que* $f(t)=f(t+T)$ *y*

$$F(t)=\int_0^t f(\tau)\,d\tau-\frac{1}{2}a_o t.$$

Donde $a_o=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\,dt$ *entonces* $F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *es una función periódica con el mismo periodo* T.
Solución: Como $F(t)=\displaystyle\int_0^t f(t)\,dt-\frac{1}{2}a_o t$ *se tiene que:*

$$\begin{aligned}F(t+T)&=\int_0^{t+T}f(\tau)\,d\tau-\frac{1}{2}a_o(t+T)\\&=\int_0^{T}f(\tau)\,d\tau+\int_T^{t+T}f(\tau)\,d\tau-\frac{1}{2}a_o t-\frac{1}{2}a_o T.\end{aligned}$$

Por el ejemplo anterior $\displaystyle\int_0^T f(\tau)\,d\tau=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(\tau)\,d\tau$, *y por hipótesis* $\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(\tau)\,d\tau=\frac{1}{2}a_o T$ *y también* $\displaystyle\int_T^{t+T}f(\tau)\,d\tau=\int_0^t f(\tau)\,d\tau$ *entonces:*

$$F(t+T)=\int_0^t f(\tau)\,d\tau-\frac{1}{2}a_o t=F(t).$$

Definición 2 *: Sea* $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *es una función periódica de periodo* T *continua a tramos con un número finito de discontinuidades , la cual se puede representar* *por funciones trigonométricas como:*

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}a_o + a_1\cos(\omega_o t) + a_2\cos(2\omega_o t) + ... + b_1 sen(\omega_o t) + b_2 sen(2\omega_o t) + ... \\ &= \frac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\omega_o t) + b_n sen(n\omega_o t)\right), \end{aligned}$$

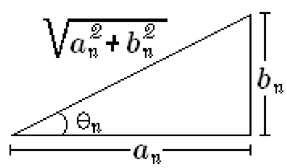
donde $\omega_o = \dfrac{2\pi}{T}$.
La serie representada anteriormente es llamada serie trigonométrica de Fourier que tmbién puede representarse así:

$$f(t) = c_o + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos(n\omega_o t - \theta_n).$$

Puesto que:

$$a_n\cos(n\omega_o t)+b_n sen(n\omega_o t) = \sqrt{a_n^2+b_n^2}\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\cos(n\omega_o t) + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}} sen(n\omega_o t)\right) \tag{3}$$

Si consideramos el triángulo:



se puede observar que $\cos(\theta_n) = \dfrac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}$ *y* $sen(\theta_n) = \dfrac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}$ *y si llamammos* $c_n = \sqrt{a_n^2+b_n^2}$ *entonces la identidad* (3) *se puede ver como:*

$$\begin{aligned} a_n\cos(n\omega_o t) + b_n sen(n\omega_o t) &= c_n\left(\cos(\theta_n)\cos(n\omega_o t) + sen(\theta_n) sen(n\omega_o t)\right). \\ &= c_n\cos(n\omega_o t - \theta_n). \end{aligned}$$

y al tomar $c_o = \dfrac{1}{2}a_o$ *se obtiene la expresión:*

$$f(t) = c_o + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos(n\omega_o t - \theta_n).$$

Note también que $\tan(\theta_n) = \dfrac{b_n}{a_n}$, *donde* $\theta_n = \tan^{-1}\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right)$.

Ejemplo 6 *: Pruebe que:*

1. $\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_o t)\,dt = 0$ *para* $n \neq 0$.

2. $\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} sen\,(n\omega_o t)\,dt = 0 \quad para\ todo\ n$

3. $\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(m\omega_o t)\cos(n\omega_o t)\,dt = \begin{cases} 0 & si\ m \neq n. \\ \dfrac{T}{2} & si\ m = n. \end{cases}$

4. $\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} sen\,(m\omega_o t)\,sen\,(n\omega_o t)\,dt = \begin{cases} 0 & si\ m \neq n. \\ \dfrac{T}{2} & si\ m = n \neq 0. \end{cases}$

5. $\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} sen\,(m\omega_o t)\cos(n\omega_o t)\,dt = 0 \quad para\ todo\ m \quad y\ n$

Siendo $\omega_o = \dfrac{2\pi}{T}$ *y* $n \in \mathbb{Z}$.

Solución: 1.

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_o t)\,dt &= \frac{1}{n\omega_o} sen\,(n\omega_o t)\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{n\omega_o}\left[sen\left(n\omega_o\frac{T}{2}\right) - sen\left(-n\omega_o\frac{T}{2}\right)\right] \\
&= \frac{2}{n\omega_o} sen\left(n\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right) = \frac{2}{n\omega_o} sen\,(n\pi) = 0
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} sen\,(n\omega_o t)\,dt &= -\frac{1}{n\omega_o}\cos(n\omega_o t)\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = -\frac{1}{n\omega_o}\left[\cos\left(n\omega_o\frac{T}{2}\right) - \cos\left(-n\omega_o\frac{T}{2}\right)\right] \\
&= -\frac{1}{n\omega_o}\left[\cos\left(n\omega_o\frac{T}{2}\right) - \cos\left(n\omega_o\frac{T}{2}\right)\right] = 0.
\end{aligned}$$

3. Para resolver esta integral se necesita primero recordar las siguientes identadades:

$$\begin{aligned}
\cos(A \pm B) &= \cos(A)\cos(B) \mp sen\,(A)\,sen\,(B). \\
sen\,(A \pm B) &= sen\,(A)\cos(B) \pm \cos(A)\,sen\,(B).
\end{aligned}$$

por lo que:

$$\begin{aligned}
\cos(A+B) + \cos(A-B) &= 2\cos(A)\cos(B). \\
\cos(A-B) - \cos(A+B) &= 2sen\,(A)\,sen\,(B). \\
sen\,(A+B) + sen\,(A-B) &= 2sen\,(A)\cos(B),
\end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned}
\cos(A)\cos(B) &= \frac{1}{2}\left[\cos(A+B) + \cos(A-B)\right]. \\
sen\,(A)\,sen\,(B) &= \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]. \\
sen\,(A)\cos(B) &= \frac{1}{2}\left[sen\,(A+B) + sen\,(A-B)\right].
\end{aligned}$$

Luego al sustituir en la uintegral se obtiene:

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(m\omega_o t)\cos(n\omega_o t)\,dt &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \{\cos[(m+n)\,\omega_o t] + \cos[(m-n)\,\omega_o t]\}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(m+n)\,\omega_o} sen\,[(m+n)\,\omega_o t]\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(m-n)\,\omega_o} sen\,[(m-n)\,\omega_o t]\right)_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(m+n)\,\omega_o} sen\left((m+n)\,\omega_o \frac{T}{2}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(m-n)\,\omega_o} sen\left((m-n)\,\omega_o \frac{T}{2}\right)\right] \\
&\quad - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(m+n)\,\omega_o} sen\left(-(m+n)\,\omega_o \frac{T}{2}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(m-n)\,\omega_o} sen\left(-(m-n)\,\omega_o \frac{T}{2}\right)\right] \\
&= 0 \quad \textit{para } m \neq n \ \textit{y } \omega_o = \frac{2\pi}{T}.
\end{aligned}$$

Ahora si $m = n$ *se tiene que:*

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(m\omega_o t)\cos(n\omega_o t)\,dt &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2(m\omega_o t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [1 + \cos(2m\omega_o t)]\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left[t + \frac{sen\,(2m\omega_o t)}{2}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{T}{2}.
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} sen\left(m\omega_o t\right) sen\left(n\omega_o t\right) dt &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left\{\cos\left[\left(m-n\right)\omega_o t\right] - \cos\left[\left(m+n\right)\omega_o t\right]\right\} dt \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\left(m-n\right)\omega_o} sen\left[\left(m-n\right)\omega_o t\right]\right. \\
&\quad \left. -\frac{1}{\left(m+n\right)\omega_o} sen\left[\left(m-n\right)\omega_o t\right]\right)_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\left(m-n\right)\omega_o} sen\left(\left(m-n\right)\omega_o \frac{T}{2}\right)\right. \\
&\quad \left. -\frac{1}{\left(m+n\right)\omega_o} sen\left(\left(m+n\right)\omega_o \frac{T}{2}\right)\right] \\
&\quad -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\left(m-n\right)\omega_o} sen\left(-\left(m-n\right)\omega_o \frac{T}{2}\right)\right. \\
&\quad \left. -\frac{1}{\left(m+n\right)\omega_o} sen\left(-\left(m+n\right)\omega_o \frac{T}{2}\right)\right] \\
&= 0 \quad para\ m \neq n\ \ y\ \omega_o = \frac{2\pi}{T}.
\end{aligned}$$

Ahora si $m = n \neq 0,$ *se tiene que:*

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} sen\left(m\omega_o t\right) sen\left(m\omega_o t\right) dt &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} sen^2\left(m\omega_o t\right) dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[1 - \cos\left(2m\omega_o t\right)\right] dt \\
&= \frac{1}{2}\left[t - \frac{sen\left(2m\omega_o t\right)}{2}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{T}{2}.
\end{aligned}$$

5.

$$
\begin{aligned}
\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} sen\left(m\omega_o t\right)\cos\left(n\omega_o t\right)dt &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left\{sen\left[\left(m+n\right)\omega_o t\right]+sen\left[\left(m-n\right)\omega_o t\right]\right\}dt \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\left(m+n\right)\omega_o}\cos\left[\left(m+n\right)\omega_o t\right]\right. \\
&\quad \left.+\frac{1}{\left(m-n\right)\omega_o}\cos\left[\left(m-n\right)\omega_o t\right]\right)_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\left(m+n\right)\omega_o}\cos\left(\left(m+n\right)\omega_o\frac{T}{2}\right)\right. \\
&\quad \left.+\frac{1}{\left(m-n\right)\omega_o}\cos\left(\left(m-n\right)\omega_o\frac{T}{2}\right)\right] \\
&\quad -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\left(m+n\right)\omega_o}\cos\left(-\left(m+n\right)\omega_o\frac{T}{2}\right)\right. \\
&\quad \left.+\frac{1}{\left(m-n\right)\omega_o}\cos\left(-\left(m-n\right)\omega_o\frac{T}{2}\right)\right] \\
&= 0 \quad para\ m\neq n\ \ y\ \omega_o=\frac{2\pi}{T}.
\end{aligned}
$$

Ahora si $m=n$ se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} sen\left(m\omega_o t\right)\cos\left(n\omega_o t\right)dt &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} sen\left[2m\omega_o t\right]dt=-\frac{1}{4m\omega_o}\left.\cos\left[2m\omega_o t\right]\right)_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\
&= -\frac{1}{4m\omega_o}\left[\cos\left[2m\omega_o\frac{T}{2}\right]-\cos\left[-2m\omega_o\frac{T}{2}\right]\right] \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Usando los resultados anteriores se pueden encontrar los valores de a_n y de b_n de la siguiente manera.

Teorema 1 *: Sea $f(t)$ una función periódica expandible en series de Fourier como:*

$$f\left(t\right)=\frac{1}{2}a_o+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(n\omega_o t\right)+b_n sen\left(n\omega_o t\right)\right),$$

entonces los valores de a_o, a_n y b_n están dados por:

$$a_o=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f\left(t\right)dt,\quad a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f\left(t\right)\cos\left(n\omega_o t\right)dt\quad y\quad a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f\left(t\right)sen\left(n\omega_o t\right)dt.$$

Prueba 1 *: Como*

$$f\left(t\right)=\frac{1}{2}a_o+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(n\omega_o t\right)+b_n sen\left(n\omega_o t\right)\right) \tag{4}$$

entonce al multiplicar a la expresión (4) *a ambos lados por la función* $\cos(m\omega_o t)$ *con* $m \in \mathbb{Z}$ *y al integrar entre* $-\frac{T}{2}$ *y* $\frac{T}{2}$ *se obtiene que:*

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(m\omega_o t)\,dt &= \frac{a_o}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos(m\omega_o t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(a_n\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos(m\omega_o t)\cos(n\omega_o t)\,dt \\ &+ b_n\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos(m\omega_o t)\,sen(n\omega_o t)\,dt\Bigg) \\ &= a_n\frac{T}{2} \text{ cuando } m = n.\end{aligned}$$

Encontrando que $a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(m\omega_o t)\,dt.$
Ahora al multiplicar a la expresión (4) *a ambos lados por la función* $sen(m\omega_o t)$ *con* $m \in \mathbb{Z}$ *y al integrar entre* $-\frac{T}{2}$ *y* $\frac{T}{2}$ *se obtiene que:*

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,sen(m\omega_o t)\,dt &= \frac{a_o}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} sen(m\omega_o t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(a_n\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} sen(m\omega_o t)\cos(n\omega_o t)\,dt \\ &+ b_n\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} sen(m\omega_o t)\,sen(n\omega_o t)\,dt\Bigg) \\ &= b_n\frac{T}{2} \text{ cuando } m = n.\end{aligned}$$

encontrando que $b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,sen(m\omega_o t)\,dt.$
Si a la expresión (4) *la integramos directamente entre* $-\frac{T}{2}$ *y* $\frac{T}{2}$ *se obtiene que:*

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt &= \frac{a_o}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt + \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(a_n\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos(n\omega_o t)\,dt \\ &+ b_n\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} sen(n\omega_o t)\,dt\Bigg) \\ &= a_o\frac{T}{2}.\end{aligned}$$

De donde $a_o = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt.$

Ejemplo 7 *: Encuentre la serie de Fourier de la función periódica de periodo* T *dada por:*

$$f(t) = \begin{cases} -1 & si\ -\frac{T}{2} \le t \le 0. \\ 1 & si\ 0 < t \le \frac{T}{2}. \end{cases}$$

<u>Solución</u>: Por la proposición anterior se tiene que:

$$\begin{aligned}
a_o &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt = \frac{2}{T}\left(-\int_{-\frac{T}{2}}^{0} dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} dt\right) \\
&= \frac{2}{T}\left(-(t)_{-\frac{T}{2}}^{0} + (t)_{0}^{\frac{T}{2}}\right) = \frac{2}{T}\left(-(t)_{-\frac{T}{2}}^{0} + (t)_{0}^{\frac{T}{2}}\right) = 0.
\end{aligned}$$

La integral anterior no era necesaria, pués es suficiente saber que la función es impar y la integral de cualquier función impar entre $-a$ y a es cero, con lo cual se concluiría que $a_o = 0$.
Ahora para a_n se tiene que:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(m\omega_o t)\,dt = 0.$$

De nuevo para b_n se tiene que para $\omega_o = \dfrac{2\pi}{T}$:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,sen(m\omega_o t)\,dt = -\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0} sen(m\omega_o t)\,dt + \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} sen(m\omega_o t)\,dt \\
&= \frac{2}{Tm\omega_o}\left\{[\cos(m\omega_o t)]_{-\frac{T}{2}}^{0} - [\cos(m\omega_o t)]_{0}^{\frac{T}{2}}\right\} \\
&= \frac{2}{Tm\omega_o}\{1-\cos(m\pi) - [\cos(m\pi)-1]\} = \frac{4}{Tm\omega_o}\{1-\cos(m\pi)\} \\
&= \frac{2}{m\pi}\{1-(-1)^m\} = \frac{4}{(2k-1)\pi}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $f(t) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)}sen\left((2k-1)\omega_o t\right).$

Ejemplo 8 *: Encuentre la serie de Fourier de la función periódica de periodo T dada por:*

$$f(t) = \begin{cases} 1+\dfrac{4t}{T} & si\ -\dfrac{T}{2} \le t \le 0. \\ 1-\dfrac{4t}{T} & si\ 0 < t \le \dfrac{T}{2}. \end{cases}$$

<u>Solución</u>: Por la proposición anterior se tiene que:

$$\begin{aligned}
a_o &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt = \frac{2}{T}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{0}\left(1+\frac{4t}{T}\right)dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}}\left(1-\frac{4t}{T}\right)dt\right) \\
&= \frac{2}{T}\left(\left(t+\frac{2t^2}{T}\right)_{-\frac{T}{2}}^{0} + \left(t-\frac{2t^2}{T}\right)_{0}^{\frac{T}{2}}\right) \\
&= \frac{T}{2}-\frac{T}{2}+\frac{T}{2}-\frac{T}{2} = 0.
\end{aligned}$$

La integral anterior no era tampoco necesaria, pués es suficiente con ver que la función es par y su gráfico en ese intervalo se cierra en un ciclo y la integral de cualquier función impar o par entre $-a$ *y* a *en el que las áreas por encima y por debajo del eje horizontal son iguales entonces la integral es cero, con lo cual se concluiría que* $a_o = 0$.
Ahora para a_n *se tiene que:*

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(m\omega_o t)\,dt = \frac{2}{T}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{0}\left(1+\frac{4t}{T}\right)\cos(m\omega_o t)\,dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}}\left(1-\frac{4t}{T}\right)\cos(m\omega_o t)\,dt\right) \\
&= \frac{2}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos(m\omega_o t)\,dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{0}\frac{4t}{T}\cos(m\omega_o t)\,dt - \int_{0}^{\frac{T}{2}}\frac{4t}{T}\cos(m\omega_o t)\,dt\right]. \\
&= \frac{8}{T^2}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{0} t\cos(m\omega_o t)\,dt - \int_{0}^{\frac{T}{2}} t\cos(m\omega_o t)\,dt\right] \\
&= \frac{8}{T^2}\left[\frac{1}{m\omega_o}\,t sen(m\omega_o t)\Big]_{-\frac{T}{2}}^{0} - \frac{1}{m\omega_o}\int_{-\frac{T}{2}}^{0} sen(m\omega_o t)\,dt\right. \\
&\quad \left. -\frac{1}{m\omega_o}\,t sen(m\omega_o t)\Big]_{0}^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{m\omega_o}\int_{0}^{\frac{T}{2}} sen(m\omega_o t)\,dt\right] \\
&= \frac{8}{T^2 m^2\omega_o^2}\left[\cos(m\omega_o t)\Big]_{-\frac{T}{2}}^{0} - \cos(m\omega_o t)\Big]_{0}^{\frac{T}{2}}\right] = \frac{8}{T^2 m^2\omega_o^2}\left[1-\cos(m\pi)-\cos(m\pi)+1\right] \\
&= \frac{4}{m^2\pi^2}\left[1-\cos(m\pi)\right] = \frac{8}{(2k-1)^2\pi^2}.
\end{aligned}$$

Con b_n *se tiene que:*

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, sen(m\omega_o t)\,dt = 0,$$

ya que $f(t)\, sen(m\omega_o t)$ *es una función impar. Por lo tanto:*

$$f(t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos((2k-1)\,\omega_o t).$$

Ejemplo 9 *: Encuentre la serie de Fourier para la función periódica dada por:*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & si\ -\dfrac{T}{2} \le t \le 0. \\ Asen(\omega_o t) & si\ 0 < t \le \dfrac{T}{2}. \end{cases}$$

donde $\omega_o = \dfrac{2\pi}{T}$.

<u>Solución</u>: Aquí se tiene que:

$$\begin{aligned}
a_o &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt = \frac{2}{T}\left(\int_{0}^{\frac{T}{2}} Asen(\omega_o t)\,dt\right)\\
&= \frac{2A}{T}\left(-\frac{1}{\omega_o}\left(\cos(\omega_o t)\right)_0^{\frac{T}{2}}\right)\\
&= -\frac{2A}{T\omega_o}\left(\cos(\pi)-1\right) = \frac{4A}{T\omega_o} = \frac{2A}{\pi}.
\end{aligned}$$

Para a_m se tiene que:

$$\begin{aligned}
a_m &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(m\omega_o t)\,dt = \frac{2A}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} sen(\omega_o t)\cos(m\omega_o t)\,dt\\
&= \frac{A}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} \left[sen\left((m+1)\,\omega_o t\right) - sen\left((m-1)\,\omega_o t\right)\right] dt\\
&= -\frac{A}{T}\left[\frac{1}{(m+1)\,\omega_o}\cos\left((m+1)\,\omega_o t\right) - \frac{1}{(m-1)\,\omega_o}\cos\left((m-1)\,\omega_o t\right)\right]_0^{\frac{T}{2}}\\
&= -\frac{A}{T}\left[\frac{1}{(m+1)\,\omega_o}\left(\cos\left((m+1)\,\pi\right)-1\right) - \frac{1}{(m-1)\,\omega_o}\left(\cos\left((m-1)\,\pi\right)-1\right)\right]\\
&= \frac{A}{T}\left[\frac{2T}{(2k+1)\,2\pi} - \frac{2T}{(2k-1)\,2\pi}\right] = \frac{A}{\pi}\left[\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1}\right]\\
&= -\frac{A}{\pi}\left[\frac{2}{(2k+1)\,(2k-1)}\right] \qquad \textit{Para } m \textit{ par.}
\end{aligned}$$

Veamos el caso en que $m = 1$.

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(\omega_o t)\,dt = \frac{2A}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} sen(\omega_o t)\cos(\omega_o t)\,dt\\
&= \frac{A}{T\omega_o}\left[sen^2(\omega_o t)\right]_0^{\frac{T}{2}} = 0.
\end{aligned}$$

Analogamente calculemos los b_m :

$$\begin{aligned}
b_m &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,sen(m\omega_o t)\,dt = \frac{2A}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} sen(\omega_o t)\,sen(m\omega_o t)\,dt\\
&= \frac{A}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} \left[\cos\left((m-1)\,\omega_o t\right) - \cos\left((m+1)\,\omega_o t\right)\right] dt\\
&= \frac{A}{T}\left[\frac{1}{(m-1)\,\omega_o} sen\left((m-1)\,\omega_o t\right) - \frac{1}{(m+1)\,\omega_o} sen\left((m+1)\,\omega_o t\right)\right]_0^{\frac{T}{2}}\\
&= \frac{A}{T}\left[\frac{1}{(m+1)\,\omega_o}\left(sen\left((m+1)\,\pi\right)-0\right) - \frac{1}{(m-1)\,\omega_o}\left(sen\left((m-1)\,\pi\right)-0\right)\right]\\
&= 0 \qquad \textit{Para todo } m.
\end{aligned}$$

Veamos el caso en que $m = 1$.

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(\omega_o t)\,dt = \frac{2A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} sen(\omega_o t)\, sen(\omega_o t)\,dt \\ &= \frac{A}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} (1-\cos(2\omega_o t))\,dt = \frac{A}{T}\left[1-\frac{sen(2\omega_o t)}{2\omega_o}\right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{A}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto se obtuvo que:

$$f(t) = \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} sen(\omega_o t) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A}{\pi}\left[\frac{2}{(2k+1)(2k-1)}\right]\cos((2k-1)\,\omega_o t).$$

Ejemplo 10 *: Expanda en series de Fourier la función periódica:* $f(t) = \cos^4(t)$.
<u>*Solución*</u>*: Note que por la identidad de Euler se tenía que* $e^{\pm jn\theta} = \cos(n\theta) \pm j sen(n\theta)$ *por lo tanto*

$$\cos(n\theta) = \frac{e^{jn\theta} + e^{-jn\theta}}{2} \qquad y \quad sen(n\theta) = \frac{e^{jn\theta} - e^{-jn\theta}}{2j}$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} \cos^4(t) &= \left(\frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}e^{4jt} + \frac{1}{4}e^{2jt} + \frac{1}{4}e^{-2jt} + \frac{1}{16}e^{-4jt} + \frac{3}{8}. \\ &= \frac{1}{8}\cos(4t) + \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Aproximaciones mediante series finitas de Fourier.

Definición 3 *: Sea* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua a tramos, se define el valor promedio o medio de una función como:*

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

Ejemplo 11 *: Encuentre el valor promedio de la función* $f(t) = x^m$ *definida en el intervalo* $[0,1]$.
<u>*Solución*</u>*: De la definición se tiene que:*

$$\begin{aligned} \overline{f} &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^1 x^m dx \\ &= \frac{1}{m+1}\left(x^{m+1}\right)_0^1 = \frac{1}{m+1}. \end{aligned}$$

Ejemplo 12 *: Encuentre el valor promedio de la función $f(t)=\cos(t)$ definida en el intervalo $[0,\pi]$.*
<u>Solución</u>: De la definición se tiene que:

$$\begin{aligned}\overline{f} &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt=\frac{1}{\pi-0}\int_0^{\pi}\cos(t)\,dt\\ &= \frac{1}{\pi}(sen(t))_0^{\pi}=0.\end{aligned}$$

Definición 4 *: Se define la raíz media cuadrática de una función $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ y se denota como valor $rms(f)$ al valor:*

$$\overline{\overline{f}}=rms(f)=\sqrt{\frac{\int_a^b f^2(t)\,dt}{b-a}}$$

Ejemplo 13 *: Encuentre el valor $rms(f)$ de los ejemplos anteriores.*
<u>Solución</u>: 1. De la definición se tiene que:

$$\begin{aligned}\overline{\overline{f}} &= rms(f)=\sqrt{\frac{\int_a^b f^2(x)\,dx}{b-a}}=\sqrt{\frac{\int_0^1 x^{2m}dx}{1-0}}\\ &= \sqrt{\frac{1}{2m+1}\left(x^{2m+1}\right)_0^1}=\sqrt{\frac{1}{2m+1}}.\end{aligned}$$

2. De forma análoga se consigue que:

$$\begin{aligned}\overline{\overline{f}} &= rms(f)=\sqrt{\frac{\int_a^b f^2(t)\,dt}{b-a}}=\sqrt{\frac{\int_0^{\pi}\cos^2(t)\,dt}{\pi-0}}=\sqrt{\frac{\int_0^{\pi}1+\cos(2t)\,dt}{2\pi}}\\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}\left(t+\frac{sen(2t)}{2}\right)_0^{\pi}}=\sqrt{\frac{\pi}{2\pi}}=\sqrt{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Definición 5 *: Sean $f_1:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ y $f_2:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ dos funciones continuas a tramos y aproximadas es cada punto, se define el error o distanciamiento entre f_1 y f_2 al valor funcional:*

$$\varepsilon(t)=f_1(t)-f_2(t)$$

que es el valor en el que difiere f_2 de f_1. Además se define el error cuadrático medio (como el definido en álgebra lineal) como:

$$E=\frac{1}{b-a}\int_a^b\varepsilon^2(t)\,dt=\frac{1}{b-a}\int_a^b\left(f_1(t)-f_2(t)\right)^2dt.$$

Consideremos la serie $S_k(t)=\frac{1}{2}a_o+\sum_{n=1}^{k}\left(a_n\cos(n\omega_o t)+b_n sen(n\omega_o t)\right)$ que contiene $(2k+1)$ términos de una serie asociada a una función $f(t)$ periódica de periodo T dada en el intervalo $-\dfrac{T}{2} \leq t \leq \dfrac{T}{2}$. Como $f(t)$ se aproxima a $S_k(t)$ entonces existe una función $\varepsilon_k(t)$ tal que:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{k} \left(a_n \cos(n\omega_o t) + b_n sen(n\omega_o t)\right) + \varepsilon_k(t)$$

o mejor $\varepsilon_k(t) = f(t) - S_k(t)$ llamado error entre $f(t)$ y su aproximación. Por la definición de error cuadrático medio, se tiene que el error cuadrático medio para $\varepsilon_k(t)$ está dado por:

$$E_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\varepsilon_k(t)\right)^2 dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(f(t) - S_k(t)\right)^2 dt.$$

Ejemplo 14 *: Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, una función expandible en series de fourier y sea $S_k(t)$ una aproximación, pruebe que está aproximación tiene la propiedad de ser el mínimo error cuadrático medio.*
Solución: Por la definición de error cuadratico medio se tiene que:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\varepsilon_k(t)\right)^2 dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(f(t) - S_k(t)\right)^2 dt \\ &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(f(t) - \frac{1}{2}a_o - \sum_{n=1}^{k}\left(a_n \cos(n\omega_o t) + b_n sen(n\omega_o t)\right)\right)^2 dt \end{aligned}$$

Al considerar a E_k como una función que depende de a_o, a_n y b_n entonces para que el error cuadrático medio obtenga un valor de mínimo debe suceder que:

$$\frac{\partial E_k}{\partial a_o} = 0, \quad \frac{\partial E_k}{\partial a_n} = 0 \quad y \quad \frac{\partial E_k}{\partial b_n} = 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ por lo tanto:

$$\frac{\partial E_k}{\partial a_o} = -\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(f(t) - \frac{1}{2}a_o - \sum_{n=1}^{k}\left(a_n \cos(n\omega_o t) + b_n sen(n\omega_o t)\right)\right) dt. \tag{5}$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial a_n} = -\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(f(t) - \frac{1}{2}a_o - \sum_{n=1}^{k}\left(a_n \cos(n\omega_o t) + b_n sen(n\omega_o t)\right)\right) \cos(n\omega_o t)\, dt. \tag{6}$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial a_n} = -\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(f(t) - \frac{1}{2}a_o - \sum_{n=1}^{k}\left(a_n \cos(n\omega_o t) + b_n sen(n\omega_o t)\right)\right) sen(n\omega_o t)\, dt \tag{7}$$

Por las propiedades vistas anteriormente de otogonalidad vistas en ecuaciones diferenciales y retomadas al principio de estas notas, nos encontramos con que *las ecuaciones* (5), (6) *y* (7) *se convierten en:*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_k}{\partial a_o} &= -\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt + \frac{1}{2}a_o = 0. \\
\frac{\partial E_k}{\partial a_n} &= -\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega_o t)\,dt + a_n = 0. \\
\frac{\partial E_k}{\partial a_n} &= -\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,sen\,(n\omega_o t)\,dt + b_n = 0.
\end{aligned}$$

Que son precisamente los valores de los coeficientes de Fourier de f.

Ejemplo 15 *: Pruebe que* $E_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,dt - \frac{a_o^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$

Solución: Por la definición de error cuadratico medio se tiene que:

$$\begin{aligned}
E_k &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\varepsilon_k(t))^2\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (f(t) - S_k(t))^2\,dt \\
&= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(f^2(t) - 2f(t)\,S_k(t) + S_k^2(t)\right)dt \\
&= \frac{1}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,dt - 2\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,S_k(t)\,dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S_k^2(t)\,dt\right]
\end{aligned}$$

Como $S_k(t) = \frac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{k}\left(a_n\cos(n\omega_o t) + b_n sen\,(n\omega_o t)\right)$ *entonces la integral* $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,S_k(t)\,dt$ *se puede escribir como:*

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,S_k(t)\,dt &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\left(\frac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{k}\left(a_n\cos(n\omega_o t) + b_n sen\,(n\omega_o t)\right)\right)dt \\
&= \frac{1}{2}a_o\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt + \sum_{n=1}^{k}\left(a_n\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega_o t)\,dt\right. \\
&\quad \left. + b_n\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,sen\,(n\omega_o t)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{2}a_o^2\frac{T}{2} + \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{k}\left(a_n^2 + b_n^2\right).
\end{aligned}$$

De la misma forma que en el ejercicio anterior al usar el criterio de ortoganal-

idad se puede ver que:

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S_k^2(t)\,dt &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\frac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{k}\left(a_n\cos(n\omega_o t) + b_n sen(n\omega_o t)\right)\right)^2 dt \\
&= \frac{1}{4}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} a_o^2 dt + \sum_{n=1}^{k}\left(a_n^2\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos^2(n\omega_o t)\,dt + b_n^2\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} sen^2(n\omega_o t)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{4}a_o^2 T + \frac{1}{2}T\sum_{n=1}^{k}\left(a_n^2+b_n^2\right).
\end{aligned}$$

Así que al sustituir en la identidad de E_k *se obtiene que:*

$$\begin{aligned}
E_k &= \frac{1}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,dt - 2\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,S_k(t)\,dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S_k^2(t)\,dt\right] \\
&= \frac{1}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,dt - 2\left(\frac{1}{2}a_o\frac{T}{2} + \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{k}\left(a_n^2+b_n^2\right)\right)\right. \\
&\quad \left. +\frac{1}{4}a_o^2 T + \frac{1}{2}T\sum_{n=1}^{k}\left(a_n^2+b_n^2\right)\right]. \\
&= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,dt - \frac{1}{4}a_o^2 - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}\left(a_n^2+b_n^2\right).
\end{aligned}$$

Con lo cual se demuestra la identidad pedida.

Note que facilmente de lo anterior se puede conseguir que como $E_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(f(t) - S_k(t)\right)^2 dt \geq 0$ entonces:

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,dt - \frac{1}{4}a_o^2 - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}\left(a_n^2+b_n^2\right) \geq 0,$$

Por lo que:

$$\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,dt \geq \frac{1}{2}a_o^2 + \sum_{n=1}^{k}\left(a_n^2+b_n^2\right).$$

Teorema 2 *: (Identidad de Parseval) Si* a_o, a_n *y* b_n *son los coeficientes en la expansión de Fourier de una función periódica de periodo* T, *entonces:*

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,dt = \frac{1}{4}a_o^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}\left(a_n^2+b_n^2\right).$$

Prueba 2 *: Como:*

$$E_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,dt - \frac{a_o^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

Luego:

$$\begin{aligned} E_{k+1} &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,dt - \frac{a_o^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k+1}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \\ &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,dt - \frac{a_o^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}\left(a_n^2 + b_n^2\right) - \frac{1}{2}\left(a_{k+1}^2 + b_{k+1}^2\right) \\ &= E_k - \frac{1}{2}\left(a_{k+1}^2 + b_{k+1}^2\right). \end{aligned}$$

Lo que implica que la sucesión $\{E_k\}_{k=0}^{\infty}$ *es decreciente. Teniendo presente que* $\varepsilon_k(t) = f(t) - S_k(t)$ *y que* $E_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\varepsilon_k(t))^2\,dt$ *entonces al tomar el límite cuando* $k \longrightarrow \infty$ *se consigue que:*

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \varepsilon_k(t) = f(t) - \lim_{k\longrightarrow\infty} S_k(t) = 0.$$

ya que $S_k(t)$ *cuando* $k \longrightarrow \infty$ *es la serie de Fourier de* $f(t)$ *por lo tanto:*

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} E_k = \lim_{k\longrightarrow\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (\varepsilon_k(t))^2\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\lim_{k\longrightarrow\infty} \varepsilon_k(t)\right)^2 dt = 0.$$

Por lo que:

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,dt - \frac{a_o^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = 0$$

esto es:

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,dt = \frac{a_o^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

Teorema 3 *: (Condiciones de Dirichlet) Sea* $f(t)$ *una función periódica de periodo* T*, la función* $f(t)$ *puede representarse en series de Fourier si satisface las siguientes condiciones:*
1. La función $f(t)$ *tiene un número finito de discontinuidades en un periodo.*
2. La función $f(t)$ *tiene un número finito de máximos y mínimos en un periodo.*
3. La integral del valor absoluto de $f(t)$ *en un periodo es finita, osea:*

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|\,dt = M < \infty.$$

En un punto de discontinuidad t_o *la serie de Fourier de* $f(t)$ *converge al valor promedio de los límites laterales de* $f(t)$ *en ese punto, es decir:*

$$\frac{1}{2}\left[f\left(t_o^+\right) + f\left(t_o^-\right)\right]$$

(Se dice que una función $f(t)$ *es continua a tramos en el intervalo finito* $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ *si satisfae las condiciones* (1) *y* (2)*).*

Prueba 3 *: La demostración de este teorema no es nada simple y requiere de varios artificios matemáticos. A quién le interese la demostración se propone leer el texto (Abramowitz. M. y I. A. Stegun. "Handbook of mathematical function") excelente refrencia inclusive para este curso.*

Ejemplo 16 *:Si* a_o*,* a_n *y* b_n *son los coeficientes en la expansión de Fourier de una función periódica de periodo* T*, entonces:*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} b_n = 0.$$

<u>*Solución*</u>*: se había demostrado que:*

$$\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,dt \geq \frac{a_o^2}{2} + \sum_{n=1}^{k}\left(a_n^2+b_n^2\right).$$

Como la serie $\dfrac{a_o^2}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$ *es convergente entonces por los teoremas de series se tiene que:*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right) = 0.$$

Por lo que:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} b_n = 0.$$

con lo anteior se concluye además que:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\left\{\begin{array}{c}\cos(n\omega_o t)\\ sen\,(n\omega_o t)\end{array}\right.\,dt = 0.$$

Ejemplo 17 *: Si* $f(t)$ *es una función periódica de periodo* T*, continua a tramos en el intervalo finito* $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ *con* $f\left(-\frac{T}{2}\right) = f\left(\frac{T}{2}\right)$ *y si la derivada* $f'(t)$ *es una función periódica continua a tramos en el intervalo finito* $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ *y diferenciable, entonces la serie de Fourier:*

$$f(t) = \frac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\omega_o t) + b_n sen\,(n\omega_o t)\right)$$

puede derivarse término a término para obtener:

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\omega_o\left(-a_n sen\,(n\omega_o t) + b_n\cos(n\omega_o t)\right).$$

Solución: Como $f'(t)$ es una función periódica continua a tramos en el intervalo finito $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ y diferenciable, entonces existe una seie de Fourier tal que:

$$f'(t) = \frac{1}{2}\alpha_o + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cos(n\omega_o t) + \beta_n sen(n\omega_o t)\right).$$

con:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f'(t)\cos(n\omega_o t)\,dt, \\ \beta_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f'(t)\,sen(n\omega_o t)\,dt, \\ \alpha_o &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f'(t)\,dt = \left. f(t)\right|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = 0. \end{aligned}$$

Al integrar se consigue que:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{2}{T}\left[\left. f(t)\cos(n\omega_o t)\right|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + n\omega_o \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,sen(n\omega_o t)\,dt \right] = n\omega_o b_n, \\ \beta_n &= \frac{2}{T}\left[\left. f(t)\,sen(n\omega_o t)\right|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} - n\omega_o \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,s\cos(n\omega_o t)\,dt \right] = n\omega_o a_n. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\omega_o\left(-a_n sen(n\omega_o t) + b_n \cos(n\omega_o t)\right).$$

Ejemplo 18 *: Si $f(t)$ es una función periódica de periodo T, continua a tramos en el intervalo finito $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ entonces la serie de Fourier:*

$$f(t) = \frac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega_o t) + b_n sen(n\omega_o t)\right)$$

puede integrarse término a término para obtener:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt &= \left(\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt\right)\int_{t_1}^{t_2} dt + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\omega_o}\left(-b_n\left[\cos(n\omega_o t_2) - \cos(n\omega_o t_1)\right]\right. \\ &\quad \left. + a_n\left[sen(n\omega_o t_2) - sen(n\omega_o t_1)\right]\right). \end{aligned}$$

Solución: Sea $F(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau - \left(\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt\right)\cdot t$ la cual ya se vió que es periódica a tramos y de periodo T, donde:

$$F'(t) = f(t) - \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt$$

Como $F(t)$ es continua y periódica entonces se puede expandir en serie de Fourier así:

$$F(t) = \frac{1}{2}\alpha_o + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cos(n\omega_o t) + \beta_n sen(n\omega_o t)\right),$$

donde:

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t)\cos(n\omega_o t)\,dt,\\
\beta_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t)\, sen(n\omega_o t)\,dt,\\
\alpha_o &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Al integrar se consigue que:

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{2}{T}\left[\frac{2}{n\omega_o T}F(t)\, sen(n\omega_o t)\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} - \frac{2}{n\omega_o T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F'(t)\, sen(n\omega_o t)\,dt\right]\\
&= -\frac{2}{n\omega_o T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left(f(t) - \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt\right) sen(n\omega_o t)\,dt\\
&= -\frac{2}{n\omega_o T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, sen(n\omega_o t)\,dt = -\frac{1}{n\omega_o}b_n,\\
\beta_n &= \frac{2}{T}\left[\frac{2}{n\omega_o T}F(t)\cos(n\omega_o t)\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \frac{2}{n\omega_o T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F'(t)\cos(n\omega_o t)\,dt\right]\\
&= \frac{2}{n\omega_o T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left(f(t) - \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt\right)\cos(n\omega_o t)\,dt\\
&= \frac{2}{n\omega_o T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega_o t)\,dt = \frac{1}{n\omega_o}a_n.
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$F(t) = \frac{1}{2}\alpha_o + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\omega_o}\left(-b_n\cos(n\omega_o t) + a_n sen(n\omega_o t)\right).$$

Note que:

$$\begin{aligned}
F(t_2) - F(t_1) &= \int_0^{t_2} f(\tau)\,d\tau - \left(\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt\right)\cdot t_2 - \int_0^{t_1} f(\tau)\,d\tau - \left(\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt\right)\cdot t_1.\\
&= \int_{t_1}^{t_2} f(\tau)\,d\tau - \left(\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt\right)\cdot(t_2 - t_1).
\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} f(\tau)\,d\tau &= F(t_2) - F(t_1) + \left(\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt\right)\cdot(t_2 - t_1)\,. \\
&= \left(\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt\right)\int_{t_1}^{t_2} dt + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\omega_o}\left(-b_n\left[\cos(n\omega_o t_2) - \cos(n\omega_o t_1)\right]\right. \\
&\quad \left. + a_n\left[sen\,(n\omega_o t_2) - sen\,(n\omega_o t_1)\right]\right)\,.
\end{aligned}$$

Ondas Periódicas.

Series de Fourier de medio rango.

Definición 6 : *Sea $f(t)$ una función periódica de periodo $T = 2\tau$. Si $f(t)$ es par, entonces se obtiene la expansión en serie de Fourier como:*

$$f(t) = \frac{1}{2}a_o + \sum_{n=1} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\tau}t\right)$$

donde:

$$a_o = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} f(t)\, dt \quad y \quad a_n = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} f(t)\cos\left(\frac{n\pi}{\tau}t\right) dt.$$

Si $f(t)$ es impar, entonces se obtiene la expansión en serie de Fourier como:

$$f(t) = \sum_{n=1} b_n sen\left(\frac{n\pi}{\tau}t\right)$$

donde:

$$b_n = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} f(t)\, sen\left(\frac{n\pi}{\tau}t\right) dt.$$

Ejemplo 19 : *Dada la función*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & para\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & para\ \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

desarrollar $f(t)$ en serie de Fourier en términos del coseno (par) y trazar la correspondiente extensión periódica.
<u>Solución</u>: Como $f(t)$ es par entonces $b_n = 0$ y por lo tanto:

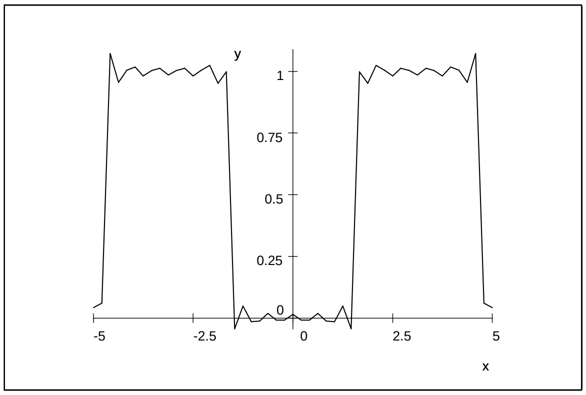
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\, dt = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(nt)\, dt \\ &= \frac{2}{n\pi}\, sen(nt)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{2}{n\pi} sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ &= \begin{cases} 0 & para\ n\ par \\ (-1)^k \dfrac{2}{(2k-1)\pi} & para\ n = 2k-1. \end{cases} \end{aligned}$$

Note que para $n = 0$ se tiene que:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dt = \frac{2}{\pi}\left(t\right)_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Asi que:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}a_o + \sum_{n=1} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\tau}t\right) \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1} (-1)^k \frac{2}{(2k-1)\pi} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{\pi}t\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1} \frac{(-1)^k}{(2k-1)} \cos\left((2k-1)t\right). \end{aligned}$$



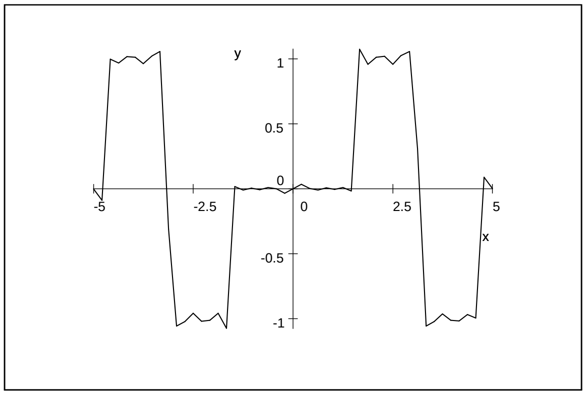
Ejemplo 20 *: Resuelva el ejercicio anterior pero desarrolle a $f(t)$ en serie de Fourier en términos del seno (impar) y trazar la correspondiente extensión periódica.*

<u>Solución</u>: Como $f(t)$ es par entonces $a_n = 0$ y $a_o = 0$ por lo tanto:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\, sen(nt)\, dt = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sen(nt)\, dt \\ &= -\frac{2}{n\pi}\cos(nt)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{2}{n\pi}\left[\cos(n\pi) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] \\ &= \begin{cases} 0 & para\ n = 4k \\ \frac{2}{n\pi} & para\ n = 1, 3, 5, 7... \\ -\frac{4}{n\pi} & para\ n = 2, 6, 10, 14... \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2}{\pi}\left(sen(t) + \frac{1}{3}sen(3t) + \frac{1}{5}sen(5t) + ...\right) \\ &\quad -\frac{2}{\pi}\left(sen(2t) + \frac{1}{3}sen(6t) + \frac{1}{5}sen(10t) + ...\right). \end{aligned}$$



Ejemplo 21 *: Dada la función*

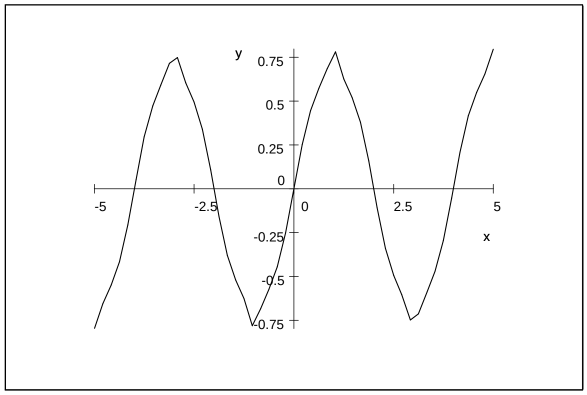
$$f(t) = \begin{cases} t & para\ 0 \le t \le 1 \\ 2-t & para\ 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

Desarrollar $f(t)$ en serie de Fourier en términos del seno (impar) y trazar la correspondiente extensión periódica.
<u>Solución</u>: Como $f(t)$ es par entonces $a_n = 0$ y $a_o = 0$ por lo tanto:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\, sen\left(\frac{n\pi t}{2}\right) dt = \int_0^1 t\ sen\left(\frac{n\pi t}{2}\right) dt + \int_1^2 (2-t)\ \ sen\left(\frac{n\pi t}{2}\right) dt \\
&= \frac{1}{\pi^2 n^2}\left(4sen\frac{1}{2}\pi n t - 2\pi n t\cos\frac{1}{2}\pi n t\right)_0^1 \\
&\quad + \frac{1}{\pi^2 n^2}\left(2\pi n t\cos\frac{1}{2}\pi n t - 4\pi n\cos\frac{1}{2}\pi n t - 4sen\frac{1}{2}\pi n t\right)_1^2 \\
&= \frac{1}{\pi^2 n^2}\left(4sen\frac{1}{2}\pi n - 2\pi n\cos\frac{1}{2}\pi n\right) \\
&\quad + \frac{1}{\pi^2 n^2}\left(4\pi n\cos\pi n - 4\pi n\cos\pi n - 4sen\pi n - 2\pi n\cos\frac{1}{2}\pi n + 4\pi n\cos\frac{1}{2}\pi n + 4sen\frac{1}{2}\pi n\right) \\
&= \frac{8}{\pi^2 n^2} sen\frac{1}{2}\pi n = (-1)^{k+1}\,\frac{8}{\pi^2\,(2k-1)^2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen\left(\frac{n\pi}{2}t\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\,\frac{8}{\pi^2\,(2k-1)^2} sen\left(\frac{(2k-1)\,\pi}{2}t\right).
\end{aligned}$$



La función impulso.

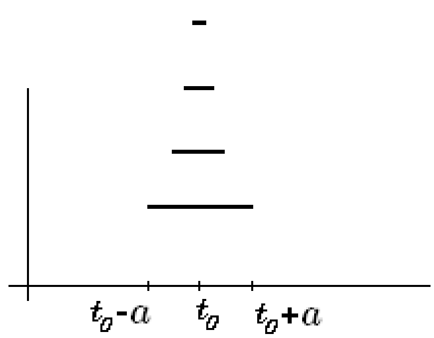
Definición 7 *: La función impulso se puede definir de varias maneras. Una de ellas la más conocida es:*

$$\delta(t-t_o)=\begin{cases}0 & si\ t\neq t_o\\ \infty & si\ t=t_o\end{cases}$$

Otra forma de definir esta función es tomando un límite de la siguiente manera:

$$\delta(t-t_o)=\lim_{a\longrightarrow 0}\begin{cases}0 & si\ t<t_o-a\\ \dfrac{1}{2a} & si\ t_o-a\leq t\leq t_o+a\\ 0 & si\ t_o+a\leq t\end{cases}$$

que a medida que $a\longrightarrow 0$ *entonces* $\dfrac{1}{2a}\longrightarrow\infty$. *Gráficamente la función a través del límite se vería así:*



Calculemos el área bajo la curva de la función impulso $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_o)\,dt$ *esto es:*

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_o)\,dt &= \lim_{a\longrightarrow 0}\int_{t_o-a}^{t_o+a}\frac{1}{2a}dt=\lim_{a\longrightarrow 0}\frac{1}{2a}t|_{t_o-a}^{t_o+a}\\ &= \lim_{a\longrightarrow 0}\frac{1}{2a}(t_o+a-t_o+a)=1.\end{aligned}$$

Ejemplo 22 *: Encuentre el valor de* $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_o) f(t)\, dt$ *siendo* $f(t)$ *una función cualquiera definida en un intervalo que contiene a* t_o
Solución: Como $f(t)$ *está definida en un intervalo que contiene a* t_o*, entonces :*

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_o) f(t)\, dt &= \lim_{a\longrightarrow 0} \int_{t_o-a}^{t_o+a} \frac{1}{2a} f(t)\, dt = \lim_{a\longrightarrow 0} \frac{1}{2a} \int_{t_o-a}^{t_o+a} f(t)\, dt \\
&= \lim_{a\longrightarrow 0} \frac{1}{2a} F(t)\,|_{t_o-a}^{t_o+a} = \lim_{a\longrightarrow 0} \frac{1}{2a} \left[F(t_o+a) - F(t_o-a)\right] \\
&= \lim_{a\longrightarrow 0} \frac{1}{2a} \left[F(t_o+a) - F(t_o) - F(t_o-a) + F(t_o)\right] \\
&= \frac{1}{2} \lim_{a\longrightarrow 0} \frac{F(t_o+a) - F(t_o)}{a} - \frac{F(t_o-a) - F(t_o)}{a} \\
&= \frac{1}{2}(2f(t_o)) = f(t_o).
\end{aligned}$$

Ejemplo 23 *: Encuentre el valor de* $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(k(t-t_o)) f(t)\, dt$ *siendo* $f(t)$ *una función cualquiera definida en un intervalo que contiene a* t_o
Solución: Como $f(t)$ *está definida en un intervalo que contiene a* t_o*, entonces al hacer la sustitución:*

$$u = a(t-t_o)$$

se consigue que:

$$du = adt$$

de donde $t = \frac{u}{a} + t_o$ *y* $dt = \frac{du}{a}$*; además si* $a > 0$*, cuando* $t \longrightarrow -\infty$*,* $u \longrightarrow -\infty$ *y cuando* $t \longrightarrow \infty$*,* $u \longrightarrow \infty$ *luego:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(a(t-t_o)) f(t)\, dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) f\left(\frac{u}{a} + t_o\right) du = \frac{1}{a} f(t_o).$$

ahora si $a < 0$*, cuando* $t \longrightarrow -\infty$*,* $u \longrightarrow \infty$ *y cuando* $t \longrightarrow \infty$*,* $u \longrightarrow -\infty$ *luego:*

$$\int_{\infty}^{-\infty} \delta(a(t-t_o)) f(t)\, dt = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) f\left(\frac{u}{a} + t_o\right) du = -\frac{1}{a} f(t_o).$$

en ambos casos dá positivo, luego $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(a(t-t_o)) f(t)\, dt = \frac{1}{|a|} f(t_o).$

Note que $\int_a^b \delta(t-t_o) f(t)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{si } t_o < a < b \text{ ó } a < b < t_o \\ f(t_o) & \text{si } a < t_o < b \end{cases}$ de igual forma $\int_a^b \delta(t-t_o)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{si } t_o < a < b \text{ ó } a < b < t_o \\ 1 & \text{si } a < t_o < b \end{cases}$

Ejemplo 24 *: Pruebe que:*
1. $f(t)\,\delta(t-t_o) = f(t_o)\,\delta(t-t_o)$ *siendo* $f(t)$ *continua en* t_o*.*

2. $t\delta(t) = 0$

3. $\delta(a(t-t_o)) = \dfrac{1}{|a|}\delta(t-t_o)$

4. $\delta(-t) = \delta(t)$.

Solución: 1. Como $f(t)$ es continua en t_o se tiene que para una función de prueba $\phi(t)$ (es una función continua en t_o que se anula fuera de un intervalo finito que contiene a t_o), se tiene que:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_o)\phi(t)f(t)\,dt &= \phi(t_o)f(t_o) = f(t_o)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_o)\phi(t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_o)f(t_o)\phi(t)\,dt.\end{aligned}$$

Como $\phi(t)$ es una función de prueba arbitraria, entonces se consluye que $f(t)\delta(t-t_o) = f(t_o)\delta(t-t_o)$.

2. Si $t_o = 0$ y $f(t) = t$ entonces por la parte (1), se llega a que $t\delta(t) = (0)\delta(t) = 0$.

3. para una función de prueba $\phi(t)$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(a(t-t_o))\phi(t)\,dt &= \frac{1}{|a|}\phi(t_o) = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t_o)\delta(t-t_o)\,dt \\ &= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)\delta(t-t_o)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|a|}\phi(t)\delta(t-t_o)\,dt\end{aligned}$$

Como $\phi(t)$ es una función de prueba arbitraria, entonces se consluye que $\delta(a(t-t_o)) = \dfrac{1}{|a|}\delta(t-t_o)$

4. Si $t_o = 0$ y $a = -1$ entonces por la parte (3), se llega a que $\delta(-t) = \delta(t)$.

Ejemplo 25 *: Encuntre la derivada de la función impulso $\delta(t)$ sabiendo que ésta se derivada se define a través de la integral.*

Solución: 1. Para $\phi(t)$ una función de prueba se tiene que:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)\phi(t)\,dt &= \delta(t)\phi(t)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\phi'(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\phi'(t)\,dt \\ &= -\phi'(0).\end{aligned}$$

Observe que la derivada n-ésima de la función impulso esta dada por:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{n}(t)\phi(t)\,dt &= \delta^{n-1}(t)\phi(t)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\delta^{n-1}(t)\phi'(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{n-1}(t)\phi'(t)\,dt \\ &= -\left(\delta^{n-2}(t)\phi(t)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\delta^{n-2}(t)\phi'(t)\,dt\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\delta^{n-2}(t)\phi'(t)\,dt \\ &= ... = (-1)^{n}\phi^{n}(0).\end{aligned}$$

Ejemplo 26 *: Si $f(t)$ es una función continua y diferenciable, demuestre que la regla del producto:*

$$(f(t)\delta(t))' = f(t)\delta'(t) + f'(t)\delta(t)$$

se sigue cumpliendo.
Solución: Para $\phi(t)$ una función de prueba se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} (f(t)\,\delta(t))'\,\phi(t)\,dt &= -\int_{-\infty}^{\infty} (f(t)\,\delta(t))\,\phi'(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\left(f(t)\,\phi'(t)\right)dt \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\left[(f(t)\,\phi(t))' - (f'(t)\,\phi(t))\right]dt \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,(f(t)\,\phi(t))'\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,(f'(t)\,\phi(t))\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\,(f(t)\,\phi(t))\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,(f'(t)\,\phi(t))\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\delta'(t)\,f(t) + \delta(t)\,(f'(t))\right]\phi(t)\,dt
\end{aligned}$$

como $\phi(t)$ es una función de prueba cualquiera, entonces:

$$(f(t)\,\delta(t))' = f(t)\,\delta'(t) + f'(t)\,\delta(t)\,.$$

Note que de lo anterior $f(t)\,\delta'(t) = (f(t)\,\delta(t))' - f'(t)\,\delta(t)$ y como $f(t)\,\delta(t) = f(0)\,\delta(t)$ entonces $f'(t)\,\delta(t) = f'(0)\,\delta(t)$ y $(f(t)\,\delta(t))' = (f(0)\,\delta(t))' = f(0)\,\delta'(t)$ luego se consigue que:

$$f(t)\,\delta'(t) = f(0)\,\delta'(t) - f'(0)\,\delta(t)\,.$$

Ejemplo 27 *: Pruebe que la función impulso es la derivada de la función escalón $u(t-t_o) = \begin{cases} 1 & si\ t > t_o \\ 0 & si\ t \leq t_o \end{cases}$.*
Solución: Para $\phi(t)$ una función de prueba se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} u'(t-t_o)\,\phi(t)\,dt &= -\int_{-\infty}^{\infty} u(t-t_o)\,\phi'(t)\,dt = -\int_{t_o}^{\infty} \phi'(t)\,dt \\
&= -\phi(t)\,|_{t_o}^{\infty} = \phi(t_o) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t_o)\,\delta(t-t_o)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_o)\,\phi(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Así que $u'(t-t_o) = \delta(t-t_o)$.

Espectros de Funciones Discretas

Forma compleja de la serie de Fourier.

Sea $f(t)$ una función periodica de periodo T, luego ella tiene que:

$$f(t) \leftrightarrow \frac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(n\omega_o t) + b_n sen(n\omega_o t)\right)$$

donde $\omega_o = \dfrac{2\pi}{T}$, $\cos(n\omega_o t) = \dfrac{e^{jn\omega_o t} + e^{-jn\omega_o t}}{2}$ y $sen(n\omega_o t) = \dfrac{e^{jn\omega_o t} - e^{-jn\omega_o t}}{2j}$
por lo tanto al sustituir en la serie asociada, se consigue que:

$$\begin{aligned} f(t) &\leftrightarrow \frac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\left(\frac{e^{jn\omega_o t} + e^{-jn\omega_o t}}{2}\right) + b_n\left(\frac{e^{jn\omega_o t} - e^{-jn\omega_o t}}{2j}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}(a_n - jb_n)e^{jn\omega_o t} + \frac{1}{2}(a_n + jb_n)e^{-jn\omega_o t}\right) \\ &= \frac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{jn\omega_o t} + c_{-n}e^{-jn\omega_o t}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_o t} \qquad (*) \end{aligned}$$

Siendo $c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$, $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$ y $c_o = \dfrac{1}{2}a_o$.
Observe que:

$$c_o = \frac{1}{2}a_o = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt.$$

Como:

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{T}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega_o t)\,dt - j\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,sen(n\omega_o t)\,dt\right),$$

esto es:

$$c_n = \frac{1}{T}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\left[\cos(n\omega_o t) - j sen(n\omega_o t)\right]dt\right) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,e^{-jn\omega_o t}dt.$$

Analogamente se consigue que $c_{-n} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{jn\omega_o t} dt$ o sea que para todo $n \in \mathbb{Z}$ se obtiene que:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-jn\omega_o t} dt.$$

Observe también que $|c_n| = \dfrac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ llamado magnitud de los coeicientes de Fourier de la función $f(t)$ y el ángulo que forman las componentes de los c_n con el eje real esta dado por:

$$\phi_n = \tan^{-1}\left(-\frac{b_n}{a_n}\right),$$

a excepción de a_o. Note también que $c_n = \overline{c_{-n}}$ donde $\overline{c_{-n}}$ es el complejo conjugado de c_{-n}.
La serie descrita en $(*)$ es llamada la serie compleja de Fourier.

Teorema 4 *: (Teorema de parseval en forma compleja) Sea $f(t)$ una función periódica de periodo T, la cual tiene asociada su forma compleja de Fourier dada por:*

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_o t}$$

con $\omega_o = \dfrac{2\pi}{T}$, entonces:

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2$$

Prueba 4 *: Por el teorema de parseval se había concluido que:*

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\, dt = \frac{a_o^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

y por la deducción de la forma compleja de la serie de Fourier, se tiene que:

$$|C_o|^2 = \frac{1}{4}a_o^2$$

y como $c_n = \overline{c_{-n}}$ además de que:

$$|c_n| = |c_{-n}| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

entonces:

$$|c_n|^2 = c_n \cdot c_{-n} = \frac{1}{4}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

luego:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,dt &= \frac{a_o^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right). \\
&= |C_o|^2+2\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2.
\end{aligned}$$

Ejemplo 28 *: Encuentre la serie compleja de Fourier de la función* $f(t)=\dfrac{a}{T}t$ *si* $0\le t\le T$ *y de periodo* T.

Solución: Como $f(t)$ *es continua, entonces se tiene que* $f(t)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{jn\omega_o t}$ *donde* $\omega_o=\dfrac{2\pi}{T}$ *y* $c_n=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,e^{-jn\omega_o t}dt$*, así que:*

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,e^{-jn\omega_o t}dt=\frac{a}{T^2}\int_0^T te^{-jn\omega_o t}dt \\
&= \frac{a}{T^2}\left[\left.\frac{te^{-jn\omega_o t}}{-jn\omega_o}\right|_0^T+\frac{1}{jn\omega_o}\int_0^T e^{-jn\omega_o t}dt\right] \\
&= \frac{a}{T^2}\left[-\frac{Te^{-jn\omega_o T}}{jn\omega_o}-\frac{1}{(jn\omega_o)^2}\left.e^{-jn\omega_o t}\right|_0^T\right] \\
&= \frac{a}{T^2}\left[-\frac{Te^{-jn2\pi}}{jn\omega_o}-\frac{e^{-jn2\pi}-1}{(jn\omega_o)^2}\right]
\end{aligned}$$

Como $e^{-jn2\pi}=1$ *entonces* $c_n=-\dfrac{a}{T^2}\dfrac{T}{jn\omega_o}=j\dfrac{a}{n\omega_o T}=j\dfrac{a}{2n\pi}=\dfrac{a}{2n\pi}e^{j\frac{\pi}{2}}$.

Ahora: $c_o=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt=\dfrac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt=\dfrac{a}{T^2}\int_0^T tdt=\dfrac{a}{2T^2}\left.t^2\right|_0^T=\dfrac{a}{2}$.

Por lo tanto se obtiene que la serien de Fourier de la función $f(t)$ *está dada por:*

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{jn\omega_o t}=\frac{a}{2}+j\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{a}{2n\pi}e^{jn\omega_o t} \\
&= \frac{a}{2}+\frac{a}{2\pi}j\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n}e^{jn\omega_o t}=\frac{a}{2}+\frac{a}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n}e^{j\left(n\omega_o t+\frac{\pi}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Ejemplo 29 *: Lleve el resultado anterior a una serie real de Fourier.*

Solución: Como $c_n=\frac{1}{2}(a_n-jb_n)$, $c_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+jb_n)$ *y* $c_o=\dfrac{1}{2}a_o$*, luego*

$a_o = 2c_o$ *y* $a_n = c_n + c_{-n} = c_n + \overline{c_{-n}} = 2\operatorname{Re}(c_n)$, $b_n = j(c_n - c_{-n}) = j(c_n - \overline{c_{-n}}) = -2\operatorname{Im}(c_n)$. *Por lo tanto* $\frac{1}{2}a_o = c_n, a_n = 2\operatorname{Re}(c_n) = 0$ *y por último* $b_n = -2\operatorname{Im}(c_n) = -2\frac{a}{2n\pi} = -\frac{a}{n\pi}$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(n\omega_o t) + b_n sen(n\omega_o t)\right) \\ &= \frac{a}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n\pi}\cos(n\omega_o t) = \frac{a}{2} - \frac{a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos(n\omega_o t). \end{aligned}$$

Ejemplo 30 *Encuentre la serie compleja de Fourier de la función* $f(t) = Asen(\pi t)$ *si* $0 \leq t \leq 1$ *y de periodo 1.*

<u>Solución</u>: Como $f(t)$ *es continua, entonces se tiene que* $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_o t}$ *donde* $\omega_o = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$ *y* $c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-jn\omega_o t}dt$*, así que:*

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-jn\omega_o t}dt = A\int_0^1 sen(\pi t)\, e^{-jn\omega_o t}dt \\ &= \frac{A}{2j}\int_0^1 \left(e^{j\pi t} - e^{-j\pi t}\right)e^{-j2n\pi t}dt \\ &= \frac{A}{2j}\int_0^1 \left(e^{-j\pi(2n-1)t} - e^{-j\pi(2n+1)t}\right)dt \\ &= \frac{A}{2j}\left[-\frac{e^{-j\pi(2n-1)t}}{j\pi(2n-1)} + \frac{e^{-j\pi(2n+1)t}}{j\pi(2n+1)}\right]_0^1 \\ &= \frac{A}{2j}\left[\frac{1}{j\pi(2n-1)} - \frac{1}{j\pi(2n+1)}\right] = -\frac{2A}{\pi(4n^2-1)}. \end{aligned}$$

Calculemos c_o :

$$\begin{aligned} c_o &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-jn\omega_o t}dt = A\int_0^1 sen(\pi t)\, dt \\ &= -A\left(\frac{\cos(\pi t)}{\pi}\right)_0^1 = \frac{2A}{\pi}. \end{aligned}$$

Luego $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_o t} = -\frac{2A}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)}e^{jn\omega_o t}$.

Ejemplo 31 *: Resuelva como ejercicio el llevar el resultado anterior a una serie real de Fourier.*

Definición 8 : *(Ortogonalidad de funciones complejas) Sean f y g dos funciones definidas de forma compleja, es decir, $f(t) = u_1(t) + jv_1(t)$ y $g(t) = u_2(t) + jv_2(t)$, se dice que f y g son ortogonales en $[a, b]$ si:*

$$\int_a^b f(t) \cdot \overline{g}(t)\, dt = 0$$

siendo $\overline{g}(t) \neq \overline{f}(t)$.
De igual forma se define la magnitud de f en el intervalo $[a, b]$ como:

$$\int_a^b f(t) \cdot \overline{f}(t)\, dt$$

Ejemplo 32 : *Demuestre que el conjunto de funciones complejas de la serie de Fourier $\left\{e^{jn\omega_o t}\right\}$, para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ obedece la condición de ortogonalidad.para $n \neq m$ en el intervalo $-\frac{1}{2}T \leq t \leq \frac{1}{2}T$, donde $\omega_o = \frac{2\pi}{T}$.*
<u>Solución</u>: Para $\left. e^{jm\omega_o t}\right|_{m=0} = 1$ entonces:

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 \cdot e^{jn\omega_o t} dt &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{jn\omega_o t} dt = \frac{1}{jn\omega_o}\, e^{jn\omega_o t}\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{jn\omega_o}\left(e^{jn\omega_o \frac{T}{2}} - e^{-jn\omega_o \frac{T}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{jn\omega_o}\left(e^{jn\pi} - e^{-jn\pi}\right) = 0 \qquad \text{para } n \neq 0.
\end{aligned}$$

Ahora para $m \neq 0$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{jn\omega_o t} \cdot \overline{e^{jm\omega_o t}} dt &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{jn\omega_o t} \cdot e^{-jm\omega_o t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j(n-m)\omega_o t} dt \\
&= \frac{1}{j(n-m)\omega_o}\, e^{j(n-m)\omega_o t}\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{j(n-m)\omega_o}\left(e^{j(n-m)\omega_o \frac{T}{2}} - e^{-j(n-m)\omega_o \frac{T}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{j(n-m)\omega_o}\left(e^{j(n-m)\pi} - e^{-j(n-m)\pi}\right) = 0 \qquad \text{para } n \neq m.
\end{aligned}$$

Definición 9 : *(Espectro de una función) Sea f una función periódica de periodo T continua a tramos definida en un intervalo I, la cual tiene asociada la serie de Fourier dada por:*

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_o t}.$$

Se define el espectro de la función $f(t)$ como el gráficio de $\omega = n\omega_o$ vs $|c_n|$ el cual es un gráfico disreto de puntos.

Definición 10 : *(Ciclo de dureza o nivel de dureza) Sea $f(t)$ una función periódica de perioda T, continua a tramos en un intervalo I, se define el ciclo de dureza de la función $f(t)$ al porcentaje en que la función en un periodo $-\frac{1}{2}T \leq t \leq \frac{1}{2}T$ es no nulo y se denota por $D\%$.*

Ejemplo 33 *: Dada la función:*

$$f(t) = \begin{cases} A & si\ -\frac{1}{2}\tau \leq t \leq \frac{1}{2}\tau \\ 0 & si\ -\frac{1}{2}T \leq t \leq -\frac{1}{2}\tau \quad y \quad \frac{1}{2}\tau \leq t \leq \frac{1}{2}T \end{cases}$$

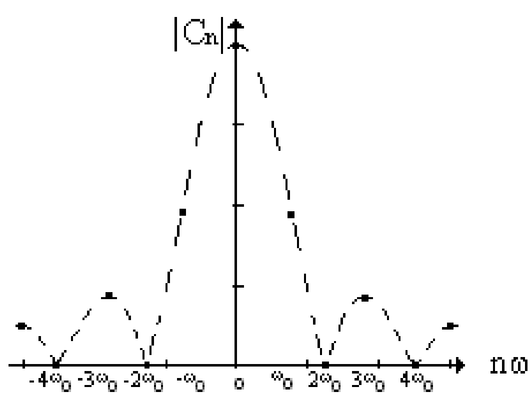
Encunetre el ciclo de dureza de la función $f(t)$ y encuentre también el espectro de la función.
Solución: Para encontrar el ciclo de dureza se tiene qué:

$$D\% = \frac{\tau}{T}.$$

Encontremos ahora el espectro de la función:

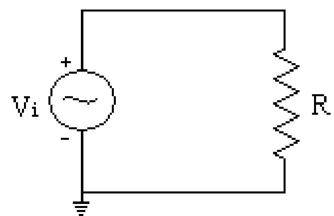
$$\begin{aligned} c_n &= \frac{A}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-jn\omega_o t}dt = \frac{A}{-jn\omega_o T}\ e^{-jn\omega_o t}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \\ &= \frac{A}{-jn\omega_o T}\left(e^{-jn\omega_o\frac{\tau}{2}} - e^{jn\omega_o\frac{\tau}{2}}\right) = \frac{2A\tau}{n\tau\omega_o T}\frac{\left(e^{jn\omega_o\frac{\tau}{2}} - e^{-jn\omega_o\frac{\tau}{2}}\right)}{2j} \\ &= \frac{A\tau}{T}\frac{sen\left(\frac{n\omega_o\tau}{2}\right)}{\frac{n\omega_o\tau}{2}} = \frac{A\tau}{T}Sa\left(\frac{n\omega_o\tau}{2}\right) \end{aligned}$$

Donde $Sa\left(\frac{n\omega_o\tau}{2}\right) = \frac{sen\left(\frac{n\omega_o\tau}{2}\right)}{\frac{n\omega_o\tau}{2}}$ *es el seno sobre su argumento. Veamos ahora como es su gráfico:*



Donde el gráfico son solamente los puntos oscuros dados en $n\omega_o$.

Definición 11 *: (Potencia de una señal) Consideremos el circuito dado por:*



Luego la potencia discipada por la resistencia es:

$$P = v \times i = \frac{v^2}{R} = i^2 R$$

donde v es el voltaje aplicado en la fuente el cual puede ser variable al igual que la corriente y por lo tanto:

$$P = \int \frac{v^2}{R} dt = \int i^2 R dt.$$

Si la resistencia del circuito es de 1Ω entonces:

$$P = \int v^2 dt = \int i^2 dt.$$

Por la deficnición del valor promedio de una función, se tiene que para una señal de voltaje o de corriente dada de forma periódica y de periodo T, se tiene que la potencia media de la señal es:

$$\overline{P} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} i^2 dt.$$

que al aplicar el teorema de parseval en forma compleja se da que:

$$\begin{aligned} \overline{P} &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} i^2 dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 . \end{aligned}$$

o también para $\underline{v}$ ó $\underline{i}$ vista de forma trigonométrica se tiene que:

$$\overline{P} = \frac{1}{4} a_o^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right).$$

Ejemplo 34 *: Encuentre la potencia media de la señal de voltaje en dos formas diferentes para la señal de voltaje dada por:*

$$v(t) = 5sen(2t) + 3\cos(7t)$$

<u>Solución</u>: 1. Por la integral se tiene que el periodo de esta función es $\dfrac{n}{m} = \dfrac{2}{7}$, *de donde* $T = 2\pi$

$$\begin{aligned} \overline{P} &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(5sen\left(2t\right) + 3\cos\left(7t\right)\right)^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(25sen^2\left(2t\right) + 9\cos^2\left(7t\right) + 30\ sen\left(2t\right)\cos\left(7t\right)\right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(25\pi + 9\pi\right) = \frac{34}{2}. \end{aligned}$$

2. Por el teorema de parseval se tiene que:

$$\overline{P} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

Pero escribamos primero a $v\left(t\right)$ *en serie de Fourier compleja:*

$$\begin{aligned} v\left(t\right) &= 5sen\left(2t\right) + 3\cos\left(7t\right) \\ &= \frac{5}{2j}\left(e^{2jt} - e^{-2jt}\right) + \frac{3}{2}\left(e^{7jt} + e^{-7jt}\right) \end{aligned}$$

luego $c_{-2} = \dfrac{3}{2}$, $c_{-1} = -\dfrac{5}{2j}$, $c_{-1} = \dfrac{5}{2j}$ *y* $c_2 = \dfrac{3}{2}$ *de donde:*

$$\overline{P} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{9}{4} + \frac{25}{4} + \frac{25}{4} + \frac{9}{4} = \frac{25}{2} + \frac{9}{2} = \frac{34}{2}$$

La tarnsformada de fourier, espectros continuos y la integral de Fourier.