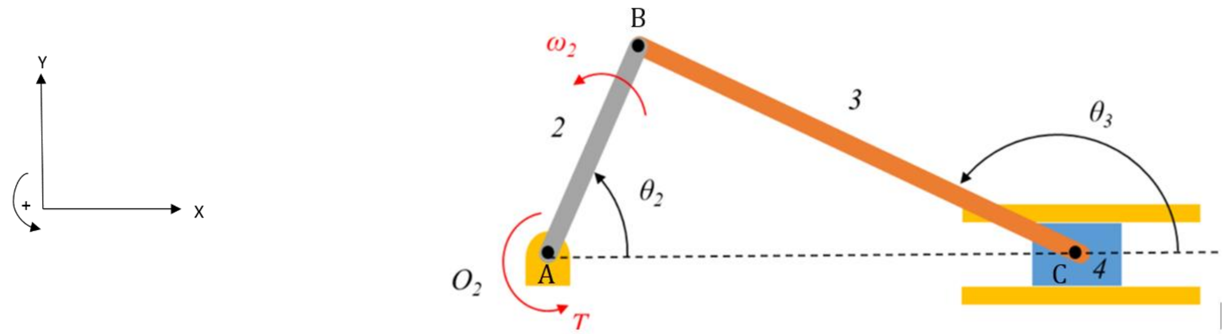
2. El mecanismo manivela biela corredera es uno de los más comunes en aplicaciones prácticas. Si la manivela *2*, de *20 cm* de longitud, gira con velocidad angular constante ω_2 *100 revoluciones/min*, determinar la velocidad y aceleración de la corredera *4*, así como la velocidad y aceleración angulares de la biela *3*, como funciones del ángulo de giro de la manivela θ_2. En una hoja de cálculo, graficar estas expresiones para un giro completo de la manivela. La longitud de la biela *3* es de *40 cm*.



Para resolver el problema anterior se toma el sistema de referencia ya mostrado en la figura. Primeramente con el fin de usar cantidades en el sistema internacional se lleva la velocidad angular ω_2 a las respectividades unidades.

$$\omega_2 = 100\frac{\text{rev}}{\text{min}}\cdot\frac{2\pi * \text{rad}}{1\text{ rev}}\cdot\frac{1\text{min}}{60\text{ s}} = 3.\hat{3}\pi\text{ rad/s}$$

Como se observa el punto donde se intersecan la biela 2 y 3, tiene una velocidad que está totalmente relacionada con la rotación de la biela 2 con respecto al punto O_2, entonces:

$$\overrightarrow{v_B} = \overrightarrow{v_A} + \overrightarrow{\omega_2} \times \overrightarrow{r_{B/A}} = 3.\hat{3}\pi\,\hat{k} \times 0.2(\cos(\theta_2)\,\hat{\imath} + \text{sen}(\theta_2)\,\hat{\jmath})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 3.\hat{3}\,\pi \\ 0.2\cos(\theta_2) & 0.2\text{sen}(\theta_2) & 0 \end{vmatrix} = -0.\hat{6}\pi\text{sen}(\theta_2)\hat{\imath} + 0.\hat{6}\pi\cos(\theta_2)\hat{\jmath}$$

Ahora teniendo en cuenta que ω_2 es constante entonces $\alpha_2 = 0$ y que O_2 está estático, entonces:

$$\overrightarrow{a_B} = \overrightarrow{a_A} + \overrightarrow{\omega_2} \times (\overrightarrow{\omega_2} \times \overrightarrow{r_{B/A}}) + \overrightarrow{\alpha_2} \times \overrightarrow{r_{B/A}} = 3.\hat{3}\pi\hat{k} \times \left(3.\hat{3}\pi\hat{k} \times 0.2(\cos(\theta_2)\,\hat{\imath} + \text{sen}(\theta_2)\,\hat{\jmath})\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 3.\hat{3}\pi \\ -0.\hat{6}\pi\text{sen}(\theta_2) & 0.\hat{6}\pi\cos(\theta_2) & 0 \end{vmatrix} = -2.\hat{2}\pi\cos(\theta_2)\hat{\imath} - 2.\hat{2}\pi\text{sen}(\theta_2)\hat{\jmath}$$

Es necesario para hallar v_3 y a_4 conocer las componentes del radio vector que va desde 4 hasta la intersección entre 2 y 3, como se observa en la figura la altura del triángulo corresponde a la componente vertical de dicho radio, entonces:

$$\text{sen}(\theta_2) = \frac{h}{0.2} \text{ entonces } h = 0.2\text{sen}(\theta_2)$$

Teniendo lo anterior en cuenta se puede calcular la componente horizontal del radio vector así:

$$0.4 = \sqrt{0.2^2\text{sen}^2(\theta_2) + B^2}$$

Siendo B la base formado por la biela 3 y su altura, entonces:

$$B = \sqrt{0.4^2 - 0.2^2\text{sen}^2(\theta_2)}$$

Por lo que se puede definir completamente el radio vector:

$$\overrightarrow{r_{C/B}} = \sqrt{0.4^2 - 0.2^2\text{sen}^2(\theta_2)}\,\hat{\imath} - 0.2\text{sen}(\theta_2)\hat{\jmath}$$

Ahora para hallar $\overrightarrow{v_4}$ y $\overrightarrow{\omega_3}$ (velocidad angular de la biela 3) se tiene en cuenta que se conoce la dirección de ambas cantidades, entonces se procede de la siguiente manera:

$$\overrightarrow{v_C} = \overrightarrow{v_B} + \overrightarrow{\omega_3} \times \overrightarrow{r_{C/B}}$$

$$v_C\hat{\imath} = -0.\hat{6}\pi\mathrm{sen}(\theta_2)\hat{\imath} + 0.\hat{6}\pi\cos(\theta_2)\hat{\jmath} + \omega_3\hat{k} \times \left(\sqrt{0.4^2 - 0.2^2\mathrm{sen}^2(\theta_2)}\,\hat{\imath} - 0.2\mathrm{sen}(\theta_2)\hat{\jmath}\right)$$

$$v_C\hat{\imath} = -0.\hat{6}\pi\mathrm{sen}(\theta_2)\hat{\imath} + 0.\hat{6}\pi\cos(\theta_2)\hat{\jmath} + \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega_3 \\ \sqrt{0.4^2 - 0.2^2\mathrm{sen}^2(\theta_2)} & -0.2\mathrm{sen}(\theta_2) & 0 \end{vmatrix}$$

$$v_C\hat{\imath} = -0.\hat{6}\pi\mathrm{sen}(\theta_2)\hat{\imath} + 0.\hat{6}\pi\cos(\theta_2)\hat{\jmath} + 0.2\omega_3\mathrm{sen}(\theta_2)\hat{\imath} + \omega_3\sqrt{0.4^2 - 0.2^2\mathrm{sen}^2(\theta_2)}\,\hat{\jmath}$$

Por lo que se puede obtener un sistema de ecuaciones 2x2:

$$v_C = -0.\hat{6}\pi\mathrm{sen}(\theta_2) + 0.2\omega_3\mathrm{sen}(\theta_2)$$
$$0 = 0.\hat{6}\pi\cos(\theta_2) + \omega_3\sqrt{0.4^2 - 0.2^2\mathrm{sen}^2(\theta_2)}$$

Entonces:

$$\omega_3 = -\frac{0.\hat{6}\pi\cos(\theta_2)}{\sqrt{0.4^2 - 0.2^2\mathrm{sen}^2(\theta_2)}}$$

$$v_C = -0.\hat{6}\pi\mathrm{sen}(\theta_2) - \frac{0.1\hat{3}\pi\cos(\theta_2)\cdot\mathrm{sen}(\theta_2)}{\sqrt{0.4^2 - 0.2^2\mathrm{sen}^2(\theta_2)}}$$

Ahora para la aceleración del deslizador se tiene que:

$$\overrightarrow{a_C} = \overrightarrow{a_B} + \overrightarrow{\alpha_3} \times \overrightarrow{r_{C/B}} + \overrightarrow{\omega_3} \times \left(\overrightarrow{\omega_3} \times \overrightarrow{r_{C/B}}\right)$$

$$a_C\hat{\imath} = -2.\hat{2}\pi\cos(\theta_2)\hat{\imath} - 2.\hat{2}\pi\mathrm{sen}(\theta_2)\hat{\jmath} + \alpha_3\hat{k} \times \left(\sqrt{0.4^2 - 0.2^2\mathrm{sen}^2(\theta_2)}\,\hat{\imath} - 0.2\mathrm{sen}(\theta_2)\hat{\jmath}\right) + \omega_3\hat{k} \times \left(0.2\omega_3\mathrm{sen}(\theta_2)\hat{\imath} + \omega_3\sqrt{0.4^2 - 0.2^2\mathrm{sen}^2(\theta_2)}\,\hat{\jmath}\right)$$

Desarrollando los productos cruzados:

$$\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \alpha_3 \\ \sqrt{0.4^2 - 0.2^2\mathrm{sen}^2(\theta_2)} & -0.2\mathrm{sen}(\theta_2) & 0 \end{vmatrix} = 0.2\alpha_3\mathrm{sen}(\theta_2)\hat{\imath} + \alpha_3\sqrt{0.4^2 - 0.2^2\mathrm{sen}^2(\theta_2)}\hat{\jmath}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega_3 \\ 0.2\omega_3\mathrm{sen}(\theta_2) & \omega_3\sqrt{0.4^2 - 0.2^2\mathrm{sen}^2(\theta_2)} & 0 \end{vmatrix} = -\omega_3^2\sqrt{0.4^2 - 0.2^2\mathrm{sen}^2(\theta_2)}\,\hat{\imath} + 0.2\omega_3^2\mathrm{sen}(\theta_2)\hat{\jmath}$$

Entonces ahora:

$$a_4\hat{\imath} = -2.\hat{2}\pi\cos(\theta_2)\hat{\imath} - 2.\hat{2}\pi\mathrm{sen}(\theta_2)\hat{\jmath} + 0.2\alpha_3\mathrm{sen}(\theta_2)\hat{\imath} + \alpha_3\sqrt{0.4^2 - 0.2^2\mathrm{sen}^2(\theta_2)}\hat{\jmath} - \omega_3^2\sqrt{0.4^2 - 0.2^2\mathrm{sen}^2(\theta_2)}\,\hat{\imath} + 0.2\omega_3^2\mathrm{sen}(\theta_2)\hat{\jmath}$$

De donde podemos obtener un sistema de ecuaciones 2x2:

$$a_4 = -2.\hat{2}\pi\cos(\theta_2) + 0.2\alpha_3\text{sen}(\theta_2) - \omega_3^2\sqrt{0.4^2 - 0.2^2\text{sen}^2(\theta_2)}$$

$$0 = -2.\hat{2}\pi\text{sen}(\theta_2) + \alpha_3\sqrt{0.4^2 - 0.2^2\text{sen}^2(\theta_2)} + 0.2\omega_3^2\text{sen}(\theta_2)$$

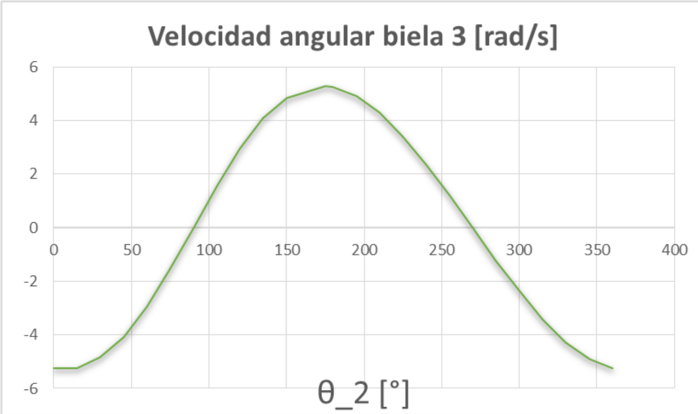
$$\alpha_3 = \frac{\text{sen}(\theta_2)\cdot\left(2.\hat{2}\pi - 0.2\omega_3^2\right)}{\sqrt{0.4^2 - 0.2^2\text{sen}^2(\theta_2)}}$$

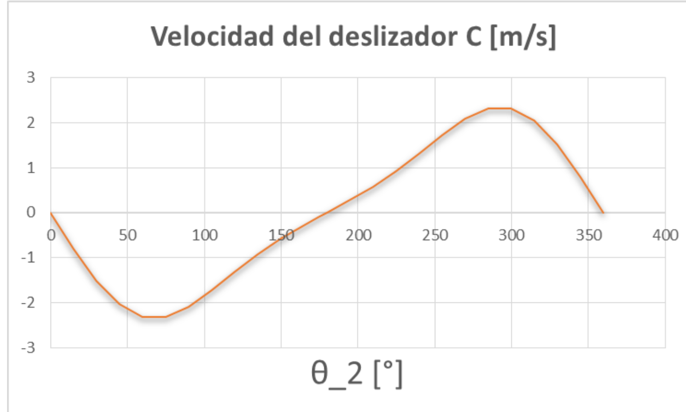
$$a_4 = -2.\hat{2}\pi\cos(\theta_2) + 0.2\alpha_3\text{sen}(\theta_2) - \omega_3^2\sqrt{0.4^2 - 0.2^2\text{sen}^2(\theta_2)}$$

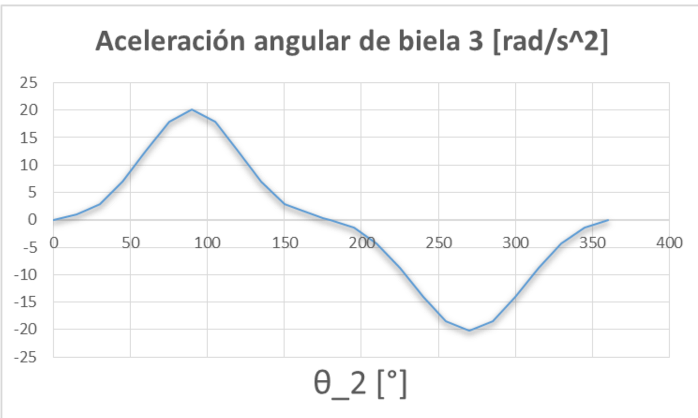
Ahora para proceder a graficar, en una hoja de cálculo en Excel se procede a introducir las respectivas formulas, variando el ángulo θ_2.

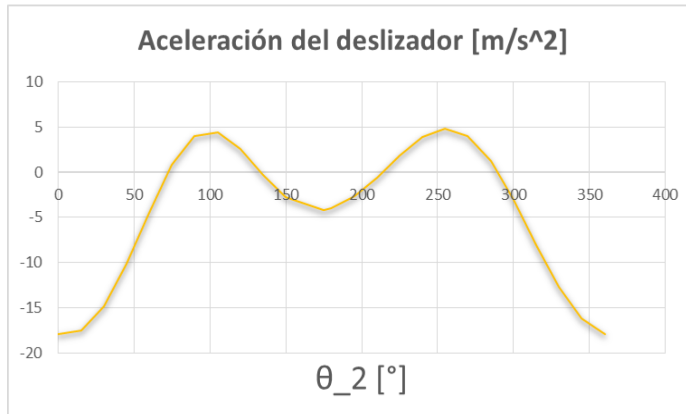
Ángulo [grad]	ω_3 [rad/s]	v_C [m/s]	α_3 [rad/s^2]	a_C [m/s^2]
0	-5,23598776	0	0	-17,947544
15	-5,22959478	-0,80608874	0,986360892	-17,5398538
30	-4,84758271	-1,51551842	2,945409891	-14,8526029
45	-4,08060724	-2,04071147	6,8998269	-10,1911204
60	-2,95767797	-2,31685667	12,56624386	-4,46820659
75	-1,55600774	-2,32201058	17,91745388	0,806461881
90	-3,7036E-16	-2,0943951	20,15332425	4,030664851
105	1,55600774	-1,72405005	17,91745388	4,420257448
120	2,95767797	-1,31074206	12,56624386	2,513110346
135	4,08060724	-0,92121048	6,8998269	-0,3180473
150	4,84758271	-0,57887669	2,945409891	-2,76060726
175	5,2738353	-0,09153016	0,309402343	-4,15462266
180	5,23598776	-1,283E-16	4,5888E-16	-3,98491017
195	4,9014864	0,27804994	-1,420178	-2,71207264
210	4,2751661	0,578876685	-4,29372783	-0,60329856
225	3,41300241	0,921210482	-8,79069624	1,821227155
240	2,37362133	1,310742057	-14,0620557	3,894882176
255	1,21625527	1,724050051	-18,436953	4,850517521
270	8,6064E-16	2,0943951	-20,1533243	4,030664851
285	-1,21625527	2,322010585	-18,436953	1,236721954
300	-2,37362133	2,316856668	-14,0620557	-3,08643476
315	-3,41300241	2,040711474	-8,79069624	-8,05184594
330	-4,2751661	1,515518415	-4,29372783	-12,6952942
345	-4,9014864	0,80608874	-1,420178	-16,1989413
360	-5,23598776	7,69783E-16	-9,1776E-16	-17,947544

Obteniendo así las gráficas que describen el movimiento de la biela:


Velocidad angular biela 3 [rad/s]
θ_2 [°]


Velocidad del deslizador C [m/s]
θ_2 [°]


Aceleración angular de biela 3 [rad/s^2]
θ_2 [°]


Aceleración del deslizador [m/s^2]
θ_2 [°]