Control

Mauricio Ríos

2021-1

1. Introducción y repaso

1.1. Laplacé

Definición: (*Transformada de Laplacé*) Considere un función $y = f(t)$ continua a tramos con un número finito de discontinuidades en el intervalo $[0,)$. Se define la transformada de Laplace de $y = f(t)$ como

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

tenga presente que esta integral debe existir para que exista la transformada de lo contrario no existe dicha transformada y si t representa el tiempo entonces las unidades de st debe ser adimensional, es decir, $[st] = 1$ pero si t es el tiempo entonces $[s] = 1/[t] = 1/seg = Hertz$, por lo que al calcular la integral, desaparece t dado no está evaluada, de donde las unidades en la que se encuentra la transformada es la frecuencia dado que s es la variable que predominaría libre. Por lo que la transformada de Laplacé de está en términos de la frecuencia. Además tenga presente que $s = \sigma + j\omega$ con σ y ω en R

Ejemplos: *(Transformada de Laplacé)*:

1. $$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\} = \int\limits_0^\infty e^{-\alpha t}e^{-st}dt = \int\limits_0^\infty e^{-t(s+\alpha)}dt = \frac{1}{s+\alpha}$$

2. $$\begin{gathered}\mathcal{L}\left\{\alpha g\left(t\right) + \beta h\left(t\right)\right\} = \int_0^\infty \left(\alpha g\left(t\right) + \beta h\left(t\right)\right)e^{-st}dt = \int_0^\infty (\alpha g(t)e^{-st} + \beta h\left(t\right)e^{-st})dt \\ = \int_0^\infty \alpha g\left(t\right)e^{-st}dt + \int_0^\infty \beta h\left(t\right)e^{-st}dt = \alpha\int_0^\infty g\left(t\right)e^{-st}dt + \beta\int_0^\infty h\left(t\right)e^{-st}dt = \alpha\mathcal{L}\left\{g\left(t\right)\right\} + \beta\mathcal{L}\left\{h\left(t\right)\right\}\end{gathered}$$

3. $$\begin{gathered}\mathcal{L}\{\sinh\left(\alpha t\right)\} = \int_0^\infty \sinh\left(\alpha t\right)e^{-st}dt = \int_0^\infty \tfrac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{2}e^{-st}dt = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty (e^{\alpha t} - e^{-\alpha t})e^{-st}dt \\ = \tfrac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{-t(s-\alpha)}dt - \int_0^\infty e^{-t(\alpha+s)}dt\right) = \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{e^{-t(s-\alpha)}}{s-\alpha} + \tfrac{e^{-t(\alpha+s)}}{\alpha+s}\right|_0^\infty \\ = \tfrac{1}{2}\left(\lim_{t\to\infty}\left(-\tfrac{e^{-t(\alpha-s)}}{s-\alpha} + \tfrac{e^{-t(\alpha+s)}}{\alpha+s}\right) + \tfrac{1}{s-\alpha} - \tfrac{1}{s+\alpha}\right) = \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{e^{-t(s-\alpha)}}{s-\alpha} + \tfrac{e^{-t(\alpha+s)}}{\alpha+s}\right|_0^\infty \\ = \tfrac{1}{2}\left(\lim_{t\to\infty}\left(-\tfrac{e^{-t(\alpha-s)}}{s-\alpha} + \tfrac{e^{-t(\alpha+s)}}{\alpha+s}\right) + \tfrac{1}{s-\alpha} - \tfrac{1}{s+\alpha}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\alpha+s-s+\alpha}{s^2-\alpha}\right) = \tfrac{a}{s^2-\alpha^2}\end{gathered}$$

4. $$\begin{gathered}\mathcal{L}\{\cosh\left(\alpha t\right)\} = \int_0^\infty \cosh\left(\alpha t\right)e^{-st}dt = \int_0^\infty \tfrac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2}e^{-st}dt = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty (e^{\alpha t} + e^{-\alpha t})e^{-st}dt \\ = \tfrac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{-t(s-\alpha)}dt + \int_0^\infty e^{-t(\alpha+s)}dt\right) = \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{e^{-t(s-\alpha)}}{s-\alpha} - \tfrac{e^{-t(\alpha+s)}}{\alpha+s}\right|_0^\infty \\ = \tfrac{1}{2}\left(\lim_{t\to\infty}\left(-\tfrac{e^{-t(1-s)}}{s-\alpha} - \tfrac{e^{-t(1+s)}}{\alpha+s}\right) + \tfrac{1}{s-\alpha} + \tfrac{1}{\alpha+s}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\alpha+s+s-\alpha}{s^2-\alpha^2}\right) = \tfrac{s}{s^2-\alpha^2}\end{gathered}$$

5. $$\begin{gathered}\mathcal{L}\{\sin\left(\beta t\right)\} = \int_0^\infty \sinh\left(\beta t\right)e^{-st}dt = \int_0^\infty \tfrac{e^{j\beta t}-e^{-j\beta t}}{2j}e^{-st}dt = \tfrac{1}{2j}\int_0^\infty (e^{j\beta t} - e^{-j\beta t})e^{-st}dt \\ = \tfrac{1}{2j}\left(\int_0^\infty e^{-t(s-j\beta)}dt - \int_0^\infty e^{-t(j\beta+s)}dt\right) = \tfrac{1}{2j}\left(-\tfrac{e^{-t(s-j\beta)}}{s-j\beta} + \tfrac{e^{-t(j\beta+s)}}{j\beta+s}\right|_0^\infty \\ = \tfrac{1}{2j}\left(\lim_{t\to\infty}\left(-\tfrac{e^{-t(j\beta-s)}}{s-j\beta} + \tfrac{e^{-t(\alpha+s)}}{j\beta+s}\right) + \tfrac{1}{s-j\beta} - \tfrac{1}{s+j\beta}\right) = +\tfrac{1}{2j}\left(\tfrac{j\beta+s-s+j\beta}{s^2-j^2\beta^2}\right) = \tfrac{\beta}{s^2+\beta^2}\end{gathered}$$

6. $$\begin{gathered}\mathcal{L}\{\cos\left(\beta t\right)\} = \int_0^\infty \cos\left(\beta t\right)e^{-st}dt = \int_0^\infty \tfrac{e^{j\beta t}+e^{-j\beta t}}{2}e^{-st}dt = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty (e^{j\beta t} + e^{-j\beta t})e^{-st}dt \\ = \tfrac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{-t(s-j\beta)}dt + \int_0^\infty e^{-t(j\beta+s)}dt\right) = \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{e^{-t(s-j\beta)}}{s-j\beta} - \tfrac{e^{-t(j\beta+s)}}{j\beta+s}\right|_0^\infty \\ = \tfrac{1}{2}\left(\lim_{t\to\infty}\left(-\tfrac{e^{-t(j\beta-s)}}{s-j\beta} - \tfrac{e^{-t(\alpha+s)}}{j\beta+s}\right) + \tfrac{1}{s-j\beta} + \tfrac{1}{s+j\beta}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{j\beta+s+s-j\beta}{s^2-j^2\beta^2}\right) = \tfrac{s}{s^2+\beta^2}\end{gathered}$$

7.

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}h\,(t)\} = \int_0^\infty e^{\alpha t}h\,(t)\,e^{-st}dt = \int_0^\infty h\,(t)\,e^{-t(s-\alpha)}dt = H(s-\alpha),\ \text{siendo } H(s) = \mathcal{L}\{h\,(t)\}$$

8.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{h(t)}{dt}\right\} = \int_0^\infty \frac{h(t)}{dt}e^{-st}dt \text{ Integrando por partes:}$$
$$u = e^{-st} \text{ y } dv = \frac{h(t)}{dt},\ \text{entonces } du = -se^{-st}dt \text{ y } v = h(t) \text{ entonces:}$$
$$\mathcal{L}\left\{\frac{h(t)}{dt}\right\} = \int_0^\infty \frac{h(t)}{dt}e^{-st}dt = h\,(t)\,e^{-st}\big|_0^\infty + s\int_0^\infty \frac{h(t)}{dt}e^{-st}dt = s\mathcal{L}\left\{h(t)\right\} - h\,(0)$$

9.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{h^2(t)}{dt^2}\right\} = \int_0^\infty \frac{h^2(t)}{dt^2}e^{-st}dt \text{ Integrando por partes:}$$
$$u = e^{-st} \text{ y } dv = \frac{h^2(t)}{dt^2},\ \text{entonces } du = -se^{-st}dt \text{ y } v = \frac{h(t)}{dt} \text{ entonces:}$$
$$\mathcal{L}\left\{\frac{h^2(t)}{dt^2}\right\} = \int_0^\infty \frac{h^2(t)}{dt^2}e^{-st}dt = \left.\frac{h^2(t)}{dt^2}e^{-st}\right|_0^\infty + s\int_0^\infty \frac{h(t)}{dt}e^{-st}dt = s^2\mathcal{L}\left\{h(t)\right\} - sh\,(0) - \frac{h(0)}{dt}$$

10.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{h^3(t)}{dt^3}\right\} = \int_0^\infty \frac{h^3(t)}{dt^3}e^{-st}dt \text{ Integrando por partes:}$$
$$u = e^{-st} \text{ y } dv = \frac{h^3(t)}{dt^3},\ \text{entonces } du = -se^{-st}dt \text{ y } v = \frac{h^2(t)}{dt^2} \text{ entonces:}$$
$$\mathcal{L}\left\{\frac{h^3(t)}{dt^3}\right\} = \int_0^\infty \frac{h^3(t)}{dt^3}e^{-st}dt = \left.\frac{h^2(t)}{dt^2}e^{-st}\right|_0^\infty + s\int_0^\infty \frac{h^2(t)}{dt^2}e^{-st}dt =$$
$$s^3\mathcal{L}\left\{h(t)\right\} - s^2h\,(0) - s\frac{h(0)}{dt} - \frac{h^2(0)}{dt^2}$$

11.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{h^n\,(t)}{dt^n}\right\} = s^n\mathcal{L}\left\{h(t)\right\} - \sum_{i=1}^{n} s^{n-j}\frac{h^{n-1}(0)}{dt^{n-1}}$$

12.

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t h(\tau)d\tau\right\} = \int_0^\infty \int_0^t h(\tau)d\tau e^{-st}dt \text{ Integrando por partes:}$$
$$u = \int_0^t h(\tau)d\tau \text{ y } dv = e^{-st}dt,\ \text{entonces } du = h(t) \text{ y } v = \frac{-e^{-st}}{s} \text{ entonces:}$$
$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t h(\tau)d\tau\right\} = \left.\frac{-e^{-st}}{s}\int_0^t h(\tau)d\tau\right|_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{-e^{-st}}{s}h(t)dt =$$
$$\frac{1}{s}\int_0^\infty h(t)e^{-st}dt = \frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{h(t)\right\}$$

13.

$$\mathcal{L}\left\{th(t)\right\} = \int_0^\infty th(t)e^{-st}dt \to \frac{d\mathcal{L}\{h(t)\}}{ds} = \frac{d}{ds}\int_0^\infty h(t)e^{-st}dt$$
$$= \int_0^\infty \frac{d}{ds}(h(t)e^{-st})dt = \int_0^\infty h(t)\frac{d}{ds}(e^{-st})dt = -\int_0^\infty th(t)e^{-st}dt$$
$$\therefore \int_0^\infty th(t)e^{-st}dt = -\frac{d\mathcal{L}\{h(t)\}}{ds} = -\frac{dH(s)}{ds} = \mathcal{L}\left\{th(t)\right\}$$

14.

$$\mathcal{L}\left\{t^2h(t)\right\} = \int_0^\infty t^2h(t)e^{-st}dt \to \frac{d^2\mathcal{L}\{h(t)\}}{ds^2} = \frac{d^2}{ds^2}\int_0^\infty h(t)e^{-st}dt$$
$$= \int_0^\infty \frac{d^2}{ds^2}(h(t)e^{-st})dt = \int_0^\infty h(t)\frac{d^2}{ds^2}(e^{-st})dt = \int_0^\infty t^2h(t)e^{-st}dt$$
$$\therefore \int_0^\infty t^2h(t)e^{-st}dt = \frac{d^2\mathcal{L}\{h(t)\}}{ds^2} = \frac{d^2H(s)}{ds^2} = \mathcal{L}\left\{t^2h(t)\right\}$$

15.

$$\mathcal{L}\left\{t^3h(t)\right\} = \int_0^\infty t^3h(t)e^{-st}dt \to \frac{d^3\mathcal{L}\{h(t)\}}{ds^3} = \frac{d^3}{ds^3}\int_0^\infty h(t)e^{-st}dt$$
$$= \int_0^\infty \frac{d^3}{ds^2}(h(t)e^{-st})dt = \int_0^\infty h(t)\frac{d^3}{ds^3}(e^{-st})dt = -\int_0^\infty t^3h(t)e^{-st}dt$$
$$\therefore \int_0^\infty t^3h(t)e^{-st}dt = -\frac{d^3\mathcal{L}\{h(t)\}}{ds^3} = -\frac{d^3H(s)}{ds^3} = \mathcal{L}\left\{t^3h(t)\right\}$$

16.

$$\therefore \mathcal{L}\left\{t^nh(t)\right\} = -(1)^n\frac{d^n\mathcal{L}\left\{h(t)\right\}}{ds^n} = -(1)^n\frac{d^nH(s)}{ds^n}$$

17.

$$\mathcal{L}\left\{sen(\alpha t)h(t)\right\} \text{ Entonces sabemos que:}$$
$$\mathcal{L}\left\{e^{\alpha t}h(t)\right\} = \int_0^\infty h(t)e^{\alpha t}e^{-st}dt = \int_0^\infty h(t)e^{-(s-\alpha)t}dt \text{ si H}(s) = \mathcal{L}\left\{h(t)\right\}$$
$$\to H(s-\alpha) = \int_0^\infty h(t)e^{-(s-\alpha)t}dt = \mathcal{L}\left\{e^{\alpha t}h(t)\right\}$$
$$\text{Note que: } \mathcal{L}\left\{e^{j\alpha t}h(t)\right\} = H(s-j\alpha) \text{ ahora como } sen(\alpha t) = \frac{e^{j\alpha t}-e^{-j\alpha t}}{2j}$$
$$\to h(t)sen(\alpha t) = h(t)\frac{e^{j\alpha t}-e^{-j\alpha t}}{2j} = \frac{1}{2j}(e^{j\alpha t}h(t) - e^{-j\alpha t}h(t))$$
$$\to \mathcal{L}\left\{sen(\alpha t)h(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2j}(e^{j\alpha t}h(t) - e^{-j\alpha t}h(t))\right\} = \frac{1}{2j}\left(\mathcal{L}\left\{e^{j\alpha t}h(t)\right\} - \mathcal{L}\left\{e^{-j\alpha t}h(t)\right\}\right)$$
$$\frac{1}{2j}(H(s-\alpha j) - H(s+\alpha j))$$

18.
$$h(t)\cos(\alpha t)=h(t)\frac{e^{j\alpha t}+e^{-j\alpha t}}{2}=\frac{1}{2}(e^{j\alpha t}h(t)+e^{-j\alpha t}h(t))$$
$$\rightarrow \mathcal{L}\left\{\cos(\alpha t)h(t)\right\} \;=\mathcal{L}\left\{\tfrac{1}{2}(e^{j\alpha t}h(t)+e^{-j\alpha t}h(t))\right\}=\frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\left\{e^{j\alpha t}h(t)\right\}+\mathcal{L}\left\{e^{-j\alpha t}h(t)\right\}\right)$$
$$\frac{1}{2}(H(s-\alpha j)+H(s+\alpha j))$$

19.
$$\mathcal{L}\left\{t^n sen(\alpha t)h(t)\right\}=-(1)^n\frac{d^nQ(s)}{ds^n} siendo\ Q(s)=\mathcal{L}\left\{sen(\alpha t)h(t)\right\}=\frac{1}{2j}(H(s-\alpha j)-H(s+\alpha j))$$
$$\frac{(-1)^n}{2j}\frac{d^n((H(s-\alpha j)-H(s+\alpha j)))}{ds^n}=\mathcal{L}\left\{t^n sen(\alpha t)h(t)\right\}$$

20.
$$\mathcal{L}\left\{t^n\cos(\alpha t)h(t)\right\}=-(1)^n\frac{d^nG(s)}{ds^n} siendo\ \mathrm{G}(s)=\mathcal{L}\left\{h(t)\cos h(t)\right\}=\frac{1}{2}(H(s-\alpha j)+H(s+\alpha j))$$
$$\frac{(-1)^n}{2}\frac{d^n((H(s-\alpha j)+H(s+\alpha j)))}{ds^n}=\mathcal{L}\left\{t^n sen(\alpha t)h(t)\right\}$$

1.2. Transformada inversa de Laplacé

Definición: (*Transformada inversa de Laplace*) Se define la transformada inversa de Laplace de una función original tal que

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}=F(s)\rightarrow f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}$$

Ejemplos *(Transformada inversa de Laplacé)*:

1.
$$F(s)=\frac{1}{s-\alpha}\rightarrow f(t)=e^{\alpha t}\text{ Puesto que: }\mathcal{L}\left\{e^{\alpha t}\right\}=\frac{1}{s-\alpha}$$

2.
$$F(s)=\frac{3}{s^2-3^2}\rightarrow\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2-3^2}\right\}=\sin h(3t)\text{ Puesto que: }\mathcal{L}\left\{\sin h(3t)\right\}=\frac{3}{s^2-3^2}$$
Note que también se pudo haber resuelto asi:
$$\frac{3}{s^2-3^2}=\frac{3}{(s-3)(s+3)}=\left(\frac{1}{2(s-3)}-\frac{1}{2(s+3)}\right)$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{3\left(\frac{1}{2(s-3)}-\frac{1}{2(s+3)}\right)\right\}=\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)}-\frac{1}{(s+3)}\right\}=\frac{1}{2}\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)}\right\}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(e^{3t}-e^{-3t})=\sinh(3t)$$

2. Funciones de excitación

Las funciones de excitación o activación de un movimiento son variadas y la respuesta de un sistema a dicha excitación puede manifestarse a través de un movimiento o un desplazamiento. giro y demás. Estas funciones deben convertirse en voltajes o fuerzas o presión o nivel o temperatura, etc, en general en variables que deben ser controladas. O variables que activan un acción.

La principal de las funciones es el escalón unitario. también conocida como la función de Heaviside y denotada por :

$$\mu(t-t_0)=\begin{cases}1 \text{ si } t\geq t_0\\ 0 \text{ si } t<t_0\end{cases}$$

Otra de las funciones es la Delta de Dirac. Denotada por:

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty \text{ si } t=t_0\\ 0 \text{ si } t\neq t_0\end{cases}\rightarrow\frac{d\mu(t-t_0)}{dt}=\delta(t-t_0)$$

y la transformadas de dichas funciones están dadas por:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=f(t_0)\rightarrow\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\}=\int_0^{\infty}\delta(t-t_0)e^{-st}dt=e^{-st_0}$$
$$\mathcal{L}\{\mu(t-t_0)\}=\int_0^{\infty}\mu(t-t_0)e^{-st}dt=\left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_{t_0}^{\infty}=\frac{e^{-st_0}}{s}\rightarrow\mathcal{L}\{\mu(t)\}=\frac{1}{s}$$

Nuestro interés es conocer como responder un sistema frente a una excitaciónon, con el fin de poderlo controlar a través de su función de energía. Esa función de energía puede ser llevada a cualquier tipo de variables, modificando la entrada y observando el valor de salida.

Ejemplo: Suponga que un sistema me presenta una función de transferencia o energía dada por:

$$G(s)=\frac{s+1}{s^2+9s+20}$$

Halle la respuesta a la excitación escalón.

En si el sistema responde así:

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{s+1}{s^2+9s+20}\left(\frac{1}{s}\right)$$

entonces se debe hallar

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\} = y(t)$$
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{s+1}{s^2+9s+20}\left(\tfrac{1}{s}\right)\right\}$$
$$Y(s) = \tfrac{s+1}{s^2+9s+20}\left(\tfrac{1}{s}\right) = \tfrac{1}{20s} + \tfrac{4}{5(s+5)} + \tfrac{3}{4(s+4)}$$
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{s+1}{s^2+9s+20}\left(\tfrac{1}{s}\right)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{1}{20s} + \tfrac{4}{5(s+5)} + \tfrac{3}{4(s+4)}\right\} = \tfrac{1}{20}\mu(t) - \tfrac{4}{5}e^{-5t} + \tfrac{3}{4}e^{-4t}$$
$$y(t) = \frac{1}{20} - \frac{4}{5}e^{-5t} + \frac{3}{4}e^{-4t}$$

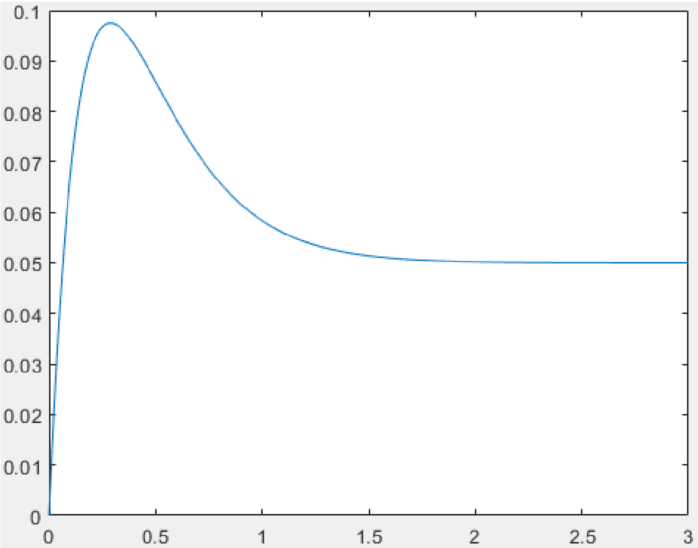


Figura 1: Excitación en sistema

la figura 1 la forma como responde el sistema frente a la excitación escalón. En este caso el sistema responde inicialmente con un sobreimpulso que sube hasta 0.1 y luego se estabiliza en 0.5. En realidad lo que sucedió es que al sistema se le ha pedido que vaya a establecerse en 1 pero el sistema trató de hacerlo y la carga no lo permitió, sin embargo el sistema fue capa de soportar la carga hasta un valor de 0.05.

3. Convolución

Considere un sistema que responde a una excitación $x(t)$ como $y(t)$. Se define la convolución entre $g(t)$ y $x(t)$ como:

$$y(t) = g(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Se sabe que:

$$\mathcal{L}\left\{g(t)*x(t)\right\} = \int_0^{\infty} g(t)*x(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)x(t-\tau)d\tau e^{-st}dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} g(\tau)x(t-\tau)e^{-st}dtd\tau = \mathcal{L}\left\{y(t)\right\}$$
$$u = t-\tau \rightarrow du = dt$$
$$\mathcal{L}\left\{g(t)*x(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\tau}^{\infty} g(\tau)x(u)e^{-s(u+\tau)}dud\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\int_{-\tau}^{\infty} x(u)e^{-su}e^{-s\tau}dud\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-s\tau}\left(\int_{-\tau}^{0} x(u)e^{-su}du + \int_0^{\infty} x(u)e^{-su}du\right)d\tau$$

Como el sistema debe ser causal (el sistema se excita en u=0) entonces:

$$\mathcal{L}\left\{g(t)*x(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-s\tau}\left(\int_0^{\infty} x(u)e^{-su}du\right)d\tau = \left(\int_0^{\infty} x(u)e^{-su}du\right)\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

Igualmente al ser el sistema causal se consigue que $g(\tau)$ solo responde cuando $x(u)$ se active o exite la función sobre $g(\tau)$, es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-s\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{0} g(\tau)e^{-s\tau}d\tau + \int_{0}^{\infty} g(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$
$$\int_{-\infty}^{0} g(\tau)e^{-s\tau}d\tau = 0$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-s\tau}d\tau = \int_{0}^{\infty} g(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

Por lo tanto

$$\mathcal{L}\{g(t) * x(t)\} = \left(\int_{0}^{\infty} x(u)e^{-su}du\right)\int_{0}^{\infty} g(\tau)e^{-s\tau}d\tau = \mathcal{L}\{g(t)\} \cdot \mathcal{L}\{x(t)\}$$
$$Y(s) = G(s)X(s)$$

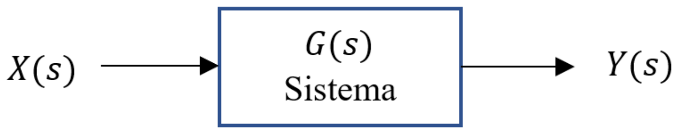
Ahora si es posible responder quien es $g(t)$ ya que

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Salida}{Entrada}$$

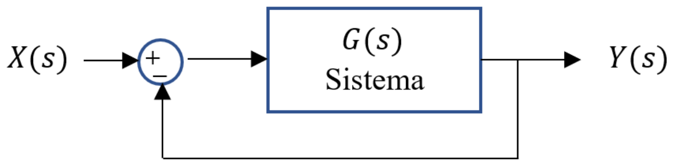
Que se continuará llamando como función de transferencia en transformad, que también vista desde la transformador de Fourier se calculó que era la función de energía de sistema gracias al teorema de Parseval. Por lo que

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Y(s)}{X(s)}\right\}$$

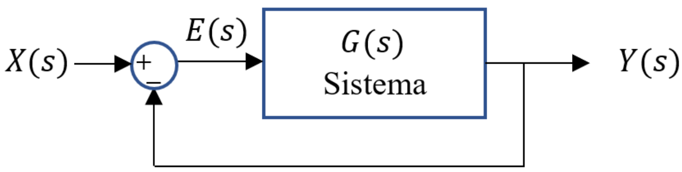
Gráficamente se tiene que:



Retroalimentando el sistema:



Donde el circulo representa la operación menos (-), o diferencia, es decir $X(s) - Y(s)$. Entonces al sistema ya no entraría $X(s)$ sino $E(s) = X(s) - Y(s)$



Por lo tanto: $Y(s) = G(s)(X(s) - Y(s))$

$$Y(s) = G(s)X(s) - G(s)Y(s)$$
$$Y(s) + G(s)Y(s) = G(s)X(s)$$
$$Y(s)(1 + G(s)) = G(s)X(s)$$
$$\rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

Que es la función la función de transferencia del sistema en lazo cerrado