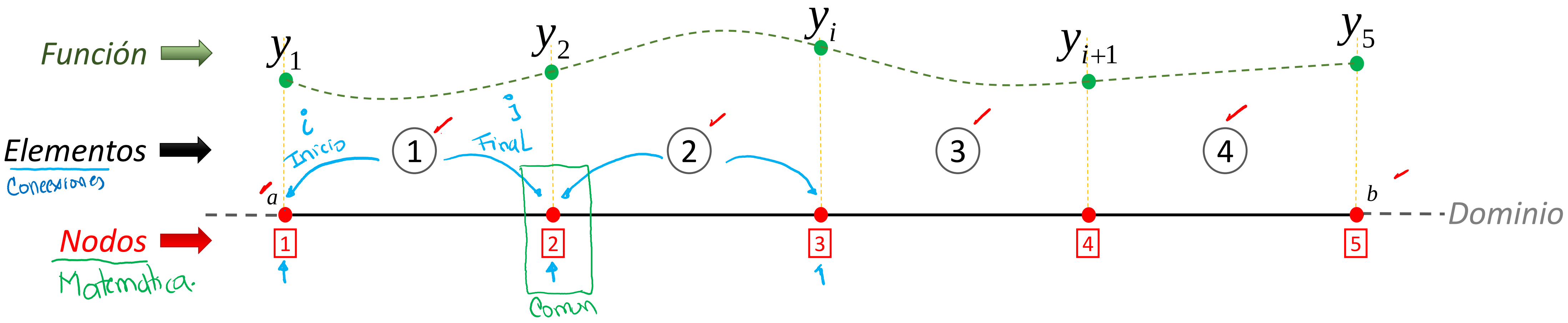
Método de Elementos finitos



El dominio considerado es dividiremos en $\boldsymbol{n}$ sub-intervalos del mismo tamaño $\boldsymbol{h}$.

El promedio del residuo

Formulación fuerte del problema diferencial

Elem

2° ó 1°

$$I=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_i}^{x_{i+1}} w\left(\boxed{A\frac{d^2\hat{y}(x)}{dx^2}}+B\frac{d\hat{y}(x)}{dx}+C\hat{y}(x)+D\right)=0$$

Funcion Peso

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} wA\frac{d^2\hat{y}}{dx^2}dx \Rightarrow$$

Integración por parte $\int udv = \underset{①}{uv} - \underset{②}{\int vdu}$

$u = wA$ $du = dwA + wdA$

$dv = \dfrac{d^2\hat{y}}{dx^2}$ $v = \dfrac{d\hat{y}}{dx}$

Funcion Peso $f(x)$

. $f(x)$

. Numero

dv

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \underbrace{wA}_{u}\frac{d^2\hat{y}}{dx^2}dx = \boxed{\underbrace{\left[wA\frac{d\hat{y}}{dx}\right]_{x_i}^{x_{i+1}}}_{①} - \underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} A\frac{dw}{dx}\frac{d\hat{y}}{dx}dx}_{②}}$$

C.F

* Función → x
* d. Funcion → x

$\frac{dT}{dx} = \text{Flux} = 0$

Formulación fuerte del problema diferencial ⇒

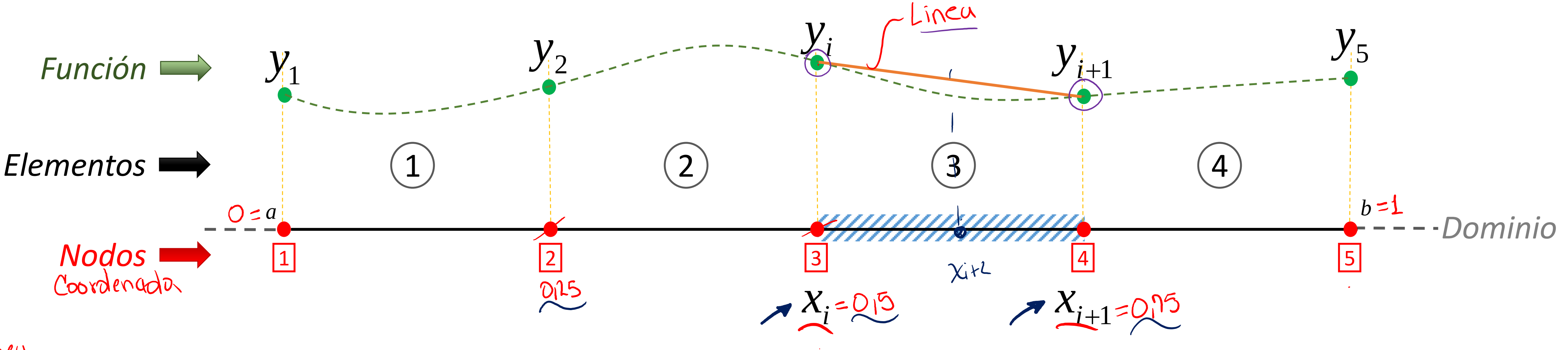
$$I = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_i}^{x_{i+1}} w\left(A\frac{d^2\hat{y}(x)}{dx^2} + B\frac{d\hat{y}(x)}{dx} + C\hat{y}(x) - D\right) = 0$$

Formulación débil del problema diferencial ⇒

$$I = \sum_{i=1}^{n}\left(\underbrace{-A\int_{xi}^{xi+1}\frac{dw}{dx}\frac{d\hat{y}}{dx}dx}_{①} + B\int_{xi}^{xi+1} w\frac{d\hat{y}}{dx}dx + C\int_{xi}^{xi+1} w\hat{y}dx + D\int_{xi}^{xi+1} wdx + \boxed{\underbrace{A\left[w\frac{d\hat{y}}{dx}\right]_{x_i}^{x_{i+1}}}_{①}}\right)$$

Teoría numérica del FEM

Método de Elementos finitos



Ec. Linea.

$$\hat{y} = c_1 x + c_2$$

$$y_i = c_1 x_i + c_2 \quad (1)$$

$$y_{i+1} = c_1 x_{i+1} + c_2 \quad (2)$$

(1) → c_2

$$c_2 = y_i - c_1 x_i \quad (3)$$

(3) → (2)

$$y_{i+1} = c_1 x_{i+1} + y_i - c_1 x_i$$

$$y_{i+1} - y_i = c_1 (x_{i+1} - x_i)$$

$$c_1 = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (4)$$

Funcion

coorde

(4) → (3)

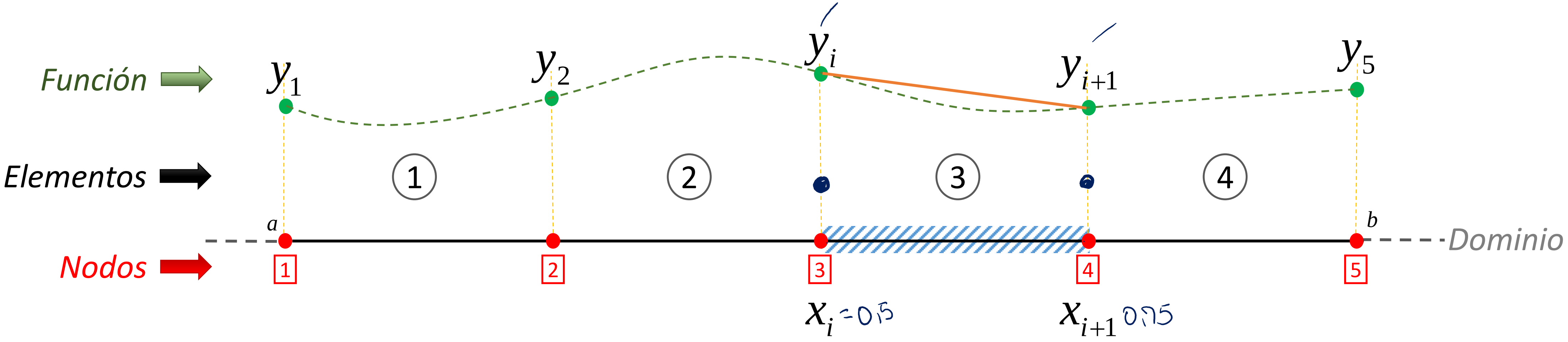
$$c_2 = y_i - \left[\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\right] x_i$$

$$c_2 = \frac{(x_{i+1} - x_i) y_i - (y_{i+1} - y_i) x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$c_2 = \frac{x_{i+1} y_i - \cancel{x_i y_i} - y_{i+1} x_i + \cancel{y_i x_i}}{x_{i+1} - x_i} = \frac{x_{i+1} y_i - y_{i+1} x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Teoría numérica del FEM

Método de Elementos finitos



$$\hat{y} = c_1 x + c_2$$

$$C_1 = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$C_2 = \frac{x_{i+1} y_i - y_{i+1} x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$\hat{y} = \left[\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\right] x - \frac{x_{i+1} y_i - y_{i+1} x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$\hat{y} = \boxed{\frac{x_{i+1} - x}{(x_{i+1} - x_i)}}\, y_i + \boxed{\frac{x - x_i}{(x_{i+1} - x_i)}}\, y_{i+1}$$

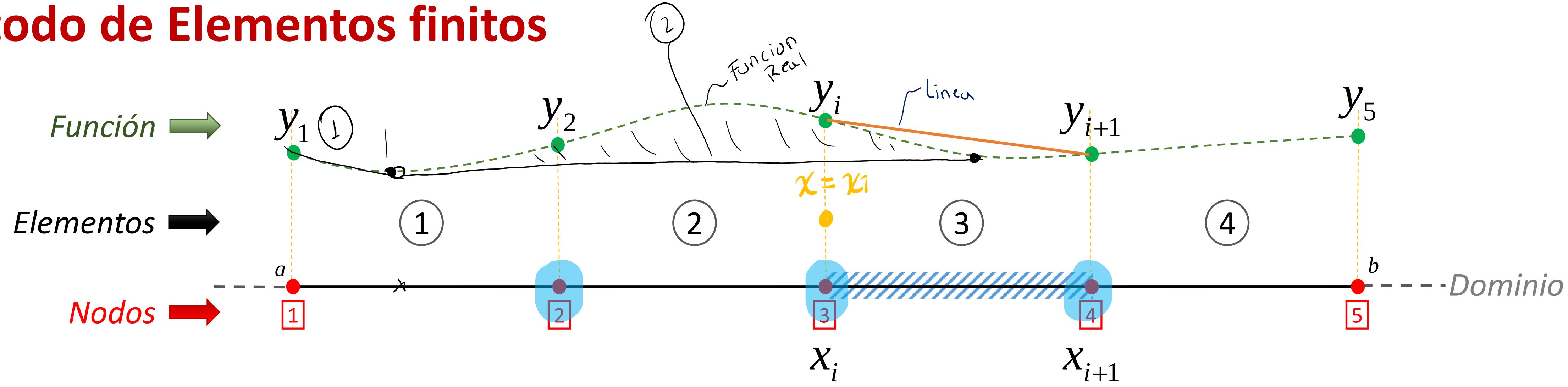
→ Funcion [?]

→ Funcion [?]

Coordenados

Funciones de Forma.

Método de Elementos finitos



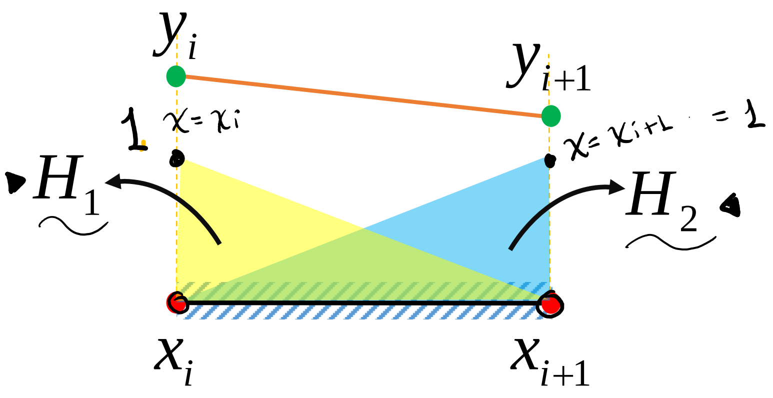
$$\hat{y} = H_1(x)y_i + H_2(x)y_{i+1}$$

donde

$$H_1 = \frac{x_{i+1} - x}{h_i}; H_2 = \frac{x - x_i}{h_i};$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i$$

Ancho Elemento



Funciones de forma H_1, H_2 toman el valor de 1 en un nodo concreto y cero en el otro nodo

Método de Elementos finitos

Metodo Galerkin

Funciones de forma

$$H_1 = \frac{x_{i+1} - x}{h_i} \qquad H_2 = \frac{x - x_i}{h_i}$$

$$H_1{}' = -\frac{1}{h_i} \qquad H_2{}' = \frac{1}{h_i}$$

Función de prueba

Valor Función ?

$$\hat{y} = \overset{1\times 2}{\begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix}} * \begin{Bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{Bmatrix}$$

$$\frac{d\hat{y}}{dx} = \begin{bmatrix} H_1{}' & H_2{}' \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{Bmatrix}$$

Función de Peso

2X1

$$w = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{dw}{dx} = \begin{bmatrix} H_1{}' \\ H_2{}' \end{bmatrix}$$

Elemento

$$I = \sum_{i=1}^{n} \left(-A \int_{xi}^{xi+1} \frac{dw}{dx} \frac{d\hat{y}}{dx} dx + B \int_{xi}^{xi+1} w \frac{d\hat{y}}{dx} dx + C \int_{xi}^{xi+1} w\hat{y} dx + D \int_{xi}^{xi+1} w dx \right) + A \left[w \frac{d\hat{y}}{dx} \right]_a^b = 0$$

2X1 1X2

$$\sum_{i=1}^{n} \left(-A \int_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{bmatrix} H_1{}' \\ H_2{}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1{}' & H_2{}' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{Bmatrix} dx + B \int_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1{}' & H_2{}' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{Bmatrix} dx + C \int_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{Bmatrix} dx + D \int_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} dx \right) + Aw \frac{d\hat{y}}{dx} \Bigg|_a^b$$

2X2 2X2 2X2 Vector 2X1

$$\sum_{i=1}^{n} \left\langle \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-A \begin{bmatrix} H_1{}' \\ H_2{}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1{}' & H_2{}' \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1{}' & H_2{}' \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \right) dx \begin{Bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{Bmatrix} + \int_{xi}^{xi+1} D \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} dx \right\rangle + Aw \frac{d\hat{y}}{dx} \Bigg|_a^b$$

Método de Elementos finitos

$\sigma = E\varepsilon$

Deformación

$\frac{du}{dx} = \frac{[m]}{[m]} = \varepsilon$

* $y(x=0) = 0$

* $\frac{dy}{dx}(x=L) = 0$

2x2 Matriz Locales * Elemen

2xL

$$\sum_{i=1}^{n}\left\langle \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-A\begin{bmatrix} H_1' \\ H_2' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_1' & H_2' \end{bmatrix} + B\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_1' & H_2' \end{bmatrix} + C\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \right) dx \begin{Bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{Bmatrix} + \int_{xi}^{xi_{+1}} D\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} dx \right\rangle + \boxed{Aw\frac{d\hat{y}}{dx}\Bigg|_a^b} = 0$$

2x1 ?

Condiciones de frontera naturales

1 2 3 4

#Nodos

Matriz Global

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & X_{1,3} & X_{1,4} & X_{1,5} \\ X_{2,1} & X_{2,2} & X_{2,3} & X_{2,4} & X_{2,5} \\ X_{3,1} & X_{3,2} & X_{3,3} & X_{3,4} & X_{3,5} \\ X_{4,1} & X_{4,2} & X_{4,3} & X_{4,4} & X_{4,5} \\ X_{5,1} & X_{5,2} & X_{5,3} & X_{5,4} & X_{5,5} \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} y_{1,1} \\ y_{2,1} \\ y_{3,1} \\ y_{4,1} \\ y_{5,1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1,1} \\ F_{2,1} \\ F_{3,1} \\ F_{4,1} \\ F_{5,1} \end{Bmatrix}$$

Posteriormente hay que ensamblar las matrices y los vectores de carga de todos los elementos con el objeto de obtener la matriz global del sistema y el vector de carga global.

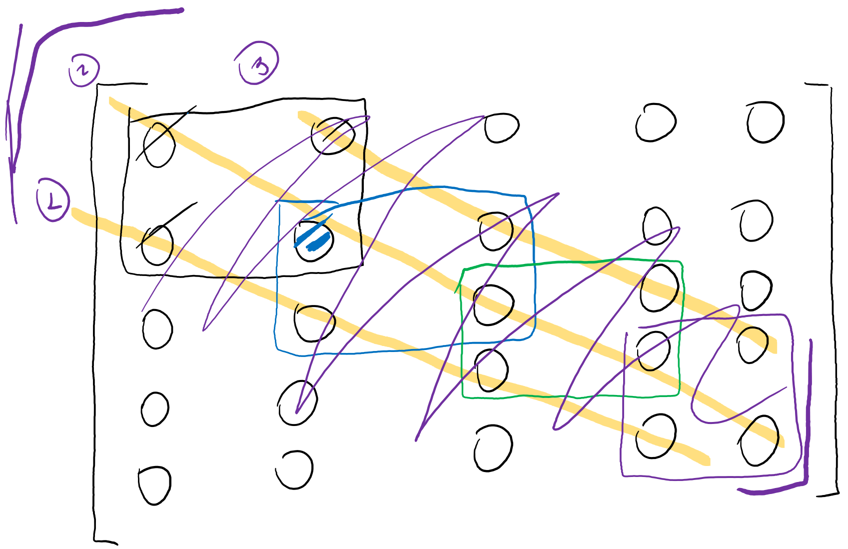
1) **Grados de libertad**

#Nodos

$K[x] = F$

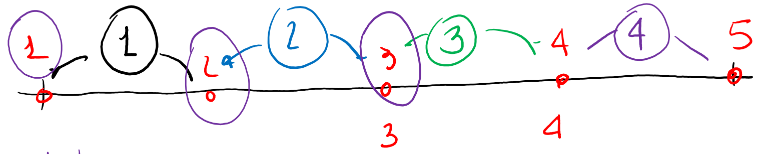
Condiciones de frontera Dirichlet

Condiciones de frontera Neumann



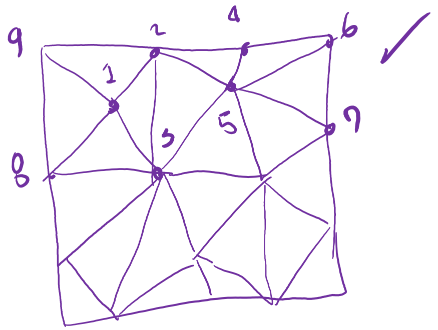
Nodo

Elemento (Visitar)



3 x # Nodo

$[\quad][y] = [F]$



Método de Elementos finitos

```
function Elementos_finitos
clear all
close all
clc

syms x xi xii y d_Ter1 d_Ter2 d_Ter3 %lista las variables simbólicas en
el espacio de trabajo

%%% Ingresar las funciones de forma para la utilización de la FEA
hi= xii - xi;
H1= (xii - x)/hi;
H2= (x - xi)/hi;

%%% Ingresar los vectores de la función de peso y la función de prueba
W= [H1; H2]; %Ingresa la función de peso como un vector columna (2,1)
dW= diff(W,x);%Diferencia la función de peso con respecto a ´x´
Y= [H1 H2]; %Ingresa la función de prueba como un vector fila (1x2)
dY= diff(Y,x); %Diferencia la función de prueba con respecto a ´x´
```

$$H_1 = \frac{x_{i+1} - x}{h_i}; H_2 = \frac{x - x_i}{h_i}$$

$$\boxed{h_i = x_{i+1} - x_i}$$

$$w = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{dw}{dx} = \begin{bmatrix} H_1' \\ H_2' \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\hat{y}}{dx} = \begin{bmatrix} H_1' & H_2' \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{Bmatrix}$$

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{Bmatrix}$$

Método de Elementos finitos

```
%%% Condiciones geométricas del dominio
n= 4; %Numero de divisiones del dominio
a= 0; %Limite inferior del dominio
b= 1; %Limite superior del dominio
hi= (b-a)/n; %Tamaño de la división
```

(Elemento)

$$\frac{w\,d^2u}{dx^2} = \int \frac{dw}{dx}\frac{du}{dx}$$

$$w\frac{du}{dx}\Big|_a^b$$

-wu +wx

$$w\left[\frac{d^2u}{dx^2} - u + x\right] = 0$$

$0 < x < 1; Dominio$

$u(0) = 0$

$u(1) = 0$

dw dY w u Función 0

$$\sum_{i=1}^{n}\left\langle \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-A\begin{bmatrix} H_1' \\ H_2' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_1' & H_2' \end{bmatrix} + \cancel{B\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_1' & H_2' \end{bmatrix}} + C\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \right) dx \begin{Bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{Bmatrix} + \int_{xi}^{xi+1} D\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} dx \right\rangle + Aw\frac{d\hat{y}}{dx}\Bigg|_a^b = 0$$

d_Ter1 **d_Ter2** **d_Ter3**

```
%%% Ingresamos cada termino de la ecuación diferencial a analizar por
%elementos finitos
Ter1= dW*dY;
d_Ter1 = int(Ter1,x,xi,xii); %Integramos con respecto a xi y xii de forma simbólica
Ter2= W*Y;
d_Ter2 = int(Ter2,x,xi,xii); %Integramos con respecto a xi y xii de forma simbolica
Ter3= W*x;
d_Ter3 = int(Ter3,x,xi,xii); %Integramos con respecto a xi y xii de forma simbólica
TerSum= -d_Ter1 - d_Ter2; %Suma los términos que dependen de yi, yi+1
```

Método de Elementos finitos

wx

K [x] = F

vector

Matriz

K Local

$$K1 = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{bmatrix}$$

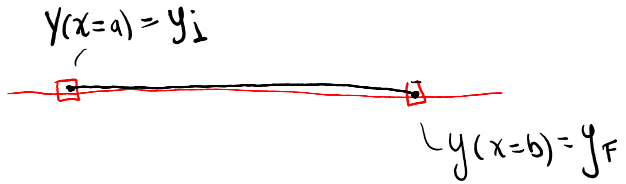
③ ③

```
%%% Inicializamos la matriz de rigidez y el vector con valores de cero
K=zeros(n+1); %Matriz de rigidez cuadrada de tamaño (n+1,n+1)
F=zeros(n+1,1); %Vector de tamaño (n+1,1)
%%% Inicialización de los valores inicial y final del elemento
xi=a;
xii=hi;
%%% Ensamble de la matriz de rigidez, ´n´ es el numero de elementos
for i=1:1:n
    K1=eval(TerSum); %Evalúa la matriz TerSum con los valores de xi, xii
    %%% Ingresa los valores de la matriz de cada elemento a la matriz global de rigidez
    K(i,i)= K(i,i) + K1(1,1);
    K(i,i+1)= K(i,i+1) + K1(1,2);
    K(i+1,i)= K(i+1,i) + K1(2,1);
    K(i+1,i+1)= K(i+1,i+1) + K1(2,2);
    F1=eval(d_Ter3); %Evalúa el vector ´d_Ter3´ con los valores de xi, xii
    %%% Ingresa los valores del vector de cada elemento al vector global
    F(i,1)= F(i,1) + F1(1,1);
    F(i+1,1)= F(i+1,1) + F1(2,1);
    %%% Incrementa los valores de xi y xii del siguiente elemento
    xi= xi + hi;
    xii= xii + hi;
end
```

Método de Elementos finitos

```
%%% Ingreso de las condiciones de frontera en la matriz global de rigidez
K(1,:)=zeros(n+1,1); %Hace cero toda la primera fila de la matriz de rigidez
K(1,1)=1; %Pone el valor de uno en la posición (1,1) de la matriz de rigidez
K(n+1,:)=zeros(n+1,1);%Hace cero toda la ultima fila de la matriz de rigidez
K(n+1,n+1)=1;%Pone el valor de uno en la posición (n+1,n+1) de la matriz de rigidez

%%% Ingreso de las condiciones de frontera al vector global
F(1,1)=0;  %Pone el valor de cero en la posición (1,1) del vector global
F(n+1,1)=0; %Pone el valor de cero en la posición (n+1,1) del vector global
```



$1_a u_{1,1} + \cancel{0 u_{2,1}} + \cancel{0 u_{3,1}} = 0$

C.F

Inicio

$$
\begin{bmatrix}
1_{1,1} & 0_{1,2} & 0_{1,3} & 0_{1,4} & 0_{1,5} \\
X_{2,1} & X_{2,2} & X_{2,3} & X_{2,4} & X_{2,5} \\
X_{3,1} & X_{3,2} & X_{3,3} & X_{3,4} & X_{3,5} \\
X_{4,1} & X_{4,2} & X_{4,3} & X_{4,4} & X_{4,5} \\
0_{5,1} & 0_{5,2} & 0_{5,3} & 0_{5,4} & 1_{5,5}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ y_{2,1} \\ y_{3,1} \\ y_{4,1} \\ u_{5,1} \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} 0 \\ F_{2,1} \\ F_{3,1} \\ F_{4,1} \\ 0 \end{Bmatrix}
$$

Final

$$[k]\{x\} = \{F\}$$

Método de Elementos finitos

```
%%% Solución del sistema de ecuaciones
Sol=inv(K)*-F; %Obtiene la inversa de la matriz global de rigidez y la
multiplica por el vector global

%%% Graficar la función diferencial analítica
GG= dsolve('D2u = u - x ', 'u(0)=0', 'u(1)=0', 'x'); %Soluciona la ecuación
diferencial respecto a ´x´ con los valores de la frontera
xx=linspace(a,b,1000); %Define un vector cuyo primer y ultimo valor son a y
b, con 1000 puntos uniformemente espaciados
ee=linspace(a,b,n+1);%Define un vector cuyo primer y ultimo valor son a y
b, con n+1 puntos uniformemente espaciados

Grafi=subs(GG,x,xx); %Sustituye el en la funcion analitica el valor de ´x´
por el ¨xx´
plot(xx,Grafi,'b',ee,Sol,'r') %Grafica la funcion analica (color azul) y la
funcion por elementos finitos (color rojo)
grid on
end
```

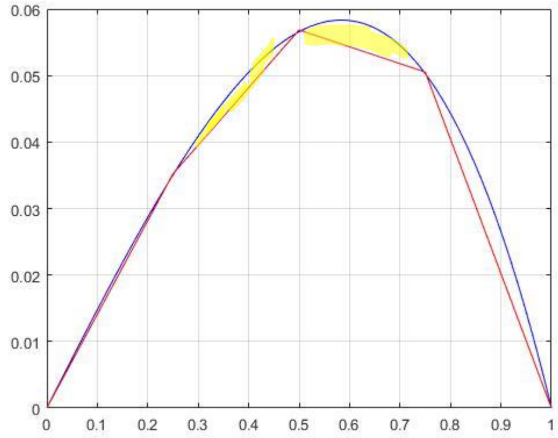


Figura 1; n=4

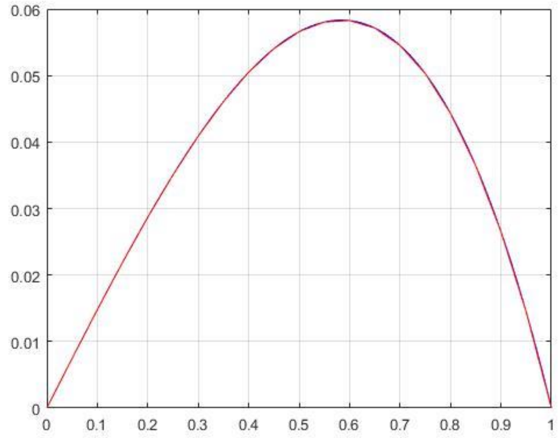
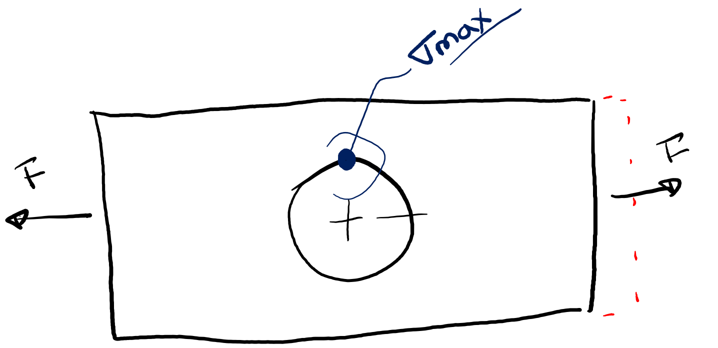
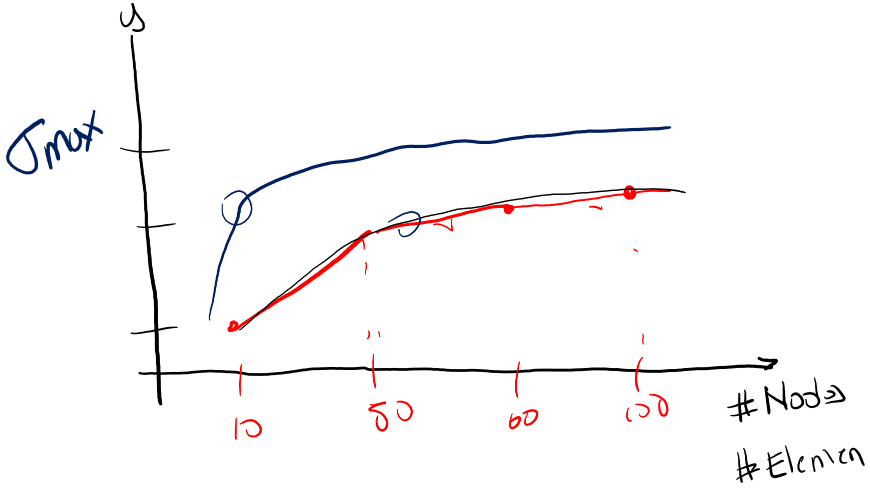


Figura 1; n=20





d_{max}