

## Optics:

Basic properties of the Electromagnetic field:

$\vec{E}$  = Electric Vector     $\vec{B}$  = Magnetic induction

To describe the effect of the field on material objects, it is necessary to introduce:

$\vec{j}$  = current density     $\vec{D}$  = electric displacement     $\vec{H}$  = magnetic vector

Continuous medium:

$$\cdot \vec{j} = \sigma \vec{E} \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon_0 \mu_r \vec{H} \quad \text{Material dielectric constant}$$

$$\mu = \text{Magnetic Permeability} \quad \epsilon = \text{Dielectric constant} \quad \sigma = \text{specific conductivity (conductivity)}$$

$$\cdot i [A] = \int \vec{j} \cdot d\vec{A} \rightarrow [\vec{j}] = \frac{A}{m^2} \quad \cdot c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$$

- Maxwell Equations (Diff)

$$\begin{aligned} \cdot \nabla \cdot \vec{D} &= \rho & \cdot \nabla \times \vec{E} &= \vec{B} \\ \cdot \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 & \cdot \nabla \times \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

- Maxwell Equations (Int):

$$\cdot \Phi_E = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad Q = \int_V \rho dV$$

$$\rightarrow \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon} \int_V \rho dV \rightarrow \int_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon} \int_V \rho dV$$

$$\rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \rightarrow \epsilon \nabla \cdot \vec{E} = \rho = \nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) = \rho \therefore \nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\cdot \Phi_B = \oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \rightarrow \oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_V \nabla \cdot \vec{B} dV = 0$$

$$\rightarrow \int_V \nabla \cdot \vec{B} dV = 0 \therefore \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\cdot FEM = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \rightarrow \int_A (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} = -\int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\therefore \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \rightarrow \frac{1}{\epsilon} \nabla \times \vec{D} = -\frac{1}{\mu} \vec{H}$$

$$\cdot \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu i + \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$\rightarrow \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} + \mu \epsilon \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$\int_A \nabla \times \vec{B} dA = \int_A (\mu \vec{j} + \mu \epsilon \vec{E}) dA$$

$$\rightarrow \nabla \times \vec{B} = \mu \vec{j} + \mu \epsilon \vec{E} \rightarrow \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{B}) = \vec{j} + \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\rightarrow (\nabla \times \vec{B}) = \vec{j} + \vec{E} \rightarrow \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \vec{P}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$= \epsilon \vec{E}$$

Fields created by atoms and molecules that make up the material

$$\vec{j} = \vec{j}_s + \vec{j}_v = \sigma \vec{E}$$

No sources

$$\int_V \nabla \cdot \vec{a} dV = \oint_A \vec{a} \cdot d\vec{s}$$

$$\int_A \nabla \times \vec{a} \cdot d\vec{A} = \oint_C \vec{a} \cdot d\vec{l}$$

T. Gauss

T. Stokes

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot (\mu \vec{B}) = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{P} = \text{Polarization}$$

$$\vec{M} = \text{Magnetization}$$

## - free space

- $\nabla \cdot \vec{E} = 0$
- $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- $\vec{B} = \mu \vec{H}$

- $\nabla \cdot \vec{B} = 0$
- $\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
- $\nabla \cdot \vec{D} = 0$

We assume that the light is propagating in a medium that we will call *free space* and that is

- (1) uniform:  $\epsilon$  and  $\mu$  have the same value at all points;
- (2) isotropic:  $\epsilon$  and  $\mu$  do not depend upon the direction of propagation;
- (3) nonconducting:  $\sigma = 0$ , and thus  $J = 0$ ;
- (4) free from charge:  $\rho = 0$ ;
- (5) nondispersive:  $\epsilon$  and  $\mu$  are not functions of frequency, i.e., they have no time dependence.

## - Wave equation (plane wave)

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{B} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \times \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

$$\vec{\nabla} \times \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = -\mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \rightarrow -\nabla^2 \vec{E} = -\mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \rightarrow \nabla^2 \vec{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \leftrightarrow \nabla^2 \vec{B} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \therefore V = 1/\sqrt{\mu \epsilon} \text{ if } N = N_0 n \quad \epsilon = \epsilon_0$$

$$V = c = 1/\sqrt{N_0 \epsilon_0}$$

$$N = n \equiv \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{\epsilon_0 \mu_0}} \gg 1$$

refraction index

For magnetic materials:

$$\frac{N}{\mu_0} \approx 1, \text{ so } n \approx \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}}$$

Table 2.2 Selected indices of refraction

Material	$n$ (yellow light)	$\sqrt{\epsilon/\epsilon_0}$ (static)
Air	1.000294	1.000295
CO <sub>2</sub>	1.000449	1.000473
C <sub>6</sub> H <sub>6</sub> (benzene)	1.482	1.489
He	1.000036	1.000034
H <sub>2</sub>	1.000131	1.000132

Table 2.1 Representative magnetic permeabilities

Material	$\mu/\mu_0$	Class
Silver	0.99998	Diamagnetic
Copper	0.99999	Diamagnetic
Water	0.99999	Diamagnetic
Air	1.00000036	Paramagnetic
Aluminum	1.000021	Paramagnetic
Iron	5000	Ferromagnetic
Nickel	600	Ferromagnetic

## - Transverse waves:

it is:  $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$

$$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z) = (E_x e^{i(k \cdot r - \omega t + \phi_0)}, E_y e^{i(k \cdot r - \omega t + \phi_0)}, E_z e^{i(k \cdot r - \omega t + \phi_0)})$$

$$\vec{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k} = \vec{E} e^{i(k \cdot r - \omega t + \phi_0)} = \vec{E} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_0)}$$

$$= (E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k}) e^{i(k \cdot r - \omega t + \phi_0)}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (E_x \hat{i} e^{i(k \cdot r - \omega t + \phi_0)})$$

$$= i E_x k_x e^{i(k \cdot r - \omega t + \phi_0)} = i k_x E_x$$

$$\therefore \nabla \cdot \vec{E} = i k_x E_x + i k_y E_y + i k_z E_z = 0 \rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = i (\vec{k} \cdot \vec{E}) = 0$$

$$\rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \sim \text{Transverse wave the same way: } \vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\rightarrow \vec{H} = (H_x, H_y, H_z) = (H_x e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0)}, H_y e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0)}, H_z e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0)})$$

$$= \vec{H} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0)} = \vec{H} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_0)} \text{ front view}$$

- Interdependence of  $\vec{E}$  and  $\vec{B}$  (for plane wave)

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \vec{H} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0)} = -\omega i \vec{H} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0)} = -\omega i \vec{H}$$

$$\rightarrow \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\omega i \vec{H} \quad \wedge \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\omega i \vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \hat{k}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = i k_y E_z, \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} = i k_z E_y, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = i k_z E_x, \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = i k_x E_z$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = i k_x E_y, \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} = i k_y E_x$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = (i k_y E_z - i k_z E_y) \hat{i} + (i k_z E_x - i k_x E_z) \hat{j} + (i k_x E_y - i k_y E_x) \hat{k} =$$

$$i \vec{k} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ i k_x & i k_y & i k_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = i \vec{k} \times \vec{E} \quad \wedge$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = i \vec{k} \times \vec{H}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad i \vec{k} \times \vec{E} = \mu \omega i \vec{H} \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = \mu \omega i \vec{H} \quad \wedge$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \epsilon (-i \omega \vec{E}) = -i \epsilon \omega \vec{E} \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = -i \epsilon \omega \vec{E} \quad \wedge$$

$$\vec{k} \times \vec{H} = \epsilon \omega \vec{E}$$

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{\mu_0 \epsilon_0}} \quad \left\{ \begin{array}{l} k_o = \omega/c = \frac{2\pi}{\lambda_o} \rightarrow v = \lambda v \rightarrow c = \lambda v \\ k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} \end{array} \right.$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} = \omega \frac{n}{c} = n k_o \rightarrow k = n k_o$$

$$\rightarrow n k_o = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow n \frac{2\pi}{\lambda_o} = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow n \lambda = \lambda_o \rightarrow \lambda = \frac{1}{n} \lambda_o$$

$$k = \| \vec{k} \| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \quad [\vec{E}] = v o / m \quad [\vec{H}] = A / m$$

$$\frac{[\vec{E}]}{[\vec{H}]} = \frac{vo/s}{A} = \sigma$$

the electric and magnetic fields are perpendicular to each other, are in phase, and form a right-handed coordinate system with propagation direction  $k$  (see Figure 2.1).

$$\vec{k} \times \vec{E} = \mu \omega \vec{H}$$

$$\omega = 2\pi v \rightarrow v = 1/\sqrt{\mu \epsilon}$$

$$v = \lambda v \rightarrow v = \frac{v}{\lambda}$$

$$\omega = 2\pi \frac{v}{\lambda} = \frac{k}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

$$\vec{K} \times \vec{E} = \mu \cdot \frac{K}{\sqrt{\mu \epsilon}} \vec{H} \rightarrow \vec{K} \times \vec{E} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} K \vec{H} \rightarrow \vec{H} = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \vec{K} \times \vec{E}$$

$$\vec{K} \times \vec{H} = \epsilon \omega \vec{E} \rightarrow \vec{K} \times \vec{H} = \epsilon \cdot \frac{K \vec{E}}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} K \vec{E} \rightarrow \vec{E} = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \vec{K} \times \vec{H}$$

$$||\vec{H}|| = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} K \cdot ||\vec{E}|| \rightarrow \frac{||\vec{E}||}{||\vec{H}||} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = z = n, z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120 \pi \Omega$$

$$\vec{H} = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \vec{K} \times \vec{E} = \frac{\sqrt{\mu \epsilon}}{\mu K} \vec{K} \times \vec{E} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \hat{K} \times \vec{E}$$

$$\rightarrow \vec{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \hat{K} \times \vec{E} = \frac{1}{n} \hat{K} \times \vec{E} \wedge \vec{E} = -\eta \hat{K} \times \vec{H} \quad n |\vec{E}| = c |\vec{B}|?$$

- Energy Density and flow: the power transmitted by a wave is proportional to the square of the amplitude of the wave.

$$U = \frac{\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H}}{2} = \frac{1}{2} (\epsilon \vec{E}) \cdot \vec{E} + \frac{1}{2} \mu \vec{H} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2$$

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta \quad \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \rightarrow H = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E \rightarrow \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 = U$$

$$U = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu \cdot \frac{\epsilon E^2}{\mu} = \epsilon E^2 = \mu H^2 \rightarrow U = \epsilon E^2 = \mu H^2 = B^2/\mu = D^2/\epsilon$$

$$\text{in Vacuum: } U = \epsilon_0 E^2 = B^2/\mu_0 = \mu_0 H^2 = D^2/\epsilon_0$$

Poynting Vector:  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$  [ $S$ ] =  $J/m^2 s = \text{Watt}/m^2$  for plane wave:

$$\vec{J} = \vec{J}_s + \vec{J}_c, \quad \vec{J}_c = \sigma \vec{E} \quad [\vec{E} \cdot \vec{J}] = \frac{V \cdot H}{m} \cdot \frac{A \cdot m}{m^2} = \frac{\text{Watt}}{m^3}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rightarrow \vec{J} = \nabla \times \vec{H} - \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{J} = \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H} - \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

$$\vec{E} \cdot \vec{J} = \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \epsilon \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

From ① =

$$\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \nabla (\vec{E} \times \vec{H})$$

$$\rightarrow \vec{E} \cdot \vec{J} = \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \nabla (\vec{E} \times \vec{H}) - \epsilon \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$= -\vec{H} \cdot \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \epsilon \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \nabla (\vec{E} \times \vec{H})$$

$\rightarrow$

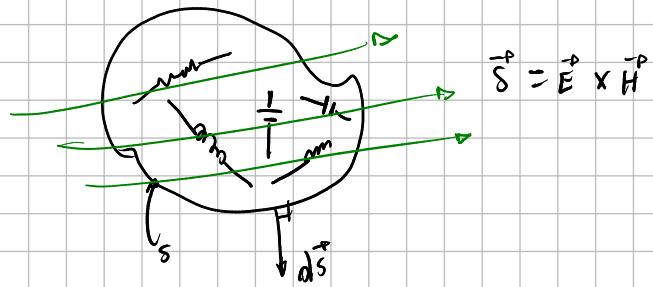
$$\rightarrow \vec{E} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial w^M}{\partial t} - \frac{\partial w^E}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{s}$$

$$-\int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V (w^M + w^E) dV + \int_V \nabla \cdot \vec{s} dV$$

$$\begin{aligned} \nabla (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) &= \vec{v}_2 \cdot (\nabla \times \vec{v}_1) - \vec{v}_1 \cdot (\nabla \times \vec{v}_2) \\ \frac{1}{2} \frac{\partial |\vec{v}|^2}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial (\vec{v} \cdot \vec{v})}{\partial t} = \frac{1}{2} (\vec{v} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}) \\ &= \vec{v} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \quad \text{②} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\mu \frac{1}{2} \frac{\partial H^2}{\partial t} - \epsilon \frac{1}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} - \nabla (\vec{E} \times \vec{H}) \\ &\quad \underbrace{\frac{\partial w^M}{\partial t}}_{\vec{s}} \quad \underbrace{\frac{\partial w^E}{\partial t}}_{\vec{s}} \end{aligned}$$

$$-\int_V (\vec{E} \cdot \vec{j}_s) d\tau - \int_V \vec{E} \cdot \sigma \vec{E} d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \int_V (W^u + W^B) d\tau + \oint_S \vec{s} \cdot d\vec{s}$$



$$\vec{s} = \vec{\epsilon} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0)} \times \vec{H} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0)}$$

$$= e^{2i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0)} \vec{\epsilon} \times \vec{H}$$

to  $\lambda_0 = 10^{-6} \text{ m}$   
we have  $V = 3 \times 10^{-4} \text{ Hz}$  High  
No measurable

Time averaged Poynting Vector:

$$\langle \vec{s} \cdot \hat{n} \rangle = \frac{1}{T} \int_T \vec{\epsilon} \times \vec{H} dt = \frac{1}{2} R_L \{ \vec{E} \times \vec{H}^* \}$$

$$\langle \vec{s} \cdot \hat{n} \rangle = \frac{1}{2} R_L \{ \vec{\epsilon}_m \times \vec{H}_m^* \} = \frac{1}{2} R_L \{ \vec{s}_z \}$$

$$\vec{s}_z = \vec{\epsilon} \times \vec{H}^*$$

$$\text{Irradiance: } I = \langle |\vec{s} \cdot \hat{n}| \rangle = \langle |\vec{s}'| \rangle \cos \theta$$

$$\text{Intensity: } I = \langle |\vec{s}'| \rangle$$

Polarization Ellipse:  $\vec{k} = (0, 0, k_z) = (0, 0, K)$

$$\vec{E} = \vec{\epsilon} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi)} = \vec{\epsilon} e^{i(\omega t - Kz + \phi)} = E_{x0} e^{i(\omega t - Kz + \phi)} \hat{i}_x + E_{y0} e^{i(\omega t - Kz + \phi)} \hat{j}_y$$

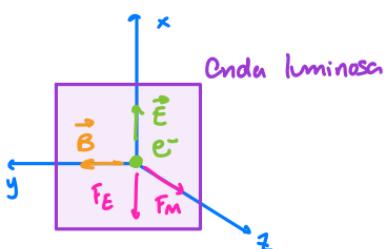
Using the real part of  $\vec{E}$ :

Propagating Waves:

Onda propagante:  $y = f(x - vt)$  wave movement is to  $+x$   
Onda antipropagante:  $y = f(x + vt)$  wave movement is to  $-x$

Electromagnetic Wave Linear Momentum

fuerza total que actúa  $E = 0$   
sobre  $e^-$  promediada en el tiempo



$$\langle \vec{f} \rangle = \langle \vec{f}_m \rangle + \langle \vec{f}_E \rangle = q_e \langle \vec{v} \times \vec{B} \rangle + q_e \vec{E}$$

$$C|\vec{B}| = \eta |\vec{E}|$$

$$F = \frac{q_e}{c} \langle \vec{v} \times \vec{B} \rangle$$

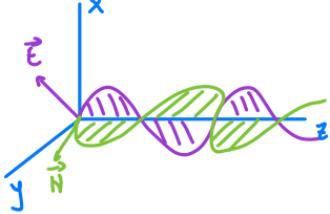
$$n = \eta = \sqrt{\frac{\epsilon_m}{\epsilon_0 \mu_0}} \geq 1$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\frac{dw}{dt} = \vec{V}_c \cdot \vec{f} = \vec{V}_c (q_e \vec{E} + q_e \vec{v}_c \times \vec{B}) = q_e |\vec{v}_c| |\vec{E}|$$

$$\rightarrow \langle \frac{dp}{dt} \rangle = \frac{q_e}{c} \langle |\vec{V}_c| |\vec{E}| \rangle \rightarrow \langle \frac{dp}{dt} \rangle = \frac{1}{c} \langle \frac{dw}{dt} \rangle$$

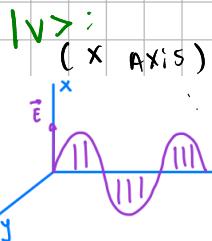
## Polarization



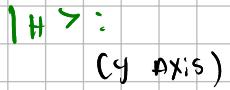
$$\Psi = \begin{cases} \vec{E} = (\varepsilon_x \hat{x} + \varepsilon_y \hat{y}) e^{i(kz - \omega t)} \\ \vec{H} = \frac{1}{\eta} \vec{k} \times \vec{E} \end{cases}$$

$$\Psi = \begin{cases} \vec{E} = (\varepsilon_x e^{i\phi_{ox}} \hat{x} + \varepsilon_y e^{i\phi_{oy}} \hat{y}) e^{i(kz - \omega t)} \\ \vec{k} = (0, 0, k) = \vec{k}_z \end{cases}$$

Linear polarization:



$$\vec{E} = (\varepsilon_x e^{i\phi_{ox}} \hat{x}) e^{i(kz - \omega t)} \\ = \varepsilon_x \hat{x} \cos(kz - \omega t + \phi_{ox})$$



$$\vec{E} = (\varepsilon_y e^{i\phi_{oy}} \hat{y}) e^{i(kz - \omega t)} \\ = \varepsilon_y \hat{y} \cos(kz - \omega t + \phi_{oy})$$

$|D\rangle$

$$\Delta\phi = \phi_{oy} - \phi_{ox} = 0$$

if  $\phi_{ox} = \phi_{oy} = \psi$

$$\vec{E} = (\varepsilon_x e^{i\psi} \hat{x} + \varepsilon_y e^{i\psi} \hat{y}) e^{i(kz - \omega t)} \\ = \varepsilon_x \hat{x} \cos(kz - \omega t + \psi) + \varepsilon_y \hat{y} \cos(kz - \omega t + \psi)$$

$$\tan\beta = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}$$

$|A\rangle$

$$\Delta\phi = \phi_{oy} - \phi_{ox} = \pm\pi$$

Caso  $\phi_o$

$$\vec{E} = (\varepsilon_x e^{i\pi} \hat{x} + \varepsilon_y \hat{y}) e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\tan\beta = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}$$

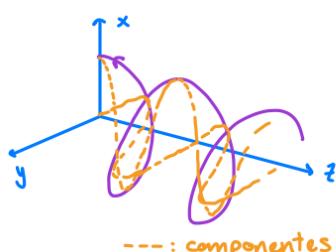
$|R\rangle$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y ; \Delta\phi = \phi_{oy} - \phi_{ox} = -\pi/2$$

$$\text{Caso } \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_0 ; \phi_{ox} = 0, \phi_{oy} = -\pi/2$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y ; \Delta\phi = \phi_{oy} - \phi_{ox} = \pi/2$$

$$\text{Caso } \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_0 ; \phi_{ox} = 0, \phi_{oy} = \pi/2$$



$$\vec{E} = (\varepsilon_0 \hat{x} + \varepsilon_0 e^{i\pi/2} \hat{y}) e^{i(kz - \omega t)}$$

$$= \varepsilon_0 \hat{x} e^{i(kz - \omega t)} - i \varepsilon_0 \hat{y} e^{i(kz - \omega t)}$$

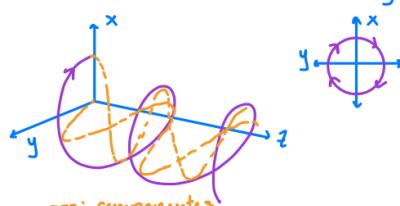
$$= \varepsilon_0 \hat{x} \cos(kz - \omega t) + \varepsilon_0 \hat{y} \sin(kz - \omega t)$$



Levogira  $|L\rangle$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y ; \Delta\phi = \phi_{oy} - \phi_{ox} = \frac{\pi}{2}$$

Caso  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_0 ; \phi_{ox} = 0, \phi_{oy} = \frac{\pi}{2}$



$$\vec{E} = (\varepsilon_0 \hat{x} + \varepsilon_0 e^{i\pi/2} \hat{y}) e^{i(kz - \omega t)}$$

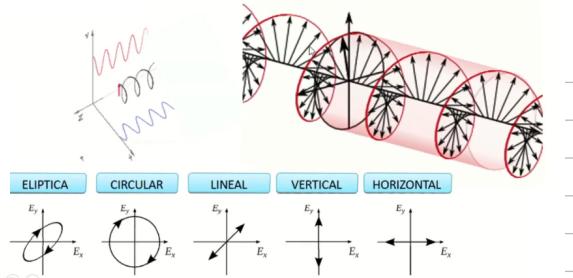
$$= \varepsilon_0 \hat{x} e^{i(kz - \omega t)} + i \varepsilon_0 \hat{y} e^{i(kz - \omega t)}$$

$$= \varepsilon_0 \hat{x} \cos(kz - \omega t) - \varepsilon_0 \hat{y} \sin(kz - \omega t)$$

Nota: Se trabaja con la ref. de la onda viniendo hacia el observador:

$$\text{Propagador: } (kz - \omega t + \phi_{ox}) \rightarrow \text{Onda de Frente} \quad \begin{matrix} -\frac{\pi}{2} \\ \text{C} \end{matrix}$$

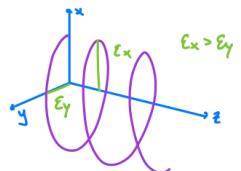
$$(kz + \omega t + \phi_{oy}) \rightarrow \text{Desde la Fuente} \quad \begin{matrix} \frac{\pi}{2} \\ \text{R} \end{matrix}$$



## Elliptic Polarization

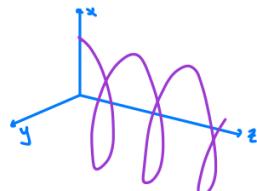
Dextrógiro:

$$E_x \neq E_y ; \Delta\phi = \Phi_{oy} - \Phi_{ox} \neq 0, -\pi/2, -\pi$$



Levógiro:

$$E_x \neq E_y ; \Delta\phi = \Phi_{oy} - \Phi_{ox} \neq 0, \pi/2, \pi$$



$$\vec{E} = (E_x e^{i(\omega t + \phi_{ox})} \hat{x} + E_y e^{i(\omega t + \phi_{oy})} \hat{y}) e^{i(kz - \omega t)} =$$

$$E_x \cos(kz - \omega t + \phi_{ox}) + E_y \sin(kz - \omega t + \phi_{oy})$$

## Elipse de polarización:

$$\vec{E} = E_x \cos(kz - \omega t + \phi_{ox}) \hat{x} + E_y \cos(kz - \omega t + \phi_{oy}) \hat{y}$$

- Componentes transversales

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x(z, t) = E_x \cos(\tau + \phi_{ox}) \\ E_y(z, t) = E_y \cos(\tau + \phi_{oy}) \\ \tau = kz - \omega t \rightarrow \text{Propagador} \end{array} \right.$$

$$\frac{E_x}{E_x} = \cos \tau \cos \phi_{ox} - \sin \tau \sin \phi_{ox} ; \frac{E_y}{E_y} = \cos \tau \cos \phi_{oy} - \sin \tau \sin \phi_{oy}$$

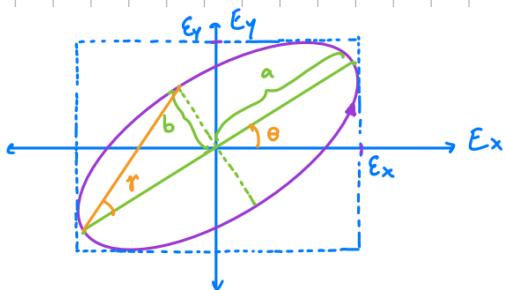
$$\frac{E_x}{E_x} \sin \phi_{oy} - \frac{E_y}{E_y} \sin \phi_{ox} = (\cos \tau \cos \phi_{ox} - \sin \tau \sin \phi_{ox}) \sin \phi_{oy} - (\cos \tau \cos \phi_{oy} - \sin \tau \sin \phi_{oy}) \sin \phi_{ox}$$

$$= \cos \tau [\cos \phi_{ox} \sin \phi_{oy} - \sin \phi_{ox} \cos \phi_{oy}] = \cos \tau \sin(\phi_{oy} - \phi_{ox}) = \cos \tau \sin \Delta \phi$$

$$\frac{E_x}{E_x} \sin \phi_{oy} - \frac{E_y}{E_y} \sin \phi_{ox} = \cos \tau \sin \Delta \phi , \quad \Delta \phi = \phi_{oy} - \phi_{ox}$$

In the same way:  $\frac{E_x}{E_x} \cos \phi_{oy} - \frac{E_y}{E_y} \cos \phi_{ox} = \sin \tau \sin \Delta \phi ; \Delta \phi = \phi_{oy} - \phi_{ox}$

$$\therefore \frac{E_x^2}{E_x^2} + \frac{E_y^2}{E_y^2} - 2 \frac{E_x}{E_x} \frac{E_y}{E_y} \cos \Delta \phi = \sin^2 \Delta \phi$$



Ángulo de orientación

$$\tan \theta = \frac{2 E_x E_y \cos \Delta \phi}{E_x^2 - E_y^2}, \quad 0 \leq \theta < \pi$$

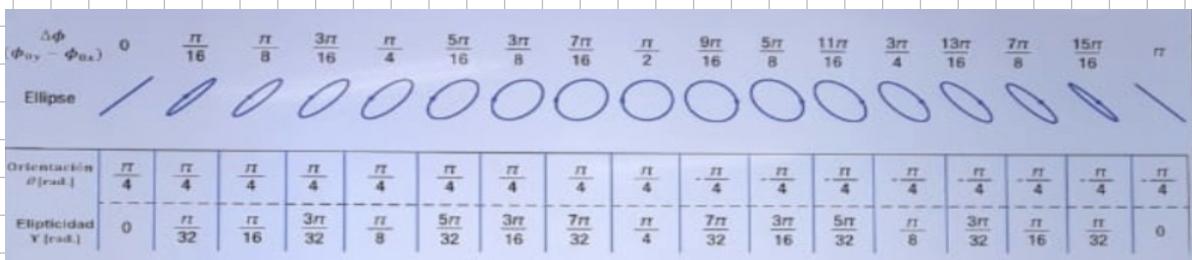
Ángulo de elliposidad:

$$\text{i)} \tan \rho = \pm \frac{b}{a} \quad \text{ii)} \sin(2\rho) = \frac{2 E_x E_y \sin \Delta \phi}{E_x^2 + E_y^2}$$

$$-\pi/4 \leq \rho \leq \pi/4$$

Semieje mayor:  $a^2 = E_x^2 \cos^2 \theta + E_y^2 \sin^2 \theta + 2E_x E_y \cos \theta \sin \theta \cos \Delta\phi$

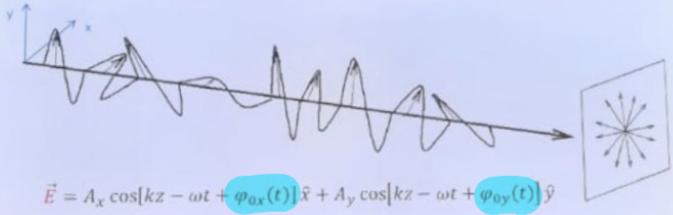
Semieje menor:  $b^2 = E_x^2 \sin^2 \theta + E_y^2 \cos^2 \theta - 2E_x E_y \cos \theta \sin \theta \cos \Delta\phi$



#### D. Luz natural o no polarizada

- Una onda armónica no describe adecuadamente la radiación emitida por fuentes naturales de luz.
- Una fuente de luz natural está compuesta por una cantidad enorme de átomos emisores orientados al azar.
- Cada emisor radia un tren de ondas polarizadas por 10 nanosegundo.
- Nuevos trenes de ondas de luz le siguen con una polarización diferente.
- Luz natural es no polarizada dado que es luz aleatoriamente polarizada.

• Al tener fases dependientes del tiempo,  $\varphi_{0x}(t)$  y  $\varphi_{0y}(t)$ , la onda no tiene una polarización fija.



#### E. Mecanismos físicos y componentes de polarización

##### 1. Mecanismos físicos

Algunos de los principales mecanismos físicos que modifican el estado de polarización de una onda electromagnética son:

- Polarización por **dicroísmo** o absorción selectiva.
- Polarización por **reflexión** con el ángulo de Brewster
- Polarización por **birrefringencia**
- Polarización por **dispersión**
- Polarización por **interferencia**

##### 2. Componentes

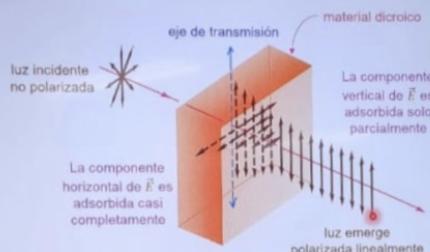
**Polarizador:** componente que, a partir de una entrada de luz natural (no polarizada) o con una polarización arbitraria, proporcionan a su salida luz con un estado de polarización determinado.

##### Tipos de polarizadores:

- Lineales
- Circulares
- Elípticos

### 3. Mecanismos de polarización lineal

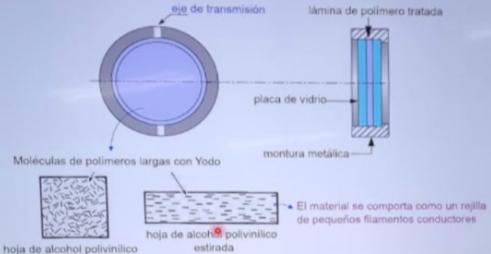
#### a. Polarización por absorción selectiva



##### Materiales dicroicos:

- Cristales naturales (turmalina, herapatita)
- Medios dicroicos artificiales:
  - Rejillas de filamentos conductores
  - Láminas de polímeros tratados (Polaroid®)
  - Vidrios con cristales conductores embebidos

#### a.2 Polarizador de lámina de plástico tratada (Polaroid®)



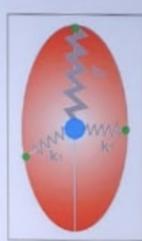
#### a.3 Polarizador de vidrio con cristales metálicos

Mismo principio: vidrio fundido con sales de metales como plata, cobre o cadmio. El vidrio se lamina y se reduce la sal de las capas más superficiales para formar aquijas metálicas.

#### 6. Polarización por birrefringencia

**Cristales ópticamente anisotrópicos:** presentan índices de refracción diferentes para las componentes del campo electromagnético perpendicular y no perpendicular al plano de una dirección característica denominada **eje óptico** del cristal.

En cristales ópticamente anisotrópicos, los enlaces de los electrones que conforman la estructura cristalina son diferentes, como se esquematiza en esta figura. Dependiendo de la orientación, diferentes "constantes de resorte", que dan cuenta de los enlaces electrónicos que ocurren, dan diferentes velocidades de propagación, por lo tanto diferentes índices de refracción y, con ello, dos haces de ondas electromagnéticas de salida.



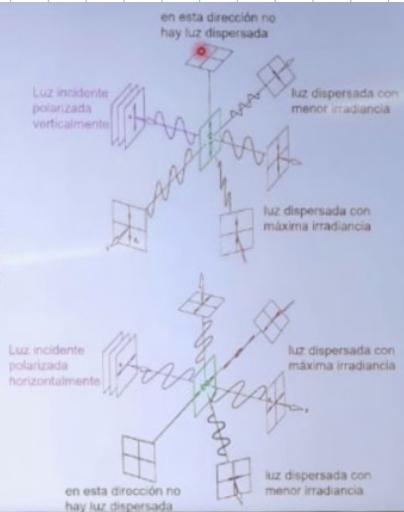
El cristal birrefringente más usado es la **calcita**, variedad que recibe el nombre de "espato de Islandia"

Enlace

<https://www.dailymotion.com/video/x2zz9oz>

#### 7. Polarización por dispersión

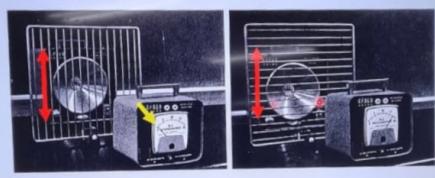
➤ Cuando la luz alcanza una nube de partículas, hace que las cargas eléctricas de sus átomos y moléculas "vibren" en la dirección de su campo eléctrico.



➤ Estos dipolos oscilantes radian nuevas ondas luminosas dispersadas sólo en aquellas direcciones en que su vibración tiene componente transversal.

#### a.1 Polarizador de rejillas de filamentos conductores

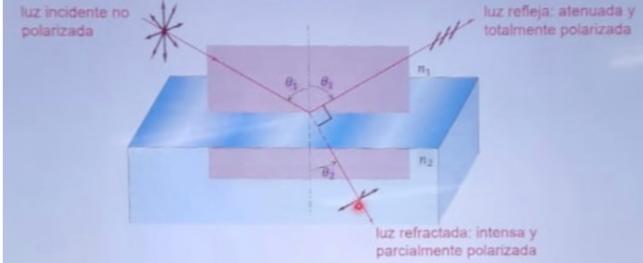
Una rejilla conductora solo deja pasar las microondas con el campo eléctrico perpendicular a sus filamentos (ver evidencia experimental)



• El eje de transmisión es el paralelo a la componente de  $\vec{E}$  que pasa. Es paralelo a la polarización.  
• Si es de  $\vec{E}$  o es de  $\vec{H}$ ?

- La rejilla perpendicular al campo permite su paso y se mide.
- El eje de transmisión es vertical, pues las ondas solo están polarizadas en esa dirección.

#### 5. Polarización por reflexión con el ángulo de Brewster

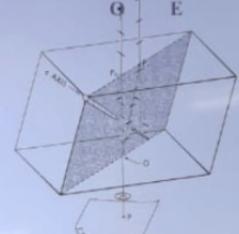


Cuando  $\theta_1 = \theta_B$  se cumple que la luz reflejada y la luz refractada forman un ángulo de 90°, de tal manera que por la geometría del problema:

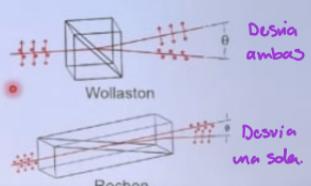
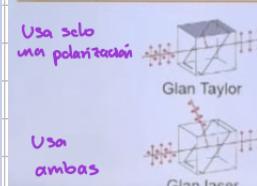
$$\begin{aligned} n_1 \operatorname{sen} \theta_1 &= n_2 \operatorname{sen} \theta_2 \Rightarrow n_1 \operatorname{sen} \theta_B = n_2 \operatorname{sen}(90 - \theta_B) \\ &\Rightarrow n_1 \operatorname{sen} \theta_B = n_2 \cos(\theta_B) \\ &\Rightarrow \tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{condición del ángulo de Brewster} \end{aligned}$$

Cuando la luz se refracta en un cristal birrefringente de **Calcita**, se produce una "doble refracción", esto es, se separa en dos haces con polarizaciones perpendiculares:

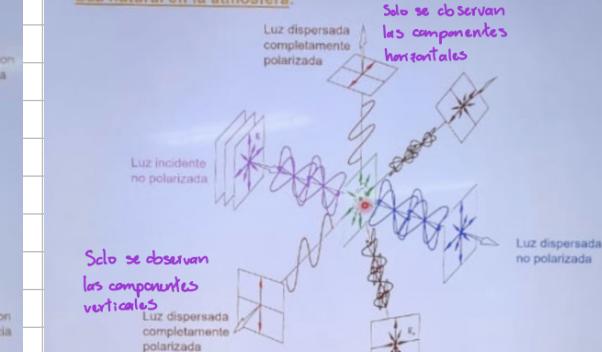
- Haz ordinario → polarización perpendicular al plano del eje óptico.
- Haz extraordinario → polarización no perpendicular al plano del eje óptico.



#### Algunos polarizadores de Calcita:

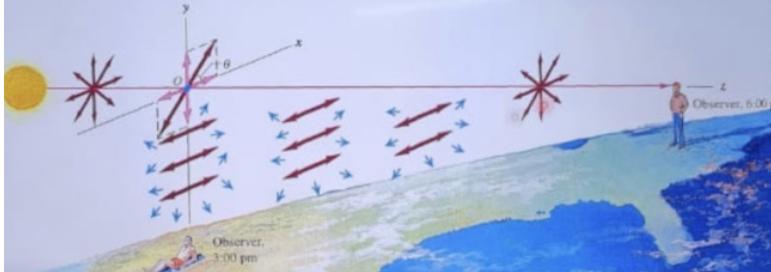


#### Luz natural en la atmósfera:



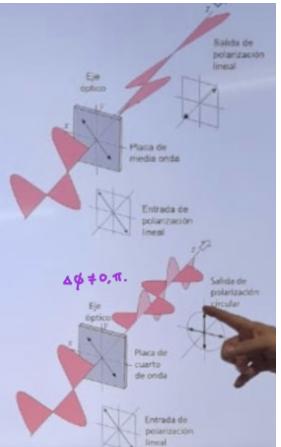
### Polarización de la luz solar en la atmósfera:

- El aire de la atmósfera dispersa las ondas luminosas cortas que las largas.
- En dirección perpendicular a los rayos solares la luz del cielo es más azul y está linealmente polarizada

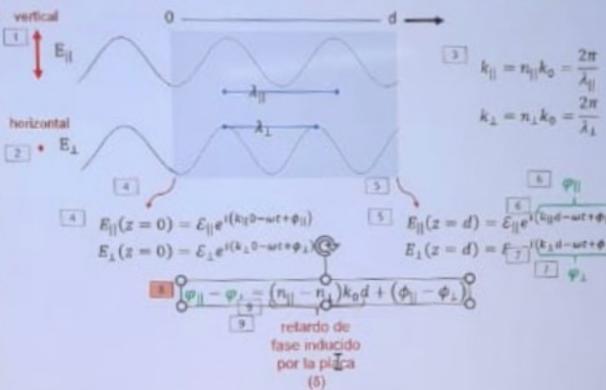


### 8. Placas (láminas) retardadoras

- Dispositivo óptico que introduce un desfase relativo entre las componentes del campo electromagnético.
- Modifican el estado de polarización de la luz sin reducir su intensidad.
- Constitución: láminas de material birrefringente uníaxico cortadas paralelamente a su eje óptico.
- Materiales: cristales de cuarzo o calcita, también de polímeros.



### Cálculo del desfase relativo que agrega la placa (lámina) retardadora



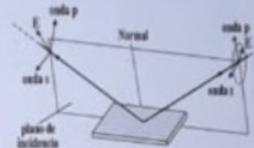
### 9. Retardador por reflexión total interna

#### a. Concepto

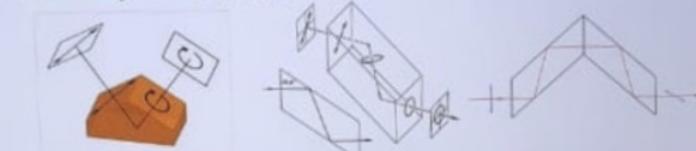
Cuando se cumple que  $n_1 > n_2$ , en la condición de reflexión total interna ( $\theta_i > \theta_c$ ), los coeficientes de reflexión se convierten en una cantidad compleja, con lo cual la onda reflejada sufre un cambio de fase dado por:

$$\text{Onda p: } \varphi_p = -2 \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{n_1^2 - \sin^2 \theta_1} - n_2^2}{n_1 \cos \theta_1} \right)$$

$$\text{Onda s: } \varphi_s = -2 \tan^{-1} \left( n_1 \frac{\sqrt{n_1^2 - \sin^2 \theta_1} - n_2^2}{n_2 \cos \theta_1} \right)$$



#### b. Prismas y rombos de Fresnel



### F. Formalismo matricial de Jones

En la óptica, la luz polarizada se representa por un vector de Jones, y los elementos ópticos lineales se representan por matrices de Jones.

$$\begin{pmatrix} E_x(z,t) \\ E_y(z,t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(xz - \omega t + \phi_{ox})} e^{i(yz - \omega t + \phi_{oy})} = \begin{pmatrix} E_x e^{i\phi_{ox}} \\ E_y e^{i\phi_{oy}} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(xz - \omega t)}$$

→ Vector de Jones

$$\begin{pmatrix} E_x e^{i\phi_{ox}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{E_x} e^{i\phi_{ox}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$|H\rangle$

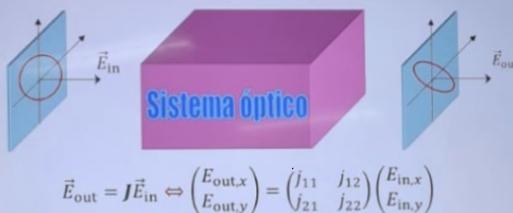
$$\begin{pmatrix} E_o e^{i\phi_{ox}} \\ E_o e^{i\phi_{oy}} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2} E_o} e^{i\phi_{ox}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### Tabla de ejemplos más comunes de vectores de Jones normalizados

Polarización	Vector de Jones	Notación ket
Lineal en x (horizontal)	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$ H\rangle$
Lineal en y (vertical)	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$ V\rangle$
Lineal a $\pm 45^\circ$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$	$ D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} ( H\rangle \pm  V\rangle)$
Circular dextrógiro	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$	$ R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} ( H\rangle - i V\rangle)$
Circular levógiro	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ +i \end{pmatrix}$	$ L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} ( H\rangle + i V\rangle)$

$$|R\rangle \cdot |L\rangle^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ +i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (1 + i^2) = 0$$

## 2. Matrices de Jones:



Cuando se tiene una sucesión de elementos ópticos se cumple:

$$\vec{E}_{\text{out}} = \underbrace{J_n \cdot J_{n-1} \cdots J_1}_{J_T} \vec{E}_{\text{in}} \Leftrightarrow \vec{E}_{\text{out}} = J_T \vec{E}_{\text{in}}$$

Elemento óptico	Matriz de Jones
Polarizador lineal	$J_p = \begin{pmatrix} p_x & 0 \\ 0 & p_y \end{pmatrix} \cdot J_H \cdot J_V$
Rotador de ejes	$J(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$
Polarización lineal rotada un ángulo $\theta$	$J_p(\theta) = \begin{pmatrix} p_x \cos^2 \theta + p_y \sin^2 \theta & (p_x - p_y) \sin \theta \cos \theta \\ (p_x - p_y) \sin \theta \cos \theta & p_x \sin^2 \theta + p_y \cos^2 \theta \end{pmatrix} \cdot J_{\pm 45^\circ} \cdot J_{\theta}$
Placa (lámina) retardadora de fase $\delta$	$J_R(\delta) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\delta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\delta}{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} i) \text{ Lámina de } \frac{\lambda}{4} \rightarrow \delta = \frac{\pi}{2} \\ ii) \text{ Lámina de } \frac{\lambda}{2} \rightarrow \delta = \pi \end{cases}$
Placa (lámina) retardadora de fase $\delta$ rotada un ángulo $\theta$	$J_R(\delta, \theta) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\delta}{2}\cos^2 \theta + e^{-i\frac{\delta}{2}\sin^2 \theta}} & (e^{i\frac{\delta}{2}} - e^{-i\frac{\delta}{2}}) \sin \theta \cos \theta \\ (e^{i\frac{\delta}{2}} - e^{-i\frac{\delta}{2}}) \sin \theta \cos \theta & e^{i\frac{\delta}{2}\sin^2 \theta + e^{-i\frac{\delta}{2}\cos^2 \theta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\delta}{2} + i \sin \frac{\delta}{2} \cos 2\theta & i \sin \frac{\delta}{2} \sin 2\theta \\ i \sin \frac{\delta}{2} \sin 2\theta & \cos \frac{\delta}{2} - i \sin \frac{\delta}{2} \cos 2\theta \end{pmatrix}$

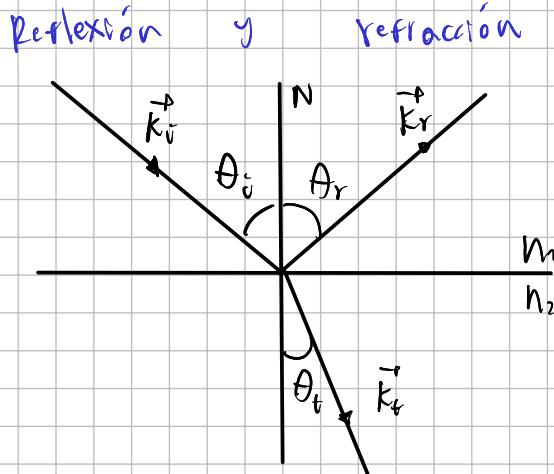
## Dispositivos: láminas retardadoras

- Materiales que poseen dos índices de refracción,  $n_f$  y  $n_s$ .
- Cada índice está asociado a una dirección orthogonal:
  - Eje s (lento):  $n_s$
  - Eje f (rápido):  $n_f$  (es decir,  $n_f < n_s$ )
- Para una onda EM incidente:
  - componente s, avanza a velocidad  $c/n_s$ .
  - componente f, avanza a velocidad  $c/n_f$ .
- Resultado: *desfasaje* entre componentes a la salida del material:

$$E_f f + E_s s \rightarrow e^{i\phi_f} E_f f + e^{i\phi_s} E_s s \\ \rightarrow e^{i\phi_f} (E_f f + e^{i\Delta\phi} E_s s)$$

- El desfasaje neto  $\Delta\phi = \phi_s - \phi_f$  puede tomar diferentes valores:
  - Si  $\Delta\phi = \pi/2 + 2m\pi$ ,  $m$  entero: lámina de **cuarto** de onda (o de  $\lambda/4$ ).
  - Si  $\Delta\phi = \pi + 2m\pi$ ,  $m$  entero: lámina de **media** onda (o de  $\lambda/2$ ).
  - Si  $\Delta\phi = 2m\pi$ ,  $m$  entero: lámina de onda **completa**.
- El efecto depende de la longitud de onda  $\lambda$ : Una lámina de cuarto de onda para cierta  $\lambda_1$  se comportará como de media onda para otra  $\lambda_2$ .

$$J_R(\delta) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\delta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\delta}{2}} \end{pmatrix}$$



$$\theta_i = \theta_r \quad n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$$

$$\text{Para } n_1 > n_2, \theta_i > \theta_t$$

$$n_1 \sin \theta_c = n_2 \sin \theta_i \rightarrow \sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow \theta_c = \sin^{-1} \left( \frac{n_2}{n_1} \right)$$

Para  $\theta_i > \theta_c \rightarrow$  Reflexión total interna

Principio de Fermat:

La trayectoria que la luz sigue para viajar entre dos

• El plano definido por el rayo incidente  $k_i$  y la normal  $N$  en el punto de incidencia se llama **plano de incidencia**

$$n = c/v \approx 1$$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

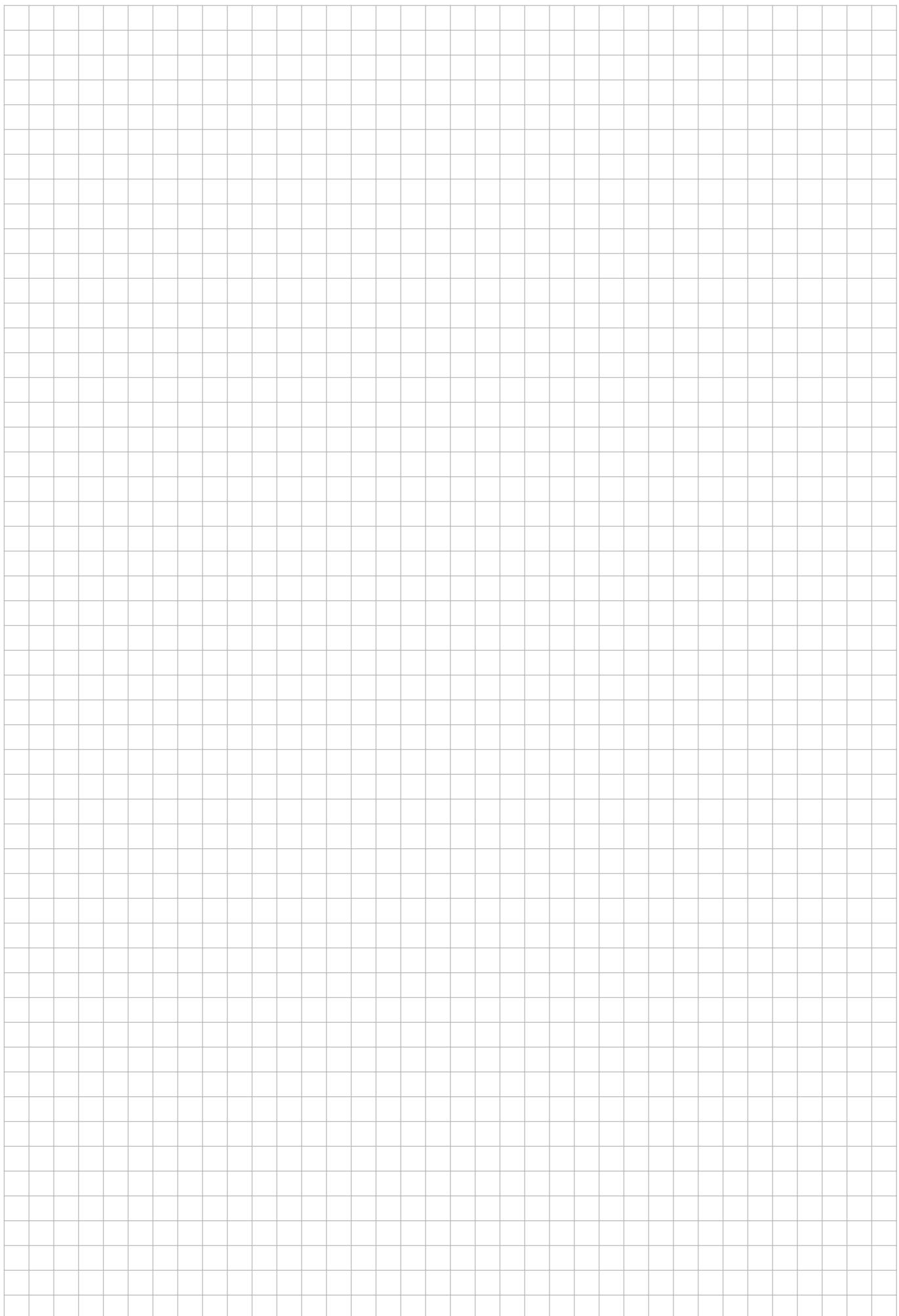
$$k = n k_0$$

•  $k_i, k_r$  y  $k_t$  son coplanares

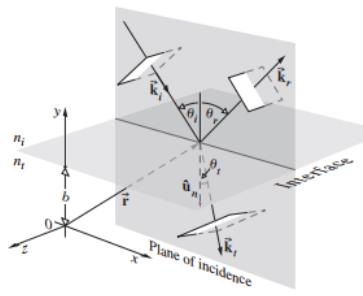
$$\theta_i = \theta_c \text{ cuando}$$

$$\theta_i > \theta_c$$

$$\theta_i < \theta_c$$

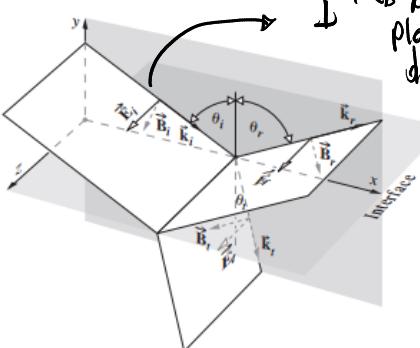


puntos es aquello que toma tiempo mínimo



$$\omega_i = \omega_r = \omega_t$$

$$\vec{E}_{0i} + \vec{E}_{0r} = \vec{E}_{0t}$$



$$\vec{E}_{0i} = \vec{E}_{0t}$$

$$D_{n1} - D_{n2} = \sigma_s$$

$$H_{t1} \rightarrow H_{t2} = k_s x \hat{n}$$

densidad de la corriente superficial

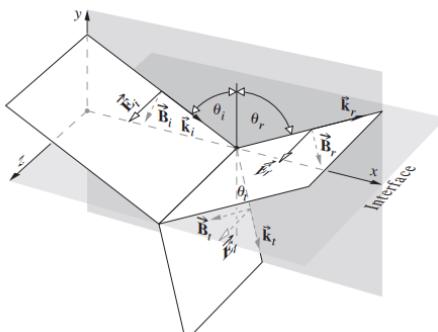
Coefficientes de fresnel

+

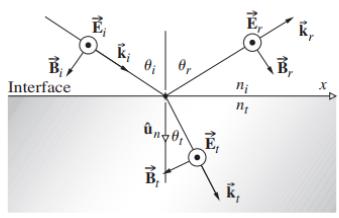
TE

$$Y_{\perp} = \left( \frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}$$

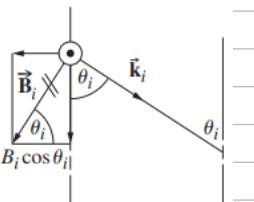
$$t_{\perp} \left( \frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{2 n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}$$



(a)

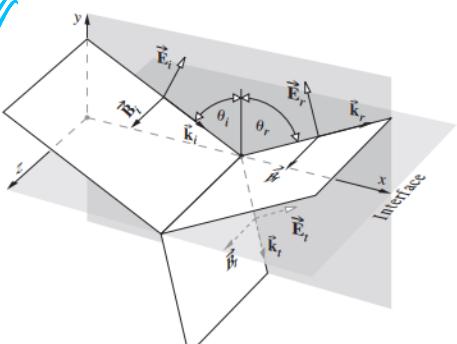


(b)



$$M_i = M_r \approx M_0$$

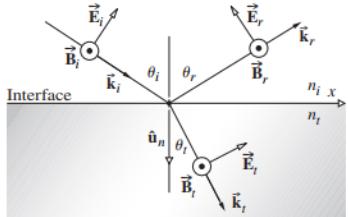
//



$$Y_{\parallel} = \frac{n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} \text{ TM}$$

$$t_{\parallel} = \frac{2 n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_i}$$

$$M_i = M_r \approx M_0$$



Condiciones de frontera en ausencia de cargas y corrientes:



$$\hat{n} \cdot [D_1 - D_2] = 0 \quad (i) \quad \hat{n} \times [E_1 - E_2] = 0 \quad (ii) \quad \hat{n} \cdot [B_1 - B_2] = 0 \quad (iii) \quad \hat{n} \times [H_1 - H_2] = 0 \quad (iv)$$

Reflectancia

$$R \equiv \frac{I_r \cos \theta_r}{I_i \cos \theta_i} = \frac{I_r}{I_i}$$

Transmitancia

$$T \equiv \frac{I_t \cos \theta_t}{I_i \cos \theta_i}$$

$$R = \left( \frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)^2 = \gamma^2$$

Assuming  $n_t = n_r \approx n_0$

$$T = \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \left( \frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)^2 = \left( \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \right) \gamma^2$$

$$R + T = 1$$

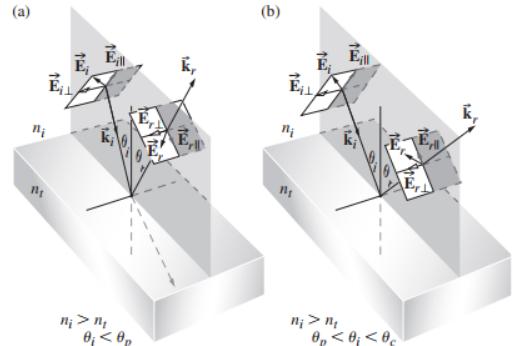
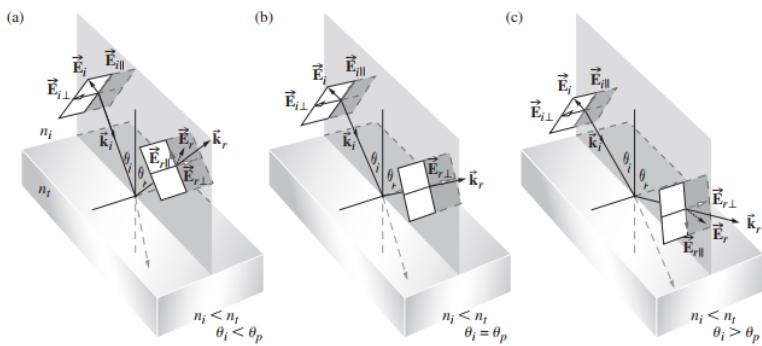


Figure 4.54 The reflected  $\vec{E}$ -field at various angles concomitant with internal reflection.

$$R_{\parallel} + T_{\parallel} = 1 \quad R_{\perp} + T_{\perp} = 1$$

$$R = 1/2 (R_{\parallel} + R_{\perp})$$

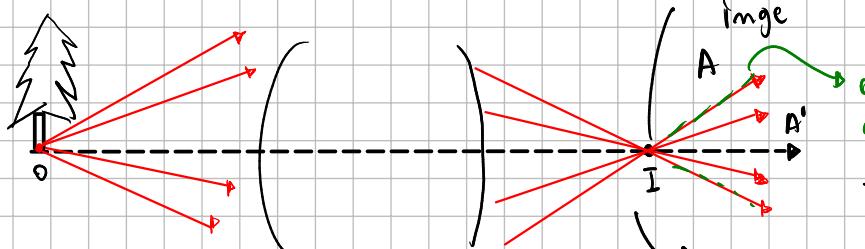
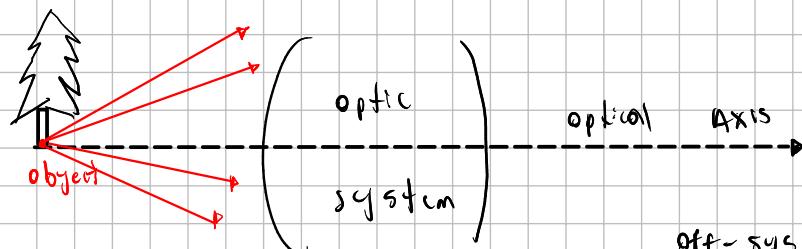
$$\text{When } \theta_i \approx 0 : \quad R = R_{\parallel} = R_{\perp} = \left( \frac{n_t - n_i}{n_t + n_i} \right)^2$$

$$T = T_{\parallel} = T_{\perp} = \frac{4 n_t n_i}{(n_t + n_i)^2}$$

$$\text{Angulo de Brewster : } \tan(\theta_B) = n_t/n_i$$

## Fermat's principle and basic optics system elements

- Ray of light: it's an approximation of an Electromagnetic wave behavior when the object size are bigger than the wavelength, this allows disregard the refraction effects
- optics system: sets of transparent and homogeneous mediums arranged one behind other, separated by spherical surfaces (or flat surfaces)
- objects: set of bright points (punctual sources)

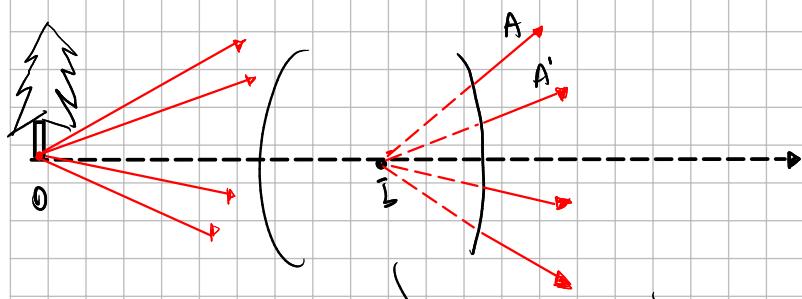
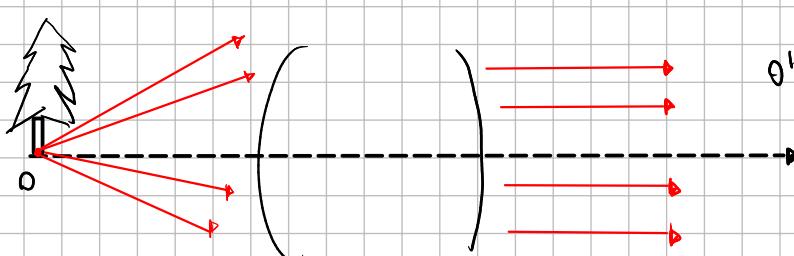


- In A we can't see, in A' we can see the object

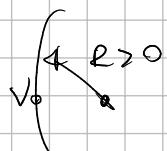
- Convergent beam in I

- If we put a screen in I will an bright point

O's image is in the infinity



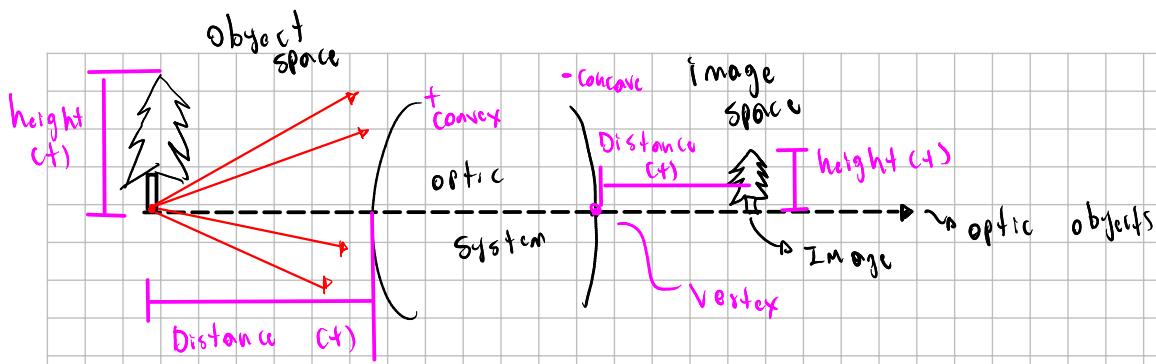
- A virtual image can't be shown in an screen



$$R < 0 \rightarrow V < 0$$

### Criterio de signos:

- En óptica se considera que la luz incide de izquierda a derecha, según el eje óptico.
- Se consideran las superficies desde donde incide la luz, con ello, una superficie tiene radio de curvatura positivo si su centro de curvatura se encuentra a la derecha del vértice (punto del eje óptico que cruza la superficie).
- La posición del objeto y de la imagen se miden con respecto al vértice de la superficie de entrada y de salida, respectivamente, y son positivas si están en su espacio correspondiente.
- La altura tanto del objeto como de la imagen se consideran positivas si se encuentran por encima del eje óptico.



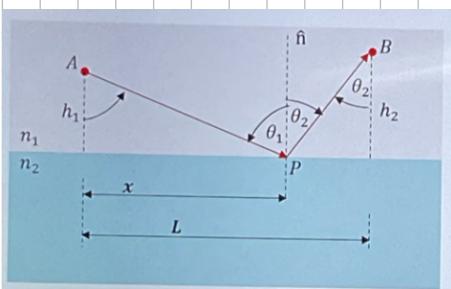
Optical path:  $n = \frac{c}{v} \rightarrow n c = c$ ,  $n_1 v_1 = n_2 v_2 = \dots = n_j v_j = c$

$$L = vt = \frac{c}{n} t \rightarrow nL = ct \rightarrow OPL = \Delta = nL$$

$$\text{in general } OPL = \sum_{r=1}^j n_r L_r$$

Fermat principle: The real light focus path is that maximum, minimum or steady optical path

Reflexion Law:



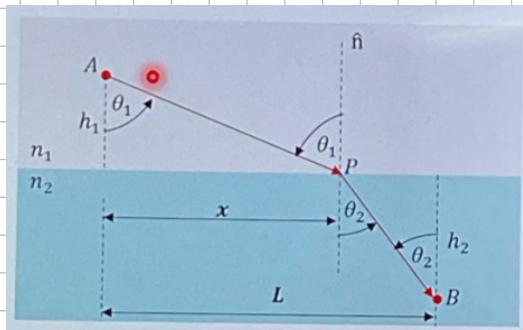
$$\Delta = n_1 (\overline{AP} + \overline{PB}) = n_1 \left\{ \sqrt{h_1^2 + x^2} + \sqrt{h_2^2 + (L-x)^2} \right\}$$

$$\frac{d\Delta}{dx} = 0 \rightarrow \frac{-n_1(2x)}{2(h_1^2 + x^2)^{1/2}} + \frac{2n_1(L-x)}{2(h_2^2 + (L-x)^2)^{1/2}} = 0$$

$$\frac{x}{(h_1^2 + x^2)^{1/2}} = \frac{(L-x)}{(h_2^2 + (L-x)^2)^{1/2}}$$

$$\sin \theta_1 = \sin \theta_2 \rightarrow \theta_1 = \theta_2$$

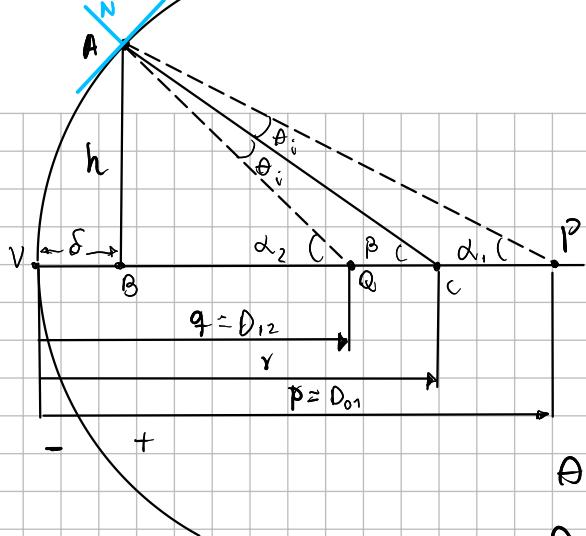
Snell law:



$$\Delta = n_1 \overline{AP} + n_2 \overline{PB} = n_1 (h_1^2 + x^2)^{1/2} + n_2 (h_2^2 + (L-x)^2)^{1/2}$$

$$\dots n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \rightarrow \text{Snell law}$$

Reflexion en superficie Esférica:



Aproximación paraxial.

$$\overline{BP} = \sqrt{P} - \delta \approx \sqrt{P} = p = D_{01}$$

$$\overline{BQ} = \sqrt{Q} - \delta \approx \sqrt{Q} = q = D_{12}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{C} - \delta \approx \sqrt{C} = r = R$$

$$\tan \beta \approx \beta \quad \tan \alpha_2 \approx \alpha_2 \quad \tan \alpha_1 \approx \alpha_1$$

$$\alpha_i + \alpha_1 + \pi - \beta = \pi \rightarrow \beta = \alpha_i + \alpha_1$$

$$\alpha_i + \beta + \pi - \alpha_2 = \pi \rightarrow \alpha_2 = \alpha_i + \beta$$

$$\rightarrow 2\beta - \alpha_2 = \alpha_1 \rightarrow 2\beta = \alpha_2 + \alpha_1$$

$$2\tan \beta = \tan \alpha_2 + \tan \alpha_1 \rightarrow \frac{2h}{R} = \frac{h}{D_{12}} + \frac{h}{D_{01}}$$

$$\rightarrow \frac{2}{R} = \frac{1}{D_{12}} + \frac{1}{D_{01}}$$

~ Ecuación de los centros para espejos curvos

$$\text{Se define } f \equiv R/2 \rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{D_{12}} + \frac{1}{D_{01}}$$

$$m_x = -\frac{D_{12}}{D_{01}}$$

$$m_z = -\frac{D_{01}}{D_{12}}$$

Rayos principales:

- Uno paralelo al eje principal.
- Otro que salga paralelo
- Uno que incida en el vértice
- Uno que pase por el centro de curvatura

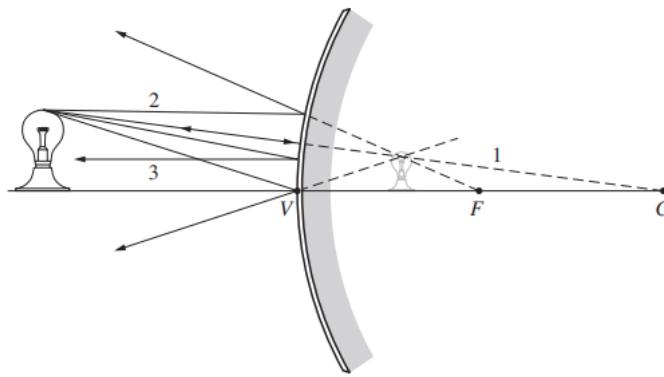
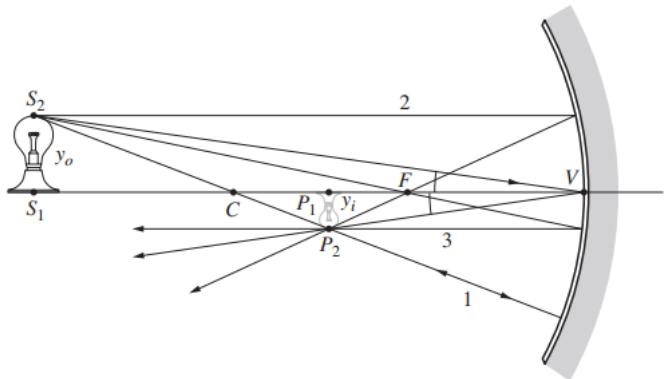


Figure 5.63 Finite imagery with spherical mirrors.

to wit,

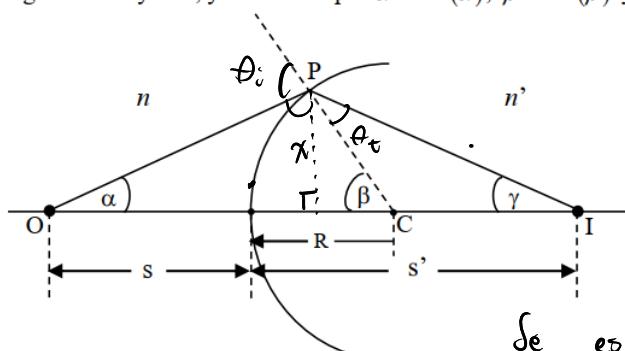
$$f_o = f_i = -\frac{R}{2} \quad (5.49)$$

as can be seen in Fig. 5.59c. Dropping the subscripts on the focal lengths yields

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} \quad (5.50)$$

## Refracción de una superficie esférica (SRE)

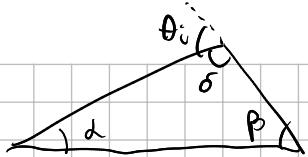
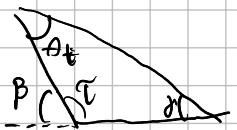
22. La figura abajo es un esquema del proceso de formación de imágenes de un objeto puntual O sobre el eje del sistema por una superficie refractora esférica (SRE). Deduzca la fórmula de Gauss para una SRE dada por:  $\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n'-n}{R}$ . Para ello, aplique la ley de Snell en el punto P para ángulos pequeños, aplique identidades geométricas en los triángulos OPC y PIC, y considere que  $\alpha \approx \tan(\alpha)$ ,  $\beta \approx \tan(\beta)$  y  $\gamma \approx \tan(\gamma)$ .



$$\begin{aligned} n \sin \theta_i &= n' \sin \theta_L \\ n \theta_i &= n' \theta_L \\ \text{Aproximación paraxial} \end{aligned}$$

Se está considerando  
 $n' > n$

$$\theta_i = \alpha + \beta$$



$$\alpha + \beta + \delta = 180^\circ$$

$$\theta_i + \delta = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta + 180^\circ - \theta_i = 180^\circ$$

$$\theta_i = \alpha + \beta$$

$$\theta_i + \tau + \rho = \pi$$

$$\tau + \beta = \pi$$

$$\alpha + \delta + \gamma = \gamma + \beta$$

$$\alpha + \delta = \beta$$

$$\alpha - \tan \alpha = \frac{x}{s}$$

$$r = \tan \delta = \frac{x}{s'}$$

$$\beta \approx \tan \beta = \frac{x}{R}$$

$$n\theta_i = n\alpha + n\delta \rightarrow n(\alpha + \beta) = n'(\beta - \gamma)$$

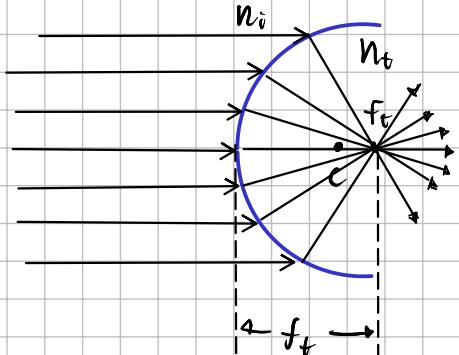
$$n\left(\frac{x}{s} + \frac{x}{R}\right) = n'\left(\frac{x}{R} - \frac{x}{s'}\right) \quad \text{formula de Gauss}$$

$$\rightarrow \frac{n}{s} + \frac{n}{R} = \frac{n'}{R} - \frac{n'}{s'} \rightarrow \boxed{\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n'-n}{R}}$$

## 1. Diptero Convexo:

para SPE

a) objeto infinito ( $D_{oi} \rightarrow \infty$ ) con  $n_t > n_i$



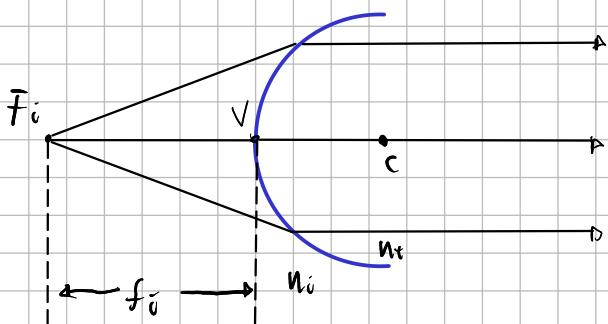
$$\frac{n_i}{D_{oi}} + \frac{n_t}{D_{i2}} = \frac{n_t - n_i}{R}$$

$$\frac{n_t}{D_{i2}} = \frac{n_t - n_i}{R} \quad \text{pero } D_{i2} = f_t$$

$$\frac{n_t}{f_t} = \frac{n_t - n_i}{R} \quad \text{pero } f_t = \frac{n_t - n_i}{n_t - n_i} R$$

$\hookrightarrow$  Distancia focal de transmisión

b) imagen en el infinito: ( $D_{i2} \rightarrow \infty$ ) con  $n_t > n_i$



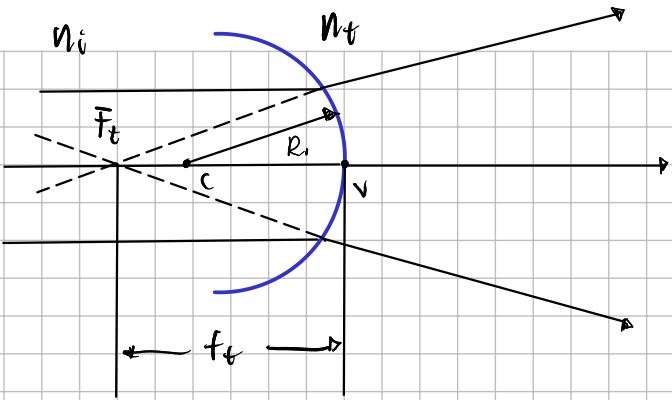
$$\frac{n_i}{D_{oi}} + \frac{n_t}{D_{i2}} = \frac{n_t - n_i}{R}$$

$$\frac{n_i}{f_i} = \frac{n_t - n_i}{R} \quad \text{pero } f_i = \frac{n_i}{n_t - n_i} R$$

$\hookrightarrow$  Distancia focal incidencia

## Diptero Concavo

c) objeto en el infinito ( $D_{oi} \rightarrow \infty$ ) con  $n_t < n_i$



$$\frac{n_i}{D_{01}} + \frac{n_t}{D_{12}} = \frac{n_t - n_i}{R}$$

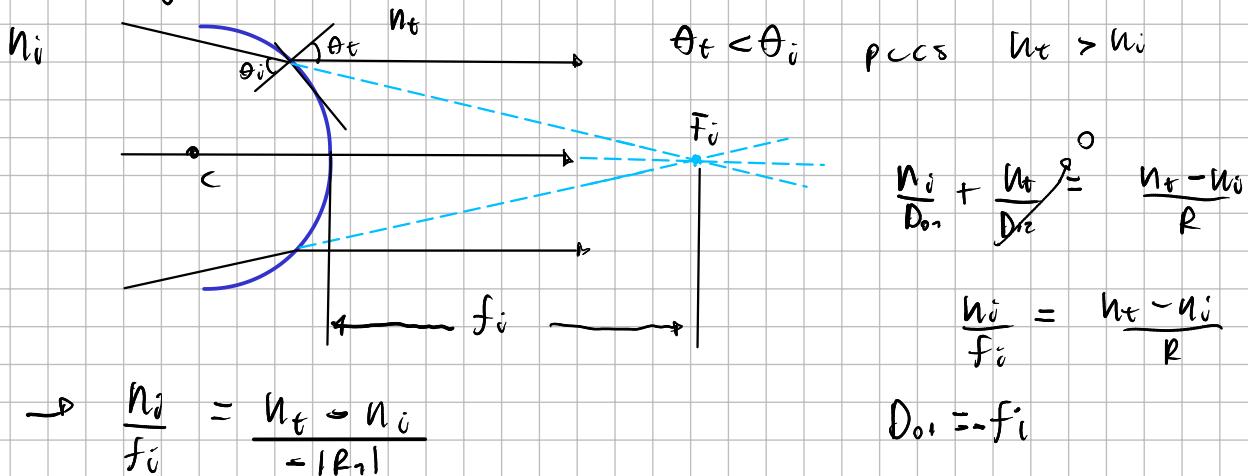
$$\frac{n_t}{D_{12}} = \frac{n_t - n_i}{R_t}$$

$$D_{12} = -f_t$$

$$\frac{n_t}{f_t} = \frac{n_t - n_i}{-1R_t|}$$

$$\frac{n_t}{D_{12}} = \frac{n_t - n_i}{-1R_t|} \rightarrow D_{12} = \frac{n_t (-1R_t)}{n_t - n_i}$$

d) Imagen en el infinito ( $D_{12} \rightarrow \infty$ ) con  $n_t > n_i$



$$\frac{n_i}{D_{01}} + \frac{n_t}{D_{12}} = \frac{n_t - n_i}{R}$$

$$\frac{n_i}{f_i} = \frac{n_t - n_i}{R}$$

$$D_{01} = -f_i$$

TABLE 5.1 Sign Convention for Spherical Refracting Surfaces and Thin Lenses\* (Light Entering from the Left)

$s_o, f_o$	+ left of V
$x_o$	+ left of $F_o$
$s_i, f_i$	+ right of V
$x_i$	+ right of $F_i$
$R$	+ if C is right of V + above optical axis
$y_o, y_i$	

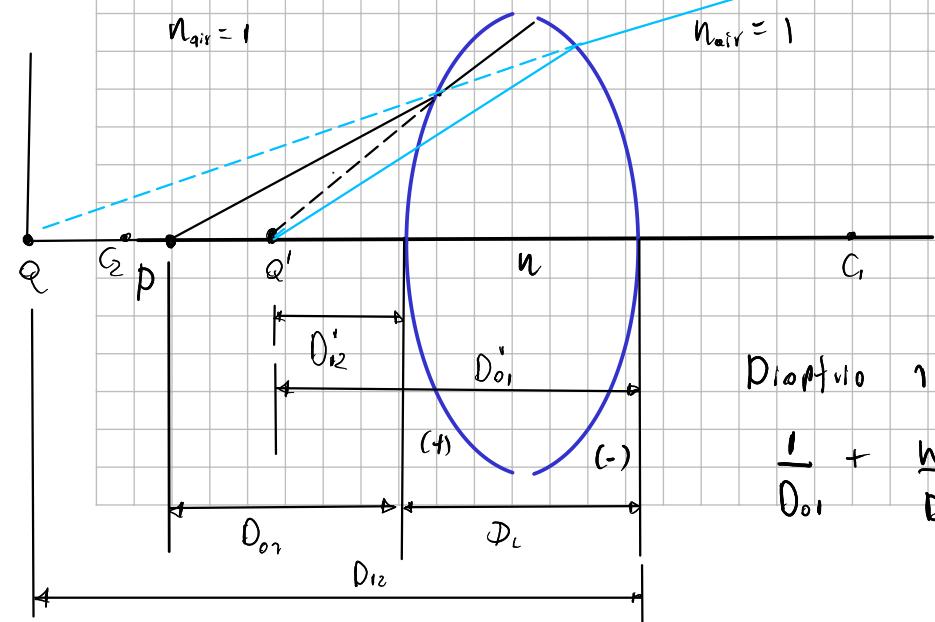
\*This table anticipates the imminent introduction of a few quantities not yet spoken of.

$$\text{Magnificación lateral} \equiv M_x \equiv -\frac{y_i}{y_o} \frac{D_{12}}{D_{01}}$$

$$M_x M_a = 1$$

$$M_d \equiv -\frac{D_{01}}{D_{12}}$$

Lentes delgadas en dire:



$$\begin{aligned} D_L &\ll |D_{01}| & D_L &\ll R_1 \\ D_L &\ll |D_{01}'| & D_L &\ll R_2 \\ D_L &\ll |D_{12}'| \\ D_L &\ll |D_{12}| \end{aligned}$$

$$D_{01}' = D_{12}' + D_L$$

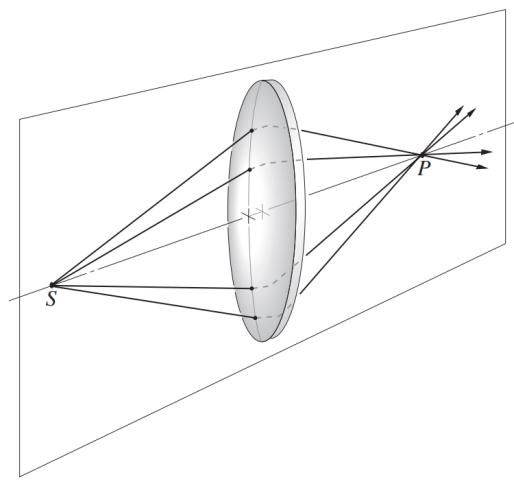
Difracto r:

$$\frac{1}{D_{01}} + \frac{1}{D_{12}'} = \frac{n-1}{R_1}$$

$$\frac{1}{D_{01}} + \frac{n}{D_{12}'} = \frac{n-1}{R_1}$$

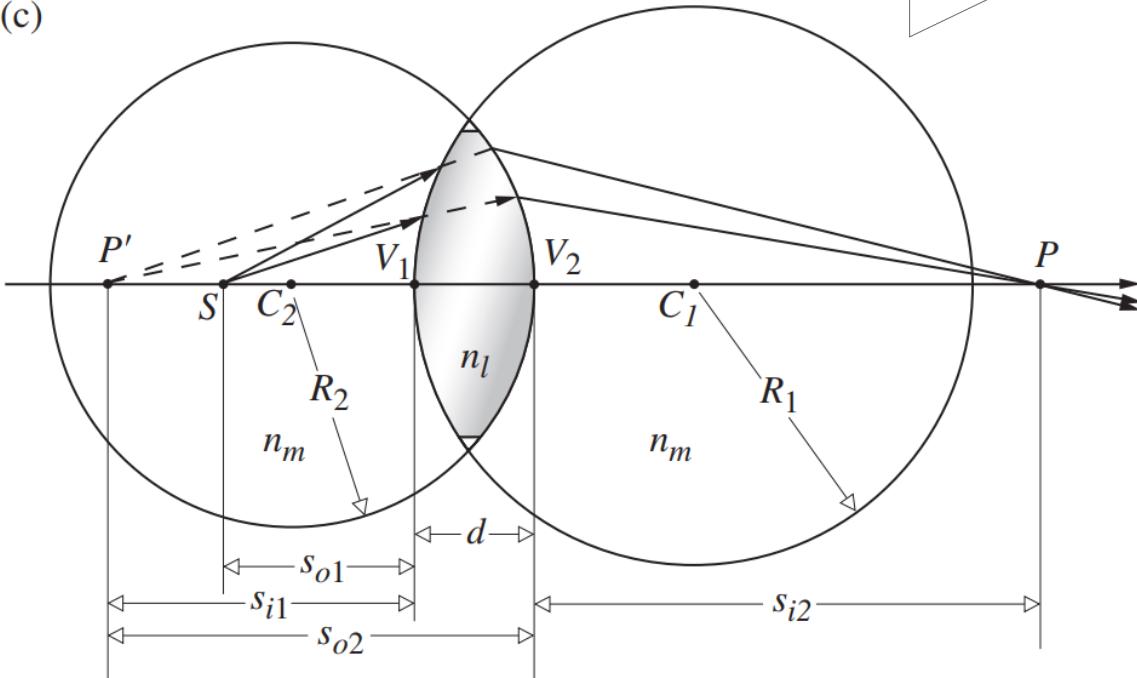
Dioptria 2

$$\frac{1}{D_{o1}'} + \frac{1}{D_{o2}'} = \frac{n-1}{R_2}$$



thin lens:

(c)



$$\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n_l - n}{R}$$

Dioptria 1:

$$\frac{n_m}{s_{o1}} + \frac{n_l}{s_{i1}} = \frac{n_l - n_m}{R_1} \quad (1)$$

$$s_{o1} + d = s_{o2}$$

Dioptria 2:

$$\frac{n_l}{s_{o2}} + \frac{n_m}{s_{i2}} = \frac{n_m - n_l}{R_2} \quad (2)$$

$$s_{o1} > d \quad \text{and} \quad s_{o2} > d$$

$$\rightarrow s_{o1} \approx s_{o2} \quad (*)$$

$$\frac{n_m}{s_{o1}} + \frac{n_m}{s_{i2}} = (n_l - n_m) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad \text{para } n_l > n_m$$

s<sub>1</sub>

$$n_m = n_{air} = 1$$

$\rightarrow$

$$\frac{1}{s_{o1}} + \frac{1}{s_{i2}} = (n_l - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\lim_{s_o \rightarrow \infty} s_{i2} = f_i$$

for thin lens:  $f_{i2} = f_{o1}$

$$\lim_{s_i \rightarrow \infty} s_{o1} = f_o$$

$\rightarrow$

$$\frac{1}{s_{o1}} + \frac{1}{s_{i2}} = \frac{1}{f} = (n_l - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

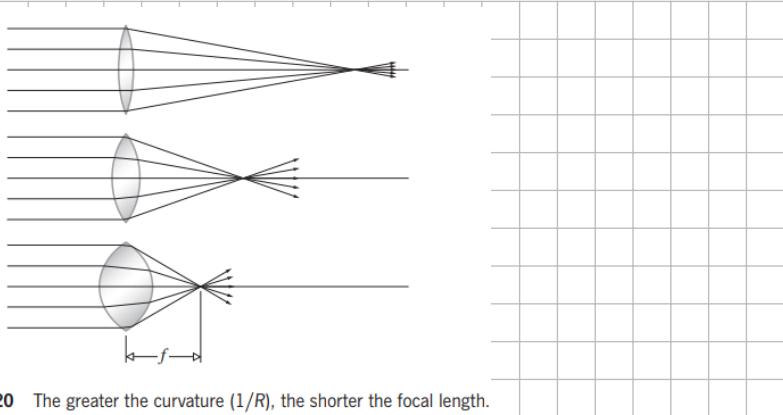
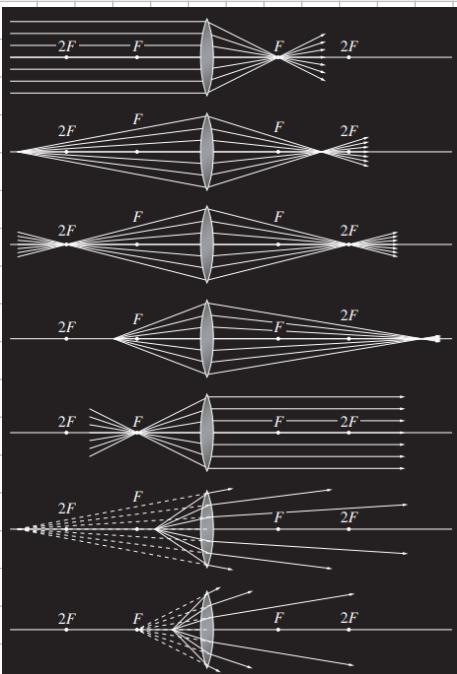


Figure 5.20 The greater the curvature ( $1/R$ ), the shorter the focal length.

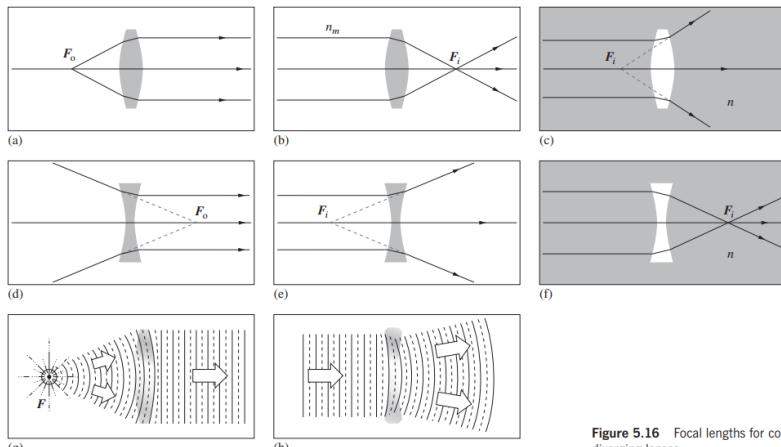


Figure 5.16 Focal lengths for converging and diverging lenses.

### Lentes convergentes:

- Tienen al menos una superficie **convexa** (curvada hacia afuera).
- Ejemplos comunes:
  - Biconvexa:** Ambas superficies son convexas.
  - Plano-convexa:** Una superficie es convexa y la otra es plana.
  - Menisco convergente:** Una superficie es convexa y la otra es cóncava, pero la convexa tiene una curvatura más pronunciada.

### Lentes divergentes:

- Tienen al menos una superficie **cóncava** (curvada hacia adentro).
- Ejemplos comunes:
  - Bicóncava:** Ambas superficies son cóncavas.
  - Plano-cóncava:** Una superficie es cóncava y la otra es plana.
  - Menisco divergente:** Una superficie es cóncava y la otra es convexa, pero la cóncava tiene una curvatura más pronunciada.

Para

$n_L > n_m$

### 5. Resumen de comportamiento:

Tipo de lente	$n_{lente} > n_{medio}$	$n_{lente} < n_{medio}$
<b>Biconvexa</b>	Convergente	Divergente
<b>Bicóncava</b>	Divergente	Convergente
<b>Plano-convexa</b>	Convergente	Divergente
<b>Plano-cóncava</b>	Divergente	Convergente

La potencia de una lente (inversa de la distancia focal,  $P = \frac{1}{f}$ ) se calcula mediante la **fórmula del fabricante de lentes**:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Donde:

- $n_{lente}$ : Índice de refracción del material de la lente.
- $n_{medio}$ : Índice de refracción del medio que rodea la lente.
- $R_1$  y  $R_2$ : Radios de curvatura de las dos superficies de la lente.
  - $R$  es positivo si la superficie es convexa hacia el medio incidente.
  - $R$  es negativo si la superficie es cóncava hacia el medio incidente.
- Si  $f$  es positivo, la lente es **convergente**.
- Si  $f$  es negativo, la lente es **divergente**.

y sólo para  
 $n_L > n_m$

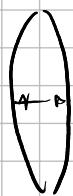
Donde:

- $n$ : Índice de refracción del material de la lente.
- $R_1$  y  $R_2$ : Radios de curvatura de las dos superficies de la lente.
  - $R$  es positivo si la superficie es convexa.
  - $R$  es negativo si la superficie es cóncava.
  - $R$  es infinito si la superficie es plana.
- Si  $f$  es positivo, la lente es **convergente**.
- Si  $f$  es negativo, la lente es **divergente**.

y sólo para  
 $n_L > n_{air}$

$$\frac{1}{f'} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Convergente:



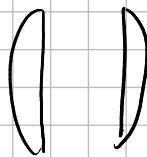
$$R_1 > 0, R_2 < 0$$

$$R_1 > 0, R_2 \rightarrow \infty$$

$$R_1 \rightarrow \infty, R_2 < 0$$

$$R_1, R_2 > 0; R_1 < R_2$$

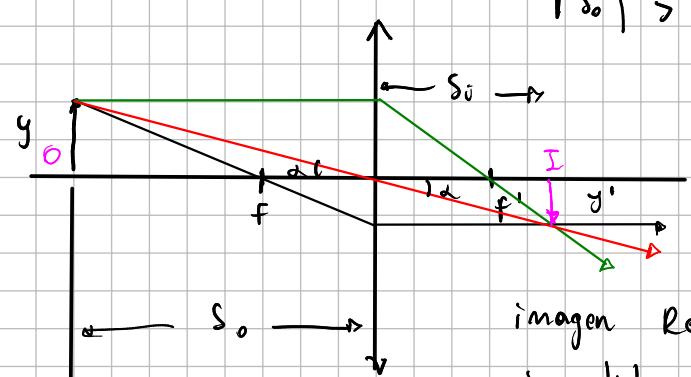
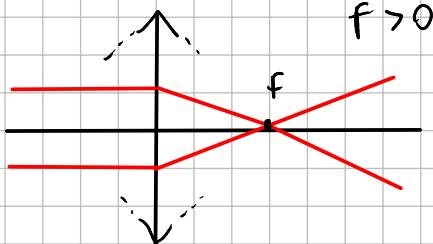
$$R_1, R_2 < 0; |R_1| < |R_2|$$



Más Ancha en el centro

Plano-convex

menisco convergente



$$t_{\text{ancl}} = \frac{y}{s_o}$$

$$t_{\text{ancl}} = \frac{y'}{s'_i}$$

$$f > 0$$

$$y' = \frac{s_i y}{s_o} \rightarrow$$

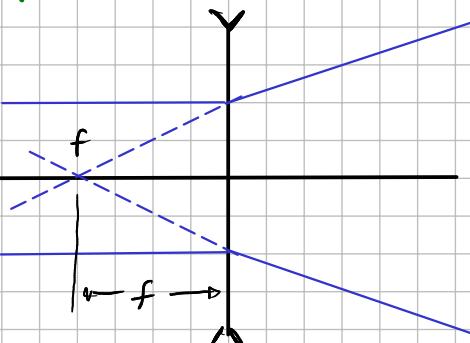
$$|s_i| > 2f'$$

Imagen Real

Invertida reducida

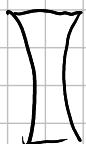
$$M_L = -\frac{s_i}{s_o}$$

Divergente:



$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s'_i} = \frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\times R_1 < 0 \quad R > 0$$



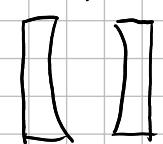
Biconvex

$$R_1 \rightarrow \infty, R_2 > 0$$

$$R_1 < 0, R_2 \rightarrow \infty$$

$$\times R_1, R_2 > 0 \quad R_1 > R_2$$

$$R_1, R_2 < 0, R_1 > R_2$$



Plano concava



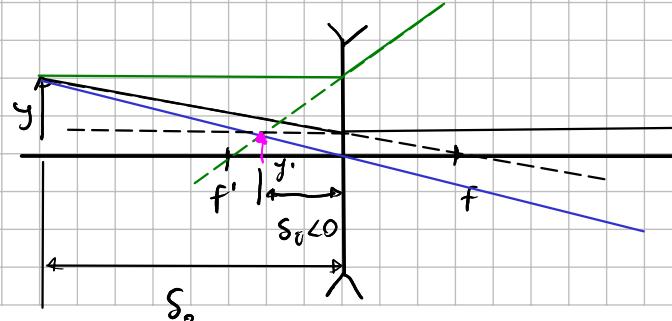
Menisco



Divergente

Anchas en los extremos

Extremos



- \* Imagen Virtual
- \* Imagen Reducida
- \* Imagen Derecha

$$M_L = -\frac{s'_i}{s_o}$$

**TABLE 5.2 Meanings Associated with the Signs of Various Thin Lens and Spherical Interface Parameters**

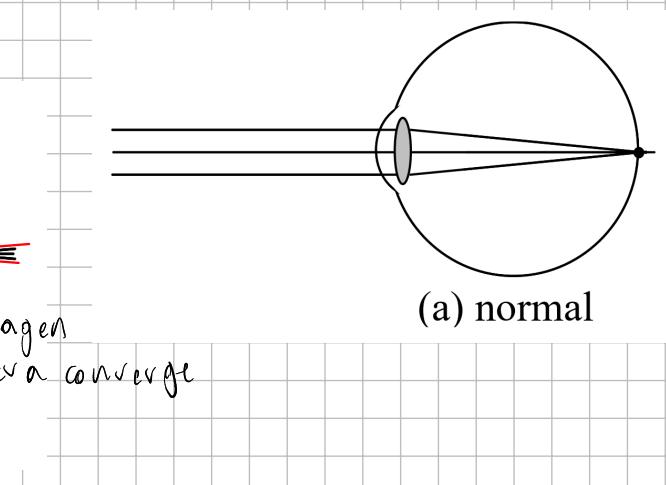
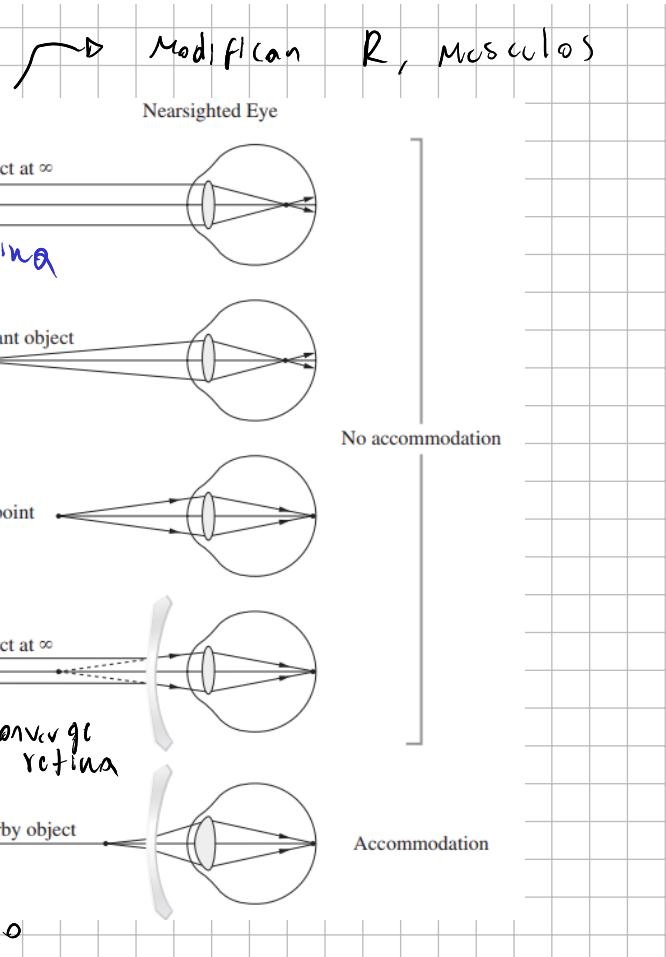
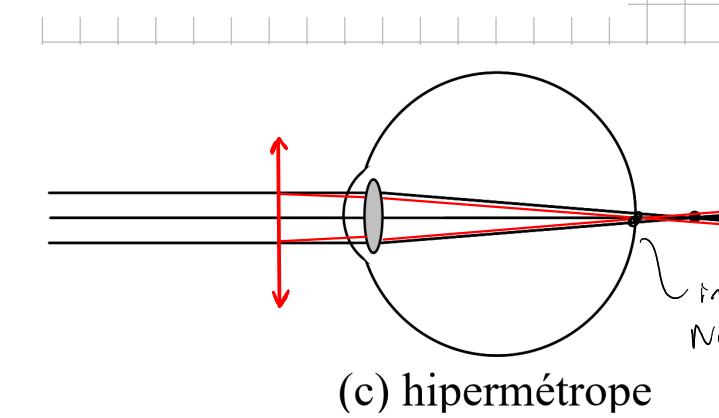
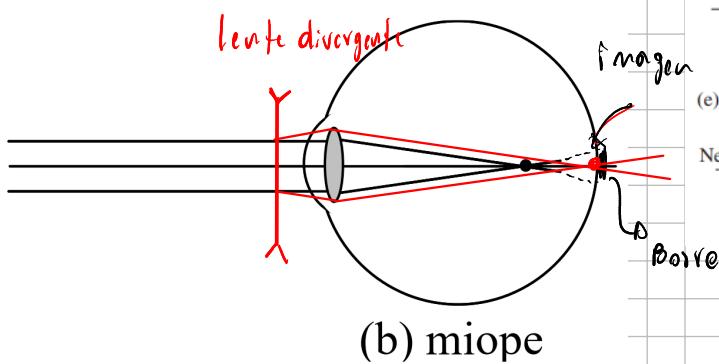
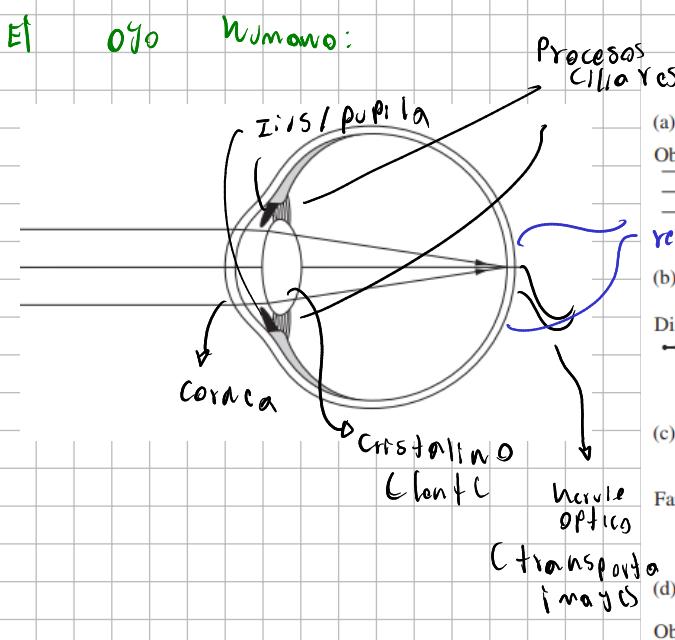
Quantity	Sign	
	+	-
$s_o$	Real object	Virtual object
$s_i$	Real image	Virtual image
$f$	Converging lens	Diverging lens
$y_o$	Erect object	Inverted object
$y_i$	Erect image	Inverted image
$M_T$	Erect image	Inverted image

**TABLE 5.3 Images of Real Objects Formed by Thin Lenses**

Convex				
Object	Image			
Location	Type	Location	Orientation	Relative Size
$\infty > s_o > 2f$	Real	$f < s_i < 2f$	Inverted	Minified
$s_o = 2f$	Real	$s_i = 2f$	Inverted	Same size
$f < s_o < 2f$	Real	$\infty > s_i > 2f$	Inverted	Magnified
$s_o = f$		$\pm \infty$		
$s_o < f$	Virtual	$ s_i  > s_o$	Erect	Magnified

Concave				
Object	Image			
Location	Type	Location	Orientation	Relative Size
Anywhere	Virtual	$ s_i  <  f $ ,	Erect	Minified



# Thick lenses and lens systems

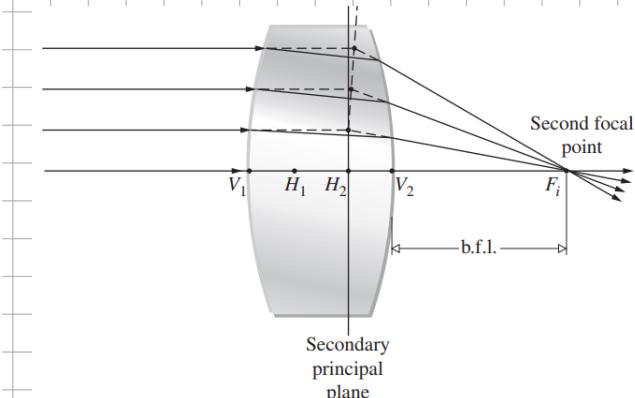
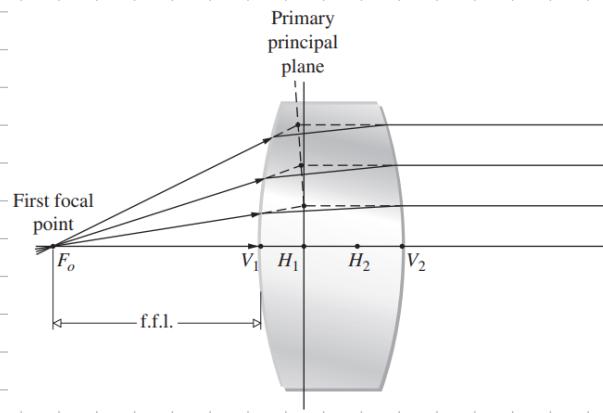
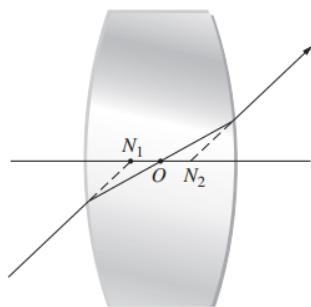


Figure 6.2 Nodal points.



— los 6 puntos principales: dos focales, los nodales y los cardinales

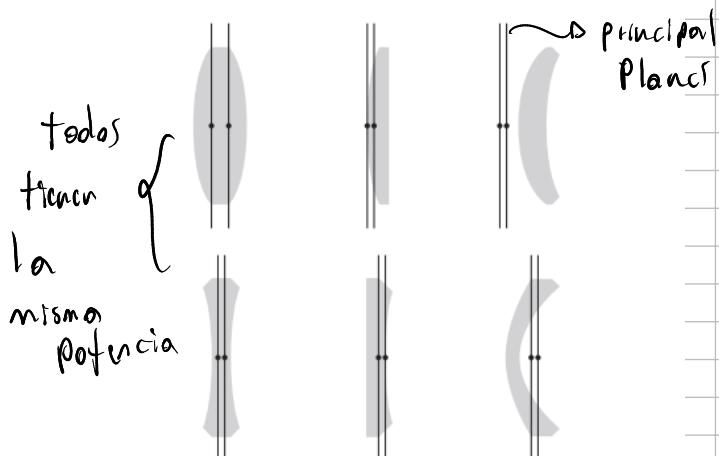


Figure 6.3 Lens bending.

$$\frac{1}{f} = (n_2 - 1) \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n_2 - 1)d_x}{n_2 R_1 R_2} \right]$$

$$\sqrt{V_1 H_1} = h_1 \quad Y \quad \sqrt{V_2 H_2} = h_2$$

- Un rayo atravesando una lente por su centro óptico emerge paralelo a su dirección
- Cuando la lente está rodeada a ambos lados por el mismo medio, los puestos nodales coinciden con los principales ( $H_1$  y  $H_2$ )

Regla del oro:

$$\frac{1}{H_1 H_2} = \frac{1}{3} \sqrt{V_1 V_2}$$

$$\frac{1}{S_o} + \frac{1}{S_i} = \frac{1}{f}$$

Si medido desde el primer plano principal

Si medido desde el segundo plano principal

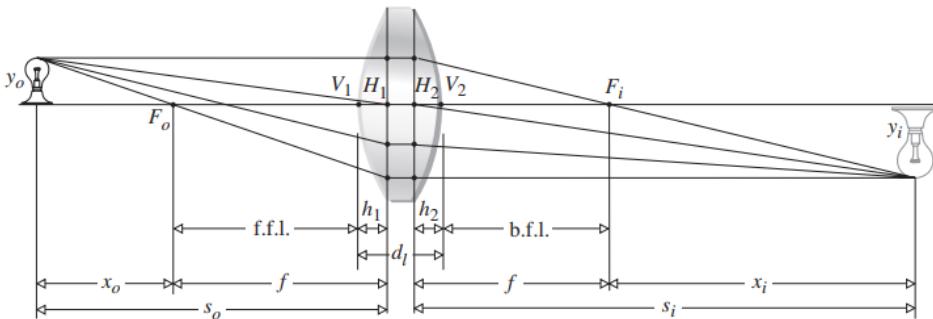
→ distancias positivas  
si los planos recalan a la derecha de sus respectivos vértices

$$h_1 = -\frac{f(n_o - 1) d_o}{R n_a}$$

$$w_2 = -\frac{f(n_a - 1) d_o}{R n_t}$$

$$\chi_o \chi_i = f^2$$

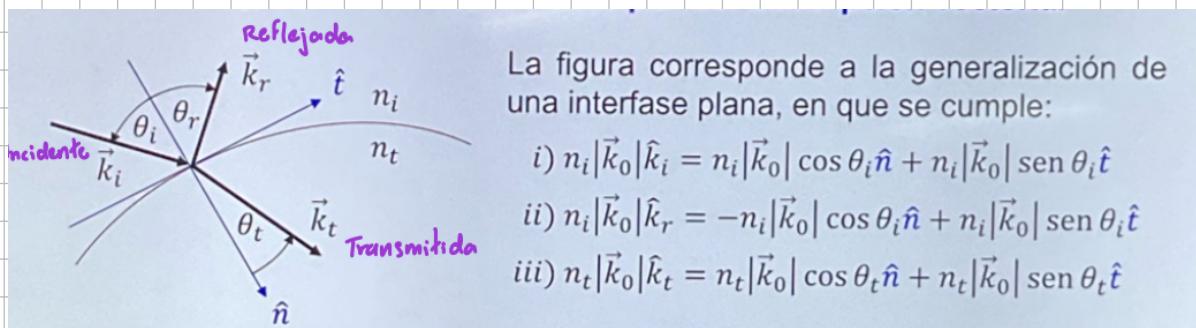
$$M_T = \frac{y_i}{y_o} = -\frac{\chi_i}{f} = -\frac{f}{\chi_o}$$



### Analytical ray tracing

- Ecación de refracción:  $n_i (\hat{k}_i \times \hat{n}) = n_t (\hat{k}_t \times \hat{n})$

Descripción vectorial o la óptica geométrica:



Simplificando términos, combinando con i) para eliminar la componente  $\hat{t}$  y usando ley de Snell para la onda transmitida:

Descripción vectorial de la óptica geométrica

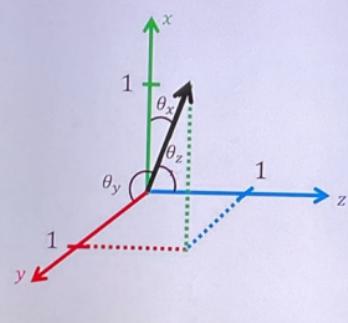
- $n_i \hat{k}_i = n_i \cos \theta_i \hat{n} + n_i \sin \theta_i \hat{t}$
- $\hat{k}_r = \hat{k}_i - 2 \cos \theta_i \hat{n}$
- $n_t \hat{k}_t = n_i \hat{k}_i + (n_t \cos \theta_t - n_i \cos \theta_i) \hat{n}$

→ En términos de  $\hat{x}_i$  y  $\hat{n}$ .

#### B. Reflexión, refracción y traslación en superficie esféricas

La mayoría de las operaciones de sistemas ópticos formadores de imágenes son realizadas por secciones de esferas. Las imágenes resultantes son, necesariamente, una aproximación.

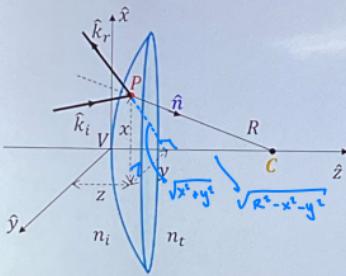
Aquí se aplica el concepto de los cosenos directores de un vector unitario:



$$\begin{cases} \alpha = \cos \theta_x = \frac{x}{|\vec{V}|} \\ \beta = \cos \theta_y = \frac{y}{|\vec{V}|} \\ \gamma = \cos \theta_z = \frac{z}{|\vec{V}|} \end{cases}, \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

$$\begin{cases} \hat{k}_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \\ \hat{k}_r = (\alpha_r, \beta_r, \gamma_r) \\ \hat{k}_t = (\alpha_t, \beta_t, \gamma_t) \end{cases}$$

### a. Reflexión en superficies esféricas:



De la figura:

i) Superficie esférica de radio  $R$  centrada en  $C = (0,0,R)$

ii) Reflexión en el punto ubicado en:

$$P = (x, y, R - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})$$

De aquí se desprende que:

$$\hat{n} = \frac{C - P}{R} = \left( -\frac{x}{R}, -\frac{y}{R}, \frac{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}{R} \right)$$

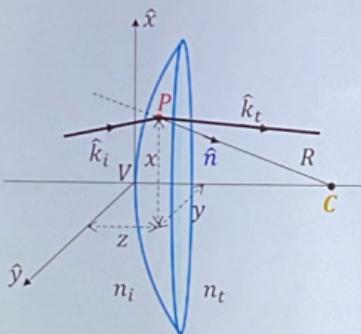
$$\text{Como } \begin{cases} \hat{k}_r = \hat{k}_i - 2 \cos \theta_i \hat{n} \\ \hat{k}_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \\ \hat{k}_r = (\alpha_r, \beta_r, \gamma_r) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \alpha_r = \alpha_i + \frac{2 \cos \theta_i}{R} x \\ \beta_r = \beta_i + \frac{2 \cos \theta_i}{R} y \\ \gamma_r = \gamma_i - \frac{2 \cos \theta_i}{R} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

En  $P$  se cumple:  $\begin{cases} x_r = x_i \\ y_r = y_i \end{cases}$

### b. Refracción en superficies esféricas:



De la figura:

i)  $C = (0,0,R)$

ii) Refracción en:

$$P = (x, y, R - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})$$

$$iii) \hat{n} = \frac{C - P}{R} = \left( -\frac{x}{R}, -\frac{y}{R}, \frac{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}{R} \right)$$

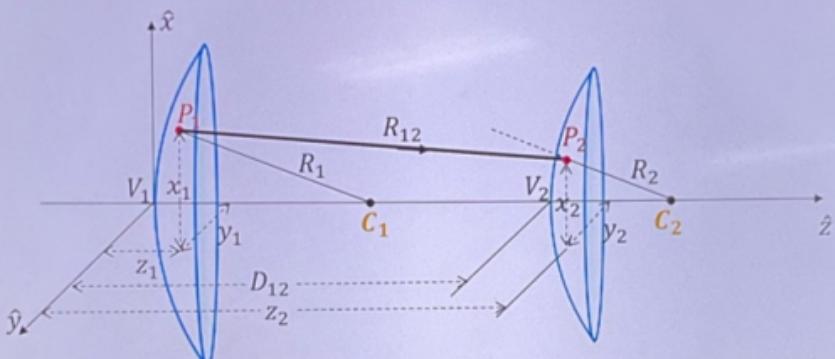
$$\text{Como } \begin{cases} n_t \hat{k}_t = n_i \hat{k}_i + (n_t \cos \theta_t - n_i \cos \theta_i) \hat{n} \\ \hat{k}_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \\ \hat{k}_t = (\alpha_t, \beta_t, \gamma_t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} n_t \alpha_t = n_i \alpha_i - \left[ \frac{n_t \cos \theta_t - n_i \cos \theta_i}{R} \right] x \\ n_t \beta_t = n_i \beta_i - \left[ \frac{n_t \cos \theta_t - n_i \cos \theta_i}{R} \right] y \\ n_t \gamma_t = n_i \gamma_i + \left[ \frac{n_t \cos \theta_t - n_i \cos \theta_i}{R} \right] \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

En  $P$  se cumple:

$$\begin{cases} x_t = x_i \\ y_t = y_i \end{cases}$$

### c. Traslación entre superficies esféricas:



De la figura:  $\begin{cases} P_1 = (x_1, y_1, R_1 - \sqrt{R_1^2 - x_1^2 - y_1^2}), P_2 = (x_2, y_2, R_2 - \sqrt{R_2^2 - x_2^2 - y_2^2}) \\ \hat{k}_{t1} = (\alpha_{t1}, \beta_{t1}, \gamma_{t1}), \hat{k}_{t2} = (\alpha_{t2}, \beta_{t2}, \gamma_{t2}) \end{cases}$

En  $P_2$  se cumple:  $\alpha_{t2} = \alpha_{t1}, \beta_{t2} = \beta_{t1}$

$$R_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + [D_{12} + R_2 - R_1 - \sqrt{R_2^2 - x_2^2 - y_2^2} + \sqrt{R_1^2 - x_1^2 - y_1^2}]^2$$

La traslación corresponde a:  $P_2 = P_1 + R_{12} \hat{k}_{t1} \rightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 + R_{12} \alpha_{t1} \\ y_2 = y_1 + R_{12} \beta_{t1} \end{cases}$

### d. Óptica paraxial:

La representación vectorial de la óptica geométrica es exacta, pero tiene poco significado físico. Para lograr una interpretación simple, se usa la aproximación paraxial. Para ello, los ángulos  $\theta_i$  y  $\theta_t$  se consideran pequeños y que se pueden desacoplar los planos  $xz$  y  $yz$ , con ello:

#### 1. Reflexión:

$$\alpha_r = \alpha_i + \frac{2 \cos \theta_i}{R} x \approx 1 \text{ para } \theta_i \text{ pequeño.}$$

$$\beta_r = \beta_i + \frac{2 \cos \theta_i}{R} y$$

$$\gamma_r = \gamma_i - \frac{2 \cos \theta_i}{R} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$x_r = x_i$$

$$y_r = y_i$$

$$\alpha_r = \alpha_i + \frac{2}{R} x$$

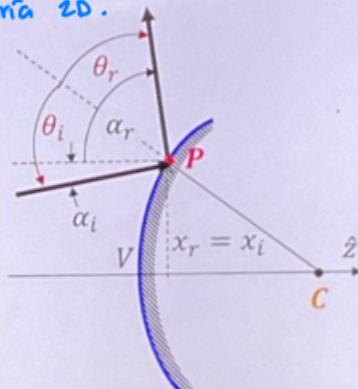
$$\beta_r = \beta_i + \frac{2}{R} y$$

$$\gamma_r = \gamma_i - \frac{2}{R} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$x_r = x_i$$

$$y_r = y_i$$

Se simplifica a una geometría 2D.



Ecuaciones plano xz:

$$\alpha_r = \alpha_i + \frac{2}{R} x$$

$$x_r = x_i = x$$

Nota:

$$\alpha = \cos \theta_x = \sin \theta_z \approx \theta_z$$

#### 2. Refracción:

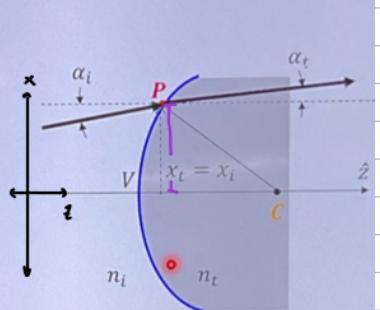
$$n_t \alpha_t = n_i \alpha_i - \left[ \frac{n_t \cos \theta_t - n_i \cos \theta_i}{R} \right] x$$

$$n_t \beta_t = n_i \beta_i - \left[ \frac{n_t \cos \theta_t - n_i \cos \theta_i}{R} \right] y$$

$$n_t \gamma_t = n_i \gamma_i + \left[ \frac{n_t \cos \theta_t - n_i \cos \theta_i}{R} \right] \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$x_t = x_i$$

$$y_t = y_i$$



$$n_t \alpha_t = n_i \alpha_i - \left[ \frac{n_t - n_i}{R} \right] x$$

$$n_t \beta_t = n_i \beta_i - \left[ \frac{n_t - n_i}{R} \right] y$$

$$n_t \gamma_t = n_i \gamma_i + \left[ \frac{n_t - n_i}{R} \right] \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$x_t = x_i$$

$$y_t = y_i$$

Ecuaciones plano xz:

$$n_t \alpha_t = n_i \alpha_i - \left[ \frac{n_t - n_i}{R} \right] x$$

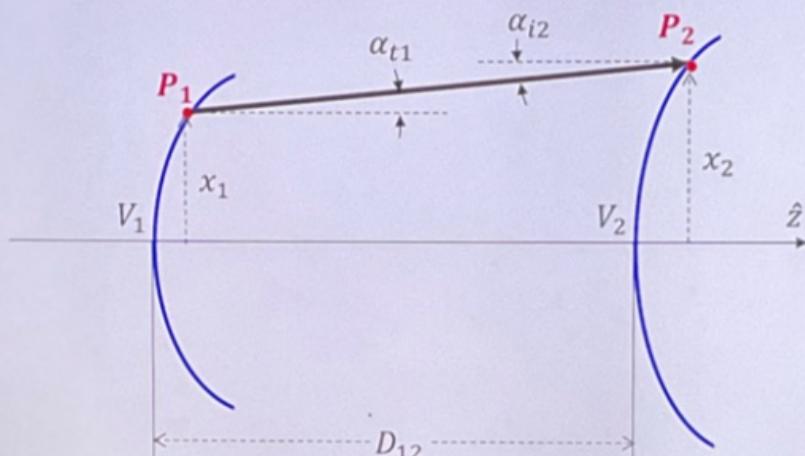
$$x_t = x_i$$

#### 3. Traslación:

$$\begin{aligned} \alpha_{i2} &= \alpha_{t1} \\ \beta_{i2} &= \beta_{t1} \quad \text{Aprox D}_{12} \\ x_2 &= x_1 + R_{12} \alpha_{t1} \\ y_2 &= y_1 + R_{12} \beta_{t1} \end{aligned}$$

Ecuaciones plano xz:

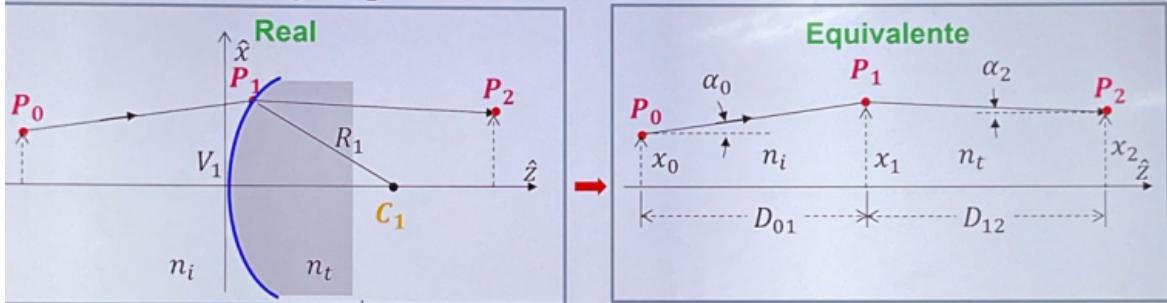
$$\begin{aligned} \alpha_{i2} &= \alpha_{t1} \\ x_2 &= x_1 + D_{12} \alpha_{t1} \end{aligned}$$



### 2.3. COMPONENTES ÓPTICAS

#### a. Dioptrio (Superficie Refractora Esférica - SRE):

Se transforma un punto objeto  $P_0$  en el lado incidente de un dioptrio en un punto imagen  $P_2$  en el medio de transmisión:



$$T_{01} = \begin{cases} x_1 = x_0 + D_{01}\alpha_0 \\ \alpha_1 = \alpha_0 \end{cases} \quad R_{a1} = \begin{cases} x_{t1} = x_{i1} = x_1 \rightarrow \text{No cambia} \\ \alpha_{t1} = \frac{n_i}{n_t}\alpha_1 + \frac{n_i - n_t}{n_t R_1}x_1 \end{cases} \quad T_{12} = \begin{cases} x_2 = x_{t1} + D_{12}\alpha_{t1} \\ \alpha_2 = \alpha_{t1} \end{cases}$$

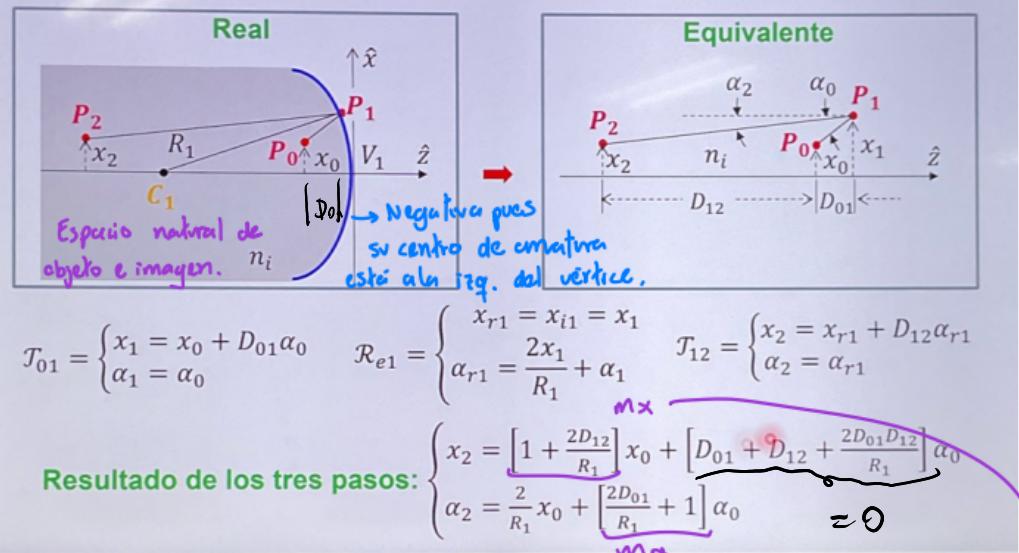
$\hookrightarrow$  Traslación de  $0 \rightarrow 1$

Resultado de los tres pasos:  $\begin{cases} x_2 = \left[ \frac{(n_i - n_t)D_{12}}{n_t R_1} + 1 \right] x_0 + \left[ D_{01} + \frac{n_i}{n_t}D_{12} + \frac{(n_i - n_t)D_{01}D_{12}}{n_t R_1} \right] \alpha_0 \\ \alpha_2 = \left[ \frac{n_i - n_t}{n_t R_1} \right] x_0 + \left[ \frac{n_i}{n_t} + \frac{(n_i - n_t)D_{01}}{n_t R_1} \right] \alpha_0 \end{cases} = 0$

•  $P_2$  es la imagen de  $P_0$  si sin importar  $\alpha_0$ , el rayo llega a  $P_2$ .  
Esto quiere decir que  $x_2$  no depende de  $x_0$ , luego  $= 0$ .

#### b. Espejos:

Se transforma un punto objeto  $P_0$  en el lado incidente de un dioptrio en un punto imagen  $P_2$  en el medio de transmisión:



$$T_{01} = \begin{cases} x_1 = x_0 + D_{01}\alpha_0 \\ \alpha_1 = \alpha_0 \end{cases} \quad R_{e1} = \begin{cases} x_{r1} = x_{i1} = x_1 \\ \alpha_{r1} = \frac{2x_1}{R_1} + \alpha_1 \end{cases} \quad T_{12} = \begin{cases} x_2 = x_{r1} + D_{12}\alpha_{r1} \\ \alpha_2 = \alpha_{r1} \end{cases}$$

Resultado de los tres pasos:  $\begin{cases} x_2 = \left[ 1 + \frac{2D_{12}}{R_1} \right] x_0 + \left[ D_{01} + D_{12} + \frac{2D_{01}D_{12}}{R_1} \right] \alpha_0 \\ \alpha_2 = \frac{2}{R_1} x_0 + \left[ \frac{2D_{01}}{R_1} + 1 \right] \alpha_0 \end{cases} \approx 0$

## Método matricial:

$$P \equiv \frac{n_t - n_i}{R} = \text{Poder de la interfase}$$

### 1. Refracción:

Ya se estableció que:

$$\begin{cases} n_t \alpha_t = n_i \alpha_i - \left[ \frac{n_t - n_i}{R} \right] x \\ x_t = x_i \end{cases} \quad \text{siendo } P \equiv \frac{n_t - n_i}{R} = \text{Poder de la interfase}$$

$$\rightarrow r_t = \begin{pmatrix} n_t \alpha_t \\ x_t \end{pmatrix}, r_i = \begin{pmatrix} n_i \alpha_i \\ x_i \end{pmatrix} \Rightarrow r_t = R_a r_i, R_a = \begin{pmatrix} 1 & -P \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En algunos textos  $\vec{r}_t = \begin{pmatrix} x_t \\ \alpha_t \end{pmatrix}; \vec{r}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ \alpha_i \end{pmatrix}$

### 2. Reflexión:

Ya se estableció que:  $\begin{cases} \alpha_r = \alpha_i + \frac{2}{R} x \\ x_r = x_i \end{cases}$

No hay  $n_r$  porque no existe el rayo transmitido  $\rightarrow r_r = \begin{pmatrix} n_r \alpha_r \\ x_r \end{pmatrix}, r_i = \begin{pmatrix} n_i \alpha_i \\ x_i \end{pmatrix} \Rightarrow r_i = R_e r_r, R_e = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2n_i}{R} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$Y_r = \begin{pmatrix} n_r \alpha_r \\ x_r \end{pmatrix}, Y_i = \begin{pmatrix} n_i \alpha_i \\ x_i \end{pmatrix}$$

$$Y_o = R_e Y_i, R_e = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2n_i}{R} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

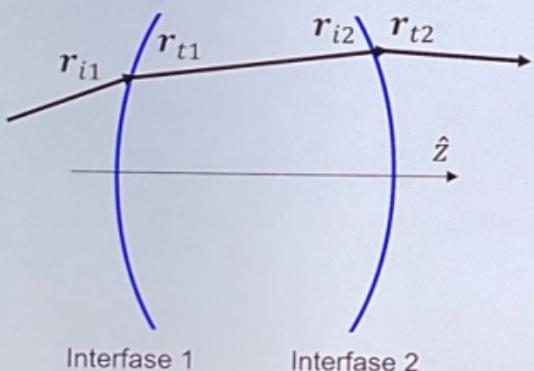
### 3. Traslación:

Ya se estableció que:  $\begin{cases} \alpha_{i2} = \alpha_{t1} \\ x_2 = x_1 + D_{12} \alpha_{t1} \end{cases}$

El índice en la región de traslación  $\rightarrow r_2 = \begin{pmatrix} n_{12} \alpha_{i2} \\ x_2 \end{pmatrix}, r_1 = \begin{pmatrix} n_{12} \alpha_{t1} \\ x_1 \end{pmatrix} \Rightarrow r_2 = T_{12} r_1, T_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ D_{12} & 1 \end{pmatrix}$

$$Y_2 = \begin{pmatrix} n_{12} \alpha_{i2} \\ x_2 \end{pmatrix}, Y_1 = \begin{pmatrix} n_{12} \alpha_{t1} \\ x_1 \end{pmatrix} \Rightarrow Y_2 = T_{12} Y_1, T_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ D_{12} & 1 \end{pmatrix}$$

### 4. Operaciones combinadas:



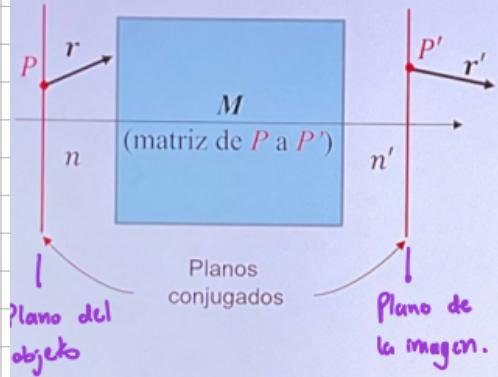
$$r_{i1} \rightarrow r_{t1} \rightarrow r_{i2} \rightarrow r_{t2}$$

$$r_{t2} = \underbrace{R_{a2} T_{12} R_{a1}}_M r_{i1}$$

Note que  $\det(M) = 1$

## 5. Planos conjugados:

El modelo matricial desarrollado implica que los rayos necesariamente se deben identificar dentro del sistema. Sin embargo, el formalismo matricial es más general.



Considere los planos conjugados como la imagen uno del otro:

$$\begin{pmatrix} n'\alpha' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n\alpha \\ x \end{pmatrix}$$

*En formación  $\Rightarrow 0$  m  $\Rightarrow$  Magnificación lateral*

$$\rightarrow \begin{cases} \alpha' = \left[ M_{11} \left( \frac{n}{n'} \right) \right] \alpha + \frac{M_{12}}{n'} x \\ x' = M_{21} n \alpha + M_{22} x \end{cases}$$

*Porque  $x'$  no depende de  $\alpha$ .*

Si  $P$  y  $P'$  son puntos conjugados, cualquier rayo que salga de  $P$  debe llegar a  $P'$  independientemente de  $\alpha$ , con lo cual:

$$M_{21} = 0 \Rightarrow x' = M_{22} x \Rightarrow m_x = \frac{x'}{x} = M_{22}$$

Por otro lado, este mismo análisis es válido para cualquier punto de los planos conjugados, en particular para un punto sobre el eje óptico del sistema que tiene coordenada  $x = 0$ . Con ello, de la ecuación para  $\alpha'$  se encuentra que:

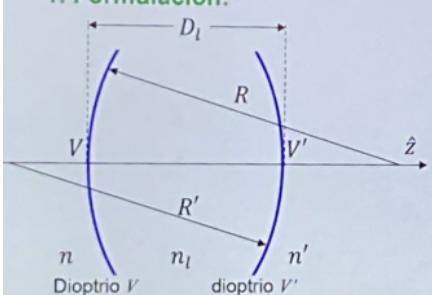
$$\alpha' = \left[ M_{11} \left( \frac{n}{n'} \right) \right] \alpha \Rightarrow m_\alpha = \frac{\Delta \alpha'}{\Delta \alpha} = M_{11} \left( \frac{n}{n'} \right)$$

En conclusión:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{n'}{n} m_\alpha & M_{12} \\ 0 & m_x \end{pmatrix}$$

Evidentemente:  $\det(M) = m_x m_\alpha \left( \frac{n'}{n} \right)$   $\rightarrow$   $nx \Delta \alpha = n' x' \Delta \alpha'$   
 $= 1.$  ○ Ecuación de Lagrange

### 1. Formulación:



$$\begin{aligned} R_{aV} &= \begin{pmatrix} 1 & -P_V \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & n_l: \text{a la derecha} \\ T_{VV'} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{D_l}{n_l} & 1 \end{pmatrix} & \text{del vértice} \\ R_{aV'} &= \begin{pmatrix} 1 & -P_{V'} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{y la izq.} \\ \rightarrow M_{L\text{gruesa}} &= R_{aV'} T_{VV'} R_{aV} = \begin{pmatrix} 1 - \left( \frac{P_{V'} D_l}{n_l} \right) & -P_V - P_{V'} + \left( \frac{P_V P_{V'} D_l}{n_l} \right) \\ \frac{D_l}{n_l} & 1 - \left( \frac{P_V D_l}{n_l} \right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

*Matriz de lente gruesa.*

### 2. Lente delgada:

$$D_l = 0 \Rightarrow M_{L\text{delgada}} = \begin{pmatrix} 1 & -P_{L\text{delgada}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P_{L\text{delgada}} = P_V + P_{V'} = \frac{n_l - n}{R} + \frac{n' - n_l}{R'}$$

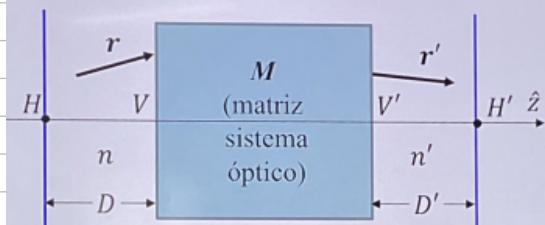
Para el caso de una lente delgada en el aire  $n = n' = 1 \Rightarrow P_{L\text{delgada}} = (n_l - n) \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right)$

*Ecuación del fabricante de lentes*

### C. Planos principales

#### 1. Concepto:

¿Es posible encontrar nuevos planos diferentes a los planos inicial  $V$  y final  $V'$  de un sistema óptico para que la matriz tenga la forma de  $M_{L\text{delgada}}$ ?



De la figura:

$$M_{HH'} = T_{V'H'} M_{VV'} T_{HV} \quad \text{Hacer programa que la calcule para tener la info necesaria para } D, D' \text{ y } P.$$

$$T_{HV} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{D}{n} & 1 \end{pmatrix}, M_{VV'} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix},$$

$$T_{V'H'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{D'}{n'} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow M_{HH'} = \begin{pmatrix} M_{11} + \frac{M_{12}D}{n} & M_{12} \\ \frac{M_{11}D'}{n'} + \frac{M_{12}DD'}{nn'} + M_{21} + \frac{M_{22}D}{n} & M_{22} + \frac{M_{12}D'}{n'} \end{pmatrix}$$

Como lo que se busca es que  $M_{HH'}$  tenga la misma estructura que  $M_{L\text{delgada}}$

$$\rightarrow M_{HH'} = \begin{pmatrix} 1 & -P_{\text{sistema}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así:

$$M_{11} + \frac{M_{12}D}{n} = 1$$

$$\overline{HV} = D = \left( \frac{n}{M_{12}} \right) (1 - M_{11})$$

Ojo:  $D > 0$  si  $H$  está a la izq. de  $V$

$$M_{22} + \frac{M_{12}D'}{n'} = 1$$

$$\overline{V'H'} = D' = \left( \frac{n'}{M_{12}} \right) (1 - M_{22})$$

Ojo:  $D' > 0$  si  $H'$  está a la der. de  $V'$

$$M_{12} = -P_{\text{sistema}}$$

$$\frac{M_{11}D'}{n'} + \frac{M_{12}DD'}{nn'} + M_{21} + \frac{M_{22}D}{n} = 0$$

$$P_{\text{sistema}} = -M_{12} = \frac{nM_{11}}{D} + \frac{n'M_{22}}{D'} + \frac{nn'M_{21}}{DD'}$$

#### Aplicación para lentes:

$$M_{L\text{gruesa}} = \begin{pmatrix} 1 - \left( \frac{P_{V'D_l}}{n_l} \right) & -P_V - P_{V'} + \left( \frac{P_V P_{V'} D_l}{n_l} \right) \\ \frac{D_l}{n_l} & 1 - \left( \frac{P_V D_l}{n_l} \right) \end{pmatrix}$$

$$P_{\text{sistema}} = P_{L\text{gruesa}} = -M_{12} = P_V + P_{V'} - \left( \frac{P_V P_{V'} D_l}{n_l} \right)$$

$$\text{Lente gruesa} \quad D = \left( \frac{n}{M_{12}} \right) (1 - M_{11}) \Rightarrow D = \frac{n}{-\mathcal{P}_{L\text{gruesa}}} \left\{ 1 - \left[ 1 - \left( \frac{P_{V'D_l}}{n_l} \right) \right] \right\} = \frac{n P_{V'D_l}}{-\mathcal{P}_{L\text{gruesa}} n_l}$$

$$D' = \left( \frac{n'}{M_{12}} \right) (1 - M_{22}) \Rightarrow D' = \frac{n'}{-\mathcal{P}_{L\text{gruesa}}} \left\{ 1 - \left[ 1 - \left( \frac{P_V D_l}{n_l} \right) \right] \right\} = \frac{n' P_V D_l}{-\mathcal{P}_{L\text{gruesa}} n_l}$$

$$\text{Observe que: } \overline{HH'} = D_l + D + D' = D_l \left( 1 - \frac{n P_{V'}}{\mathcal{P}_{L\text{gruesa}} n_l} - \frac{n' P_V}{\mathcal{P}_{L\text{gruesa}} n_l} \right)$$

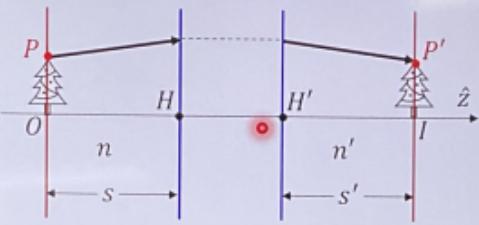
#### Lente delgada:

$$\overline{HH'} = 0$$

$$\text{En el caso de la lente en el aire: } \overline{HH'} = D_l \left( 1 - \frac{P_V P_{V'}}{\mathcal{P}_{L\text{gruesa}} n_l} \right)$$

Planos principales en el centro de la lente

## D. Formación de imágenes



$$\begin{aligned} M_{OI} &= T_{H'I} M_{HH'} T_{OH} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{s'}{n'} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\mathcal{P}_{\text{sis}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{s}{n} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{s}{n} \mathcal{P}_{\text{sis}} & -\mathcal{P}_{\text{sis}} \\ \frac{s'}{n'} + \frac{s}{n} - \frac{ss'}{nn'} \mathcal{P}_{\text{sis}} & 1 - \frac{s'}{n'} \mathcal{P}_{\text{sis}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como esta es una transformación entre planos conjugados:  $M_{OI} = \begin{pmatrix} \frac{n'}{n} m_\alpha & M_{12} \\ 0 & m_x \end{pmatrix}$

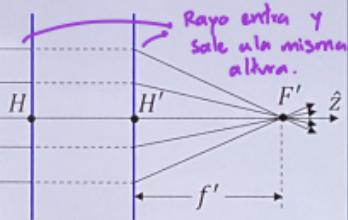
$$\begin{aligned} \frac{s'}{n'} + \frac{s}{n} - \frac{ss'}{nn'} \mathcal{P}_{\text{sis}} &= 0 \rightarrow \frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \mathcal{P}_{\text{sis}} \\ 1 - \frac{s'}{n'} \mathcal{P}_{\text{sis}} &= m_x \\ 1 - \frac{s}{n} \mathcal{P}_{\text{sis}} &= \frac{n'}{n} m_\alpha \end{aligned}$$

*Programar hallar s y luego en eso hallar s', introducir n y n'. Psis ya se calculó como*

12

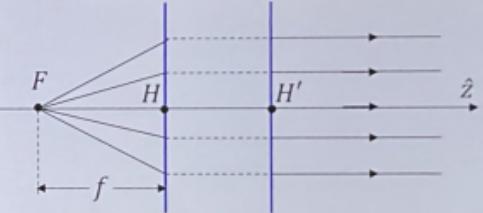
### 1. Análisis:

#### (a) Objeto en el infinito ( $s \rightarrow \infty$ )



$$s' = f' = \frac{n'}{\mathcal{P}_{\text{sis}}}$$

#### (b) Imagen en el infinito ( $s' \rightarrow \infty$ )



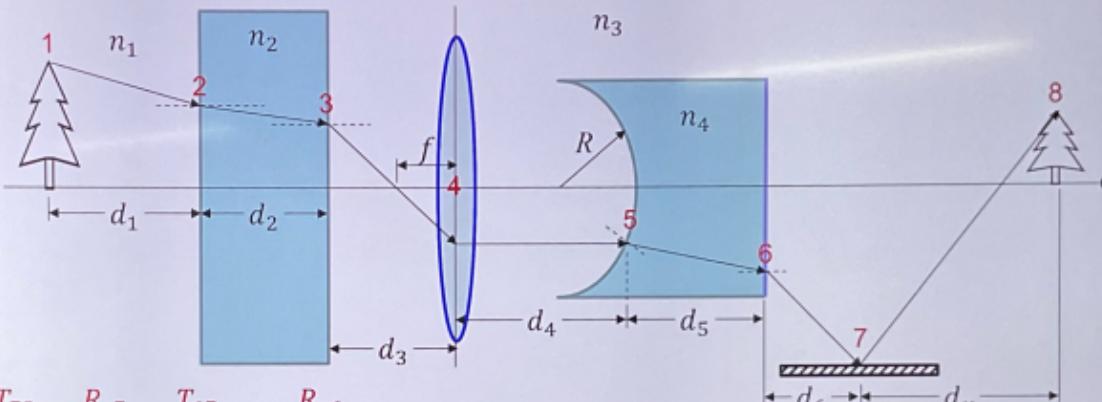
$$s = f = \frac{n}{\mathcal{P}_{\text{sis}}}$$

$$\mathcal{P}_{\text{sis}} = \frac{n}{f} = \frac{n'}{f'}$$

$$(c) \text{ En el caso del sistema óptico en el aire: } \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

## 2.5. SISTEMAS FORMADORES DE IMÁGENES

### A. Caso general hipotético:

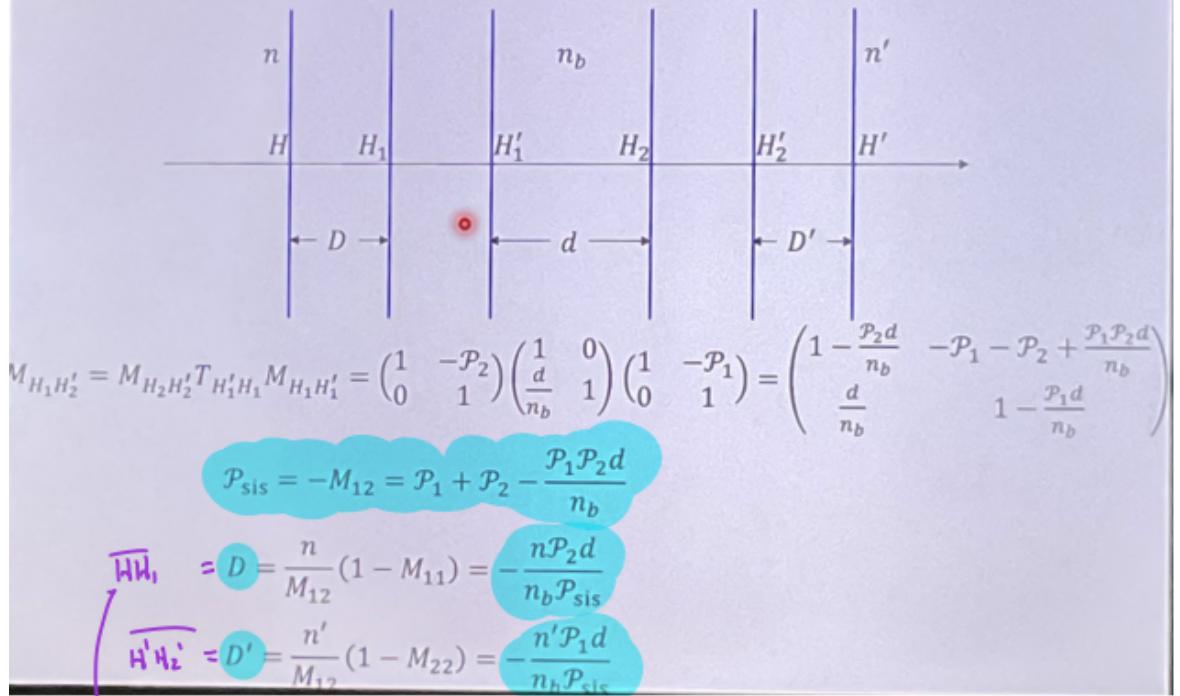


$$T_{78} \quad R_{e7} \quad T_{67} \quad R_{a6}$$

$$\left( \begin{matrix} 1 & 0 \\ \frac{d_x}{n_3} & 1 \end{matrix} \right) \left( \begin{matrix} 1 & \frac{2n_3}{\infty} \\ 0 & 1 \end{matrix} \right) \left( \begin{matrix} 1 & 0 \\ \frac{d_6}{n_3} & 1 \end{matrix} \right) \left( \begin{matrix} 1 & -\frac{n_3 - n_4}{\infty} \\ 0 & 1 \end{matrix} \right)$$

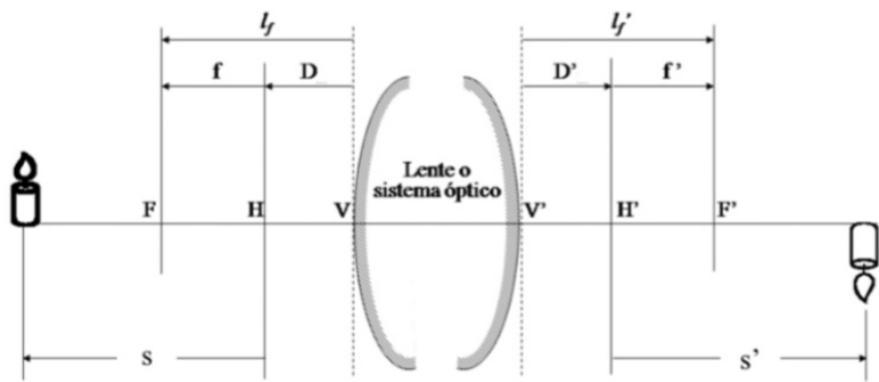
$$\left( \begin{matrix} T_{56} & R_{a5} & T_{45} & M_{L\text{delgada}} & T_{34} & R_{a3} & T_{23} & R_{a2} & T_{12} \\ \left( \begin{matrix} 1 & 0 \\ \frac{d_5}{n_4} & 1 \end{matrix} \right) & \left( \begin{matrix} 1 & -\frac{n_4 - n_3}{-R} \\ 0 & 1 \end{matrix} \right) & \left( \begin{matrix} 1 & 0 \\ \frac{d_4}{n_3} & 1 \end{matrix} \right) & \left( \begin{matrix} 1 & -\frac{n_3}{f} \\ 0 & 1 \end{matrix} \right) & \left( \begin{matrix} 1 & 0 \\ \frac{d_3}{n_3} & 1 \end{matrix} \right) & \left( \begin{matrix} 1 & -\frac{n_3 - n_2}{\infty} \\ 0 & 1 \end{matrix} \right) & \left( \begin{matrix} 1 & 0 \\ \frac{d_2}{n_2} & 1 \end{matrix} \right) & \left( \begin{matrix} 1 & -\frac{n_2 - n_1}{\infty} \\ 0 & 1 \end{matrix} \right) & \left( \begin{matrix} 1 & 0 \\ \frac{d_1}{n_1} & 1 \end{matrix} \right) \end{matrix} \right)$$

## B. Combinación de dos sistemas formadores de imágenes:



En este caso  $H_1$  hace las veces de ~~el~~ vértice del syst.

Nota: Resumen para una lente o sistema óptico:



Conociendo  $x$  y  $D$  se conoce  $s$ . Luego se usa  $\frac{n}{s} \rightarrow \frac{n'}{s'} = P_{\text{sis}}$