



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

Facultad de Ingeniería

**Departamento de Ingeniería Mecánica
Mauricio Ríos Hernández
Transferencia de calor y masa
Trabajo de métodos numéricos: Ecuación del
calor 2D en estado transitorio.**

Docente: Andrés Felipe Colorado Granda.
Juan Pablo Castaño Serna

Presentado por:
Mauricio Ríos Hernández

2023-2

Índice

Índice de figuras	3
Índice de tablas	3
1. Calentamiento de la superficie	4
1.1. Si se utilizan gases calientes a $110^{\circ}C$ con un coeficiente de convección $h = 200W/m^2K$ determine la distribución de temperaturas en la sección de la aleta en función del tiempo. El sistema debe alcanzar el estado estable	8
1.1.1. Ecuación nodos A	11
1.1.2. Ecuación nodos B	12
1.1.3. Ecuación nodos C	12
1.1.4. Ecuación nodos D	12
1.1.5. Ecuación nodos E	12
1.1.6. Ecuación nodos F	13
1.1.7. Ecuación nodos G	13
1.1.8. Ecuación nodos H	13
1.1.9. Ecuación nodos I	13
1.1.10. Ecuación nodos J	13
1.1.11. Ecuación nodos K	14
1.1.12. Ecuación nodos L	14
1.1.13. Ecuación nodo M	14
1.1.14. Ecuación nodos N	14
1.1.15. Ecuación nodo O	14
1.1.16. Ecuación nodo P	14
1.2. ¿Cuánto tiempo se requiere para lograr que la base alcance los $100^{\circ}C$? Determine el calor total absorbido por los 200 cm^3 de aletas durante el calentamiento de la base desde los $15^{\circ}C$ hasta $100^{\circ}C$	17
1.3. ¿Cómo es el comportamiento del arreglo cuando se utiliza agua en lugar de gases? El coeficiente de convección con agua es de $1000W/m^2K$?	17
1.4. Concluya respecto al efecto de la variación de material en el desempeño de la aleta	18
2. Enfriamiento de la superficie	19
2.1. Para el enfriamiento se utiliza aire frío $5^{\circ}C$ con un coeficiente de convección $h = 200W/m^2K$. Determine la distribución de temperaturas en la sección de la aleta en función del tiempo	20
2.2. ¿Cuánto tiempo se requiere para lograr que la base alcance los $15^{\circ}C$?	21
2.3. Concluya respecto al efecto de la variación de material en el desempeño de la aleta	22
2.4. ¿La forma de su aleta se comporta mejor al calentamiento o al enfriamiento? Comente al respecto e indique porque puede estar sucediendo esto.	22
3. Anexos	22
Referencias	23

Índice de figuras

1.	Geometría de la aleta.	4
2.	Simetría y relaciones del problema.	5
3.	η vs t (espesor) para $c = 1$	7
4.	η vs t (espesor) para $c = 5, 7$	7
5.	Arreglo de aletas y disposición en la placa de 10cm x 10 cm.	8
6.	Distribución nodal.	9
7.	Pieza problema.	9
8.	Diagrama de asignación de posiciones de nodos.	10
9.	Diagrama de cada tipo de nodo (1).	10
10.	Diagrama de cada tipo de nodo (2).	11
11.	Distribución de temperatura para diferentes iteraciones.	16
12.	Temperatura promedio vs tiempo.	16
13.	Temperatura promedio vs tiempo para calentamiento con agua.	18
14.	Comparación de tiempo que tardan los diferentes materiales en alcanzar el estado estable.	19
15.	Distribución de temperatura en enfriamiento.	20
16.	Comparación de tiempo que tardan los diferentes materiales en alcanzar el estado estable (enfriamiento).	21

Índice de tablas

1.	Propiedades de materiales relevantes para el problema.	15
2.	τ máximos y t máximos, $[t] = s$	15

1. Calentamiento de la superficie

Notas:

- Tanto en enfriamiento como en calentamiento presentar las gráficas de T vs t donde se identifique que el arreglo ha alcanzado el estado estable.
- Considere la cara frontal y posterior de la aleta en convección, así como los bordes de la aleta que no pertenecen a la base. Considere conducción de calor en 2 dimensiones, es decir, desprecie el espesor de la aleta.
- Presente un informe con donde deduzca cada una de las ecuaciones necesarias para el desarrollo del trabajo (preséntelas de forma simplificada). Además, reporte lo necesario para una buena interpretación de los resultados obtenidos (Tablas, Figuras, etc.)

Se requiere calentar una superficie de cuadrada de 10 cm x 10 cm hasta una temperatura de 100 °C.

Como ingeniero mecánico usted está encargado de diseñar el arreglo de aletas que caliente la superficie de manera más eficiente. Recuerde que la eficiencia de la aleta se obtiene al comparar el desempeño real con el desempeño de una aleta ideal que se encuentra toda a la temperatura de la base. El diseño está restringido porque usted sólo se dispone de 200 cm^3 de material (3 metales: cobre, aluminio y acero AISI 1010) y las formas de las aletas están preestablecidas, pero usted debe determinar su número y tamaño para cumplir con la restricción mencionada. Inicialmente toda la aleta y la base se encuentran a 15 °C.

Geometría del problema:



Figura 1: Geometría de la aleta.

Nota: Para todo el ejercicio se consideran despreciables los efectos de la radiación.

Para hallar la aleta más eficiente se tendrá en cuenta la ecuación de eficiencia de la aleta:

$$\eta = \frac{\dot{Q}_{fin}}{\dot{Q}_{fin,m\acute{a}x}}$$

donde $\dot{Q}_{fin,m\acute{a}x}$ hace referencia a la transferencia de calor en la aleta, para aleta idea (la cual mantiene la temperatura de la base en toda su superficie) y \dot{Q}_{fin} es la transferencia de calor real.

Como la idea es optimizar la aleta según sus propiedades geométricas, se debe obtener una ecuación de la eficiencia en función de algún parámetro geométrico. Para esto, analizando primero la simetría del problema y forma del problema, se puede obtener el perímetro y el área de la sección transversal de la aleta en función del espesor, como se observa en la figura 2

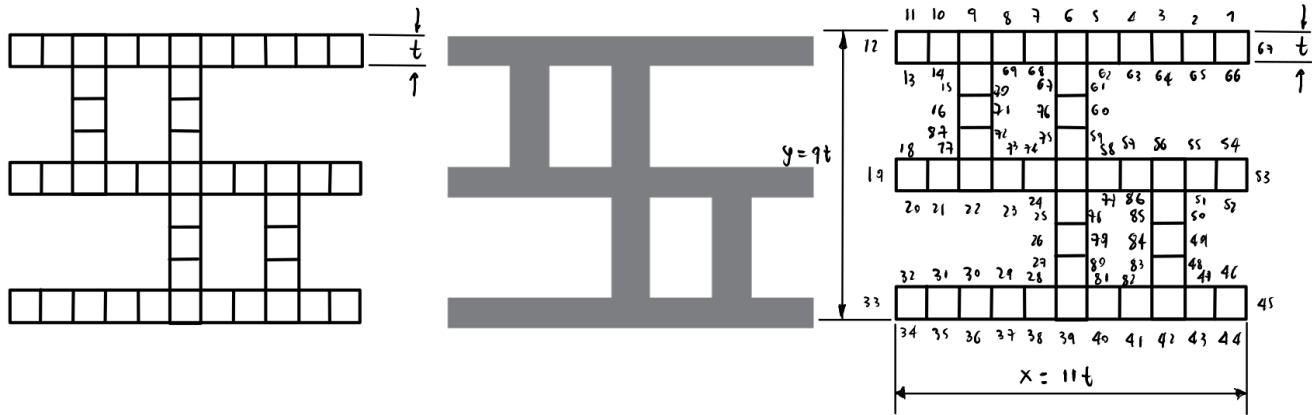


Figura 2: Simetría y relaciones del problema.

Por lo que el área de la sección transversal y el perímetro de aleta se calculan como:

$$P = 87t$$

$$A_c = 3 \times t \times 11t + 4 \times t \times 3t = 45t^2$$

Como lo que se busca es una ecuación de la eficiencia en función del espesor, la longitud de la longitud de la aleta también debe ser puesta en función del espesor. Para eso, se usará como punto de partida la relación longitud espesor de las aletas de un motor de motor de una motor AKT RTX 150 cc, el cual es de 5, pero estos motores necesitan además de buena transferencia de calor, resistencia mecánica, es por esto que esta relación es relativamente baja, en este caso se tomará una relación longitud espesor de 33 (el cual fue determinado con un proceso de diseño iterativo), la cual puede parecer una relación muy alta, pero realmente es razonable si se tiene en cuenta por ejemplo las relación longitud espesor de los disipadores de calor usados en electrónica, por ejemplo el disipador de calor para la BIOS de la tarjeta madre ASRock n73V-S tiene una relación longitud espesor de 21 en sus aletas.). Bajo este supuesto se puede hallar en función del espesor el área superficial de la aleta:

$$L = \alpha t, \alpha = 35$$

$$\rightarrow A_{fin} = L \times P + A_c = \alpha 87t^2 + 45t^2 = 3090t^2$$

Ahora analizando matemáticamente la eficiencia, teniendo en cuenta que se trata de una aleta sometida a convección en su punta. en este caso se tomará la aproximación de punta adiabática con longitud corregida, como se sabe esta aproximación para puntas simétricas a convección en sus puntas no afecta significativamente la precisión de los cálculos, por lo que entonces se tiene que la eficiencia de la aleta se puede escribir como:

$$\eta = \frac{\dot{Q}_{fin}}{\dot{Q}_{fin,m\acute{a}x}} = \frac{\dot{Q}_{fin}}{\dot{Q}_{fin,ideal}}$$

Donde:

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{fin,ideal} &= hA_{fin}(T_b - T_{\infty}) = hA_{fin}\theta_b \\ \dot{Q}_{fin,real} &= M \tanh mL_c\end{aligned}$$

Con:

$$M = \sqrt{hPkA_c\theta_b}, m = \sqrt{\frac{hP}{kA_c}}$$

Donde

- h es el coeficiente por convección.
- k es la conductividad del material
- L_c es la longitud corregida de la aleta
- t es el espesor de la aleta, (no confundir con el tiempo)

$$\begin{aligned}L_c &= L + \frac{A_c}{P} = L + \frac{45t^2}{87t} \\ L_c &= \alpha t + \frac{45t^2}{87t} \cong (35 + 0,52)t \cong 35,52t\end{aligned}$$

Así que:

$$\eta = \frac{M \tanh mL_c}{hA_{fin}(T_b - T_{\infty})} = \frac{\sqrt{hPkA_c\theta_b} \tanh mL_c}{hA_{fin}\theta_b} = \frac{\tanh(mL_c)}{mL_c}$$

Poniendo todo en función del espesor:

$$\begin{aligned}\eta(t) &= \frac{\tanh\left(\sqrt{\frac{h87}{k45t}}L_c\right)}{\sqrt{\frac{h87}{k45t}}L_c} = \frac{\tanh\left(\sqrt{\frac{h87}{k45t}} \times 35,52t\right)}{\sqrt{\frac{h87}{k45t}} \times 33,52t} \\ &= \frac{\tanh\left(\sqrt{\frac{h87}{k45}} \times 35,52t^{1/2}\right)}{\sqrt{\frac{h87}{k45}} \times 35,52t^{1/2}} = \frac{\tanh(ct^{1/2})}{ct^{1/2}} \\ &\rightarrow \eta(t) = \frac{\tanh(ct^{1/2})}{ct^{1/2}}\end{aligned}$$

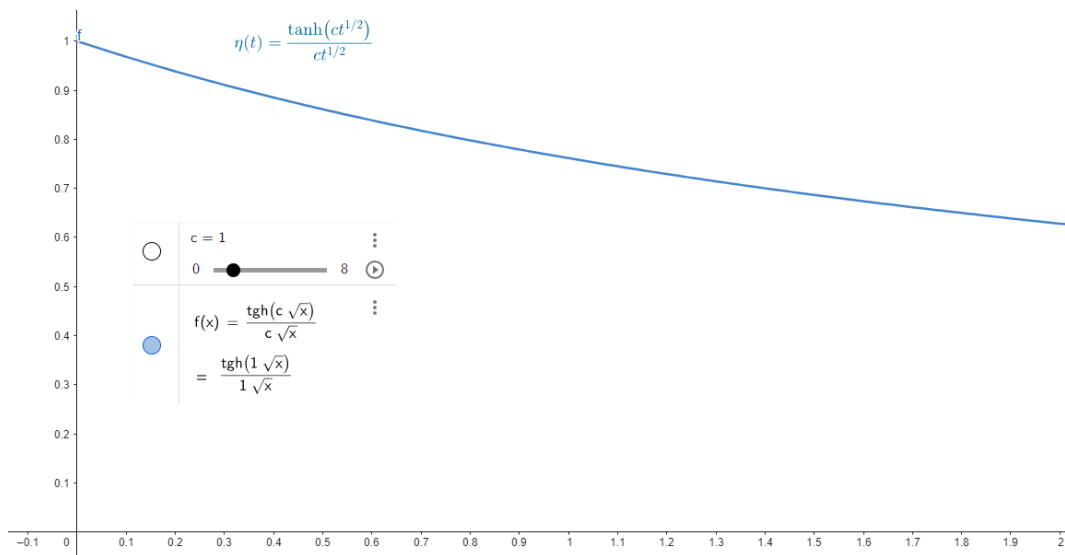
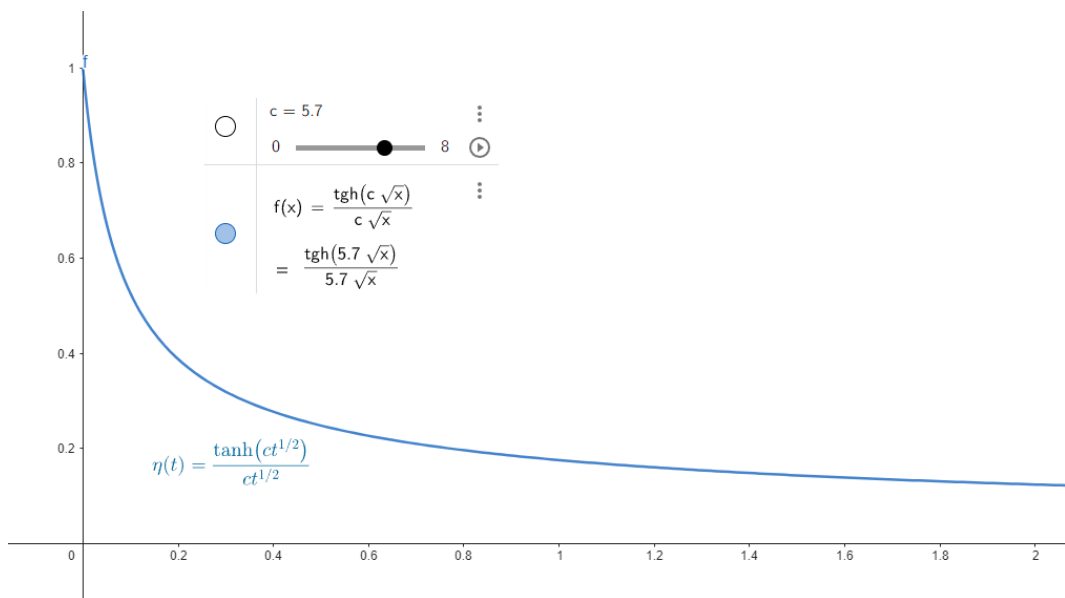
Donde:

$$c = \sqrt{\frac{h}{k}} \sqrt{\frac{87}{45}} \times 35,52$$

Como vemos de la anterior expresión, los máximos y mínimos de la eficiencia no depende de la constante c , lo cual era de esperar pues esta depende es de la relación entre h y k que son propiedades que depende del material y no de su geometría, por lo que optimizar $\eta(t)$ es equivalente a optimizar la función

$$f(t) = \frac{\tanh(t^{1/2})}{t^{1/2}}$$

Usando Geogebra para graficar:

Figura 3: η vs t (espesor) para $c = 1$.Figura 4: η vs t (espesor) para $c = 5,7$.

Lo que se puede concluir de estas dos gráficas, es que η no depende del materia, y que la eficiencia no cuenta con zonas donde la derivada de esta respecto al espesor sea 0, por lo que el valor máximo se alcanzaría cuando $t = 0$, lo cual es físicamente imposible, por lo que se tomará t lo más bajo posible. Lo que nos indican estas gráficas, es que si se busca mayor eficiencia lo que se busca es optimizar el área superficial de la aleta manteniendo el menor espesor posible. Teniendo en cuenta la facilidad para encontrar materiales de estas características y que sean factibles de soldar, por lo que se toma como un espesor apropiado de $1mm$,

Ahora, es posible determinar el volumen de la aleta:

$$V_{fin} = A_c \times L = 45 \times t^2 \times 35 \times t = 1575t^3$$

$$V_{fin} [cm^3] = 1575(0,2)^3 = 12,6cm^3$$

Con esta información y el volumen total disponible se puede determinar el número de aletas, revisando que estas si queden bien dispuestas en la placa de problema de $10cm \times 10 cm$.

$$V_{total} = 200cm^3$$

$$n_{aletas} = \frac{200cm^3}{12,6cm^3} = 15,87 \cong 15$$

Visualizando el sistema en Inventor:

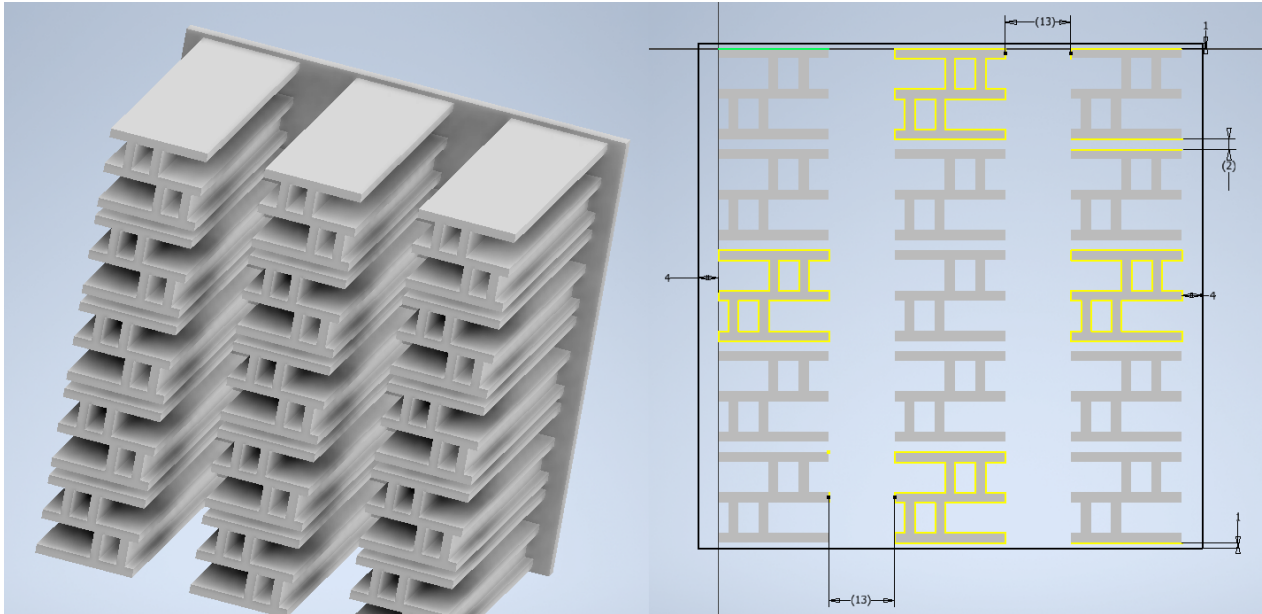


Figura 5: Arreglo de aletas y disposición en la placa de 10cm x 10 cm.

- 1.1. Si se utilizan gases calientes a $110^{\circ}C$ con un coeficiente de convección $h = 200W/m^2K$ determine la distribución de temperaturas en la sección de la aleta en función del tiempo. El sistema debe alcanzar el estado estable**

En este documento se desarrollará paso a paso sólo para el acero 1010, pero se anexará los problemas resueltos para los tres materiales.

Para resolver este problema se debe discretizar el sistema, teniendo en cuenta la distribución nodal y de elementos. Para este caso, teniendo en cuenta la geometría, la distribución nodal se presenta en la figura 6

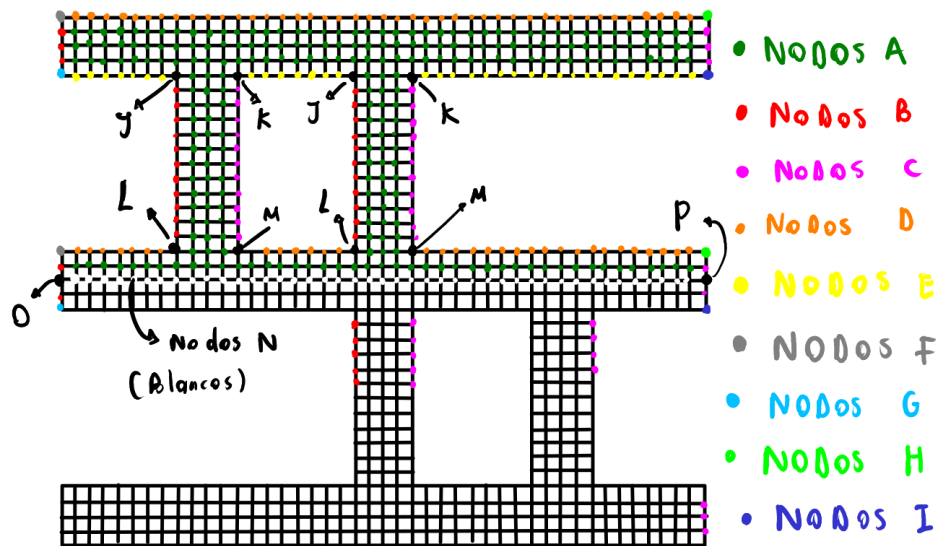


Figura 6: Distribución nodal.

Es importante destacar aquí que el sistema tiene alto nivel de simetría si se toma el centro de la aleta como un origen de coordenadas xy la simetría térmica existe respecto a la recta $y = x$, por lo que basta con realizar el calculo iterativo para la parte superior de la figura y por simetría se puede obtener la distribución de la parte inferior , entonces la pieza a solucionar se enseña en la figura 7. Es decir que las ecuaciones solo se solucionarán para la parte superior del problema y en la parte inferior se asignará simétricamente (ver anexo 1).

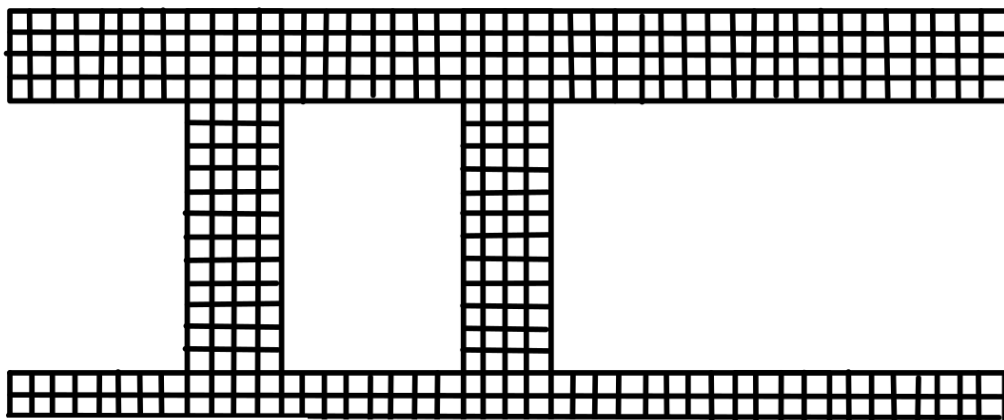


Figura 7: Pieza problem.a

Es importante asignar a cada nodo una posición el cual corresponderá a una posición en una matriz para la posterior solución del problema, esto se puede observar en la figura 8

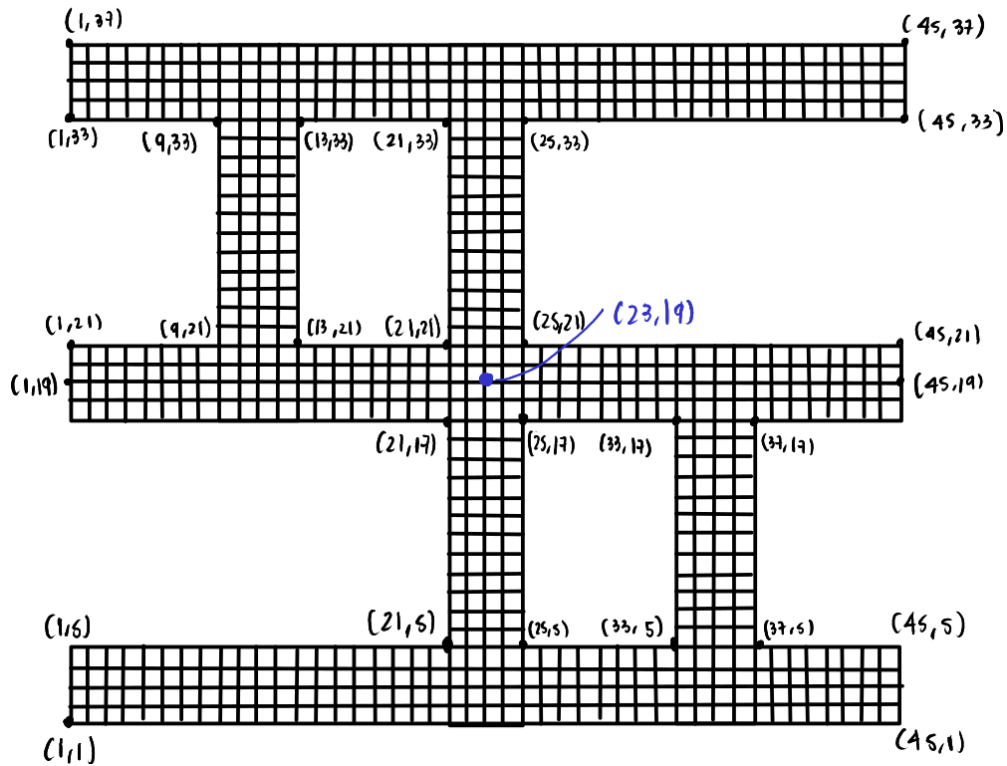


Figura 8: Diagrama de asignación de posiciones de nodos.

En las siguientes figuras se presentan diagramas para cada tipo de nodo que tiene la pieza clasificados según las entradas de color, así como se enseña el elemento asociado al nodo.

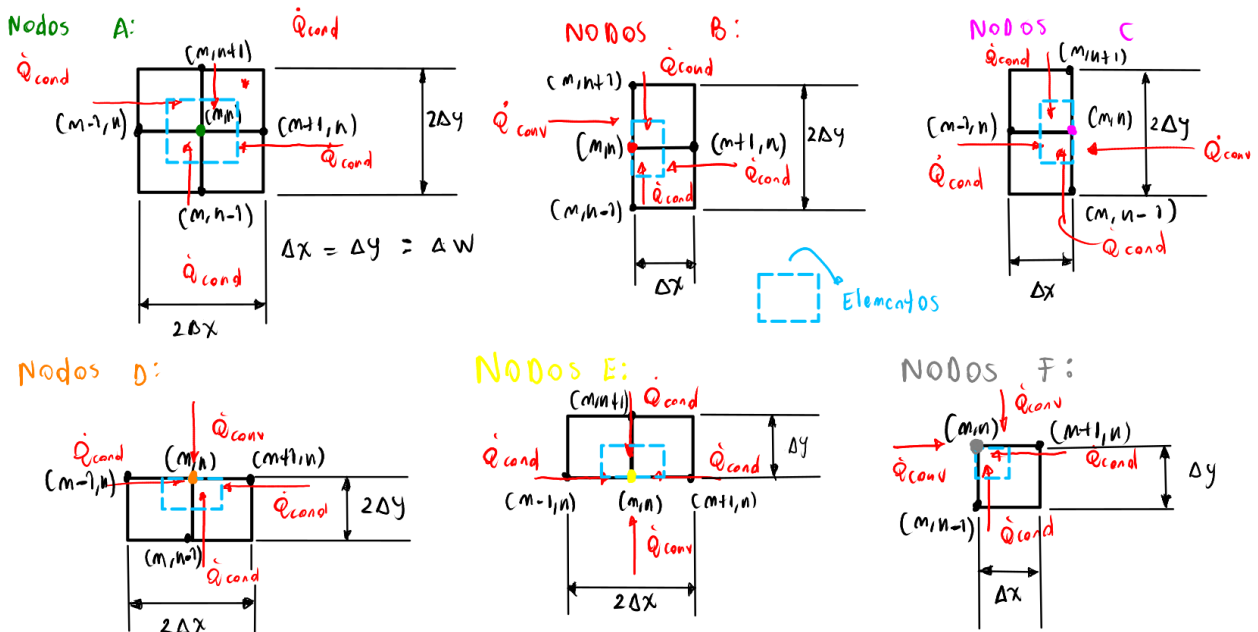


Figura 9: Diagrama de cada tipo de nodo (1).

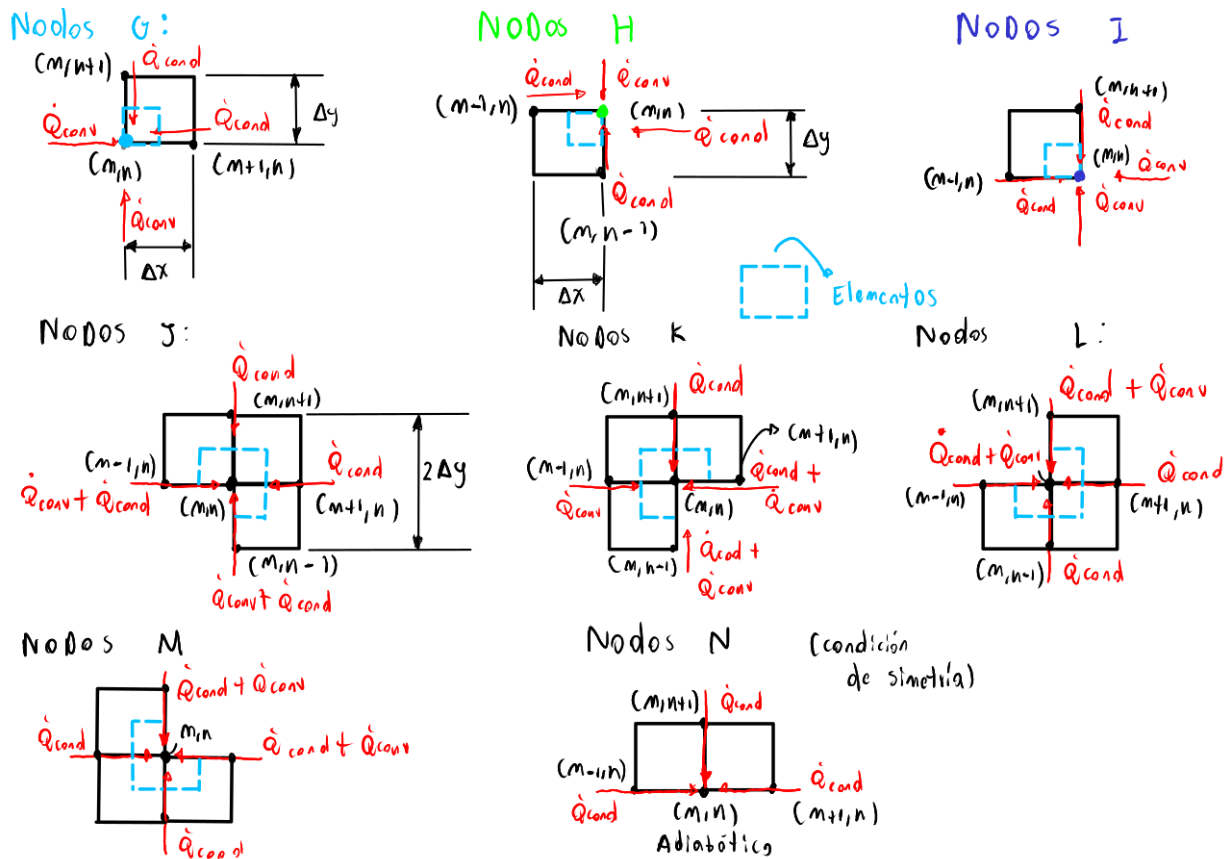


Figura 10: Diagrama de cada tipo de nodo (2).

Teniendo en cuenta las figuras 9 y 10, se procede a plantear la primera ley de la termodinámica para cada tipo de nodo, las cuales luego nos permitirán hallar la distribución de temperatura. Los nodos que tengan desarrollo matemático análogo no se presentará un desarrollo explícito de estos. Es importante resaltar también que la distancia entre nodos es constante, es decir que $\Delta x = \Delta y$

1.1.1. Ecuación nodos A

$$\begin{aligned}
 \dot{Q}_{cond,i,j} &= \dot{Q}_{i,j} \\
 \dot{Q}_{m-1,n} + \dot{Q}_{m+1,n} + \dot{Q}_{m,n+1} + \dot{Q}_{m,n-1} &= \rho \Delta V c_p \left(\frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\Delta t} \right) \\
 \rightarrow k \Delta y \Delta z \left(\frac{T_{m-1,n}^i - T_{m,n}^i}{\Delta x} \right) + k \Delta y \Delta z \left(\frac{T_{m+1,n}^i - T_{m,n}^i}{\Delta x} \right) + k \Delta x \Delta z \left(\frac{T_{m,n-1}^i - T_{m,n}^i}{\Delta y} \right) + k \Delta x \Delta z \left(\frac{T_{m,n+1}^i - T_{m,n}^i}{\Delta y} \right) \\
 &= \rho \Delta x \Delta y \Delta z c_p \left(\frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\Delta t} \right) \\
 \rightarrow k \Delta y \left(\frac{T_{m-1,n}^i - T_{m,n}^i}{\Delta x} \right) + k \Delta y \left(\frac{T_{m+1,n}^i - T_{m,n}^i}{\Delta x} \right) + k \Delta x \left(\frac{T_{m,n-1}^i - T_{m,n}^i}{\Delta y} \right) + k \Delta x \left(\frac{T_{m,n+1}^i - T_{m,n}^i}{\Delta y} \right) \\
 &= \rho \Delta x \Delta y c_p \left(\frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\Delta t} \right) \\
 \Delta x &= \Delta y = \Delta w \\
 \tau &= \frac{\alpha \Delta t}{\Delta w^2} \rightarrow \alpha = \frac{k}{\rho c_p} \\
 \rightarrow T_{m-1,n}^i - T_{m,n}^i + T_{m+1,n}^i - T_{m,n}^i + T_{m,n-1}^i - T_{m,n}^i + T_{m,n+1}^i - T_{m,n}^i \\
 &= \frac{1}{\tau} (T_{m,n}^{i+1} - T_{m,n}^i)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow T_{m,n}^{i+1} - T_{m,n}^i &= \tau (T_{m-1,n}^i + T_{m+1,n}^i + T_{m,n-1}^i + T_{m,n+1}^i - 4T_{m,n}^i) \\
T_{m,n}^{i+1} &= T_{m,n}^i (1 - 4\tau) + \tau (T_{m-1,n}^i + T_{m+1,n}^i + T_{m,n-1}^i + T_{m,n+1}^i) \\
\tau &\leq \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

1.1.2. Ecuación nodos B

$$\begin{aligned}
\dot{Q}_{conv} + \dot{Q}_{m+1,n} + \dot{Q}_{m,n+1} + \dot{Q}_{m,n-1} &= \rho \Delta V c_p \left(\frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\Delta t} \right) \\
\rightarrow h \Delta y (T_\infty - T_{m,n}^i) + k \Delta y \left(\frac{T_{m+1,n}^i - T_{m,n}^i}{\Delta x} \right) + k \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{T_{m,n-1}^i - T_{m,n}^i}{\Delta y} \right) + k \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{T_{m,n+1}^i - T_{m,n}^i}{\Delta y} \right) \\
&= \rho \frac{\Delta x \Delta y}{2} c_p \left(\frac{T_{m,n}^{i+1} - T_{m,n}^i}{\Delta t} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \Delta y = \Delta w \\
\tau &= \frac{\alpha \Delta t}{\Delta w^2} \rightarrow \alpha = \frac{k}{\rho c_p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow \frac{2h\Delta y}{k} (T_\infty - T_{m,n}^i) + 2T_{m+1,n}^i - 2T_{m,n}^i + T_{m,n-1}^i - T_{m,n}^i + T_{m,n+1}^i - T_{m,n}^i &= \frac{1}{\tau} (T_{m,n}^{i+1} - T_{m,n}^i) \\
\rightarrow T_{m,n}^{i+1} - T_{m,n}^i &= \tau \left(\frac{2h\Delta y}{k} (T_\infty - T_{m,n}^i) + 2T_{m+1,n}^i - 2T_{m,n}^i + T_{m,n-1}^i - T_{m,n}^i + T_{m,n+1}^i - T_{m,n}^i \right) \\
\rightarrow T_{m,n}^{i+1} &= T_{m,n}^i + \tau \left(\frac{2h\Delta y}{k} T_\infty - \frac{2h}{k} T_{m,n}^i + 2T_{m+1,n}^i - 4T_{m,n}^i + T_{m,n-1}^i + T_{m,n+1}^i \right) \\
\rightarrow T_{m,n}^{i+1} &= T_{m,n}^i \left(1 - \frac{2h\tau\Delta y}{k} - 4\tau \right) + \tau \left(\frac{2h\Delta y}{k} T_\infty + 2T_{m+1,n}^i + T_{m,n-1}^i + T_{m,n+1}^i \right) \\
\rightarrow T_{m,n}^{i+1} &= T_{m,n}^i \left(1 - \tau \left(\frac{2h\Delta y}{k} + 4 \right) \right) + \tau \left(2T_{m+1,n}^i + T_{m,n-1}^i + T_{m,n+1}^i + \frac{2h\Delta y}{k} T_\infty \right) \\
1 - \tau \left(\frac{2h\Delta y}{k} + 4 \right) &\geq 0 \rightarrow \tau \leq \frac{1}{\frac{2h\Delta y}{k} + 4}
\end{aligned}$$

1.1.3. Ecuación nodos C

$$\begin{aligned}
T_{m,n}^{i+1} &= T_{m,n}^i \left(1 - \tau \left(\frac{2h\Delta y}{k} + 4 \right) \right) + \tau \left(2T_{m-1,n}^i + T_{m,n-1}^i + T_{m,n+1}^i + \frac{2h\Delta y}{k} T_\infty \right) \\
1 - \tau \left(\frac{2h\Delta y}{k} + 4 \right) &\geq 0 \rightarrow \tau \leq \frac{1}{\frac{2h\Delta y}{k} + 4} \\
\Delta y &= \Delta x = \Delta w
\end{aligned}$$

1.1.4. Ecuación nodos D

$$\begin{aligned}
T_{m,n}^{i+1} &= T_{m,n}^i \left(1 - \tau \left(\frac{2h\Delta x}{k} + 4 \right) \right) + \tau \left(2T_{m,n-1}^i + T_{m-1,n}^i + T_{m+1,n}^i + \frac{2h\Delta x}{k} T_\infty \right) \\
1 - \tau \left(\frac{2h\Delta x}{k} + 4 \right) &\geq 0 \rightarrow \tau \leq \frac{1}{\frac{2h\Delta x}{k} + 4} \\
\Delta x &= \Delta y = \Delta w
\end{aligned}$$

1.1.5. Ecuación nodos E

$$\begin{aligned}
T_{m,n}^{i+1} &= T_{m,n}^i \left(1 - \tau \left(\frac{2h\Delta x}{k} + 4 \right) \right) + \tau \left(2T_{m,n+1}^i + T_{m-1,n}^i + T_{m+1,n}^i + \frac{2h\Delta x}{k} T_\infty \right) \\
1 - \tau \left(\frac{2h\Delta x}{k} + 4 \right) &\geq 0 \rightarrow \tau \leq \frac{1}{\frac{2h\Delta x}{k} + 4} \\
\Delta x &= \Delta w
\end{aligned}$$

1.1.6. Ecuación nodos F

$$\begin{aligned}
\dot{Q}_{conv,1} + \dot{Q}_{conv,2} + \dot{Q}_{m,n-1} + \dot{Q}_{m+1,n-1} &= \rho \Delta V c_p \left(\frac{T_{m,n-1}^{i+1} - T_{m,n-1}^i}{\Delta t} \right) \\
\rightarrow h \frac{\Delta y}{2} (T_\infty - T_{m,n}^i) + h \frac{\Delta x}{2} (T_\infty - T_{m,n}^i) + k \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{T_{m,n-1}^i - T_{m,n}^i}{\Delta y} \right) + k \frac{\Delta y}{2} \left(\frac{T_{m+1,n-1}^i - T_{m,n-1}^i}{\Delta x} \right) \\
&= \rho \frac{\Delta x \Delta y}{4} c_p \left(\frac{T_{m,n-1}^{i+1} - T_{m,n-1}^i}{\Delta t} \right) \\
\Delta x &= \Delta y = \Delta w \\
\tau = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta w^2} &\rightarrow \alpha = \frac{k}{\rho c_p} \\
\rightarrow \frac{4h\Delta w}{k} (T_\infty - T_{m,n}^i) + 2T_{m,n-1}^i - 2T_{m,n}^i + 2T_{m+1,n-1}^i - 2T_{m,n}^i &= \frac{1}{\tau} (T_{m,n-1}^{i+1} - T_{m,n-1}^i) \\
\rightarrow T_{m,n-1}^{i+1} - T_{m,n-1}^i &= \tau \left(\frac{4h\Delta w}{k} (T_\infty - T_{m,n}^i) + 2T_{m,n-1}^i - 2T_{m,n}^i + 2T_{m+1,n-1}^i - 2T_{m,n}^i \right) \\
\rightarrow T_{m,n-1}^{i+1} = T_{m,n-1}^i + \tau \left(\frac{4h\Delta w}{k} T_\infty - \frac{4h\Delta w}{k} T_{m,n}^i + 2T_{m,n-1}^i - 2T_{m,n}^i + 2T_{m+1,n-1}^i - 2T_{m,n}^i \right) \\
\rightarrow T_{m,n}^{i+1} &= T_{m,n}^i (1 - \frac{4h\tau\Delta w}{k} - 4\tau) + \tau \left(\frac{4h\Delta w}{k} T_\infty + 2T_{m,n-1}^i + 2T_{m+1,n-1}^i \right) \\
\rightarrow T_{m,n}^{i+1} = T_{m,n}^i \left(1 - \tau \left(\frac{4h\Delta w}{k} + 4 \right) \right) + \tau \left(2T_{m,n-1}^i + 2T_{m+1,n-1}^i + \frac{4h\Delta w}{k} T_\infty \right) \\
1 - \tau \left(\frac{4h\Delta w}{k} + 4 \right) &\geq 0 \rightarrow \tau \leq \frac{1}{\frac{4h\Delta w}{k} + 4} \\
\Delta x &= \Delta y = \Delta w
\end{aligned}$$

1.1.7. Ecuación nodos G

$$\begin{aligned}
\rightarrow T_{m,n}^{i+1} &= T_{m,n}^i \left(1 - \tau \left(\frac{4h\Delta w}{k} + 4 \right) \right) + \tau \left(2T_{m,n+1}^i + 2T_{m+1,n}^i + \frac{4h\Delta w}{k} T_\infty \right) \\
1 - \tau \left(\frac{4h\Delta w}{k} + 4 \right) &\geq 0 \rightarrow \tau \leq \frac{1}{\frac{4h\Delta w}{k} + 4}
\end{aligned}$$

1.1.8. Ecuación nodos H

$$\begin{aligned}
\rightarrow T_{m,n}^{i+1} &= T_{m,n}^i \left(1 - \tau \left(\frac{4h\Delta w}{k} + 4 \right) \right) + \tau \left(2T_{m-1,n}^i + 2T_{m,n-1}^i + \frac{4h\Delta w}{k} T_\infty \right) \\
1 - \tau \left(\frac{4h\Delta w}{k} + 4 \right) &\geq 0 \rightarrow \tau \leq \frac{1}{\frac{4h\Delta w}{k} + 4} \\
\Delta x &= \Delta y = \Delta w
\end{aligned}$$

1.1.9. Ecuación nodos I

$$\begin{aligned}
\rightarrow T_{m,n}^{i+1} &= T_{m,n}^i \left(1 - \tau \left(\frac{4h\Delta w}{k} + 4 \right) \right) + \tau \left(2T_{m-1,n}^i + 2T_{m,n+1}^i + \frac{4h\Delta w}{k} T_\infty \right) \\
1 - \tau \left(\frac{4h\Delta w}{k} + 4 \right) &\geq 0 \rightarrow \tau \leq \frac{1}{\frac{4h\Delta w}{k} + 4}
\end{aligned}$$

1.1.10. Ecuación nodos J

$$\begin{aligned}
\dot{Q}_{conv,1} + \dot{Q}_{conv,2} + \dot{Q}_{m-1,n} + \dot{Q}_{m+1,n} + \dot{Q}_{m,n+1} + \dot{Q}_{m,n-1} &= \rho \Delta V c_p \left(\frac{T_{m,n-1}^{i+1} - T_{m,n-1}^i}{\Delta t} \right) \\
\rightarrow h \frac{\Delta y}{2} (T_\infty - T_{m,n}^i) + h \frac{\Delta x}{2} (T_\infty - T_{m,n}^i) + \dots \\
\dots + k \frac{\Delta y}{2} \left(\frac{T_{m-1,n}^i - T_{m,n}^i}{\Delta x} \right) + k \Delta y \left(\frac{T_{m+1,n}^i - T_{m,n}^i}{\Delta x} \right) + k \Delta x \left(\frac{T_{m,n+1}^i - T_{m,n}^i}{\Delta y} \right) + k \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{T_{m,n-1}^i - T_{m,n}^i}{\Delta y} \right) \\
&= \rho \frac{3\Delta x \Delta y}{4} c_p \left(\frac{T_{m,n-1}^{i+1} - T_{m,n-1}^i}{\Delta t} \right) \\
\Delta x &= \Delta y = \Delta w \\
\tau = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta w^2} &\rightarrow \alpha = \frac{k}{\rho c_p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \rightarrow \frac{4}{3}h\Delta w (T_\infty - T_{m,n}^i) + \frac{2}{3}T_{m-1,n}^i - \frac{2}{3}T_{m,n}^i + \frac{4}{3}T_{m+1,n}^i - \frac{4}{3}T_{m,n}^i + \frac{4}{3}T_{m,n+1}^i - \frac{4}{3}T_{m,n}^i + \frac{2}{3}T_{m,n-1}^i - \frac{2}{3}T_{m,n}^i \\
& = \frac{1}{\tau} (T_{m,n}^{i+1} - T_{m,n}^i) \\
& \rightarrow T_{m,n}^{i+1} - T_{m,n}^i = \tau \left(\frac{4h\Delta w}{3k} (T_\infty - T_{m,n}^i) - \frac{2 \times 4}{3}T_{m,n}^i - \frac{2 \times 2}{3}T_{m,n}^i + \frac{2}{3}T_{m-1,n}^i + \frac{4}{3}T_{m+1,n}^i + \frac{4}{3}T_{m,n+1}^i + \frac{2}{3}T_{m,n-1}^i \right) \\
& \rightarrow T_{m,n}^{i+1} = T_{m,n}^i + \tau \left(\frac{4h\Delta w}{3k} T_\infty - \frac{4h\Delta w}{3k} T_{m,n}^i - 4T_{m,n}^i + \frac{2}{3}T_{m-1,n}^i + \frac{4}{3}T_{m+1,n}^i + \frac{4}{3}T_{m,n+1}^i + \frac{2}{3}T_{m,n-1}^i \right) \\
& \rightarrow T_{m,n}^{i+1} = T_{m,n}^i \left(1 - \tau \left(\frac{4h\Delta w}{3k} + 4 \right) \right) + \frac{2}{3}\tau \left(\frac{2h\Delta w}{k} T_\infty + T_{m-1,n}^i + 2T_{m+1,n}^i + T_{m,n-1}^i + 2T_{m,n+1}^i \right) \\
& 1 - \tau \left(\frac{4h\Delta w}{3k} + 4 \right) \geq 0 \rightarrow \tau \leq \frac{1}{\frac{4h\Delta w}{3k} + 4}
\end{aligned}$$

1.1.11. Ecuación nodos K

$$\begin{aligned}
& \rightarrow T_{m,n}^{i+1} = T_{m,n}^i \left(1 - \tau \left(\frac{4h\Delta w}{3k} + 4 \right) \right) + \frac{2}{3}\tau \left(\frac{2h\Delta w}{k} T_\infty + 2T_{m-1,n}^i + T_{m+1,n}^i + T_{m,n-1}^i + 2T_{m,n+1}^i \right) \\
& 1 - \tau \left(\frac{4h\Delta w}{3k} + 4 \right) \geq 0 \rightarrow \tau \leq \frac{1}{\frac{4h\Delta w}{3k} + 4}
\end{aligned}$$

1.1.12. Ecuación nodos L

$$\begin{aligned}
& \rightarrow T_{m,n}^{i+1} = T_{m,n}^i \left(1 - \tau \left(\frac{4h\Delta w}{3k} + 4 \right) \right) + \frac{2}{3}\tau \left(\frac{2h\Delta w}{k} T_\infty + T_{m-1,n}^i + 2T_{m+1,n}^i + 2T_{m,n-1}^i + T_{m,n+1}^i \right) \\
& 1 - \tau \left(\frac{4h\Delta w}{3k} + 4 \right) \geq 0 \rightarrow \tau \leq \frac{1}{\frac{4h\Delta w}{3k} + 4}
\end{aligned}$$

1.1.13. Ecuación nodo M

$$\begin{aligned}
& \rightarrow T_{m,n}^{i+1} = T_{m,n}^i \left(1 - \tau \left(\frac{4h\Delta w}{3k} + 4 \right) \right) + \frac{2}{3}\tau \left(\frac{2h\Delta w}{k} T_\infty + 2T_{m-1,n}^i + T_{m+1,n}^i + 2T_{m,n-1}^i + T_{m,n+1}^i \right) \\
& 1 - \tau \left(\frac{4h\Delta w}{3k} + 4 \right) \geq 0 \rightarrow \tau \leq \frac{1}{\frac{4h\Delta w}{3k} + 4}
\end{aligned}$$

1.1.14. Ecuación nodos N

Para analizar este caso se debe tener en cuenta la condición adiabática, esta ecuación es fácil de determinar teniendo en cuenta la ecuación del nodo E.

$$\begin{aligned}
T_{m,n}^{i+1} &= T_{m,n}^i (1 - 4\tau) + \tau (2T_{m,n+1}^i + T_{m-1,n}^i + T_{m+1,n}^i) \\
1 - 4\tau &\geq 0 \rightarrow \tau \leq \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

1.1.15. Ecuación nodo O

$$\begin{aligned}
& \rightarrow T_{m,n}^{i+1} = T_{m,n}^i \left(1 - \tau \left(\frac{2h\Delta w}{k} + 4 \right) \right) + \tau \left(2T_{m,n+1}^i + 2T_{m+1,n}^i + \frac{2h\Delta w}{k} T_\infty \right) \\
& 1 - \tau \left(\frac{2h\Delta w}{k} + 4 \right) \geq 0 \rightarrow \tau \leq \frac{1}{\frac{2h\Delta w}{k} + 4}
\end{aligned}$$

1.1.16. Ecuación nodo P

$$\begin{aligned}
& \rightarrow T_{m,n}^{i+1} = T_{m,n}^i \left(1 - \tau \left(\frac{2h\Delta w}{k} + 4 \right) \right) + \tau \left(2T_{m-1,n}^i + 2T_{m,n+1}^i + \frac{2h\Delta w}{k} T_\infty \right) \\
& 1 - \tau \left(\frac{2h\Delta w}{k} + 4 \right) \geq 0 \rightarrow \tau \leq \frac{1}{\frac{2h\Delta w}{k} + 4} \\
& \Delta x = \Delta y = \Delta w
\end{aligned}$$

Para analizar el Δt a usar, se deben tener en cuenta las condiciones de estabildades, donde para cada tipo de nodo se puede determinar el τ máximo para cada material y por tanto el los

Δt máximos para cada iteración, entonces se debe tomar el mínimo de estos tipos máximos para que se cumpla la condición de estabilidad. Con ayuda de Matlab, obtenemos dichos valores, pero primero se presenta una tabla con las propiedades más relevantes en función del material:

Tabla 1: Propiedades de materiales relevantes para el problema.

Material	$k[W/m - C]$	$C_p[J/kg - C]$	$\rho[kg/m^3]$	$\alpha[m^2/s]$	$\Delta w[mm]$	$h[W/m^2 - C]$
Acero 1010	51	465	7870	1.393e-05	0.05	-
Cobre	398	385	8960	1.1538e-04	0.05	-
Aluminio	205	897	270	8.4644e-05	0.05	-
Gases calientes	-	-	-	-	-	200
Agua	-	-	-	-	-	1000

Usando estas propiedades se puede determinar los tiempos máximos para cada nodo y cada material:

Tabla 2: τ máximos y t máximos, $[t] = s$

Nodo	Acero 1010		Cobre		Aluminio	
	$\tau \leq$	$\Delta t \leq$	$\tau \leq$	$\Delta t \leq$	$\tau \leq$	$\Delta t \leq$
A	0.25	44.8474	0.25	5.4171	0.25	7.3838
B	0.2277	40.8432	0.2469	5.3499	0.244	7.208
C	0.2277	40.8432	0.2469	5.3499	0.244	7.208
D	0.2277	40.8432	0.2469	5.3499	0.244	7.208
E	0.2277	40.8432	0.2469	5.3499	0.244	7.208
F	0.209	37.4954	0.2439	5.2843	0.2384	7.0404
G	0.209	37.4954	0.2439	5.2843	0.2384	7.0404
H	0.209	37.4954	0.2439	5.2843	0.2384	7.0404
I	0.209	37.4954	0.2439	5.2843	0.2384	7.0404
J	0.2347	42.0961	0.2479	5.3721	0.246	7.2657
K	0.2347	42.0961	0.2479	5.3721	0.246	7.2657
L	0.2347	42.0961	0.2479	5.3721	0.246	7.2657
M	0.2347	42.0961	0.2479	5.3721	0.246	7.2657
N	0.25	44.8474	0.25	5.4171	0.25	7.3838
O	0.2277	40.8432	0.2469	5.3499	0.244	7.208
P	0.2277	40.8432	0.2469	5.3499	0.244	7.208

Buscando los Δt mínimos de los máximos para cada material y truncado el número hacia abajo se obtiene que para acero el Δt para el acero es de $37s$, para el cobre de $5s$ y para el aluminio $7s$.

Finalmente, si se busca el estado estable se debe plantear un criterio para dejar de iterar, en este caso se usará un criterio de residuales promedio de toda la matriz de temperatura, en este caso se considera un valor de residual promedio de 10^{-2} , los resultados obtenidos se enseñan en la figura 11 y 12.

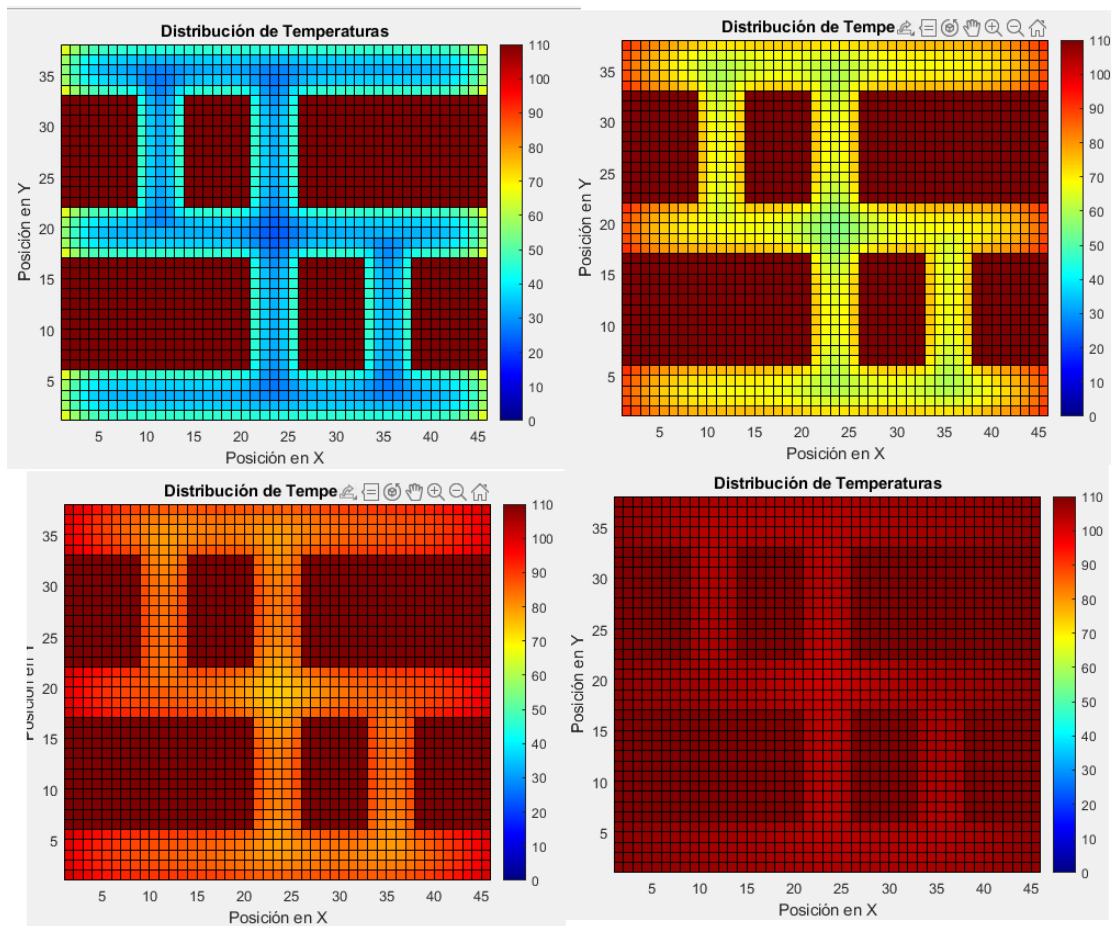


Figura 11: Distribución de temperatura para diferentes iteraciones.

En la figura 11 se observa como la parte central es la ultima en calentarse, mientras que las partes superficiales se calientan más rápidamente, lo cual era de esperar, pues estas están en contacto con el fluido caliente, mientras que en el centro es más difícil que el calor se conduzca.

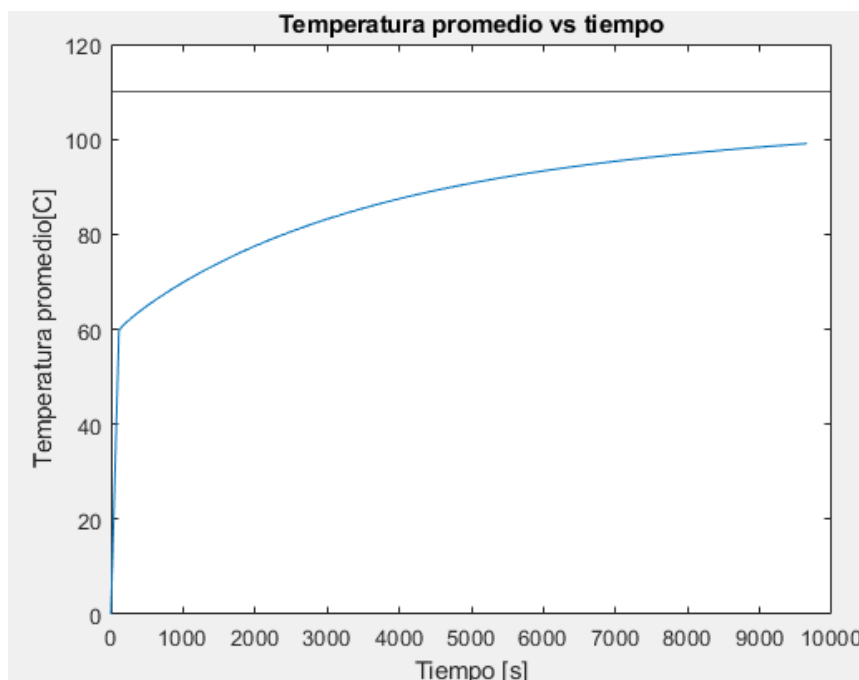


Figura 12: Temperatura promedio vs tiempo.

Exactamente se tomó 261 iteraciones para alcanzar el estado estable según el criterio definido que corresponde a $261 * 37 = 9657s = 160,95min$. Es importante mencionar que el mallado enseñado en la figura 11 NO corresponde al mallado real, sino a una representación de elementos por cada nodo, aunque el mallado real tiene elementos no simétricos como se mostró anteriormente.

1.2. ¿Cuánto tiempo se requiere para lograr que la base alcance los $100^{\circ}C$? Determine el calor total absorbido por los 200 cm^3 de aletas durante el calentamiento de la base desde los $15^{\circ}C$ hasta $100^{\circ}C$

Ayudándonos de Matlab (ver anexo 1), se obtiene que en la iteración 164 se alcanza dicha condición es decir $164 * 37 = 6068s = 101,133min$.

Para calcular el calor absorbido por toda la aleta, se usará la aproximación de aleta de punta adiabática, con longitud corregida:

$$\dot{Q}_{fin,real} = M \tanh mL_c$$

$$M = \sqrt{hPkA_c\theta_b}, m = \sqrt{\frac{hP}{kA_c}}$$

con $\theta_b = T_{inf} - T_b$, $T_b = 100^{\circ}C$, $L_c = 35,52t$, $P = 87t$, $A_c = 45t^2$, $k = 51W/m - C$, $T_{inf} = 110[C]$.

Obteniendo $\dot{Q}_{gas,AISI1010} = 5,65W$, multiplicando este valor por el número de aletas, obteniendo $\dot{Q}_{t,gas,AISI1010} = 84,75W$, de manera análoga se obtiene para el agua y los otros tres materiales:

- $\dot{Q}_{t,agua,AISI1010} = 189,6W$
- $\dot{Q}_{t,gas,cobre} = 217W$
- $\dot{Q}_{t,agua,cobre} = 528,6W$
- $\dot{Q}_{t,gas,aluminio} = 165,7W$
- $\dot{Q}_{t,agua,aluminio} = 380W$

Nota: Se despreció la convección debido a la cara de aleta (en x_L) debido a que esta es despreciable respecto a la transferencia de calor en el resto de la aleta.

1.3. ¿Cómo es el comportamiento del arreglo cuando se utiliza agua en lugar de gases? El coeficiente de convección con agua es de $1000W/m^2K$?

Ver anexo 2: Si se cambia el coeficiente de convección por el del agua, el sistema alcanza el estado estable en menos iteraciones (154), y también una temperatura de $100^{\circ}C$ en tan sólo 104 iteraciones, lo cual era de esperar pues los líquidos tienen más capacidad de refrigeración debido a que en general tiene mayor coeficiente convectivo, lo anterior se puede observar en la figura 13.

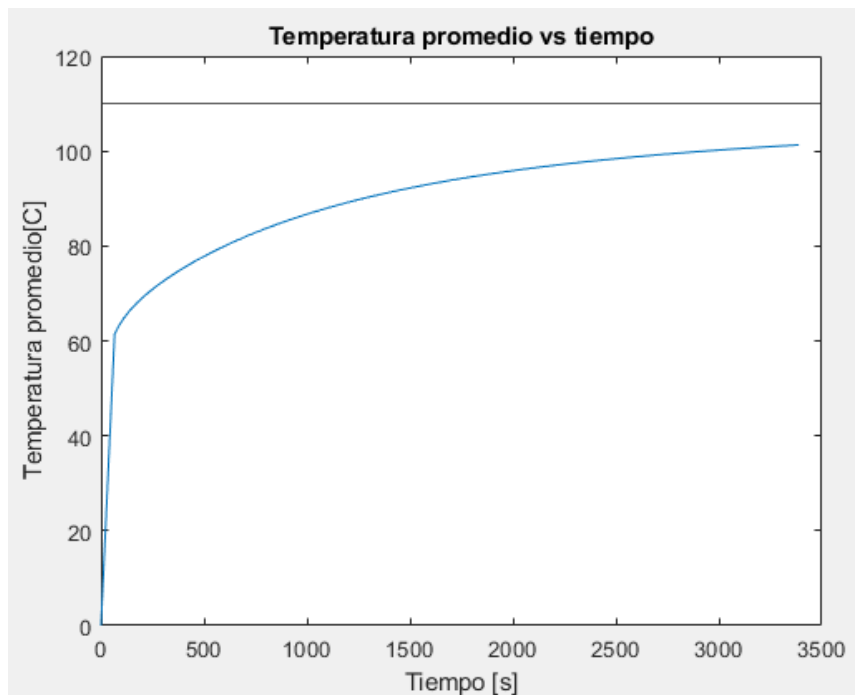


Figura 13: Temperatura promedio vs tiempo para calentamiento con agua.

1.4. Concluya respecto al efecto de la variación de material en el desempeño de la aleta

Para analizar esta parte, se tendrá en cuenta que se trata de una aleta de longitud considerable, esto es razonable si consideramos que se trata de una aleta de 35 veces su espesor. Para este tipo de aletas el desempeño se puede escribir como:

$$\varepsilon_{long,fin} = \frac{\dot{Q}_{fin}}{\dot{Q}_{no fin}} = \frac{\sqrt{hpkA_c}}{hA_b(T_b - T_\infty)} = \sqrt{\frac{kp}{hA_c}}$$

Por lo que a mayor k mayor efectividad, si mantenemos h y la geometría constante como lo es en este caso, como $\dot{Q}_{no fin}$ es igual en cualquier caso, observando los valores obtenidos en la sección pasada, es evidente que la mayor efectividad es obtenida para el caso de $k = k_{cobre}$.

Como se observa para un mismo h a mayor tasa de transferencia de calor (es decir entre el calor sea transferido en menos tiempos (iteraciones)) mayor será la efectividad de la aleta, por lo que se puede afirmar que la aleta de cobre es la más efectiva. Ver figura 14.

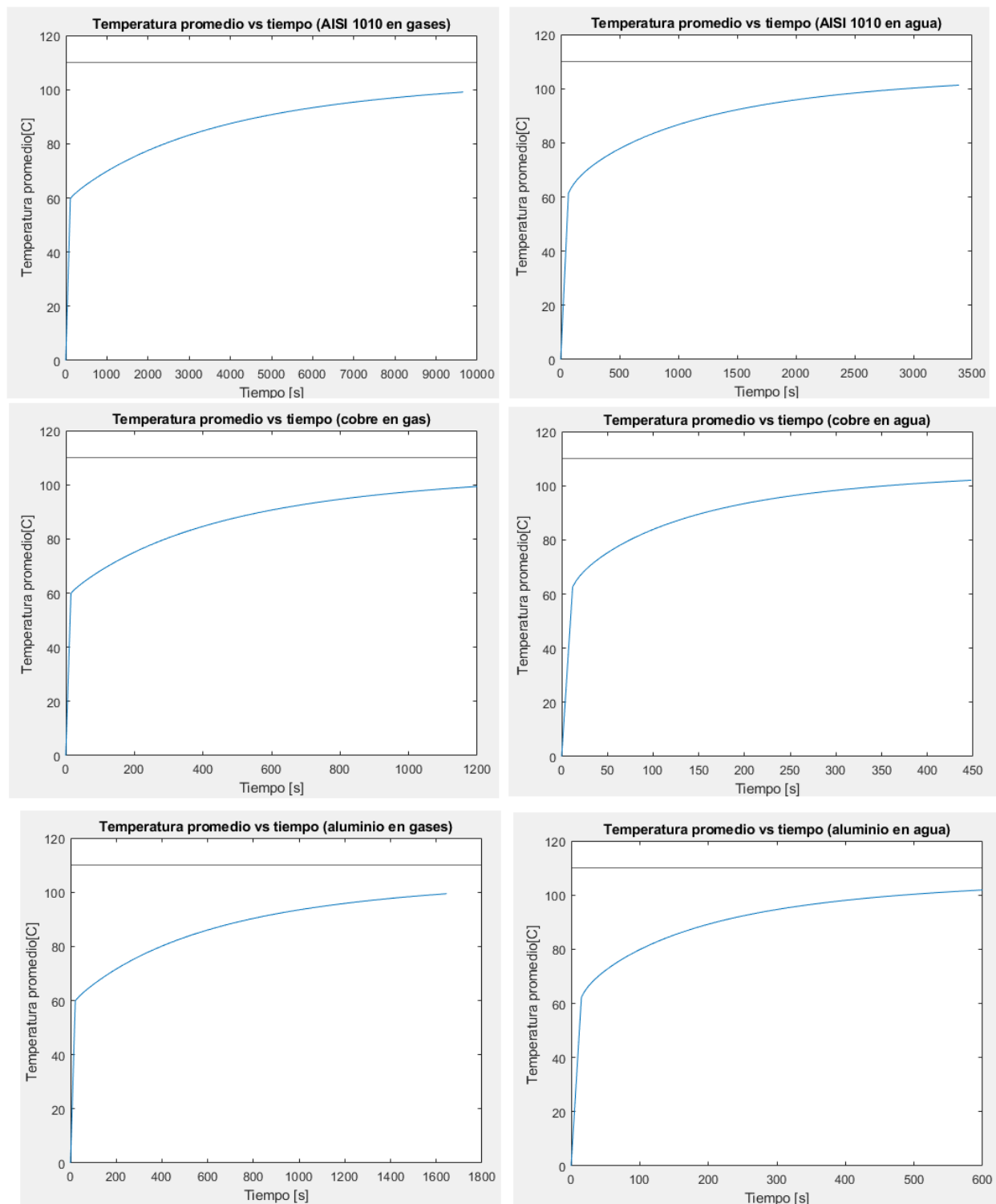


Figura 14: Comparación de tiempo que tardan los diferentes materiales en alcanzar el estado estable.

2. Enfriamiento de la superficie

Se requiere enfriar rápidamente una superficie cuadrada de 10 cm x 10 cm desde una temperatura de 100°C hasta 15°C . Como ingeniero mecánico usted está encargado de diseñar el arreglo de aletas que enfríe la superficie de manera más eficiente. El diseño está restringido porque sólo se dispone de 200 cm³ de material y de 3 metales distintos: cobre, aluminio y acero AISI 1010 y las formas de las aletas están preestablecidas, pero usted debe determinar su número y tamaño para

cumplir con la restricción de volumen de material disponible. Inicialmente toda la aleta y la base se encuentran a $100^{\circ}C$

2.1. Para el enfriamiento se utiliza aire frío $5^{\circ}C$ con un coeficiente de convección $h = 200W/m^2K$. Determine la distribución de temperaturas en la sección de la aleta en función del tiempo

Para desarrollar esto, se realiza un proceso igual a la sección de enfriamiento, pues al fin de cuenta es la misma ecuación, con diferentes condiciones de frontera (ver anexo 7). En la figura 15 y 16 se enseña el comportamiento obtenido.

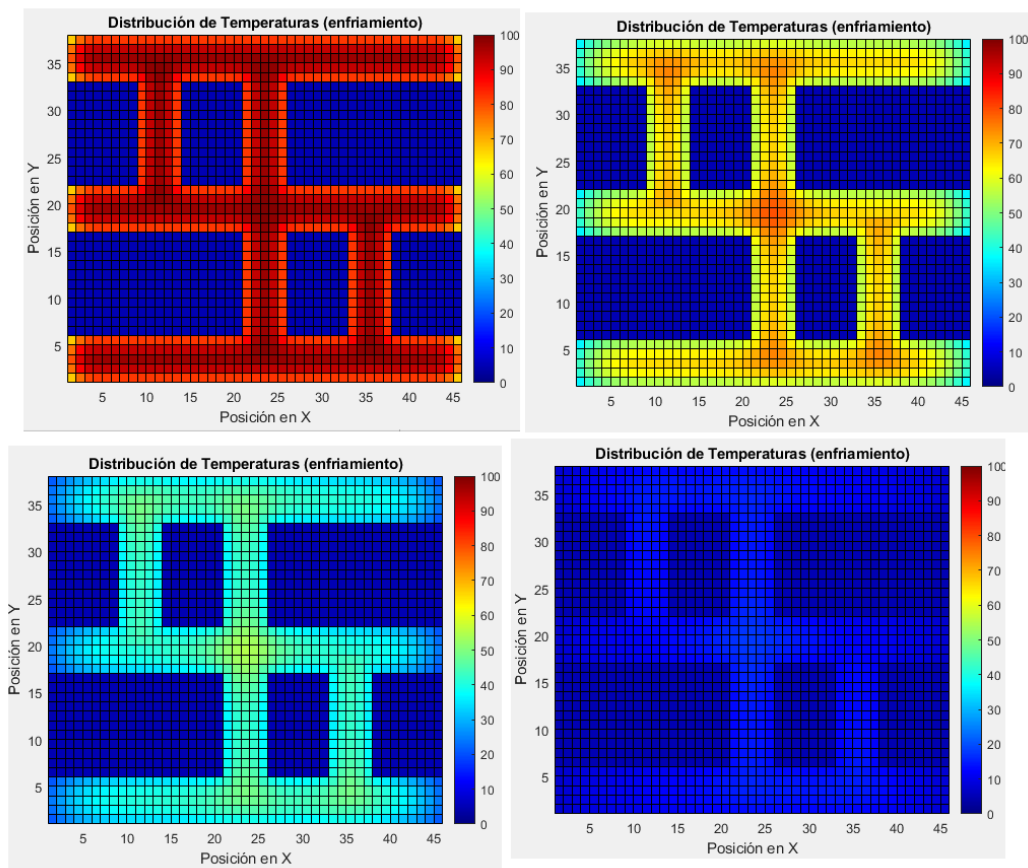


Figura 15: Distribución de temperatura en enfriamiento.

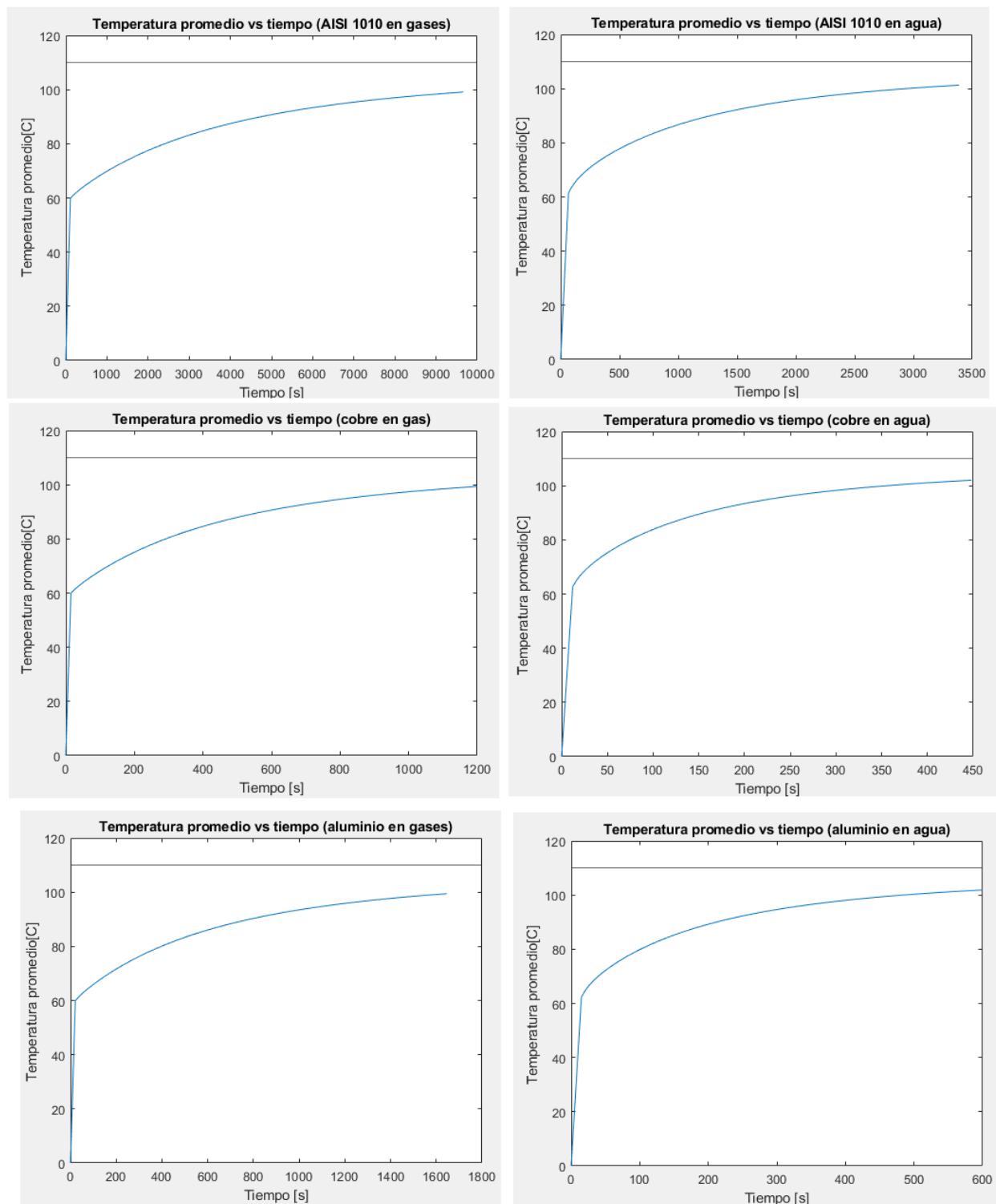


Figura 16: Comparación de tiempo que tardan los diferentes materiales en alcanzar el estado estable (enfriamiento).

Se consideró que se obtuvo estado estable si el residual promedio es igual a 10^{-2} .

2.2. ¿Cuánto tiempo se requiere para lograr que la base alcance los 15°C ?

Siguiendo el procedimiento de la sección anterior y con ayuda de Matlab los tiempos para alcanzar 15°C :

- Acero 1010: Iteración 164 ($37s * 164 = 6068s = 101,13min$)
- Cobre : Iteración 147 ($5s * 164 = 735s = 12,25min$)
- Aluminio: Iteración 143 ($7s * 143 = 1001s = 16,68min$)

Como se observa a mayor k más rápido se alcanza el estado estable, lo que es equivalente a que se tiene mayor transferencia de calor.

2.3. Concluya respecto al efecto de la variación de material en el desempeño de la aleta

Análogamente como se realizó en la sección anterior se puede determinar la tasa de enfriamiento, teniendo en cuenta que se trata una aleta muy larga se desprecia la transferencia de calor en el área en la punta, obteniendo:

- $\dot{Q}_{t,air,AISI1010} = 84,75W$
- $\dot{Q}_{t,air,cobre} = 217W$
- $\dot{Q}_{t,air,aluminio} = 165,7W$

A mayor k mayor transferencia de calor hacia el aire.

2.4. ¿La forma de su aleta se comporta mejor al calentamiento o al enfriamiento? Comente al respecto e indique porque puede estar sucediendo esto.

Como

$$\varepsilon_{long,fin} = \frac{\dot{Q}_{fin}}{\dot{Q}_{nofin}}$$

y \dot{Q}_{nofin} no cambia respecto al calentamiento, y \dot{Q}_{fin} es igual para cada material en calentamiento y en enfriamiento, entonces el desempeño de la aleta es igual en enfriamiento y en calentamiento, lo cual era de esperar, pues básicamente se está resolviendo la misma ecuación diferencial, bajo condiciones de frontera “simétricas”, es decir que si se analiza la ecuación de calor, la transferencia de calor es igual pero con signo opuesto (en el caso de enfriamiento todos los (\dot{Q}) son negativos), esto es la variación de la temperatura en función del tiempo:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{Heating} = - \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{cooling}$$

además como las condiciones geométricas no cambian el resultado obtenido era totalmente esperado.

3. Anexos

- Anexo 1: main_steel_heating_gas.m
- Anexo 2: main_steel_heating_water.m
- Anexo 3: main_copper_heating_gas.m

- Anexo 4: main_copper_heating_water.m
- Anexo 5: main_aluminium_heating_gas.m
- Anexo 6: main_aluminium_heating_water.m
- Anexo 7: main_steel_cooling_air.m
- Anexo 8: main_copper_cooling_air.m
- Anexo 9: main_aluminum_cooling_air.m

Referencias

- [1] Çengel, Y., Ghajar, Afshin., Transferencia de calor y masa: Fundamentos y Aplicaciones, McGrawHill, (2011).
- [2] Incropera, F. and De Witt, D. Fundamentos de transferencia de calor. 4ta edición, México (1999).
- [3] Donald, Q. Procesos de transferencia de calor. McGraw- Hill: México (1965)