UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Facultad de Ingeniería

Departamento de Ingeniería Mecánica
Elementos Finitos
Tarea técnicas de aproximación

Mauricio Ríos Hernández
Emanuel Peña Rojas

2021-1

1. Plantamiento del problema

Se pide determinar las soluciones aproximadas a la ecuación diferencial dada empleando las tres técnicas de aproximación (método de colocación, método de mínimos cuadrados y método de Galerkin), y el método de elementos finitos, también se pide solucionar el sistema analíticamente y esta se toma como la solución exacta. La ecuación diferencial en cuestión es:

$$Ax^2\tfrac{d^2y(x)}{dx^2} + Bx\tfrac{dy(x)}{dx} + Cy(x) = 0$$
$$\text{Dominio: } 1 \leq x \leq 6$$
$$\left.\begin{matrix} y(1) = 5 \\ y(6) = 5 \end{matrix}\right\} \text{ Condiciones de frontera}$$

Defina cualquier valor para las constantes A, B y C de la ecuación diferencial (diferente de cero y que no sean los mismos números +/-). **Para este caso se escogió A= 2, B= 1, C= -3**.

2. Solución analítica de la ecuación diferencial

Halle la solución analítica de la ecuación diferencial usando las técnicas vistas en los cursos de ecuaciones diferenciales. Asuma esta solución como la solución exacta del problema.

Entonces reescribiendo el problema de valor inicial:

$$2x^2\frac{d^2y(x)}{dx^2} + x\frac{dy(x)}{dx} - 3y(x) = 0$$
$$\text{Dominio: } 1 \leqslant x \leqslant 6$$
$$\left.\begin{matrix} y(1) = 5 \\ y(6) = 5 \end{matrix}\right\} \text{ Condiciones de frontera}$$

Entonces primero se halla la solución general a la ecuación diferencial. Observando la ecuación diferencial, esta es una ecuación diferencial homogenea y tiene la forma de *la ecuación de Cauchy-Euler* [2], es decir:

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 xy' + a_0 y = 0$$
$$\text{Siendo } y \text{ función de } x$$

Para nuestro caso:

$$2x^2y^{(2)} + xy' - 3y = 0$$

Ahora proponiendo soluciones de la forma $y = x^m$ tenemos que:

$$y = x^m \to y' = mx^{m-1} \wedge y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$y = x^m \to y' = mx^{m-1} \wedge y'' = m(m-1)x^{m-2}$$
$$2x^2m(m-1)x^{m-2} + xmx^{m-1} - 3x^m = 0$$
$$2m(m-1)x^m + mx^m - 3x^m = 0$$
$$x^m\left(2m(m-1) + m - 3\right) = 0$$
$$2m^2 - 2m + m - 3 = 0$$
$$2m^2 - m - 3 = 0$$

Aplicando la fórmula cuadrática tenemos que:

$$m = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4} = 0{,}25 \pm \frac{5}{4}$$

Entonces dos soluciones LI de la ecuación diferencial serán:

$$y_1 = x^{0{,}25+\frac{5}{4}} = x^{1{,}5}$$
$$y_2 = x^{0{,}25-\frac{5}{4}} = x^{-1}$$

Por lo que la solución general a la ecuación diferencial es:

$$y = c_1 x^{1{,}5} + c_2 x^{-1}$$

Ahora para hallar la solución al PVI, se tiene en cuenta las condiciones de frontera:

$$y(1) = 5$$
$$y(6) = 5$$

Obteniendo así las siguientes ecuaciones:

$$5 = c_1 + c_2 \tag{1}$$

$$5 = c_1(6)^{1{,}5} + c_2(6)^{-1} = c_1(6)^{1{,}5} + c_2(6)^{-1}$$

De 1 se tiene que:

$$c_1 = 5 - c_2 \tag{3}$$

Reemplazando 3 en 2:

$$5 = (5 - c_2)\,(6)^{1{,}5} + c_2(6)^{-1}$$
$$5 = 5(6)^{1{,}5} - (6)^{1{,}5}c_2 + c_2(6)^{-1} \rightarrow 5 - 5(6)^{1{,}5} = c_2(6^{-1} - 6^{1{,}5})$$
$$c_2 = \frac{5 - 5(6)^{1{,}5}}{(6^{-1} - 6^{1{,}5})} \simeq 4.7132 \tag{4}$$

Reemplazando 4 en 1:

$$c_1 = 5 - 4.7132 = 0{,}2868$$
$$\therefore y \cong 0{,}2868x^{1{,}5} + 4.7132x^{-1}$$

Que se toma como la solución exacta. Esta solución sólo está condicionada por los errores de aproximación de c_1 y c_2.

3. Solución aproximada de la ecuación diferencial usando método de colocación, método de mínimos cuadrados y método de Galerkin, utilizando función de prueba de dos parámetros

Nota, para el desarrollo de las aproximaciones de y, se usará el programa Matlab para la resolución de integrales y otras operaciones.

Teniendo en cuenta este caso en particular:

$$2x^2\frac{d^2y(x)}{dx^2}+x\frac{dy(x)}{dx}-3y(x)=0$$
$$\text{Dominio: } 1\leqslant x\leqslant 6$$
$$\left.\begin{matrix} y(1)=5 \\ y(6)=5 \end{matrix}\right\} \text{Condiciones de frontera}$$
$$\hat{y}=ax^3+bx^2+cx+d\ \left\{\begin{matrix} y(1)=5 \\ y(6)=5 \end{matrix}\right.$$

Con el fin de obtener el residuo R en función de un solo parámetro, se usan las condiciones de frontera en $\hat{y}$:

$$5=a(1)^3+b(1)^2+c(1)+d\rightarrow 5=a+b+c+d \tag{5}$$

$$5=a(6)^3+b(6)^2+c(6)+d\rightarrow 5=216a+36b+6c+d\ (6) \tag{6}$$

Ahora igualando 5 y 6:

$$a+b+c+d=216a+36b+6c+d$$
$$\rightarrow 215a+35b+5c=0$$
$$c=\frac{-215a-35b}{5}=-43a-7b \tag{7}$$

Reemplazando 7 en 5:

$$5=a+b-43a-7b+d\rightarrow d=5+42a+6b \tag{8}$$

Reemplazando 7 y 8 en $\hat{y}$:

$$\hat{y}=ax^3+bx^2+(-43a-7b)x+(5+42a+6b)$$
$$\hat{y}=ax^3+bx^2-43ax-7bx+5+42a+6b$$

Por lo que el residual en términos de a y b se halla así:

$$R\equiv A\frac{d^2\hat{y}}{dx^2}+B\frac{d\hat{y}}{dx}+C\hat{y}+D=2x^2\frac{d^2\hat{y}}{dx^2}+x\frac{d\hat{y}}{dx}-3\hat{y}$$
$$\frac{d\hat{y}}{dx}=3ax^2+2bx-43a-7b,\ \frac{d^2\hat{y}}{dx^2}=6ax+2b$$
$$\rightarrow R=2x^2(6ax+2b)+x(3ax^2+2bx-43a-7b)-3(ax^3+bx^2-43ax-7bx+5+42a+6b)$$
$$=12ax^3+4bx^2+3ax^3+2bx^2-43ax-7bx-3ax^3-3bx^2+129ax+21bx-15-156a-18b$$
$$=12ax^3+3bx^2+86ax+14bx-126a-18b-15$$

Ahora se define el promedio de residuo I como:

$$I=\int_1^6 wRdx$$

Donde w, es la función de peso y depende del método a usar, y $I=0$ para garantizar que se aproxima a la solución.

3.1. Método de colocación

Para este método se tiene que:

$$w = \delta(x - x_i) = \begin{cases} 1 & x = x_i \\ 0 & x \neq x_i \end{cases}$$
$$x_i = 2{,}5$$

Donde x_i es un valor arbitrario en el dominio, en este caso se toma $x_i = 2{,}5$, de esta manera:

$$I = \int_1^6 \delta(x - x_i)(12ax^3 + 3bx^2 + 86ax + 14bx - 126a - 18b - 15)dx$$
$$= 12a{x_i}^3 + 3bx_i^2 + 86ax_i + 14bx_i - 126a - 18b - 15 =$$
$$12a(2{,}5)^3 + 3b(2{,}5)^2 + 86a(2{,}5) + 14b(2{,}5) - 126a - 18b - 15$$
$$= 276{,}5a + 35{,}75b - 15$$
$$I = 0$$
$$276{,}5a + 35{,}75b - 15 = 0 \to 276{,}5a + 35{,}75b = 15$$

Como observamos, tenemos una ecuación en términos de a y b.

$$a = \frac{-35{,}75b + 15}{276{,}5} \tag{9}$$

Con el fin de hallar a y b se hace necesario tomar otro valor x_i y se repite todo el proceso, entonces se toma el valor $x_i = 3$:

$$x_i = 3$$
$$12a(3)^3 + 3b(3)^2 + 86a(3) + 14b(3) - 126a - 18b - 15$$
$$= 456a + 51b - 15$$
$$I = 0$$

$$456a + 51b - 15 = 0 \to 456a + 51b = 15 \tag{10}$$

Reemplazando 9 en 10:

$$456\left(\frac{-35{,}75b + 15}{276{,}5}\right) + 51b = 15$$
$$b \simeq 1{,}22358$$
$$b \text{ en } 9:$$
$$a \simeq \frac{-35{,}75(1{,}22358) + 15}{276{,}5} \simeq -0{,}10395$$
$$\hat{y} \simeq ax^3 + bx^2 - 43ax - 7bx + 5 + 42a + 6b$$
$$\hat{y} \simeq -0{,}10395x^3 + 1{,}22358x^2 - 43(-0{,}10395)x - 7(1{,}22358)x + 5 + 42(-0{,}10395) + 6(1{,}22358)$$
$$\therefore \hat{y}_{\text{colocación}} \simeq -0{,}10395x^3 + 1{,}22358x^2 - 4{,}09521x + 7{,}97558$$

3.2. Método de Galerkin

Recordando que:

$$\hat{y} = ax^3 + bx^2 - 43ax - 7bx - 5 + 42a + 6b$$

Para este caso se tiene que:

$$I = \int_1^6 wRdx = \int_1^6 (x^3 - 43x + 42)(12ax^3 + 3bx^2 + 86ax + 14bx - 126a - 18b - 15)dx =$$

$$-\frac{8393375a}{42} - \frac{198625b}{12} + \frac{13125}{4}$$

$$I = 0$$

Obteniendo así una ecuación con dos incógnitas a y b

$$-\frac{8393375a}{42} - \frac{198625b}{12} + \frac{13125}{4} = 0 \tag{11}$$

Ahora con el fin de hallar otra ecuación que relaciones a y b se repite el proceso pero haciendo

$$w = \frac{d\hat{y}}{db} = x^2 + 7x + 6$$

Entonces:

$$I = \int_1^6 wRdx = \int_1^6 (x^2 + 7x + 6)(12ax^3 + 3bx^2 - 516ax - 21bx + 504a + 18b - 15)dx =$$

$$= \frac{1794065a}{6} + \frac{260935b}{12} - \frac{6725}{2}$$

$$I = 0$$

$$\frac{1794065a}{6} + \frac{260935b}{12} - \frac{6725}{2} = 0 \tag{12}$$

Solucionando el sistema 2x2 (ecuaciones 12 y 11), se encuentran a y b:

$$a \simeq -0{,}02599$$

$$b \simeq 0{,}51205$$

$$\hat{y} = -0{,}02599x^3 + (0{,}51205)x^2 - 43(-0{,}02599)x - 7(0{,}51205)x + 5 + 42(-0{,}02599) + 6(0{,}51205)$$

$$\therefore \hat{y}_{\text{Galerkin}} \simeq -0{,}02599x^3 + 0{,}51205x^2 - 2{,}4678x - 6{,}98072$$

3.3. Método de mínimos cuadrados

Para este caso se tiene que:

$$w = \frac{dR}{da} = \frac{d(12ax^3 + 3bx^2 + 86ax + 14bx - 126a - 18b - 15)}{da} =$$

$$12x^3 + 86x - 126$$

$$I = \int_1^6 wRdx = \int_1^6 (12x^3 + 86x - 126)(12ax^3 + 3bx^2 + 86ax + 14bx - 126a - 18b - 15)dx$$

$$= \frac{17089637840a}{21} + \frac{50836645b}{6} - 71400$$

$$I = 0$$

Obteniendo la ecuación:

$$\frac{17089637840a}{21} + \frac{5083645b}{6} - 71400 = 0 \tag{13}$$

Se procede a hallar la otra ecuación:

$$= \frac{dR}{db} = \frac{d(12ax^3 + 3bx^2 + 86ax + 14bx - 126a - 18b - 15)}{db} =$$
$$3x^2 + 14x - 18$$

$$I = \int_1^6 wRdx = \int\limits_1^6 (3x^2 + 14x - 18)(12ax^3 + 3bx^2 + 86ax + 14bx - 126a - 18b - 15)dx$$
$$= \frac{3404065a}{6} + \frac{120890b}{3} - 5550$$
$$I = 0$$

Obteniendo así la ecuación:

$$\frac{3404065a}{6} + \frac{120890b}{3} - 5550 = 0 \tag{14}$$

Resolviendo el sistema formado por 14 y 13 se halla la solución aproximada:

$$a \simeq -5{,}64857 \times 10^{-5}$$
$$b \simeq 0{,}13852$$
$$\hat{y} \simeq (-5{,}64857 \times 10^{-5})x^3 + (0{,}13852)x^2 - 43(-5{,}64857 \times 10^{-5})x$$
$$-7(0{,}13852)x + 5 + 42(-5{,}64857 \times 10^{-5}) + 6(0{,}13852)$$
$$\therefore \hat{y}_{\text{mínimos cuadrados}} \simeq -5{,}64857 \times 10^{-5}x^3 + 0{,}13852x^2 - 0{,}96721x + 5{,}8274$$

En la figura 1 se enseñan las solución analítica y las aproximaciones hechas por el momento.

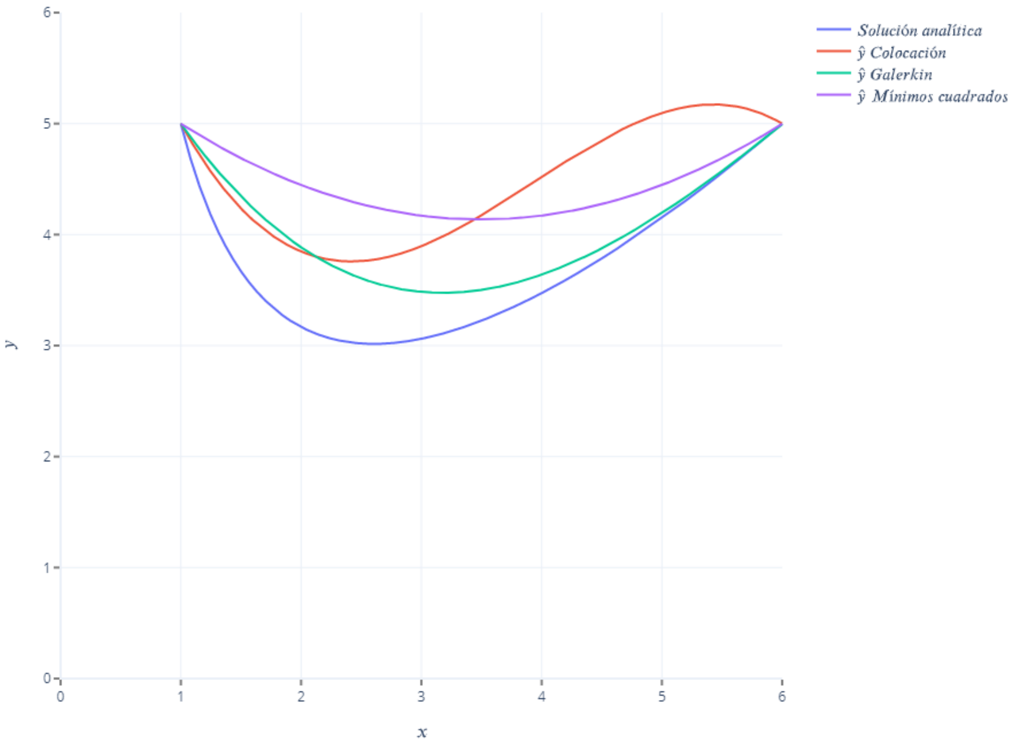

Figura 1: Gráfica de $y(x)$ y algunas aproximaciones.

4. Solución aproximada usando el método de elementos finitos

Al igual que en los métodos anteriores, este método consiste en buscar una aproximación igualando el promedio del residuo a 0, esto es :

$$I = \int_a^b wRdx = 0$$

entonces la idea, es "partir" el dominio en n partes (elementos) de tamaño constante h, por lo que se tendrá $n+1$ nodos, esta situación se ilustra en la figura 2.

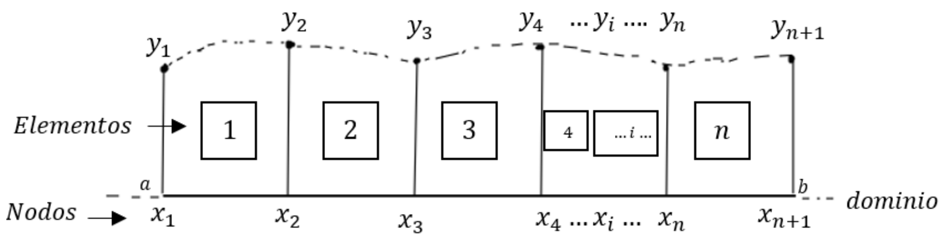

Figura 2: Partición en elementos de un dominio de $y(x)$

A diferencia de los métodos anteriores, el método de elementos finitos aproxima cada subsección del dominio con una función de prueba diferente, aunque tenga la misma forma (lineal, de segundo orden, etc.).

entonces para este caso el promedio del residuo está dado por:

$$I = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} w \left(A(x)\frac{d^2\hat{y}}{dx^2} + B(x)\frac{d\hat{y}}{dx} + C(x)\hat{y} - D \right) = 0$$

Se debe tener en cuenta que A y B son funciones de x, entonces:

$$I = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} w \left(A(x)\frac{d^2\hat{y}}{dx^2} + B(x)\frac{d\hat{y}}{dx} + C(x)\hat{y} - D \right) = 0$$

Recordando integración por partes:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Ahora se procede así:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} w \left(A\frac{d^2\hat{y}}{dx^2} \right) dx \rightarrow u = wA \wedge dv = \frac{d^2\hat{y}}{dx^2}$$

$$du = dwA + wdA \wedge v = \frac{d\hat{y}}{dx}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} w \left(A\frac{d^2\hat{y}}{dx^2} \right) dx = wA\frac{d\hat{y}}{dx}\bigg|_{x_i}^{x_i+1} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(A\frac{dw}{dx} \right) \frac{d\hat{y}}{dx} dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(w\frac{dA}{dx} \right) \frac{d\hat{y}}{dx} dx$$

Por lo que el promedio del residuo es:

$$I = \sum_{i=1}^{n} \left(\begin{array}{l} -\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \left(A\frac{dw}{dx} \right) \frac{d\hat{y}}{dx} dx + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} wB\frac{d\hat{y}}{dx} dx + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} Cw\hat{y}dx \\ -D\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} wdx + wA\frac{d\hat{y}}{dx}\Big|_{x_i}^{x_i+1} - \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \left(w\frac{dA}{dx} \right) \frac{d\hat{y}}{dx} dx \end{array} \right) = 0$$

Ahora consideramos las funciones de aproximación:

4.1. Aproximación usando una función de interpolación linea $y(x) = a + bx$

para este caso se tiene que:

$$\hat{y} = c_1 x + c_2$$

esto lo que quiere decir que entre x_i y x_{i+1} se aproximará con una recta $\hat{y}$, es decir:

$$\begin{gathered} \hat{y} = c_1 x + c_2 \rightarrow \hat{y}_i = c_1 x_i + c_2 \wedge \hat{y}_{i+1} = c_1 x_{i+1} + c_2 \\ \rightarrow c_1 = \frac{\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_i}{x_{i+1} - x_i} \wedge c_2 = \frac{x_{i+1}\hat{y}_i - x_i\hat{y}_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} \\ \rightarrow \hat{y} = \frac{\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_i}{x_{i+1} - x_i} x + \frac{x_{i+1}\hat{y}_i - x_i\hat{y}_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} \rightarrow \hat{y} = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}\hat{y}_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\hat{y}_{i+1} \\ H_1 = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}\hat{y} \wedge H_2 = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \rightarrow \hat{y} = H_1\hat{y}_i + H_2\hat{y}_{i+1} \end{gathered}$$

Con el fin de transformar la ecuación $I = 0$ en forma matricial se definen las siguientes funciones:

- Función de forma:

$$H_1 = \frac{x_{i+1} - x}{h_i}\hat{y} \wedge H_2 = \frac{x - x_i}{h_i}$$

$$\begin{gathered} {H_1}' = -\tfrac{1}{h_i} \\ {H_2}' = -\tfrac{1}{h_i} \end{gathered}$$

- Función de prueba:

$$\begin{gathered} \hat{y} = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y}_i \\ \hat{y}_{i+1} \end{bmatrix} \\ \tfrac{d\hat{y}}{dx} = \begin{bmatrix} {H_1}' & {H_2}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y}_i \\ \hat{y}_{i+1} \end{bmatrix} \end{gathered}$$

- Función de peso:

$$\begin{gathered} w = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \\ \tfrac{dw}{dx} = \begin{bmatrix} {H_1}' \\ {H_2}' \end{bmatrix} \end{gathered}$$

entonces I toma la forma siguiente:

$$I=\sum_{i=1}^{n}\left(\begin{array}{l} -\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} A\begin{bmatrix} H_1{}' \\ H_2{}' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_1{}' & H_2{}' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{y}_i \\ \hat{y}_{i+1} \end{bmatrix}dx+\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} B\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_1{}' & H_2{}' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{y}_i \\ \hat{y}_{i+1} \end{bmatrix}dx \\ +Aw\left.\frac{d\hat{y}}{dx}\right|_{x_i}^{x_i+1}+\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} C\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{y}_i \\ \hat{y}_{i+1} \end{bmatrix}dx-D\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}dx \\ -\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{dA}{dx}\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_1{}' & H_2{}' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{y}_i \\ \hat{y}_{i+1} \end{bmatrix}dx \end{array}\right)=0$$

$$\rightarrow\sum_{i=1}^{n}\left(\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\left\{\begin{array}{l} -A\begin{bmatrix} H_1{}' \\ H_2{}' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_1{}' & H_2{}' \end{bmatrix}+B\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_1{}' & H_2{}' \end{bmatrix} \\ +C\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix}-\frac{dA}{dx}\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_1{}' & H_2{}' \end{bmatrix} \end{array}\right\}\begin{bmatrix} \hat{y}_i \\ \hat{y}_{i+1} \end{bmatrix}dx\right)+Aw\left.\frac{d\hat{y}}{dx}\right|_a^b$$

$$=\sum_{i=1}^{n}D\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}dx$$

$$\rightarrow\sum_{i=1}^{n}\left(\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\left\{\begin{array}{l} -A\begin{bmatrix} H_1{}' \\ H_2{}' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_1{}' & H_2{}' \end{bmatrix}+B\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_1{}' & H_2{}' \end{bmatrix} \\ +C\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix}-\frac{dA}{dx}\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_1{}' & H_2{}' \end{bmatrix} \end{array}\right\}dx\begin{bmatrix} \hat{y}_i \\ \hat{y}_{i+1} \end{bmatrix}\right)+Aw\left.\frac{d\hat{y}}{dx}\right|_a^b$$

$$=\sum_{i=1}^{n}D\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}dx$$

Ahora observando la ecuación se puede notar que:

$$\rightarrow\sum_{i=1}^{n}\left(\overbrace{\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\left\{\begin{array}{l} -A\begin{bmatrix} H_1{}' \\ H_2{}' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_1{}' & H_2{}' \end{bmatrix}+B\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_1{}' & H_2{}' \end{bmatrix} \\ +C\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix}-\frac{dA}{dx}\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_1{}' & H_2{}' \end{bmatrix} \end{array}\right\}}^{M_i}\overbrace{\begin{bmatrix} \hat{y}_i \\ \hat{y}_{i+1} \end{bmatrix}}^{Y_i}dx\right)+Aw\left.\frac{d\hat{y}}{dx}\right|_a^b$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{D\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}dx}_{G_i}$$

Donde M_i es una matriz de 2×2, Y_i de 2×1 al igual que G_i. $i=1,2,3...,n+1$.
Teniendo lo anterior en cuenta la ecuación puede realizar un arreglo matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{12} & a_{33} & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & a_{(n-2)(n-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{(n-1)(n-2)} & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}}_{K} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}}_{F}$$

Donde K se denomina matriz global de rigidez, X matriz global de deformación y F matriz global de fuerza, por la similitud con el sistema masa resorte. De esta manera Se debE obtener una matriz K invertible, para despejar del sistema $KX = F$, $X = X'F$ y así obtener la aproximación de $y(x)$, es importante los términos $a_{i,i}$ serán modificado dos veces por dos matrices diferentes M.

Respecto al termino $Aw\frac{d\hat{y}}{dx}\Big|_a^b$ no se tienen en cuenta, pues son condiciones generalmente desconocidos de los sistemas. Además y_i y y_n son conocidos

Recordando que el problema particular a resolver es:

$$2x^2\frac{d^2y(x)}{dx^2} + x\frac{dy(x)}{dx} - 3y(x) = 0$$
$$\text{Dominio: } 1 \leqslant x \leqslant 6$$
$$\left.\begin{array}{l} y(1) = 5 \\ y(6) = 5 \end{array}\right\} \text{Condiciones de frontera}$$
$$\rightarrow A = 2x^2, B = x, C = -3, D = 0$$

$$\rightarrow I = \sum_{i=1}^{n}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left\{\begin{array}{l} -2x^2\begin{bmatrix} H_1{}' \\ H_2{}' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_1{}' & H_2{}' \end{bmatrix} + x\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_1{}' & H_2{}' \end{bmatrix} \\ -3\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} - 4x\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_1{}' & H_2{}' \end{bmatrix} \end{array}\right\} dx \begin{bmatrix} \hat{y}_i \\ \hat{y}_{i+1} \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\rightarrow I = \sum_{i=1}^{n}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left\{\begin{array}{l} -2x^2\begin{bmatrix} H_1{}' \\ H_2{}' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_1{}' & H_2{}' \end{bmatrix} - 3x\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_1{}' & H_2{}' \end{bmatrix} \\ -3\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \end{array}\right\} dx \begin{bmatrix} \hat{y}_i \\ \hat{y}_{i+1} \end{bmatrix}\right) = 0$$

Para terminar la solución usando la función de interpolación de la forma $y = a+bx$ se usa el software Matlab:

```matlab
function Elementos_finitos_trabajo
clear all
close all
clc

syms x xi xii y d_Ter1 d_Ter2 d_Ter3  %%% lista de las variables simólicas en el espacio de trabajo


% Ingresar las funciones de forma para la utilización de la FEA.

hi=xii-xi;
H1=(xii-x)/hi;
H2 = (x-xi)/hi;

% Ingresar los vectores de la función de peso y la función de prueba
W=[H1;H2]; % Ingrese la función de peso como un vector columna (2,1)
dW=diff(W,x); % Diferencial  como vector columna de la función W con respecto a x
Y=[H1 H2]; % Ingrese la función de peso como un vector fila (2,1)
dY=diff(Y,x); % Diferencial  como vector fila de la función W con respecto a x
```

$$\boxed{\begin{gathered} h_i = x_{i+1} - x_i \\ H_1 = \frac{x_{i+1} - x}{h_i}\,\hat{y} \wedge H_2 = \frac{x - x_i}{h_i} \end{gathered}}$$

$$H_1^{'} = -\frac{1}{h_i}$$

$$H_2^{'} = -\frac{1}{h_i}$$

$$\boxed{\hat{y} = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y}_i \\ \hat{y}_{i+1} \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\frac{d\hat{y}}{dx} = \begin{bmatrix} H_1^{'} & H_2^{'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y}_i \\ \hat{y}_{i+1} \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{w = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\frac{dw}{dx} = \begin{bmatrix} H_1^{'} \\ H_2^{'} \end{bmatrix}}$$

```matlab
% Condiciones geométrica del dominio
n=10; % Número de divisiones del dominio, este se variará para ver la influencia de este parámetro
a=1; % Límite inferior del dominio
b=6;   % Límite superior del dominio
hi=(b-a)/n; % Tamaño de la división

%%% Ingresamos cada término de la ecuación diferencial a analizar por
%%% elementos finitos

Ter1=-2*x^2*dW*dY; % Definimos ter1, según ecuación vectorial
d_Ter1=int(Ter1,x,xi,xii); % integramos ter1, en terminos genericos (simbólicos) xi y xii
Ter2=-3*x*W*dY; % Definimos ter2, según ecuación vectorial
d_Ter2=int(Ter2,x,xi,xii);% integramos ter2, en terminos genericos (simbólicos) xi y xii
Ter3=-3*W*Y;  % Definimos ter3, según ecuación vectorial
d_Ter3=int(Ter3,x,xi,xii); % integramos ter2, en terminos genericos (simbólicos) xi y xii
TerSum= d_Ter1+d_Ter2+d_Ter3; % Suma los términos que dependen de yi, yi+1 (izquierda de la ecuación vectorial)

%%% Inicializamos la matriz de rigidez y el vector con valore de cero

K=zeros(n+1); % Matriz de rigidez cuadrada de tamaño (n+1,n+1)
F=zeros(n+1,1); % Vector de tamaño (n+1,1);
```

$$\rightarrow I = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left\{ \begin{gathered} \overbrace{-2x^2 \begin{bmatrix} H_1^{'} \\ H_2^{'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1^{'} & H_2^{'} \end{bmatrix}}^{\text{Ter\_1}} \overbrace{-3x \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1^{'} & H_2^{'} \end{bmatrix}}^{\text{Ter\_2}} \\ \underbrace{-3 \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix}}_{\text{Ter\_3}} \end{gathered} \right\} dx \begin{bmatrix} \hat{y}_i \\ \hat{y}_{i+1} \end{bmatrix} \right) = 0$$

```matlab
% Inicializamos los valores inicial y final del elemento
xi=a; % xi debe iniciar en el límite menor de y
xii=hi+a; % xii debe ser xi más el paso

% Ensamble de la matriz de rigídez, 'n' es el número de elementos

for i=1:1:n
    K1=eval(TerSum); % Ponemos la suma de terminos, en función de xi,xii para una iteación i

    %%% Ingresar los valores de la matriz de cada elemento a la matriz
    %%% global de rígidez

    K(i,i)=K(i,i)+K1(1,1);
    K(i,i+1)=K(i,i+1)+K1(1,2);
    K(i+1,i)=K(i+1,i)+K1(2,1);
    K(i+1,i+1)=K(i+1,i+1)+K1(2,2);

    xi=xi+hi; % Cambiamos le valor de xi, sumando a este el valor del paso hi
    xii=xii+hi; % Cambiamos le valor de xii, sumando a este el valor del paso hi
end

    %%% Ingrese las condiciones de frontera en la matriz global de rigidez
    K(1,:)=zeros(n+1,1); % llenamos la primera fila de la matriz de rigidez K de ceros
```

```
end

    %%% Ingrese las condiciones de frontera en la matriz global de rigidez
    K(1,:)=zeros(n+1,1); % llenamos la primera fila de la matriz de rigidez K de ceros
    K(1,1)=1; % Llevamos uno a el valor a_11, para al despejar el vector columna X se respete las condiciones de frontera

    K(n+1,:)=zeros(n+1,1);% llenamos la primera fila de la matriz de rigidez K de ceros
    K(n+1,n+1)=1;%%% Llevamos uno a el valor a_(n+1),(n+1),para al despejar
                 % el vector columna x se respete las condiciones de frontera

    F(1,1)=5; % Llevamos y(a) al vector columna F para que al despejar se respete las primera condición de frontera
    F(n+1,1)=5; %Llevamos y(b) al vector columna F para que al despejar se respete las primera condición de frontera

Sol=inv(K)*F; % Se obtiene la solución despejando X (valores de y(x)) del sistema KX=F

GG=xlsread('ecuaciones_diferenciales.xlsx','B1:C50002'); % Se lee solución analítica(que se toma como exacta)
ee=linspace(a,b,n+1); % Se genera vector de valor en x para graficar y(x) vs x

%Grafi=subs(GG,x,xx);
plot(ee,Sol,'r',GG(:,1),GG(:,2),'b') % Graficamos la solución analítica y la solución obtenida por el método de elementos
grid on

end
```

En la figura 3 Se enseña la gráfica de $y_{analítica}$ y $y_{Elementos\ lineal}$ que genera, el programa anteriormente mostrado, para $n = 10$

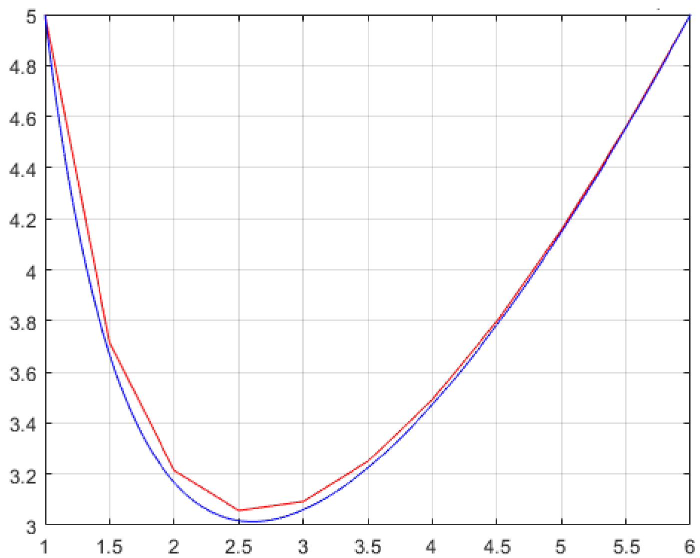

Figura 3: $y_{analítica}$ (color azul) y $y_{Elementos\ lineal}$ (color rojo), $n = 10$.

Nota: El programa anterior se adjunta con este documento. (Ver anexo 1)

4.2. Aproximación usando una función de interpolación de segundo grado $y(x) = a + bx^2$

Primero se define la función de prueba, análogamente al numeral anterior, pero teniendo en cuenta que $\hat{y} = c_1 + c_2x^2$:

$$\hat{y} = c_1 + c_2x^2 \rightarrow \hat{y}_i = c_1 + c_2x_i^2 \wedge \hat{y}_{i+1} = c_1 + c_2x_{i+1}^2$$
$$\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_i - = c_2x_{i+1}^2 - c_2x_i^2 \rightarrow c_2 = \frac{\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_i}{x_{i+1}^2 - x_i^2}$$
$$\hat{y}_i = c_1 + \frac{\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_i}{x_{i+1}^2 - x_i^2}x_i^2 \rightarrow c_1 = \hat{y}_i - \frac{\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_i}{x_{i+1}^2 - x_i^2}x_i^2$$
$$c_1 = \frac{\hat{y}_i x_{i+1}^2 - \hat{y}_i x_i^2 - \hat{y}_{i+1}x_i^2 + \hat{y}_i x_i^2}{x_{i+1}^2 - x_i^2} = \frac{\hat{y}_i x_{i+1}^2 - \hat{y}_{i+1}x_i^2}{x_{i+1}^2 - x_i^2}$$
$$\hat{y} = \frac{\hat{y}_i x_{i+1}^2 - \hat{y}_{i+1}x_i^2}{x_{i+1}^2 - x_i^2} + \frac{\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_i}{x_{i+1}^2 - x_i^2}x^2 = \frac{\hat{y}_i x_{i+1}^2 - \hat{y}_{i+1}x_i^2 + x^2(\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_i)}{x_{i+1}^2 - x_i^2} =$$
$$\frac{\hat{y}_i x_{i+1}^2 - \hat{y}_{i+1}x_i^2 + x^2\hat{y}_{i+1} - x^2\hat{y}_i}{x_{i+1}^2 - x_i^2} =$$
$$\frac{\hat{y}_i(x_{i+1}^2 - x^2) + \hat{y}_{i+1}(x^2 - x_i^2)}{x_{i+1}^2 - x_i^2} = \frac{x_{i+1}^2 - x^2}{x_{i+1}^2 - x_i^2}\hat{y}_i + \frac{x^2 - x_i^2}{x_{i+1}^2 - x_i^2}\hat{y}_{i+1}$$

- Función de forma:

$$h_i = x_{i+1}^2 - x_i^2$$
$$H_1 = \tfrac{x_{i+1}^2 - x^2}{h_i} \wedge H_2 \tfrac{x^2 - x_i^2}{h_i}$$
$$H_1{}' = -\tfrac{2x}{h_i} \wedge \; H_2{}' = \tfrac{2x}{h_i}$$

- Función de Prueba:

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y}_i \\ \hat{y}_{i+1} \end{bmatrix} \wedge \frac{d\hat{y}}{dx} = \begin{bmatrix} H_1{}' & H_2{}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y}_i \\ \hat{y}_{i+1} \end{bmatrix}$$

- Función de peso:

$$w = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \wedge \frac{dw}{dx} = \begin{bmatrix} H_1{}' \\ H_2{}' \end{bmatrix}$$

Recordando que el el promedio del residuo es:

$$I = \sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} -\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(A\frac{dw}{dx}\right)\frac{d\hat{y}}{dx}dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} wB\frac{d\hat{y}}{dx}dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} Cw\hat{y}dx \\ -D\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} wdx + wA\frac{d\hat{y}}{dx}\bigg|_{x_i}^{x_i+1} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(w\frac{dA}{dx}\right)\frac{d\hat{y}}{dx}dx \end{pmatrix} = 0$$

Entonces la ecuación vectorial no cambia, es decir:

$$2x^2\frac{d^2y(x)}{dx^2}+x\frac{dy(x)}{dx}-3y(x)=0$$

$$\text{Dominio: } 1\leqslant x\leqslant 6$$

$$\left.\begin{array}{l} y(1)=5\\ y(6)=5\end{array}\right\}\text{ Condiciones de frontera}$$

$$\rightarrow A=2x^2, B=x, C=-3, D=0$$

$$\rightarrow$$

$$\rightarrow I=\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left\{\begin{array}{l}-2x^2\begin{bmatrix}H_1{}'\\ H_2{}'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H_1{}' & H_2{}'\end{bmatrix}-3x\begin{bmatrix}H_1\\ H_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H_1{}' & H_2{}'\end{bmatrix}\\ -3\begin{bmatrix}H_1\\ H_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H_1 & H_2\end{bmatrix}\end{array}\right\}dx\begin{bmatrix}\hat{y}_i\\ \hat{y}_{i+1}\end{bmatrix}\right)=0$$

Para continuar con la resolución del problema se usa Matlab, este código es muy similar cuando la función de interpolación era de la forma $y=ax+b$ solo cambia las definiciones de las funciones de forma:

```
function Elementos_finitos_trabajo2
clear all
close all
clc

syms x xi xii y d_Ter1 d_Ter2 d_Ter3  %%% lista de las variables simólicas en el espacio de trabajo




hii=xii^2-xi^2; % Ingresar las funciones de forma para la utilización de la FEA.
H1=(xii^2-x^2)/hii;
H2 = (x^2-xi^2)/hii;

% Ingresar los vectores de la función de peso y la función de prueba
W=[H1;H2]; % Ingrese la función de peso como un vector columna (2,1)
dW=diff(W,x); % Diferencial  como vector columna de la función W con respecto a x
Y=[H1 H2]; % Ingrese la función de peso como un vector fila (2,1)
dY=diff(Y,x); % Diferencial  como vector fila de la función W con respecto a x
```

$$h_i=x_{i+1}^2-x_i^2$$

$$H_1=\frac{x_{i+1}^2-x^2}{h_i}\wedge H_2\frac{x^2-x_i^2}{h_i}$$

$$H_1^{'}=-\frac{2x}{h_i}\wedge H_2^{'}=\frac{2x}{h_i}$$

$$\hat{y}=\begin{bmatrix}H_1 & H_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{y}_i\\ \hat{y}_{i+1}\end{bmatrix}\wedge\frac{d\hat{y}}{dx}=\begin{bmatrix}H_1^{'} & H_2^{'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{y}_i\\ \hat{y}_{i+1}\end{bmatrix}$$

$$w=\begin{bmatrix}H_1\\ H_2\end{bmatrix}\wedge\frac{dw}{dx}=\begin{bmatrix}H_1^{'}\\ H_2^{'}\end{bmatrix}$$

En la figura 4 Se enseña la gráfica de $y_{analítica}$ y $y_{Elementos\ cuadrática}$ que genera el programa de elementos finitos cuando se tiene una función de interpolación cuadrática.

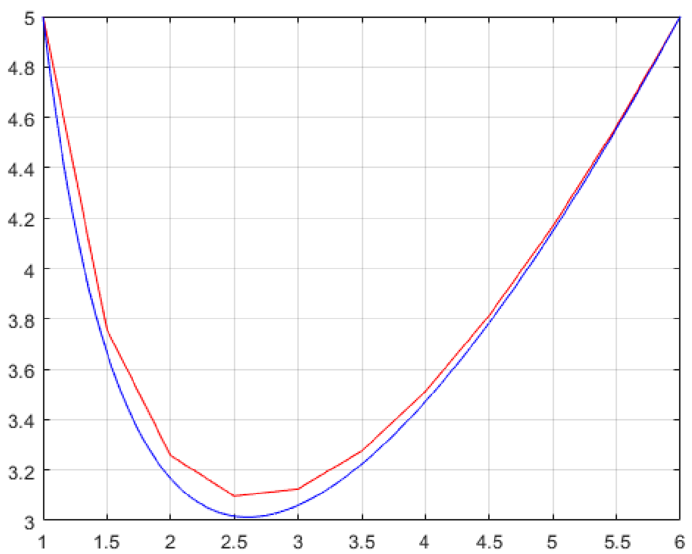

Figura 4: $y_{analítica}$ (color azul) y $y_{Elementos\ lineal}$ (cuadrática), $n=10$.

Nota: El programa de elementos finitos cuando se tiene una función de interpolación cuadrática se adjunta con este documento. (Ver anexo 2).

4.3. Comparación elementos finitos función usando dos funciones de interpolación: líneal $y = ax + b$ y de segundo grado $a + bx^2$

En la figura 5 se ilustra la gráfica de la aproximación a la solución mediante elementos finitos para una función de interpolación lineal para diferentes n.

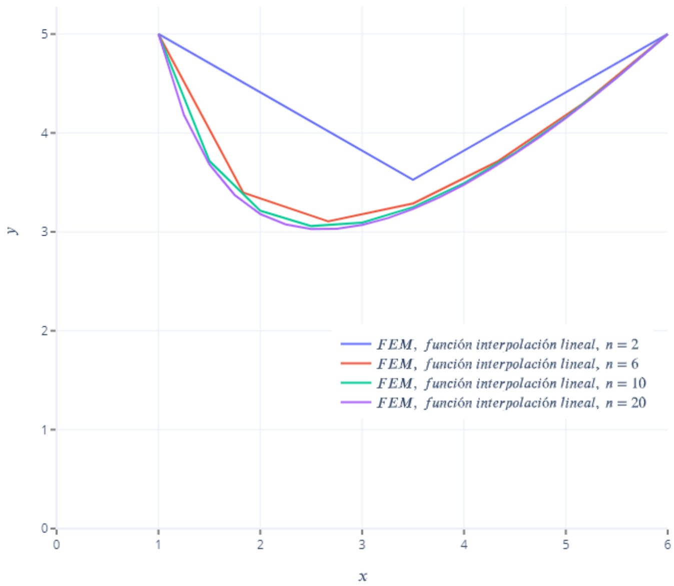

Figura 5: FEM función de interpolación lineal variando n.

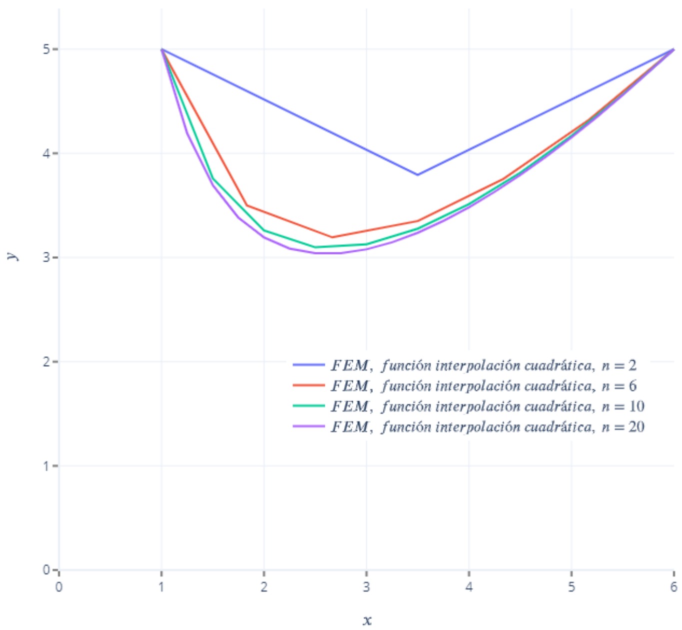

Figura 6: FEM función de interpolación cuadrática variando n.

En la figura 6 se ilustra la gráfica de la aproximación a la solución mediante elementos finitos para una función de interpolación cuadrática para diferentes n.

Comparando las figuras 5 y 6 se observa que en principio no hay mucha diferencia cuando se usa una función de interpolación lineal o cuadrática, lo que si es relevante es que al aumentar n (número divisiones) se aproxima más a una curva.

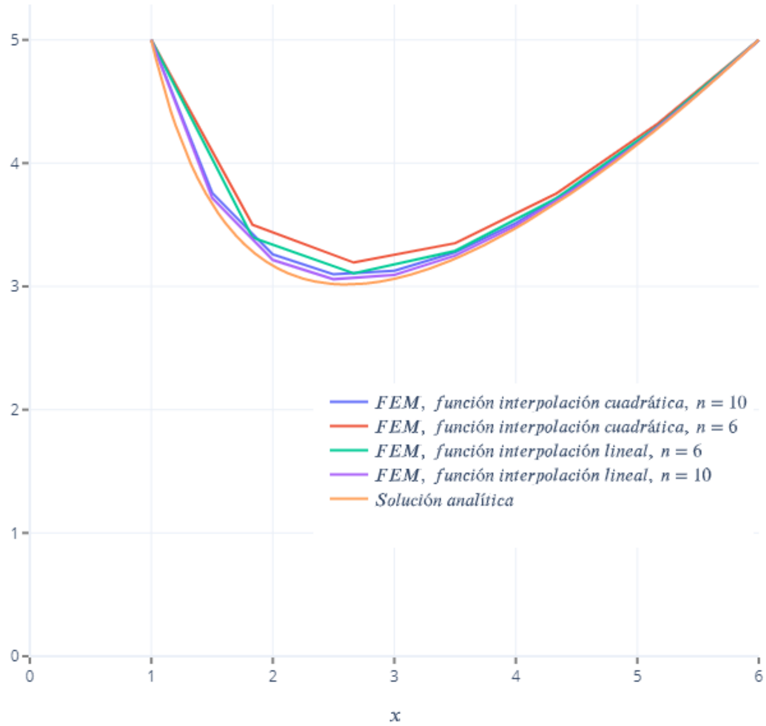

Figura 7: Comparación entre FEM con función de interpolación lineal y cuadrática

De la figura 7 se observa que para un n determinado se aproxima más cuando se usa una función de interpolación lineal, que una cuadrática, a medida que n aumenta, la solución aproximada con el método de FEM se acerca más a la solución analítica.

5. Graficación resultados

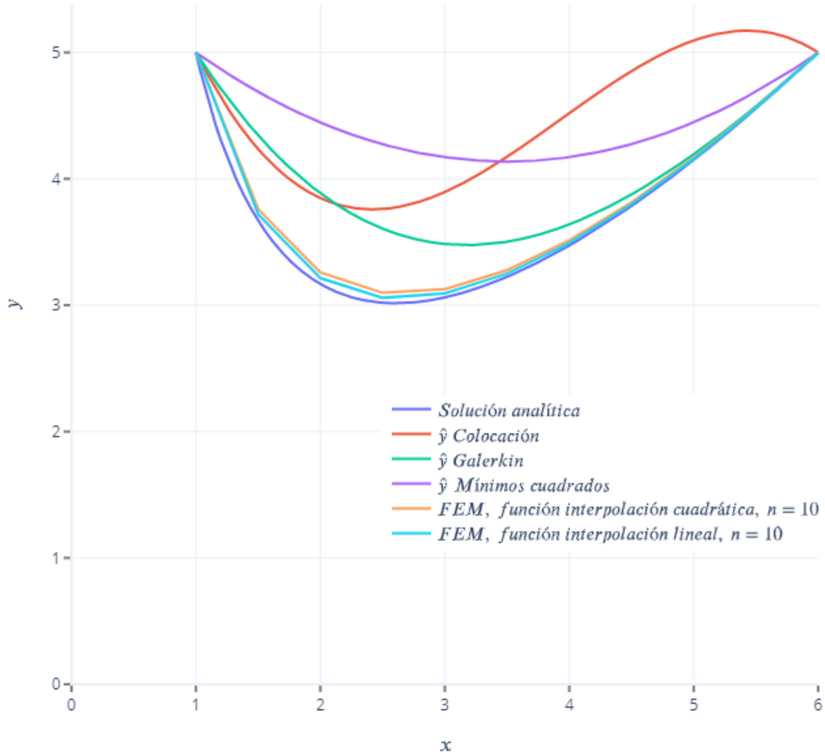

Figura 8: Comparación de soluciones aproximadas

Se resalta que los métodos de elementos finitos a pesar de tener pocas divisiones (n) es una mejor aproximación a la solución analítica de la ecuación diferencia que los otros métodos de aproximación (enseñados en este documento) para la solución de la ecuación diferencial.

6. Calculo de errores de aproximación respecto a la solución analítica y conclusiones

6.1. Calculo de errores:

Para esto se usará la siguiente expresión:

$$Error = \frac{|A_{teórica} - A_{Real}|}{A_{Real}}$$

En este caso $A_{teórica} = A_{solución\ analítica}$ y $A_{teórica}$ será el área de la solución aproximada. Como se tienen soluciones numéricas, entonces para hallar las respectivas áreas, se debe integrar numéricamente, para esto se usa el software de Matlab:

```
function calculo_errores
clc
clear all
y_analitica=xlsread('soluciones1.xlsx','B2:B50002'); % Se lee los valores de y de la solución analitica
y_colocacion=xlsread('soluciones1.xlsx','C2:C50002'); % Se lee los valores de y aproximada por método de colocación
y_galerkin=xlsread('soluciones1.xlsx','D2:D50002'); % Se lee los valores de y aproximada por método de Galerkin
y_min_cuadrados=xlsread('soluciones1.xlsx','E2:E50002'); % Se lee los valores de y aproximada por método de mín cuadráticos

x_1=xlsread('soluciones1.xlsx','F2:F50002'); % Se lee los valores de x para las aproximaciones anteriores

y_FEM_lineal10=xlsread('soluciones2.xlsx','B2:B12');  % Se lee los valores de y aproximada por método FEM funcion lineal
y_FEM_cuadratica10=xlsread('soluciones2.xlsx','C2:C12'); % Se lee los valores de y aproximada por método FEM funcion cuadratico
X_2=linspace(1,6,10+1); % Se genera vector de valores de x para las soluciones por FEM

A_analitica=trapz(x_1,y_analitica); % se halla area bajo la curva usando integracion númerica, método trapezoidal
A_colocacion=trapz(x_1,y_colocacion);
A__galerkin=trapz(x_1,y_galerkin);
A_min_cuadrados=trapz(x_1,y_min_cuadrados);
A_FEM_lineal10=trapz(X_2,y_FEM_lineal10);
A_FEM_cuadratica10=trapz(X_2,y_FEM_cuadratica10);

E_colocacion=abs(100*(A_analitica-A_colocacion)/A_analitica) % Calculo de errores con respecto a sln analítica
E_galerkin=abs(100*(A_analitica-A__galerkin)/A_analitica)
E_min_cuadrados=abs(100*(A_analitica-A_min_cuadrados)/A_analitica)
E_FEM_lineal10=abs(100*(A_analitica-A_FEM_lineal10)/A_analitica)
E_FEM_cuadratica10=abs(100*(A_analitica-A_FEM_cuadratica10)/A_analitica)
end
```

El anterior código se adjunta a este documento (ver anexo 3)
Luego de ejecutar el código anterior se obtiene los siguientes valores, enseñados en la tabla 1:

MÉTODO	ERROR %
Colocación	20.6079
Galerkin	8.4209
Mínimo Cuadrados	19.9140
FEM lineal	1.2131
FEM Cuadrática	1.8543

De la tabla anterior destaca que el menor error es obtenido por la aproximación hallada con FEM usando una aproximación lineal y no una cuadrática, lo que es concorde con lo mostrado en la figura 8. Además con un número relativamente pequeño de divisiones del dominio($n = 10$) en el método de elementos finitos se obtuvo un error de un orden de magnitud menor que en las soluciones aproximadas halladas con el método colocación y mínimos cuadrados.

6.2. Conclusiones

- El método de elementos finitos a pesar que es más robusto que los métodos de Galerkin, colocación y mínimos cuadrados, permite aproximarse mucho a las soluciones analíticas de las ecuaciones diferencias cuando se tiene un número de divisiones del dominio adecuado.
- Para el método de elementos finitos no siempre que tomemos una función de interpolación de mayor complejidad (o mayor grado) se obtendrá mejor aproximación de la solución de la ecuación diferencial.

7. Anexos

1. Anexo 1: elementos_finitos_trabajo.m (anexo que contiene archivo en Matlab de la resolución de la ecuación diferencial usando FEM con función de interpolación líneal)
2. Anexo 2: elementos_finitos_trabajo2.m (anexo que contiene archivo en Matlab de la resolución de la ecuación diferencial usando FEM con función de interpolación cuadrática)

3. Anexo 3: graficos_elementos_metodos.ipynb (anexo que contiene programa escrito en python (archivo.ipynb), para la graficación de las algunas soluciones aproximadas y la solución analitica)
4. Anexo 4: ecuaciones_diferenciales.xlsx (Hoja de calculo que contiene la solución analítica de la ecuación diferencial)
5. Anexo 7: soluciones1.xlsx (Hoja de calculo que contiene la solución analítica de la ecuación diferencial, soluciones halladas por los métodos de colocación, Galerkin y mínimos cuadrados y también incluye los respectivos valores de x)
6. Anexo 6: soluciones2.xlsx (Hoja de calculo que contiene los valores de y de las soluciones halladas a por FEM para la aproximación usando una función lineal y una función cuadrática con 6 divisiones del dominio)

Referencias

[1] S. James, CÁLCULO, TRANSENDENTES TEMPRANAS, Octava edi. CENGAGE.

[2] D. Zill, Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado., Novena edi. 2009.