The University of New South Wales

School of Electrical Engineering and
Computer Science and Engineering

The Élan Am386SC300 Portable Computer

John Zaitseff (2120715)

Bachelor of Engineering (Computer Engineering)

October 1995

Supervisor: A/Prof. Branko Celler
Assessor: Dr. Tim Hesketh

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

Capítulo 1

Transformada de Fourier

Considere $f(t)$ una función periódica continua a tramos y con un número finito de discontinuidades en un periodo, por lo tanto $f(t)$ tiene asociada una serie de Fourier, es decir:

$$f(t) \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

donde $c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-jn\omega_0 t} dt$, entonces que sucedería si el periodo de dicha función tiende a ser grande, o sea suponga que dicho periodo es infinito, por lo tanto se tiene que $T \to \infty$. En los puntos de continuidad tenemos que

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-jn\omega_0 t} dt \right) e^{jn\omega_0 t}$$

como $T \to \infty$ entonces $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} \to 0$, y por lo tanto para $\omega = n\omega_0$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \lim_{T\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-jn\omega_0 t} dt \right) e^{jn\omega_0 t} \\
&= \lim_{T\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt \right) e^{j\omega t} \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{\omega_0\to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt \right) e^{j\omega t} \omega_0
\end{aligned}$$

sea $\omega_0 = \Delta\omega$ por lo tanto

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\omega_0\to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt \right) e^{j\omega t} \omega_0 \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{\Delta\omega\to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt \right) e^{j\omega t} \Delta\omega
\end{aligned}$$

Sea $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt$ entonces la integral anterior se puede escribir como:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\Delta\omega \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt \right) e^{j\omega t} \Delta\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\Delta\omega \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t} \Delta\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

a la integral $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt$ se le llama transformada de Fourier y $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega$ se le conoce como la transformada inversa de Fourier, tambien denotadas por:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\{f(t)\} &= F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt \\ \mathfrak{F}^{-1}\{F(\omega)\} &= f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

Definición 1 *: Si $f(t)$ periódica de periodo infinito, continua a tramos y con un número finito de discontinuidades en su periodo, se define su transformada de Fourier como*

$$\mathfrak{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

y su transformada inversa como

$$\mathfrak{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega$$

Ejemplo 2 *: Halle la transformada de Fourier y grafíquela de la función* $f(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \textit{en cualquier otra parte} \end{cases}$

Solución 3 *:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\{f(t)\} &= F(\omega) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} 1 e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega}\, e^{-j\omega t} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \\ &= -\frac{1}{j\omega} \left(e^{-j\omega\left(\frac{\tau}{2}\right)} - e^{-j\omega\left(-\frac{\tau}{2}\right)} \right) \\ &= \frac{2}{\omega} \frac{\left(e^{j\omega\left(\frac{\tau}{2}\right)} - e^{-j\omega\left(\frac{\tau}{2}\right)} \right)}{2j} \\ &= \frac{2}{\omega} sen\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = \frac{\tau}{\frac{\omega\tau}{2}} sen\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \\ &= \tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \end{aligned}$$

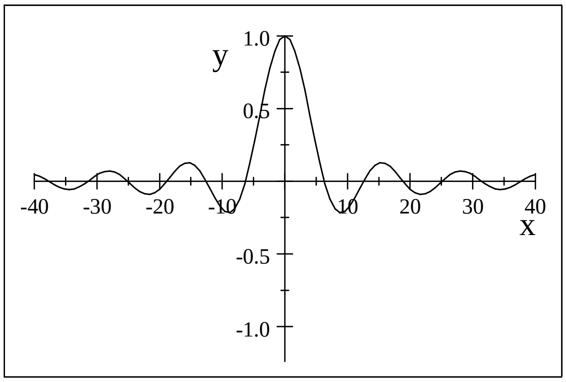


Grafico de la funcion Sa

1.0.1. Propiedades de la transformada de Fourier

Exercise 4 *: Sean $f(t)$ y $g(t)$ funciones periódicas de periodo infinito, integrable en todo $\mathbb{R}$, pruebe que:*
1. La transformada de Fourier es una transformación lineal.
2. $\mathfrak{F}\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{|\alpha|}F\left(\dfrac{\omega}{\alpha}\right)$
3. $\mathfrak{F}\{f(t+t_0)\} = e^{j\omega t_0}\mathfrak{F}\{f(t)\}$

Solución 5 *: Para demostrar que latransformada de Fourier es una transformación lineal sedebe demostrat las dos condiciones de transformación lineal, es decir, $T(\alpha+\beta) = T(\alpha) + T(\beta)$ y que $T(a\alpha) = aT(\alpha)$ o mejor aún que $T(a\alpha + b\beta) = aT(\alpha) + bT(\beta)$. Usando la transformada de Fourier se tiene entonces que para escalares α y β se tiene que:*

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha f(t) + \beta g(t))\, e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\alpha f(t)\, e^{-j\omega t} + \beta g(t)\, e^{-j\omega t}\right) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha f(t)\, e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \beta g(t)\, e^{-j\omega t} dt \\
&= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt + \beta \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-j\omega t} dt \\
&= \alpha\mathfrak{F}\{f(t)\} + \beta\mathfrak{F}\{g(t)\}.
\end{aligned}
$$

por lo tanto la transformada de Fourier es una transformación lineal
2. Hallemos la transformada de $f(\alpha t)$, es decir:

$$\mathfrak{F}\{f(\alpha t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha t)\, e^{-j\omega t} dt$$

sea $u = \alpha t$ entonces $du = \alpha dt$ y si $\alpha > 0$ cuando $t \to \infty$ entonces $u \to \infty$ y cuando

$t \to -\infty$ entonces $u \to -\infty$ por lo tanto

$$\mathfrak{F}\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-j\frac{\omega}{\alpha}u} du = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \qquad ((*))$$

ahora que hubiera sucedido si $\alpha < 0$, se tiene que cuando $t \to \infty$ entonces $u \to -\infty$ y cuando $t \to -\infty$ entonces $u \to \infty$ por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\{f(\alpha t)\} &= \frac{1}{\alpha}\int_{\infty}^{-\infty} f(u)\, e^{-j\frac{\omega}{\alpha}u} du \\ &= -\frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-j\frac{\omega}{\alpha}u} du = -\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \qquad ((**)) \end{aligned}$$

de $(*)$ y $(**)$ se concluye que $\mathfrak{F}\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$

3. Veamos por último que $\mathfrak{F}\{f(t+t_0)\} = e^{-j\omega t_0}\mathfrak{F}\{f(t)\}$. En efecto

$$\mathfrak{F}\{f(t+t_0)\} = \int_{\infty}^{-\infty} f(t+t_0)\, e^{-j\omega t} dt$$

Sea $u = t + t_0$ por lo tanto $du = dt$ y cuando $t \to \infty$ entonces $u \to \infty$ y cuando $t \to -\infty$ entonces $u \to -\infty$ por luego:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\{f(t+t_0)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t+t_0)\, e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-j\omega(u-t_0)} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-j\omega u + j\omega t_0} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-j\omega u} e^{j\omega t_0} du \\ &= e^{j\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-j\omega u} du \\ &= e^{j\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt \\ &= e^{j\omega t_0}\mathfrak{F}\{f(t)\} \end{aligned}$$

Exercise 6 *: 1. Halle la transformada de Fourier $\mathfrak{F}\left\{e^{j\omega_0 t} f(t)\right\}$*

2. Halle la transformada de Fourier de $f(t) * g(t)$.

Solución 7 *: Si $f(t)$ es integrable en todo $\mathbb{R}$ se tiene que:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\left\{e^{j\omega_0 t} f(t)\right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} f(t)\, e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} e^{j\omega_0 t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt \\ &= F(\omega - \omega_0) \end{aligned}$$

tenga presente que $\mathfrak{F}\{f(t)\} = F(\omega)$

2. Veamos ahora la transformada de Fourier de $f(t) * g(t)$.

Recuerde que $f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau$. *Tenga presente igualmente que* $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$. *Ahora calculemos* $\mathfrak{F}\{f(t) * g(t)\}$ *en efecto:*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}\{f(t) * g(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} (f(t) * g(t)) e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau \right) e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) e^{-j\omega t} d\tau dt
\end{aligned}$$

sea $u = t - \tau$ *entonces* $t = u + \tau$ $du = dt$ *y por lo tanto*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}\{f(t) * g(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) e^{-j\omega t} d\tau dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(u) e^{-j\omega(u+\tau)} du d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(u) e^{-j\omega u} e^{-j\omega\tau} du d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-j\omega u} du \\
&= F(\omega) G(\omega)
\end{aligned}$$

Exercise 8 *: Use el resultado anterior para encontrar la transformada de Fourier de* $f(t) g(t)$, *siendo* f *y* g *integrables en todo* $\mathbb{R}$ *y de periodo infinito*

Solución 9 *: Se tiene que* $\mathfrak{F}\{f(t) * g(t)\} = F(\omega) G(\omega)$ *por lo tanto* $\mathfrak{F}^{-1}\{F(\omega) G(\omega)\} = f(t) * g(t)$, *esto es:*

$$\mathfrak{F}^{-1}\{F(\omega) G(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G(\omega) e^{j\omega t} d\omega = f(t) * g(t)$$

luego

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G(\omega) e^{-j\omega t} d\omega = f(-t) * g(-t)$$

pero

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G(\omega) e^{-j\omega t} d\omega = 2\pi (f(-t) * g(-t))$$

note que

$$f(-t) * g(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(-\tau) g(t - (-\tau)) d\tau$$

sea $u = -\tau$ *entonces* $du = -d\tau$ *y cuando* $\tau \to \infty$, $u \to -\infty$, *y cuando* $\tau \to -\infty$, $u \to \infty$, *por lo que*

$$\begin{aligned} f(-t) * g(-t) &= -\int_{\infty}^{-\infty} f(u)\, g(t-u)\, du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, g(t-u)\, du \\ &= f(t) * g(t) \end{aligned}$$

con lo que se concluye que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, G(\omega)\, e^{-j\omega t} d\omega &= 2\pi \left(f(-t) * g(-t) \right) && (*) \\ &= 2\pi \left[f(t) * g(t) \right] \end{aligned}$$

Ahora lo que se desea calcular es $\mathfrak{F}\{f(t) \cdot g(t)\}$, *esto es:*

$$\mathfrak{F}\{f(t) \cdot g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

que por el resultado que se acaba de obtener en $(*)$ *es:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\{f(t) \cdot g(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(t)\, e^{-j\omega t} dt \\ &= 2\pi \left[F(\omega) * G(\omega) \right] \end{aligned}$$

Exercise 10 *: Halle la transformada de Fourier de* $f^2(t)$ *para* $f(t)$ *integrable y de periodo infinito.*

Solución 11 *: Del resultado anterior se tiene que*

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\left\{f^2(t)\right\} &= \mathfrak{F}\{f(t) \cdot f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\, e^{-j\omega t} dt \\ &= 2\pi \left[F(\omega) * F(\omega) \right] \end{aligned}$$

note que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\, e^{-j\omega t} dt &= 2\pi \left[F(\omega) * F(\omega) \right] \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)\, F(\omega - \tau)\, d\tau \end{aligned}$$

si $\omega = 0$ *se obtiene:*

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\, dt &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)\, F(-\tau)\, d\tau \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)\, \overline{F}(\tau)\, d\tau \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left| F(\tau) \right|^2 d\tau \end{aligned}$$

Como τ es una variable muda se tiene que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\, dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega$$

acabamos de demostrar el siguiente teorema.

Theorem 12 *: (De Parseval) Sea $f(t)$ una función periódica de periodo infinito, continua a tramos y con un número finito de discontinuidades en el intervalo donde está definido, entonces*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\, dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega$$

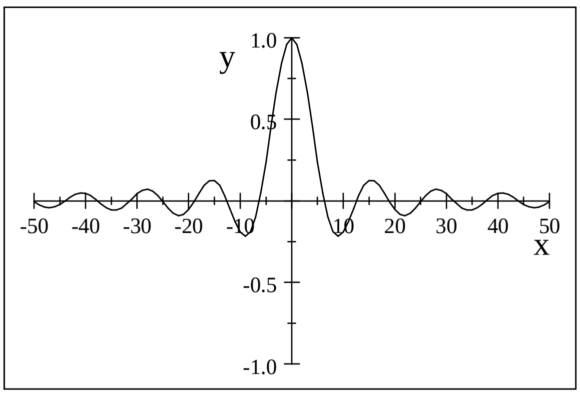
Definición 13 *: (Espectro en frecuencias) Se define el espectro en frecuencias de una señal $f(t)$ como el gráfico de ω vs $|F(\omega)|$ siendo $F(\omega)$ la transformada de Fourier de $f(t)$*

Ejemplo 14 *: Halle el espectro en frecuencia de* $f(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{T}{2} < t < -\frac{T}{2} \\ 0 & E.O.P \end{cases}$

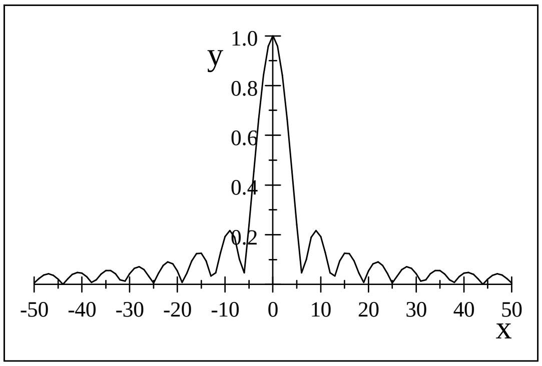
Solución 15 *:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\{f(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t}\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\ &= -\frac{1}{j\omega}\left(e^{-j\omega\frac{T}{2}} - e^{j\omega\frac{T}{2}}\right) = \frac{2}{\omega}\left(\frac{e^{j\omega\frac{T}{2}} - e^{-j\omega\frac{T}{2}}}{2j}\right) \\ &= \frac{2}{\omega} sen\left(\frac{\omega T}{2}\right) = \frac{T}{\frac{\omega T}{2}} sen\left(\frac{\omega T}{2}\right) = T Sa\left(\frac{\omega T}{2}\right) \end{aligned}$$

$\frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$



$\left|\frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|$



Ejemplo 16 *: Halle la transformada de Fourier de* $f(t) = \delta(t - t_0)$

Solución 17 *: Recuerde que*

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty & si\ t = t_0 \\ 0 & si\ t \neq t_0 \end{cases} = \lim_{b \to 0} \begin{cases} 0 & si\ t > t_0 + b \\ \dfrac{1}{2b} & si\ t_0 - b < t < t_0 + b \\ 0 & si\ t < t_0 - b \end{cases}$$

luego $\int_{-a}^{a} f(t)\,\delta(t - t_0)\,dt$ *para* $-a < t_0 < a$ *está calculada como:*

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\delta(t - t_0)\,dt = \lim_{b \to 0} \int_{t_0 - b}^{t_0 + b} \frac{1}{2b} f(t)\,dt$$

si la primitiva de $f(t)$ *es* $F(t)$ *esto es* $\int f(t)\,dt = F(t)$ *se tiene que:*

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} f(t)\,\delta(t - t_0)\,dt &= \lim_{b \to 0} \int_{t_0 - b}^{t_0 + b} \frac{1}{2b} f(t)\,dt = \lim_{b \to 0} \frac{1}{2b} \int_{t_0 - b}^{t_0 + b} f(t)\,dt \\
&= \lim_{b \to 0} \frac{1}{2b}\, F(t)\Big|_{t_0 - b}^{t_0 + b} \\
&= \lim_{b \to 0} \frac{1}{2b} \left[F(t_0 + b) - F(t_0 - b)\right] \\
&= \lim_{b \to 0} \frac{1}{2b} \left[F(t_0 + b) - F(t_0) - F(t_0 - b) + F(t_0)\right] \\
&= \frac{1}{2} \lim_{b \to 0} \left[\frac{F(t_0 + b) - F(t_0)}{b} - \frac{F(t_0 - b) - F(t_0)}{b}\right] \\
&= \frac{1}{2} \lim_{b \to 0} \left[\frac{F(t_0 + b) - F(t_0)}{b} + \frac{F(t_0 - b) - F(t_0)}{-b}\right] \\
&= \frac{1}{2} \left(\left.\frac{dF(t)}{dt}\right|_{t = t_0} + \left.\frac{dF(t)}{dt}\right|_{t = t_0} \right) = \frac{1}{2}\left(2f(t_0)\right) \\
&= f(t_0)
\end{aligned}$$

por consiguiente

$$\mathfrak{F}\left\{\delta\left(t-t_0\right)\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(t-t_0\right)e^{-j\omega t}dt$$

que por el ejercicio anterior nos da que

$$\mathfrak{F}\left\{\delta\left(t-t_0\right)\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(t-t_0\right)e^{-j\omega t}dt=e^{-j\omega t_0}$$

Note que como consecuencia:

$$\mathfrak{F}\left\{\delta\left(t\right)\right\}=1$$

Ejemplo 18 *: Usando el ejercicio anterior, halle la transformada de Fourier de* $f\left(t\right)=e^{j\omega_0 t}$.

Solución 19 *: Tenga presente que*

$$f\left(t\right)=\mathfrak{F}^{-1}\left\{F\left(\omega\right)\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F\left(\omega\right)e^{j\omega t}d\omega$$

Por lo tanto del ejercicio anterior se tiene que:

$$\begin{aligned}\delta\left(t-t_0\right)&=\mathfrak{F}^{-1}\left\{e^{-j\omega t_0}\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega t_0}e^{j\omega t}d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega\left(t_0-t\right)}d\omega\end{aligned}$$

por lo que la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\left(t_0-t\right)\omega}d\omega=2\pi\delta\left(t-t_0\right)$$

Ahora

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\left\{e^{j\omega_0 t}\right\}&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt\\&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\left(\omega-\omega_0\right)t}dt\\&=2\pi\delta\left(\omega_0-\omega\right)\end{aligned}$$

pero $\delta(\omega_0 - \omega) = \delta(\omega - \omega_0)$ *por lo tanto*

$$\mathfrak{F}\left\{e^{j\omega_0 t}\right\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

Ejemplo 20 *: Halle la transformada de* $f(t) = sen(\alpha t)$ *y de* $f(t) = \cos(\alpha t)$

Solución 21 *: Recuerde que* $sen(\alpha t) = \dfrac{e^{j\alpha t} - e^{-j\alpha t}}{2j}$ *y que la transformada de Fourier es una transformación lineal, por lo tanto*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}\{sen(\alpha t)\} &= \mathfrak{F}\left\{\frac{e^{j\alpha t} - e^{-j\alpha t}}{2j}\right\} \\
&= \frac{1}{2j}\mathfrak{F}\left\{e^{j\alpha t} - e^{-j\alpha t}\right\} \\
&= \frac{1}{2j}\left[\mathfrak{F}\left\{e^{j\alpha t}\right\} - \mathfrak{F}\left\{e^{-j\alpha t}\right\}\right] \\
&= \frac{1}{2j}\left\{2\pi\delta(\omega - \alpha) - 2\pi\delta(\omega + \alpha)\right\} \\
&= \pi j\left\{\delta(\omega + \alpha) - \delta(\omega - \alpha)\right\}
\end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}\{\cos(\alpha t)\} &= \mathfrak{F}\left\{\frac{e^{j\alpha t} + e^{-j\alpha t}}{2}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\mathfrak{F}\left\{e^{j\alpha t} + e^{-j\alpha t}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathfrak{F}\left\{e^{j\alpha t}\right\} + \mathfrak{F}\left\{e^{-j\alpha t}\right\}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left\{2\pi\delta(\omega - \alpha) + 2\pi\delta(\omega + \alpha)\right\} \\
&= \pi\left\{\delta(\omega + \alpha) + \delta(\omega - \alpha)\right\}
\end{aligned}$$

Ejemplo 22 *: Grafique el espectro de* $\cos(\alpha t)$

Note que si $f(t)$ es una función par, integrable en $\mathbb{R}$, continua a tramos y con un número finito de discontinudades en $\mathbb{R}$, entonces su transformada de Fourier estaría dada por:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathfrak{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\cos(\omega t) - j sen(\omega t)\right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t)\, dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, sen(\omega t)\, dt \\ &= 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\, dt = 2F_c(\omega) \text{ por ser } f(t) \text{ par} \end{aligned}$$

note además que $F_c(\omega)$ es par ya que

$$F_c(-\omega) = \int_0^{\infty} f(t)\cos(-\omega t)\, dt = \int_0^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\, dt = F_c(\omega)$$

Ahora tenga presente que

$$\mathfrak{F}^{-1}\{F_c(\omega)\} = \mathfrak{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f(t)$$

por lo que

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathfrak{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \mathfrak{F}^{-1}\{2F_c(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2F_c(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_c(\omega)\left(\cos\omega t + j sen(\omega t)\right) d\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} F_c(\omega)\cos\omega t d\omega + j\int_{-\infty}^{\infty} F_c(\omega)\, sen(\omega t)\right] d\omega \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} F_c(\omega)\cos\omega t d\omega \text{ por ser } F_c(\omega) \text{ par} \end{aligned}$$

Analogamente si $f(t)$ hibiese sido impar entonces

$$F(\omega) = \mathfrak{F}\{f(t)\} = -2j\int_0^{\infty} f(t)\, sen(\omega t)\, dt = -2jF_s(\omega)$$

y

$$f(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \mathfrak{F}^{-1}\{-2jF_s(\omega)\} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} F_c(\omega)\, sen(\omega t)\, d\omega$$

Definición 23 *: Sea $f(t)$ una función continua a tramos y con un número finito de discontinuidades en $\mathbb{R}$, integrable en $\mathbb{R}$, se define su transformada coseno de Fourier como:*

$$F_c(\omega) = \mathfrak{F}_c\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\cos(\omega t)\,dt$$

y su transformada seno como:

$$F_s(\omega) = \mathfrak{F}_s\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\,sen(\omega t)\,dt$$

Análogamente se define la transformada inversas coseno como:

$$f(t) = \mathfrak{F}_c^{-1}\{2F_c(\omega)\} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_c(\omega)\cos(\omega t)\,d\omega$$

y la transformada inversa seno como:

$$f(t) = \mathfrak{F}_s^{-1}\{-2jF_s(\omega)\} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_s(\omega)\,sen(\omega t)\,d\omega$$

Ejemplo 24 *: Halle la transformada coseno de Fourier de la función* $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T \\ 0 & E.C.O.P \end{cases}$

Solución 25 *: En efecto:*

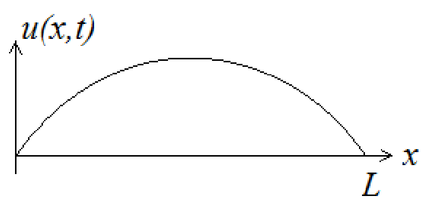
$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\{f(t)\} &= \int_0^\infty f(t)\cos(\omega t)\,dt \\ &= \int_0^T \cos(\omega t)\,dt \\ &= \frac{1}{\omega}\,sen(\omega t)\Big|_0^T \\ &= \frac{T sen(\omega T)}{\omega T} = TS_a(\omega T) \end{aligned}$$

Capítulo 2

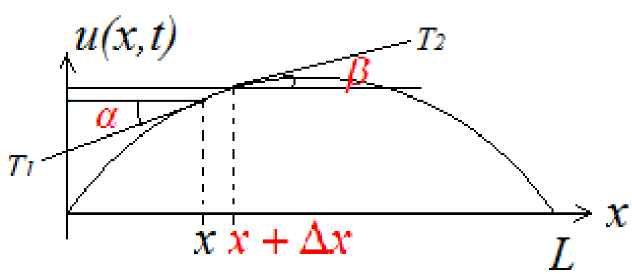
Aplicaciones

2.1. Ecuación de la onda

Consideremos una cuerda de longitud L, atada en los extremos y completamente tensa. Suponga igualmente que se deforma generando una curva inicial $u(x, 0) = f(x)$ y se le imprime una velocidad inicial para que comience a oscilar,



Considere un punto x de la cuerda y un delta de longitud (Δx) y analice la tensión o la fuerza en ese a través de un diagrama de fuerzas. En el diagrama de fuerzas mostrado en la figura se tiene que:



$$\sum f_x = T_2 \cos(\beta) - T_1 \cos(\alpha) = 0 \qquad ((1))$$

$$\sum f_y = T_2 sen(\beta) - T_1 sen(\alpha) = ma \qquad ((2))$$

Tenga que presente que $\sum f_x = 0$, ya que la onda no es viajera y $\sum f_y = ma$ ya que la onda es estacionaria o transversal y por lo tanto de la ecuación (1) se tiene que:

$$T_2 \cos(\beta) = T_1 \cos(\alpha) = T$$

en la ecuación 2 dividamos a ambos lador de la igualdad por T obteniendo que:

$$\begin{aligned}
\frac{T_2 sen(\beta) - T_1 sen(\alpha)}{T} &= \frac{ma}{T} \\
\frac{T_2 sen(\beta)}{T} - \frac{T_1 sen(\alpha)}{T} &= \frac{ma}{T} \\
\frac{T_2 sen(\beta)}{T_2 \cos(\beta)} - \frac{T_1 sen(\alpha)}{T_1 \cos(\alpha)} &= \frac{ma}{T} \\
\tan(\beta) - \tan(\alpha) &= \frac{ma}{T} \qquad ((3))
\end{aligned}$$

tenga presente que la densidad lineal en esta cuerda la cual consideramos que es espesor despreciable respecto de su longitud, se tiene que:

$$\delta = \frac{m}{\Delta x}$$

por la tanto

$$m = \delta \Delta x$$

por lo que la ecuación (3) quedaría como:

$$\tan(\beta) - \tan(\alpha) = \frac{ma}{T} = \frac{\delta \Delta x a}{T}$$

tenga presente que

$$\tan(\beta) = \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} \qquad \text{y} \qquad \tan(\alpha) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

además la aceleración es:

$$a = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

por lo tanto al sustituir estos valores en la anterior ecuación de fuerzas se tiene que:

$$\begin{aligned}
\tan(\beta) - \tan(\alpha) &= \frac{\delta \Delta x a}{T} \\
\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} &= \frac{\delta \Delta x}{T} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \qquad ((4))
\end{aligned}$$

sea $\frac{\delta}{T} = \frac{1}{c^2}$ note que $c = \sqrt{\frac{T}{\delta}}$ cuyas unidades son

$$[c]_{mks} = \left[\sqrt{\frac{T}{\delta}}\right]_{mks} = \sqrt{\frac{k\frac{m}{seg^2}}{\frac{k}{m}}} = \sqrt{\frac{m^2}{seg^2}} = \frac{m}{seg} = [v]_{mks}$$

lo que representa la velocidad de la onda en la cuerda (velocidad de la onda en el medio de conducción). Por lo tanto la ecuación (4) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u\left(x+\Delta x,t\right)}{\partial x}-\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial x} &= \frac{\delta \Delta x}{T}\frac{\partial^2 u\left(x,t\right)}{\partial t^2} \\ \frac{\frac{\partial u\left(x+\Delta x,t\right)}{\partial x}-\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial x}}{\Delta x} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u\left(x,t\right)}{\partial t^2} \end{aligned}$$

note que cuando $\Delta x \rightarrow 0$, se obtiene:

$$\lim_{\Delta x\rightarrow 0}\frac{\frac{\partial u\left(x+\Delta x,t\right)}{\partial x}-\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\rightarrow 0}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u\left(x,t\right)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u\left(x,t\right)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u\left(x,t\right)}{\partial t^2}$$

conocida como la ecuación de la onda.

Se sabe que los extremos no oscilan puesto que estan sujetados, popr lo tanto su deformación es nula, esto es que en los extremos:

$$u\left(0,t\right)=0 \qquad \text{y} \qquad u\left(L,t\right)=0$$

la cuerda fue deformada inicialmente genrándole una curva inicial dada por

$$u\left(x,0\right)=f\left(x\right)$$

y se le imprime una velocidad inicial

$$\frac{\partial u\left(x,0\right)}{\partial t}=g\left(x\right)$$

Ahora suponga que $u\left(x,t\right)$ se puede escribir de forma paramétrica independiente o separada como:

$$u\left(x,t\right)=\chi\left(x\right)\tau\left(t\right)$$

suponga que satisface la ecuación diferencial de la onda

$$\frac{\partial^2 u\left(x,t\right)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u\left(x,t\right)}{\partial t^2}$$

esto es

$$\chi''\left(x\right)\tau\left(t\right)=\frac{1}{c^2}\chi\left(x\right)\tau''\left(t\right)$$

que por variables separables nos da que:

$$\frac{\chi''\left(x\right)}{\chi\left(x\right)}=\frac{1}{c^2}\frac{\tau''\left(t\right)}{\tau\left(t\right)}$$

note que esta igualdad depende de variables completamente diferentes, por lo tanto de la única manera que son iguales es que sean iguales a una constante, esto es

$$\frac{\chi''(x)}{\chi(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{\tau''(t)}{\tau(t)} = K$$

como K puede ser positivo, negativo o cero, se debe realizar un análisis de los tres posibles casos:
caso 1: $K > 0$, para ello considere $K = \sigma^2$, lo caul implica que:

$$\frac{\chi''(x)}{\chi(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{\tau''(t)}{\tau(t)} = \sigma^2$$

de donde

$$\frac{\chi''(x)}{\chi(x)} = \sigma^2$$

lo que lleva esta ecucación a la ecuación diferencial ordinaria dada por:

$$\chi''(x) - \sigma^2\chi(x) = 0$$

cuya ecuación característica:

$$m^2 - \sigma^2 = 0$$

de donde

$$m = \pm\sigma$$

lo que implica

$$\chi(x) = Ae^{\sigma x} + Be^{-\sigma x}$$

y por consiguiente

$$u(x,t) = \chi(x)\,\tau(t) = \left(Ae^{\sigma x} + Be^{-\sigma x}\right)\tau(t)$$

de las condiciones de borde o frontera se tiene que $u(0,t) = 0$ y $u(L,t) = 0$ por lo que

$$u(0,t) = \left(Ae^{\sigma(0)} + Be^{-\sigma(0)}\right)\tau(t) = 0$$

como $\tau(t) \neq 0$ entonces

$$A + B = 0$$

de donde

$$B = -A$$

o sea

$$u(x,t) = \chi(x)\,\tau(t) = A\left(e^{\sigma x} - e^{-\sigma x}\right)\tau(t)$$

por otro lado

$$\begin{aligned} u(L,t) &= A\left(e^{\sigma L} - e^{-\sigma L}\right)\tau(t) = 0 \\ &= 2Asenh(\sigma L)\tau(t) \end{aligned}$$

como $senh(\sigma L) \neq 0$ y $\tau(t) \neq 0$ esto implica que:

$$2A = 0$$

o sea

$$A = 0$$

y por consiguiente

$$B = 0$$

esto implica que

$$u(x,t) = \chi(x)\tau(t) = \left(Ae^{\sigma x} + Be^{-\sigma x}\right)\tau(t) = 0$$

lo cual es un absurdo. Con lo cual se concluye que $K \ngtr 0$
Caso 2: Suponga que $K = 0$, por lo tanto

$$\frac{\chi''(x)}{\chi(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{\tau''(t)}{\tau(t)} = 0$$

lo que imploca que

$$\frac{\chi''(x)}{\chi(x)} = 0$$

y por consiguiente:

$$\chi''(x) = 0$$

cuya solución esta dada por:

$$\chi(x) = Ax + B$$

luego

$$u(x,t) = \chi(x)\tau(t) = (Ax + B)\tau(t)$$

De nuevo de las condiciones de borde o frontera

$$u(0,t) = (A(0) + B)\tau(t) = 0$$

como $\tau(t) \neq 0$ entonces $B = 0$, por otro lado:

$$u(L,t) = (AL)\tau(t) = 0$$

y como $\tau(t) \neq 0$ y $L \neq 0$ entonces $A = 0$, lo que implica que

$$u(x,t) = \chi(x)\tau(t) = 0$$

lo cual es absurdo o contradictorio. Con lo cual se concluye que $K \neq 0$.
Caso 3: Suponga que $K < 0$, para ello considere que $K = -\lambda^2$, por lo tanto

$$\frac{\chi''(x)}{\chi(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{\tau''(t)}{\tau(t)} = -\lambda^2$$

Igualmente

$$\frac{\chi''(x)}{\chi(x)} = -\lambda^2$$

obteniendola ecuación diferencial ordinaria

$$\chi''(x) + \lambda^2\chi(x) = 0$$

cuya ecuación característica es:

$$m^2 + \lambda^2 = 0$$

de donde

$$m = \pm\lambda j$$

por consiguiente la solución tiene la forma

$$\chi(x) = A\cos(\lambda x) + Bsen(\lambda x)$$

por lo que

$$u(x,t) = \chi(x)\tau(t) = (A\cos(\lambda x) + Bsen(\lambda x))\tau(t)$$

de las condiciones de borde o frontera se tiene que:

$$\begin{aligned} u(0,t) &= (A\cos(\lambda(0)) + Bsen(\lambda(0)))\tau(t) = 0 \\ u(0,t) &= A\tau(t) = 0 \end{aligned}$$

como $\tau(t) \neq 0$ entonces $A = 0$, por otro lado:

$$u(L,t) = (Bsen(\lambda L))\tau(t) = 0$$

como $\tau(t) \neq 0$ la ecuación anterior tiene obligado a que B sea diferente de cero por de lo contrario no existiría solución. Por lo que no queda de otra que

$$sen(\lambda L) = 0$$

pero de la única manera que $sen(\lambda L) = 0$ es cuando

$$\lambda L = n\pi$$

para n$\in Z$ lo que implica que

$$\lambda = \frac{n\pi}{L}$$

como para cada n hay una solución entonces

$$u_n(x,t) = \chi(x)\,\tau(t) = B_n sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\tau(t)$$

y por consiguiente

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\tau(t)$$

Por otro lado $\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\tau''(t)}{\tau(t)} = -\lambda^2$ de donde:

$$\tau''(t) = -\lambda^2 c^2 \tau(t)$$

o mejor aún

$$\tau''(t) + \lambda^2 c^2 \tau(t) = 0$$

cuya ecuación característica es:

$$m^2 + \lambda^2 c^2 = 0$$

cuya solución es:

$$m = \pm\lambda c j = \pm\frac{n\pi c}{L} j$$

por lo tanto:

$$\tau(t) = E\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + F sen\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)$$

por lo que

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[E\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + F sen\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right]$$

distribuyendo el B_n se tiene mejor la ecuación por absorción de constantes como:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[E_n\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + F_n sen\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right] sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Observemos ahora las condiciones iniciales de nuestro problema, cuya deformación inicial fue $u(x,0) = f(x)$ y la velocidad inicial dada por $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x)$, esto es:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[E_n\cos\left(\frac{n\pi c}{L}(0)\right) + F_n sen\left(\frac{n\pi c}{L}(0)\right)\right] sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} E_n sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x) \end{aligned}$$

la cual es una serie de Fourier dependiente solo de senos y por lo tanto:

$$E_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\, sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

Ahora $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x)$, esto es:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=1}^{\infty}\left[E_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + F_n sen\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right] sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi c}{L}\left[-E_n sen\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + F_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right] sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi c}{L}\left[-E_n sen\left(\frac{n\pi c}{L}(0)\right) + F_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}(0)\right)\right] sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi c}{L}F_n sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = g(x)
\end{aligned}$$

que por series de Fourier se obtiene que:

$$\frac{n\pi c}{L}F_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\, sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

con lo cual se concluye que:

$$F_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L g(x)\, sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

Ejemplo 26 *: Hallar la función de la onda de una cuerda de longitud L totalmente tensa que se deforma inicialmente generando una curva,* $f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \frac{L}{2} \\ L - x & \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$. *Asuma la velocidad inicial nula.*

Solución 27 *: Debemos calcula los coeficientes de la siguiente serie.*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[E_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + F_n sen\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right] sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Como la velocidad inicial es nula es decir la cuerda se libera sin imprimirle velocidad *entonces* $F_n = 0$. *Por otro lado*

$$\begin{aligned}
E_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \\
&= \frac{2}{L}\left[\int_0^{\frac{L}{2}} xsen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx + \int_{\frac{L}{2}}^{L}(L-x)\,sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\right] \\
&= \frac{2}{L}\left[\frac{1}{\pi^2 n^2}\left(L^2\sin\frac{\pi}{L}nx - \pi Lnx\cos\frac{\pi}{L}nx\right)_0^{\frac{L}{2}}\right. \\
&\quad \left.-\frac{1}{\pi^2 n^2}\left(L^2\sin\frac{\pi}{L}nx + \pi L^2 n\cos\frac{\pi}{L}nx - \pi Lnx\cos\frac{\pi}{L}nx\right)_{\frac{L}{2}}^{L}\right] \\
&= \frac{2}{L}\left[\frac{1}{\pi^2 n^2}\left(L^2\sin\frac{\pi}{L}n\frac{L}{2} - \pi Ln\frac{L}{2}\cos\frac{\pi}{L}n\frac{L}{2}\right)\right. \\
&\quad -\frac{1}{\pi^2 n^2}\left[L^2\sin\frac{\pi}{L}nL + \pi L^2 n\cos\frac{\pi}{L}nL - \pi LnL\cos\frac{\pi}{L}nL\right. \\
&\quad \left.\left.-\left(L^2\sin\frac{\pi}{L}n\frac{L}{2} + \pi L^2 n\cos\frac{\pi}{L}n\frac{L}{2} - \pi Ln\frac{L}{2}\cos\frac{\pi}{L}n\frac{L}{2}\right)\right]\right] \\
&= \frac{2}{L}\left[\frac{1}{\pi^2 n^2}\left(L^2\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi L^2 n}{2}\cos\frac{n\pi}{2}\right)\right. \\
&\quad -\frac{1}{\pi^2 n^2}\left[L^2\sin n\pi + \pi L^2 n\cos n\pi - \pi L^2 n\cos n\pi\right. \\
&\quad \left.\left.-\left(L^2\sin\frac{\pi n}{2} + \pi L^2 n\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi L^2 n}{2}\cos\frac{n\pi}{2}\right)\right]\right] \\
&= \frac{2}{L}\frac{1}{\pi^2 n^2}\left[L^2\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi L^2 n}{2}\cos\frac{n\pi}{2}\right. \\
&\quad \left.+L^2\sin\frac{\pi n}{2} + \pi L^2 n\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi L^2 n}{2}\cos\frac{n\pi}{2}\right] \\
&= \frac{4L}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2} = -\frac{4L(-1)^k}{(2k-1)^2\pi^2}
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[E_n\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + F_n sen\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right] sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\
u(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{4L(-1)^k}{(2k-1)^2\pi^2}\cos\left(\frac{(2k-1)\pi c}{L}t\right) sen\left(\frac{(2k-1)\pi}{L}x\right)
\end{aligned}$$

2.1.1. Ecuación del calor

Se define la ecuación del calor (Fourier) como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}$$

deducida empíricamente por Fourier de forma unidimensional. Se define igualmente la ecuación diferencial del calor de forma n dimensional como:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}$$

Considere una barra rigida de longitud L, de espesor despreciable respecto de su longitud al cual se le aplica inicialmente un calor $u(x,0) = f(x)$, suponga que los extremos se encuentran a temperatura constante e igual a cero, es decir $u(L,t) = u(0,t) = 0$. Encuentre la distribución de calor $u(x,t)$ en cualquier instante y en cualquier punto. Se conoce que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial u}{\partial t}$, entonces supongamos que $u(x,t)$ por separación de variables se puede escribir como:

$$u(x,t) = \chi(x)\,\tau(t)$$

y como $u(x,t)$ es solución de la ecuación diferencial parcial, entonces ella debe cumplir dicha ecuación diferencial así:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \chi''(x)\,\tau(t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\chi(x)\,\tau'(t)$$

con lo cual se obtiene la igualdad:

$$\chi''(x)\,\tau(t) = \frac{1}{c^2}\chi(x)\,\tau'(t)$$

que por separación de variables se obtiene que:

$$\frac{\chi''(x)}{\chi(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{\tau'(t)}{\tau(t)}$$

de la única manera que estas dos ecuaciones sean iguales es que:

$$\frac{\chi''(x)}{\chi(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{\tau'(t)}{\tau(t)} = K$$

Haciendo un análisis al igual que en la ecuación de la onda en que $K > 0$ o $K = 0$ o $K < 0$ se llegaría finalmente a que K por obligación tendríaque ser $K < 0$ por lo que

$$\frac{\chi''(x)}{\chi(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{\tau'(t)}{\tau(t)} = K = -\lambda^2$$

obteniendo la ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{\chi''(x)}{\chi(x)} = -\lambda^2$$

o lo que es lo mismo:

$$\chi''(x) + \lambda^2\chi(x) = 0$$

cuya ecuación característica es:

$$m^2 + \lambda^2 = 0$$

de donde

$$m = \pm\lambda j$$

por consiguiente:

$$\chi(x) = A\cos(\lambda x) + Bsen(\lambda x)$$

y así

$$u(x,t) = \chi(x)\,\tau(t) = (A\cos(\lambda x) + Bsen(\lambda x))\,\tau(t)$$

de las condiciones de borde se tiene $u(L,t) = u(0,t) = 0$ de donde:

$$u(0,t) = (A\cos(\lambda 0) + Bsen(\lambda 0))\,\tau(t)$$

con lo cual se concluye que:

$$A = 0$$

y

$$u(x,t) = Bsen(\lambda x)\,\tau(t)$$

ahora

$$u(L,t) = Bsen(\lambda L)\,\tau(t) = 0$$

pero como ya ubiera hecho en análisis anterior y no es posible B fuera cero, entonces el único que puede ser cero es:

$$sen(\lambda L) = 0$$

y esto se logra solo si

$$\lambda L = n\pi$$

o sea si

$$\lambda = \frac{n\pi}{L}$$

por consiguiente

$$u_n(x,t) = B_n sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\tau(t)$$

por otro lado se tiene que:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\tau'(t)}{\tau(t)} = K = -\lambda^2$$

de donde

$$\tau'(t) + c^2\lambda^2\tau(t) = 0$$

cuya ecuación característica esta dada por:

$$m + c^2\lambda^2 = 0$$

con lo cual se consigue que:

$$m = -c^2\lambda^2$$

por lo tanto:

$$\tau(t) = De^{-c^2\lambda^2 t}$$

luego

$$u_n(x,t) = B_n sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)De^{-c^2\lambda^2 t}$$

o mejor aun si hacemos que B_n absorva a la constante D seconsigue la función en varias variables dada por:

$$u_n(x,t) = B_n sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)e^{-\frac{c^2n^2\pi^2}{L^2}t}$$

como para cada n hay una solución y la combinación lineal de ellas tambien es solución, entonces:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)e^{-\frac{c^2n^2\pi^2}{L^2}t}$$

de las condiciones iniciales delsistema se tiene que el calor inicial alicado es $u(x,t) = f(x)$, por lo tanto

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)e^{-\frac{c^2n^2\pi^2}{L^2}(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)$$

para hallar el B_n usamos series de Fourier, es decir:

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\, sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

Ejemplo 28 *: Encuentre la distribución de calor en una barra de espesor despreciable respecto de su longitud L, al cual se le aplica un calor inicial de $f(x) = x$. Suponga que la constante de propagación del calor en el medio es c.*

Solución 29 *:*

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{L}\int_0^L xsen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \\ &= \frac{2}{L\pi^2n^2}\left(L^2 sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) - \pi Lnx\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right)_0^L \\ &= \frac{2}{L\pi^2n^2}\left(L^2 sen\left(\frac{\pi nL}{L}\right) - \pi LnL\cos\left(\frac{\pi nL}{L}\right)\right) \\ &= -2\frac{n\pi L^2}{L\pi^2n^2}\cos(n\pi) = -2\frac{L}{\pi n}(-1)^n \end{aligned}$$

porlo tanto el calor distribuye

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{L}{\pi n}(-1)^{n-1}\, sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)e^{-\frac{c^2n^2\pi^2}{L^2}t}$$

2.1.2. Distribución del calor en una placa rectángular en estado estacionario

Considere una placa rectángular a la cual se le tienen aislados los bordes excepto donde se aplica el calor cuya distribución del calor es $u(x,b) = f(x)$. Si los demás extremos se encuentran aislados entonces $u(x,0) = u(a,y) = u(0,y) = 0$. Considere además que las condiciones son estacionarias, es decir que no hay dependencia del tiempo, esto $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$.

Como la ecuación del calor $\nabla^2 u = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$ y se trata de una placa rectángular entonces:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

conocida como la ecuación de Laplacé bidimensional.

Igual que en los casos anterioressuponga que la solución se presenta por separación de variables, es decir, suponga que

$$u(x,y) = X(x)\,Y(y)$$

como $u(x,y)$ es solución entonces ella debe satisfacer la ecuación diferencial parcial, por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)\,Y(y) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = X(x)\,Y''(y)$$

de donde

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = X''(x)\,Y(y) + X(x)\,Y''(y) = 0$$

o mejor aun:

$$X''(x)\,Y(y) = -X(x)\,Y''(y)$$

esto es:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = K$$

Al igual que en la ecuación de la onda se debe realizar una análisis que corresponda a las condiciones de borde, para este caso se analiza las condiciones de borde sobre y, para garantizar el modo oscilatorio de la función. Por ende se supone que

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = K = -\lambda^2$$

ya que en los otros dos casos el sistema seria incongruente. Por lo tanto:

$$X''(y) + \lambda^2 X(y) = 0$$

cuya ecuación característica es:

$$m^2 + \lambda^2 = 0$$

con lo cual se obtiene que:

$$m = \pm\lambda j$$

lo que implica que:

$$Y(y) = A\cos(\lambda x) + Bsen(\lambda x)$$

por consiguiente

$$u(x,y) = X(x)Y(y) = (A\cos(\lambda x) + Bsen(\lambda x))Y(y)$$

de las condiciones de borde se tiene que

$$u(a,y) = u(0,y) = 0$$

esto es:

$$u(0,y) = (A\cos(\lambda(0)) + Bsen(\lambda(0)))Y(y) = 0$$

como $Y(y) \neq 0$ entonces $A = 0$.
Ahora

$$u(a,y) = (Bsen(\lambda a))Y(y) = 0$$

como $Y(y) \neq 0$ y B no puede ser cero puesto que no habría solución entonces

$$sen(\lambda a) = 0$$

de donde:

$$\lambda a = n\pi$$

esto implica que:

$$\lambda = \frac{n\pi}{a}$$

Por lo tanto

$$u_n(x,y) = X(x)Y(y) = \left(B_n sen\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\right)Y(y)$$

Por otro lado

$$-\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda^2$$

de donde

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda^2$$

lo que implica que

$$Y''(y) - \lambda^2 Y(y) = 0$$

por lo que su ecuación característica esta dada por:

$$m^2 - \lambda^2 = 0$$

de donde

$$m = \pm\lambda$$

con lo cual se concluye que:

$$Y(y) = De^{\lambda y} + Ee^{-\lambda y}$$

luego

$$u_n(x,y) = X(x)\,Y(y) = B_n sen\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\left(De^{\lambda y} + Ee^{-\lambda y}\right)$$

por absorción de constantes se tiene que:

$$u_n(x,y) = X(x)\,Y(y) = \left(D_n e^{\lambda y} + E_n e^{-\lambda y}\right) sen\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

como $u(x,0) = 0$ entonces

$$\left(D_n e^{\lambda(0)} + E_n e^{-\lambda(0)}\right) sen\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = 0$$

como $sen\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \neq 0$ setiene entonces que:

$$D_n + E_n = 0$$

con lo cual que obtiene que:

$$E_n = -D_n$$

por consiguiente:

$$u_n(x,y) = X(x)\,Y(y) = 2D_n\frac{\left(e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}\right)}{2} sen\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

$$u_n(x,y) = X(x)\,Y(y) = D_n senh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) sen\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

como para cada n existeuna solución, entonces la combinación lineal de todas ellas tambien es solución, por consiguiente:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n senh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) sen\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

analizando la condición de borde $u(x,b) = f(x)$ se tiene que:

$$u(x,b) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n senh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) sen\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = f(x)$$

que porsries de Fourier se obtendría que:

$$D_n senh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\, sen\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx$$

así que:

$$D_n = \frac{2}{asenh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \int_0^a f(x)\, sen\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx$$

luego:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n senh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) sen\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

Considere ahora una placa circular al cual se le aplica una temperatura $u(R,\theta) = f(\theta) = \begin{cases} \theta & \text{si } 0 < \theta < \pi \\ \theta & \text{si } -\pi < \theta < 0 \end{cases}$ si las condiciones son estacionarias, encuentre la temperatura de la placa en cada punto de ella sabiendo que si díametro se encuentra a temperatura cero, es decir $u(r,0) = u(r,\pi) = 0$.
Como las condiciones son estacionarias, se tiene que

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

con lo cual se obtiene de nuevo la ecuación de Laplacé, por lo tanto, como el sistema esta encoordenadas circulares, se debe hallar el laplaciano en coordenadas circulares, esto es que se debe hallar primero $\nabla^2 u = 0$ en coordenadas polares.
Ls coordenadas circulares o polares se obtienen del hecho que en un triángulo rectángulo se satisface el teorema de pitágoras, por consiguiente

$$x = r\cos(\theta) \quad \text{e} \quad y = rsen(\theta)$$

por lo tanto si $u = u(x,y)$ entonces u se puede escribir en términos de r y θ así:

$$u = u(x,y) = u(r\cos(\theta), rsen(\theta)) = u(r,\theta)$$

por lo tanto se pueden calcular las siuientes derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\cos(\theta) + \frac{\partial u}{\partial y} sen(\theta) \end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} &= -r\frac{\partial u}{\partial x} sen(\theta) + \frac{\partial u}{\partial y} r\cos(\theta) \end{aligned}$$

ahora calculemos sus segundas derivadas, es decir:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\theta)+\frac{\partial u}{\partial y}sen(\theta)\right)}{\partial r}\\
&= \cos(\theta)\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}{\partial r}+sen(\theta)\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial y}}{\partial r}\\
&= \cos(\theta)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right)\\
&\quad +sen(\theta)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial r}\right)\\
\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= \cos(\theta)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos(\theta)+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}sen(\theta)\right)\\
&\quad +sen(\theta)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\cos(\theta)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}sen(\theta)\right)
\end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial\left(-r\frac{\partial u}{\partial x}sen(\theta)+\frac{\partial u}{\partial y}r\cos(\theta)\right)}{\partial\theta}\\
&= r\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\theta)-sen(\theta)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)\right)\\
&\quad r\left(-\frac{\partial u}{\partial y}sen(\theta)+\cos(\theta)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)\right)\\
\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= r\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\theta)-sen(\theta)\left(-r\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}sen(\theta)+r\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos(\theta)\right)\right)\\
&\quad +r\left(-\frac{\partial u}{\partial y}sen(\theta)+\cos(\theta)\left(-r\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}sen(\theta)+r\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos(\theta)\right)\right)
\end{aligned}$$

asociando adecuadamente se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= -r\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\theta)+\frac{\partial u}{\partial y}sen(\theta)\right)\\
&\quad +r^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}sen^2(\theta)-2r^2 sen(\theta)\cos(\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+r^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2(\theta)\\
\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= -r\frac{\partial u}{\partial r}+r^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}sen^2(\theta)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2(\theta)-2sen(\theta)\cos(\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right)
\end{aligned}$$

Note que

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}sen^2(\theta)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2(\theta)-2sen(\theta)\cos(\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$$

como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= \cos(\theta)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos(\theta)+\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} sen(\theta)\right)\\
&\quad + sen(\theta)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\cos(\theta)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} sen(\theta)\right)\\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2(\theta)+\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} sen(\theta)\cos(\theta)\\
&\quad + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} sen(\theta)\cos(\theta)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} sen^2(\theta)
\end{aligned}$$

de donde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2(\theta)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} sen^2(\theta)+2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} sen(\theta)\cos(\theta)$$

sumando las expresiones componente a componente se tiene:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2(\theta)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} sen^2(\theta)+2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} sen(\theta)\cos(\theta)$$

y

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} sen^2(\theta)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2(\theta)-2 sen(\theta)\cos(\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nabla^2 u$$

por lo que el laplaciano en coordenadas circulares es:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

suponga que la solución de la ecuación de Laplace para nuestro problema esta dado porlas variables separables, es decir:

$$u(r,\theta) = \rho(r)\,\Theta(\theta)$$

y que satisface la ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

por lo tanto

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \rho'(r)\,\Theta(\theta) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \rho''(r)\,\Theta(\theta) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \rho(r)\,\Theta''(\theta)$$

que al sustituir en la ecuación diferencial parcial se obtiene:

$$\rho''(r)\,\Theta(\theta)+\frac{1}{r}\rho'(r)\,\Theta(\theta)+\frac{1}{r^2}\rho(r)\,\Theta''(\theta) = 0$$

dividiendo todo por $u(r,\theta) = \rho(r)\,\Theta(\theta)$ se consigue que:

$$\frac{\rho''(r)}{\rho(r)} + \frac{1}{r}\frac{\rho'(r)}{\rho(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = 0$$

note que:

$$\frac{\rho''(r)}{\rho(r)} + \frac{1}{r}\frac{\rho'(r)}{\rho(r)} = -\frac{1}{r^2}\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}$$

o mejor aún:

$$r^2\frac{\rho''(r)}{\rho(r)} + r\frac{\rho'(r)}{\rho(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = K$$

suponga que $K > 0$ es decir suponga que $K = \sigma^2$. Por lo tanto

$$r^2\frac{\rho''(r)}{\rho(r)} + r\frac{\rho'(r)}{\rho(r)} = \sigma^2$$

de aquí se obtiene que la ecuación diferencial queda:

$$r^2\rho''(r) + r\rho'(r) = \sigma^2\rho(r)$$

o lo que es lo mismo:

$$r^2\rho''(r) + r\rho'(r) - \sigma^2\rho(r) = 0$$

conocida como la ecuación diferencial de Euler,cuya solución viene estando dada por la forma $\rho(r) = r^m$. Por lo tanto ella debe satisfacer la ecuación diferencial de Euler, esto es: $\rho'(r) = mr^{m-1}$ y $\rho''(r) = m(m-1)\,r^{m-2}$, lo que implica que:

$$r^2 m(m-1)\,r^{m-2} + rmr^{m-1} - \sigma^2 r^m = 0$$

obteniendo la ecuación

$$r^m m(m-1) + mr^m - \sigma^2 r^m = 0$$

o mejor aún:

$$r^m\left(m^2 - m + m - \sigma^2\right) = 0$$

como $r^m \neq 0$ entonces:

$$m^2 - \sigma^2 = 0$$

o lo que es lo mismo

$$m = \pm\sigma$$

por lo que

$$\rho(r) = Ar^{\sigma} + Br^{-\sigma}$$

luego

$$u(r,\theta) = \rho(r)\,\Theta(\theta) = \left(Ar^{\sigma} + Br^{-\sigma}\right)\Theta(\theta)$$

de las condiciones de borde se tiene que en el origen la temperatura es cero ya que $u(r,0) = u(r,\pi) = 0$ para todo r, por lo tanto

$$u(0,0) = 0$$

implica que para $\Theta(\theta) \neq 0$ por lo que $B = 0$ porque de lo contrario habría una división por cero, lo cual es incongruente. Luego

$$u(r,\theta) = \rho(r)\,\Theta(\theta) = Ar^{\sigma}\Theta(\theta)$$

Por otro lado como

$$-\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = K = \sigma^2$$

entonces

$$\Theta''(\theta) + \sigma^2\Theta(\theta) = 0$$

cuya ecuación característica esta siendo dada por:

$$p^2 + \sigma^2 = 0$$

de donde

$$p = \pm\sigma j$$

por lo tanto

$$\Theta(\theta) = D\cos(\sigma\theta) + Esen(\sigma\theta)$$

con lo cual se obtiene que:

$$u(r,\theta) = Ar^{\sigma}\Theta(\theta) = Ar^{\sigma}\left(D\cos(\sigma\theta) + Esen(\sigma\theta)\right)$$

porabsorción de constantes la anterior ecuación se puede escribir como:

$$u(r,\theta) = \left(D\cos(\sigma\theta) + Esen(\sigma\theta)\right)r^{\sigma}$$

Nuevamente de las condiciones de borde o frontera se tiene que $u(r,0) = u(r,\pi) = 0$ lo que implica que:

$$u(r,0) = \left(D\cos(\sigma 0) + Esen(\sigma 0)\right)r^{\sigma} = 0$$

de donde $D = 0$ por otro lado

$$u(r,\pi) = Esen(\sigma\pi)\,r^{\sigma} = 0$$

si se llegasealargumento en el que $E \neq 0$ se tiene que:

$$sen(\sigma\pi) = 0$$

y esto solo sucede si:

$$\sigma\pi = n\pi \text{ para } n \in \mathbb{Z}$$

por lo que

$$\sigma = n$$

luego la solución viene estando dada por:

$$u_n(r,\theta) = E_n sen(n\theta) r^n$$

como para cada n existe solución, entonces la combinación lineal de todas ellas tambien es solución, lo que implica que:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n sen(n\theta) r^n$$

Nuevamente de las condiciones de borde se presenta que $u(R,\theta) = f(\theta) = \begin{cases} \theta & \text{si } 0 < \theta < \pi \\ \theta & \text{si } -\pi < \theta < 0 \end{cases}$

porlo tanto

$$u(R,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n sen(n\theta) R^n = \begin{cases} \theta & \text{si } 0 < \theta < \pi \\ \theta & \text{si } -\pi < \theta < 0 \end{cases}$$

que por series de fourier

$$E_n R^n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) sen(n\theta) d\theta$$

por consiguiente:

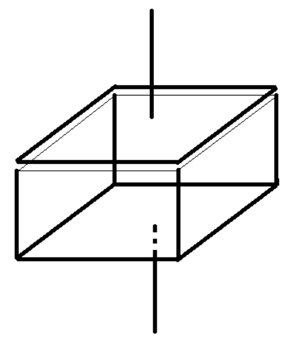
$$\begin{aligned} E_n &= \frac{1}{\pi R^n}\left[\int_{-\pi}^{0} \theta sen(n\theta) d\theta + \int_{0}^{\pi} \theta sen(n\theta) d\theta\right] \\ &= \frac{1}{\pi R^n}\left[\frac{1}{n^2}(\sin n\theta - n\theta\cos n\theta)_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n^2}(\sin n\theta - n\theta\cos n\theta)_{0}^{\pi}\right] \\ &= \frac{1}{\pi R^n}\left[-\frac{1}{n^2} n\pi\cos n\pi - \frac{1}{n^2} n\pi\cos n\pi\right] \\ &= -\frac{1}{\pi R^n}\frac{2}{n^2} n\pi\cos n\pi = -\frac{2(-1)^n}{nR^n} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{nR^n} sen(n\theta) r^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} sen(n\theta)\left(\frac{r}{R}\right)^n \end{aligned}$$

2.1.3. Aplicación electrostática

Considere un capacitor cúbico cuya capa superior se encuentra aislada del resto del sistema y al cual se le aplica un voltaje V_0 y el resto se mantiene a voltaje 0, encuentre el potencial escalar eléctrico del sistema en cada punto del interior del capacitor



De los campos eléctricos se tiene que el potencial escalar eléctrico v esta dado por $\nabla^2 v = \sigma^2$ donde σ^2 es la carga superficial. omo el sistema no presenta cargas superficiales entonces $\sigma^2 = 0$, por lo que:

$$\nabla^2 v = 0$$

esto es

$$\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$$

Por variables separables suponga que $v(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z)$ y que ella satisface la ecuación diferencial parcial,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = X''(x) Y(y) Z(z) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = X(x) Y''(y) Z(z) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = X(x) Y(y) Z''(z)$$

luego al sustituir en la ecuación diferencial parcial se tiene:

$$X''(x) Y(y) Z(z) + X(x) Y''(y) Z(z) + X(x) Y(y) Z''(z) = 0$$

como $v(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z) \neq 0$ entonces al divir toda la EDP por ella se tiene que:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0$$

lo que tambien se puede escribir como:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \frac{Z''(z)}{Z(z)} = K$$

de las condiciones de borde se tiene que:

$$v(a, y, z) = v(x, y, 0) = v(x, a, z) = v(x, 0, z) = v(0, y, z) = 0$$

y

$$v(x, y, a) = v_0$$

de inmediato por estas condiciones de borde suponga que $K = -\lambda_x^2$ de donde

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda_x^2$$

así que

$$X''(x) + \lambda_x^2 X(x) = 0$$

de donde

$$X(x) = A\cos(\lambda_x x) + Bsen(\lambda_x x)$$

Ahora como

$$-\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\lambda_x^2$$

entonces

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda_x^2 - \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\lambda_y^2$$

por lo tanto

$$Y''(y) + \lambda_y^2 Y(y) = 0$$

de donde

$$Y(y) = D\cos(\lambda_y y) + Esen(\lambda_y y)$$

por último como

$$\lambda_x^2 - \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\lambda_y^2$$

entonces

$$\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \lambda_x^2 + \lambda_y^2 = \lambda_z^2$$

por lo que

$$Z''(z) - \lambda_z^2 Z(z) = 0$$

con lo cual se concluye que:

$$Z(z) = Fe^{-\lambda_z z} + Ge^{\lambda_z z}$$

lo que implica que:

$$v(x, y, z) = (A\cos(\lambda_x x) + Bsen(\lambda_x x))(D\cos(\lambda_y y) + Esen(\lambda_y y))\left(Fe^{-\lambda_z z} + Ge^{\lambda_z z}\right)$$

de las condiciones de bordese tiene que

$$v(0, y, z)$$

lo que implica que $A = 0$. Igualmente $v(x, 0, z) = 0$ entonces $D = 0$ y por último $v(x, y, 0) = 0$ entonces $G = -F$ obteniendo finalmente la función

$$\begin{aligned} v(x,y,z) &= FBEsen(\lambda_x x)\, sen(\lambda_y y)\left(e^{-\lambda_z z} - e^{\lambda_z z}\right) \\ &= Csen(\lambda_x x)\, sen(\lambda_y y)\, senh(\lambda_z z) \end{aligned}$$

por otro lado se tiene que $v(a, y, z) = 0$ lo que implica que

$$v(a,y,z) = Csen(\lambda_x a)\, sen(\lambda_y y)\, senh(\lambda_z z) = 0$$

luego $\lambda_x a = n\pi$ de donde $\lambda_x = \frac{n\pi}{\alpha}$ igualmente

$$v(x,a,z) = Csen(\lambda_x x)\, sen(\lambda_y a)\, senh(\lambda_z z) = 0$$

de donde $\lambda_y a = m\pi$ lo que implica que $\lambda_y = \frac{m\pi}{a}$ por último nos queda que

$$v_{mn}(x,y,z) = C_{mn} sen\left(\frac{n\pi}{\alpha}x\right) sen\left(\frac{m\pi}{a}y\right) senh(\lambda_z z)$$

como para cada m y cada n hay solución entonces la combinación lineal de todos ellos también es solución, lo que implica que

$$\begin{aligned} v(x,y,z) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} v_{mn}(x,y,z) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{mn} sen\left(\frac{n\pi}{\alpha}x\right) sen\left(\frac{m\pi}{a}y\right) senh(\lambda_z z) \end{aligned}$$

como $\lambda_x^2 + \lambda_y^2 = \lambda_z^2$ esto nos da que:

$$v(x,y,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{mn} sen\left(\frac{n\pi}{\alpha}x\right) sen\left(\frac{m\pi}{a}y\right) senh\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{\alpha}\right)^2} z\right)$$

como $v(x, y, a) = v_0$ se tiene que:

$$v(x,y,a) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{mn} sen\left(\frac{n\pi}{\alpha}x\right) sen\left(\frac{m\pi}{a}y\right) senh\left(\frac{\pi}{\alpha}\sqrt{n^2+m^2}a\right) = v_0$$

que por series de Fourier

$$C_{mn} senh\left(\pi\sqrt{n^2+m^2}\right) = \frac{2}{a^2}\int_0^a\int_0^a v_0 sen\left(\frac{n\pi}{\alpha}x\right) sen\left(\frac{m\pi}{a}y\right) dxdy$$

o sea que

$$C_{mn} = \frac{2}{a^2 senh\left(\pi\sqrt{n^2+m^2}\right)}\int_0^a\int_0^a v_0 sen\left(\frac{n\pi}{\alpha}x\right) sen\left(\frac{m\pi}{a}y\right) dxdy$$

Exercise 30 *: La ecuación del calor para una varilla finita con condiciones de contorno no homogéneas está dada por*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}$$

con condiciones de borde $u(0,t) = f_1(t)$ *y* $u(l,t) = f_2(t)$ *y condicion inicial* $u(x,0) = f_0(x)$*. Encuentre la distribución de calor en todo punto en cada instante*

Exercise 31 *:La ecuación del calor para una varilla finita con fuente de calor y condiciones de contorno homogéneas está dada por*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t} + R(x,t)$$

con condiciones de borde $u(0,t) = 0$ *y* $u(l,t) = 0$ *y condicion inicial* $u(x,0) = f_0(x)$*. Encuentre la distribución de calor en todo punto en cada instante*

Ejemplo 32 *: La ecuación del calor para una varilla finita con fuente de calor y condiciones de contorno no homogéneas está dada por*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t} + Q(x,t)$$

para $0 < x < l$, $t > 0$*. Considere las condiciones de contorno dadas por* $u(0,t) = f_1(t)$ *y* $u(l,t) = f_2(t)$ *y condicion inicial* $u(x,0) = f_0(x)$*.*

Solución 33 *: Para resolver este problema suponga que* $u(x,t) = T(x,t) + T_1(x,t)$ *donde*

$$T_1(x,t) = f_1(t) + \frac{x}{l}\left(f_2(t) - f_1(t)\right)$$

y $T(x,t)$ *es solución del siguiente problema con distinta función de fuente de calor pero condiciones de frontera nulas*

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial T}{\partial t} + R(x,t)$$

para $0 < x < l$, $t > 0$, $R(x,t) = Q(x,t) - \dfrac{\partial T_1}{\partial t}$ *con las condiciones de contorno* $T(0,t) = 0$ *,* $T(l,t) = 0$ *, y la condición inicial* $T(x,0) = f_0(x) - T_1(x,0)$*. Para resolver este segundo problema hemos visto que la solución* $T(x,t)$ *se descompone en dos funciones*

$$T(x,t) = T_2(x,t) + T_3(x,t)$$

donde T_2*,* T_3 *tienen condiciones de frontera nulas.* $T_2(x,t)$ *es solución de la ecuación homogénea (sin fuentes) y condiciones iniciales no nulas dadas por*

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial T_2}{\partial t}$$

con las condiciones de contorno $T_2(0,t) = 0$, $T_2(l,t) = 0$, *y la condición inicial* $T_2(x,0) = T(x,0) = f_0(x) - T_1(x,0)$. *De lo estudiado se tiene que*

$$T_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right) e^{-\left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2 t}$$

de donde $a_n = \frac{2}{l}\int_0^l T(x,0)\, sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$. *Por otro lado* $T_3(x,t)$ *es solución de la ecuación no homogénea (con fuentes) y condiciones iniciales nulas dada por*

$$\frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial T_3}{\partial t} + R(x,t)$$

con las condiciones de contorno $T_3(0,t) = 0$, $T_3(l,t) = 0$, *y la condición inicial* $T_3(x,0) = 0$. *De lo estudiado en teoría, se sabe que*

$$T_3(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t q_n(\tau)\, e^{-\left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \;\; sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

donde las funciones $q_n(t)$ *se obtienen de la función fuente* $R(x,t)$ *dada por:*

$$R(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \;\; sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

donde $q_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l R(x,t)\, sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$. *Con todo lo anterior se consigue que:*

$$u(x,t) = T(x,t) + T_1(x,t)$$

o mejor aun:

$$u(x,t) = T_1(x,t) + T_2(x,t) + T_3(x,t)$$

2.1.4. Ecuación del calor en una barra infinita

Considere una barra infinita la fual es sometida una temperatura inicial $f(x)$. Si el espesor es despreciable respecto de su longitud, encuentre la distribución de temperatura en cada punto en todo instante.

Como la barra es infinita, entonces la temperatura en el infinito de la barra es nula, por lo tanto

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}$$

En este caso por ser la barra infinita el problema se puede resolver usando la transformada de Fourier así:

Suponga que $u = u(x,t)$ satisface la ecuación diferencial y que cumple las condiciones para que su transformada de Fourier exista, es decir, suponga que existe $\mathfrak{F}\{u(x,t)\} = U(\omega,t)$, por consiguiente

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\left\{\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right\} &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}e^{-j\omega x}dx = j\omega\mathfrak{F}\{u(x,t)\}\\ &= j\omega U(\omega,t)\end{aligned}$$

igualmente se tiene que

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right\} = (j\omega)^2 U(\omega,t) = -\omega^2 U(\omega,t)$$

por otro lado

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\left\{\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right\} &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}e^{-j\omega x}dx\\ &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)\,e^{-j\omega x}dx\\ &= \frac{\partial\mathfrak{F}\{u(x,t)\}}{\partial t}\\ &= \frac{\partial U(\omega,t)}{\partial t}\end{aligned}$$

por consiguiente la ecuación diferencial del calor quedaría escrita así:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}\\ -\omega^2 U(\omega,t) &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial U(\omega,t)}{\partial t}\end{aligned}$$

o mejor aun

$$\frac{\partial U(\omega,t)}{\partial t} + c^2\omega^2 U(\omega,t) = 0$$

cuya ecuación característica esta dada por:

$$m + c^2\omega^2 = 0$$

de donde

$$m = -c^2\omega^2$$

por lo tanto

$$U(\omega,t) = Ae^{-c^2\omega^2 t}$$

de las condiciones iniciales se tiene que

$$U(\omega,0) = \mathfrak{F}\{u(x,0)\} = \mathfrak{F}\{f(x)\} = F(\omega)$$

por lo que

$$U(\omega,0) = Ae^{-c^2\omega^2(0)} = A = F(\omega)$$

por lo tanto

$$U(\omega,t)=F(\omega)\,e^{-c^2\omega^2 t}$$

note que lo que se pide es a $u=u(x,t)$ por lo tanto

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \mathfrak{F}^{-1}\{U(\omega,t)\}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}U(\omega,t)\,e^{j\omega x}d\omega\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\,e^{-c^2\omega^2 t}e^{j\omega x}d\omega\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\,e^{-c^2\omega^2 t+j\omega x}d\omega\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\,e^{-c^2 t\left(\omega^2-\frac{jx}{c^2t}\omega\right)}d\omega\\
&= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{4c^2t}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\,e^{-c^2 t\left(\omega^2-\frac{jx}{c^2t}\omega+\left(\frac{jx}{2c^2t}\right)^2\right)}d\omega\\
&= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{4c^2t}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\,e^{-c^2 t\left(\omega-\frac{jx}{2c^2t}\right)^2}d\omega
\end{aligned}$$

sea $r^2=c^2t\left(\omega-\frac{jx}{2c^2t}\right)^2$ entonces $d\omega=\dfrac{dr}{c\sqrt{t}}$ y $\omega=\dfrac{r}{c\sqrt{t}}+\dfrac{jx}{2c^2t}$ por lo que

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi c\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4c^2t}}\int_{-\infty}^{\infty}F\left(\frac{r}{c\sqrt{t}}+\frac{jx}{2c^2t}\right)e^{-r^2}dr$$

¿Que hubiera sucedido si $f(x)=\delta(x)$?

$$u(x,t)=\frac{1}{2c\sqrt{t\pi}}e^{-\frac{x^2}{4c^2t}}$$

Tenga presente que si se le llama $I=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx$ entonces

$$\begin{aligned}
I^2 &= I\times I=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx\times\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}e^{-y^2}dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy
\end{aligned}$$

se $x=r\cos(\theta)$ y $y=rsen(\theta)$ entonces $x^2+y^2=r^2$ y su matriz jacobiana estaría dado por:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & -rsen(\theta)\\ sen(\theta) & r\cos(\theta)\end{bmatrix}$$

y su jacobiano estaría dada por:

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|=\det\begin{bmatrix}\cos(\theta) & -rsen(\theta)\\ sen(\theta) & r\cos(\theta)\end{bmatrix}=r$$

por lo tanto

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy = \int_r\int_\theta \left|\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(r,\theta\right)}\right| e^{-r^2}d\theta dr$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy &= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} re^{-r^2}d\theta dr = \int_0^{\infty} re^{-r^2}dr\int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{1}{2}2\pi = \pi\end{aligned}$$

por lo tanto $I^2 = \pi$, esto es $I = \sqrt{\pi}$ pero $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ por lo que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$

2.1.5. Ecuación de la onda en una cuerda infinita

Considere una cuerda infinita cuyo espesor es despreciable respecto de su longitud, la cual se pone a vibrar con una deformación inicial $f\left(x\right)$ y se le imprime una velocidad inicial $g\left(x\right)$. Encuentre la deformación de la cuerda en todo punto en cada instante. Tenga presente que la ecuación de la onda está dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

como condiciones de frontera se tiene que como los extremos estan en el infinito estos no alcanzan a vibrar, por lo tanto $u\left(\pm\infty,0\right) = 0$. Las condiciones iniciales son $u\left(x,0\right) = f\left(x\right)$ y $\frac{\partial u\left(x,0\right)}{\partial t} = g\left(x\right)$ por lo tanto, al tener un sistema infinito se puede aplicar la transformada de Fourier respecto de la variable posicional, así:

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = -\omega^2 U\left(\omega,t\right) \quad \text{y} \quad \mathfrak{F}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\} = \frac{\partial^2 U\left(\omega,t\right)}{\partial t^2}$$

siendo $U\left(\omega,t\right) = \mathfrak{F}\left\{u\left(x,t\right)\right\}$. Por lo tanto al sustituir esto en la ecuación de la onda se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ -c^2\omega^2 U\left(\omega,t\right) &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U\left(\omega,t\right)}{\partial t^2}\end{aligned}$$

con lo cual se obtiene la ecuación diferencial parcial dada por:

$$\frac{\partial^2 U\left(\omega,t\right)}{\partial t^2} + c^2\omega^2 U\left(\omega,t\right) = 0$$

cuya ecuación característica es:

$$m^2 + c^2\omega^2 = 0$$

de donde

$$m = \pm c\omega j$$

por lo tanto:

$$U(\omega, t) = A\cos(c\omega t) + Bsen(c\omega t)$$

de las condiciones iniciales

$$U(\omega, 0) = \mathfrak{F}\{u(x,0)\} = \mathfrak{F}\{f(x)\} = F(\omega)$$

por otro lado

$$\frac{\partial U(\omega,0)}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{F}\{u(x,0)\}}{\partial t} = \mathfrak{F}\left\{\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}\right\} = \mathfrak{F}\{g(x)\} = G(\omega)$$

por lo tanto:

$$U(\omega, 0) = A\cos(c\omega(0)) + Bsen(c\omega(0)) = A = F(\omega)$$

ahora

$$\begin{aligned}\frac{\partial U(\omega,t)}{\partial t} &= \frac{\partial (A\cos(c\omega t) + Bsen(c\omega t))}{\partial t} \\ &= -Ac\omega sen(c\omega t) + Bc\omega\cos(c\omega t)\end{aligned}$$

de donde

$$\frac{\partial U(\omega,0)}{\partial t} = G(\omega) = -Ac\omega sen(c\omega(0)) + Bc\omega\cos(c\omega(0)) = Bc\omega$$

luego:

$$B = \frac{G(\omega)}{c\omega}$$

por consiguiente

$$U(\omega,t) = F(\omega)\cos(c\omega t) + \frac{G(\omega)}{c\omega} sen(c\omega t)$$

Al calcular la transformada inversa de Fourier se obtiene que:

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \mathfrak{F}^{-1}\{U(\omega,t)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(\omega,t)\, e^{j\omega x} d\omega \\ u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(F(\omega)\cos(c\omega t) + \frac{G(\omega)}{c\omega} sen(c\omega t)\right) e^{j\omega x} d\omega\end{aligned}$$