Máximo Ripani
Nro registro: 893368

‘Integración y sumación’

Trabajo práctico 2

1. Introducción

En el informe presentado se trabajaran los distintos métodos estudiados en el curso acerca de **integración** y **sumación** numérica. Se compararan los resultados producto de los distintos métodos enseñados en el curso con el fin de explorar la precisión de cada uno de ellos. Para integrar se utilizaran: la formula Euler-McLaurin; la formula de Trapecios; la formula de Simpson y su variación Simpson 3/8. Por el lado de sumación se utilizará: el método de Lubbock, la formula Woolhouse; y se sumaran valores interpolados con Newton y Splines.

2. Integración

Dada la siguiente integral:

$$\int_1^3 e^{ax} \cdot [cos(bx) + sen(bx)] \cdot dx \qquad a = 0{,}7 \quad b = 5$$

Se la aproximó a travez de los distintos métodos vistos en clase y se la comparó con su valor exacto: 2.76219376206927824 67.

2.1 Euler-McLaurin

Con la formula de Euler-McLaurin se aproximó el valor sumando distintas cantidades de números de Bernoulli, de esta forma analizaremos si la serie converge a su valor real. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

μ	Aproximación	Error
3	1.3341547906356678865	1.4280389714336103602
4	2.4690703323751064246	0.2931234296941718 2204
5	2.9871984191830671662	-0.2250046571137889 1953
6	3.1630477973596535790	-0.4008540352903753 3232
7	3.1660575547591909285	-0.4038637926899126 8177

Vemos que la mejor aproximación con Euler-McLaurin se logró cuando se utilizó $\mu = 5$ es decir cuando se utilizaba hasta el número de Bernoulli asociado b_8. Luego de investigar la formula con distintos valores de μ, en especifico se iteró con el intervalo $[1; 11]$ se llego a la conclusión de que la formula no converge a su valor real. Vemos como en las primeras iteraciones el error logra achicarse pero luego de $\mu = 5$ vuelve a alejarse. Esto ocurre, ya que dada la naturaleza de la función, al hacer el calculo de las derivadas, las mismas no se cancelaran nunca, por lo tanto la función tendrá siempre un grado de error. Por otro lado no podemos decir que la función converge a su valor real a medida que aumentan los números de Bernoulli ya que la misma es de carácter oscilante.

Se investigo entonces hacer variar el valor de n a travez de una cuadratura para obtener mayor precisión. Al usar n más grandes, estamos dividiendo en más intervalos de menor tamaño y la aproximación se hace más precisa. Probamos los siguientes cambios de limites: (0;1), (0;12), (0;48), (0,120) y la respectiva transformación de la función en base al cambio de variables. Obtuvimos los siguientes resultados:

Cuadratura	**Aproximación**	**Error**
(0;1)	57.102970185848939	-54.340776423779658444
(0;12)	2.7621691255017065	2.4636567571789669273**e**-05
(0;48)	2.7621937561258014	5.9434768218125100248**e**-09
(0;120)	2.7621937620449484	2.4329871450845530489**e**-11

Con estos resultados podemos determinar qué un cambio de variables (*cuadratura*) puede aumentar nuestra precisión. En este caso vemos que el aumento de precisión es positivamente proporcional al aumento de intervalos, es decir que más intervalos implican mayor precisión.

2.2 Trapecios

Otro de los métodos utilizados fue el de la formula de los Trapecios. En este caso se calculo no sólo la aproximación sino tambien las cotas de error. Se realizó un primer enfoque con $n = 6$ y luego sucesivas iteraciones para distintos valores de n. A continuación se muestran los resultados:

n	**Aproximación**	**Cota**	**Error**
6	2.0868141398644048934	4.5441399947688597	0.67537962220487424
12	2.5989573431540122783	1.1360349986922149	0.16323641891526686
48	2.7520950399613579584	0.071002187418263432	0.010098722107920732

n	Aproximación	Cota	Error
120	2.7605788815599177077	0.011360349986922149	0.001614880509360539

Vemos que al aumentar n la serie converge.

2.3 Simpson y Simpson 3/8

De la misma manera que se lo hizo con la formula de los Trapecio, en esta sección se investigará cuál es el comportamiento de las cotas del error utilizando la formula de Simpson y su respectiva variación Simpson 3/8. Nuevamente se tratara encontrar una relación entre el aumento de n y la convergencia. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

n	Aproximación	Cota	Error
6	2.9122663212646391351	-0.89207666143414766	-0.15007255919536089
12	2.7696717442505480733	-0.055754791339634228	-0.0074779821812693825
48	2.7622210866361736059	-0.0002177921536704462	-0.000027324566894915137
120	2.7621944590141578324	-0.000005575479133951826	-0.000000696944879585714

Por otro lado los números obtenidos con la variación Simpson 3/8 se muestran a continuación:

n	Aproximación	Cota	Error
6	3.1895799634707606707	-2.007172488226832	-0.42738620140148198
12	2.7803267912696059128	-0.125448280514177	-0.018133029200327666
48	2.7622555125729713055	-0.00049003234575850391	-0.000061750503693058789
120	2.7621953312918381407	0.000012544828053505159	-0.000001569222559894001

La relación es clara, las serie convergen a medida que se aumenta el n. A continuación vemos la explicación de este suceso.

2.4 Conclusiones

Para concluir con el estudio de los métodos de integración, podemos ver que hay una relación directa entre el aumento de n y la convergencia. Como vemos en los resultados, cuando aumentamos n las series convergen. Esto se debe a que al aumentar n existen una mayor cantidad de sub-intervalos. Una mayor cantidad de sub-intervalos nos otorga una mayor capacidad de ajuste. Calcular el área debajo de cada sub-intervalo y luego sumarlos es más preciso que, yendo al otro extremo, calcular el área debajo de un solo intervalo grande.

3. Sumación

Se trabajó con datos macroeconómicos divididos por trimestres. Las series a sumar fueron: Consumo Publico; Consumo Privado; Exportaciones. El período utilizado fue del 2005 hasta el 2012 y se utilizó solamente el cuarto trimestre de cada año.

Las sumaciones se dividieron en dos secciones, primero se realizaron con todos los datos en su conjunto, y en una segunda instancia, se separó los datos para ver si mejoraban las aproximaciones en las que se interpoló. De esta manera se comprobaría el efecto del *fenómeno de Runge*. Los métodos utilizados fueron: Lubbock; Woolhouse; sumación de interpolación por Newton; sumación de interpolación por Splines.

A continuación se muestran los resultados de las sumas exactas, ya que se conocían previamente los datos:

Consumo Público	Consumo Privado	Exportaciones
2287937.9490792425349	13718985.076737668365	4702028.0162050882354

3.1 Primera parte: totalidad de los datos

En esta sección se analizará los resultados de las sumaciones usando todos los datos en su conjunto. Primero se realizo por el método de Lubbock. Se realizaron dos iteraciones para cubrir las dos variaciones de método: Lubbock únicamente con diferencias; y Lubbock con diferencias y nablas.

Categoria	Consumo Público	Consumo Privado	Exportaciones
Deltas	2292524.86805118	13688752.2450879	4712293.59317729
Erro Relativo Deltas	0.00200482664917	0.00220372217629	0.00218322326809
Nablas	2294580.20958746	13715150.1533178	4706476.29505751
Error Relativo Nablas	0.00290316462074	0.00027953404705	0.00094603410211

Se utilizó como método alternativo la formula de Woolhouse, donde primero se interpolo con un polinomio de Newton de grado 8 y con el mismo se aplico la formula de Woolhouse:

Categoria	Consumo Público	Consumo Privado	Exportaciones
Aproximación	2310802,5621611	13599530,8998669	4735616,89236544

Categoria	Consumo Público	Consumo Privado	Exportaciones
Error Relativo	0,00999352349631	0,0087072112210265	0,007143490503553

Otra enfoque se realizó interpolando los valores faltantes, con Newton y Splines Frontera Libre, y luego sumando los valores interpolados y los datos utilizados que estaban dentro del período deseado.

Categoria	Consumo Público	Consumo Privado	Exportaciones
Suma Newton	2310810,7683206284419	13582417,19267259352	4738769,81227930267
Error Relativo	0,009997132680364360	0,009954663796277725	0,00781403172154383
Suma Splines	2294015,3849369152449	13720378,195762831717	4703012,49879050441
Error Relativo	0,002656294004878284	0,000101546799371155	0,0002093740364845

Vemos que con este enfoque tambien se consiguieron resultados muy buenos, especialmente con la interpolación de Splines. Podemos concluir que con esta disposición de los datos el método más preciso fue la sumación con los datos interpolados por Splines, en segundo lugar Lubbock tuvo resultados interesantes tanto con nablas como sin ellos. Mientras que los peores resultados los muestran aquellos enfoques en los cuales se utilizo interpolación por Newton, esto se deba probablemente al *fenómeno de Runge,* lo cual analizaremos en la siguiente sección.

3.2 Segunda parte: datos divididos

En esta sección se buscará probar la influencia del *fenómeno de Runge* en las aproximaciones que incluyen una interpolación con muchos datos con poca variación. Se propuso una solución al problema que fue dividir los datos en dos, la primera parte incluye los datos del 2005-2008 y la segunda del 2009-2012.

Primero se calcularon dos polinomios interpoladores de grado 4 y se calculo la formula de Woolhouse para las dos partes por separa, luego se sumaron los resultados:

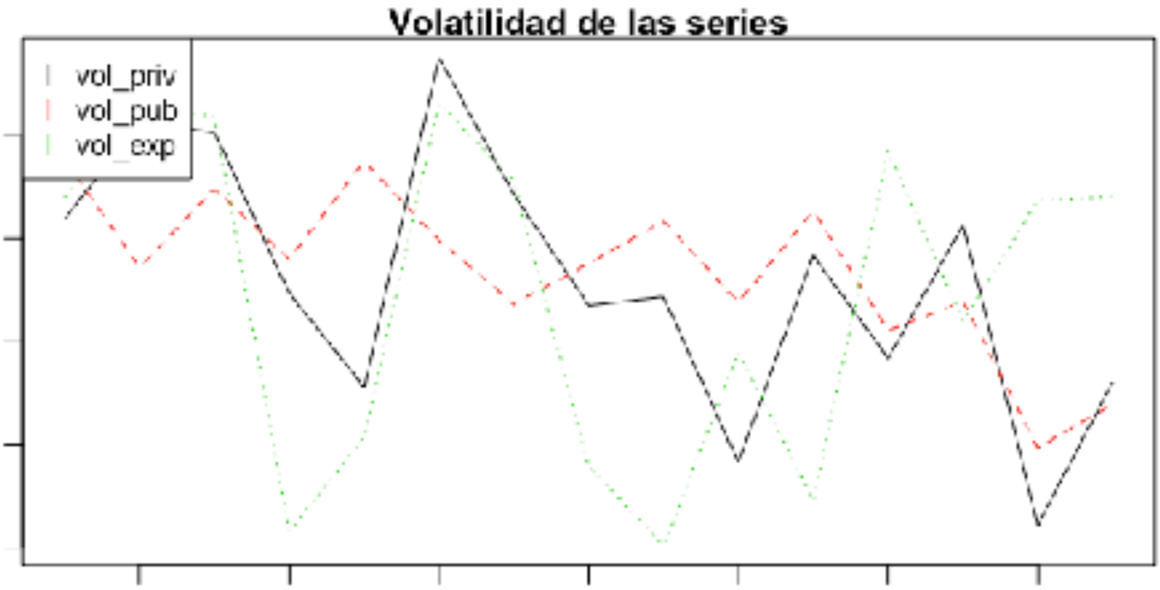
Categoria	Consumo Público	Consumo Privado	Exportaciones
Aproximación	2301724.8879889440723	13688958.77436831966	4710117.504447937943
Error Relativo	0.006025901046682240	0.002188662326817934	0.00172042881240561

Luego se busco comprobar la incidencia del *fenómeno de Runge* con la sumación de los datos interpolados con Newton y Splines:

Categoria	Consumo Público	Consumo Privado	Exportaciones
Suma Newton	2297181.9187867688015	13691992.10847424902	4711735.040842751041
Error Relativo	0.004040306124231389	0.00196756306041833	0.00206443360273662
Suma Splines	2295448.2134680999443	13710787.358090862632	4706121.1128856111318
Error Relativo	0.0032825472351117909	0.000597545561931257	0.00087049602137980

Como podemos apreciar en las tablas de resultados, aquellos que están en verde indican una mejora con respecto a su análogo pero con usando los datos en su totalidad, como era de esperarse, aquellas sumaciones que contenían una interpolación por el método de Newton de por medio, mejoraron sus resultados.

A continuación veremos un gráfico que representa la volatilidad de las series en cuestión.



Como podemos ver las series de Consumo Privado y Exportaciones tienen una volatilidad mayor a la de Consumo Publico. Esto explica, porque la serie de Consumo Publico obtuvo peores aproximaciones. Yendo más en profundidad las series con menor volatilidad son más propensas a experimentar el *fenómeno de Runge*. Es así que la mejor aproximación para la serie de Consumo Público se dio con la formula de Lubbock la cual se ve menos afectada por el fenómeno de poca variabilidad.

Para concluir que el enfoque que obtuvo los mejores resultados fue el de la sumación de los valores interpolados por Splines, logrando la mejor precisión en dos de las series (Consumo Privado y Exportaciones), y un resultado decente en la ultima de ellas (Consumo Publico).