Máximo Ripani
Nro registro: 893368

‘Integración y sumación’

Trabajo práctico 2

1. Introducción

En el informe presentado se trabajaran los distintos métodos estudiados en el curso acerca de **integración** y **sumación** numérica. Se compararan los resultados producto de los distintos métodos con el fin de explorar la precisión de cada uno de ellos. Para integrar se utilizaran: la formula Euler-McLaurin; la formula de Trapecios; la formula de Simpson y su variación Simpson 3/8. Por el lado de sumación se utilizará: el método de Lubbock, la formula Woolhouse; y se sumaran valores interpolados con Newton y Splines.

2. Integración

Dada la siguiente integral:

$$\int_1^3 e^{ax} \cdot [cos(bx) + sen(bx)] \cdot dx \qquad a = 0{,}7 \quad b = 5$$

Se la aproximó a travez de los distintos métodos y sé la comparó con su valor exacto: 2.7621937620692782467.

2.1 Euler-McLaurin

Con la formula de Euler-McLaurin se aproximó el valor de la integral usando distintos valores de μ, recordamos que al variar el valor de μ, varia la cantidad de números de Bernoulli asociados que se utilizan en la aproximación. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

μ	Aproximación	Error Relativo
3	1.3341547906356678865	0.5169944958400763956 87
4	2.4690703323751064246	0.1061197927963534459 74
5	2.9871984191830671662	0.0814586797651835475 83
6	3.1630477973596535790	0.1451216206462208335 73
7	3.1660575547591909285	0.1462112463780820825 75

Vemos que la mejor aproximación con Euler-McLaurin se logro cuando se utilizó $\mu = 5$ es decir cuando se contaba hasta el número de Bernoulli asociado b_8. Luego de investigar la formula con distintos valores de μ, en especifico se iteró con el intervalo $[1;11]$ se llego a la conclusión de que la formula no converge. Vemos como en las primeras iteraciones el error logra achicarse pero luego de $\mu = 5$ vuelve a alejarse. Se exploró también la precisión obtenida luego de un cambio de variables, lo que también es conocido como *cuadratura,* probamos los siguientes cambios de limites: (0;1), (0;12), (0;48), (0,120) y la respectiva transformación de la función en base al cambio de variables. Obtuvimos los siguientes resultados:

Cuadratura	**Aproximación**	**Error Relativo**
(0;1)	28.551485092924469456	1.9673050156724212201**e**+01
(0;12)	16.573014753010244959	8.9192032466792342413**e**-06
(0;48)	66.292650147019244855	2.1517231380759655059**e**-09
(0;120)	165.73162572269683236	8.8087056318540200034**e**-12

Con estos resultados podemos determinar qué un cambio de variables (*cuadratura*) puede aumentar nuestra precisión. En este caso vemos que el aumento de precisión es proporcional al aumento del intervalo, es decir que intervalos más grandes implican mayor precisión.

2.2 Trapecios

Otro de los métodos utilizados fue el de la formula de los Trapecios. En este caso se calculo no sólo la aproximación sino tambien las cotas de error. Se realizó un primer enfoque con $n = 6$ y luego sucesivas iteraciones para distintos valores de n. A continuación se muestran los resultados:

n	**Aproximación**	**Cota**	**Error Relativo**
6	2.0868141398644048934	4.128391382650072216620	0.24450841627377994935699
12	2.5989573431540122783	1.042259672037494588892	0.05909665757588944412504
48	2.7520950399613579584	0.070989066114164792176	0.00365605130479872662830
120	2.7605788815599177077	0.011358250578266369107	0.00058463694022347018411

Vemos que al aumentar n la serie converge.

2.3 Simpson y Simpson 3/8

De la misma manera que se lo hizo con la formula de los Trapecios, en esta sección se investigará cuál es el comportamiento de las cotas del error utilizando la formula de Simpson y su respectiva variación Simpson 3/8. Nuevamente se tratará encontrar una relación entre el aumento de *n* y la convergencia. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

n	**Aproximación**	**Cota**	**Error Relativo**
6	2.9122663212646391351	6.8410464107714852311**e**-01	5.4330931180923046353**e**-02
12	2.7696717442505480733	5.5345389779485672233**e**-02	2.7072619900740590645**e**-03
48	2.7622210866361736059	2.1692218079555288012**e**-04	9.8923425541621730589**e**-06
120	2.7621944590141578324	5.5717659402235559951**e**-06	2.5231570976527126313**e**-07

Por otro lado los números resueltos con la variación Simpson 3/8 se muestran a continuación:

n	**Aproximación**	**Cota**	**Error Relativo**
6	3.1895799634707606707	1.5392354424235838994**e**+00	1.5472708948604280144**e**-01
12	2.7803267912696059128	1.2452712700384276079**e**-01	6.5647202051254483282**e**-03
48	2.7622555125729713055	4.8807490678999385829**e**-04	2.2355601747068906530**e**-05
120	2.7621953312918381407	1.2536473365503001201**e**-05	5.6810734331628821010**e**-07

La relación es clara, las series convergen a medida que se aumenta el *n*. A continuación vemos la explicación de este suceso.

2.4 Conclusiones

Para concluir con el estudio de los métodos de integración, podemos ver que hay una relación directa entre el aumento de *n* y la convergencia. Como vemos en los resultados, cuando aumentamos *n* las series convergen. Esto se debe a que al aumentar *n* existe una mayor cantidad de sub-intervalos. Una mayor cantidad de sub-intervalos nos otorga una mayor capacidad de ajuste. Calcular el área debajo de cada sub-intervalo y luego sumarlos es más preciso que, yendo al otro extremo, calcular el área debajo de un solo intervalo grande.

3. Sumación

Se trabajó con datos macroeconómicos divididos por trimestres. Las series a sumar fueron: Consumo Publico; Consumo Privado; Exportaciones. El período utilizado fue del 2005 hasta el 2012 y se utilizó solamente el cuarto trimestre de cada año.

Las sumaciones se dividieron en dos secciones, primero se realizaron con todos los datos en su conjunto, y en una segunda instancia, se separó los datos para ver si mejoraban las aproximaciones en las que se interpoló. De esta manera se comprobaría el efecto del *fenómeno de Runge*. Los métodos utilizados fueron: Lubbock; Woolhouse; sumación de interpolación por Newton; sumación de interpolación por Splines.

A continuación se muestran los resultados de las sumas exactas, ya que se conocían previamente los datos:

Consumo Público	Consumo Privado	Exportaciones
2287937.9490792425349	13718985.076737668365	4702028.0162050882354

3.1 Primera parte: totalidad de los datos

En esta sección se analizará los resultados de las sumaciones usando todos los datos en su conjunto. Primero se realizo por el método de Lubbock. Se realizaron dos iteraciones para cubrir las dos variaciones de método: Lubbock únicamente con diferencias; y Lubbock con diferencias y nablas.

Categoria	Consumo Público	Consumo Privado	Exportaciones
Deltas	2292524.86805118	13688752.2450879	4712293.59317729
Erro Relativo Deltas	0.00200482664917	0.00220372217629	0.00218322326809
Nablas	2294580.20958746	13715150.1533178	4706476.29505751
Error Relativo Nablas	0.00290316462074	0.00027953404705	0.00094603410211

Se utilizó como método alternativo la formula de Woolhouse, donde primero se interpolo con un polinomio de Newton de grado 8 y con el mismo se aplico la formula de Woolhouse:

Categoria	Consumo Público	Consumo Privado	Exportaciones
Aproximación	2310802,5621611	13599530,8998669	4735616,89236544

Categoria	Consumo Público	Consumo Privado	Exportaciones
Error Relativo	0,00999352349631	0,0087072112210265	0,007143490503553

Otra enfoque se realizó interpolando los valores faltantes, con Newton y Splines Frontera Libre, y luego sumando los valores interpolados y los datos utilizados que estaban dentro del período deseado.

Categoria	Consumo Público	Consumo Privado	Exportaciones
Suma Newton	2310810,7683206284419	13582417,19267259352	4738769,81227930267
Error Relativo	0,009997132680364360	0,009954663796277725	0,00781403172154383
Suma Splines	2294015,3849369152449	13720378,195762831717	4703012,49879050441
Error Relativo	0,002656294004878284	0,000101546799371155	0,0002093740364845

Vemos que con este enfoque tambien se consiguieron resultados muy buenos, especialmente con la interpolación de Splines. Podemos concluir que con esta disposición de los datos el método más preciso fue la sumación con los datos interpolados por Splines, en segundo lugar Lubbock tuvo resultados interesantes tanto con nablas como sin ellos. Mientras que los peores resultados los muestran aquellos enfoques en los cuales se utilizo interpolación por Newton, esto se deba probablemente al *fenómeno de Runge,* lo cual analizaremos en la siguiente sección.

3.2 Segunda parte: datos divididos

En esta sección se buscará probar la influencia del *fenómeno de Runge* en las aproximaciones que incluyen una interpolación con muchos datos con poca variación. Se propuso una solución al problema que fue dividir los datos en dos, la primera parte incluye los datos del 2005-2008 y la segunda del 2009-2012.

Primero se calcularon dos polinomios interpoladores de grado 4 y se calculo la formula de Woolhouse para las dos partes por separado, luego se sumaron los resultados:

Categoria	Consumo Público	Consumo Privado	Exportaciones
Aproximación	2301724.8879889440723	13688958.77436831966	4710117.504447937943
Error Relativo	0.006025901046682240	0.002188662326817934	0.00172042881240561

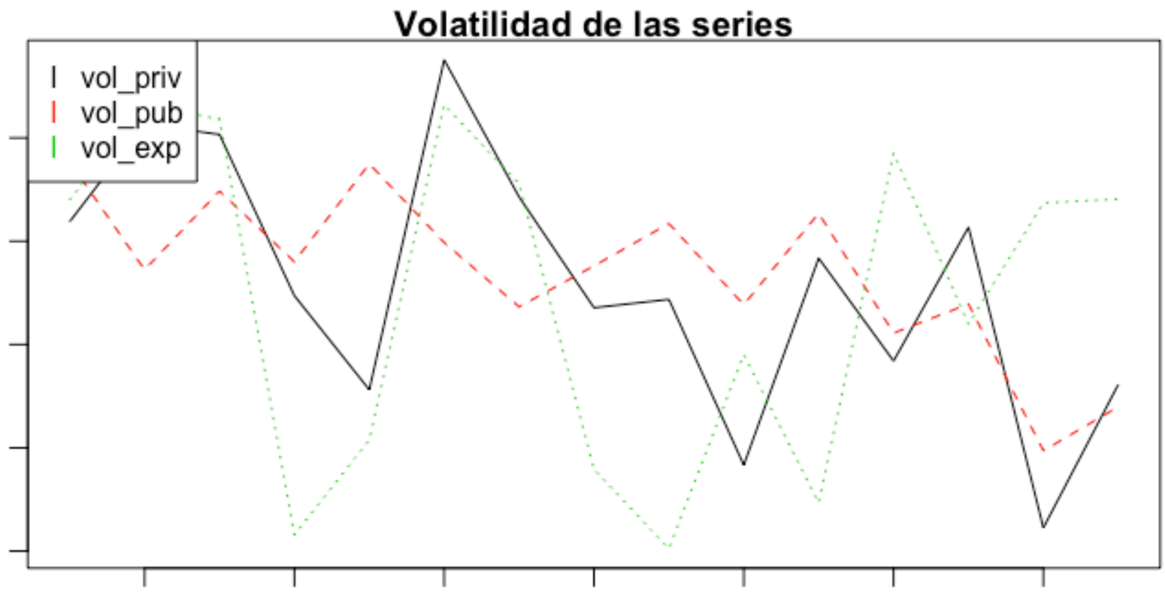
También se busco comprobar la incidencia del *fenómeno de Runge* con la sumación de los datos interpolados con Newton y Splines:

Categoria	Consumo Público	Consumo Privado	Exportaciones
Suma Newton	2297181.9187867688015	13691992.10847424902	4711735.040842751041
Error Relativo	0.0040403061242313 89	0.0019675630604183 3	0.00206443360273662
Suma Splines	2295448.2134680999443	13710787.35809086263 2	4706121.1128856111318
Error Relativo	0.0032825472351117909	0.000597545561931257	0.00087049602137980

3.3 Conclusiones

Como podemos apreciar en las tablas de resultados, aquellos que están en verde indican una mejora con respecto a su análogo en el que usabas los datos en su totalidad, como era de esperarse, aquellas sumaciones que contenían una interpolación por el método de Newton de por medio, mejoraron sus resultados.

A continuación veremos un gráfico que representa la volatilidad de las series en cuestión.



Como podemos ver las series de Consumo Privado y Exportaciones tienen una volatilidad mayor a la de Consumo Publico. Esto explica, porque la serie de Consumo Publico obtuvo peores aproximaciones en aquellas en las que hubo una interpolación de Newton de por medio. Yendo más en profundidad las series con menor volatilidad son más propensas a experimentar el *fenómeno de Runge*. Es así que la mejor aproximación para la serie de Consumo Público se dio con la formula de Lubbock la cual no se ve afectada por el fenómeno de poca variabilidad.

Para concluir, en mi opinión, el enfoque que obtuvo los mejores resultados fue el de la sumación de los valores interpolados por Splines, logrando la mejor precisión en dos de las series (Consumo Privado y Exportaciones), y un resultado decente en la ultima de ellas (Consumo Publico).

Profesor: J.E. Fabris