EJERCICIO 1

Una rueda de $30\ cm$ de radio tiene una manigueta en su borde. La rueda gira a $0{,}5\ \frac{rev}{seg}$ con su eje de posición horizontal. Suponiendo que los rayos del sol incidan vertical sobre la tierra, la sombra de la manigueta esta animada de movimiento armónico simple encontrar:

a) El periodo de oscilación de la sombra,

b) La frecuencia,

c) Su amplitud,

d) Escribir las ecuaciones que expresan su desplazamiento en función del tiempo. Suponer la fase inicial cero.

Solución

Datos:

Radio= Amplitud = $30\ cm$

$\omega = 0{,}5\ \frac{rev}{seg}$

a) El periodo de oscilación de la sombra es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$T = \frac{2\pi}{0{,}5 * 2\pi\ \frac{rad}{seg}}$$

$$\boxed{T = 2\ sg}$$

b) La frecuencia de la sombra es:

$$T = \frac{1}{f}$$

$$f = \frac{1}{2\ seg}$$

$$T = 0{,}5\ Hz$$

c) Su amplitud es:

$$A = 30\ cm$$

d) Escribir las ecuaciones q expresan su desplazamiento en función del tiempo. Suponer la fase inicial cero.

$X(t) = A\ sen\ (\omega t + \varphi)$
$X(t) = 0{,}30\ sen\ (\pi t)$

Donde la fase inicial es igual a cero ($\varphi = 0$).

EJERCICIO 2
Un oscilador armónico simple está descrito por la ecuación
$x(t) = 4\ Sen\ (0.1t + 0.5)$
Donde todos las cantidades se expresan en MKS.
Encuentre:

a. Amplitud, periodo, frecuencia y la fase inicial del movimiento
b. Velocidad y aceleración del movimiento
c. Condiciones iniciales
d. La posición, velocidad y aceleración para $t = 5s$
e. Hacer el gráfico de la posición, velocidad y aceleración en función del tiempo.

Solución

Por comparación con la expresión

$$x(t) = A\ Sen\ (wt + \varphi)$$

Tenemos que,
$x(t) = 4\ Sen\ (0.1t + 0.5)$

a) Amplitud, periodo, frecuencia y la fase inicial del movimiento.

Amplitud: $A = 4m$

Frecuencia Angular: $\omega = 0.1\ rad/s$

Fase Inicial: φ = 0.5 rad

Periodo:

UNIVERSIDAD DE PAMPLONA
Una Universidad incluyente y comprometida con el desarrollo integral

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$
$$T = \frac{2\pi}{0,1}\ seg$$

$$T = 20\ \pi\ seg$$

Frecuencia:

$$f = \frac{1}{T}$$
$$f = \frac{1}{20\pi}\ seg$$

b) Velocidad y aceleración del movimiento

$$V(t) = \frac{dx}{dt} = 0.4\ Cos\ (0.1t + 0.5) \quad a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -0.04Sen(0.1t + 0.5)$$

c) Condiciones iniciales cuando $t = 0$,

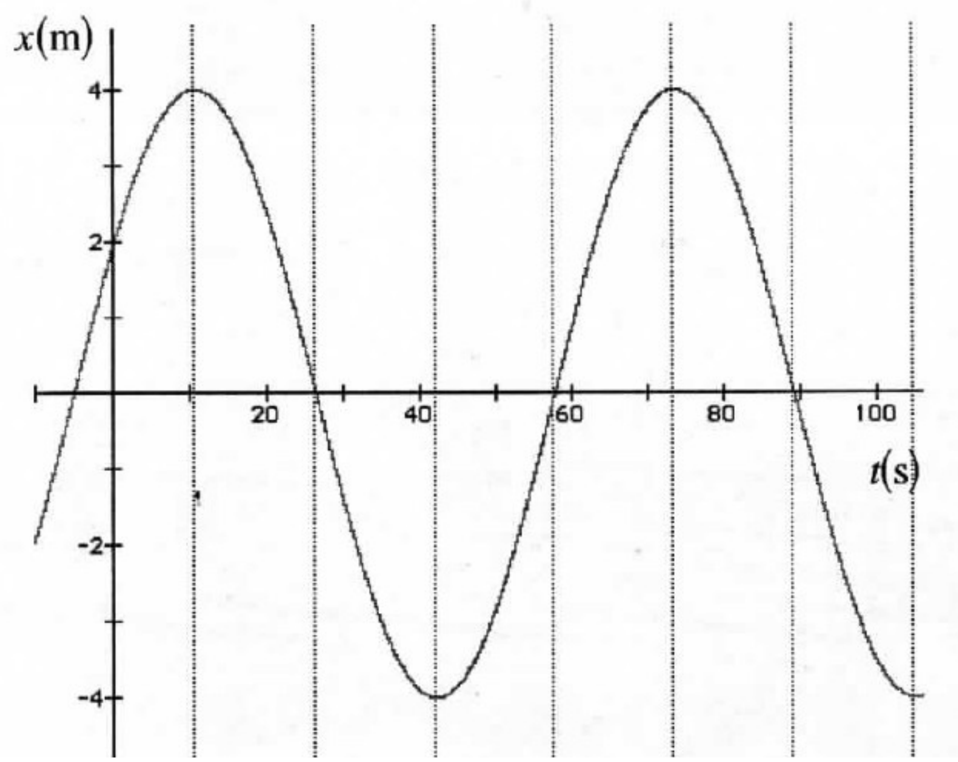
$$x_0 = x(t = 0) = 4Sen(0.5) = 1.92m$$
$$v_0 = v(t = 0) = 4Cos(0.5) = 0.351m/s$$
$$a_0 = a(t = 0) = -0.04Sen(0.5) = -19.17x10^{-3}m/s^2$$

d) La posición, velocidad y aceleración para $t = 5s$

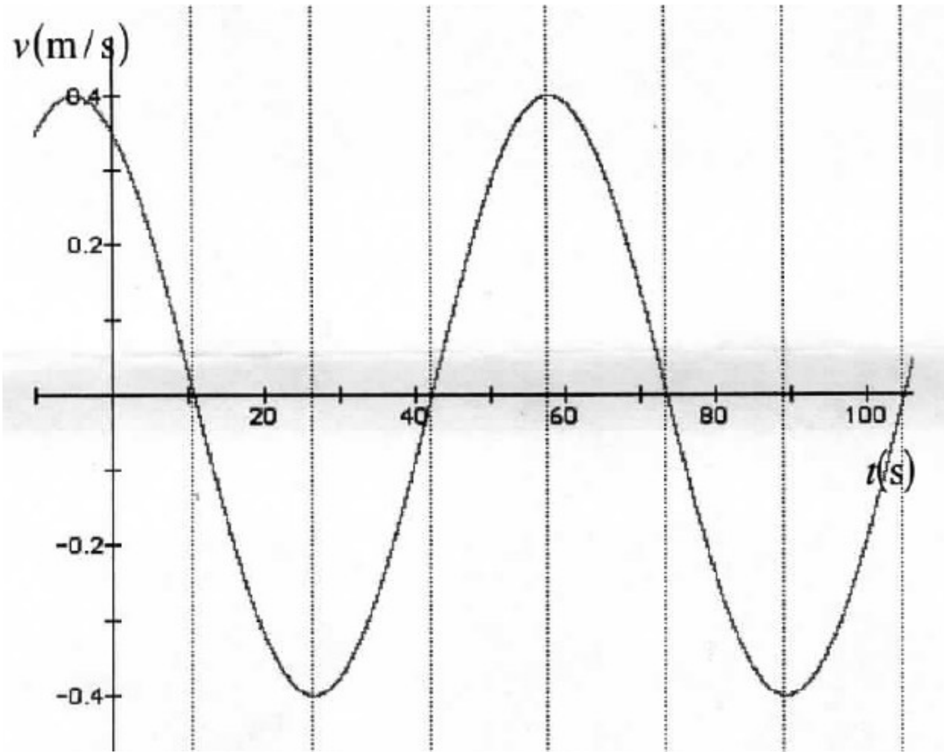
$$x(t = 5) = 4Sen(1) = 3.37m$$
$$v(t = 5) = 4Cos(1) = 0.216m/s$$
$$a(t = 5) = -0.04Sen(1) = -3.37x10^{-2}m/s^2$$

e) l gráfico de la posición, velocidad y aceleración en función del tiempo.

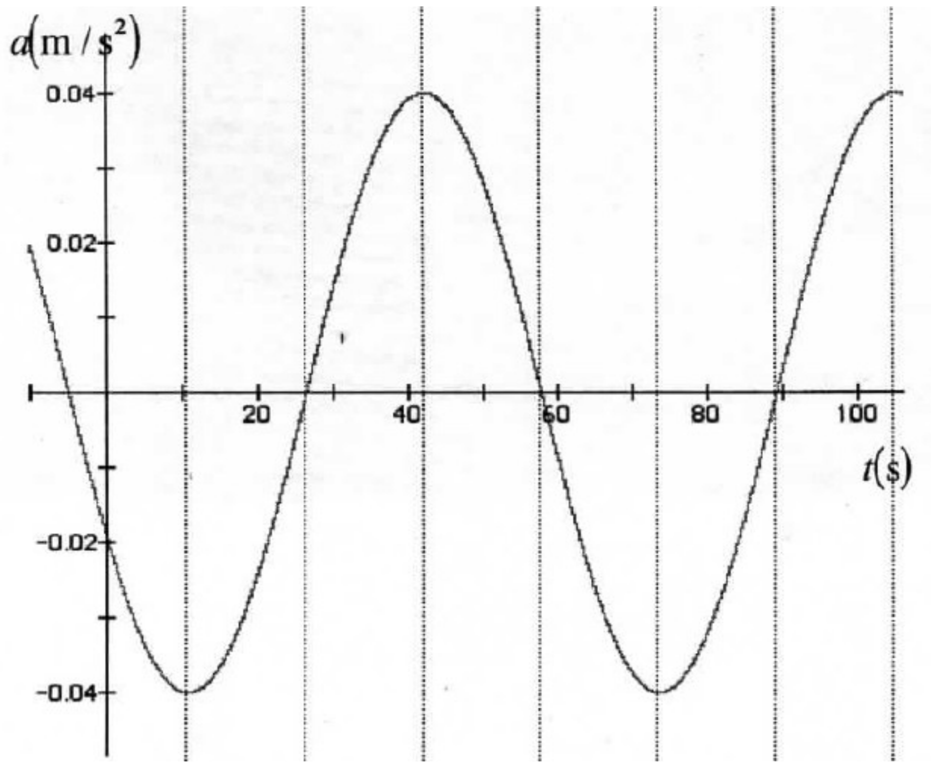
GRAFICA DE DESPLAZAMIENTO CONTRA TIEMPO



GRAFICA DE VELOCIDAD CONTRA TIEMPO



GRAFICA ACELERACION CONTRA TIEMPO



EJERCICIO 3

Una partícula está situada en el extremo de un vibrador que pasa por su posición de equilibrio con una velocidad de $2\frac{m}{s}$ la amplitud es de $10^{-3}\ m.$ ¿Cuál es la frecuencia y el periodo del vibrador? Escribir la ecuación que exprese su desplazamiento en función del tiempo.

Solución

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$
$$E_k = \frac{1}{2}m\omega^2[A^2 - x^2]$$

Como pasa por la posición de equilibrio $x = 0$ tenemos,

$$\frac{1}{2}m\omega^2[A^2 - x^2] = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\omega = \frac{2\,\frac{m}{s}}{10^{-3}\,m}$$

$$\omega = 2000\frac{rad}{seg}$$

Así la el periodo es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$T = \frac{2\pi}{2000\frac{rad}{seg}}$$

$$T = \pi * 10^{-3} seg$$

Y la frecuencia:

$$f = \frac{1}{T}$$

$$f = \frac{10^3}{\pi} seg$$

La ecuación que exprese su desplazamiento en función del tiempo es:

$$X(t) = 10^{-3}\, sen(2000t + \alpha)$$

EJERCICIO 4

Una particula cuya masa es de $1\,g$ vibra con movimiento armónico simple de amplitud de $2\,mm$. Su aceleración en el extremo de su recorrido es de $8{,}0 * 10^3\,\frac{m}{s^2}$. Calcular la frecuencia del movimiento y la velocidad de la partícula cuando pasa por la posición de equilibrio y cuando la elongación es de $1{,}2\,mm.$ Escribir la ecuación que expresa la fuerza que actúa sobre la partícula en función posición y el tiempo.

Solución

Datos

$A = 2 * 10^{-3}\, m$, $m = 10^{-3}\, kg$, $a = 8{,}0 * 10^{3} \frac{m}{s^2}$, $x = 1{,}2\, mm$

La aceleración de la partícula es:

$$a = -\omega^2 x$$

$$\omega^2 = -\frac{a}{x};\ \omega = 2\pi f$$

Así la frecuencia se puede calcular,

$$f^2 = -\frac{a}{(2\pi)^2 x}$$

$$f^2 = -\frac{8{,}0 * 10^3 \frac{m}{s^2}}{(2\pi)^2(-2 * 10^{-3}\, m)}$$

$$f = \sqrt{\frac{10^6}{(\pi)^2} Hz^2}$$

$$f = \sqrt{\frac{10^6}{(\pi)^2} Hz^2}$$

$$f = \frac{10^3}{\pi} Hz$$

La velocidad de la partícula se puede calcular, partiendo de la energía cinética,

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} m\omega^2 [A^2 - x^2]$$

Como pasa por la posición de equilibrio $x = 0$ tenemos,

$$\frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} m v^2$$

$$(2\pi f)^2 A^2 = v^2$$

$$v = 2\pi f A$$

$$v = 2\pi \left(\frac{10^3}{\pi} Hz\right) 2 * 10^{-3} m$$

$$v = 4 \frac{m}{s}$$

Cuando la elongación es de $1{,}2\ mm$, su velocidad se puede escribir,

$$\frac{1}{2}m\omega^2[A^2 - x^2] = \frac{1}{2}mv^2$$
$$(2\pi f)^2[A^2 - x^2] = v^2$$
$$v = 2\pi f\sqrt{[A^2 - x^2]}$$
$$v = 2\pi\left(\frac{10^3}{\pi}Hz\right)\sqrt{[(2 * 10^{-3})\text{^}2 - (1{,}2 * 10^{-3})^2]}\ m$$
$$v = 3{,}2\frac{m}{s}$$

La fuerza que actúa sobre la partícula en función posición y el tiempo es

$$F = -m\omega^2 x$$
$$F = (10^{-3}\ )(2 * 10^3)^2 x$$
$$F = 4 * 10^3\ x\ [N]$$

$$F = -mA\omega^2 sen(\omega t + \alpha)$$
$$F = -(10^{-3}\ )\ (-2 * 10^{-3})(2 * 10^3\ )^2 sen(\omega t + \alpha)\ [N]$$
$$F = 8sen(2 * 10^3 t + \alpha)\ [N]$$

EJERCICIO 5

Una partícula se mueve con movimiento armónico simple con una amplitud de $1.5\ m$ y frecuencia 100 ciclos por segundo ¿Cuál es su frecuencia angular? Calcular su velocidad, aceleración y su fase cuando su desplazamiento es de $0.75\ m$.

Solución

La frecuencia angular es,

$$\omega = 2\pi f$$
$$\omega = 2\pi(100\ Hz)$$
$$\omega = 200\ \pi\ Hz$$

La velocidad se puede calcular a través de la energía cinética,

$$\frac{1}{2}m\omega^2[A^2 - x^2] = \frac{1}{2}mv^2$$
$$(2\pi f)^2[A^2 - x^2] = v^2$$
$$v = \omega\sqrt{[A^2 - x^2]}$$
$$v = (200\ \pi\ Hz)\sqrt{[(1.5\ m\ )^2 - (0.75\ \mathrm{m})^2]}$$
$$v = 2{,}59 * 10^2\ \pi\ Hz$$

La aceleración se puede calcular como sigue,

$$a = -\omega^2 x$$
$$a = -(200\,\pi\,Hz)^2(-0{,}75\,m)$$
$$a = 3 * 10^4\,\pi\frac{m}{s}$$

La fase inicial se puede calcular como sigue, para la condiciones iniciales (t=0=),

$$x = \ A\,sen(wt\ +\ \alpha)$$
$$\frac{x}{A} = \ \ sen(\alpha)$$
$$\alpha = sen^{-1}\left(\frac{x}{A}\right)$$
$$\alpha = sen^{-1}\left(\frac{0{,}75}{1{,}5}\right)$$
$$\alpha = 30°$$

EJERCICIO 6

Un movimiento armónico simple tiene una amplitud de $8\ cm$ y un periodo de $4\ seg$. Calcular la velocidad y la aceleración $0{,}5\ Seg$ después que la partícula pase por el extremo de su trayectoria.

SOLUCIÓN:

DATOS:
A = 8 cm ---- 0.08m
T = 4 seg.
La frecuencia angular es,

$$\omega\ = \frac{2\pi}{T}$$
$$\omega\ = \frac{2\pi}{4\ seg}$$
$$\omega\ = \frac{\pi}{2}\frac{rad}{seg}$$

La velocidad después de $t = 0{,}5$, es:

$$v\ =\ A\,\omega\,cos\ (\omega t\ +\ \alpha)$$
$$v\ =\ 0{,}08\frac{\pi}{2}\ \ cos\ \left(\frac{\pi}{2}(0{,}5) + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$v\ =\ 2{,}8\,\pi * 10^{-2}\frac{m}{s}$$

La aceleración después de $t = 0{,}5$, es:

$$a = -A\,\omega^2 \cos\,(\omega t + \alpha)$$

$$a = 0{,}08\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 sen\,\left(\frac{\pi}{2}(0{,}5) + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a = 1{,}4\,\pi^2 * 10^{-2}\,\frac{m}{s}$$

EJERCICIO 7

Una partícula cuya masa es de 0.5 Kg, se mueve con movimiento armónico simple. Su periodo es de 0.15 seg y la Amplitud de su movimiento es de 10cm, calcular la aceleración, la fuerza de la energía potencia y cinética cuando la partícula está a 5 cm de la posición inicial.

DATOS

Masa: 0.5 Kg
Periodo (T): 0.15 S
Amplitud (A): 10cm: 0.1M
Po: 0.05 M

SOLUCIÓN

A)

$$F = \frac{1}{T}$$

$$F = \frac{1}{0.15\;seg} = 6.666\;Hz$$

B)

$$\omega = 2\pi f$$

$\omega = 2$

edia. org/wiki/%CE%A0" \o "\"Π\" |π} $\cdot$ 6.666 $Hz =$ **41.88 *hZ***

C)

$a = -\omega^2 x$

$a = -41.88^2 \cdot 0.05\ seg$

$\boldsymbol{a = 87.69 \frac{m}{s^2}}$

D)

$E_k = \frac{1}{2}\, m\, \omega^2 [A^2 - X^2]$

$E_k = \frac{1}{2}\,(0.5\ Kg)\,(41.88 \frac{rad}{s})^2 [(0.10\ m)^2 - (0.05\ m)^2]$

$\boldsymbol{E_k = 3.28\ N}$

EJERCICIO 8

Encontrar, para un movimiento armónico simple, los valores de $(\bar{x})$ y (x^2), donde los promedios se refieren.

Parte a)

$x = A\ sen\ w_0\ t$

$\bar{x} = \overline{A\ sen\ w_0\ t}$

Pero $\overline{sen\ w_0\ t} = 0$

Entonces $\bar{x} = 0$

Parte b)

$$x^2 = A^2 sen^2\, w_0\, t$$

$$\overline{x^2} = \overline{A^2\, sen^2\, w_0\, t}$$

Pero $$\overline{sen^2\, w_0\, t} = \frac{1}{T}\int_0^T sen^2 w_0\, t\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\frac{1-\cos 2\ w_0\, t}{2}\right] dt$$

$$\overline{sen^2\, w_0\, t} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2} dt - \frac{1}{T}\int_0^T \left[\frac{\cos 2\ \ w_0\ t}{2}\right] dt$$

Entonces $$\overline{sen^2\, w_0\, t} = \frac{1}{T}\left[\frac{1}{2}\right] T = \frac{1}{2}$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{2} A^2$$

EJERCICIO 9

Una plancha horizontal oscila con movimiento armónico simple con una amplitud de 1,5 m y una frecuencia de 15 oscilaciones por minuto. Calcular el valor mínimo del coeficiente de fricción a fin de que un cuerpo colocado sobre la plancha no resbale cuando la plancha se mueve.

SOLUCIÓN

$$A = 1{,}5\, m$$

$$F = 15\, osc/\min$$

$$\omega = 2\pi f$$

$\omega = 2$

/%CE%A0" \o "\"Π\" |π}$(15\ \frac{osc}{min})(\frac{1min}{60seg})$

$$\omega = \frac{\pi}{2}\frac{rad}{seg}$$

La fuerza de fricción es
$F_f \ = \mu f_N$
Para que la plancha no resbale se debe cumplir
$F \ = F_f$
$ma = \ \mu mg$
$\mu = \frac{a}{g}$
Para obtener el valor mínimo del coeficiente de refracción tenemos
$\mu = \frac{A\omega^2}{g}$
$\mu = \frac{(1.5\ m)\left(\frac{\pi}{2}\frac{rad}{seg}\right)^2}{9,8\frac{m}{s^2}}$
$\mu = \ 0.377$

EJERCICIO 9
Un bloque de madera cuya densidad es ρ tiene dimensiones a, b, c. Mientras está flotando en el agua con el lado a vertical se le empuja hacia abajo y se le suelta. Halle el periodo de las oscilaciones resultantes.

Tomemos como sentido positivo de desplazamiento del bloque verticalmente hacia abajo. Llamemos h a la longitud del bloque debajo del agua cuando flota en equilibrio. En esta situación tendremos que la fuerza neta hacia abajo será nula:

$$mg - F_{empuje} = 0 \Rightarrow mg = (V_{sumergido}\rho_0)\,g \Rightarrow mg = (bch\rho_0)\,g$$

Donde $\rho 0$es la densidad del agua. Si realizamos un desplazamiento x del bloque respecto de su posición de equilibrio, la nueva longitud del bloque por debajo del agua será h + x. En esta nueva situación la fuerza neta hacia abajo ya no será nula:

$$F_{neta} = mg - F'_{empuje} = mg - (V'_{sumergido}\rho_0)\,g = mg - (bc\,[h+x]\,\rho_0)\,g$$

Sustituyendo en esta expresión la relación entre el peso del cilindro y la altura h:

$$F_{neta} = -(bc\rho_0 g)\,x$$

Vemos que la fuerza es de tipo elástico con una constante elástica: $k = bc\rho_0 g$

El periodo de las oscilaciones será:

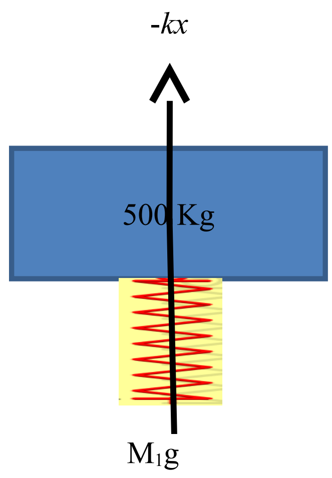
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{abc\rho}{bc\rho 0 g}} = 2\pi\sqrt{\left(\frac{\rho}{\rho 0}\right)\left(\frac{a}{g}\right)}$$

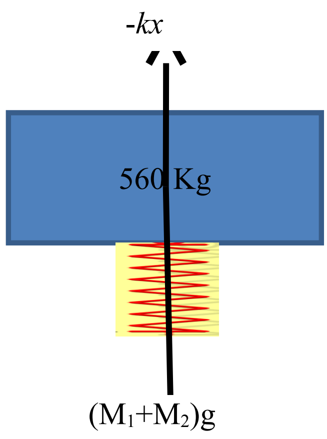
EJERCICIO 9

Cuando un hombre de 60kg se introduce en un auto, el centro de gravedad del auto baja 0,3 cm. ¿Cuál es la conste de elasticidad de los muelles del auto? Suponiendo que la masa del auto es de 500kg, ¿Cuál es su periodo de vibración cuando está vacío y cuando está el hombre adentro?

SOLUCIÓN:

Representación de Fuerzas





$m_2 = 60kg$; $x = 0.3cm = 3x10^{-3}m$

a) **Calculo de la constante de elasticidad (*K) de los muelles del auto.***

$F = -kx = -m_2 g$

$$k = \frac{m_2 g}{x} = \frac{60kg \times 9.8m/s^2}{3 \times 10^{-3}m}$$

$$\underline{\boldsymbol{k = 196 \times 10^3 N/m}}$$

b) **Periodo de vibración del auto vacío.**

$kx = m_1 \omega^2 x$; $m_1=500kg$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{196 \times 10^3\ N/m}{500kg}} = 19.79898987\,{}^{rad}/_{s} \approx 19.8\,{}^{rad}/_{s}$$

$$\boldsymbol{P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{19.8\,{}^{rad}/_{s}} = 0.317s}$$

c) **Periodo de vibración del auto con el hombre adentro.**

$m_1 + m_2 = 560kg$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = \sqrt{\frac{196 \times 10^3\ N/m}{560kg}} = 18.70829\,{}^{rad}/_{s} \approx 18.71\,{}^{rad}/_{s}$$

$$\boldsymbol{P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{18.7\,{}^{rad}/_{s}} = 0.336s}$$

EJERCICIO 10

El Periodo de un péndulo es de 3s. ¿Cuál será su periodo si su longitud (a) aumenta, (b) disminuye un 60%?

Solución

a. El periodo de un péndulo simple está dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 3\ seg$$

Si su longitud aumenta un 60%, su nueva longitud es:
$L' = L + 0{,}6L$

Luego.

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{L'}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1.6L}{g}} = \sqrt{1.6}\ 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$T' = \sqrt{1.6}\,(3s) = 3.79s$$

b. Si el periodo disminuye en un 60%, su nueva longitud es:

$$T'' = 2\pi\sqrt{\frac{L''}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.4L}{g}} = \sqrt{0.4}\ 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$T'' = \sqrt{0.4}\,(3s) = 1.89s$$

EJERCICIO 11

Estimar el orden relativo de magnitud de los primeros términos correctivos en la serie del periodo de un péndulo simple si la amplitud es:

a) 10º

b) 30º

Solución

a) Para 10º

P= $\left(2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\right)\left[1+\frac{1}{4}\sin\left(\frac{1}{2}\theta o\right)^{2}+\frac{9}{64}\sin\left(\frac{1}{2}\theta o\right)^{4}\ldots\right]$

P= $\left(2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\right)\left[1+\frac{1}{4}\sin\left(\frac{1}{2}10\right)^{2}+\frac{9}{64}\sin\left(\frac{1}{2}10\right)^{4}\right]$

P= $\left(2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\right)[1+1.899\times10^{-3}+8.114\times10^{-6}]$

b) Para 30º

P= $\left(2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\right)\left[1+\frac{1}{4}\sin\left(\frac{1}{2}30\right)^{2}+\frac{9}{64}\sin\left(\frac{1}{2}30\right)^{4}\right]$

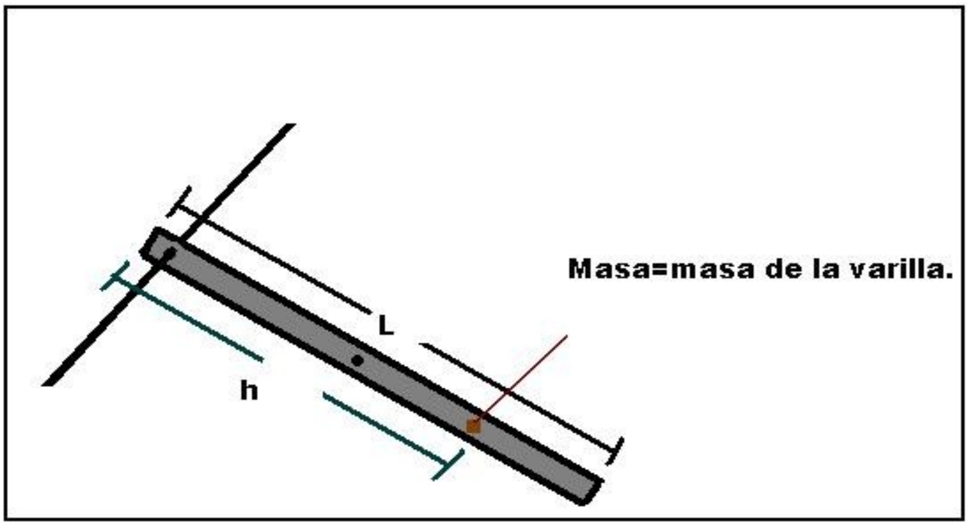
P= $\left(2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\right)[1+1.674\times10^{-2}+6.31\times10^{-4}]$

EJERCICIO 12

Una varilla de longitud **L**, oscila con respecto a un eje horizontal que pasa por el extremo, un cuerpo de igual masa que la varilla está situado sobre la varilla a una distancia h del eje.

a) Obtener el periodo del sistema en función de **h** y de **L.**

b) ¿Hay algún valor de **h** para el cual el periodo es el mismo como si no hubiera masa?



Solución.

a). Lo primero que haremos será encontrar el centro de masa de la masa 2 que en este caso es igual a la masa de la varilla, aplicando la siguiente formula.

$$Cm = \frac{\left(\frac{L}{2}\right)m + h(m)}{2m} = \frac{\frac{L}{2}+h}{2} = \frac{L+2h}{4}$$

Luego calculamos el momento de inercia con la siguiente ecuación.

$I = \frac{1}{3}mL^2 + mh^2$ factorizando m quedaría de la siguiente forma.

$$I = \left[\frac{L^2}{3} + h^2\right]m$$

Expresando el periodo con respecto al momento de inercia y al centro de masa, se tiene la siguiente ecuación:

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{I}{bgm}}$$

Donde:
b=centro de masa.
g=gravedad
m=masa
Reemplazando el centro de masa y el momento de inercia se obtiene que:

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{\left[\frac{L^2}{3}+h^2\right]m}{\frac{\boldsymbol{L+2h}}{\boldsymbol{4}}\boldsymbol{mg}}}$$

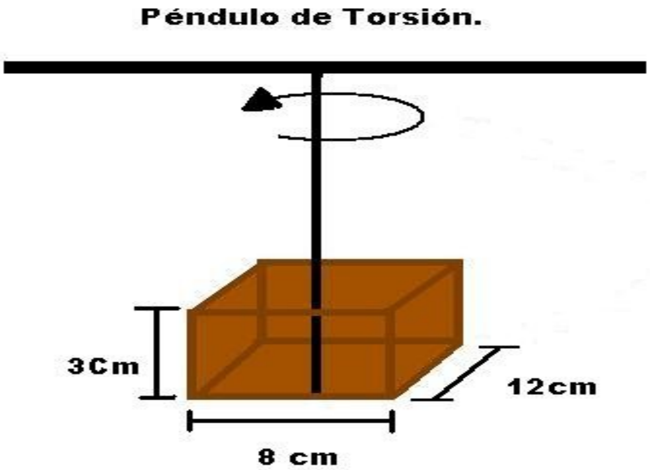
Simplificando:

$$P = 4\pi\sqrt{\frac{L^2+h^2}{3(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{2h})g}}$$

b). No hay ningún valor.

EJERCICIO 12

Un péndulo de torsión consiste de un bloque rectangular de madera de 8cm x 12cm x 3cm con una masa de 0.3 Kg, suspendido por medio de un alambre que pasa a través de su centro y de tal modo que el lado corto es vertical. El periodo de oscilación es de 2.4 s. ¿Cuál es la constante de torsión *K* del alambre?



Solución:
Antes que nada necesitamos conocer el valor del momento de inercia de este objeto en particular (cubo de madera), para lo cual se utilizará la siguiente ecuación.

$$I = [m(\frac{a^2+b^2}{12})]$$

Donde:
M=masa del objeto, 0.3Kg.
a^2= la dimensión horizontal del objeto para este caso 8cm=0.08m
b^2= la profundidad del objeto en este caso 12cm=0.12m
Como en el ejercicio nos piden encontrar la constante K=Kappa, Utilizamos la siguiente ecuación que relaciona el momento de inercia con la constante.

$$K = (2\pi)^2 \frac{I}{T^2}$$

Donde: T^2 es igual al periodo de oscilación al cuadrado, siendo I el momento de inercia y 2π al cuadrado una constante.
Haciendo la relación entre las dos ecuaciones anteriores tenemos que:

$$K = (2\pi)^2 [m(\frac{a^2+b^2}{12})/T^2]$$

Reemplazando valores tenemos que:

$$K = (2\pi)^2 \left[0.3kg\left(\frac{0.08m^2 + 0.12m^2}{12}\right)/2.4^2\right]$$

K=3.564X10^{-3}N.m [Newton por metro]

EJERCICIO 13

Encontrar la ecuación resultante de la superposición de dos movimientos armónicos simples paralelos cuyas ecuaciones son:

$$x_1 = 2sen\ (\ \omega t + \frac{\pi}{3}\ )$$

$$x_2 = 3sen\ (\ \omega t + \frac{\pi}{2}\ )$$

Hacer un gráfico de cada movimiento y del movimiento resultante. Representar sus respectivos vectores rotantes.

SOLUCIÓN:

Es una superposicion de M.A.S. Paralelos de igual frecuencia

$$x_1 = A_1\ sen\ (\ \omega t + \delta_1)$$

$$x_2 = A_2\ sen\ (\ \omega t + \delta_2)$$

Con resultante

$$x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \delta)$$

Donde:

$$A = (A_1{}^2\ + \mathrm{A}_2{}^2\ + 2\mathrm{A}_1\ \mathrm{A}_2\ \cos\alpha)\text{^}0.5$$

$\alpha = \delta_2 - \delta_1$

y

$$\tan\delta = \frac{A_1\, sen\, \delta_1 + A_2\, sen\, \delta_2}{A_1 \cos\delta_1 + A_2 \cos\delta_2}$$

Estas ecuaciones están demostradas en el libro de Alonso − Finn (pag. 372), por ejemplo.

Valores

$$\alpha = \delta_2 - \delta_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$A = (A^{12} + A^{22} + 2A^1 A^2 \cos\alpha)^{0.5}$$

$$A = \left(2^2 + 3^2 + 2.2.3 \cos\frac{\pi}{6}\right)^{0.5}$$

$$A = 4.73$$

$$\tan\delta = \frac{A_1\, sen\, \delta_1 + A_2\, sen\, \delta_2}{A_1 \cos\delta_1 + A_2 \cos\delta_2}$$

$$\tan\delta = \frac{2\, sen\, \pi/3 + 3\, sen\, \pi/2}{2 \cos\pi/3 + 3 \cos\pi/2}$$

$$\tan\delta = 4.732$$

$$\delta = 1.36\, rad$$

Luego:

$$x = A\, \mathrm{sen}(\omega t + \delta)$$

$$x = A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \delta\right)$$

$$x = 4.732 \cos(\omega t + 0.2)$$

EJERCICIO 14

Un péndulo simple tiene un periodo de $2\ s$ y un amplitud de $2°$, después de 10 oscilaciones completas su amplitud ha sido reducida a $1{,}5°$ encontrar la constante de amortiguamiento γ.

Solución

Datos:

$t = 2\ seg$; $\theta o = 2°$; $\theta = 1.5°$

La ecuación para este movimiento toma la forma, donde la amplitud del movimiento viene dada por,

$$\theta = \theta_0 e^{-\gamma t}$$

$$\frac{1}{e^{-\gamma t}} = \frac{\theta_0}{\theta}$$

$$e^{\gamma t} = \frac{\theta_0}{\theta}$$

$$\gamma t = \ln(\frac{\theta_0}{\theta})$$

$$\gamma = \frac{1}{t}\ln(\frac{\theta_0}{\theta})$$

$$\gamma = \frac{10}{2\ \text{seg}}\ln(\frac{2°}{1.5°})$$

$$\gamma = 1{,}43\ s^{-1}$$

EJERCICIO 15

En el caso del oscilador amortiguado, la cantidad $\tau = \frac{1}{2\gamma}$ se denomina *tiempo de relajación*.

a) Verificar que tiene unidades de tiempo.
b) ¿en cuánto ha variado la amplitud del oscilador después de un tiempo τ?
c) Expresar como una función de τ, el tiempo necesario para que la amplitud se reduzca a la mitad de su valor inicial.
d) ¿Cuáles son los valores de la amplitud después de tiempos iguales a dos, tres veces, etc., el valor obtenido en c)?

Solución

a) Verificamos que tiene unidades de tiempo haciendo un análisis dimensional.

$$\tau = \frac{1}{2\gamma}$$
$$\tau = \frac{1}{2\frac{\lambda}{2\mathrm{m}}}$$
$$\tau = \frac{\mathrm{m}}{\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{v}}}$$
$$\tau = \frac{\mathrm{m} * \mathrm{v}}{F}$$
$$\tau = \frac{[Kg] * [m/s]}{\left[Kg * \frac{m}{s^2}\right]}$$
$$\tau = s$$

b) la amplitud del oscilador después de un tiempo τ ha variado,

$$A^{´}(t) = Ae^{-\gamma t}$$
$$A^{´}\left(\frac{1}{2\gamma}\right) = Ae^{-\gamma\frac{1}{2\gamma}}$$
$$A^{´}\left(\frac{1}{2\gamma}\right) = Ae^{-\frac{1}{2}}$$

UNIVERSIDAD DE PAMPLONA
Una Universidad incluyente y comprometida con el desarrollo integral

$$A'\left(\frac{1}{2\gamma}\right) = 0,6\ A$$

c) Expresar como una función de τ, el tiempo necesario para que la amplitud se reduzca a la mitad de su valor inicial.

$$A'(t) = Ae^{-\gamma t}$$
$$\frac{A}{2} = Ae^{-\gamma t}$$
$$\frac{1}{2} = e^{-\gamma t}$$
$$-\frac{1}{2\tau}t = Ln\,(1/2)$$
$$-t = 2\tau\ Ln\,(1/2)$$
$$-t = -1,38\ \tau$$
$$t = 1,38\ \tau$$

d) ¿Cuáles son los valores de la amplitud después de tiempos iguales a dos, tres veces, etc., el valor obtenido en c)?

$$A'(t) = Ae^{-\gamma t}$$
$$A'(1,38\ \tau) = \frac{A}{2}$$
$$A'(2 * 1,38\ \tau) = \frac{A}{4}$$
$$A'(3 * 1,38\ \tau) = \frac{A}{8}$$
$$A'(n * 1,38\ \tau) = \frac{A}{2^n}$$

Movimiento armónico simple

EJERCICIO 16

Cuando una masa de $0.750\ kg$ oscila en un resorte ideal, la frecuencia es de $1.33\ Hz$. *a*) ¿Cuál será la frecuencia si se agregan $0.220\ kg$ a la masa original, y *b*) y si se restan de la masa original? Intente resolver este problema *sin* calcular la constante de fuerza del resorte.

Solución

IDENTIFY: The mass and frequency are related by $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$.

SET UP: $f\sqrt{m} = \frac{\sqrt{k}}{2\pi} =$ constant, so $f_1\sqrt{m_1} = f_2\sqrt{m_2}$.

EXECUTE: **(a)** $m_1 = 0.750\text{ kg}$, $f_1 = 1.33\text{ Hz}$ and $m_2 = 0.750\text{ kg} + 0.220\text{ kg} = 0.970\text{ kg}$.

$$f_2 = f_1\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = (1.33\text{ Hz})\sqrt{\frac{0.750\text{ kg}}{0.970\text{ kg}}} = 1.17\text{ Hz}.$$

(b) $m_2 = 0.750\text{ kg} - 0.220\text{ kg} = 0.530\text{ kg}$. $f_2 = (1.33\text{ Hz})\sqrt{\frac{0.750\text{ kg}}{0.530\text{ kg}}} = 1.58\text{ Hz}$

EVALUATE: When the mass increases the frequency decreases and when the mass decreases the frequency increases.

EJERCICIO 17

Un oscilador armónico tiene una masa de $0.500\,kg$ unida a un resorte ideal con constante de fuerza de $140\,N/m$. Calcule *a*) el periodo, *b*) la frecuencia y *c*) la frecuencia angular de las oscilaciones.

Solución

IDENTIFY: Apply Eqs.(13.11) and (13.12).

SET UP: $f = 1/T$

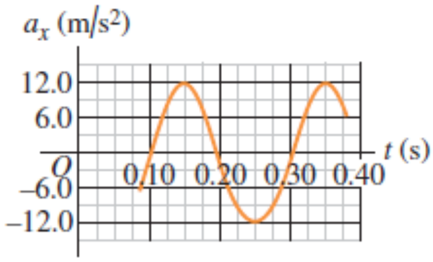
EXECUTE: (a) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{0.500\text{ kg}}{140\text{ N/m}}} = 0.375\text{ s}$.

(b) $f = \dfrac{1}{T} = 2.66\text{ Hz}$. **(c)** $\omega = 2\pi f = 16.7\text{ rad/s}$.

EVALUATE: We can verify that $1\text{ kg/(N/m)} = 1\text{ s}^2$.

EJERCICIO 18

Sobre una pista de aire horizontal sin fricción, un deslizador oscila en el extremo de un resorte ideal, cuya constante de fuerza es $2.50\ N/cm$. En la figura, la gráfica muestra la aceleración del deslizador en función del tiempo. Calcule *a*) la masa del deslizador; *b*) el desplazamiento máximo del deslizador desde el punto de equilibrio; *c*) la fuerza máxima que el resorte ejerce sobre el deslizador.



Solución

IDENTIFY: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$. $a_x = -\dfrac{k}{m}x$ so $a_{max} = \dfrac{k}{m}A$. $F = -kx$.

SET UP: a_x is proportional to x so a_x goes through one cycle when the displacement goes through one cycle. From the graph, one cycle of a_x extends from $t = 0.10\text{ s}$ to $t = 0.30\text{ s}$, so the period is $T = 0.20\text{ s}$. $k = 2.50\text{ N/cm} = 250\text{ N/m}$. From the graph the maximum acceleration is 12.0 m/s^2.

EXECUTE: **(a)** $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ gives $m = k\left(\dfrac{T}{2\pi}\right)^2 = (250\text{ N/m})\left(\dfrac{0.20\text{ s}}{2\pi}\right)^2 = 0.253\text{ kg}$

(b) $A = \dfrac{ma_{max}}{k} = \dfrac{(0.253\text{ kg})(12.0\text{ m/s}^2)}{250\text{ N/m}} = 0.0121\text{ m} = 1.21\text{ cm}$

(c) $F_{max} = kA = (250\text{ N/m})(0.0121\text{ m}) = 3.03\text{ N}$

EVALUATE: We can also calculate the maximum force from the maximum acceleration:
$F_{max} = ma_{max} = (0.253\text{ kg})(12.0\text{ m/s}^2) = 3.04\text{ N}$, which agrees with our previous results.

Energía en el movimiento armónico simple

EJERCICIO 19

Una porrista ondea su pompón en MAS con amplitud de $18.0\ cm$ y frecuencia de $0.850\ Hz$. Calcule *a*) la magnitud máxima de la aceleración y de la velocidad; *b*) la aceleración y rapidez cuando la coordenada del pompón es $x = +9.0\ cm$; *c*) el tiempo que tarda en moverse directamente de la posición de equilibrio a un punto situado a **12.0 cm** de distancia. *d*) ¿Cuáles de las cantidades pedidas en los incisos *a*), *b*)

Solución

IDENTIFY and SET UP: a_x is related to x by Eq.(13.4) and v_x is related to x by Eq.(13.21). a_x is a maximum when $x = \pm A$ and v_x is a maximum when $x = 0$. t is related to x by Eq.(13.13).

EXECUTE: **(a)** $-kx = ma_x$ so $a_x = -(k/m)x$ (Eq.13.4). But the maximum $|x|$ is A, so $a_{max} = (k/m)A = \omega^2 A$.

$f = 0.850$ Hz implies $\omega = \sqrt{k/m} = 2\pi f = 2\pi(0.850\ \text{Hz}) = 5.34$ rad/s.

$a_{max} = \omega^2 A = (5.34\ \text{rad/s})^2(0.180\ \text{m}) = 5.13\ \text{m/s}^2$.

$\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$

$v_x = v_{max}$ when $x = 0$ so $\frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2}kA^2$

$v_{max} = \sqrt{k/m}A = \omega A = (5.34\ \text{rad/s})(0.180\ \text{m}) = 0.961\ \text{m/s}$

(b) $a_x = -(k/m)x = -\omega^2 x = -(5.34\ \text{rad/s})^2(0.090\ \text{m}) = -2.57\ \text{m/s}^2$

$\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$ says that $v_x = \pm\sqrt{k/m}\sqrt{A^2 - x^2} = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$

$v_x = \pm(5.34\ \text{rad/s})\sqrt{(0.180\ \text{m})^2 - (0.090\ \text{m})^2} = \pm 0.832\ \text{m/s}$

The speed is 0.832 m/s.

EVALUATE: It takes one-fourth of a period for the object to go from $x = 0$ to $x = A = 0.180$ m. So the time we have calculated should be less than $T/4$. $T = 1/f = 1/0.850\ \text{Hz} = 1.18$ s, $T/4 = 0.295$ s, and the time we calculated is less than this. Note that the a_x and v_x we calculated in part (b) are smaller in magnitude than the maximum values we calculated in part (b).

(d) The conservation of energy equation relates v and x and $F = ma$ relates a and x. So the speed and acceleration can be found by energy methods but the time cannot.

Specifying x uniquely determines a_x but determines only the magnitude of v_x; at a given x the object could be moving either in the $+x$ or $-x$ direction.

EJERCICIO 19

Un juguete de 0.$150\ kg$ está en MAS en el extremo de un resorte horizontal con constante de fuerza $k = 300\ N/m$. Cuando el objeto está a $0.0120\ m$ de su posición de equilibrio, tiene una rapidez de $0.300\ m/s$. Calcule *a*) la energía total del objeto en cualquier punto de su movimiento; *b*) la amplitud del movimiento; *c*) la rapidez máxima alcanzada por el objeto durante su movimiento.

Solución

IDENTIFY and SET UP: Use Eq.(13.21). $x = \pm A\omega$ when $v_x = 0$ and $v_x = \pm v_{max}$ when $x = 0$.

EXECUTE: **(a)** $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$

$E = \frac{1}{2}(0.150\text{ kg})(0.300\text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}(300\text{ N/m})(0.012\text{ m})^2 = 0.0284\text{ J}$

(b) $E = \frac{1}{2}kA^2$ so $A = \sqrt{2E/k} = \sqrt{2(0.0284\text{ J})/300\text{ N/m}} = 0.014\text{ m}$

(c) $E = \frac{1}{2}mv_{max}^2$ so $v_{max} = \sqrt{2E/m} = \sqrt{2(0.0284\text{ J})/0.150\text{ kg}} = 0.615\text{ m/s}$

EVALUATE: The total energy E is constant but is transferred between kinetic and potential energy during the motion.

Aplicaciones del movimiento armónico simple

EJERCICIO 20

Un orgulloso pescador de alta mar cuelga un pez de $65.0\ kg$ de un resorte ideal con masa despreciable, estirando el resorte $0.120\ m$. *a*) Calcule la constante de fuerza del resorte. Ahora se tira del pez $5.00\ cm$ hacia abajo y luego se suelta. *b*) ¿Qué periodo de oscilación tiene el pez? *c*) ¿Qué rapidez máxima alcanzará?

Solución

IDENTIFY: Use the amount the spring is stretched by the weight of the fish to calculate the force constant k of the spring. $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. $v_{max} = \omega A = 2\pi f A$.

SET UP: When the fish hangs at rest the upward spring force $|F_x| = kx$ equals the weight mg of the fish. $f = 1/T$. The amplitude of the SHM is 0.0500 m.

EXECUTE: (a) $mg = kx$ so $k = \dfrac{mg}{x} = \dfrac{(65.0\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)}{0.120\text{ m}} = 5.31\times10^3\text{ N/m}$.

(b) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{65.0\text{ kg}}{5.31\times10^3\text{ N/m}}} = 0.695\text{ s}$.

(c) $v_{max} = 2\pi f A = \dfrac{2\pi A}{T} = \dfrac{2\pi(0.0500\text{ m})}{0.695\text{ s}} = 0.452\text{ m/s}$

EVALUATE: Note that T depends only on m and k and is independent of the distance the fish is pulled down. But v_{max} does depend on this distance.

EJERCICIO 21

Una esfera de $1.50\ kg$ y otra de $2.00\ kg$ se pegan entre sí colocando la más ligera debajo de la más pesada. La esfera superior se conecta a un resorte ideal vertical, cuya constante de fuerza es de $165\ N/m$, y el sistema vibra verticalmente con una amplitud de $15.0\ cm$. El pegamento que une las esferas es débil y antiguo, y de repente falla cuando las esferas están en la posición más baja de su movimiento. *a*) ¿Por qué es más probable que el pegamento falle en el *punto mas bajo*, que en algún otro punto del movimiento? *b*) Calcule la amplitud y la frecuencia de las vibraciones después de que la esfera inferior se despega.

Solución

IDENTIFY: The location of the equilibrium position, the position where the downward gravity force is balanced by the upward spring force, changes when the mass of the suspended object changes.

SET UP: At the equilibrium position, the spring is stretched a distance *d*. The amplitude is the maximum distance of the object from the equilibrium position.

EXECUTE: **(a)** The force of the glue on the lower ball is the upward force that accelerates that ball upward. The upward acceleration of the two balls is greatest when they have the greatest downward displacement, so this is when the force of the glue must be greatest.

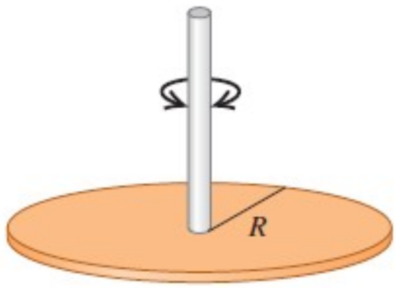
(b) With both balls, the distance d_1 that the spring is stretched at equilibrium is given by $kd_1 = (1.50\text{ kg} + 2.00\text{ kg})g$ and $d_1 = 20.8\text{ cm}$. At the lowest point the spring is stretched $20.8\text{ cm} + 15.0\text{ cm} = 35.8\text{ cm}$. After the 1.50 kg ball falls off the distance d_2 that the spring is stretched at equilibrium is given by $kd_2 = (2.00\text{ kg})g$ and $d_2 = 11.9\text{ cm}$.

The new amplitude is $35.8\text{ cm} - 11.9\text{ cm} = 23.9\text{ cm}$. The new frequency is $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{165\text{ N/m}}{2.00\text{ kg}}} = 1.45\text{ Hz}$.

EVALUATE: The potential energy stored in the spring doesn't change when the lower ball comes loose.

EJERCICIO 22

Un disco metálico delgado con masa de 2.00 3 10_{23} kg y radio de 2.20 cm se une en su centro a una fibra larga como se ve en la figura. Si se tuerce y suelta, el disco oscila con un periodo de 1.00 s. Calcule la constante de torsión de la fibra.



Solución

IDENTIFY: Eq.(13.24) and $T = 1/f$ says $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$.

SET UP: $I = \frac{1}{2}mR^2$.

EXECUTE: Solving Eq. (13.24) for κ in terms of the period,

$$\kappa = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 I = \left(\frac{2\pi}{1.00\text{ s}}\right)^2 ((1/2)(2.00\times10^{-3}\text{ kg})(2.20\times10^{-2}\text{ m})^2) = 1.91\times10^{-5}\text{ N}\cdot\text{m/rad}.$$

EVALUATE: The longer the period, the smaller the torsion constant.

EJERCICIO 24

Imagine que quiere determinar el momento de inercia de una pieza mecánica complicada, con respecto a un eje que pasa por su centro de masa, así que la cuelga de un alambre a lo largo de ese eje. El alambre tiene una constante de torsión de . Usted gira un poco la pieza alrededor del eje y la suelta, cronometrando 125 oscilaciones en 265 s. ¿Cuánto vale el momento de inercia buscado?

Solución

IDENTIFY: $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{I}}$.

SET UP: $f = 125/(265\text{ s})$, the number of oscillations per second.

EXECUTE: $I = \frac{\kappa}{(2\pi f)^2} = \frac{0.450\text{ N}\cdot\text{m/rad}}{\left(2\pi(125)/(265\text{ s})\right)^2} = 0.0152\text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

EVALUATE: For a larger I, f is smaller.

El péndulo simple

EJERCICIO 25

En San Francisco un edificio tiene aditamentos ligeros que consisten en bombillas pequeñas de $2.35\ kg$ con pantallas, que cuelgan del techo en el extremo de cordones ligeros y delgados de 1.50 de longitud. Si ocurre un terremoto leve, ¿cuántas oscilaciones por segundo harán tales aditamentos?

Solución

IDENTIFY: Since the cord is much longer than the height of the object, the system can be modeled as a simple pendulum. We will assume the amplitude of swing is small, so that $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$.

SET UP: The number of swings per second is the frequency $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$.

EXECUTE: $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9.80\ \text{m/s}^2}{1.50\ \text{m}}} = 0.407$ swings per second.

EVALUATE: The period and frequency are both independent of the mass of the object.

EJERCICIO 26

Un péndulo en Marte. En la Tierra cierto péndulo simple tiene un periodo de 1.60 s. ¿Qué periodo tendrá en Marte, donde $g = 3.71\frac{m}{s^2}$?

Solución

IDENTIFY: Use Eq.(13.34) to relate the period to g.

SET UP: Let the period on earth be $T_E = 2\pi\sqrt{L/g_E}$, where $g_E = 9.80\ \text{m/s}^2$, the value on earth.

Let the period on Mars be $T_M = 2\pi\sqrt{L/g_M}$, where $g_M = 3.71\ \text{m/s}^2$, the value on Mars.

We can eliminate L, which we don't know, by taking a ratio:

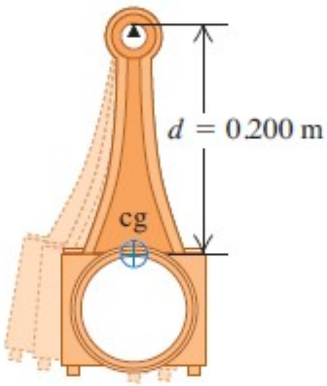
EXECUTE: $\dfrac{T_M}{T_E} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g_M}}\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g_E}{L}} = \sqrt{\dfrac{g_E}{g_M}}$.

$$T_M = T_E\sqrt{\frac{g_E}{g_M}} = (1.60\ \text{s})\sqrt{\frac{9.80\ \text{m/s}^2}{3.71\ \text{m/s}^2}} = 2.60\ \text{s}.$$

El péndulo físico

EJERCICIO 27

Una biela de $1.80\ kg$ de un motor de combustión pivota alrededor de un filo de navaja horizontal como se muestra en la figura. El centro de gravedad de la biela se encontró por balanceo y está a $0.200\ m$ del pivote. Cuando la biela se pone a oscilar con amplitud corta, completa 100 oscilaciones en $120\ s$. Calcule el momento de inercia de la biela respecto al eje de rotación en el pivote.



Solución

IDENTIFY: $T = 2\pi\sqrt{I/mgd}$.

SET UP: $d = 0.200\text{ m}$. $T = (120\text{ s})/100$.

EXECUTE: $I = mgd\left(\dfrac{T}{2\pi}\right)^2 = (1.80\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(0.200\text{ m})\left(\dfrac{120\text{ s}/100}{2\pi}\right)^2 = 0.129\text{ kg.m}^2$.

EVALUATE: If the rod were uniform, its center of gravity would be at its geometrical center and it would have length $l = 0.400\text{ m}$. For a uniform rod with an axis at one end, $I = \frac{1}{3}ml^2 = 0.096\text{ kg}\cdot\text{m}^2$. The value of I for the actual rod is about 34% larger than this value.

EJERCICIO 28

Dos péndulos tienen las mismas dimensiones (longitud L) y masa total (m). El péndulo A es una esfera muy pequeña que oscila en el extremo de una varilla uniforme sin masa. En el péndulo B, la mitad de la masa está en la esfera y la otra mitad en la varilla uniforme. Calcule el periodo de cada péndulo para oscilaciones pequeñas. ¿Cuál tarda más tiempo en una oscilación?

Solución

IDENTIFY: Pendulum A can be treated as a simple pendulum. Pendulum B is a physical pendulum.

SET UP: For pendulum B the distance d from the axis to the center of gravity is $3L/4$. $I = \frac{1}{3}(m/2)L^2$ for a bar of mass $m/2$ and the axis at one end. For a small ball of mass $m/2$ at a distance L from the axis, $I_{\text{ball}} = (m/2)L^2$.

EXECUTE: Pendulum A: $T_A = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$.

Pendulum B: $I = I_{\text{bar}} + I_{\text{ball}} = \frac{1}{3}(m/2)L^2 + (m/2)L^2 = \frac{2}{3}mL^2$.

$T_B = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{3}mL^2}{mg(3L/4)}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{8}{9}}\left(2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\right) = 0.943T_A$. The period is longer for pendulum A.

EVALUATE: Example 13.9 shows that for the bar alone, $T = \sqrt{\frac{2}{3}}T_A = 0.816T_A$. Adding the ball of equal mass to the end of the rod increases the period compared to that for the rod alone.