

POLITECNICO DI MILANO

Facoltà di Ingegneria dell'Informazione

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Automazione



**PROBLEMI DI STABILIZZAZIONE
NELLA GUIDA DI UNA BICICLETTA**

Relatore: Chiar.mo Prof. Paolo BOLZERN

Autore:

Luca GALBUSERA
Matr. N. 654511

Anno Accademico 2003-2004

Ai miei genitori

SOMMARIO

POLITECNICO DI MILANO.....	1
PROBLEMI DI STABILIZZAZIONE NELLA GUIDA DI UNA BICICLETTA.....	1
Sommario.....	i
Premessa.....	3
Ringraziamenti.....	6
Capitolo I.....	1
Il modello della bicicletta e i parametri di simulazione.....	1
Capitolo II.....	3
Modellistica classica.....	3
Premessa.....	3
2.Modellizzazione e controllo di una bicicletta con ruota sterzante anteriore.....	3
Cinematica della bicicletta.....	3
Dinamica laterale della bicicletta.....	5
La funzione di trasferimento del sistema.....	6
Cancellazioni.....	8
Rappresentazione della azione di controllo.....	9
Analisi della stabilità.....	11
Analisi del comportamento oscillatorio.....	14
Effetti di variazioni parametriche.....	16
Simulazioni.....	17
3.Modellizzazione e controllo della “bicicletta di Klein”.....	22
Cinematica della bicicletta.....	22
Dinamica laterale della bicicletta.....	23
La funzione di trasferimento del sistema.....	24
Cancellazioni.....	26
Analisi della stabilità.....	27
Capitolo III.....	31
Modellistica con retroazione strutturale.....	31
Premessa.....	31
1.Modellizzazione e controllo di una bicicletta con ruota sterzante anteriore.....	36
La funzione di trasferimento.....	38
Analisi della stabilità.....	38
Considerazioni aggiuntive sul modello con retroazione strutturale per bicicletta con ruota sterzante anteriore.....	42
Simulazioni.....	43
5.Modellizzazione e controllo della “bicicletta di Klein”.....	45
La funzione di trasferimento.....	46
Analisi della stabilità.....	46
Capitolo IV.....	48

Cenni ad una modellistica multibody.....	48
Premessa.....	48
Equazioni di moto linearizzate.....	50
Stabilità del movimento.....	52
Considerazioni conclusive.....	55
Bibliografia.....	56

PREMESSA

Nella presente trattazione si intende approfondire lo studio della bicicletta come sistema dinamico prendendo in considerazione la singolarità di questo oggetto tecnologico dal punto di vista della teoria del controllo. In particolare sarà analizzato il controllo di stabilità nel movimento laterale del sistema costituito da bicicletta e ciclista.

La bicicletta, esistente da oltre un secolo, ha subito nel corso del tempo un processo continuo di evoluzione costruttiva; a partire dalla fine dell'Ottocento, un ampio filone della letteratura tecnica ne ha affrontato lo studio scientifico, così come quello più generale dei veicoli a due ruote, suscitando una serie di dibattiti in merito alla corrispondenza tra i modelli fisici di volta in volta prodotti e determinate caratteristiche del comportamento fisico rilevato sperimentalmente.

Negli anni Settanta due studiosi americani, D. H. Weir e J. W. Zellner¹, rilevano come la descrizione analitica dei veicoli a due ruote presenti tre tipi di problemi di maggiore rilevanza:

- *la mancanza di spiegazioni scientificamente ineccepibili dei fenomeni di sterzo (auto-stabilità, sensibilità);*
- *la mancanza di criteri di progetto dettagliati per ottenere o evitare particolari comportamenti del sistema;*
- *l'incertezza insita in alcuni tipi complessi di analisi presenti in letteratura.*

Un apporto stimolante per la ricerca è dovuto al fisico inglese D. E. H. Jones, che, in un suo celebre articolo del 1970², dimostrò per via sperimentale l'inesattezza di alcune convinzioni fino ad allora assai diffuse negli ambienti scientifici, come quella secondo cui la stabilità della bicicletta fosse intimamente connessa con i fenomeni giroscopici, che oggi si ritiene abbiano un ruolo marginale – entro certe condizioni di funzionamento – nella stabilizzazione dei veicoli in esame.

In particolare, gli studi realizzati nell'ambito dell'analisi di stabilità per le biciclette hanno probabilmente avuto il merito di segnare l'origine dell'handling come area di studi tecnici. Manovrabilità e maneggevolezza giocano in questo tipo di veicoli un ruolo più influente che in altri in quanto essi presentano problemi unici di stabilità e controllo, richiedendo continua attenzione nella guida da parte del pilota.

Nel contesto di questi studi si inserisce il contributo dello studioso americano R. E. Klein, il quale negli anni Ottanta sviluppa una attività didattica, nell'ambito della University of Illinois, incentrata proprio sullo studio ingegneristico della

¹ WEIR, D. H., ZELLNER, J. W. 1978. "Lateral-Directional Motorcycle Dynamics and Rider Control". Paper 780304, *Transactions of the Society of Automotive Engineering*, Section 2.

² JONES, D. E. H. 1970. "The stability of the bicycle". *Physics Today*, Vol. 23(4), pp. 34-40.

bicicletta³. Egli la ritiene un oggetto “non banale” nella modellazione matematica e allo stesso tempo stimolante per applicare gli strumenti di analisi sviluppati per lo studio dei sistemi dinamici, e giunge tra l’altro a realizzare un prototipo di bicicletta non convenzionale, la cosiddetta “bicicletta di Klein”, avente la ruota sterzante in posizione posteriore anziché anteriore. Nel corso della presente trattazione questa specifica tipologia di bicicletta, controllisticamente molto complessa, sarà oggetto di analisi e di confronto con quella tradizionale, in quanto da questo paragone nasceranno importanti considerazioni circa l’influenza fondamentale esercitata dalla struttura geometrica del veicolo sulla sua stabilità.

Vi sono altri aspetti particolarmente interessanti da tenere in conto per un’analisi adeguata del comportamento di una bicicletta. Uno di questi è il rapporto che essa ha con il ciclista. Questi assume, nei confronti del veicolo, un ruolo duplice: da una parte esercita sul mezzo l’azione di controllo; dall’altra egli stesso è parte significativa del sistema da controllare, in quanto apporta al sistema complessivo un contributo in termini inerziali e di massa assolutamente non trascurabile. Il ciclista avrà influenza sulle proprietà del sistema di controllo sia in anello aperto che in anello chiuso; ben poco si può dire sulla risposta direzionale e sulle performance su un percorso considerando il solo veicolo. Pertanto un’analisi del comportamento della bicicletta che sia significativa sotto l’aspetto applicativo deve considerare, come sistema da controllare, quello formato dall’insieme di bicicletta e ciclista. Ancora, nel corso della trattazione sarà evidenziato come anche la descrizione del comportamento del ciclista dal punto di vista del controllo sia un problema tutt’altro che chiuso.

Da un punto di vista strutturale, l’elaborato si articola in quattro capitoli. Il primo è relativo alla definizione delle ipotesi e dei dati preliminari utilizzati nel corso dell’intera trattazione. I capitoli successivi, invece, svolgono la descrizione del sistema di controllo in esame in tre diverse possibilità modellistiche:

- nel secondo capitolo è proposta una “modellistica classica” basata sulla rappresentazione della bicicletta come un unico corpo rigido;
- nel terzo capitolo si approfondisce il modello precedente con una più sofisticata interpretazione dell’azione di controllo, che in parte è esercitata dalla bicicletta su se stessa tramite una “retroazione strutturale” dovuta alla geometria di sterzo; si discute inoltre il ruolo giocato dall’effetto giroscopico legato alla rotazione delle ruote;
- nel quarto capitolo, infine, si fa cenno ad una più articolata descrizione, di tipo multi-body, del sistema, al fine di mettere in luce l’esistenza, per il veicolo, di diverse forme di instabilità legate ai modi di vibrare che ne caratterizzano il comportamento.

Nel secondo e nel terzo capitolo, in particolare, ha luogo un confronto sistematico tra le caratteristiche assunte dalla bicicletta convenzionale con ruota sterzante anteriore e da quella di Klein, con ruota sterzante posteriore, in funzione dei diverse tipologie di modello presentate.

³ KLEIN, R. E. 1989. “Using bicycles to teach system dynamics”. *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 9, N. 3, pp. 4-9. KLEIN, R. E. 1991. “The Bicycle Project Approach – A Vehicle to Relevancy and Motivation”. *Proceedings of the IEEE Frontiers in Education Conference*.

Si è detto sopra che un aspetto molto importante per la bicicletta è legato alla sua manovrabilità e maneggevolezza; queste caratteristiche, come si vedrà, sono ottenibili realizzando veicoli dotati significativamente prossimi alla soglia della instabilità; tale scelta è enfatizzata nei modelli di bicicletta più moderni, nei quali si cerca di ottenere una sempre maggiore reattività.

Possiamo quindi concludere affermando che il successo della bicicletta è strettamente correlato alle sue caratteristiche in termini di stabilità, che ne fanno anche un eccellente oggetto di studio.

RINGRAZIAMENTI

Desidero ringraziare in primo luogo il Chiar.mo Prof. Paolo Bolzern, che mi ha aiutato a realizzare il presente lavoro suggerendo integrazioni ed approfondimenti.

Esprimo inoltre particolare riconoscenza a tutti i docenti e collaboratori del Politecnico di Milano che mi hanno accompagnato in questi anni nella conoscenza delle discipline politecniche.

Luca Galbusera

CAPITOLO I

IL MODELLO DELLA BICICLETTA E I PARAMETRI DI SIMULAZIONE

Nel corso della trattazione si farà riferimento a diversi modelli per il sistema fisico rappresentato da ciclista e bicicletta; in particolare:

- nel secondo e nel terzo capitolo sarà analizzato un modello costituito da un unico corpo rigido, che si muove nel piano orizzontale sotto l'azione dell'angolo di sterzo mentre nel piano verticale può essere rappresentato tramite un pendolo invertito;
- nel quarto capitolo si fa ricorso ad un modello multibody, composto da quattro corpi rigidi: il telaio posteriore ed il corpo del ciclista, rigidamente vincolato ad esso; il telaio anteriore, comprendente il manubrio e la forcella; le due ruote. Questi corpi sono interconnessi tramite giunti di rivoluzione a livello dello sterzo e dei mozzi delle ruote.

Per la definizione delle coordinate e delle convenzioni di segno relative ai modelli del sistema esaminato di volta in volta si rimanda ai singoli capitoli.

Le ipotesi semplificative comuni a tutti i capitoli che seguono sono le seguenti:

1. il piano stradale su cui si muove il veicolo è considerato sempre una superficie piana;
2. le ruote della bicicletta hanno spessore trascurabile, sono indeformabili e ruotano senza scivolare;
3. si assume velocità costante V , in modo da avere modelli tempo-invarianti per il sistema;
4. il ciclista non si muove relativamente al telaio, mentre esercita la azione di controllo agendo sul manubrio;
5. si trascurano le elasticità, gli attriti, gli effetti aerodinamici;
6. non ci sono frizioni interne tra le parti meccaniche della bicicletta;
7. quando collocato in posizione verticale, il sistema ciclista-bicicletta è ritenuto simmetrico rispetto al piano verticale passante per il telaio (posteriore) della bicicletta in senso longitudinale;
8. si ritiene trascurabile l'effetto dinamico della pedalata in termini di movimento del sistema di trasmissione e di asimmetrie legate all'articolazione delle gambe del ciclista.

La seconda ipotesi semplificativa, in particolare, costituisce un modello di ruota con angolo di deriva nullo; inoltre implica l'assenza di isteresi elastica con la conseguente

dissipazione energetica e il punto di contatto è sempre collocato nel piano delle ruote. Tale assunzione permette infine di esprimere la collocazione dei punti di contatto anteriore e posteriore in un riferimento inerziale come funzione dell'orientazione e della velocità di rotazione delle ruote anteriore e posteriore, rispettivamente. La bicicletta è infatti un sistema caratterizzato da vincoli non olonomici.

Per quanto riguarda la quarta semplificazione indicata, è opportuno anticipare che il tipo di azione esercitato dal ciclista sul manubrio sarà schematizzato in modi diversi nel corso della trattazione: nel secondo capitolo, infatti, si assumerà che egli controlli in modo diretto l'angolo di sterzo del veicolo, mentre nei capitoli successivi la variabile manipolata sarà considerata la coppia esercitata, tramite il manubrio, sull'asse di sterzo.

È importante evidenziare fin d'ora che le analisi svolte nel corso della trattazione saranno sempre basate su modelli del sistema linearizzati attorno alla posizione di equilibrio verticale.

Riportiamo la simbologia utilizzata per i parametri fondamentali del sistema in esame assieme ai relativi valori utilizzati per realizzare le simulazioni riportate nel corso della trattazione, ove non diversamente specificato⁴:

Parametro	Simbolo	Valore
Velocità in avanti	V	6,7 rad/s
Momento di inerzia baricentrico del sistema (modello a corpo rigido)	I_{CG}	20 kg·m ²
Distanza orizzontale tra il centro di gravità e il punto di contatto della ruota posteriore	A	0,4 m
Distanza orizzontale tra il centro di gravità e il punto di contatto della ruota anteriore	B	0,7 m
Passo della bicicletta	$L=A+B$	1,1 m
Accelerazione di gravità	g	9,81 m/s ²
Altezza del baricentro in configurazione verticale	H	1,2 m
Massa del sistema bicicletta-ciclista	M	70 kg

⁴ Trattati da: KLEIN, R. E. 1989. "Using bicycles to teach system dynamics". *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 9, N. 3, pp. 4-9.

CAPITOLO II

MODELLISTICA CLASSICA

PREMESSA

In questo capitolo si propone una modellizzazione del sistema fisico rappresentato dall'insieme bicicletta-ciclista con un unico corpo rigido. Si assume che le ruote siano prive di massa, che non siano presenti effetti giroscopici legati al rotolamento delle ruote. Questo tipo di semplificazione del problema è frequentemente scelta in analisi qualitative proposte da diversi autori⁵.

Si tratta di un modello che consente di ottenere informazioni di tipo qualitativo abbastanza interessanti dal punto di vista dell'analisi di stabilità, benché non tenga conto di importanti caratteristiche geometriche del veicolo che ne condizionano significativamente il comportamento dinamico. Dal punto di vista del controllo, invece, si assume che il ciclista determini in modo diretto l'angolo di sterzo del manubrio, esercitando una azione proporzionale all'angolo di inclinazione della bicicletta.

L'ipotesi di fondo del capitolo consiste nel supporre che la stabilizzazione della bicicletta nel suo movimento laterale si traduca nel controllo della posizione del baricentro del sistema. Nei capitoli successivi si mostrerà che l'introduzione di descrizioni più dettagliate del sistema consentono spiegazioni sulla stabilità del veicolo di maggiore raffinatezza.

2. MODELLIZZAZIONE E CONTROLLO DI UNA BICICLETTA CON RUOTA STERZANTE ANTERIORE

CINEMATICA DELLA BICICLETTA

Esaminiamo il movimento orizzontale del sistema bicicletta-ciclista nel piano stradale. Fissata una retta di riferimento, definiamo le seguenti coordinate per descrivere lo spostamento laterale:

- $x(t)$: posizione laterale del punto di contatto della ruota anteriore rispetto alla retta di riferimento;

⁵ Si vedano a tal proposito: KLEIN, R. E. 1989. Using bicycles to teach system dynamics. *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 9, N. 3, pp. 4-9; TIMOSHENKO, S., YOUNG, D. H. 1948. *Advanced Dynamics*. McGraw-Hill Book Company.

- $y(t)$: posizione laterale del punto di contatto della ruota posteriore rispetto alla retta di riferimento;
- $z(t)$: posizione laterale della proiezione sul suolo del centro di massa (CG) del sistema rispetto alla retta di riferimento;
- $\psi(t)$: angolo di imbardata della bicicletta.

Inoltre sia $\varphi(t)$ l'angolo di sterzo della ruota anteriore.

Per quanto concerne le convenzioni di segno si faccia riferimento alla seguente rappresentazione, nella quale il passo L della bicicletta è dato dalla somma delle lunghezze dei segmenti A e B :

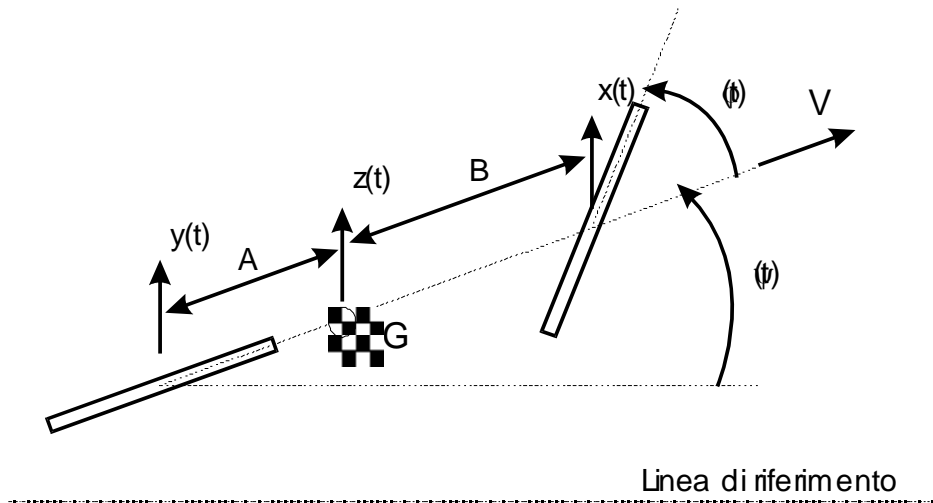


Figura 1. Proiezione della bicicletta sul piano stradale

Le equazioni cinematiche fondamentali che descrivono il movimento laterale sono:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = V \frac{\sin(\varphi + \psi)}{\cos \varphi} \\ \frac{dy}{dt} = V \sin \psi \\ z = \frac{(Ax + By)}{L} \\ L \sin \psi = x - y \end{cases}$$

Si nota che le coordinate indipendenti sono due. In particolare, scelti i due gradi di libertà x ed y , il sistema precedente, linearizzato attorno alla posizione di equilibrio $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\varphi}) = (0, 0, 0)$ assume la forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = V(\varphi + \psi) = \frac{V}{L}x + \frac{V}{L}y + V\varphi \\ \dot{y} = V\psi = \frac{V}{L}x - \frac{V}{L}y \\ z = \frac{A}{L}x + \frac{B}{L}y \end{cases}$$

L'angolo di sterzo φ è assunto come ingresso; x ed y rappresentano gli stati del sistema; z è l'uscita. È possibile passare dalla forma di stato alla funzione di trasferimento del sistema, che ha la forma:

$$\frac{Z(s)}{\Phi(s)} = W_1(s) = \frac{V}{L} \frac{(As + V)}{s^2}$$

DINAMICA LATERALE DELLA BICICLETTA

Per piccoli angoli di imbardata $\psi(t)$, il movimento di inclinazione di una bicicletta può essere modellizzato come quello di un pendolo invertito, includendo nel termine di inerzia del pendolo l'inerzia complessiva di ciclista e bicicletta.

Il movimento laterale della base del pendolo è quello determinato dalle equazioni cinematiche scritte nel paragrafo precedente.

Rappresentiamo in figura il sistema in esame, in cui l'angolo $\beta(t)$ descrive l'inclinazione della bicicletta rispetto alla posizione verticale:

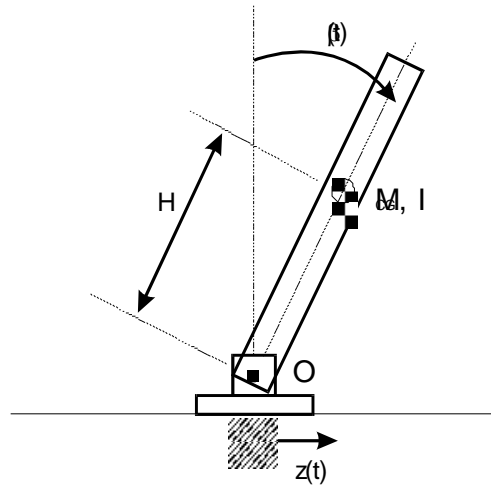


Figura 2. Rappresentazione della bicicletta nel piano laterale passante per il baricentro

Il sistema ha massa M e momento d'inerzia baricentrico I_{CG} ; la base del pendolo ha un vincolo di carrello che impone il movimento laterale determinato da $z(t)$. È possibile scrivere la seguente equazione di equilibrio dei momenti rispetto al punto di cerniera O , per cui passa la congiungente dei punti di contatto delle ruote con il piano stradale:

$$(MH^2 + I_{cg})\ddot{\beta} = MgH \sin(\beta) - MH\ddot{z} \cos(\beta)$$

Linearizzando la precedente per piccoli valori dell'angolo β e ponendo $MH^2 + I_{cg} = J$, si ottiene la relazione:

$$J\ddot{\beta} = MgH\beta - MH\ddot{z}$$

Tale equazione dà luogo alla seguente funzione di trasferimento, che lega lo spostamento laterale di $z(t)$ alla inclinazione della bicicletta:

$$\frac{B(s)}{Z(s)} = W_2(s) = \frac{-MHs^2}{Js^2 - MgH}$$

LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DEL SISTEMA

Riportiamo le funzioni di trasferimento calcolate nei precedenti paragrafi in base all'analisi della cinematica e della dinamica laterale del sistema, che sono rispettivamente:

$$\frac{Z(s)}{\Phi(s)} = W_1(s) = \frac{V}{L} \frac{(As + V)}{s^2}$$

$$\frac{B(s)}{Z(s)} = W_2(s) = \frac{-MHs^2}{Js^2 - MgH}$$

Mettendo in serie le due funzioni di trasferimento $W_1(s)$ e $W_2(s)$ determinate si ottiene la relazione che lega, nel dominio delle trasformate, l'angolo di sterzo ϕ e la inclinazione laterale β :

$$W(s) = W_1(s) \cdot W_2(s) = \frac{B(s)}{\Phi(s)} = \frac{-\frac{V}{L}(As + V)MH}{Js^2 - MgH} = -\frac{VAMH}{LJ} \frac{s + \frac{V}{A}}{s^2 - \frac{MgH}{J}}$$

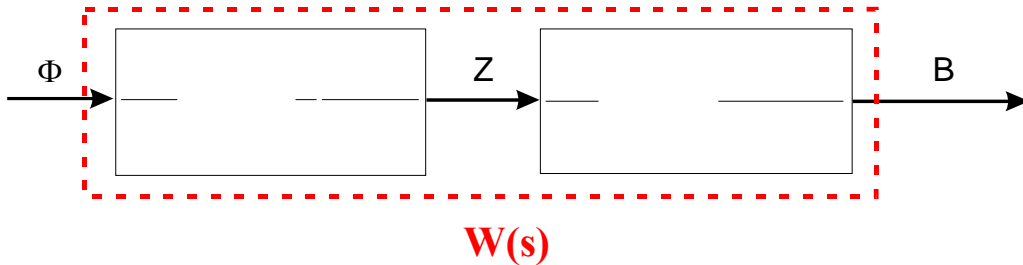


Figura 3. La funzione di trasferimento $W(s)$

Una analisi delle cancellazioni effettuate mettendo in serie i due sottosistemi è presentata nel paragrafo seguente.

Si caratterizzano le singolarità di $W(s)$:

Poli

$$p = \pm \sqrt{\frac{MgH}{J}} = \pm \sqrt{\frac{MgH}{MH^2 + I_{cg}}} \approx \pm \sqrt{\frac{g}{H}} : \text{i poli sono reali e simmetrici rispetto all'asse}$$

immaginario.

Zero

$z = -\frac{V}{A}$: lo zero è reale negativo per ogni valore di V positivo (assumiamo che la bicicletta si muova sempre in avanti).

Il grafico che segue indica qualitativamente la posizione di poli e zeri del sistema nel piano complesso:

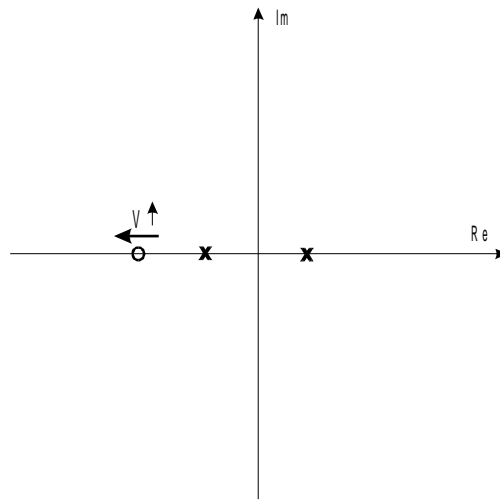


Figura 4. Grafico qualitativo sulla posizione delle singolarità nel piano complesso

Antitrasformando la funzione di trasferimento $W(s)$ si ottiene, nel dominio del tempo, la seguente relazione:

$$\ddot{\beta} - \frac{MgH}{J}\beta = -\frac{VAMH}{LJ}\dot{\phi} - \frac{V^2MH}{LJ}\phi$$

Nella precedente equazione è possibile evidenziare i diversi contributi dovuti ai singoli termini:

$\frac{MgH}{J}\beta$: dovuto alla forza di gravità;

$\frac{V^2MH}{LJ}\phi$: dovuto alla forza centripeta;

$\frac{VAMH}{LJ}\dot{\phi}$: dovuto all'inerzia.

Si noti che, data la relazione $MH^2 + I_{cg} = J$, se la massa del sistema fisico è sufficientemente grande, si può riscrivere l'equazione precedente nella forma:

$$\ddot{\beta} - \frac{g}{H} \beta = -\frac{VA}{LH} \dot{\phi} - \frac{V^2}{LH^2} \phi$$

Dalle relazioni precedenti si desume che il movimento laterale di una bicicletta si basa su una complessa interazione tra forze diverse mediata dalla geometria del mezzo, che contribuisce ai tre termini sopra indicati. Quando un ciclista esegue una curva in una determinata direzione, deve esercitare una azione di sterzo (che supponiamo costante, quindi il termine inerziale è nullo) idonea a fare muovere il veicolo lungo una curva di raggio tale da generare una forza centrifuga sufficiente per bilanciare esattamente la forza di gravità, rimanendo alla stessa inclinazione β (stabilità), ovvero maggiore per riportare il sistema in posizione verticale bilanciata (stabilità asintotica).

CANCELLAZIONI

Si nota che nella funzione di trasferimento complessiva è stata operata una cancellazione tra due coppie polo-zero collocate nell'origine. In particolare, poiché la cancellazione avviene tra i due poli nell'origine di $W_1(s)$ e i due zeri nell'origine di $W_2(s)$, si può dimostrare che nel sistema è presente una parte non osservabile. Essa è correlata alla posizione e alla velocità laterale nel piano di riferimento cinematico del centro di massa della bicicletta, che nella funzione di trasferimento $W(s)$ non è influente.

È inoltre possibile costruire un modello complessivo del sistema in forma di stato. A tal fine si opera sulla funzione di trasferimento $W_2(s)$, non strettamente propria, la trasformazione

$$\frac{B(s)}{Z(s)} = W_2(s) = -\frac{MH}{J} - \frac{\frac{M^2 H^2 g}{J^2}}{s^2 - \frac{MgH}{J}},$$

dalla quale è possibile ricondursi alle equazioni di stato in forma canonica, pur considerando che le variabili di stato ottenute, ξ_1 e ξ_2 , non hanno un esplicito significato fisico:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{MgH}{J} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} z \\ \beta = \begin{bmatrix} -\frac{M^2 H^2 g}{J^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} - \frac{MH}{J} z \end{cases}$$

Da ultimo riportiamo la scrittura del sistema complessivo che si ottiene affiancando le equazioni di stato dei due sottosistemi in esame:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V}{L} & -\frac{V}{L} & 0 & 0 \\ \frac{V}{L} & -\frac{V}{L} & 0 & 0 \\ \frac{L}{L} & -\frac{L}{L} & 0 & 1 \\ \frac{A}{L} & \frac{B}{L} & \frac{MgH}{J} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \varphi \\ \beta = \begin{bmatrix} -\frac{MHA}{JL} & -\frac{MHB}{JL} & -\frac{M^2H^2g}{J^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Questa forma di stato del sistema da controllare è stata utilizzata per realizzare lo schema a blocchi Simulink utilizzato in fase di simulazione, che è riportato nel seguito.

RAPPRESENTAZIONE DELLA AZIONE DI CONTROLLO

Consideriamo il problema di considerare una legge di controllo per esprimere l'azione del ciclista. Per gli scopi di analisi che ci proponiamo in questo capitolo, assumiamo che il ciclista agisca direttamente sulla variabile di controllo rappresentata dall'angolo di sterzo φ .

In particolare, supponiamo di rappresentare tale azione con una retroazione positiva di tipo proporzionale con guadagno K . Si assume cioè che l'angolo di sterzo φ cresca linearmente con l'inclinazione laterale β , per piccoli angoli. La fondatezza di questa assunzione riceve conferma empirica il diversi testi presenti nella letteratura di settore. Tralasciamo la possibilità, proposta da alcuni autori, di rappresentare l'azione di controllo del ciclista con un ritardo di tempo: questo, dovuto ai tempi di reazione del ciclista, tipicamente ha un valore di circa $T=0,05$ s, che è di solito piccolo, se confrontato con le dinamiche del sistema, e in particolare con quella del polo nel semipiano destro.

È pertanto possibile rappresentare il sistema in anello chiuso con il seguente schema a blocchi:

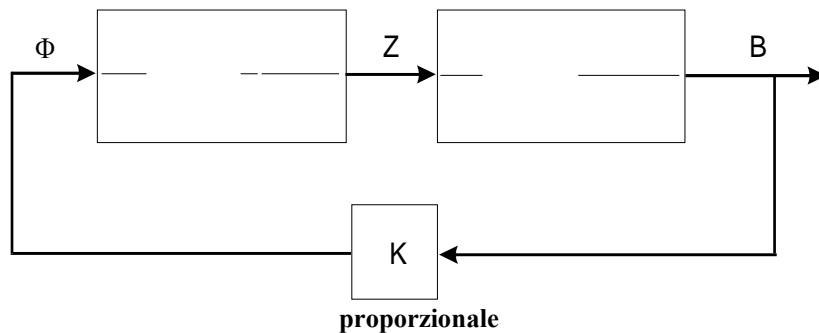


Figura 5.
Schema a blocchi del sistema con retroazione

Di seguito è riportato lo schema Simulink corrispondente allo schema a blocchi precedente:

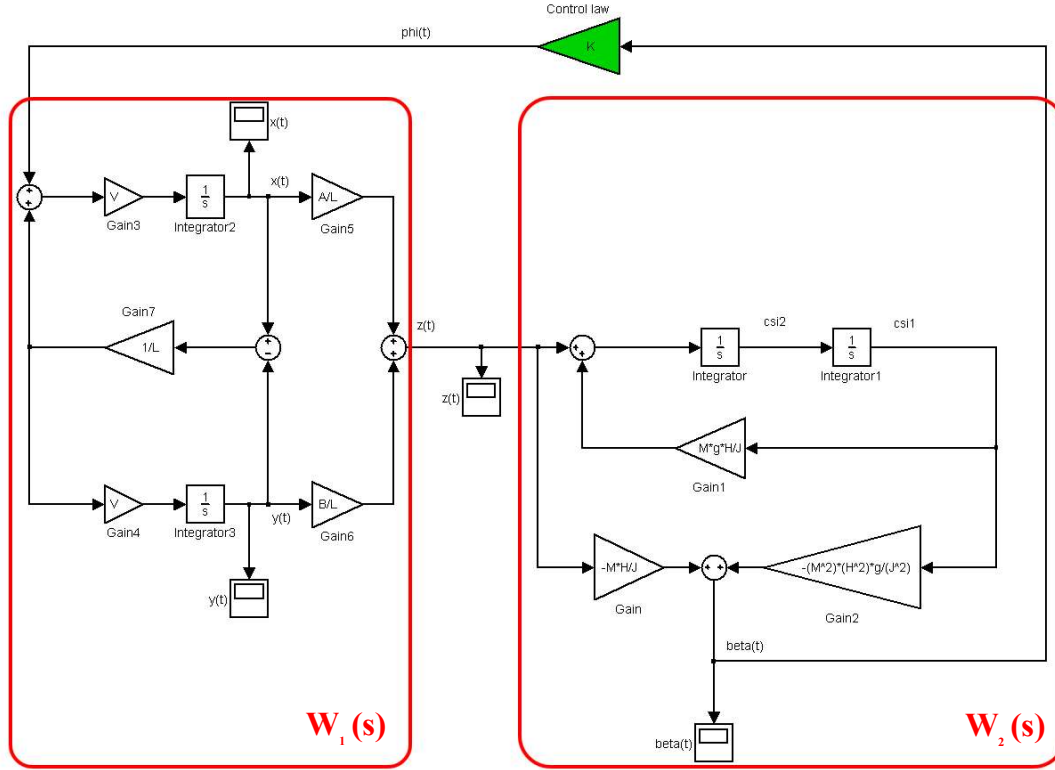


Figura 6. Schema a blocchi del sistema di controllo

Se, come abbiamo supposto, l'angolo di sterzo φ della bicicletta è proporzionale all'angolo di inclinazione β , il movimento del centro di massa può essere modellato come quello di un semplice oscillatore armonico smorzato, descritto dalla equazione differenziale del secondo ordine ottenuta antitrasformando $W(s)$:

$$W(s) = \frac{B(s)}{\Phi(s)} = \frac{B(s)}{KB(s)} = -\frac{VAMH}{LJ} \frac{s + \frac{V}{A}}{s^2 - \frac{MgH}{J}} \Rightarrow \ddot{\beta} + \frac{VAMH}{LJ} K \dot{\beta} + \left(\frac{V^2 MH}{LJ} K - \frac{MgH}{J} \right) \beta = 0$$

L'equazione caratteristica associata in s , della forma

$$s^2 + \frac{VAMH}{LJ} K s + \frac{V^2 MH}{LJ} K - \frac{MgH}{J} = 0$$

sarà usata per lo studio della stabilità delle soluzioni del sistema.

Un ambito particolare di studio è quello delle biciclette progettate per il funzionamento ad alte velocità⁶. Per questo tipo di veicoli si nota l'insufficienza del modello

⁶ Sull'argomento si veda in particolare: SURYANARAYANAN, S., TOMIZUKA, M., WEAVER, M. 2002 System dynamics and control of bicycles at high speeds. *Proceedings of ACC02-ASME*1123.

controllistico di tipo puramente proporzionale, perché assumono maggiore rilevanza gli effetti dei ritardi di natura neuromuscolare nelle azioni del ciclista.

Si osserva, in tali applicazioni, la limitatezza della banda del controllore umano, e pertanto si tende ad usare controlli automatici. Questo è dovuto tra l'altro al fatto che la necessità di usare ridotte altezze per il baricentro, per fini aerodinamici, richiede una banda larga nella azione di sterzo. Infatti la stabilizzazione di un pendolo invertito richiede una banda nella azione di controllo che è inversamente proporzionale alla lunghezza del pendolo.

ANALISI DELLA STABILITÀ

Uno strumento molto efficace per lo studio della stabilità del sistema è il luogo delle radici. Esso è caratterizzato da una topologia diversa a seconda della posizione relativa di poli e zeri.

In particolare, al variare della velocità i poli in anello aperto per il nostro sistema rimangono in una posizione fissata, pari a:

$$p = \pm \sqrt{\frac{MgH}{J}} = \pm \sqrt{\frac{MgH}{MH^2 + I_{cg}}} \approx \pm \sqrt{\frac{g}{H}}$$

Si sposta invece lo zero, che può assumere valori lungo l'asse reale negativo (nell'ipotesi di velocità positiva), dato che:

$$z = -\frac{V}{A}$$

In base al valore di velocità possono essere discriminate due situazioni: lo zero della funzione di trasferimento, infatti, potrà trovarsi a sinistra del polo reale negativo oppure alla sua destra (o al limite coincidere con esso).

Possiamo pertanto illustrare significativamente il luogo delle radici per il sistema in esame servendoci delle seguenti rappresentazioni:

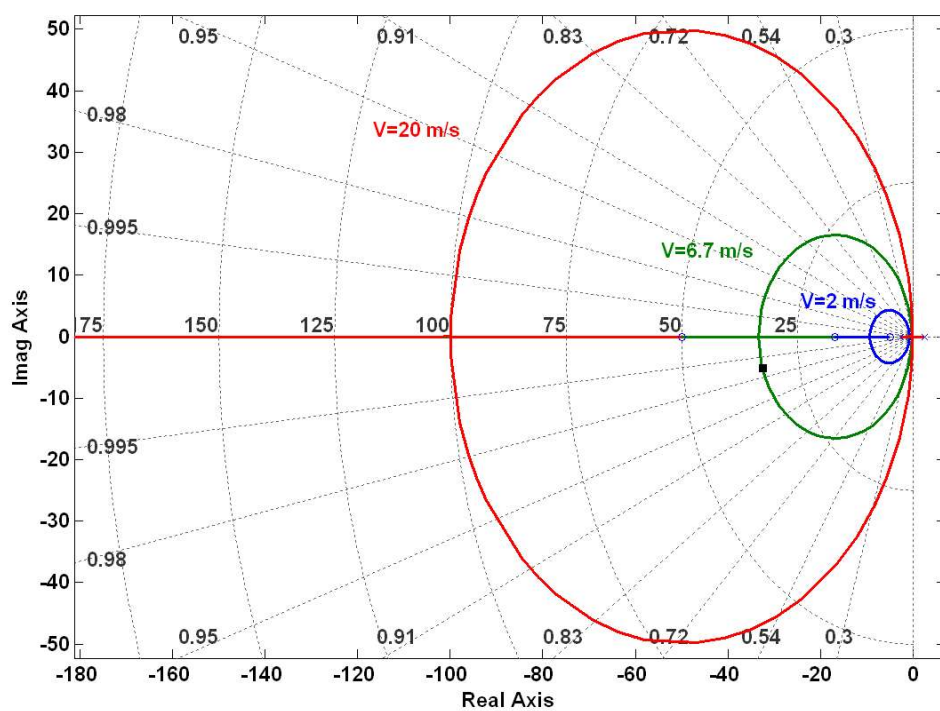


Figura 7. Luogo delle radici al variare della velocità con

$$z = -\frac{V}{A} < -\sqrt{\frac{MgH}{J}}$$

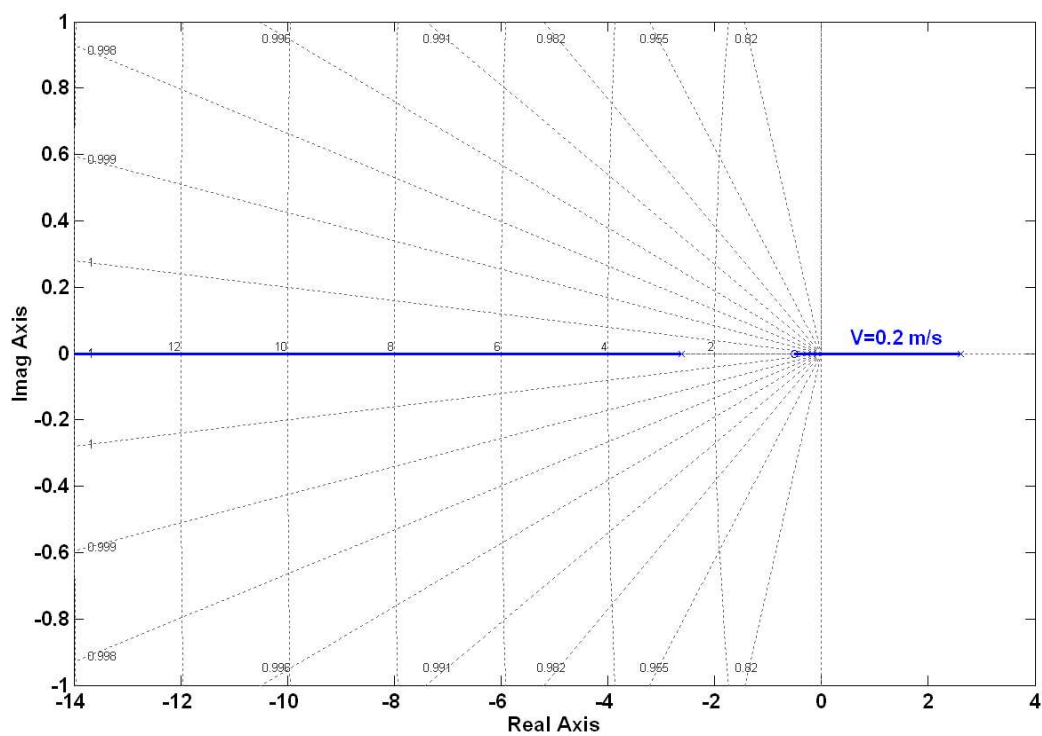


Figura 8. Luogo delle radici al variare della velocità con

$$z = -\frac{V}{A} > -\sqrt{\frac{MgH}{J}}$$

In entrambe le situazioni si nota come il guadagno d'anello, dipendente dall'azione proporzionale esercitata dal controllore umano, ha un ruolo fondamentale nella determinazione della stabilità del sistema. Infatti non per tutti i valori del guadagno d'anello il sistema risulta (asintoticamente) stabile. In particolare, se il pilota non esercita alcuna azione sul manubrio – situazione rappresentabile ponendo $K=0$ – si ha in entrambi i casi instabilità. Ciò manifesta uno dei limiti della modellizzazione del sistema proposta in questo capitolo, in quanto non ricevono adeguata giustificazione determinati fenomeni rilevabili sperimentalmente nel veicolo, tra i quali quello dell'autostabilità, cioè della proprietà di questo veicolo di stabilizzarsi senza l'intervento del pilota, a partire da certi valori di velocità⁷.

Sulla topologia del luogo si fornisce una ulteriore considerazione di tipo parametrico: in figura 7 si può notare come, al crescere della velocità e quindi del valore dello zero, in modulo, la parte ellissoidale del luogo tenderà a dilatarsi verso sinistra. Ciò comporta peraltro differenti caratteristiche in termini di smorzamento del sistema.

Da ultimo si noti che, se lo zero del sistema fosse collocato nell'origine, come avviene nella condizione di bicicletta ferma, il sistema richiederebbe, per essere stabilizzato, un controllo proporzionale con guadagno teoricamente infinito.

Possiamo valutare il guadagno K del controllore proporzionale rappresentante l'azione del ciclista che garantisce al sistema un comportamento stabile asintoticamente, esprimendolo in funzione della velocità V .

Lo si desume dal polinomio caratteristico dell'equazione di secondo grado che descrive il sistema da controllare:

$$s^2 + \frac{VAMH}{LJ}Ks + \frac{V^2MH}{LJ}K - \frac{MgH}{J} = 0$$

Affinché il sistema sia asintoticamente stabile, le radici del polinomio caratteristico devono essere tutte negative. Perché ciò avvenga, dato che il termine di primo grado è prodotto di termini tutti positivi e di conseguenza è a sua volta positivo, deve essere positivo anche il termine di grado zero; la condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità del sistema, quindi, sarà:

$$K > \frac{gL}{V^2} = K_{\min}$$

L'andamento di K_{\min} al variare della velocità è rappresentato nel seguente grafico:

⁷ La spiegazione degli stessi fenomeni sarà oggetto del capitolo successivo.

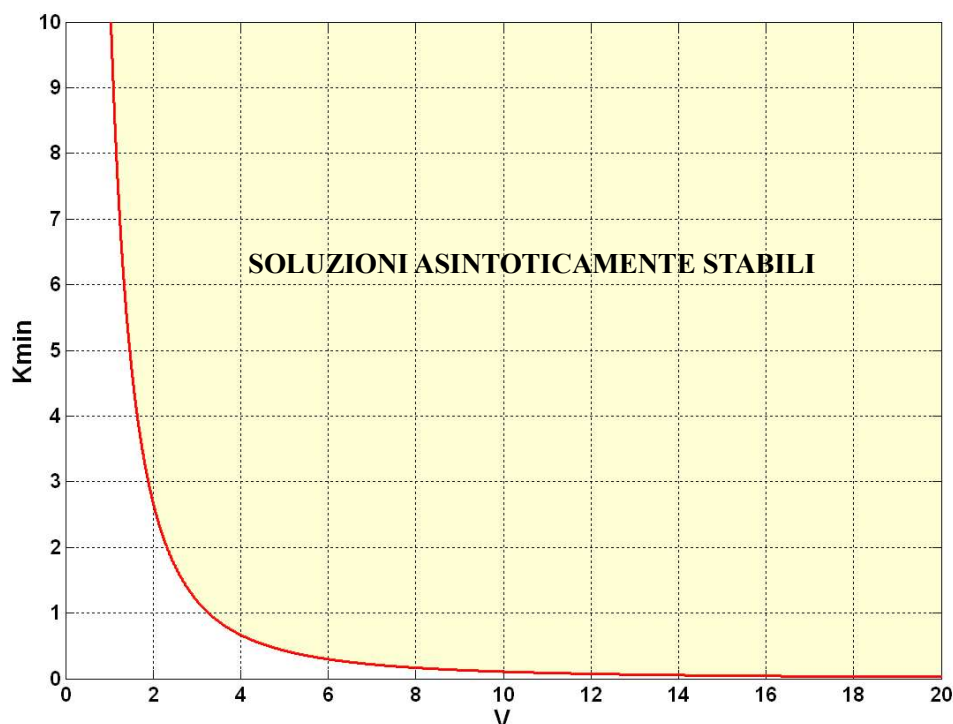


Figura 9. $K_{min}=K_{min}(V)$

Questo grafico spiega bene il fatto che è più facile guidare una bicicletta convenzionale a velocità elevate piuttosto che ridotte. Ad alta velocità, infatti, la stabilizzazione della bicicletta implica una azione di controllo più moderata; invece, a velocità nulla per la stabilizzazione del sistema è richiesto al ciclista un guadagno infinito. Come già anticipato, infatti, lo zero della funzione di trasferimento del sistema si sposta, in tali condizioni, nell'origine, mentre i poli rimangono nella loro posizione, non dipendendo dalla velocità.

Se ne conclude che il sistema bicicletta-ciclista è staticamente instabile e dinamicamente stabile, in quanto a velocità nulla la stabilizzazione richiederebbe una intensità dell'azione di controllo illimitata. Si vedrà nel capitolo successivo che tale affermazione è confermabile anche considerando la bicicletta da sola, grazie alle caratteristiche geometriche del mezzo di cui si parlerà diffusamente.

ANALISI DEL COMPORTAMENTO OSCILLATORIO

In secondo luogo, è possibile specificare, in funzione della velocità, il valore di K che annulla il determinante. Tale sarà il valore limite per cui i poli del sistema in anello chiuso sono reali coincidenti (K_{coinc}). Anche per realizzare questo calcolo ci serviamo della equazione caratteristica del sistema,

$$s^2 + \frac{VAMH}{LJ}Ks + \frac{V^2MH}{LJ}K - \frac{MgH}{J} = 0,$$

le cui radici sono della forma:

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{VAMH}{LJ} K \right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{VAMH}{LJ} K \right)^2 - \left(\frac{V^2 MH}{LJ} K - \frac{MgH}{J} \right)}$$

La discussione sul K limite per le soluzioni non oscillanti può essere ricondotta alla determinazione del segno del discriminante della precedente. Tale valore si ha in corrispondenza dei K per cui il determinante si annulla, e corrisponde quindi alle radici della seguente equazione di secondo grado in K:

$$\Delta = \left(\frac{1}{2} \frac{VAMH}{LJ} K \right)^2 - \left(\frac{V^2 MH}{LJ} K - \frac{MgH}{J} \right) = 0$$

Il grafico riporta i valori di K_{coinc} , che sono le radici della equazione precedente, in funzione della velocità. I valori di K esterni all'intervallo di valori compreso tra le funzioni soluzione dell'equazione danno luogo a radici reali e quindi non oscillanti. Quelli intermedi, invece, sono causa di un comportamento oscillante.

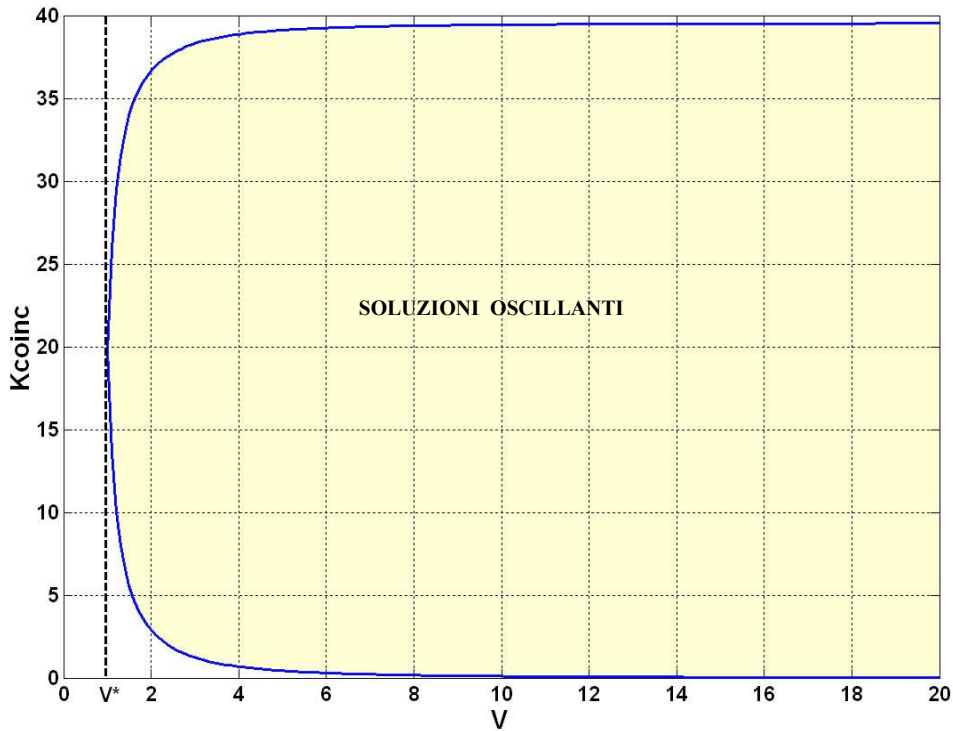


Figura 10. $K_{coinc} = K_{coinc}(V)$

Il significato di questo grafico è facilmente comprensibile confrontandolo con il luogo delle radici: le soluzioni sono sempre reali per valori di K al di sotto di una soglia inferiore V^* , in corrispondenza dei quali il luogo assume la conformazione di figura 8; invece per velocità superiori a V^* , a seconda del valore di K i poli in anello chiuso

possono essere complessi coniugati o reali; in quest'ultimo caso sono collocati in posizione intermedia tra i poli in anello aperto o a sinistra dello zero, come nel caso del luogo delle radici rappresentato in figura 7.

A scopo riassuntivo riportiamo il seguente grafico, unione dei precedenti, nel quale si discriminano i valori di K che, al variare della velocità, determinano un comportamento instabile oppure asintoticamente stabile, oscillante o meno.

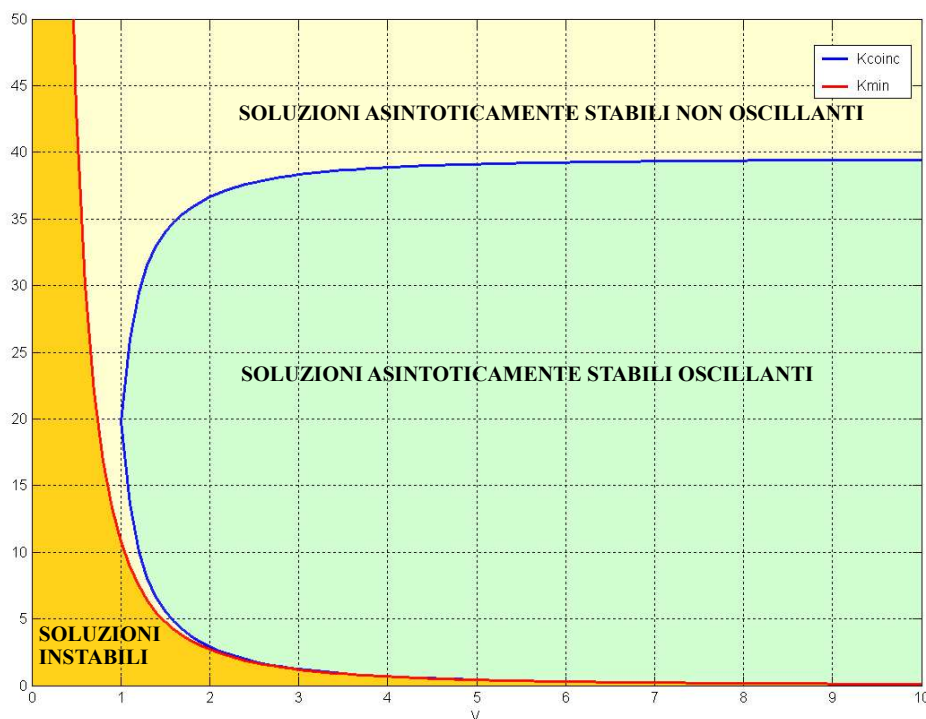


Figura 11. Stabilità e comportamento oscillante al variare di K

EFFETTI DI VARIAZIONI PARAMETRICHE

Si considerano gli effetti prodotti sulla funzione di trasferimento $W(s)$ da variazioni dei seguenti parametri:

1. Massa (M)

La massa del sistema include quella della bicicletta e quella del ciclista, e quest'ultima può variare per una stessa bicicletta. Il termine M compare nella relazione che indica la posizione dei poli, ma con buona approssimazione, se I_{CG} è abbastanza piccolo, si può porre:

$$p = \pm \sqrt{\frac{MgH}{J}} = \pm \sqrt{\frac{MgH}{MH^2 + I_{cg}}} \approx \pm \sqrt{\frac{g}{H}}$$

Inoltre, anche nella relazione riguardante il K stabilizzante (K_{\min}) il termine di massa non compare. Ne desumiamo che la massa del ciclista non influisce significativamente, in modo diretto, sulla stabilità del sistema.

2. Altezza del baricentro (H)

L'altezza del baricentro è uno dei fattori che determinano la posizione dei poli di $W(s)$. Tuttavia, nel range di valori solitamente assunti da questo parametro, la variazione di posizione dei poli che si ottiene è limitata, come si può facilmente intuire dal seguente grafico:

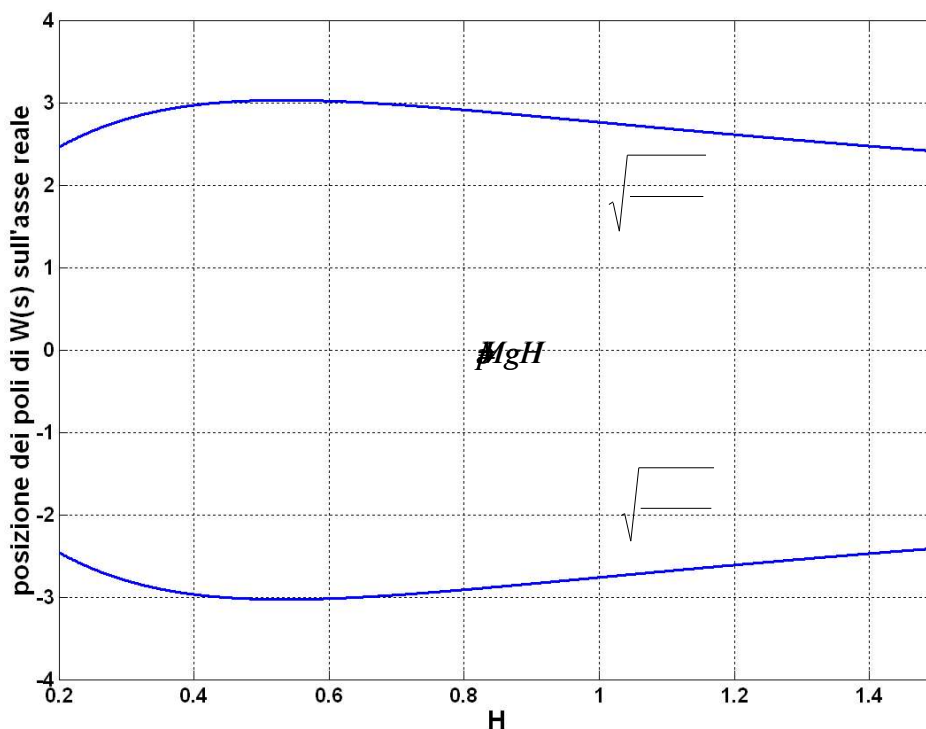


Figura 12. Effetto dell'altezza del baricentro sulla posizione dei poli di $W(s)$

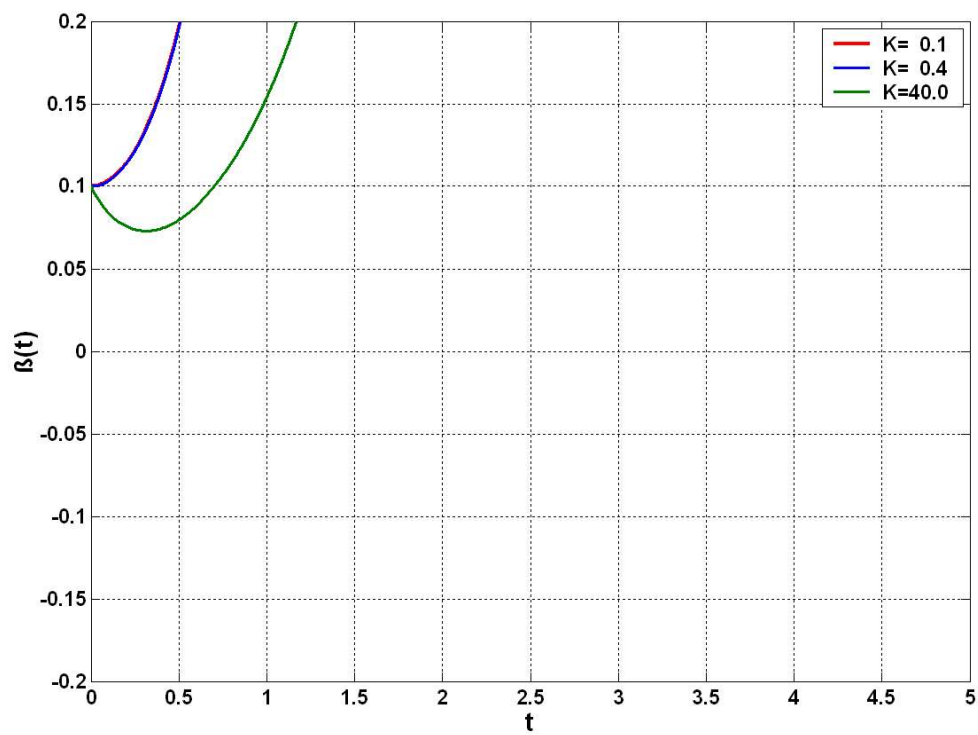
3. Passo della bicicletta (L)

Ipotizzando che, al variare del passo L della bicicletta, si conservi costante il rapporto A/B , al crescere di L decresce in modulo il valore dello zero e altrettanto avviene con il guadagno della funzione di trasferimento del sistema.

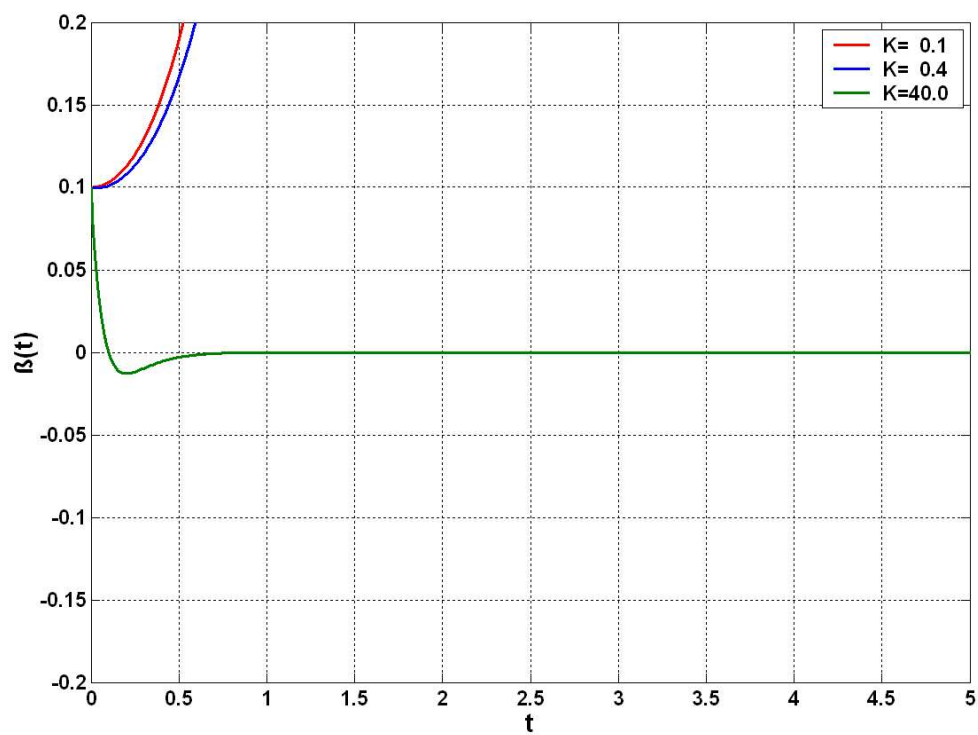
SIMULAZIONI

Si riportano qui di seguito i risultati di una simulazione realizzata imponendo la condizione iniziale di $\beta_0=1$ rad, $x_0, y_0=0$, ottenuti facendo variare il valore del K e quindi l'intensità dell'azione di controllo esercitata dal controllore umano, a velocità fissata.

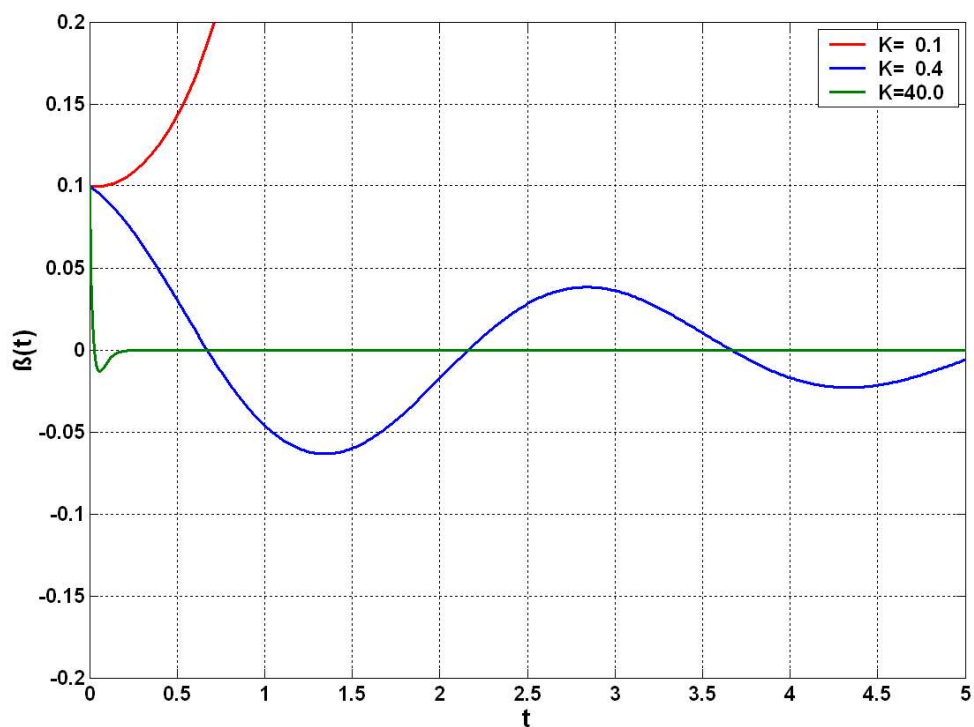
1. $V=0,2$ m/s ($=0,72$ km/h)



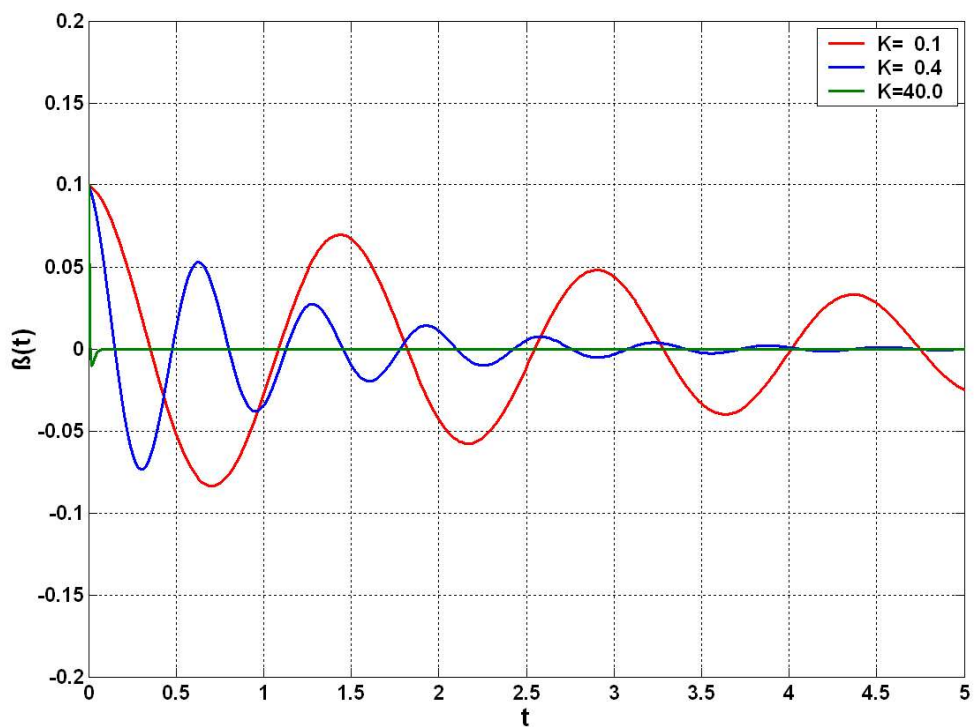
2. $V=2.0$ m/s (≈ 7.2 km/h)



3. $V=6.7$ m/s (≈ 24 km/h)



4. $V=20$ m/s (=72 km/h)



Questi grafici evidenziano il fatto che uno stesso K imposto dal ciclista può risultare stabilizzante o meno a seconda della velocità. Si noti inoltre che la sottoelongazione

presente in tutti i tre grafici in corrispondenza di $K=40.0$ corrisponde ad una inversione del segno di β , e quindi all'inversione della direzione del manubrio. Nella prima simulazione, relativa a $V=0,2$ m/s, si nota che nessuno dei K utilizzati garantisce stabilità. Questo è comprensibile tenendo conto che, con i parametri di simulazione utilizzati, lo zero del sistema è collocato tra i due poli (siamo nella condizione rappresentata in figura 8).

In ultima analisi, benché questo modello non renda ragione di alcune proprietà della bicicletta, come quella di autostabilità, di cui si discuterà più estesamente oltre, esso spiega bene importanti caratteristiche del sistema in esame. Tra queste anche il fenomeno del controsterzo, che rende il comportamento della bicicletta di tipo “controintuitivo”. Infatti, supponiamo di imporre alla variabile di controllo, l'angolo di sterzo φ , un impulso positivo, quindi – secondo le nostre convenzioni – di girare momentaneamente il manubrio verso sinistra. Questo impulso in ingresso si tradurrà, in uno spostamento iniziale del veicolo verso destra, seguito da una svolta verso sinistra rispetto alla direzione di partenza.

Riportiamo i risultati di una simulazione che mostra l'andamento della posizione laterale del punto di contatto della ruota anteriore rispetto alla retta di riferimento, cioè $x(t)$, in corrispondenza di $V=6,7$ m/s e imponendo gli stessi valori di K utilizzati nelle simulazioni precedenti; la risposta $x(t)$ è valutata imponendo al sistema le condizioni iniziali corrispondenti ad un angolo di inclinazione iniziale $\beta_0=0,1$ rad, cui corrisponde un angolo di sterzo φ_0 anch'esso verso sinistra, secondo le convenzioni scelte.

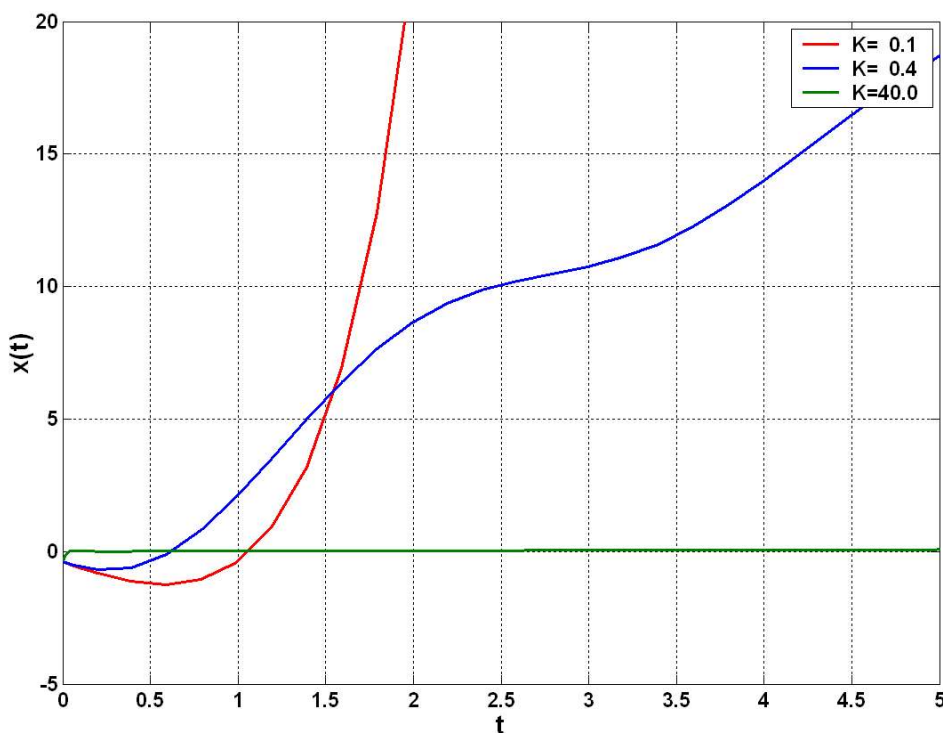


Figura 13. Il fenomeno del controsterzo

Si nota come, in corrispondenza di tutti i K rappresentati, la risposta del sistema alla sopra indicata condizione corrisponde ad uno spostamento verso destra, seguito da una inversione della direzione di moto del veicolo. Lo spostamento verso destra è più marcato in corrispondenza di K piccoli.

3. MODELLIZZAZIONE E CONTROLLO DELLA “BICICLETTA DI KLEIN”

La “bicletta di Klein” è una bicicletta non convenzionale nella quale la ruota sterzante è in posizione posteriore anziché anteriore⁸. Lo studio di veicoli a due ruote con tale configurazione ha avuto un notevole sviluppo in anni recenti e rappresenta uno stimolo importante nell’ambito della ricerca sui controlli automatici perché, come si giungerà a dire qui di seguito, non è possibile stabilizzare questo tipo di sistemi servendosi di leggi di controllo semplici a meno di servirsi di specifici criteri di progetto. Si noterà, in particolare, l’insufficienza della legge di controllo puramente proporzionale assunta precedentemente.

Nella descrizione cinematica e dinamica del sistema da controllare, per la simbologia ci si è attenuti a quella usata per la bicicletta con ruota sterzante anteriore, allo scopo di facilitare il confronto tra le rispettive funzioni di trasferimento; allo stesso fine le convenzioni di segno sono state scelte in modo coerente, per quanto possibile.

CINEMATICA DELLA BICICLETTA

Le grandezze che caratterizzano il nostro modello, schematizzato in figura, sono le seguenti:

- $x(t)$: posizione laterale del punto di contatto della ruota anteriore rispetto alla retta di riferimento;
- $y(t)$: posizione laterale del punto di contatto della ruota posteriore rispetto alla retta di riferimento;
- $z(t)$: posizione laterale della proiezione sul suolo del centro di massa (CG) del sistema rispetto alla retta di riferimento;
- $\psi(t)$: angolo di imbardata della bicicletta;
- $\phi(t)$: angolo di sterzo della ruota posteriore.

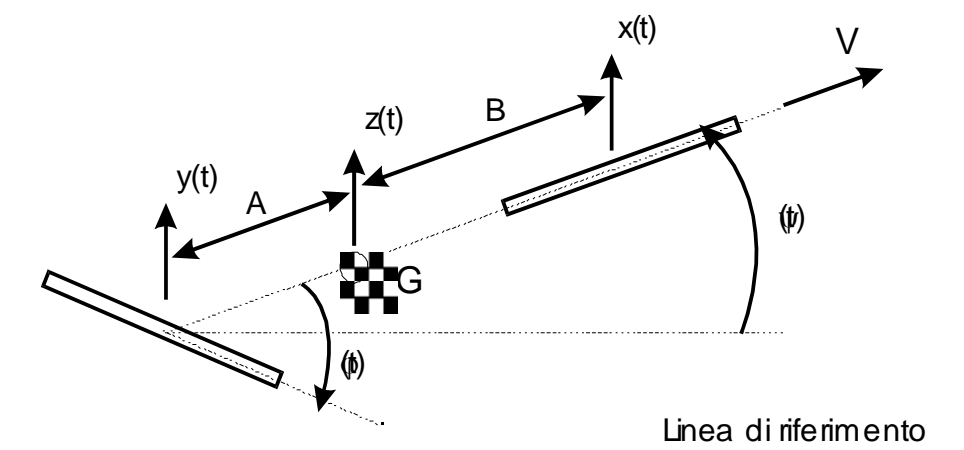


Figura 14. Proiezione della bicicletta di Klein sul suolo

Le equazioni cinematiche linearizzate che descrivono il movimento laterale della bicicletta di Klein sono le seguenti:

⁸ L’analisi della cinematica e dinamica laterale che segue è svolta in modo analogo a quanto fatto sopra per la bicicletta tradizionale con ruota sterzante anteriore.

$$\begin{cases} \dot{x} = V\psi = \frac{V}{L}x - \frac{V}{L}y \\ \dot{y} = V(\psi - \phi) = \frac{V}{L}x - \frac{V}{L}y - V\phi \\ z = \frac{A}{L}x + \frac{B}{L}y \end{cases}$$

La corrispondente funzione di trasferimento del sistema è:

$$\frac{Z(s)}{\Phi(s)} = \bar{W}_1(s) = -\frac{BV}{L} \frac{s - \frac{V}{B}}{s^2}$$

Possiamo confrontare questa funzione di trasferimento con quella ottenuta per la cinematica della bicicletta convenzionale con ruota sterzante anteriore:

$$\frac{Z(s)}{\Phi(s)} = W_1(s) = \frac{AV}{L} \frac{s + \frac{V}{A}}{s^2}$$

Si nota che, a parte le ovvie differenze in termini di parametri geometrici, nella nuova funzione di trasferimento c'è uno zero con parte reale positiva, mentre prima esso era collocato nel semipiano sinistro. Ciò implica che il sistema è a fase non minima.

DINAMICA LATERALE DELLA BICICLETTA

La configurazione di questo modello di bicicletta dal punto di vista dello studio della dinamica laterale è analoga a quella della bicicletta tradizionale. Riportiamo la rappresentazione del sistema in esame:

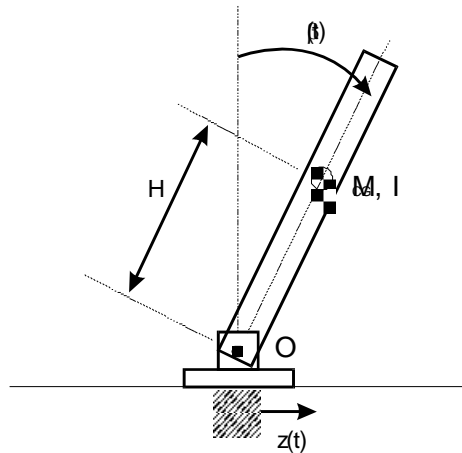


Figura 15. Pendolo invertito rigido ideale

Simbologia e convenzioni di segno sono identiche a quelle indicate per il modello di bicicletta con ruota sterzante anteriore.

Otteniamo perciò la stessa equazione di equilibrio dei momenti di prima, che riportiamo già linearizzata attorno alla posizione di equilibrio verticale:

$$J\ddot{\beta} = MgH\beta - MH\ddot{z}$$

Di conseguenza la funzione di trasferimento riguardante la dinamica del sistema è, ancora una volta:

$$\frac{B(s)}{Z(s)} = \bar{W}_2(s) = \frac{-MHs^2}{Js^2 - MgH}$$

LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DEL SISTEMA

Le funzioni di trasferimento dei due sottosistemi considerati sono, in ordine:

$$\frac{Z(s)}{\Phi(s)} = \bar{W}_1(s) = -\frac{BV}{L} \frac{s - \frac{V}{B}}{s^2};$$

$$\frac{B(s)}{Z(s)} = \bar{W}_2(s) = \frac{-MHs^2}{Js^2 - MgH}.$$

Analogamente a quanto fatto per la bicicletta tradizionale, mettiamo in serie le funzioni di trasferimento calcolate, ottenendo:

$$\bar{W}(s) = \bar{W}_1(s) \cdot \bar{W}_2(s) = \frac{B(s)}{\Phi(s)} = \frac{VBMH}{LJ} \frac{s - \frac{V}{B}}{s^2 - \frac{MgH}{J}}$$

Analizziamo le caratteristiche salienti della funzione di trasferimento calcolata.

Poli

$p = \pm \sqrt{\frac{MgH}{J}} = \pm \sqrt{\frac{MgH}{MH^2 + I_{cg}}} \approx \pm \sqrt{\frac{g}{H}}$: i poli sono reali e simmetrici rispetto all'asse immaginario.

Zero

$z = \frac{V}{B}$: lo zero è reale positivo.

Entrambi i poli del sistema sono fissati e non cambiano con la velocità. Questa modifica però lo zero, che si allontana dall'asse immaginario verso destra al crescere della velocità.

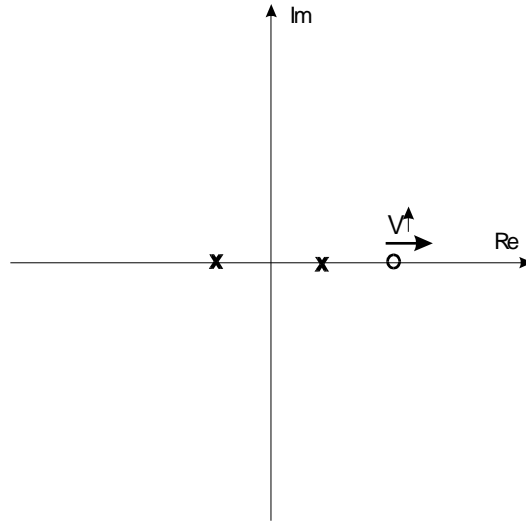


Figura 16. Grafico qualitativo sulla posizione delle singolarità nel piano complesso

Confrontiamo la funzione di trasferimento ottenuta con quella relativa alla bicicletta con ruota sterzante anteriore:

$$W(s) = W_1(s) \cdot W_2(s) = -\frac{VAMH}{LJ} \frac{s + \frac{V}{A}}{s^2 - \frac{MgH}{J}}$$

Si nota facilmente che lo zero del sistema è collocato, diversamente da prima, nel semipiano destro. I poli sono nella stessa posizione. Il guadagno cambia di segno e c'è la sostituzione del fattore A con B. Possiamo concludere che la funzione di trasferimento del nuovo sistema equivale a quella del sistema relativo alla bicicletta convenzionale prendendo una velocità uguale in modulo e opposta in segno, a meno del fattore A che rende conto della inversione nella geometria del sistema.

$$\bar{W}(s) = \bar{W}_1(s) \cdot \bar{W}_2(s) = \frac{B(s)}{\Phi(s)} = \frac{VBMH}{LJ} \frac{s - \frac{V}{B}}{s^2 - \frac{MgH}{J}}$$

Antitrasformando la funzione di trasferimento $\bar{W}(s)$ si ottiene, nel dominio del tempo, la seguente relazione:

$$\ddot{\beta} - \frac{MgH}{J} \beta = \frac{VBMH}{LJ} \dot{\phi} - \frac{V^2MH}{LJ} \phi$$

Nella precedente relazione è possibile evidenziare i diversi contributi dovuti ai singoli termini:

$$\frac{MgH}{J} \beta : \text{dovuto alla forza di gravità;}$$

$$\frac{V^2 MH}{LJ} \varphi : \text{dovuto alla forza centripeta;}$$

$$\frac{VBMH}{LJ} \dot{\varphi} : \text{dovuto all'inerzia.}$$

CANCELLAZIONI

Analogamente a quanto fatto per il modello di bicicletta convenzionale, possiamo riscrivere $\bar{W}_2(s)$ nella forma:

$$\bar{W}_2(s) = \frac{-MHs^2}{Js^2 - MgH} = \frac{-\frac{M^2 g H^2}{J^2}}{s^2 - \frac{MgH}{J}} - \frac{MH}{J}$$

La forma di stato corrispondente può essere scritta in forma canonica:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{MgH}{J} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} z \\ \beta = \begin{bmatrix} -\frac{M^2 H^2 g}{J^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} - \frac{MH}{J} z \end{cases}$$

Il sistema complessivo ha la forma:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V}{L} & \frac{V}{L} & 0 & 0 \\ \frac{V}{L} & -\frac{V}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{A}{L} & \frac{B}{L} & \frac{MgH}{J} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \varphi \\ \beta = \begin{bmatrix} -\frac{MHA}{JL} & -\frac{MHB}{JL} & -\frac{M^2 H^2 g}{J^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

ANALISI DELLA STABILITÀ

Ci serviamo nuovamente del luogo delle radici per studiare le possibilità di stabilizzazione supponendo di usare ancora un modello di controllore proporzionale per il sistema.

La conformazione ottenuta usando i parametri di Klein è la seguente:

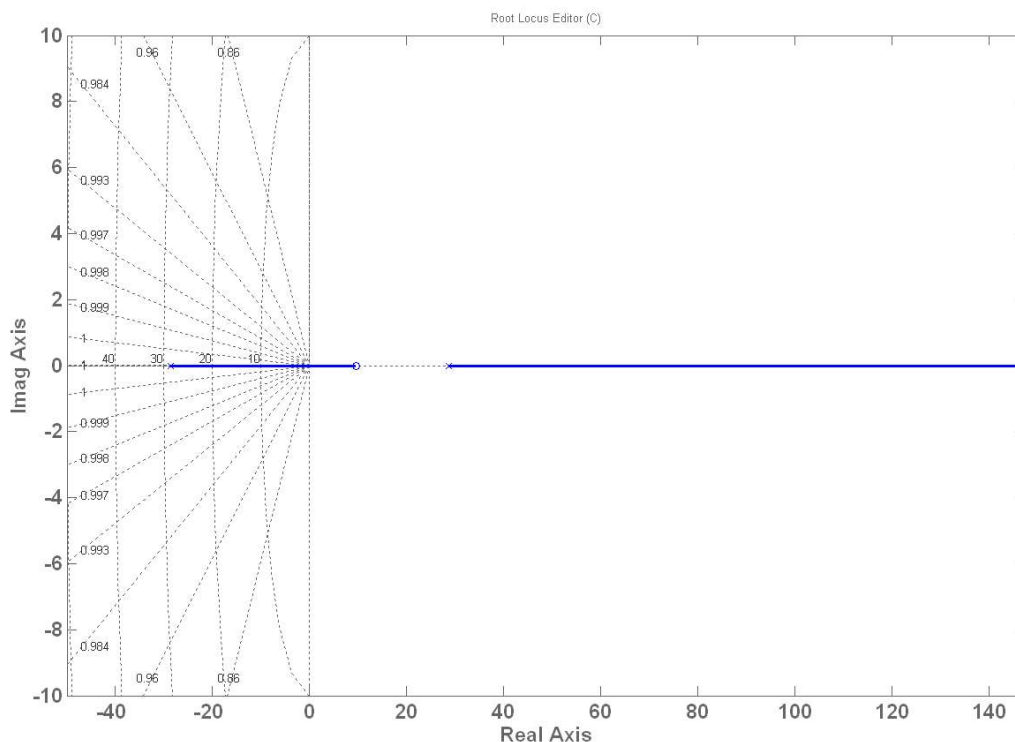


Figura 17. Luogo delle radici per la bicicletta di Klein

Si nota subito, in questo luogo, che la sola azione proporzionale non è sufficiente a stabilizzare il veicolo. Infatti in generale, per $V > 0$ in questo modello ci sono un polo ed uno zero nel semipiano destro.

Un polo in anello chiuso, al crescere di K , si sposta sempre più verso destra rimanendo all'interno del semipiano destro. Questo spiega il fenomeno della “inguidabilità” della bicicletta di Klein.

Per realizzare la stabilizzazione si può quindi pensare di applicare a questo sistema un controllore stabilizzante che dovrà però essere più complesso del semplice regolatore proporzionale che usiamo per rappresentare il controllo manuale.

L'attività didattica e di ricerca di Klein si è soffermata, in particolare, nello studio di soluzioni che permettessero di realizzare una “bicicletta di Klein” guidabile, servendosi di scelte di design specifiche per il controllo manuale di sistemi instabili.

In particolare, per il controllo di sistemi a fase non minima di questo tipo, si può fare un insieme di considerazioni che riportiamo qui di seguito.

Poiché lo zero RHP si allontana dall'asse immaginario al crescere della velocità (V) e il polo RHP rimane fissato al variare della velocità, la posizione dello zero RHP, in corrispondenza di uno specifico valore di velocità, coincide con la posizione del polo instabile. Ciò rende il sistema incontrollabile.

Il rapporto polo-zero (definito come la distanza dello zero dall'origine divisa per la distanza del polo dall'origine) è pari a:

$$\zeta = \frac{\frac{V}{B}}{\sqrt{\frac{MgH}{J}}}$$

Åström mostra che il sistema è difficile da controllare se tale rapporto è nell'intervallo tra 0.25 e 4 e allude al motivo per cui la bicicletta di Klein con ruota sterzante posteriore è “inguidabile”. In questa fascia di valori, infatti, le due singolarità si trovano collocate più vicine o addirittura coincidono.

Nel grafico seguente esprimiamo i valori di ζ in funzione della velocità con i parametri indicati nel capitolo primo. Si può notare che il controllo della bicicletta di Klein può risultare particolarmente complesso perché tipicamente le velocità di utilizzo del veicolo sono dell'ordine dei km/h o delle poche decine di km/h, valori di velocità in cui ζ rientra nell'intervallo indicato.

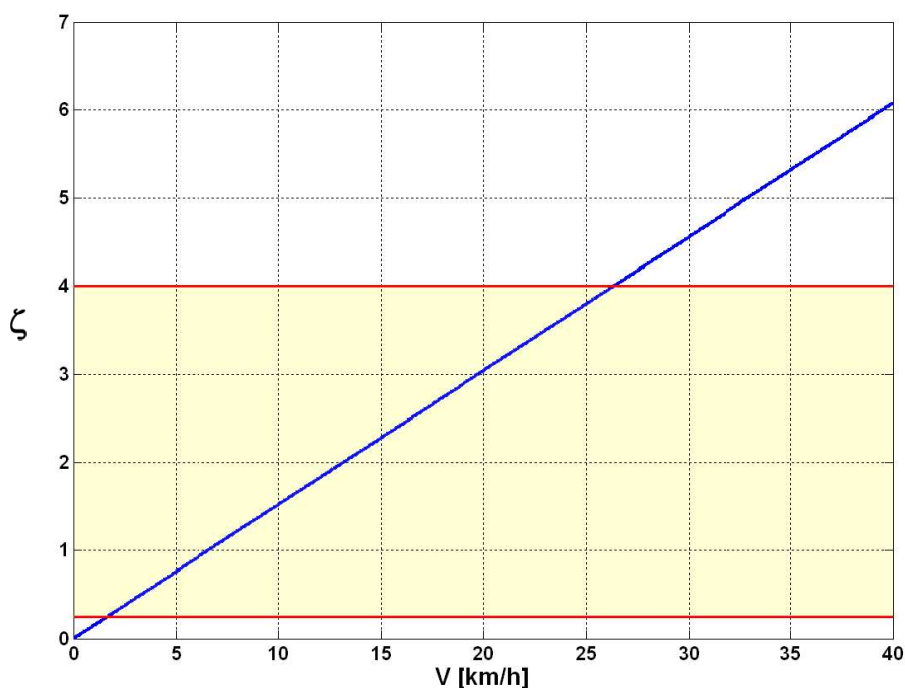


Figura 18. Il rapporto polo-zero in funzione della velocità

Il rapporto polo-zero fornisce inoltre una serie di criteri di progetto tali da rendere la bicicletta di Klein più facilmente controllabile. Per fare crescere ζ oltre il valore di 4, ad esempio, è possibile:

- ridurre B con una inclinazione in avanti del ciclista (nella presente trattazione non abbiamo considerato l'articolazione del busto del ciclista, che però può giocare un ruolo significativo nel controllo di questo tipo di bicicletta);
- fare crescere V;
- fare crescere J tramite l'innalzarsi del ciclista sui pedali o la sua collocazione in una posizione geometricamente più elevata rispetto al piano stradale;

In particolare, Klein è riuscito a costruire una bicicletta sterzante posteriore innalzando il rapporto tramite l'aumento di H e la riduzione della distanza B tra il centro di massa e il punto di contatto della ruota anteriore (quindi spostando il ciclista più in avanti lungo il telaio della bicicletta).

Riportiamo due immagini relative a realizzazioni dalla bicicletta di Klein “inguidabile” e di quella guidabile allo scopo di evidenziare come sono stati applicati, concretamente, i parametri di progetto enunciati.



Figura 19. Bicicletta di Klein inguidabile



Figura 20. Bicicletta di Klein guidabile

È stato inoltre dimostrato da Youla che un sistema LTI non può essere stabilizzato da un controllore stabile se c'è un numero dispari di poli reali instabili tra due qualsiasi zeri reali RHP. Questo è esattamente il caso della bicicletta di Klein. Quindi per essere stabilizzante, un ipotetico controllore dovrebbe essere instabile. Ciò tuttavia risulta poco compatibile con il tipo di azione esercitata da un ciclista, che – abbiamo detto – è approssimabile abbastanza bene con un guadagno.

Questo è il motivo per cui la letteratura scientifica offre per questo tipo di sistema l'uso di regolatori automatici, che però dal punto di vista realizzativo hanno i loro maggiori limiti nella ampiezza della banda passante degli attuatori (servo-motori) e nella variazione della dinamica del sistema con il variare della velocità longitudinale; infatti, poiché la bicicletta verosimilmente necessita di poter essere guidata a diverse velocità longitudinali, l'implementazione della legge di controllo richiederebbe qualche tipo di gain scheduling sullo spettro di velocità di utilizzo⁹.

Per questi sistemi di controlli automatici, l'applicazione ad alte velocità d'altra parte non sembra presentare, a livello teorico, particolari restrizioni sia nel caso di ruota sterzante anteriore che in quello di ruota sterzante posteriore, sebbene con primo tipo si riesca ad ottenere migliori prestazioni.

⁹ Si veda in merito a tale argomento: SURYANARAYANAN, S., TOMIZUKA, M., WEAVER, M. 2002 System dynamics and control of bicycles at high speeds, cit. In questo articolo si legge: "[...] space considerations (there is just enough space for the rider's legs) indicate that a rear-wheel steering mechanism could be better suited for high-speed bikes. [...] We conclude from our analysis that automated roll-rate control and high speeds is realizable in both front and the rear wheel steered bicycles, though better performance is achieved in the front wheel steered case".

CAPITOLO III

MODELLISTICA CON RETROAZIONE STRUTTURALE

PREMESSA

La scelta operata nel capitolo precedente di descrivere il sistema bicicletta-ciclista come un unico corpo rigido senza considerare in modo analitico la geometria del sistema, così come quella di assegnare l'angolo di sterzo φ della bicicletta come variabile di controllo manipolata direttamente dal ciclista, era finalizzata allo scopo di ottenere un'analisi qualitativa che fornisse una serie di risultati iniziali sulla stabilità del sistema.

Nel capitolo precedente sono stati altresì evidenziati i limiti di tali approssimazioni: in particolare, l'incapacità di giustificare il fenomeno – rilevabile sperimentalmente – della autostabilità, vale a dire la capacità della bicicletta di auto-sostenersi a velocità di funzionamento sufficientemente elevate.

Si intende ora arricchire il modello classico per dare una spiegazione di questo fenomeno e, più in generale, ottenere una descrizione complessiva maggiormente rispondente all'effettiva caratteristica di funzionamento del sistema. In particolare, in questa parte della trattazione faremo riferimento ad una modellizzazione del problema proposta dallo svedese Åström, che si pone come tramite tra la modellizzazione classica, a cui si attiene per quanto riguarda la descrizione del sistema da controllare, e analisi più articolate del problema, che si basano sullo studio dei modi del sistema e saranno oggetto di discussione nel capitolo quarto.

Uno degli aspetti più significativi legati allo studio del comportamento della bicicletta concerne la struttura geometrica del veicolo, che – come si arriverà a dire in questo capitolo – riveste un ruolo particolarmente importante nella stabilizzazione del sistema e specificamente nella spiegazione dell'autostabilità della bicicletta.

Il contributo del ricercatore inglese D. E. H. Jones¹⁰ è stato molto rilevante nella identificazione delle cause del fenomeno dell'autostabilità. L'esperienza sperimentale di Jones si tradusse nella costruzione di una serie di biciclette mancanti, rispetto a quelle comuni, di determinate e specifiche caratteristiche. Gli esiti di tali esperimenti gli permisero, in particolare, di ridimensionare il ruolo stabilizzante fino ad allora attribuito agli effetti giroscopici legati alla rotazione delle ruote del veicolo. Un merito di Jones fu

¹⁰ JONES, D. E. H. 1970. "The stability of the bicycle". *Physics Today*, Vol. 23(4), pp. 34-40.

quello di investigare con successo il legame fondamentale esistente tra la geometria della bicicletta e le sue caratteristiche in termini di stabilità e manovrabilità¹¹.

Egli prese in considerazione, in particolare, le caratteristiche geometriche della forcella anteriore di normali biciclette di fattura moderna. Per questi veicoli, la struttura di sterzo tipica è schematizzabile nel modo seguente:

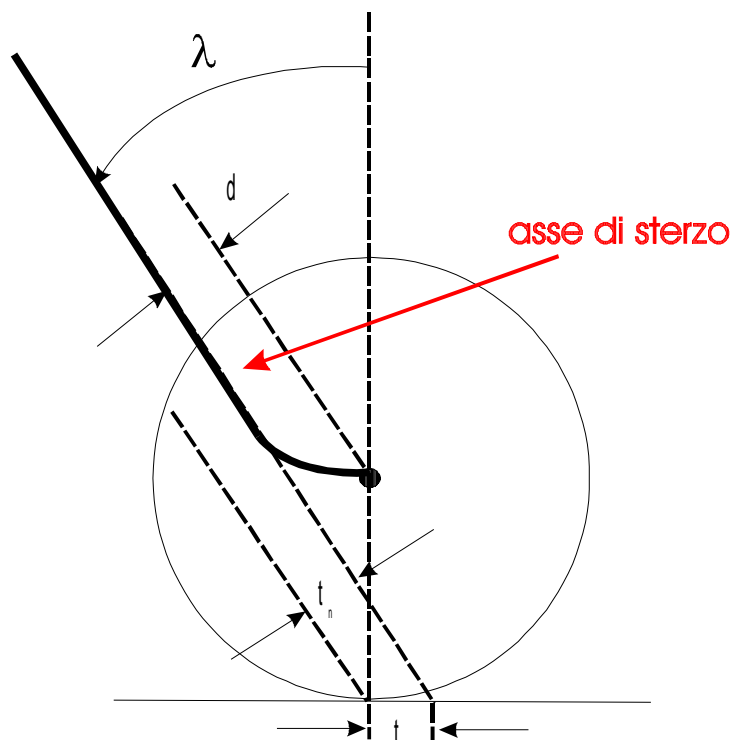


Figura 21. Caratterizzazione della forcella sterzante

Solitamente l'asse di sterzo è eccentrico rispetto al centro di rotazione della ruota, e la distanza tra i due elementi è rappresentata dal segmento d , detto avanzamento dello sterzo. Una grandezza caratteristica della struttura di sterzo è l'avancorsa t (o "trail"), che rappresenta la distanza tra il punto di intersezione dell'asse di sterzo con il piano stradale e il punto di contatto della ruota sterzante. Per convenzione, l'avancorsa è positiva se l'asse di sterzo interseca il piano orizzontale in posizione avanzata rispetto al punto di contatto della ruota sterzante. λ è l'angolo di inclinazione dell'asse di sterzo. Infine il segmento t_n è detto avancorsa normale. Tra tali grandezze sussistono le relazioni geometriche qui di seguito indicate (R è il raggio della ruota):

$$t = R \tan(\lambda) - \frac{d}{\cos(\lambda)}$$

$$t_n = t \cos(\lambda)$$

Il lavoro di Jones fu quello di valutare le caratteristiche dinamiche assunte dal sistema in corrispondenza di diversi valori dell'avancorsa, sia positivi che negativi, cioè con il

¹¹ Con il termine "manovrabilità" ci si riferisce alla facilità e rapidità con cui il veicolo reagisce a sollecitazioni di sterzo da parte del conducente. Si faccia riferimento a: COSSALTER, V. 1997. *Cinematica e dinamica della motocicletta*. Edizioni Progetto Padova.

punto di contatto della ruota sterzante collocato rispettivamente prima o oltre l'asse di sterzo. Egli comprese che l'avancorsa agisce come un braccio di leva tra il punto di contatto e l'asse di sterzo, creando un anello di retroazione in quanto l'inclinazione β del telaio della bicicletta, tramite le reazioni vincolari del terreno esercitate sul punto di contatto della ruota, produce una coppia sulla forcella anteriore che condiziona l'angolo di sterzo.

In realtà per una analisi dinamica del sistema sterzante può essere più significativo considerare l'avancorsa normale; infatti una forza applicata nel punto di contatto della ruota anteriore produce una coppia attorno all'asse di sterzo avente come braccio proprio l'avancorsa normale.

Al fine di uno studio qualitativo del problema, si può notare che esistono due forze importanti derivanti dal movimento di una bicicletta.

Assumiamo che le ruote abbiano angolo di deriva nullo. Quando la bicicletta si muove, il piano stradale esercita una forza di frizione laterale F_c sulle ruote anteriore e posteriore allo scopo di accelerare il centro di massa in direzione normale a tale velocità. Tale forza è nulla quando la bicicletta si muove su una linea retta, ma cresce con l'angolo di sterzo della bicicletta, in quanto il movimento del veicolo in tale caso si sviluppa su una traiettoria circolare. Poiché la forza è applicata a una distanza non nulla dall'asse di sterzo, essa produce una coppia. Questa forza tende a raddrizzare la ruota quando questa è sterzata.

Perché una bicicletta rimanga bilanciata, il manubrio deve essere adeguatamente ruotato. Il ciclista può ruotare il manubrio applicando una coppia al manubrio, ma ci sono anche coppie generate dal movimento della bicicletta stessa, che agiscono facendo a loro volta ruotare la ruota di sterzo. A lungo si è supposto che tali forze che producono una azione stabilizzante sul veicolo fossero dovute esclusivamente a fenomeni giroscopici. Queste forze, in realtà, derivano sia dagli effetti giroscopici, sia forze applicate sulla ruota anteriore nel punto di contatto con il piano stradale. Possiamo scrivere l'espressione della coppia totale T_φ agente sulla ruota rispetto all'asse di sterzo come somma di coppie interne ed esterne:

$$T_\varphi = T_{\varphi,p} + T_{\varphi,c} + T_{\varphi,g} + T_{\varphi,r}$$

Identifichiamo le componenti di coppia indicate:

- $T_{\varphi,p}$: coppia interna causata dalla reazione normale del terreno alla forza peso;
- $T_{\varphi,c}$: coppia interna autocentrante dovuta alla forza di frizione laterale che mantiene la bicicletta sulla traiettoria circolare;
- $T_{\varphi,g}$: coppia interna di tipo giroscopico, rispondente al principio di conservazione del momento angolare per la ruota anteriore.
- $T_{\varphi,r}$: coppia esterna applicata dal ciclista al manubrio.

Durante una svolta, le prime due coppie agiscono in direzioni opposte. La prima, $T_{\varphi,p}$, causata dall'abbassamento del centro di massa, induce la ruota sterzante a sterzare nella direzione di inclinazione. La seconda coppia, $T_{\varphi,c}$, dall'altra parte, tende a raddrizzare la ruota per riportare il punto di contatto della ruota in linea con il piano del telaio.

Una serie di studi condotti in merito all'azione di queste coppie mostra che $T_{\varphi,p}$ è indipendente da V , $T_{\varphi,g}$ cresce linearmente con V e $T_{\varphi,c}$ cresce quadraticamente con la velocità. L'importanza relativa dei tre termini, perciò, dipende dalla velocità della bicicletta. .

L'azione giroscopica legata alle ruote del veicolo rotanti attorno agli assi dei mozzi, benché garantisca in generale la possibilità di autostabilizzazione in una bicicletta, gioca solitamente un ruolo marginale in tale ambito, almeno nel range di velocità classiche per l'utilizzo.

Il fenomeno della automatica rotazione dello sterzo nella direzione di curvatura è interpretato da Jones un movimento che risponde al principio di minimizzazione dell'energia potenziale del sistema, legata all'altezza della massa del sistema da terra.

L'autore conclude riconoscendo che le biciclette caratterizzate da sterzo con avancorsa positiva e di valore alto sono caratterizzate da una buona stabilità, ma, a discapito di ciò, risultano poco manovrabili; viceversa un'avancorsa negativa produce instabilità, facendo sì che la coppia esercitata sull'asse di sterzo per l'interazione ruota-piano stradale cambi di segno. Per questo i più moderni tipi di bicicletta sfruttano l'utilizzo delle regioni di funzionamento più prossime alla instabilità per ottenere prestazioni migliori in termini di maneggevolezza: si tende quindi a scegliere trail positivi, ma piccoli. Questo, scrive l'autore, è facilmente comprensibile: un sistema di controllo molto stabile risponde lentamente alle perturbazioni, mentre uno più prossimo alla instabilità risulta maggiormente reattivo. Il progetto delle biciclette, oggi, privilegia l'agilità e la manovrabilità.

In sporadiche situazioni si preferisce addirittura eliminare il trail usando un asse di sterzo verticale: è il caso di biciclette, come quelle concepite per l'uso ad alte velocità, soggette a forzanti aerodinamiche laterali: queste producono forze laterali che possono dare luogo a coppie indesiderate che producono rotazioni dell'asse di sterzo. Assieme al problema della limitatezza della banda di controllo del pilota umano (cui si è accennato nel capitolo precedente) questo è il motivo fondamentale per cui nell'ambito della ricerca si stanno studiando sistemi di controllo automatizzato per biciclette ad alte prestazioni¹².

Per quanto riguarda invece le scelte costruttive più tipiche, nella produzione più recente si può notare come diverse tipologie di biciclette si caratterizzino per valori caratteristici assunti dall'avancorsa. Solitamente le biciclette da corsa privilegiano la manovrabilità e quindi dei trail piccoli, per quanto possibile. Le biciclette concepite per l'utilizzo fuori strada, invece, si distinguono per trail maggiori rispetto ai veicoli stradali, in quanto la presenza di asperità sul profilo stradale può spostare significativamente la posizione del punto di contatto della ruota sterzante e quindi inficiare il ruolo autostabilizzante di questa. ciascuna scelta realizzativa sceglie quindi un preciso compromesso tra requisiti di stabilità ed esigenze di adeguate caratteristiche intermini di handling.

Fatte queste premesse, è opportuno introdurre il modello dinamico che sarà oggetto di studio in questo capitolo. Esso è stato proposto da Åström, che, servendosi per

¹² Si veda in merito a questo argomento: SURYANARAYANAN, S., TOMIZUKA, M., WEAVER, M. 2002 System dynamics and control of bicycles at high speeds. *Proceedings of ACC02-ASME* 1123.

descrivere il sistema da controllare della modellazione classica, introduce uno schema controllistico più articolato, comprendente oltre all'azione del ciclista anche la "retroazione strutturale" dovuta alla forcella di sterzo. Al modello classico ci si attiene anche per quanto concerne le coordinate che descrivono in movimento, le convenzioni di segno e le semplificazioni modellistiche.

La differenza più significativa rispetto a prima consiste nel fatto che il ciclista non controlla più, in modo diretto, l'angolo φ di sterzo della bicicletta, ma esercita la sua azione di controllo applicando una coppia all'asse di sterzo, tramite il manubrio. Questa azione si somma a quella dovuta alla retroazione realizzata dalla forcella sterzante della bicicletta e dipendente dalla conformazione geometrica della stessa.

Complessivamente, la descrizione del sistema utilizzato in questa analisi si avvale di due sottosistemi: il telaio e la forcella anteriore. Per il telaio assumiamo un modello dinamico uguale a quello utilizzato nella modellistica classica del capitolo precedente, mentre per la forcella anteriore usiamo un modello statico. Questa scelta appare adeguata in quanto la dinamica della forcella è più veloce di quella del telaio; strettamente parlando, si dovrebbe usare una equazione differenziale per descrivere tale relazione.

Sia T la coppia applicata dal ciclista all'asse dello sterzo. Un bilancio statico di coppia adeguato, con le convenzioni specificate nel capitolo precedente, per descrivere il funzionamento della forcella sterzante con avancorsa positiva – sia nella bicicletta tradizionale, sia nel modello di Klein, è il seguente:

$$\varphi = K_1 T + K_2 \beta$$

con le due fissate costanti di proporzionalità K_1 e K_2 , positive, che dipendono dalla geometria di sterzo.

Nel seguito dettagliamo l'analisi del modello che si ottiene includendo la rappresentazione di questi fenomeni nei due casi di bicicletta con ruota sterzante anteriore e bicicletta di Klein.

Le considerazioni fatte finora, naturalmente, non tengono conto di una serie di non idealità legate all'uso di pneumatici, la cui trattazione è al di fuori degli scopi di questa trattazione. È comunque possibile indicare le componenti di forze e coppie che caratterizzano la ruota pneumatica tipicamente utilizzata per l'uso ciclistico. Essa è soggetta a tre componenti di forze e a tre componenti di momenti nelle direzioni verticale, longitudinale e laterale, come illustrato in figura. Le forze e i momenti risultanti sono:

- la forza longitudinale F_x , dovuta allo scivolamento longitudinale;
- la forza laterale F_y , dovuta allo scivolamento laterale, all'angolo di camber e alla scivolamento per rotolamento (turn slip);
- la forza verticale F_z ;
- il momento ribaltante M_x , derivante dallo spostamento del punto di contatto della ruota legato all'angolo di camber;

- il momento di resistenza al rotolamento M_y , determinato dalle proprietà isteretiche della ruota;
- il momento autoallineante M_z , causato dalla deformazione asimmetrica laterale dello pneumatico, dal camber, dallo scivolamento per rotolamento e dagli effetti giroscopici dovuti al battistrada ruotante e deformato, al cerchione della ruota e alla massa del pneumatico.

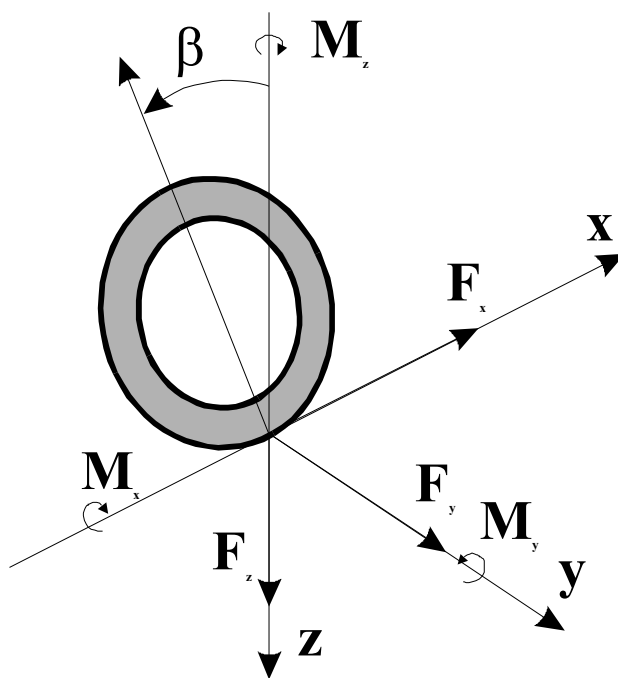


Figura 22. Grafico delle forze e dei momenti agenti su una ruota nello spazio tridimensionale

1. MODELLIZZAZIONE E CONTROLLO DI UNA BICICLETTA CON RUOTA STERZANTE ANTERIORE

Possiamo rappresentare l'effetto complessivo dell'azione del ciclista con una coppia T applicata alla forcella anteriore, che convenzionalmente riteniamo concorde in segno con φ . L'equazione che descrive la dinamica del telaio è identica a quella ottenuta per il modello semplice.

Complessivamente, quindi, possiamo scrivere il seguente sistema per rappresentare il comportamento del veicolo:

$$\begin{cases} \ddot{\beta} - \frac{MgH}{J}\beta = -\frac{VAMH}{LJ}\dot{\varphi} - \frac{V^2MH}{LJ}\varphi \\ \varphi = K_1T + K_2\beta \end{cases} \quad (*)$$

Il modello descritto dalle due equazioni indicate sopra può essere rappresentato tramite il seguente schema a blocchi:

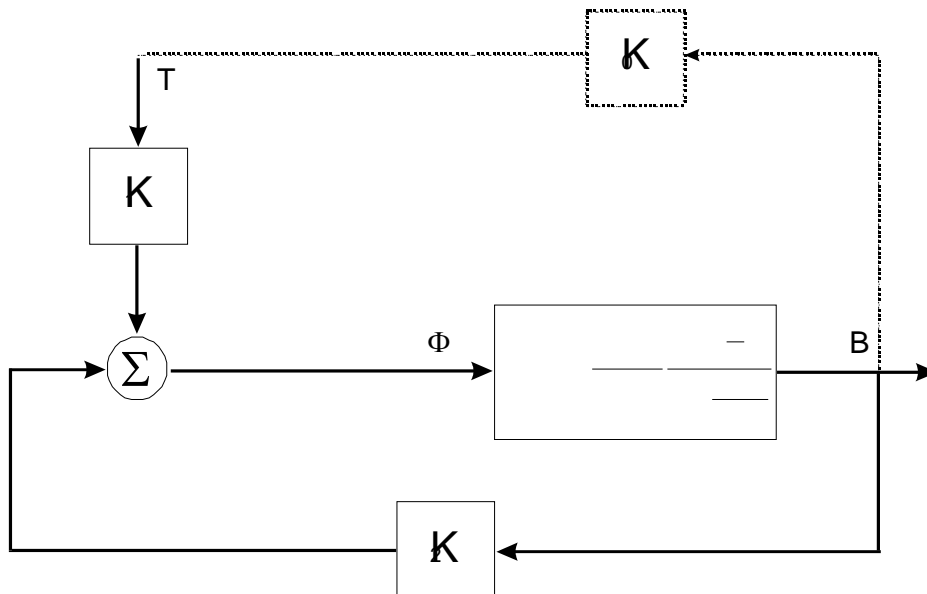


Figura 23. Schema a blocchi del sistema di controllo con retroazione strutturale

Si noti che, rispetto al modello semplificato, qui la retroazione realizzata dalle forcella anteriore svolge un ruolo analogo a quello prima esercitato dal ciclista, creando una rapporto di proporzionalità tra β e φ . A questa retroazione si somma l'effetto della coppia torcente esercitata dal ciclista. Questa sarà frutto, a sua volta, di una retroazione realizzata dal ciclista, che immaginiamo rappresentata a sua volta da un guadagno.

Sul termine di retroazione "strutturale", avente costante di proporzionalità K_2 , si possono svolgere le stesse considerazioni sviluppate nel capitolo precedente, a cui rimandiamo, in quanto l'anello di controllo che si crea ha caratteristiche analoghe a quelle che connotano lo schema a blocchi del modello semplificato. Supponiamo, infatti, di considerare un ciclista passivo, che non eserciti coppia sul manubrio; in questa condizione l'anello esterno del sistema, che include i guadagni K_1 e K_2 , non gioca un ruolo significativo dal punto di vista della stabilizzazione dello stesso.

LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

La funzione di trasferimento in anello aperto corrispondente alla prima equazione del sistema riportato sopra è quella già calcolata nel modello semplificato:

$$W(s) = -\frac{VAMH}{LJ} \frac{s + \frac{V}{A}}{s^2 - \frac{MgH}{J}}$$

Esaminiamo le conseguenze del feedback realizzato tramite la forcella anteriore. Chiudendo l'anello di controllo interno ("strutturale") e ponendolo in serie a K_1 , l'equazione differenziale che descrive tale serie si può scrivere sostituendo la seconda nella prima equazione del sistema (*):

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} + K_2 \frac{AMHV}{LJ} \frac{d\beta}{dt} + \frac{MgH}{J} \left(\frac{K_2 V^2}{Lg} - 1 \right) \beta = -K_1 \frac{AMHV}{LJ} \left(\frac{dT}{dt} + \frac{V}{A} T \right)$$

Da questa relazione è possibile ricavare la funzione di trasferimento che lega l'angolo di inclinazione della bicicletta alla coppia applicata al manubrio:

$$\frac{B(s)}{T(s)} = K_1 \cdot \left(-\frac{VAMH}{LJ} \frac{s + \frac{V}{A}}{s^2 + \frac{VAMH}{LJ} K_2 s + \frac{MgH}{J} \left(\frac{K_2 V^2}{Lg} - 1 \right)} \right)$$

ANALISI DELLA STABILITÀ

La discussione sulla topologia del luogo delle radici per la bicicletta con ruota sterzante anteriore si articola in due ordini di considerazioni: innanzitutto ci interessa conoscere il luogo delle radici per l'anello di retroazione strutturale relativo ad una bicicletta con trail positivo o negativo; poi si intende analizzare il luogo delle radici relativo all'anello esterno, anche al variare del segno di $K_0 K_1$.

Per il luogo delle radici relativo all'anello di controllo strutturale (l'anello interno) distinguiamo due casi:

1. Bicicletta con avancorsa positiva

La conformazione del luogo è uguale a quella ottenuta relativamente al modello classico. Si nota che la costante di proporzionalità K_1 non interviene nella stabilizzazione del sistema. La condizione che garantisce la stabilità delle soluzioni può essere facilmente desunta dal denominatore di questa funzione di trasferimento:

$$K_2 > K_{2\min} = \frac{Lg}{V^2}$$

Tenendo conto del fatto che K_2 dipende dalle caratteristiche geometriche del veicolo e non dalla velocità dello stesso, possiamo reinterpretare più significativamente la relazione precedente indicando la velocità critica oltre la quale la bicicletta è stabile asintoticamente:

$$V > V_{critica} = \sqrt{\frac{Lg}{K_2}}$$

Riportiamo il grafico che esprime l'andamento di $V_{critica}$ in funzione di K_2 , con i parametri L e g di Klein:

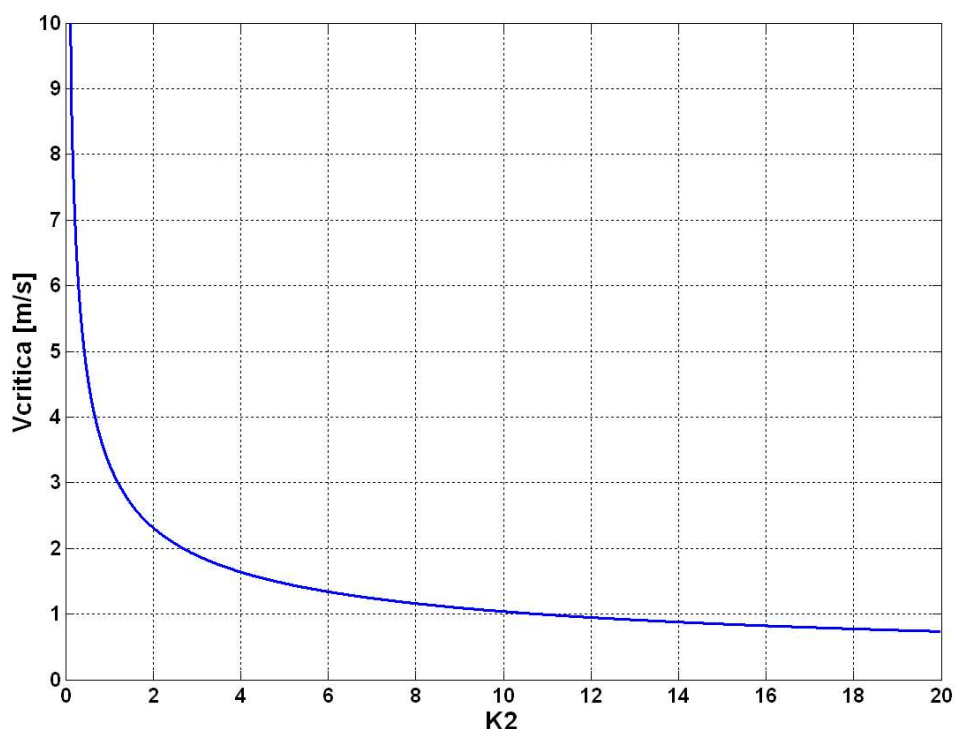


Figura 24. $V_{critica} = V_{critica}(K_2)$

La stabilizzazione del sistema, in questo caso, è realizzata dalla geometria del sistema, senza l'intervento stabilizzante del ciclista. Possiamo quindi concludere che, a causa del feedback creato dalla geometria della forcella anteriore, la bicicletta sarà stabile se la velocità è abbastanza grande. In tali condizioni l'anello di retroazione esterno realizzato dal ciclista non esercita un ruolo attivo nella stabilizzazione (assumendo T positiva).

2. Bicicletta con avancorsa negativa

Un'avancorsa negativa produce, a causa della geometria della forcella anteriore, una retroazione strutturale di segno opposto; quindi il luogo delle radici sarà caratterizzato da una conformazione del tipo:

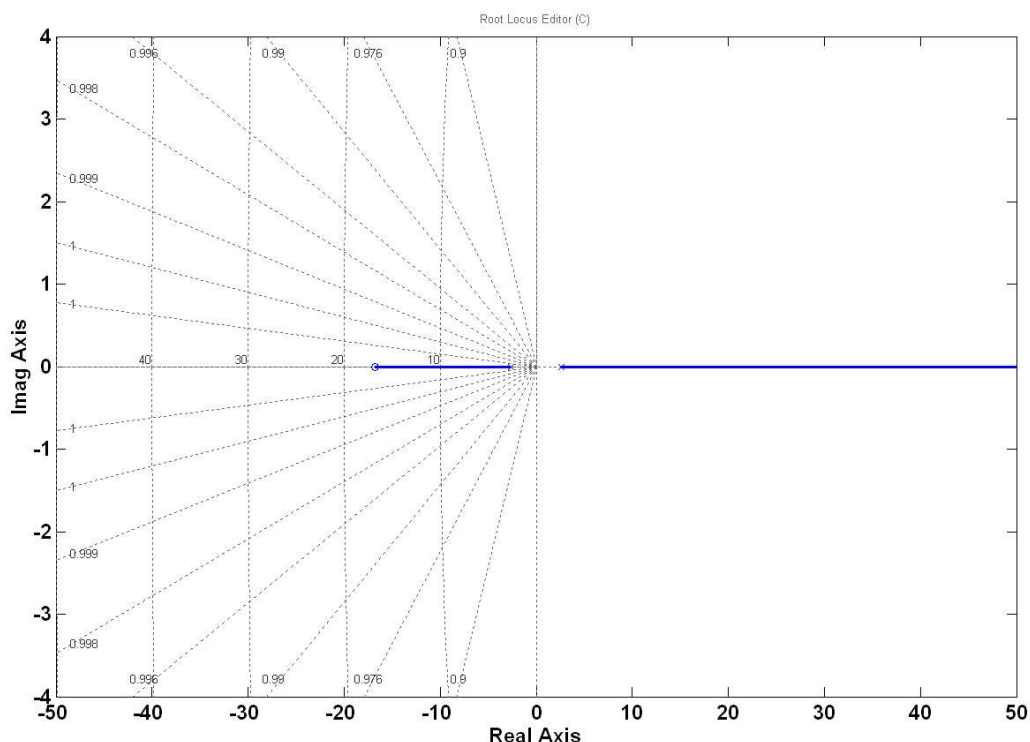


Figura 25. Luogo delle radici per bicicletta convenzionale con avancorsa negativa

Questo è un luogo contenente polo in anello chiuso instabile, anche se è molto diverso dal luogo delle radici proposto, nel capitolo precedente, per la bicicletta di Klein. Infatti qui lo zero del sistema è collocato nel semipiano sinistro.

Consideriamo ora, in particolare, il luogo delle radici per l'anello di controllo esterno nel caso di una bicicletta con avancorsa positiva.

Per ciascuna delle due configurazioni possibili del luogo delle radici sopra presentate, questo luogo è caratterizzato da configurazioni diverse.

Confrontiamo il luogo delle radici ottenuto per l'anello interno e l'anello esterno al variare di K_2 per un valore di velocità pari a $V=6,7$ m/s .

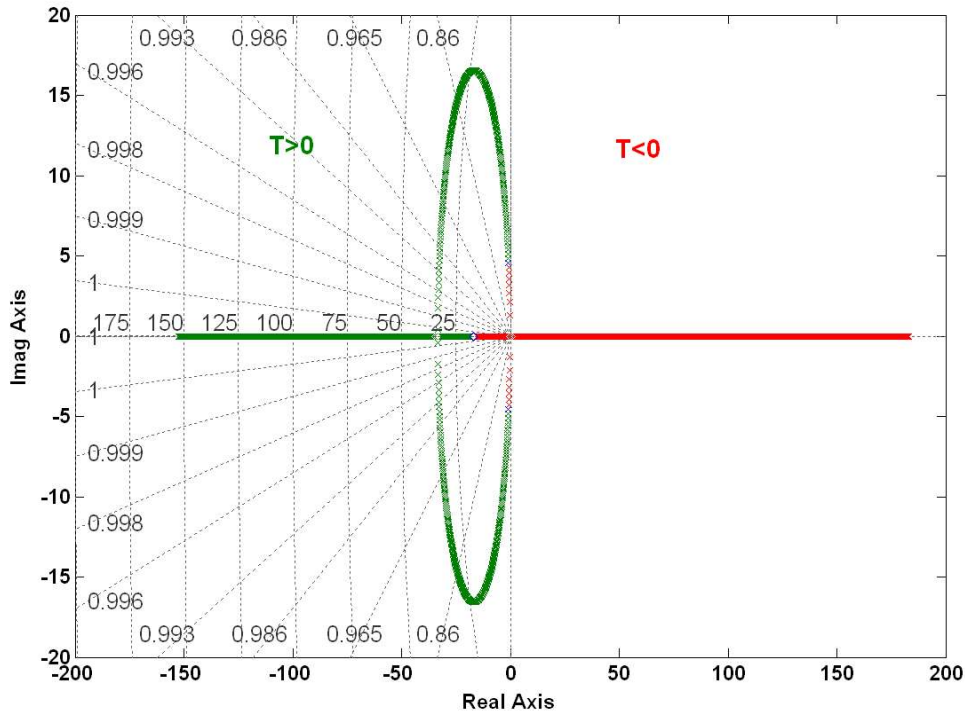


Figura 26. Dipendenza della posizione dei poli in anello chiuso dalla coppia T esercitata dal ciclista sul manubrio

Al variare di T , guadagno dell'anello di coppia, la posizione dei poli in anello chiuso si sposta dalla posizione assunta nel corrispondente luogo relativo all'anello interno; lo spostamento avviene lungo i punti del luogo interno, dove questo è definito. Per $T > 0$ si nota immediatamente che il pilota non assume un ruolo stabilizzante, in quanto la stabilità (asintotica) c'è già, mentre può modificare le caratteristiche dinamiche (transitori, smorzamento) del sistema; per $T < 0$, invece, cioè nel caso in cui il ciclista eserciti una coppia in verso opposto a quello di curvatura, egli può rendere il sistema instabile, o anche stabile non asintoticamente.

Si può, in particolare, calcolare la coppia che il ciclista deve esercitare per mantenere il veicolo in condizioni stabili, cioè ad un determinato valore dell'angolo di inclinazione β muovendosi su una curva di raggio costante. In tale circostanza la forza centripeta deve essere bilanciata dalla gravità. La prima equazione del sistema (*), la cui espressione è

$$\ddot{\beta} - \frac{MgH}{J}\beta = -\frac{VAMH}{LJ}\dot{\varphi} - \frac{V^2MH}{LJ}\varphi,$$

nelle condizioni di funzionamento indicate assume la forma:

$$\frac{MgH}{J}\beta = \frac{V^2MH}{LJ}\varphi$$

L'angolo di inclinazione è quindi:

$$\beta = \frac{V^2}{Lg} \varphi$$

Inserendo la precedente nella seconda equazione, algebrica, di (*), otteniamo:

$$T = \frac{\varphi - K_2 \beta}{K_1} = \frac{\varphi K_2 \left(\frac{Lg}{K_2} - V^2 \right)}{K_1 Lg}$$

Quest'ultima può essere riscritta in una forma molto espressiva, ricordando la relazione

$$V_{critica} = \sqrt{\frac{Lg}{K_2}} :$$

$$T = \frac{\varphi K_2 (V_{critica}^2 - V^2)}{K_1 Lg}$$

Ciò significa che per ottenere stabilità non asintotica non è richiesta nessuna coppia se la bicicletta è guidata alla velocità critica e che la coppia cambia segno alla velocità critica: infatti oltre la velocità critica il veicolo, non sottoposto all'azione della coppia T, si riporta autonomamente in modo asintotico in posizione verticale; pertanto, per mantenere una condizione stabile, cioè un angolo costante di inclinazione del mezzo, il ciclista deve esercitare una coppia negativa, tale da riportare il sistema al limite di stabilità.

Possiamo concludere affermando che la bicicletta è autostabilizzante se la velocità è superiore alla velocità critica, e che particolarmente importante a tale proposito è il progetto della forcella anteriore, il cui termine K_2 compare in modo evidente nella relazione sulla velocità. Inoltre è significativa la lunghezza del passo della bicicletta.

CONSIDERAZIONI AGGIUNTIVE SUL MODELLO CON RETROAZIONE STRUTTURALE PER BICICLETTA CON RUOTA STERZANTE ANTERIORE

Åström propone un ulteriore affinamento nella modellizzazione della bicicletta, che tenga conto anche dei fenomeni giroscopici legati alla conservazione del momento angolare per le ruote, che si muovono attorno all'asse dei mozzi di moto rotatorio. Questa scelta modellistica è stata fatta al fine di smentire l'ipotesi della preponderanza dei fenomeni giroscopici nell'autostabilizzazione della bicicletta e di evidenziare come siano molto più significativi gli effetti dovuti all'avancorsa, di cui si è parlato nei paragrafi precedenti¹³.

¹³ Che l'effetto giroscopico giochi un ruolo marginale nella stabilizzazione della bicicletta fu intuito già all'inizio del secolo scorso da Arnold Sommerfield: "That the gyroscopic effects of the wheel are very small if compared with these [centripetal forces] can be seen from the construction of the wheel: if one wanted to strengthen the gyroscopic effects, one should provide the wheels with heavy rims and tyres instead of making the mass light as possible. It can nevertheless be shown that these weak effects contribute their share to the stability of the system". In SOMMERFIELD, A. 1952. Lectures on theoretical

Un modello più preciso fisicamente del tipo di retroazione fornito dalla forcella anteriore, che tenga conto anche del contributo di tipo giroscopico alla retroazione della forcella anteriore, porterebbe a questa formulazione:

$$\begin{cases} \ddot{\beta} - \frac{MgH}{J} \beta = -\frac{VAMH}{LJ} \dot{\phi} - \frac{V^2 MH}{LJ} \phi \\ \phi = K_1 T + K_2 \beta + K_G \dot{\beta} \end{cases}$$

Il termine aggiuntivo nella seconda equazione, con K_G non negativo, rende conto degli effetti giroscopici.

Il corrispondente sistema in anello chiuso risultante è in questa situazione:

$$\left(1 + \frac{AMHK_G V}{LJ}\right) \frac{d^2 \beta}{dt^2} + \left(\frac{AMHK_2 V}{LJ} + \frac{MHK_G V^2}{LJ}\right) \frac{d\beta}{dt} + \frac{MgH}{J} \left(\frac{K_2 V^2}{Lg} - 1\right) \beta = -\frac{AMK_1 HV}{LJ} \left(\frac{dT}{dt} + \frac{V}{A} T\right)$$

La funzione di trasferimento corrispondente è:

$$\frac{B(s)}{T(s)} = \frac{-\frac{AMK_1 HV}{LJ} \left(s + \frac{V}{A}\right)}{\left(1 + \frac{AMHK_G V}{LJ}\right) s^2 + \left(\frac{AMHK_2 V}{LJ} + \frac{MHK_G V^2}{LJ}\right) s + \frac{MgH}{J} \left(\frac{K_2 V^2}{Lg} - 1\right)}$$

Si noti che cambia, rispetto a prima, il solo denominatore della funzione di trasferimento. Si nota che il sistema, grazie all'effetto giroscopico, manifesta uno smorzamento lievemente migliore, ma la condizione di stabilità è la stessa di prima, in quanto – essendo positivi i coefficienti di primo e secondo grado del polinomio a denominatore – per avere poli negativi è necessario che sia positivo il termine noto del denominatore, che è uguale a quello relativo al sistema senza retroazione giroscopica:

$$V > V_{critica} = \sqrt{\frac{Lg}{K_2}}$$

L'effetto giroscopico, d'altra parte, migliora alcune caratteristiche dinamiche del sistema, quali lo smorzamento.

SIMULAZIONI

Analizziamo ora, tramite una serie di simulazioni, le caratteristiche di sterzo per una bicicletta tradizionale analizzata con questo modello con retroazione strutturale, trascurando la retroazione di tipo giroscopico.

In particolare è interessante realizzare delle simulazioni delle simulazioni che diano indicazioni su come la coppia applicata dal pilota al manubrio influenzi l'angolo di sterzo. La funzione di trasferimento tra T e ϕ è:

$$\frac{\Phi}{T} = K_1 \frac{1}{1 + K_2 \frac{VAMH}{LJ} \frac{s + \frac{V}{A}}{s^2 - \frac{MgH}{J}}} = K_1 \frac{s^2 - \frac{MgH}{J}}{s^2 + \frac{K_2 VAMH}{LJ} s + \frac{MgH}{J} \left(\frac{V^2}{V_{critica}^2} - 1 \right)}$$

Inoltre sono note, dalla cinematica della bicicletta, le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= V\psi \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{V}{L}\phi \end{aligned}$$

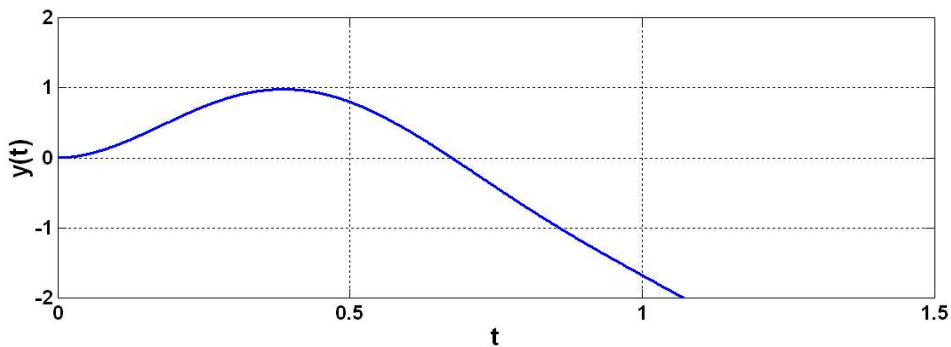
Di conseguenza la funzione di trasferimento tra ϕ e la deviazione y è:

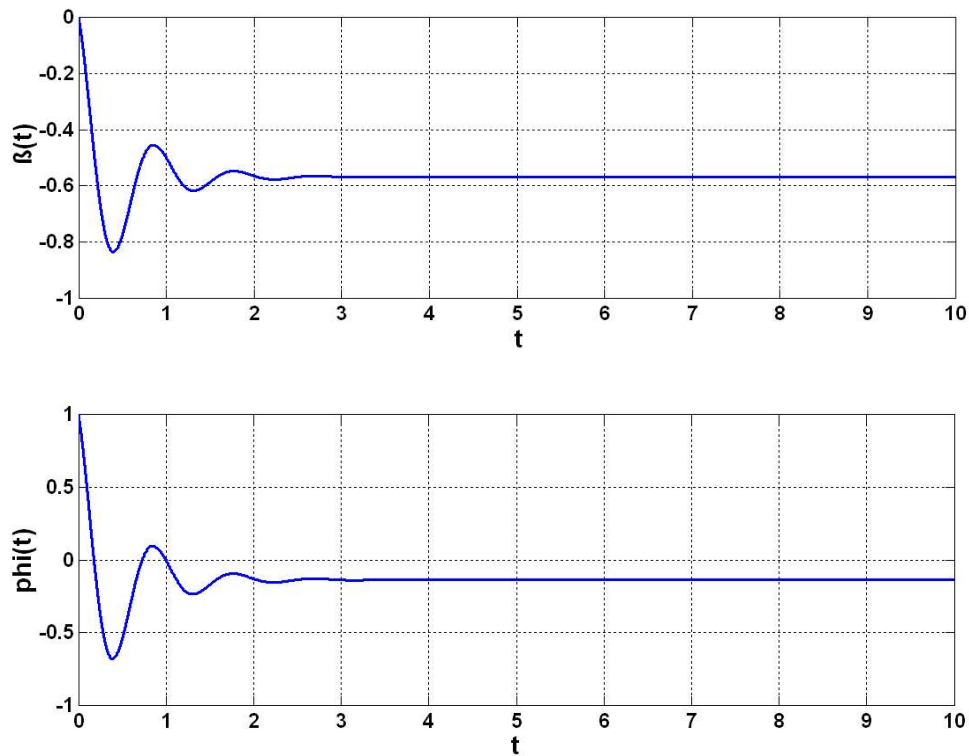
$$G_{y\phi}(s) = \frac{V^2}{Ls^2}$$

La risultante funzione di trasferimento tra la coppia T applicata dal ciclista allo sterzo ed y è:

$$\frac{Y}{T} = K_1 \frac{V^2}{L} \frac{s^2 - \frac{MgH}{J}}{s^2 \left(s^2 + \frac{K_2 VAMH}{LJ} s + \frac{MgH}{J} \left(\frac{V^2}{V_{critica}^2} - 1 \right) \right)}$$

Le seguenti simulazioni mostrano qualitativamente alla risposta del sistema data in ingresso una coppia T positiva fissata.





5. MODELLIZZAZIONE E CONTROLLO DELLA “BICICLETTA DI KLEIN”

La combinazione delle equazioni del telaio e della forcella posteriore, in questa configurazione del sistema, dà luogo a:

$$\begin{cases} \frac{d^2\beta}{dt^2} = \frac{MgH}{J}\beta + \frac{BMHV}{LJ}\frac{d\varphi}{dt} - \frac{MHV^2}{LJ}\varphi \\ \varphi = K_1T + K_2\beta \end{cases}$$

Il corrispondente schema a blocchi, in cui sono rappresentati l’anello di retroazione strutturale e l’anello di retroazione esterno realizzato dal ciclista è rappresentato in figura.

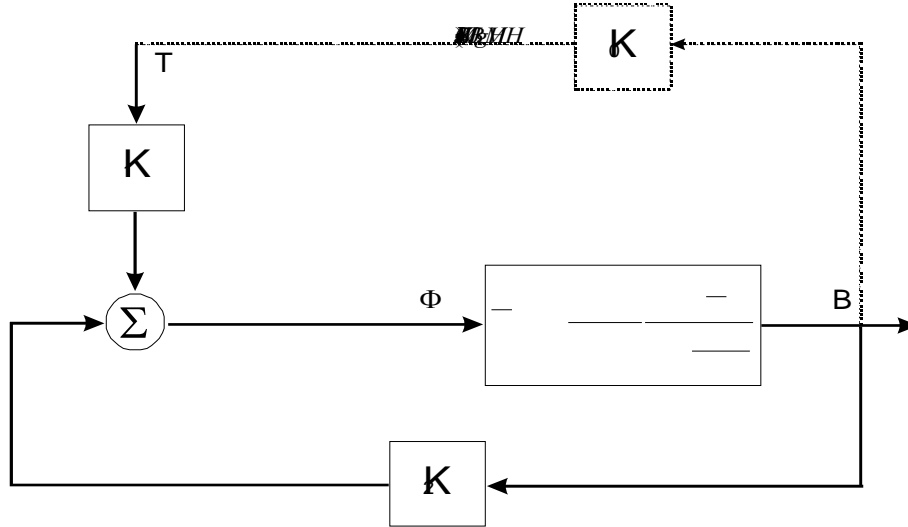


Figura 27. Schema a blocchi del sistema di controllo con retroazione strutturale

LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

La funzione di trasferimento relativa alla prima equazione del sistema precedente è:

$$\bar{W}(s) = \frac{VBMH}{LJ} \frac{s - \frac{V}{B}}{s^2 - \frac{MgH}{J}}$$

Il sistema in anello chiuso è descritto dall'equazione differenziale seguente:

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} - \frac{BMHV}{LJ} K_2 \frac{d\beta}{dt} + \left(\frac{MHV^2}{LJ} K_2 - \frac{MgH}{J} \right) \beta = \frac{BMK_1HV}{LJ} \left(\frac{dT}{dt} - \frac{V}{B} T \right)$$

La funzione di trasferimento tra T e β è:

$$\frac{B(s)}{T(s)} = \frac{BMK_1HV}{LJ} \frac{s - \frac{V}{B}}{s^2 - \frac{BMHV}{LJ} s + \left(\frac{MHV^2}{LJ} K_2 - \frac{MgH}{J} \right)}$$

ANALISI DELLA STABILITÀ

Riportiamo il luogo delle radici:

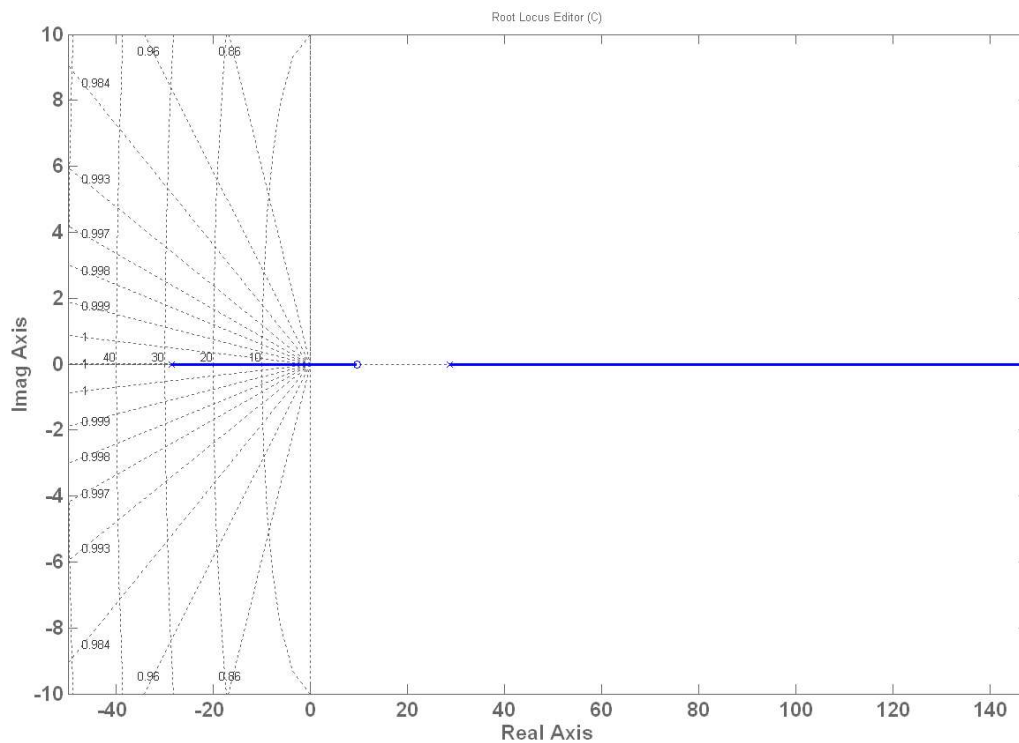


Figura 28. Luogo delle radici per la bicicletta di Klein

La corrispondente velocità critica è:

$$V_{critica} = \sqrt{\frac{Lg}{K_2}}$$

Sia il luogo delle radici, sia il fatto che il termine di primo grado del denominatore della funzione di trasferimento sia negativo ci suggeriscono che il sistema non può, anche nell'ambito di questa modellizzazione dell'azione di controllo, essere stabilizzato.

CAPITOLO IV

CENNI AD UNA MODELLISTICA MULTIBODY

PREMESSA

In questo ultimo capitolo si fa cenno ad una scelta modellistica di maggiore dettaglio, che si avvale di tecniche di analisi di tipo multibody. La letteratura tecnica del settore presenta una serie piuttosto articolata di modelli di questo tipo¹⁴.

Mentre nei capitoli precedenti l'analisi era basata su un modello consistente in un unico corpo rigido, il modello meccanico della bicicletta di cui ora trattiamo (ci riferiremo di qui in avanti alla sola bicicletta con ruota sterzante anteriore) consiste di quattro corpi rigidi:

- il telaio posteriore del ciclista, che consideriamo rigidamente collegato ad esso;
- il telaio anteriore, composto da manubrio e forcella di sterzo;
- le due ruote, che consideriamo di spessore trascurabile.

Questi corpi, interconnessi per mezzo di giunti di rivoluzione a livello dello sterzo e dei mozzi delle ruote, sono considerati simmetrici rispetto al piano verticale passante per il telaio (posteriore) della bicicletta in senso longitudinale. Le ruote, rigide, sono caratterizzate da un moto di puro rotolamento.

Il modello della bicicletta, essendo costituito da quattro corpi, è descritto da ventiquattro coordinate spaziali; a causa dei vincoli presenti nel sistema, tuttavia, i gradi di libertà sono soltanto tre:

- l'angolo di rollio del telaio posteriore $\beta(t)$;
- l'angolo di sterzo $\varphi(t)$, che rappresenta la rotazione del telaio anteriore rispetto a quello posteriore attorno all'asse di sterzo;
- l'angolo di rotazione della ruota posteriore $\theta_r(t)$.

Associamo al sistema un riferimento cartesiano con origine O nel punto di contatto della ruota posteriore, con l'asse x in direzione longitudinale e l'asse z rivolto verso il basso.

¹⁴ Si citano, tra gli altri: SCHWAB, A. L., MEIJHAARD, J. P., PAPADOPOULOS, J. M. 2004. Benchmark results on the linearized equations of motion of an uncontrollable bicycle. Proceedings of the Second Asian Conference on Multibody Dynamics 2004 (ACMD '04), August 1-4 2004, Seoul, Korea. WEIR, D. H., ZELLNER, J. W. 1978. Lateral-Directional Motorcycle Dynamics and Rider Control. Paper 780304, *Transactions of the Society of Automotive Engineering*, Section 2.

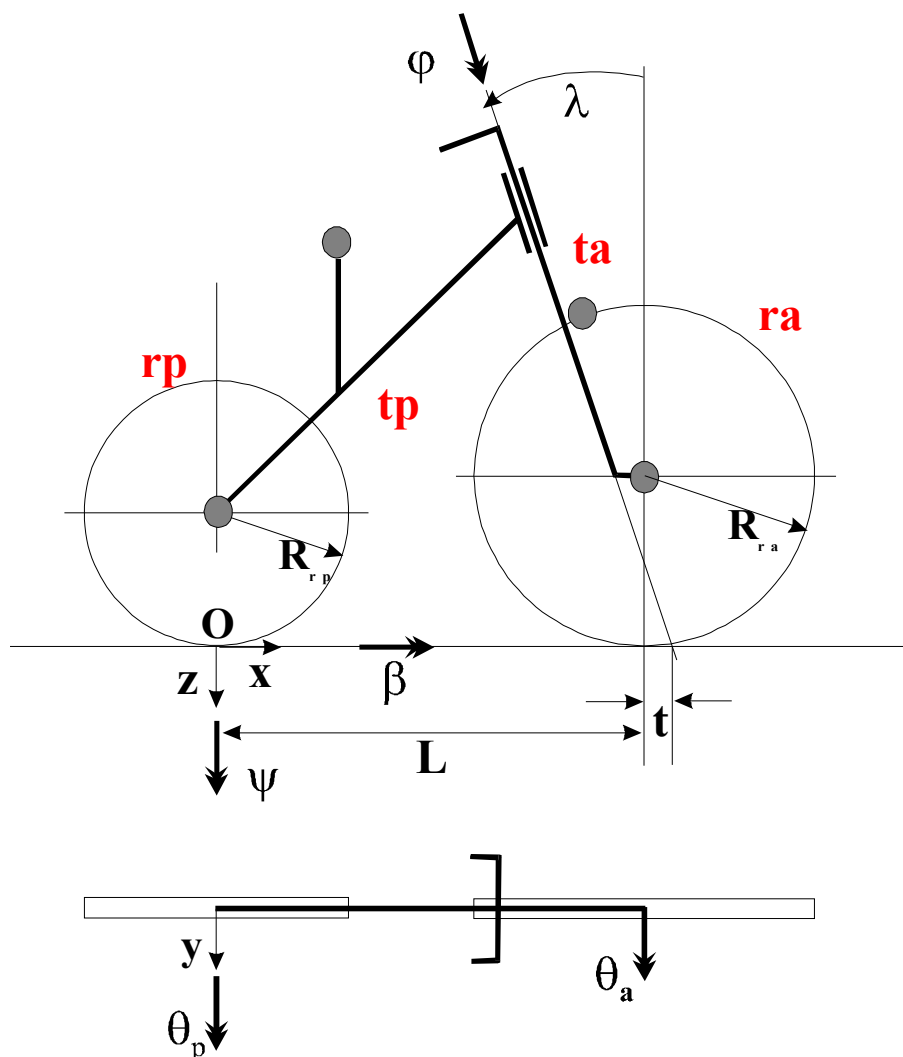


Figura 29. Rappresentazione del sistema multi-body utilizzato nell'analisi con le relative convenzioni di segno per le coordinate

Consideriamo la bicicletta in figura. Si riporta la simbologia utilizzata per i pedici riportati nelle formule successive:

- ta: per il telaio anteriore;
- ra: per la ruota anteriore;
- a: per l'insieme di telaio e ruota anteriori;
- tp: per il telaio posteriore;
- rp: per la ruota posteriore;
- tot: per il sistema complessivo.

Si noti che le convenzioni utilizzate in questo modello per gli angoli di sterzo e di inclinazione non corrispondono a quelle utilizzate nei capitoli precedenti.

La tabella riportata sotto indica i parametri, i simboli e i corrispondenti valori numerici associati alle grandezze utilizzate per descrivere il presente modello, sostituiscono quelli utilizzati nei precedenti capitoli.

Parametro	Simbolo	Valore
Passo	L	1,02 m
Avancorsa	t	0,08 m
Angolo di inclinazione dell'asse di sterzo	λ	$\pi/2 - \arctan(3)$
Accelerazione di gravità	g	9,81 m/s ²
Velocità in avanti	V	variabile
Ruota posteriore		
Raggio	R_{rp}	0,3 m
Massa	m_{rp}	2 kg
Momenti d'inerzia di massa	$(A_{xx}; A_{yy}; A_{zz})$	(0,06; 0,12; 0,06) kg·m ²
Telaio posteriore		
Posizione del centro di massa	$(x_{tp}; y_{tp}; z_{tp})$	(0,3; 0; -0,9) m
Massa	m_{tp}	85 kg
Momenti d'inerzia di massa	$\begin{bmatrix} B_{xx} & 0 & B_{xz} \\ 0 & B_{yy} & 0 \\ B_{xz} & 0 & B_{zz} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9,2 & 0 & 2,4 \\ 0 & 11 & 0 \\ 2,4 & 0 & 2,8 \end{bmatrix}$ kg·m ²
Telaio anteriore		
Posizione del centro di massa	$(x_{ta}; y_{ta}; z_{ta})$	(0,9; 0; -0,7) m
Massa	m_{ta}	4 kg
Momenti d'inerzia di massa	$\begin{bmatrix} C_{xx} & 0 & C_{xz} \\ 0 & C_{yy} & 0 \\ C_{xz} & 0 & C_{zz} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0546 & 0 & -0,0162 \\ 0 & 0,06 & 0 \\ -0,0162 & 0 & 0,0114 \end{bmatrix}$ kg·m ²
Ruota anteriore		
Raggio	R_{ra}	0,35 m
Massa	M_{ra}	3 kg
Momenti d'inerzia di massa	$(D_{xx}; D_{yy}; D_{zz})$	(0,14; 0,28; 0,14) kg·m ²

EQUAZIONI DI MOTO LINEARIZZATE

Le equazioni di moto per il sistema possono essere ottenute usando il principio di d'Alembert e bilanci lineari e angolari di momenti.

La massa totale e il corrispondente centro di massa rispetto all'origine O sono:

$$m_{tot} = m_{tp} + m_{rp} + m_{ta} + m_{ra}$$

$$\begin{cases} x_{tot} = \frac{m_{tp}x_{tp} + m_{ta}x_{ta} + Lm_{ra}}{m_{tot}} \\ z_{tot} = \frac{-m_{rp}R_{rp} + m_{tp}z_{tp} + m_{ta}z_{ta} - m_{ra}R_{ra}}{m_{tot}} \end{cases}$$

Calcoliamo anche i momenti di massa e i prodotti d'inerzia rispetto all'origine O lungo gli assi di riferimento:

$$T_{xx} = A_{xx} + B_{xx} + C_{xx} + D_{xx} + m_{rp}R_{rp}^2 + m_{tp}z_{tp}^2 + m_{ta}z_{ta}^2 + m_{ra}R_{ra}^2$$

$$T_{xz} = B_{xz} + C_{xz} - m_{tp} x_{tp} z_{tp} - m_{ta} x_{ta} z_{ta} + m_{ra} x_{ra} z_{ra}$$

$$T_{zz} = A_{zz} + B_{zz} + C_{zz} + D_{zz} + m_{tp} x_{tp}^2 + m_{ta} x_{ta}^2 + m_{ra} L^2$$

Ripetiamo le considerazioni precedenti per l'assieme frontale a, costituito dal telaio anteriore e dalla ruota anteriore. La massa dell'assieme ed il centro di massa di questo rispetto ad O sono:

$$m_a = m_{ta} + m_{ra}$$

$$\begin{cases} x_a = \frac{m_{ta} x_{ta} + L m_{ra}}{m_a} \\ z_a = \frac{m_{ta} z_{ta} - m_{ra} R_{ra}}{m_a} \end{cases}$$

I corrispettivi momenti d'inerzia ed i prodotti d'inerzia rispetto all'origine O lungo gli assi di riferimento sono:

$$F_{xx} = C_{xx} + D_{xx} + m_{ta} (z_{ta} - z_a)^2 + m_{ra} (R_{ra} + z_a)^2$$

$$F_{xz} = C_{xz} + m_{ta} (x_{ta} - x_a)(z_{ta} - z_a) + m_{ra} (L - x_a)(R_{ra} + z_a)$$

$$F_{zz} = C_{zz} + D_{zz} + m_{ta} (x_{ta} - x_a)^2 + m_{ra} (L - x_a)^2$$

Sia λ l'angolo dell'asse di sterzo (angolo compreso tra l'asse di sterzo e l'asse verticale). Possiamo calcolare la distanza u che indica di quanto il centro di massa dell'assieme anteriore è davanti rispetto all'asse di sterzo:

$$u = (x_a - L - t) \cos(\lambda) - z_a \sin(\lambda)$$

I momenti di massa e i prodotti d'inerzia lungo l'asse di sterzo e gli assi di riferimento si possono calcolare nel modo seguente:

$$F_{\lambda\lambda} = m_a u^2 + F_{xx} \sin^2(\lambda) + 2F_{xz} \sin(\lambda) \cos(\lambda) + F_{zz} \cos^2(\lambda)$$

$$F_{\lambda x} = -m_a u z_a + F_{xx} \sin(\lambda) + F_{xz} \cos(\lambda)$$

$$F_{\lambda z} = m_a u x_a + F_{xz} \sin(\lambda) + F_{zz} \cos(\lambda)$$

Si definisce inoltre il rapporto tra l'avancorsa e il passo della bicicletta:

$$f = \frac{t \cos(\lambda)}{L}$$

È quindi possibile calcolare, per la ruota posteriore e per quella anteriore, il momento angolare lungo l'asse y diviso per la velocità in avanti, assieme con la loro somma, nel modo seguente:

$$S_p = \frac{A_{yy}}{R_{rp}}$$

$$S_a = \frac{D_{yy}}{R_{ra}}$$

$$S_{tot} = S_p + S_a$$

Da ultimo è possibile definire un termine di momento statico di frequente utilizzo:

$$S_u = m_a u + f m_{tot} x_{tot}$$

Le equazioni di moto linearizzate per la bicicletta, espresse nei gradi di libertà $(\beta, \varphi)^T$, hanno la forma:

$$M \begin{pmatrix} \ddot{\beta} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} \beta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}$$

con M matrice di massa, C matrice di smorzamento, K matrice di rigidezza. T è la coppia applicata dal ciclista sul manubrio, positiva se concorde con φ . Per lo studio dell'autostabilità tale termine può essere posto pari a 0. L'altro termine forzante, che noi poniamo pari a zero, potrebbe essere utilizzato ad esempio per rappresentare l'effetto di forze laterali aerodinamiche.

Le matrici del sistema sono così composte:

$$M = \begin{bmatrix} T_{xx} & F_{\lambda x} + f T_{xz} \\ F_{\lambda x} + f T_{xz} & F_{\lambda \lambda} + 2f F_{\lambda z} + f^2 T_{zz} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & f S_{tot} + S_a \cos(\lambda) + \frac{T_{xz} \cos(\lambda)}{L} - f m_{tot} z_{tot} \\ -(f S_{tot} + S_a \cos(\lambda)) & \frac{F_{\lambda z} \cos(\lambda)}{L} + f \left(S_u + \frac{T_{zz} \cos(\lambda)}{L} \right) \end{bmatrix} \cdot V$$

$$K = K_0 + K_2 \cdot V^2 = \begin{bmatrix} g m_{tot} z_{tot} & -g S_u \\ -g S_u & -g S_u \sin(\lambda) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{(S_{tot} - m_{tot} z_{tot}) \cos(\lambda)}{L} \\ 0 & \frac{(S_u + S_a \sin(\lambda)) \cos(\lambda)}{L} \end{bmatrix} \cdot V^2$$

STABILITÀ DEL MOVIMENTO

La soluzione della equazione di moto vettoriale ottenuta è del tipo:

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \varphi_0 \end{pmatrix} e^{st}$$

Sostituendo la precedente nella equazione di partenza, in assenza di forzanti si ottiene:

$$[s^2 M] + s[C] + [K] \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \varphi_0 \end{pmatrix} = 0$$

Il sistema ammette soluzioni non banali se il determinante della matrice dei coefficienti è nullo, cioè se:

$$\Delta(s) = \det[s^2[M] + s[C] + [K]] = 0$$

Il determinante è riconducibile, per questo sistema a due gradi di libertà, ad un polinomio del quarto ordine in s del tipo:

$$\Delta(\lambda) = as^4 + bs^3 + cs^2 + ds + e = 0$$

Sostituendo i valori determinati nell'equazione caratteristica si ottengono le soluzioni.

I modi significativi di questa equazione linearizzata sono detti modo di “capsize” e modo di “weave”. Il moto di capsizing è un movimento non oscillatorio nel quale, quando è instabile, la bicicletta semplicemente cade lateralmente. Il moto di weave è un moto oscillatorio che fa sviare la bicicletta dalla direzione presa.

Il seguente grafico riporta il valore dei modi propri del sistema al variare della velocità:

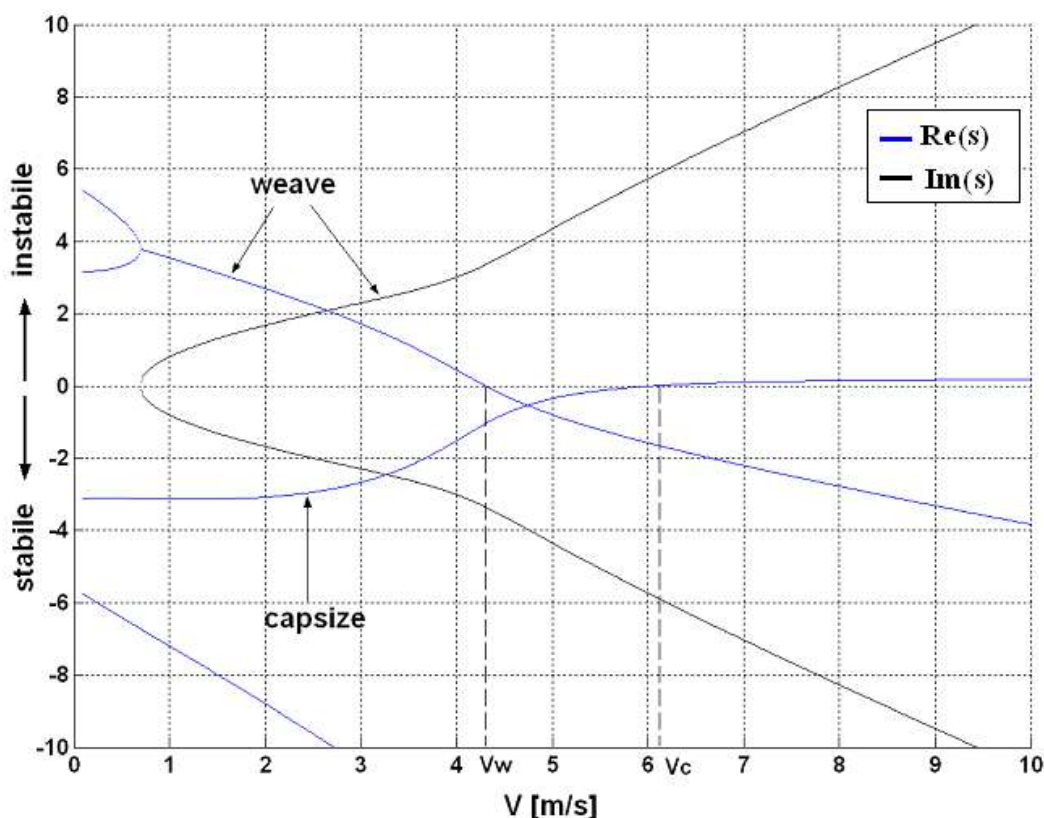


Figura 30. Collocazione degli autovalori delle equazioni di moto linearizzate al variare della velocità

A basse velocità ci sono due autovalori positivi e due negativi, che corrispondono al movimento della bicicletta approssimato nei capitoli precedenti con quello di un

pendolo invertito; da un certo valore di velocità in poi, due autovalori reali diventano complessi coniugati: questo è il punto in cui emerge il moto di weave. Dapprima questo modo è instabile, ma a partire da V_w gli autovalori attraversano l'asse reale e il moto di weave diviene definitivamente stabile (asintoticamente). Oltre la soglia V_w , peraltro, la frequenza del movimento di weave ha un andamento affine rispetto al crescere della velocità.

Allo stesso tempo il modo di capsize, che era stabile a basse velocità, passa nel semipiano sinistro a V_c e diventa lievemente instabile, ma risulta facilmente stabilizzabile con il controllo manuale. Procedendo ancora oltre in velocità, l'autovalore di capsize si sposta ancora più in prossimità dello zero.

Quindi concludiamo che la bicicletta ha un comportamento asintoticamente stabile (autostabilizzante, in quanto stiamo considerando assente la forzante T) se $V_w < V < V_c$; pertanto c'è un limite superiore di velocità per l'autostabilità, che d'altra parte da un punto di vista pratico è poco influente perché l'instabilità è solo lieve.

CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE

La trattazione svolta ha inteso da un lato sviluppare tematiche inerenti la minore o maggiore rispondenza di determinati modelli fisici per la bicicletta proposti in letteratura con le prove sperimentali realizzate sui veicoli, dall'altro applicare a queste modellizzazioni delle considerazioni di tipo controllistico.

Una delle maggiori semplificazioni adottate nel testo, quella di assumere il ciclista rigido, può essere ad esempio limitativa nella comprensione delle possibilità di stabilizzazione del veicolo da fermo, ed è un esempio rappresentativo dei limiti di tutte le modellizzazioni proposte. Inoltre l'analisi è stata limitata al funzionamento a velocità costante.

Anche la rappresentazione del comportamento del ciclista con un guadagno è naturalmente molto semplificativa. Sotto tale profilo, l'importanza della modellazione del comportamento di controllo del ciclista è stata discussa ampiamente da Weir e Zellner.

I due autori, riferendosi al più generale problema di controllo di traiettoria, spiegano che il ciclista usa una gerarchia di comportamenti nell'esercitare l'attività di governo del veicolo:

- *compensatory*: il ciclista opera in base all'errore percepito tra la risposta della bicicletta e la corrispondente risposta desiderata o l'intensità dell'azione esercitata;
- *pursuit*: il ciclista si avvantaggia di una conoscenza degli ingressi del sistema per strutturare una azione in feedforward che migliora le prestazioni;
- *precognitive*: il ciclista esegue manovre che gli sono già note in anello aperto.

Le operazioni pursuit e precognitive sono correlate principalmente a manovre apprese, ad esempio il cambio di corsia, e possono fare da guida in operazioni in anello chiuso. Il controllo di tipo compensatory è invece predominante in compiti di regolazione attorno ad un percorso nominale con ingressi esterni di tipo random, quali ad esempio le irregolarità del suolo. Il controllo compensatory funziona parallelamente agli altri due per garantire al sistema buone prestazioni dinamiche. Per queste ragioni nell'investigazione delle caratteristiche di manovrabilità rivestono un ruolo centrale il multiple feedback e le operazioni in anello chiuso di tipo compensatory.

Tutto ciò dimostra come anche l'analisi di sistemi apparentemente semplici come una bicicletta coinvolga una serie di problematiche inerenti la completezza e la robustezza dei modelli e anche quanto una adeguata descrizione delle caratteristiche del controllo manuale possa articolarsi in strutture specifiche e spesso molto complesse.

BIBLIOGRAFIA

- ÅSTRÖM, K. J. 2000. Limitations on control system performance. *European Journal of Control*, Vol. 6, N. 1, pp. 2-20.
- BLOCH, A. M. 2003. *Nonholonomic Mechanics and Control*. Springer, Interdisciplinary Applied Mathematics, Vol. 24. ISBN 0-387-95535-6.
- BOLZERN, P., SCATTOLINI, R., SCHIAVONI, N. 1998. *Fondamenti di controlli automatici*. McGraw-Hill, Collana di istruzione scientifica. ISBN 88-386-0747-8.
- BURNS, R. S. 2001. *Advanced control engineering*. Butterworth-Heinemann. ISBN 0-7506-5100-8.
- COSSALTER, V. 1997. *Cinematica e dinamica della motocicletta*. Edizioni Progetto Padova. ISBN 88-87331-03-0.
- DIANA, G., CHELI, F. 1993. *Dinamica e vibrazioni dei sistemi meccanici*. 2 voll. Utet. ISBN 88-7750-229-0.
- DIANA, G., FOSSATI, F., RESTA, F. 1998. *Elementi di controllo di sistemi meccanici*. Edizioni Spiegel. ISBN 88-7660-099-X.
- FAJANS, J. 2000. Steering in bicycles and motorcycles. *American Journal of Physics*, Vol. 68, pp. 654-656.
- FREUDENBERG, J. S., LOOZE, D. P. 1985. Right Half Plane Poles and Design Tradeoffs in Feedback Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-30, pp.555-565.
- GENTA, G. 2000. *Meccanica dell'autoveicolo*. Libreria editrice universitaria Levrotto&Bella – Torino. ISBN 88-8218-042-5.
- HAND, R. S. May 1988. *Comparisons and Stability Analysis of Linearized Equations of Motion for a Basic Bicycle model*. MSc Thesis, Cornell University.
- JONES, D. E. H. 1970. The stability of the bicycle. *Physics Today*, Vol. 23(4), pp. 34-40.
- KLEIN, R. E. 1989. Using bicycles to teach system dynamics. *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 9, N. 3, pp. 4-9.
- KLEIN, R. E. 1991. The Bicycle Project Approach – A Vehicle to Relevancy and Motivation. *Proceedings of the IEEE Frontiers in Education Conference*.
- KLEIN, R. E. 1990. Teaching Linear Systems Theory using Cramer's Rule. *IEEE Transactions on Education*, Vol. 33, N. 3, pp.258-267.
- LAI, H. C., LIU, J. S., LEE, D. T., WANG, S. H. 2003. Design parameters study on the stability and perception of riding comfort of the electrical motorcycles under rider control. *Mechatronics*, Vol. 13, pp. 49-76.
- MARTINET, P., THIBAUD, C. 2000. Automatic Guided Vehicles: Robust Controller Design in Image Space. *Autonomous Robots*, 8, pp. 25-42.
- MOKHIAMAR, O., ABE, M. 2002. Effects of model response on model following type of combined lateral forces and yaw moment control performance for active vehicle handling safety. *Elsevier, JSAE Review*, Vol. 23, pp. 473-480.

- SCHWAB, A. L., MEIJAARD, J. P., PAPADOPOULOS, J. M. 2004. Benchmark results on the linearized equations of motion of an uncontrollable bicycle. *Proceedings of the Second Asian Conference on Multibody Dynamics 2004 (ACMD '04)*, August 1-4 2004, Seoul, Korea.
- SOMMERFIELD, A. 1952. *Lectures on theoretical physics*, vol. 1. Academic Press.
- STEFANINI, L., BERRA, A. 2001. Ambiguità della bicicletta. *Giornale di Fisica*, Vol. XLII, N. 1.
- SURYANARAYANAN, S., TOMIZUKA, M., WEAVER, M. 2002 System dynamics and control of bicycles at high speeds. *Proceedings of ACC02-ASME1123*.
- TIMOSHENKO, S., YOUNG, D. H. 1948. *Advanced Dynamics*. McGraw-Hill Book Company.
- TIMOSHENKO, S., YOUNG, D. H. 1956. *Engineering Mechanics (IV ed.)*. International Student Edition.
- WEIR, D. H., ZELLNER, J. W. 1978. Lateral-Directional Motorcycle Dynamics and Rider Control. Paper 780304, *Transactions of the Society of Automotive Engineering*, Section 2.
- WONG, J. Y. 1993. *Theory of ground vehicles (II ed.)*. John Wiley & Sons. ISBN 0-471-52496-4.
- YAVIN, Y. 1997. Navigation and control of the motion of a riderless bicycle by using a simplified dynamic model. *Mathematical Computer Modelling*, Vol. 25, pp. 67-74.
- YOKOMORI, M., OYA, T., KATAYAMA, A. 2000. Rider control behaviour to maintain stable upright position at low speed. *JSAE Review*, Vol. 21, pp.61-65.