



## ***Mathesis – Firenze***

Sezione di FIRENZE  
28 gennaio 2009

# **MODELLI MATEMATICI PER LA DINAMICA DELLA BICICLETTA**

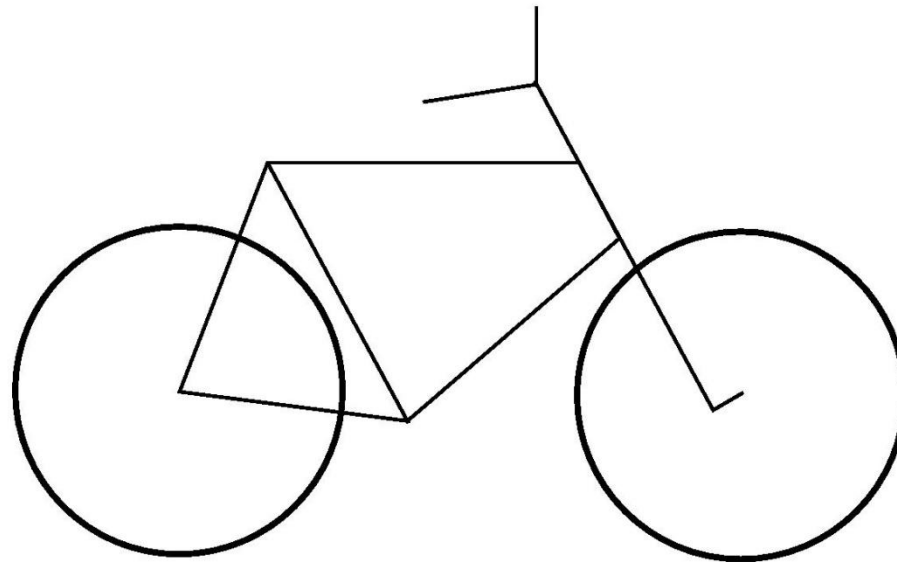
***Giovanni Frosali***  
*Dipartimento di Matematica Applicata “G. Sansone”*  
[giovanni.frosali@unifi.it](mailto:giovanni.frosali@unifi.it)

# “Facile come andare in bicicletta”

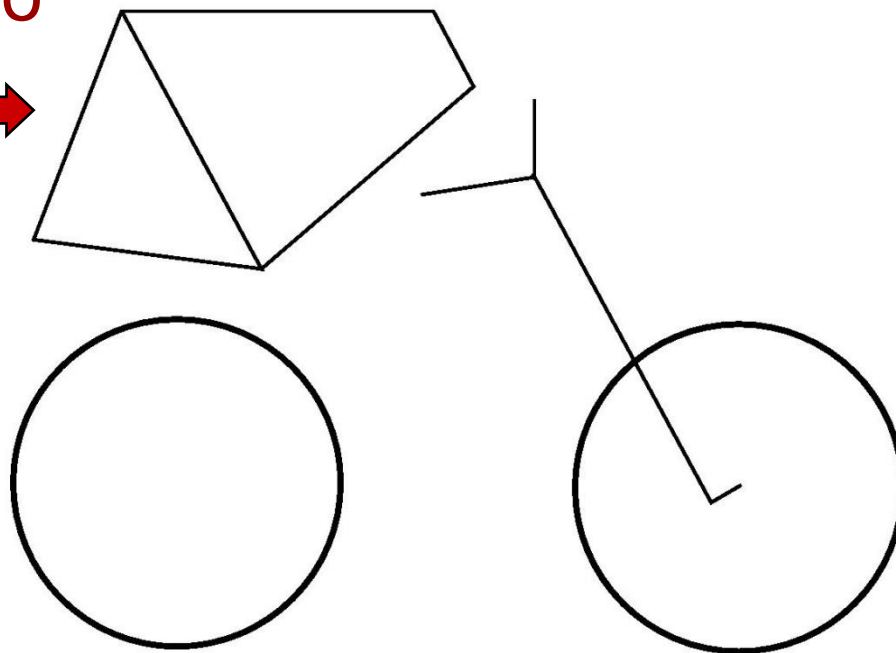
La bicicletta è caratterizzata da un interessante comportamento dinamico.

- ⇒ La bicicletta è staticamente instabile come un “pendolo inverso”, ma stabile quando è in movimento.
- ⇒ La bicicletta quando si piega da una parte, curva da quella parte anziché cadere.
- ⇒ Il controllo e la guida della bicicletta dipendono dalle forze fra ruote e terreno. Forze longitudinali sono legate ad accelerazioni e decelerazioni, forze trasversali influiscono sul bilanciamento e sul curvare.

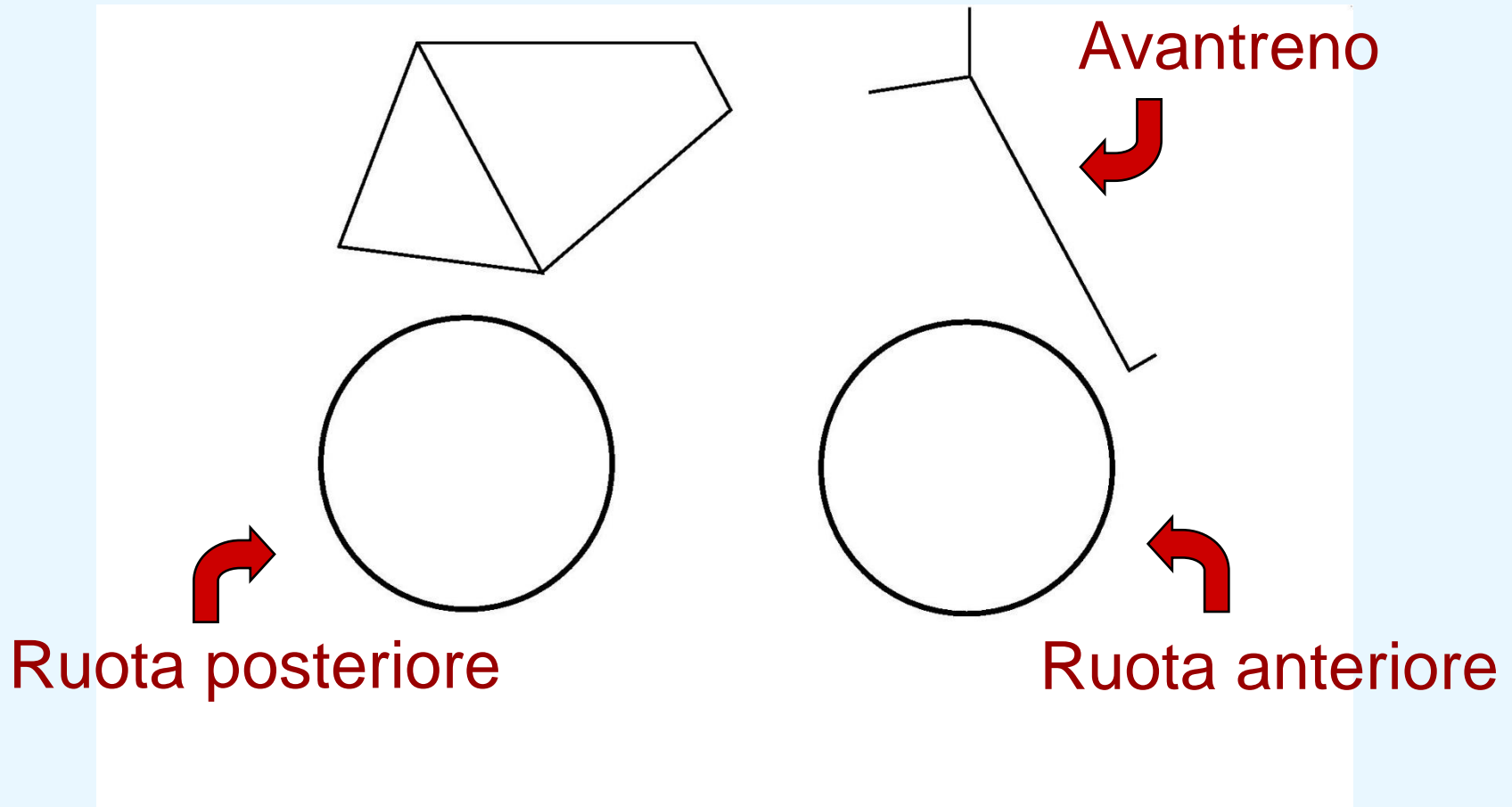
# Modello di una bicicletta composta da



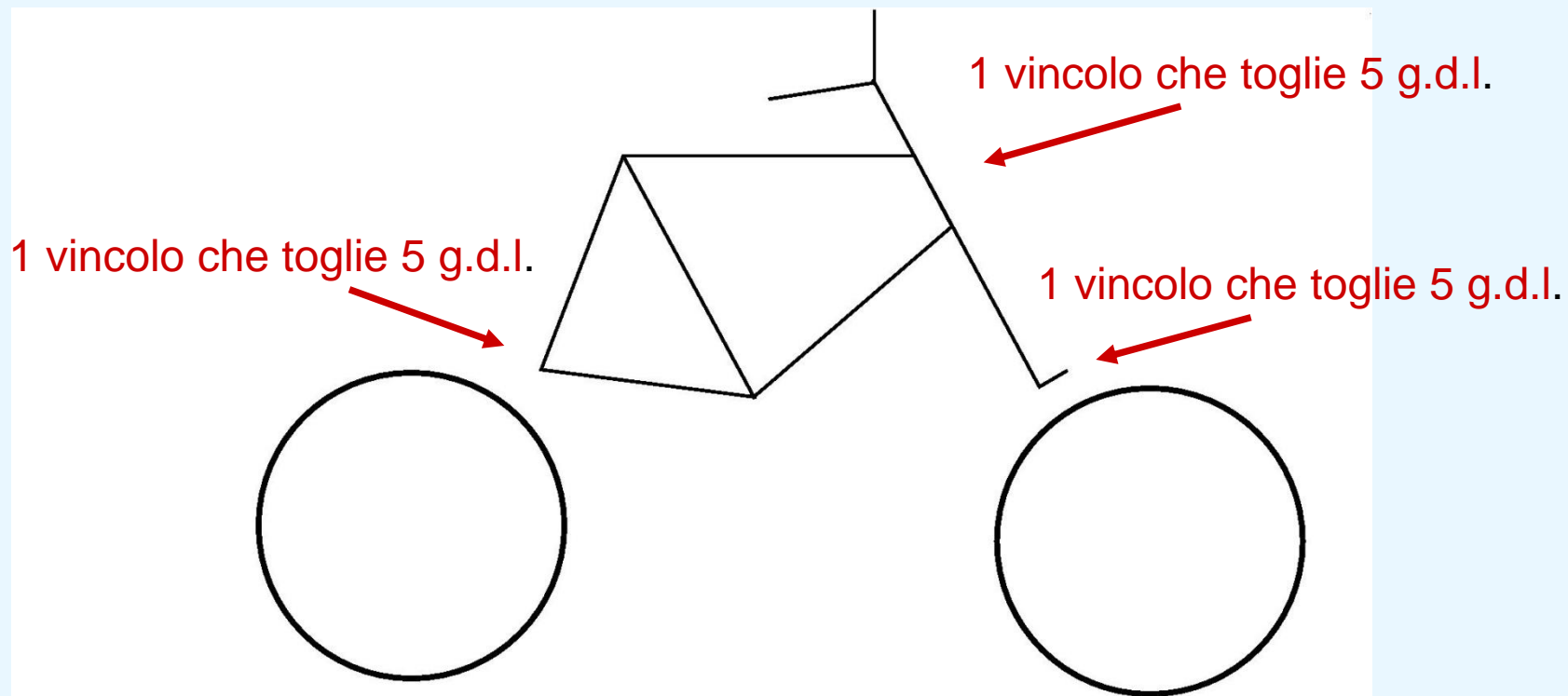
Retroreno



4 corpi rigidi nello spazio  
 $6 \text{ g.d.l. per } 4 = 24 \text{ g.d.l.}$

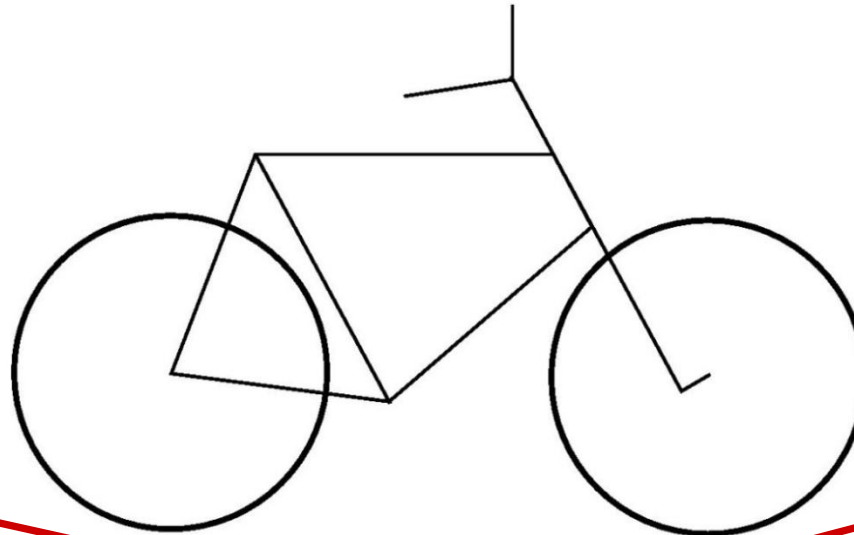


## Avantreno vincolato a ruotare intorno ad un asse solidale al retrotreno-avantreno



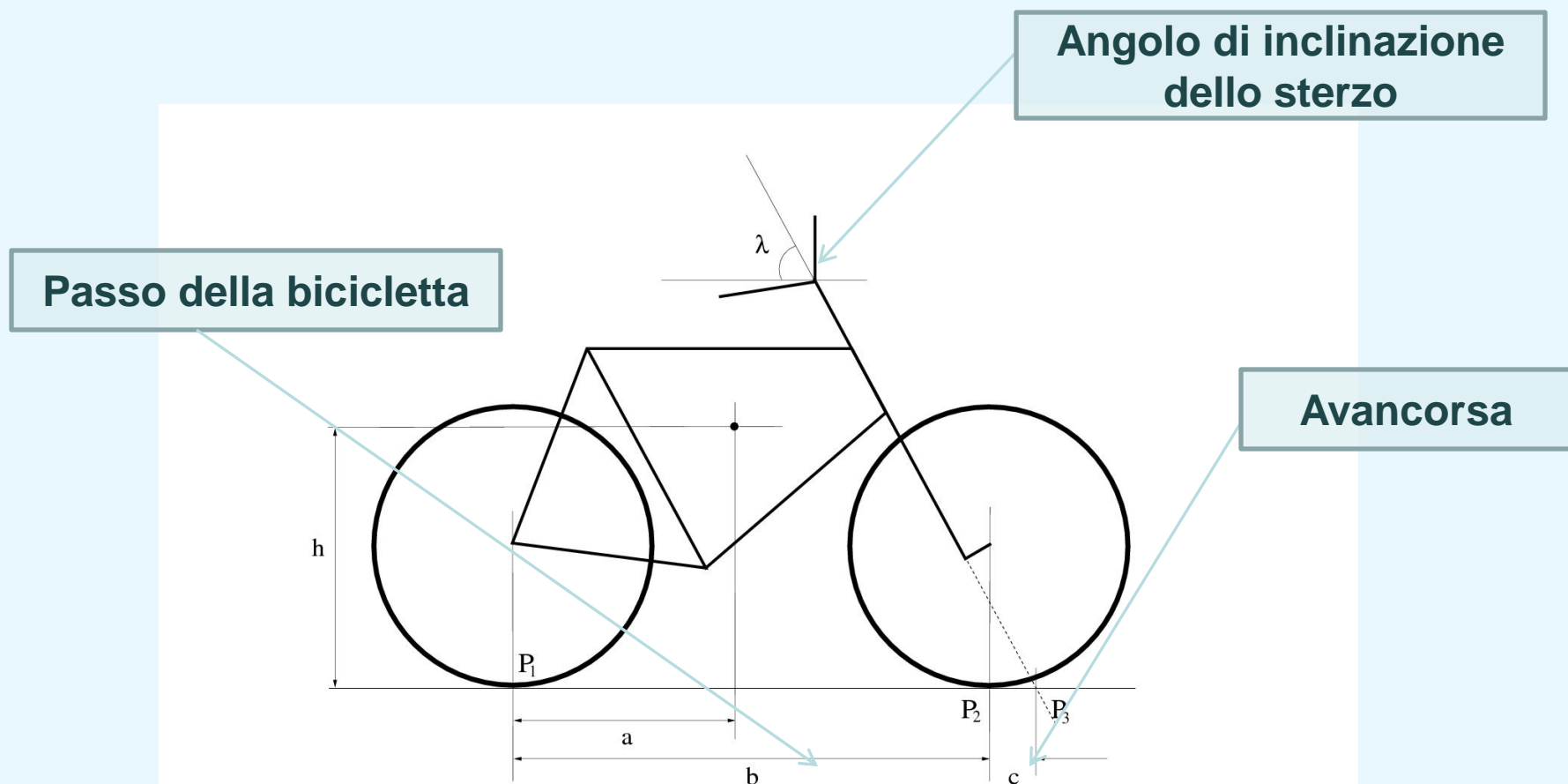
$$24 \text{ g.d.l.} - \text{tre vincoli per } 5 \text{ g.d.l.} = 9 \text{ g.d.l.}$$

I 2 vincoli delle ruote sul terreno tolgono ciascuno 3 g.d.l.



$$9 \text{ g.d.l.} - 2 \text{ ruote per } 3 = 3 \text{ g.d.l.}$$

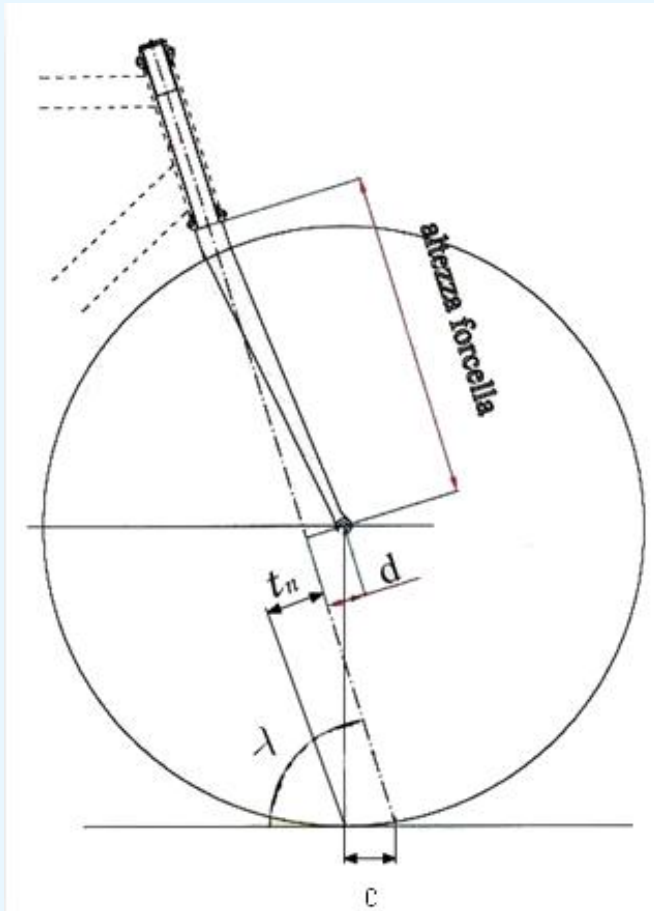
# La geometria della bicicletta





## Avancorsa e angolo di testa.

L'influenza dinamica dell'avantreno è dovuta ai seguenti elementi:



### L'angolo di testa $\lambda$

è l'angolo sotteso fra il piano del moto e l'asse dello sterzo

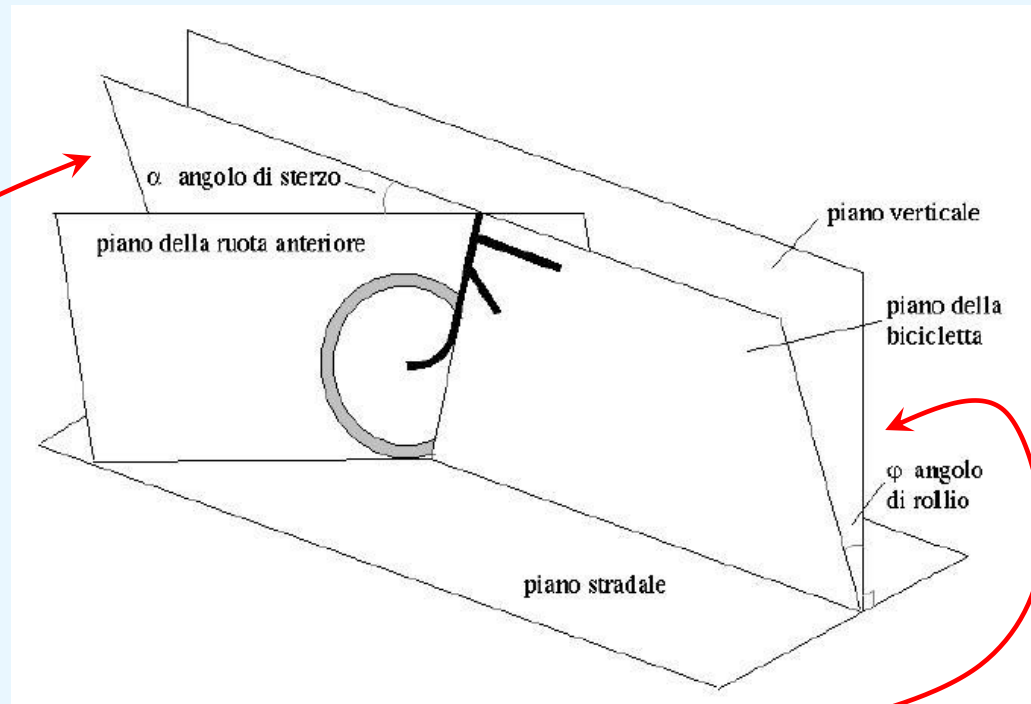
### L'avancorsa $c$

è la distanza fra il punto di contatto della ruota anteriore e l'intersezione dell'asse dello sterzo

### L'offset $d$

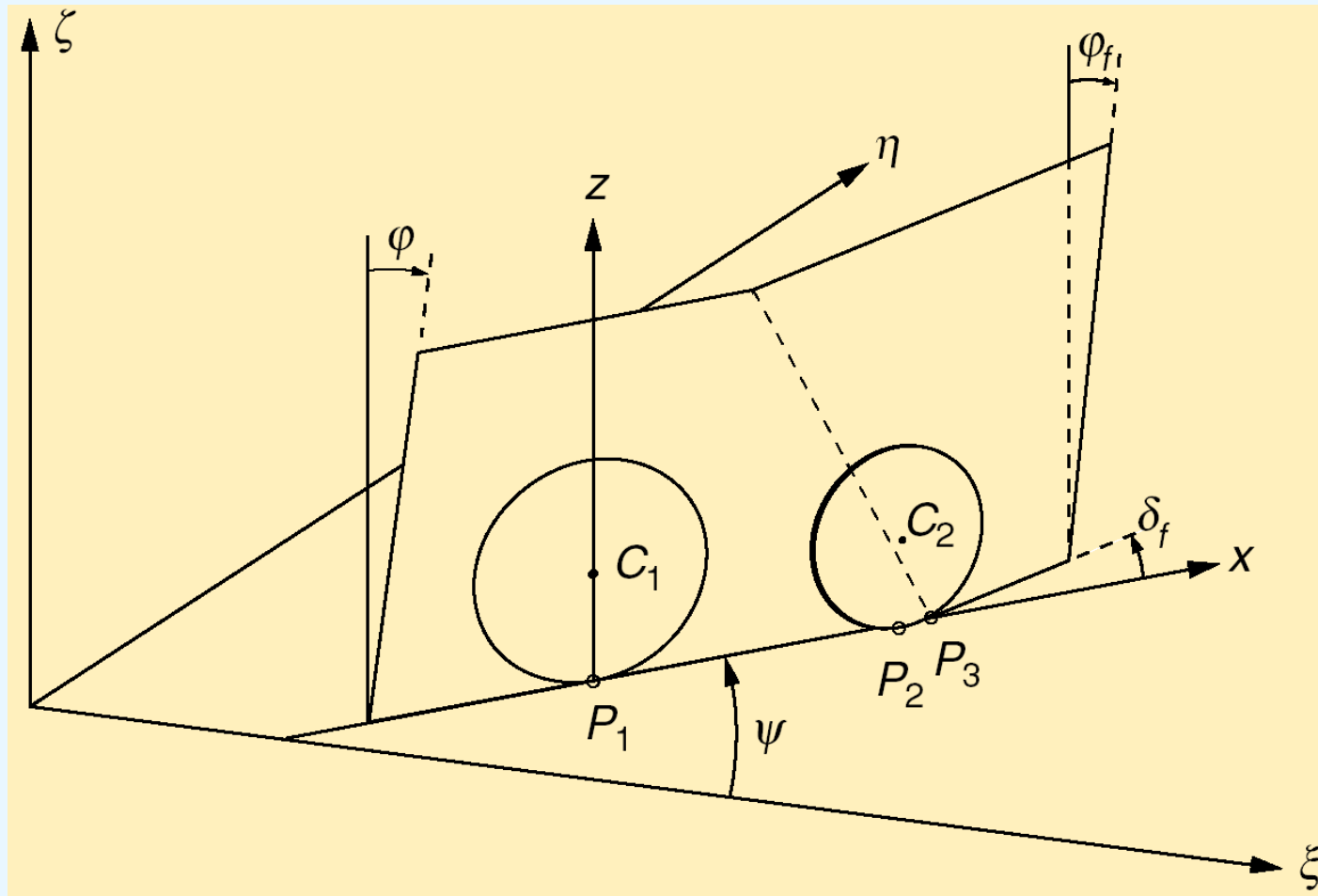
è la distanza fra il mozzo della ruota anteriore e l'asse dello sterzo

## Angolo di sterzata e angolo di rollio.



Si definisce **angolo di rollio** l'angolo formato dal piano della bicicletta e il piano verticale  
e l'**angolo di sterzo** quello formato dal piano della ruota anteriore sterzante e il piano della bicicletta.

# I sistemi di riferimento



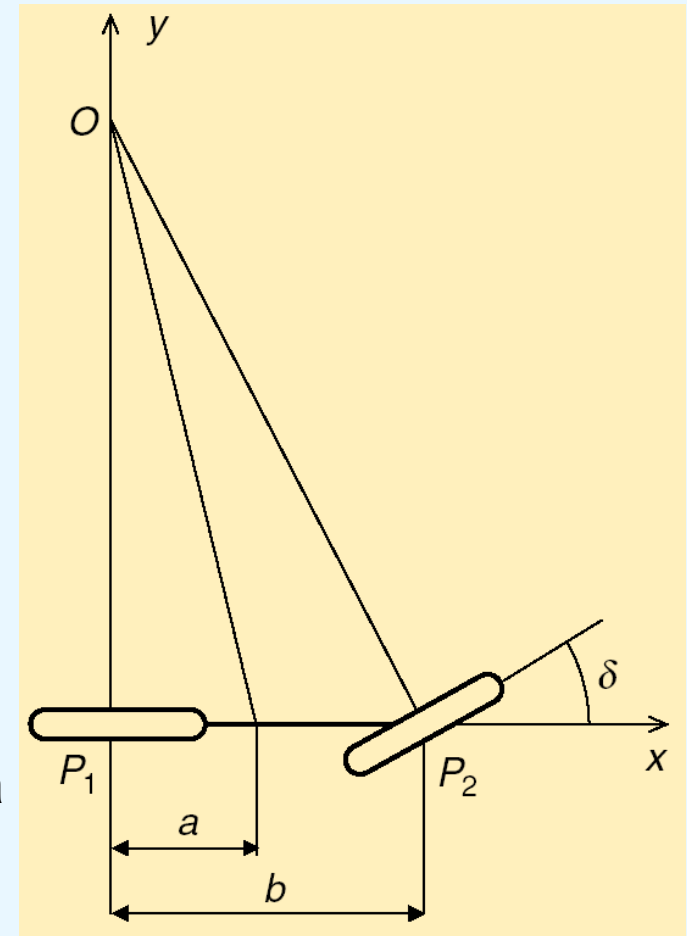
## Un primo modello semplice di bicicletta

Si consideri una bicicletta con avancorsa nulla, che mantenga le ruote sempre verticali, con velocità  $V$  (costante) in avanti.

Nella figura,  $O$  è il centro di istantanea rotazione, la velocità angolare è (linearizzando)

$$\omega = \frac{V}{r} \sim \frac{V \delta}{b}$$

Sia  $I_{xx}$  il momento d'inerzia della bicicletta rispetto all'asse  $x$ ,  
sia  $I_{xz}$  il momento d'inerzia centrifugo rispetto alla coppia di piani  $x=0$ , e  $z=0$ .



Il momento della quantità di moto è

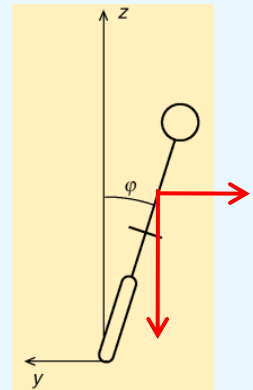
Componente  
secondo l'asse x

$$\underline{K}(O) = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = (I_{xx}\dot{\varphi} + I_{xz}\omega) \vec{i} + (I_{xz}\dot{\varphi} + I_{zz}\omega) \vec{k}.$$

Le forze agenti sul sistema sono la gravità e la forza centrifuga. Il momento a cui è sottoposta la bicicletta è dato da

$$mgh \sin \varphi \vec{i} \sim mgh \varphi \vec{i}$$

Momento del peso



$$m\omega^2 r h \cos \varphi \vec{i} = m \frac{V^2 \delta^2}{b^2} \frac{b}{\delta} h \cos \varphi \vec{i} \sim \frac{mV^2 h}{b} \delta \vec{i}$$

Momento della  
forza centrifuga

L'equazione di moto

$$I_{xx} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} - mgh\varphi = I_{xz} \frac{V}{b} \frac{d\delta}{dt} + \frac{mV^2 h}{b} \delta$$

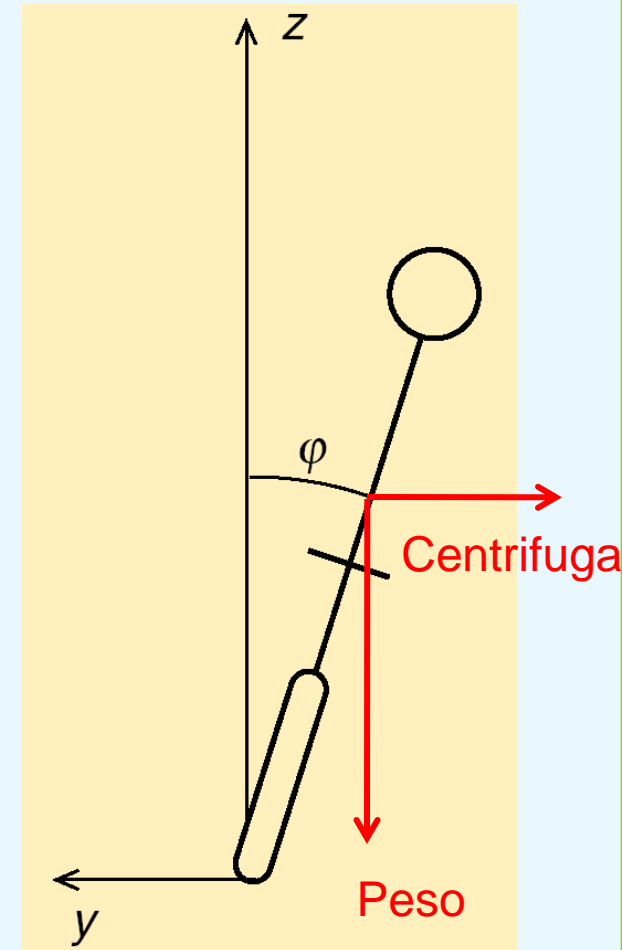
dove si è fatto uso di  $\omega \sim \frac{V \delta}{b}$ .

Approssimando

$$I_{xx} \sim m h^2$$

$$I_{xz} \sim m a h$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} - \frac{g}{h} \varphi = \frac{aV}{bh} \frac{d\delta}{dt} + \frac{V^2}{bh} \delta$$



Questo semplice modello è retto da una equazione differenziale del secondo ordine (a coefficienti costanti), col termine noto che dipende da  $\delta$  e dalla derivata di  $\delta$

L'equazione di moto ottenuta è **INSTABILE**.

QUESTO MODELLO non spiega come sia possibile andare in bicicletta senza mani.

Il parametro  $\delta$  può essere considerato come un CONTROLLO

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{g}{h} \varphi = \frac{aV}{bh} \frac{d\delta}{dt} + \frac{V^2}{bh} \delta$$

L'equazione si stabilizza tramite un controllo, con l'introduzione della seguente legge di feedback

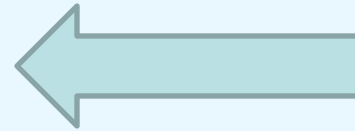
$$\delta = -k_2\varphi$$

Ricordiamo:  $\delta$  è l'angolo di sterzo

$\varphi$  è l'angolo di ROLLIO (quanto si inclina la bicicletta)

Questa equazione col controllo è **STABILE**, se

$$k_2 > \frac{bg}{V^2}$$



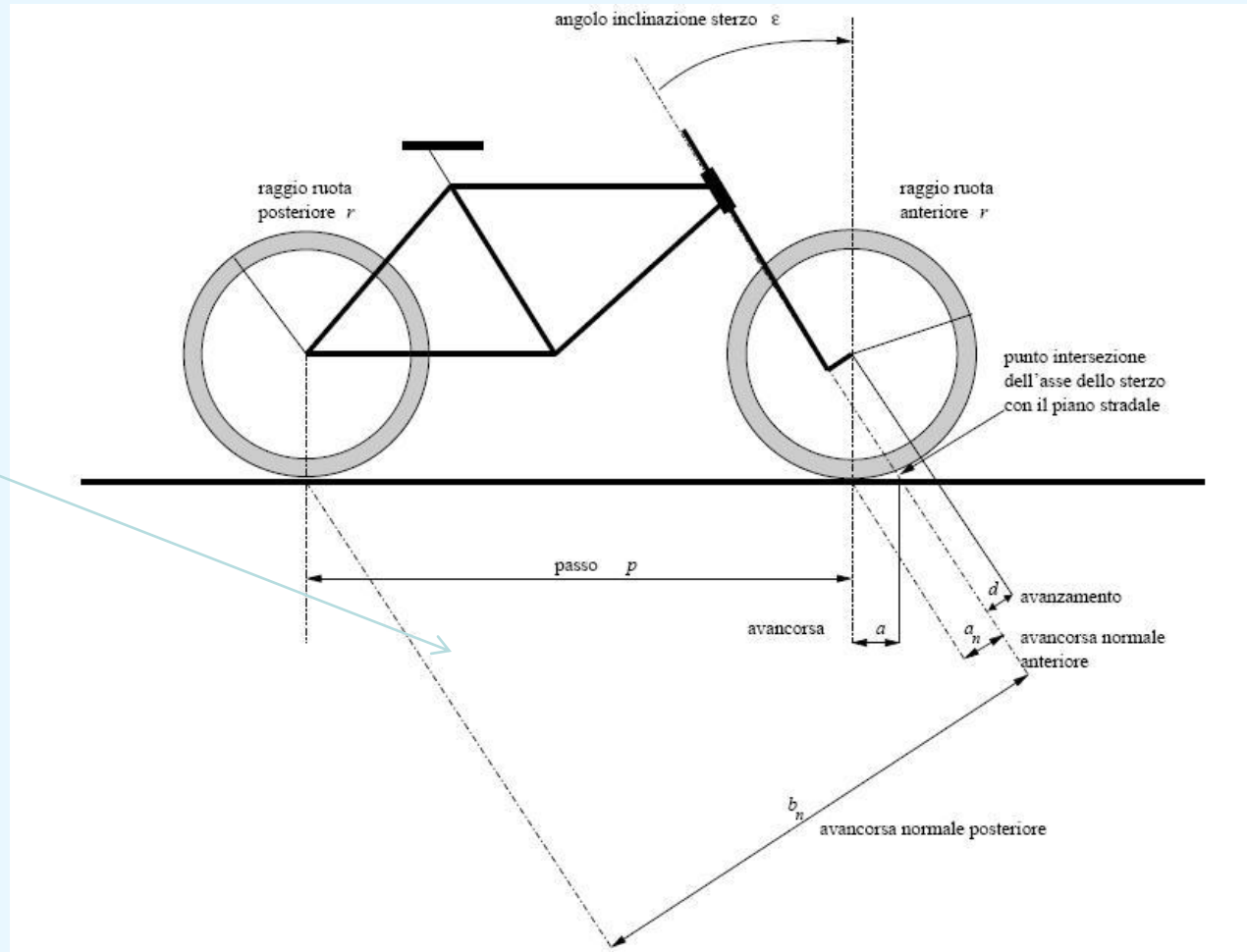
**se  $V$  è sufficiente grande** (se si va veloce, occorre un angolo di sterzo (controllo) minore) .

Dobbiamo tenere conto dell'AVANCORSA

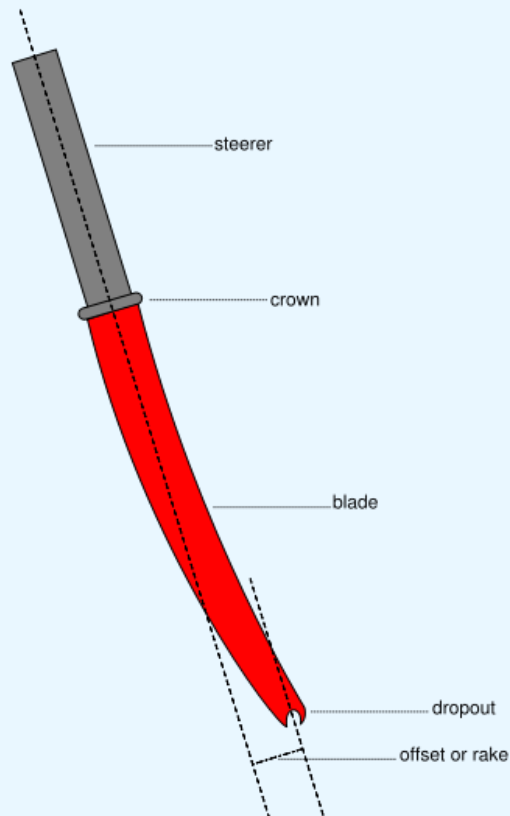
➤ *Effetto stabilizzante dell'AVANCORSA*

- **Effetto raddrizzante**
- **Effetto imbardante**





Il design della forcella ha una importanza notevole sulla dinamica della bicicletta



Il semplice modello precedente non considera questo effetto, perché l'avancorsa è nulla e l'angolo di testa è  $90^\circ$ .

## Importanza dell'avancorsa

Moto con  
avancorsa  
molto lunga







Il suo successo si ebbe nel dopo guerra negli USA, si ricordi il suo apparire nel film “Easy rider” del 1969.

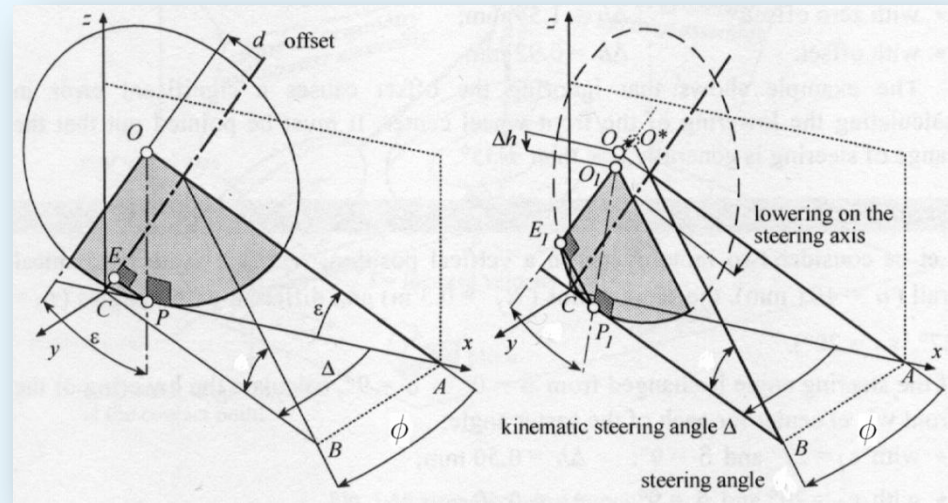
Una moto famosa per essere stata modificata in modo da avere sia una lunga avancorsa che un passo molto lungo, è nota col nome di “chopper”. Il termine e' usato per moto molto basse, vicine al terreno, con una forcella estesa.



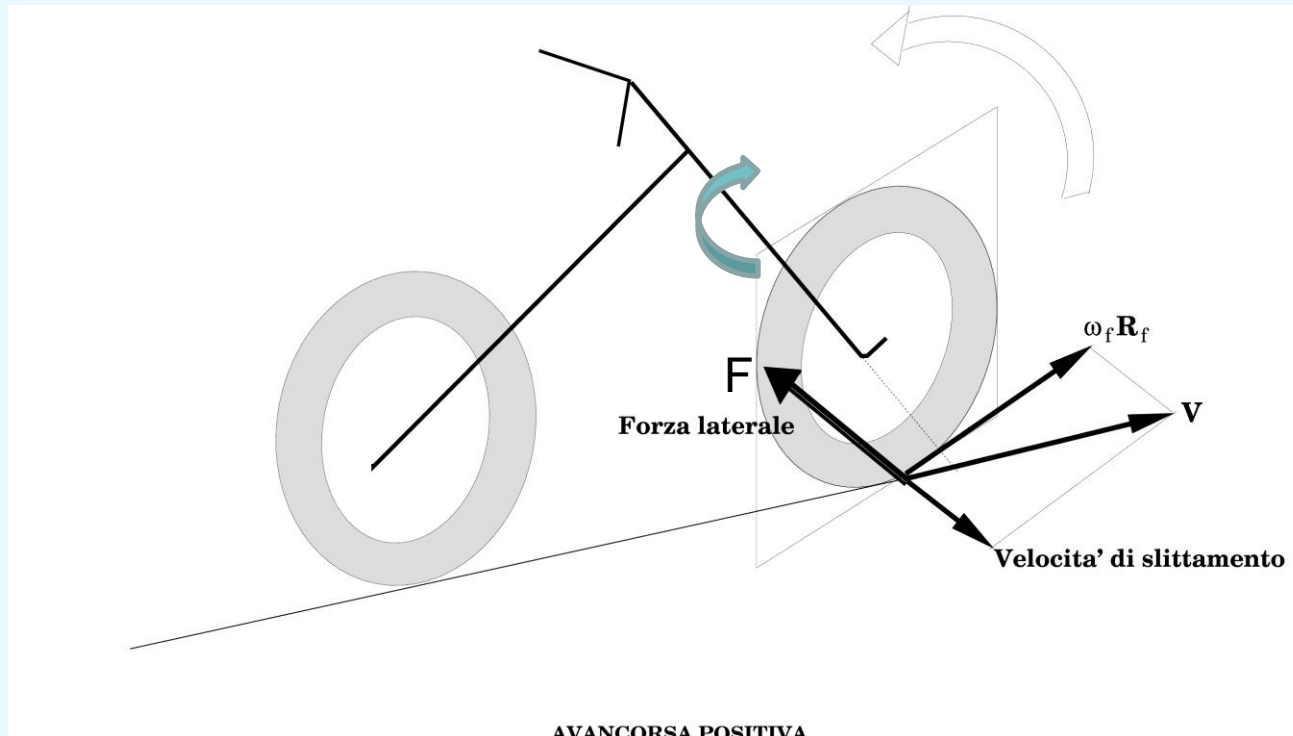
**L'avancorsa normale** è la componente dell'avancorsa normale all'asse dello sterzo.

**Importanza dell'avancorsa normale:**

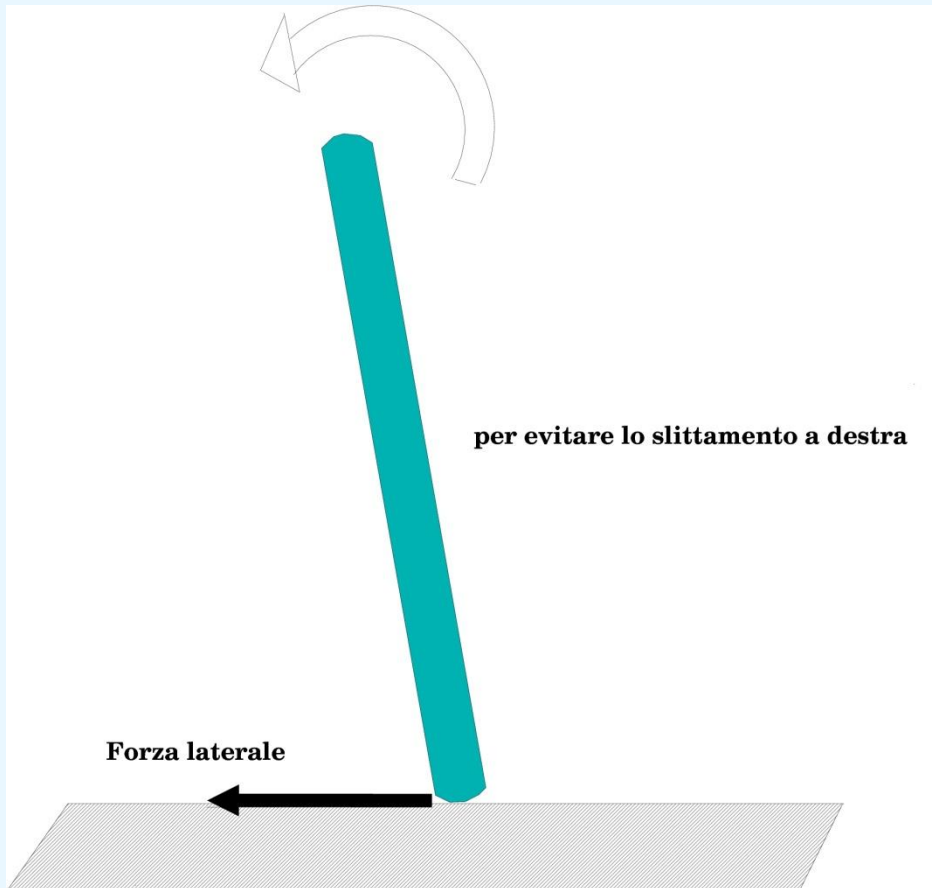
**L'avancorsa normale** è il braccio vettore di tutti momenti che si creano sullo sterzo, causati da forze applicate **nel punto di contatto della ruota anteriore**.



## AVANCORSA: Effetto raddrizzante.



Immaginiamo di procedere in moto rettilineo con velocità  $V$ . In seguito ad una **perturbazione** che provoca la rotazione dello sterzo verso sinistra, la velocità si scompone in una componente di rotolamento ed una componente che tende a far slittare verso destra. La forza laterale dovuta all'attrito  $F$  genera un momento (in senso orario) che tende a raddrizzare la ruota sterzante.



La bicicletta si è inclinata verso sinistra, l'attrito interviene ad evitare lo slittamento verso destra.

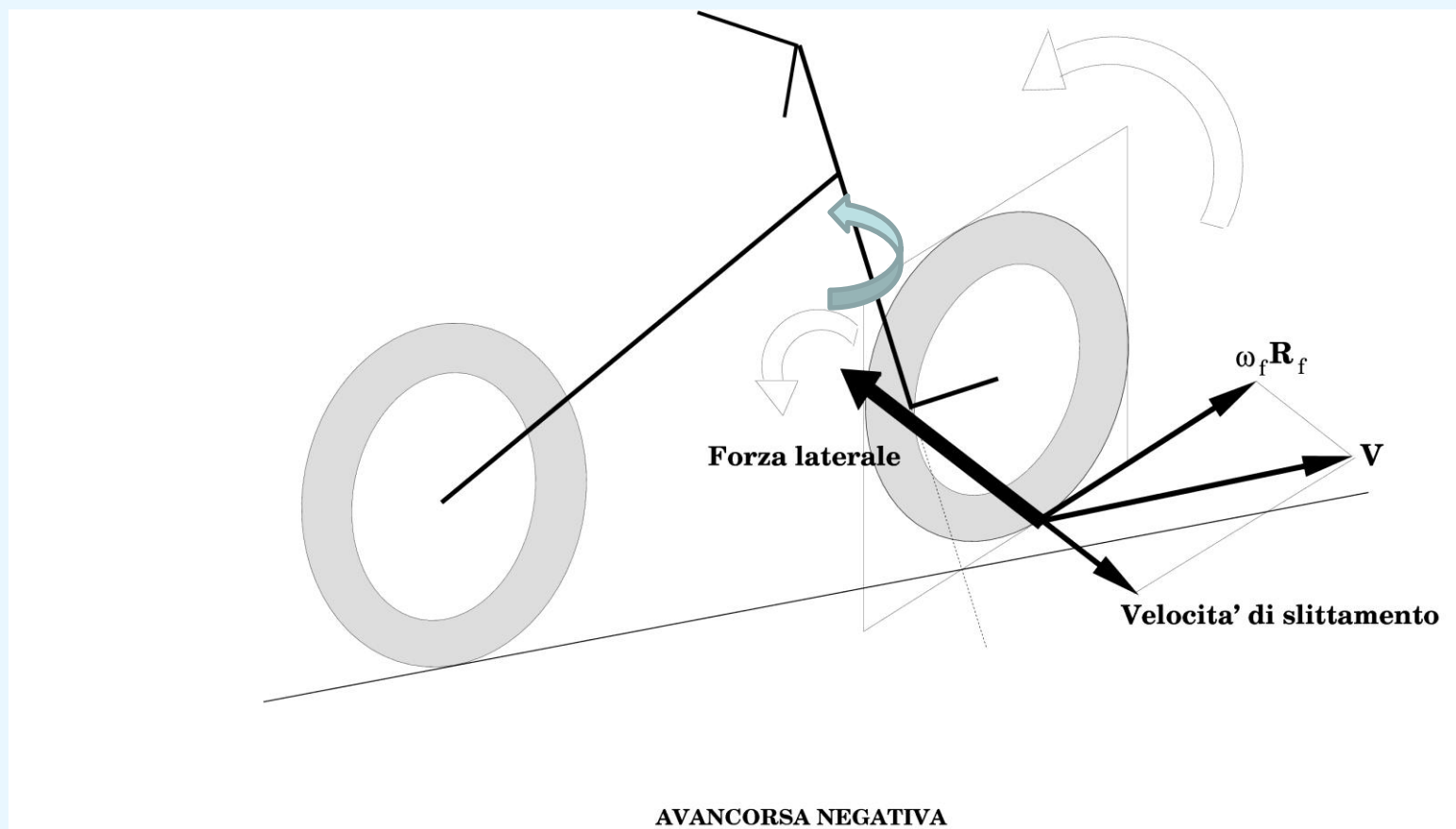
La forza laterale che nasce per l'attrito è quella che genera un momento a causa del braccio dovuto all'avancorsa.

Se l'avancorsa è **positiva**, allora il momento è **raddrizzante**.

Se l'avancorsa è **negativa**, allora il momento è **non è raddrizzante**.

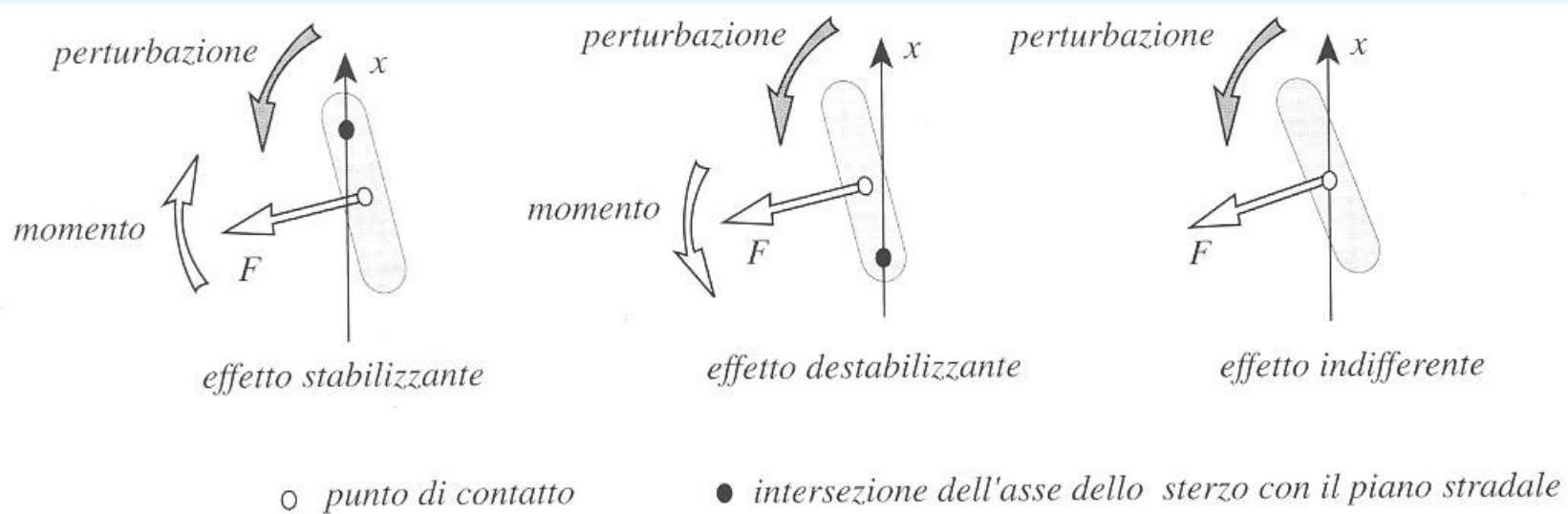


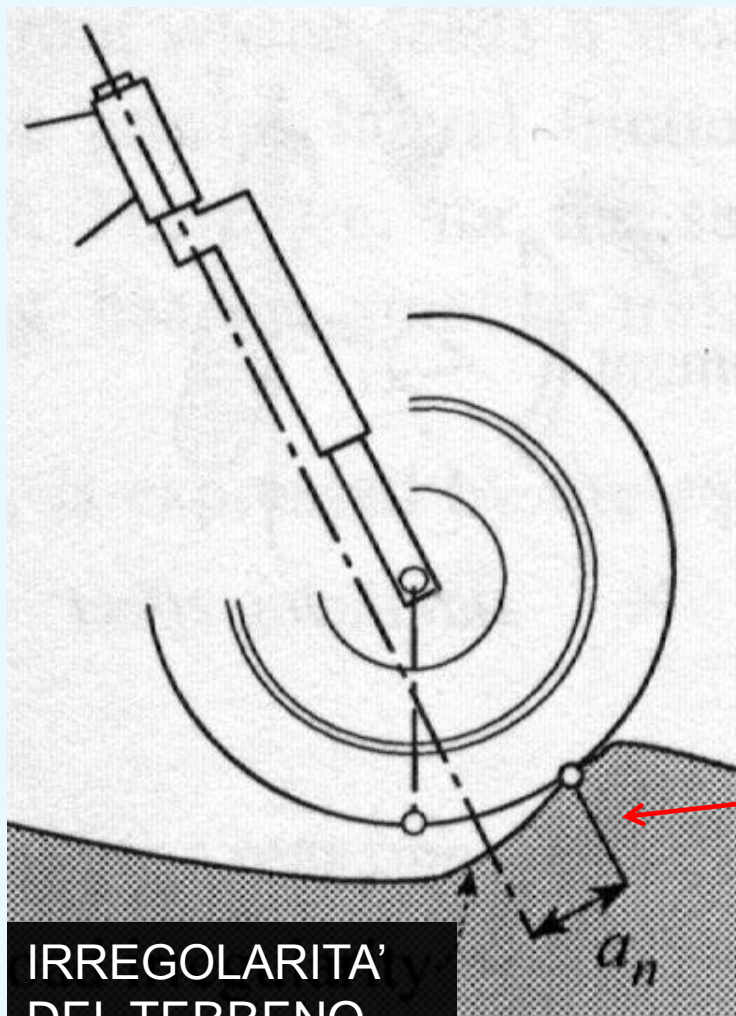
## Effetto (non) stabilizzante dell'avancorsa (negativa).





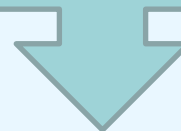
## ricapitolando:





IRREGOLARITA'  
DEL TERRENO

Perché nell'urto con una buca  
del terreno si perde l'effetto  
stabilizzante dell'avancorsa?



L'effetto stabilizzante dell'avancorsa viene annullato quando la ruota, a causa di una irregolarità, urta in un punto anteriore all'usuale punto di contatto ruota-terreno.

## AVANCORSA: Effetto imbardante.

L'**avancorsa** genera anche un effetto che è opposto a quello descritto sopra (stabilizzante).

Vogliamo vedere come l'inserimento in curva è facilitato dalla presenza dell'avancorsa.

Supponiamo che per ruotare verso destra, invece di girare lo sterzo, si sposti il proprio **peso verso destra** in modo da fare inclinare la bicicletta verso destra.



Esaminiamo le forze di reazione fra terreno ed avantreno della bicicletta.

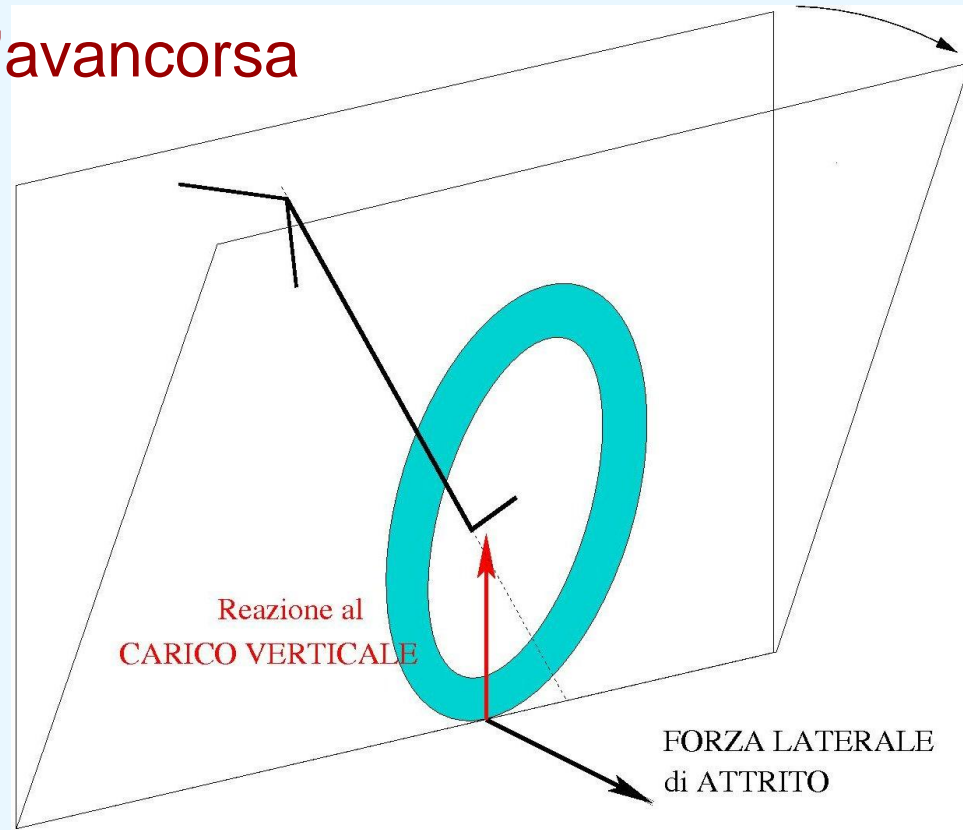
Nel punto di contatto della ruota anteriore agiranno due forze di reazione:

## Effetto imbardante dell'avancorsa

Si consideri una bicicletta che si muove con velocità  $V$  in una certa direzione.

Si sposti il peso del corpo **verso destra**, di conseguenza LA BICICLETTA si **INCLINA verso destra**.

Analizziamo le forze di **REAZIONE** che nascono nel contatto



**RUOTA-TERRENO** (che in questa analisi supporremo puntiforme):

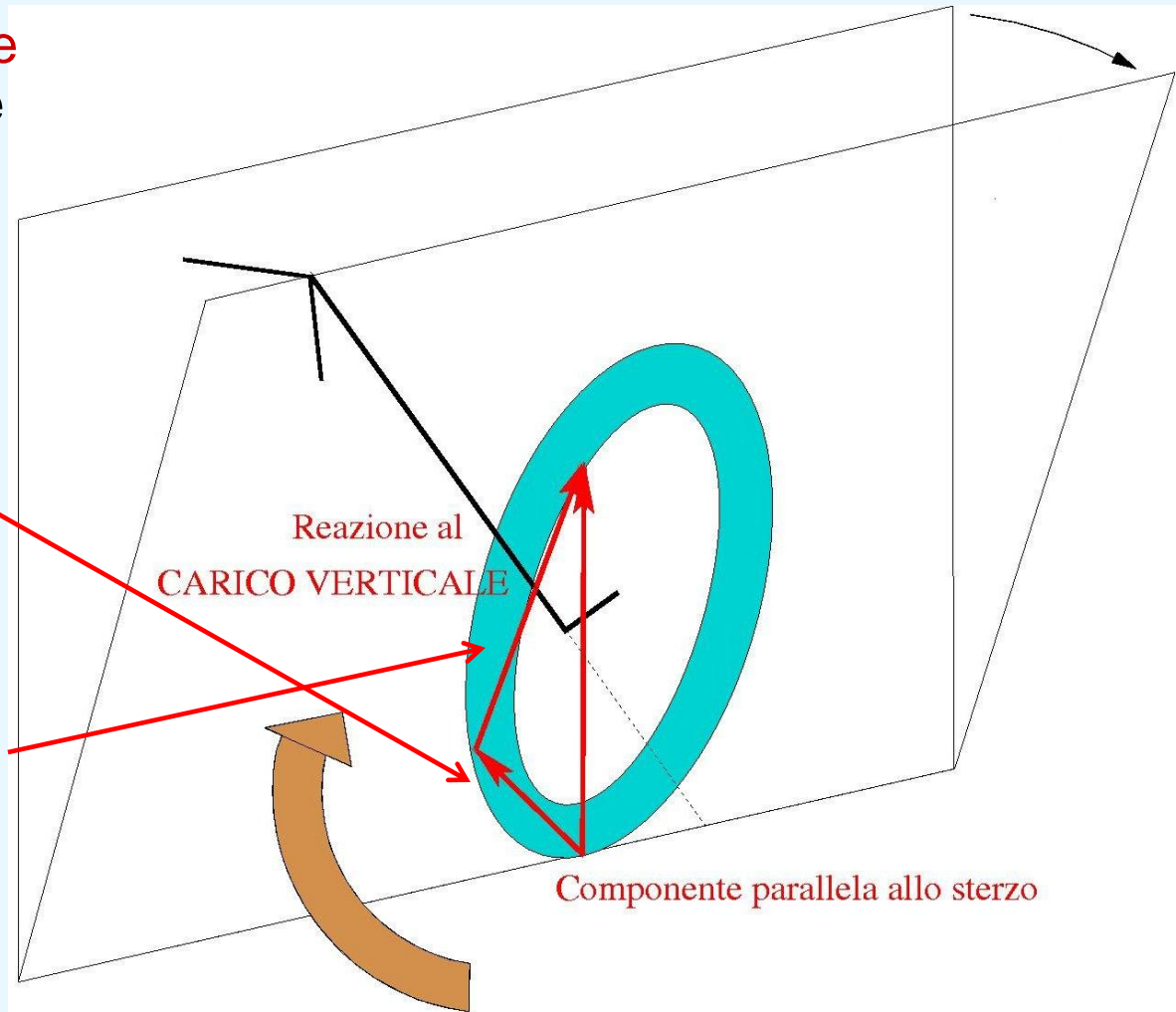
- La **REAZIONE VERTICALE DEL PESO**
- La **FORZA LATERALE di ATTRITO** (che evita lo slittamento)

## REAZIONE VERTICALE DEL PESO

Consideriamo la **reazione del peso**. Tale reazione è ortogonale al terreno (orizzontale)

Decomponiamo tale reazione in

- una componente parallela alla direzione dello sterzo (che non genera momento) e in
- una componente che è normale al piano della ruota anteriore (rivolta verso l'esterno della curva)



Tale componente (normale al piano della ruota anteriore, rivolta verso l'esterno della curva) **genera un momento** che provoca l'IMBARDATA della bicicletta (**ovvero fa girare la ruota verso destra**).

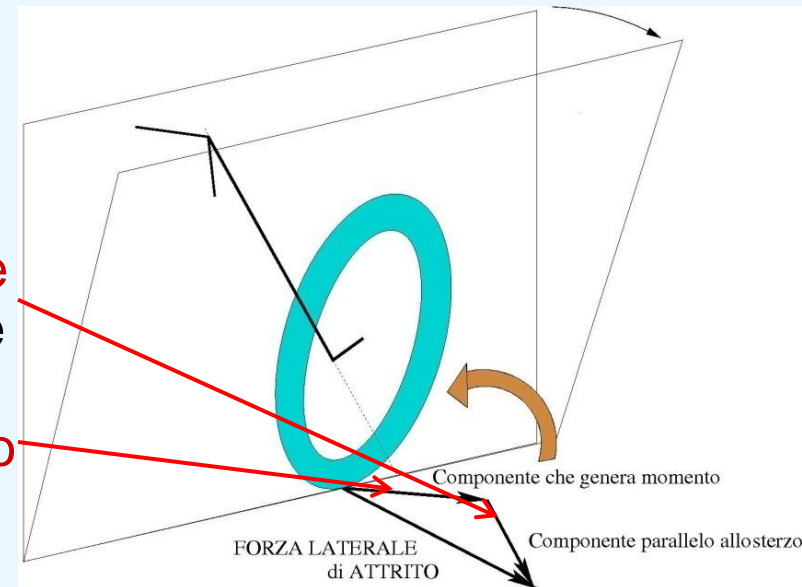
Passiamo alla

## FORZA LATERALE DI ATTRITO

Consideriamo la forza laterale di attrito.  
Tale reazione è **orizzontale** (sul terreno).

Decomponiamo tale reazione in

- una componente **parallela alla direzione** dello sterzo (che non genera momento) e in
- una componente che è **normale al piano della ruota anteriore** (questa volta rivolta verso l'interno della curva)

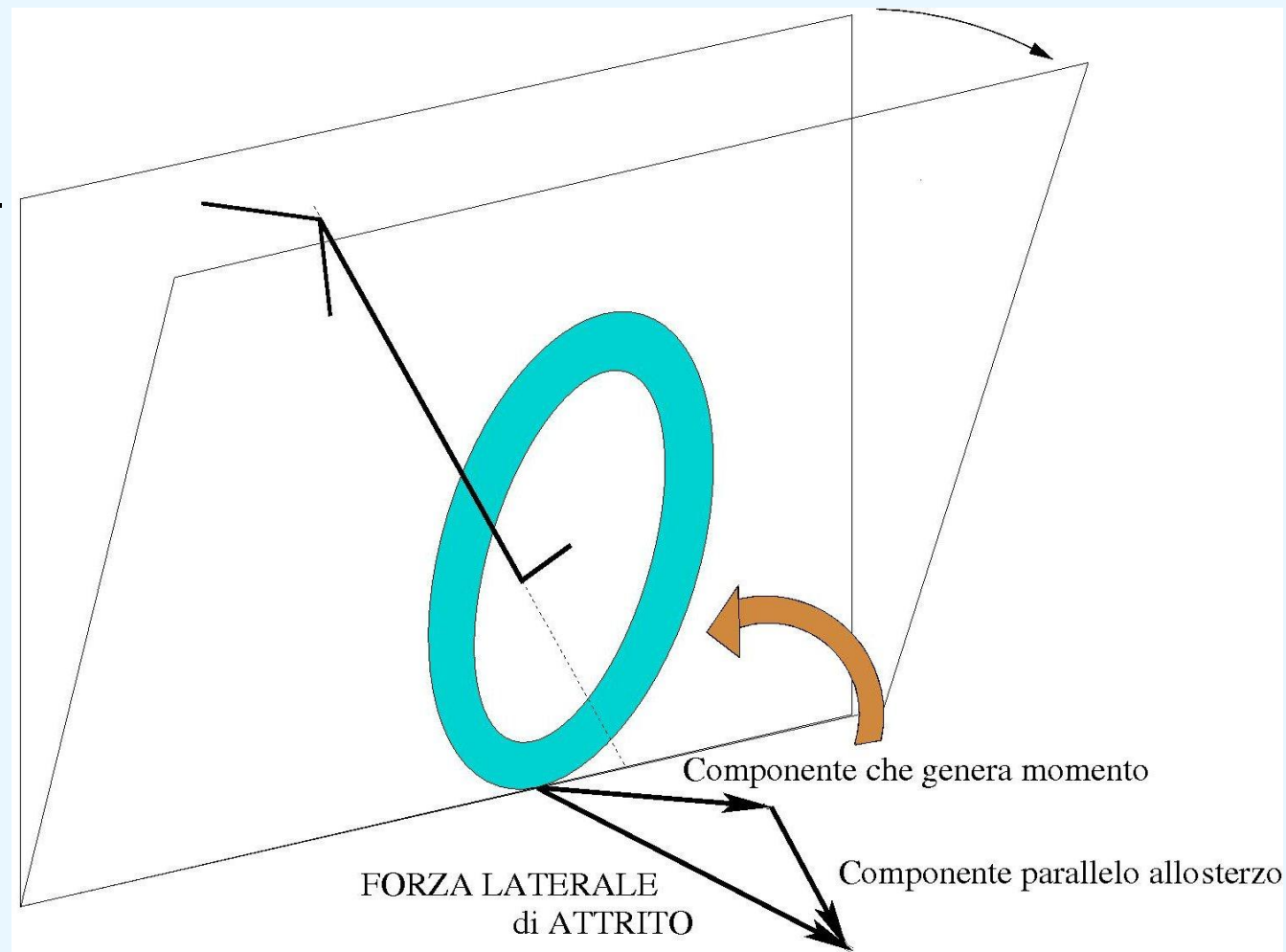




Tale componente genera un momento che

**si oppone**  
all'IMBARDATA  
della bicicletta,

(ovvero **NON** fa girare la ruota verso destra, ma verso SINISTRA).





## REAZIONE DEL PESO E FORZA LATERALE DI ATTRITO

Ricapitolando ci sono due forze nel punto di contatto RUOTA-TERRENO che generano un momento.

Tale forze hanno come braccio l'avancorsa anteriore normale

La componente della reazione del peso fa girare la ruota verso DESTRA.

La componente della forza laterale fa girare la ruota verso SINISTRA.

Fortunatamente però l'effetto del carico verticale è maggiore di quello generato dalla forza laterale di attrito.

IN CONCLUSIONE in seguito ad uno spostamento del peso verso **DESTRA** la bicicletta RUOTA **automaticamente** verso **DESTRA**, **provocando l'imbardata della bicicletta verso DESTRA.**





## ANCORA SULL'AVANCORSA

Ricapitolando le forze di contatto sulla ruota anteriore, in caso di una inclinazione a destra, esercitano un momento che fa ruotare la bicicletta (verso la parte in cui la bicicletta si è piegata).

La bicicletta gira e subito dopo incomincia a generarsi una forza centrifuga che si oppone alla caduta verso destra, stabilizzando il moto della bicicletta.

**Si può correggere il semplice modello generato dal pendolo inverso, inserendo un momento esterno applicato all'asse dello sterzo.**

Sia **T** il **momento esterno** applicato sullo sterzo, dall'equilibrio della forcella si ottiene

$$T = (F_f + N_f \varphi_f) c \sin \lambda$$

dove

$F_f$

è la forza orizzontale agente nel punto di contatto  
ruota-terreno

$N_f$

è la forza verticale agente nel punto di contatto  
ruota-terreno

e **c** è l'**AVANCORSA** e  **$\lambda$**  è l'**angolo dello STERZO**.

Se si tiene conto delle espressioni di  $F_f$  e di  $N_f$ , dell'angolo di rollio e dell'angolo di sterzo effettivo della ruota anteriore, si ottiene l'espressione di **T**

Ricordando l'equazione del pendolo inverso, col termine noto dipendente dall'angolo anteriore di sterzo  $\delta$  (controllo)

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} - mgh \varphi = \frac{DV}{b} \frac{d\delta}{dt} + \frac{mV^2 h}{b} \delta$$

ed introducendo l'avancorsa, si ottiene

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} - mgh \varphi = \frac{DV \sin \lambda}{b} \frac{d\delta}{dt} + \frac{m(V^2 h - a c g) \sin \lambda}{b} \delta$$

Sterzo verticale  $\lambda = \pi/2$   
ed assenza di avancorsa

$$c = 0$$

$$\sin \lambda = 1$$

A conti fatti il momento esterno  $\mathbf{T}$  applicato sullo sterzo, per l'equilibrio della forcella, è

$$T - \frac{acmg \sin \lambda}{b} \varphi - \frac{acm \sin \lambda}{b^2} (V^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda) \delta = 0$$

dove si sono introdotti i parametri della bicicletta.

Possiamo ottenere il controllo  $\delta$  in funzione di  $\varphi$ , questa volta tenendo conto delle forze che nascono grazie all'avancorsa.

$$\delta = k_1(V) T - k_2(V) \varphi$$

dove  $k_1(V)$  e  $k_2(V)$  sono funzioni della velocità  $V$ .

Se si introduce il **controllo** sopra definito nell'equazione, si ha

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} - mgh \varphi = \frac{DV \sin \lambda}{b} \frac{d\delta}{dt} + \frac{m(V^2 h - a c g) \sin \lambda}{b} \delta$$

Il termine di destra viene a dipendere anche da **T** e da **dT/dt**, e quindi dalla velocità **V** della bicicletta.

L'equazione ammette una soluzione **STABILE** se

$$V > V_c = \sqrt{bg \cot \lambda}$$

e

$$bh > ac \tan \lambda$$

$V_c$  è la velocità critica al di sopra della quale si ha stabilità.



In conclusione l'azione dell'avancorsa si può tenere conto nel modello con un feed-back del tipo

$$\delta = k_1(V) T - k_2(V) \varphi .$$

L'avancorsa lega l'angolo di caduta all'angolo di sterzo (feed-back negativo) , che mostra come la **bicicletta** possa essere considerata come un **sistema con retroazione (feed-back)**.

Ricordando:

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} - mgh \varphi = \frac{DV}{b} \frac{d\delta}{dt} + \frac{mV^2 h}{b} \delta$$

l'angolo di caduta  $\varphi$  influenza l'angolo di sterzo  $\delta$ ,

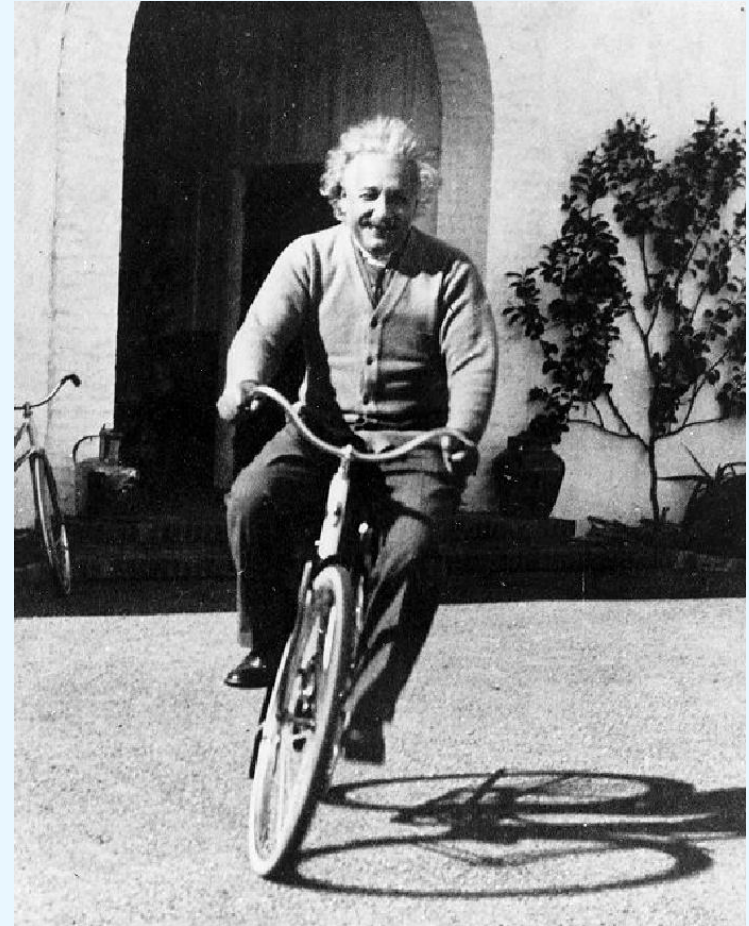
l'angolo di sterzo anteriore  $\delta$  influenza l'angolo di caduta  $\varphi$ .

Non c'è autostabilizzazione se l'avancorsa è nulla: bicicletta neutrale.

I modelli che abbiamo visto finora sono basati sul concetto di **pendolo inverso** e studiano in maniera molto semplice **la stabilità della bicicletta**.

In letteratura si trovano numerosi modelli, da semplici a molto complicati:

Rankine	- 1869
Whipple and Carvallo	- 1899-1900
Klein and Sommerfeld	- 1910
Timoshenko-Young	- 1920
Sharp	- 1970

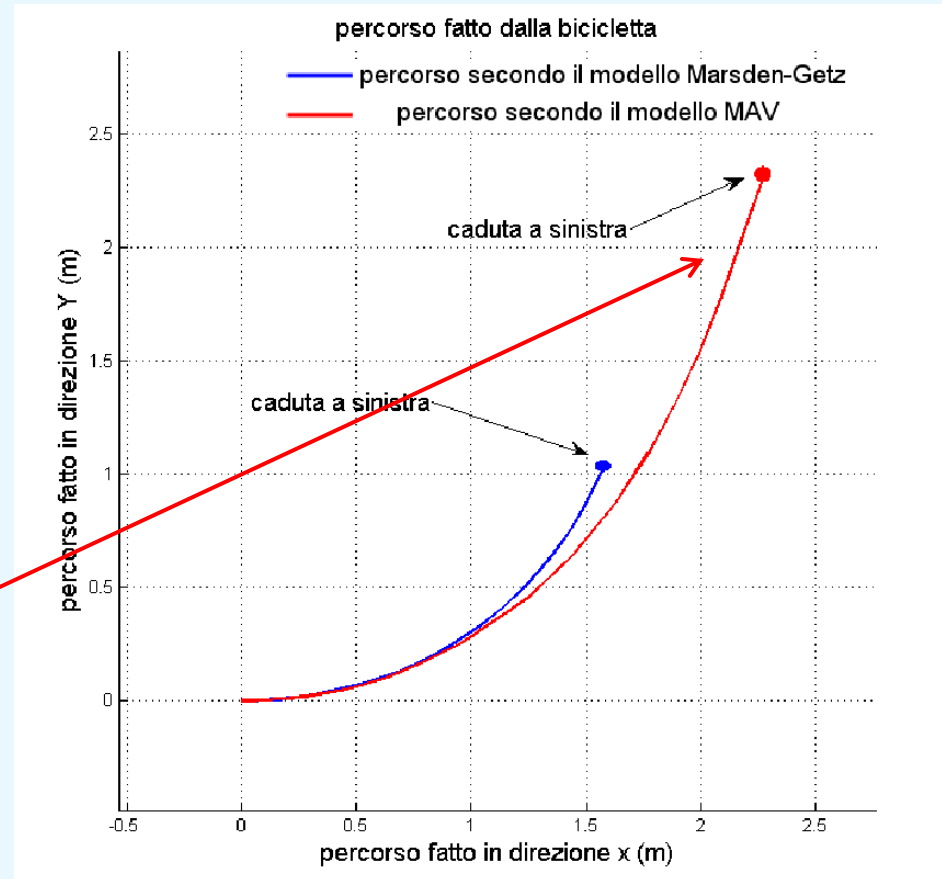


## Nella tesi di F. Zinelli (2008)

si è confrontato un modello della bicicletta (Marsden-Getz) senza avancorsa e controllato da forzanti esterne, con un **nostro modello** dove è stato introdotta l'**avancorsa**.

A parità degli altri parametri si è verificata una **maggiore stabilità**.

Ritardo nella caduta in figura.





## Un altro modello di bicicletta

(oggetto della tesi triennale di Francesco RICCI)

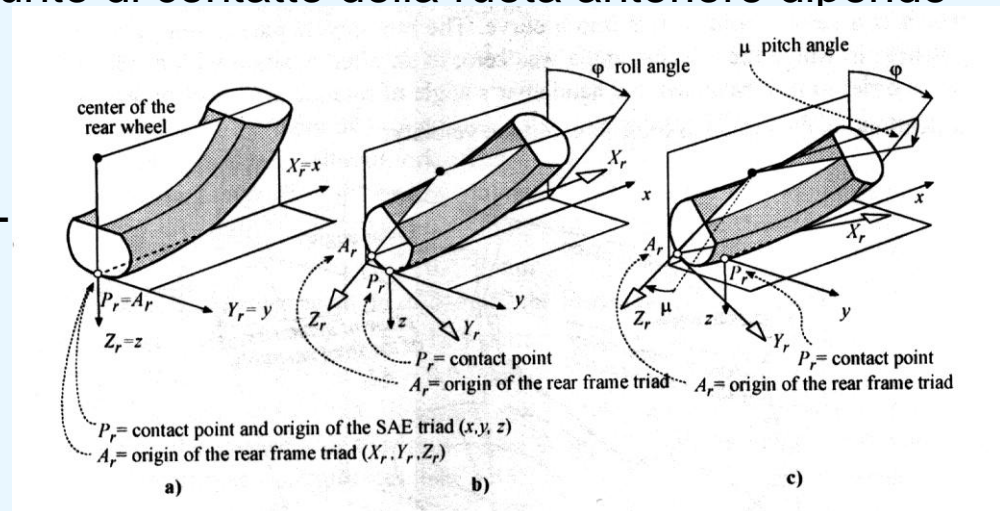
Assunzioni:    **presenza dell'AVANCORSA**

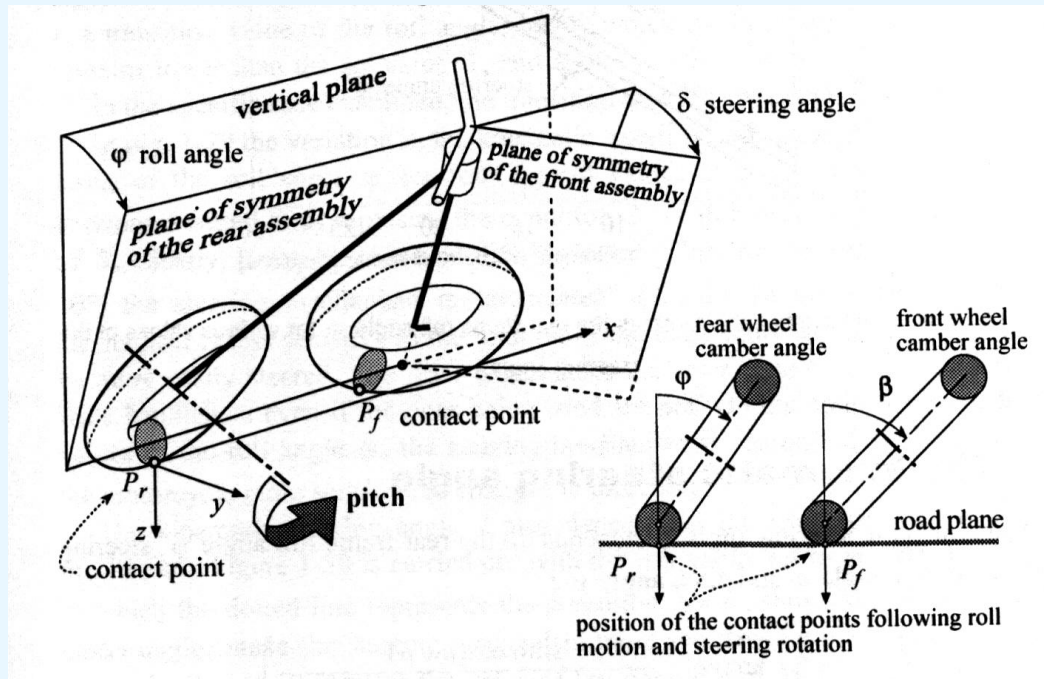
**ruote sottili**

**ruote perfettamente RIGIDE**

L'espressione delle velocità del punto di contatto della ruota anteriore dipende anche dalla forma delle ruote.

Si dovrà approssimare questa velocità, per ottenere le grandezze meccaniche per lo studio della dinamica della bicicletta (va studiata la cinematica dello sterzo).





Quando si inizia a curvare con una bicicletta, questa si inclina di un certo angolo, che abbiamo chiamato **angolo di rollio** (indicato con  $\varphi$ ).

Allo stesso tempo, affinché il sistema resti in equilibrio, l'**angolo di sterzo** assume un valore diverso da zero e dipendente dal raggio della curva e dalla velocità.

Si nota quindi che la rotazione dello sterzo, considerando le ruote senza spessore, genera un piccolo abbassamento dello stesso.

Il retrotreno subisce una piccola rotazione in avanti attorno all'asse della ruota posteriore (**beccheggio**).

Si costruisce la funzione **LAGRANGIANA** del sistema bicicletta, per poi ricavarne le equazioni di moto, tramite le equazioni di moto di D'Alembert, adattate ai vincoli anolonomi.

Le coordinate **lagrangiane** scelte sono:

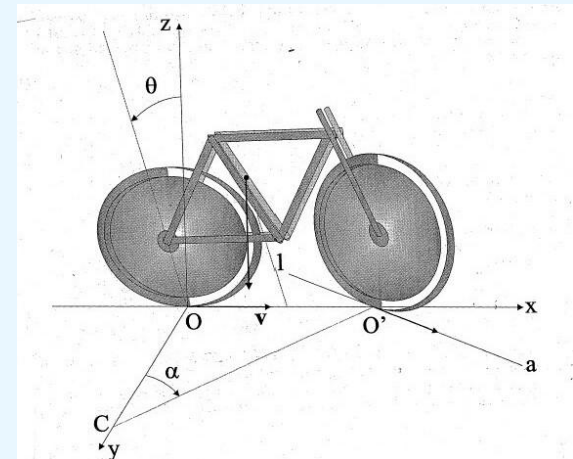
**x, y** coord. punto di contatto della ruota posteriore col terreno

**$\theta$**  angolo di imbardata

**$\varphi$**  angolo di rollio

**$\alpha$**  angolo di sterzo

Per poter scrivere le **equazioni della dinamica del sistema**, è prima necessario esprimere tutte le velocità rispetto alle coordinate lagrangiane scelte.





Attraverso le **matrici di rotazione** si ottengono così le espressioni delle velocità angolari e lineari cercate. Ad esempio si ha:

$$\vec{v}(G_1) = \begin{pmatrix} \dot{x} - R\dot{\alpha} \cos \alpha \sin \theta - R\dot{\theta} \sin \alpha \cos \theta \\ \dot{y} + R\dot{\alpha} \cos \alpha \cos \theta - R\dot{\theta} \sin \alpha \sin \theta \\ -R\dot{\alpha} \sin \alpha \end{pmatrix} \{\vec{\omega}_1\}_{\Sigma_1} = \begin{pmatrix} -\dot{\alpha} \cos \chi - \dot{\theta} \cos \alpha \sin \chi \\ -\dot{\theta} \sin \alpha + \dot{\chi} \\ -\dot{\alpha} \sin \chi + \dot{\theta} \cos \alpha \cos \chi \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(G_2) = \begin{pmatrix} \dot{x} - l_2\dot{\theta} \sin \theta - h_2\dot{\alpha} \cos \alpha \sin \theta - h_2\dot{\theta} \sin \alpha \cos \theta \\ \dot{y} + l_2\dot{\theta} \cos \theta + h_2\dot{\alpha} \cos \alpha \cos \theta - h_2\dot{\theta} \sin \alpha \sin \theta \\ -h_2\dot{\alpha} \sin \alpha \end{pmatrix}$$

Una volta determinate le velocità e scritti i tensori di inerzia per i quattro corpi della bicicletta, possiamo ricavare le energie cinetiche e quelle potenziali, per poter scrivere la **Lagrangiana della bicicletta**.



$$\begin{aligned} T_1 = & \frac{1}{2}m_1(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + R^2\dot{\alpha}^2 + R^2\dot{\theta}^2 \sin^2 \varphi) + \\ & - m_1R[\dot{\varphi} \cos \varphi(\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta) + \dot{\theta} \sin \varphi(\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta)] + \\ & + \frac{1}{2}[(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 \cos^2 \varphi)I_{1xx} + (\dot{\chi} - \dot{\theta} \sin \varphi)^2 I_{1yy}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2 = & \frac{1}{2}m_2[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + h_2^2(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 \sin^2 \varphi) + l_2^2\dot{\theta}^2] + \\ & - m_2h_2[\dot{\varphi} \cos \varphi(\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta) + \dot{\theta} \sin \varphi(\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta)] + \\ & - m_2l_2\dot{\theta}(x \sin \theta - y \cos \theta) + \frac{1}{2}[I_{2xx}\dot{\varphi}^2 + \\ & + \dot{\theta}^2(I_{2yy} \sin^2 \varphi + I_{2zz} \cos^2 \varphi)] - I_{2xz}\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \varphi \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} T_3 = & \frac{1}{2}m_3[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + h_3^2(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 \sin^2 \varphi) + l_3^2 \dot{\theta}^2] + \\ & - m_3 h_3 [\dot{\varphi} \cos \varphi (\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta) + \dot{\theta} \sin \varphi (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta)] + \\ & - m_3 l_3 \dot{\theta} (x \sin \theta - y \cos \theta) + \\ & + \frac{1}{2} \{ I_{3yy} [\cos \varepsilon \sin \alpha \dot{\varphi} - (\cos \alpha \sin \varphi + \cos \varphi \sin \varepsilon \sin \alpha) \dot{\theta}]^2 + \\ & + [-\dot{\varphi} \cos \varepsilon \cos \alpha + \dot{\theta} (\cos \varphi \cos \alpha \sin \varepsilon - \sin \varphi \sin \alpha)] [\dot{\varphi} (I_{3xz} \sin \varepsilon + \\ & - I_{3xx} \cos \varepsilon \cos \alpha) + \dot{\theta} (\cos \varphi (I_{3xz} \cos \varepsilon + I_{3xx} \cos \alpha \sin \varepsilon) + \\ & - I_{3xx} \sin \varphi \sin \alpha) + I_{3xz} \dot{\alpha}] + (\dot{\varphi} \sin \varepsilon + \\ & + \dot{\theta} \cos \varphi \cos \varepsilon + \dot{\alpha}) [\dot{\varphi} (-I_{3xz} \cos \varepsilon \cos \alpha + I_{3zz} \sin \varepsilon) + \\ & + \dot{\theta} (\cos \varphi (I_{3zz} \cos \varepsilon + I_{3xz} \cos \alpha \sin \varepsilon) - I_{3xz} \sin \varphi \sin \alpha) + I_{3zz} \dot{\alpha}] \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{4\text{appr}} = & \frac{1}{2}m_4[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + R^2\dot{\varphi}^2 \cos^2 \varepsilon \cos^2 \varphi \cos^2 \theta + R^2\dot{\varphi}^2 \cos^2 \varepsilon \sin^2 \varphi + \\
 & + R^2\dot{\varphi}^2 \cos^2 \varepsilon \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + 2R\dot{\varphi}\dot{\theta}(p \cos \varepsilon \cos \varphi \cos \theta + \\
 & - R \cos \varepsilon \cos \varphi \cos^2 \theta \sin \varepsilon + p \cos \varepsilon \cos \varphi \sin \theta + \\
 & - R \cos \varepsilon \cos \varphi \sin \varepsilon \sin^2 \theta) + 2p\dot{\theta}^2(p - R \cos \theta \sin \varepsilon + \\
 & + R \cos \varepsilon \cos \theta \sin \varphi - R \sin \varepsilon \sin \theta - R \cos \varepsilon \sin \varphi \sin \theta) + \\
 & + R^2\dot{\theta}^2(\cos^2 \theta \sin^2 \varepsilon + \cos^2 \varepsilon \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + \sin^2 \varepsilon \sin^2 \theta + \\
 & + \cos^2 \varepsilon \sin^2 \varphi \sin^2 \theta) - 2\dot{x}(R\dot{\varphi} \cos \varepsilon \cos \varphi \sin \theta + \\
 & + \dot{\theta}(p + R \cos \varepsilon \cos \theta \sin \varphi - R \sin \varepsilon \sin \theta)) + \\
 & + 2\dot{y}(R\dot{\varphi} \cos \varepsilon \cos \varphi \cos \theta + \dot{\theta}(p - R \cos \theta \sin \varepsilon + \\
 & - R \cos \varepsilon \sin \varphi \sin \theta))] + \frac{1}{2} \langle \omega_4, \sigma_4 \omega_4 \rangle
 \end{aligned}$$



E' facile scrivere poi l'energia potenziale delle 4 parti della bicicletta:

$$V = m_1 g z_1 + m_2 g z_2 + m_3 g z_3 + m_2 g z_4$$

dove

$$\begin{cases} z_1 = R \cos \varphi \\ z_2 = h_2 \cos \varphi \\ z_3 = h_3 \cos \varphi \\ z_4 = R \cos \varphi - b \cos \varphi \sin \psi + d [\cos \varphi \cos \alpha \sin \varepsilon - \sin \varphi \sin \alpha] \end{cases}$$

Nella tesi di Ricci sono state ottenute le **equazioni di Lagrange** corrette a causa della presenza dei vincoli anolonomi.

Le equazioni sono state risolte numericamente, mostrando l'effetto della avanzata che stabilizza la traiettoria della bicicletta.

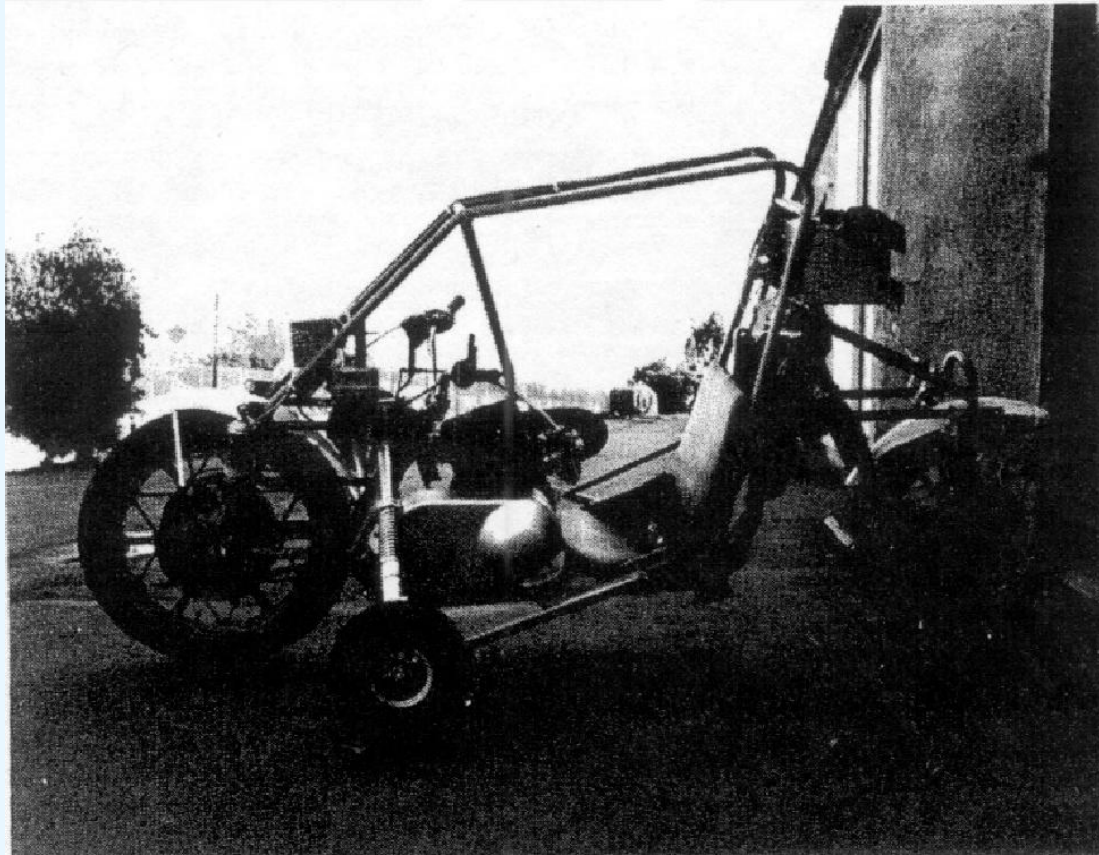
Programma futuro: controllo della dinamica.





**FIGURE 1** The draisine, or running, machine. This vehicle, which was first built in Germany in 1816, is

## Project of The **National Highway Safety Administration** (1970) per ottenere una moto sicura (basso centro di massa, passo lungo, trazione anteriore)



## Bicicletta non manovrabile di Klein



C'è un premio di 1000US\$ per chi riesce a guidarla in particolari condizioni.

## Bicicletta manovrabile di Klein





## Bicicletta non manovrabile della Lund University



## Univ. of Illinois and Urbana (1980) - Bicicletta senza effetti precessionali



## Bicicletta manovrabile della UCSB



## Controllo automatico della bicicletta



Figure 1.1: “Japanese robot goes bike-riding”. Visitors watch the 20-inch-high Murata Boy robot ride a tiny bicycle without falling during a demonstration Tuesday at the CEATEC Japan 2005 exhibition in Makuhari, east of Tokyo.....The firm developed an earlier version of a bike-riding robot back in 1990, but the latest version can stop without falling over.





## Murata Manufacturing Company Japan – 2005





## BIBLIOGRAFIA

1. [V. Cossalter](#), Motorcycle dynamics, Lulu, 2006.
2. [M. Guiggiani](#), Dinamica dei veicoli, CittàStudi, 2007.
3. [P.A. Patricelli](#), La stabilità dinamica della bicicletta, SNS, 1982.
4. [A.Sharp](#), Bicycles and Tricycles, 1896, Dover Reprint 2003.
5. [F.R.Whitt](#) and [D.G.Wilson](#), Bicycling Science, MIT Press Cambridge, MA 2004.
6. [D.V.Helihy](#), Bicycle – The History, Yale Univ.Press, 2004
7. [F.J.W. Whipple](#), The stability of the motion of a bicycle, Quart. J. Pure Appl. Math. 30, 312-348, 1899.
8. [J.I.Neimark](#) and [N.A.Fufaev](#), Dynamics of nonholonomic systems, Nauka Moscow, AMS translation, 1972.
9. [R.S. Sharp](#), The stability and control of motorcycle, J.Mech.Eng.Sci. 13, 316-329, 1971.
10. [K.J. Aström](#), [R.E.Klein](#) and [A.Lennartsson](#), Bicycle dynamics and control, IEEE CSM, August 26-47, 2005.



Grazie per l'attenzione.