Содержание

Постановка задачи

Требуется реализовать численный метод, позволяющий вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной тремя кривыми $y = f_1(x) = 1 + \frac{4}{1+x^2}$, $y = f_2(x) = x^3$ и $y = f_3(x) = 2^{-x}$ с заданной точностью $\varepsilon = 0.001$. Для решения данной задачи должен использоваться комбинированный метод (хорд и касательных) приближённого решения уравнений для поиска вершин фигуры и формула трапеций для вычисления ее площади. При поиске вершин отрезок, содержащий корень, должен быть вычислен аналитически.

Математическое обоснование

Выбор отрезков

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – 2 функции из условия задачи. Нам нужно найти точку пересечения графиков их функций. Тогда рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - g(x)$. И точка пересечения будет соответствовать $F(x) = 0$. Мы должны воспользоваться комбинированным методом для поиска корня этого уравнения, а для этого мы должны правильно подобрать отрезок $[a, b]$, на котором будем искать корень. У нас есть следующие требования: $F(a) \cdot F(b) < 0$ и $F'(x) \cdot F''(x)$ не меняет знак для $\forall x \in [a, b]$ [1].

Рассмотрим пару функций $F(x) = f_1(x) - f_2(x)$ на отрезке $[1, 2]$
$F(1) = 1 + \frac{4}{1+1^2} - 1^3 = 2 \Rightarrow F(1) > 0.$
$F(2) = 1 + \frac{4}{1+2^2} - 2^3 = -6.2 \Rightarrow F(2) < 0.$
$F'(x) = f'(x) - g'(x) = \frac{-8x}{(1+x^2)^2} - 3x^2 < 0 \Rightarrow F'(x) < 0,\ \forall x \in [1, 2]$
$F''(x) = \frac{24x^2-8}{(1+x^2)^3} - 6x < 0 \Rightarrow F''(x) < 0,\ \forall\ x \in\ [1, 2]$
Значит отрезок $[1, 2]$ удовлетворяет требованиям [1].

Аналогично для f_1 и f_3 подходит отрезок $[-2, -1]$. И для f_2 и f_3 подходит отрезок $[0, 1]$.

Обоснование выбора $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

Наша цель – вычислить площадь фигуры с заданной точностью $\varepsilon = 0.001$. Сначала ищем точки пересечения графиков функций с погрешностью ε_1. Так как точек пересечения 3, то общая погрешность $3\varepsilon_1 \cdot \max(f_1, f_2, f_3)$, где максимум берем в окрестностях точек пересечения. В нашем случае, очевидно, $max(f_1, f_2, f_3) = f_1(0) = 5$. Значит имеем $3\varepsilon_1 \cdot \max(f_1, f_2, f_3) = 15\varepsilon_1$. Далее мы должны найти площадь, вычислив 3 интеграла с погрешностью ε_2 каждый. Значит их общая погрешность $3\varepsilon_2$.

В таком случае итоговая погрешность $\varepsilon > 15\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 = 0.001$. Следовательно можем взять $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.00001$.

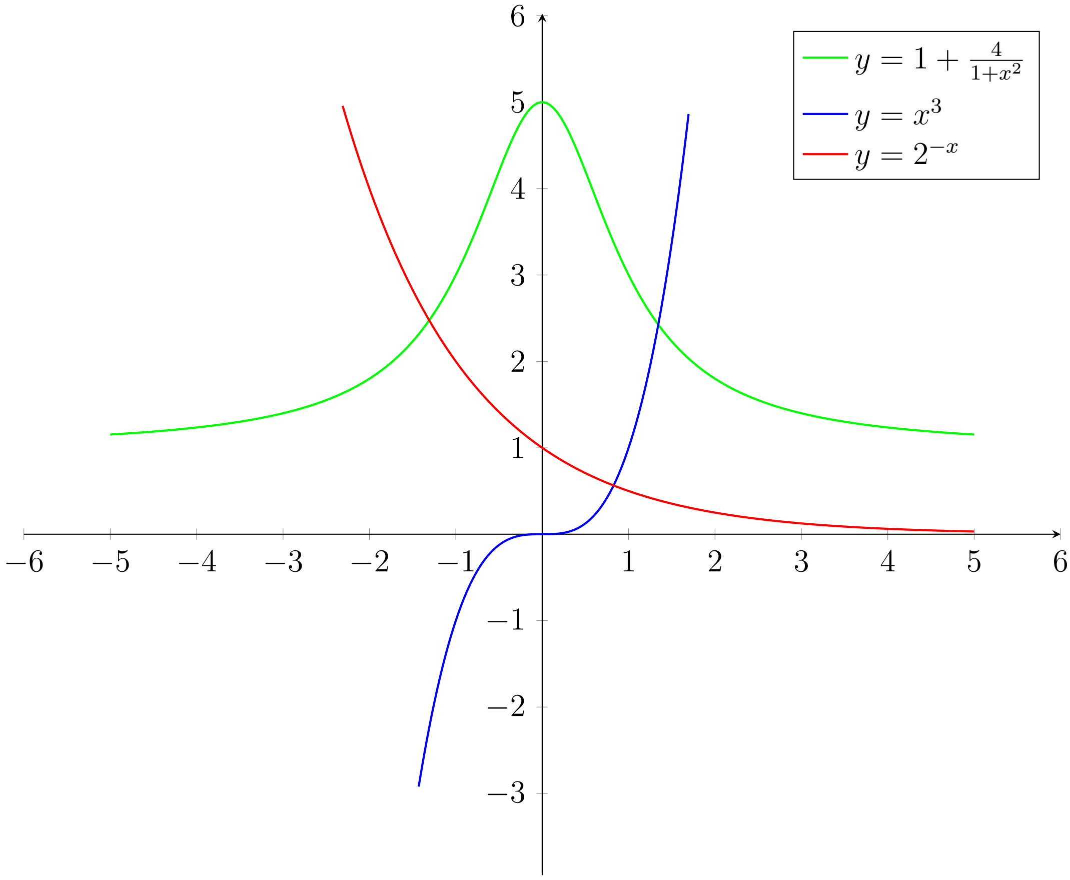

Рис. 1: Плоская фигура, ограниченная графиками заданных уравнений

Результаты экспериментов

В результате проведенной работы были получены координаты точек пересечения (таблица 1) и площадь фигуры $S = 6.591$ (рис. 2).

Кривые	x	y
1 и 2	1.344	2.426
1 и 3	-1.308	2.476
2 и 3	0.826	0.564

Таблица 1: Координаты точек пересечения

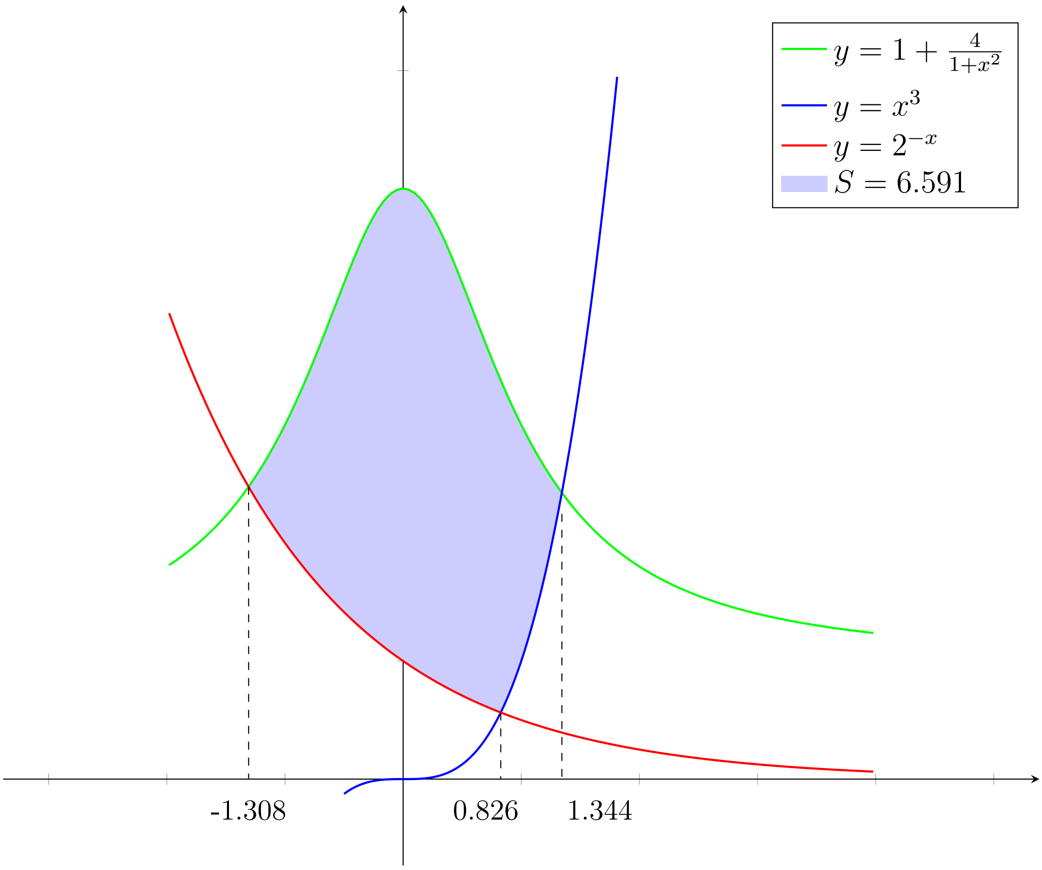

Рис. 2: Плоская фигура, ограниченная графиками заданных уравнений

Структура программы и спецификация функций

На рис. 3 изображено разбиение программы на компоненты (модули, функции) и связи между ними.

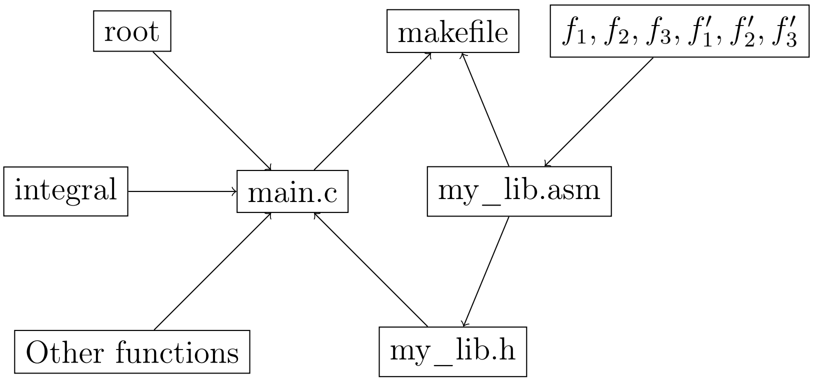

Рис. 3: Разбиение программы на компоненты

Функции из модуля main.c:

double root возвращает абциссу точки пересечения графиков функций $f(x)$ и $g(x)$.

double integral возвращает значение соответствующего определенного интеграла.

void *number_of_iterations* выводит количество итераций при поиске соответствующих точек пересечения графиков функций.

void *intersection_points* выводит абциссы точек пересечения графиков функций.

void help выводит все допустимые ключи.

void *test_point* тестирует функцию root, выводит абциссы точек пересечения графиков функций f_1, f_2, f_3.

void *test_integral* тестирует функцию integral, выводит значения соответствующих определенных интегралов от функций f_1, f_2, f_3.

Функции из модуля my_lib.asm:

double $f1\_0, f1\_1, f2\_0, f2\_1, f3\_0, f3\_1$ возвращают значения фунций f_1, f_2, f_3 и их производные.

Сборка программы (Make-файл)

На рис. 4 изображена схема зависимостей между модулями программы.

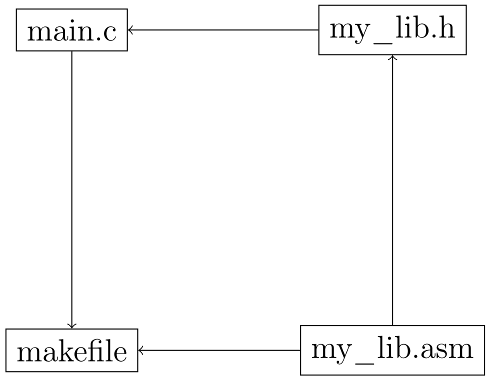

Рис. 4: Зависимости между модулями программы

makefile собирает модули в файл project. Сборка осуществляется по ключу all, а удаление промежуточных файлов — по ключу clean.

Код makefile:

```
all: main.o my_lib.o
    gcc -m32 -o project main.o my_lib.o
main.o: main.c
    gcc -std=c99 -m32 -c -o main.o main.c
my_lib.o: my_lib.asm
    nasm -f elf32 -o my_lib.o my_lib.asm
start:
    ./project
test_root:
    ./project --test_p -5 10 -10 5 -5 10
test_integral:
    ./project --test_i -5 10 -10 5 -5 10
clean:
    rm *.o
```

Отладка программы, тестирование функций

Программа была протестирована, проведена проверка функций root и integral. Результаты тестирования представлены в таблицах 2 и 3.

Функции	Результат	Точное значение
f_1 and f_2	1.343651	1.3436506730877
f_2 and f_3	-1.307861	-1.3078610729161
f_1 and f_3	0.826216	0.8262178093355

Таблица 2: Тестирование функции root

Функция	Отрезок	Результат	Точное значение
$y = 1 + \frac{4}{1+x^2}$	$[-5, 10]$	26.378124	26.37811376
x^3	$[-10, 5]$	-2343.749974	-2343.75
$y = 2^{-x}$	$[-5, 10]$	46.164832	46.16483242

Таблица 3: Тестирование функции integral

Для тестирования root использовался ключ командной строки '-test_p', а для integral – '-test_i'.

Программа на Си и на Ассемблере

Исходные тексты программы имеются в архиве, который приложен к данному отчету.

Анализ допущенных ошибок

В ходе выполнения работы ошибок допущено не было.

Список литературы

[1] Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Т. 1 — Москва: Наука, 1985.