WS 2013/14

Notizen zur Vorlesung Markovketten (MA2404)*

Silke Rolles

6. Februar 2014

Fehler in der Mitschrift an jonas.keinholz@tum.de

*Erstellt von Jonas Keinholz.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Diese Aufzeichnungen sind ausschließlich für die Studierenden der Vorlesung "Markovketten" bestimmt. Es handelt sich um die Vorlesungsvorbereitung der Dozentin, die den Studenten der Vorlesung zur Verfügung gestellt wird. Die Weitergabe oder Verbreitung ist nicht erlaubt. Den Aufzeichnungen liegt das Buch P. Brémaud, Markov chains, Gibbs fields, Monte Carlo simulation, and queues, Springer, 1999 zugrunde. Viele Passagen sind sehr nahe an dieser Quelle, jedoch nicht speziell gekennzeichnet. Diese Notizen ersetzen kein Lehrbuch.

1 Definition

Definition 1.1. Ein *stochastischer Prozess* in diskreter Zeit ist eine Folge $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ von Zufallsvariablen auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Werten in derselben Menge E: *Vorlesung 1, 16.10.2013*

$$X_t : \Omega \to E.$$

E heißt *Zustandsraum*. t wird als *Zeit* interpretiert. $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ beschreibt eine stochastische Evolution im Lauf der Zeit. Ist $X_t = i$, so sagen wir, dass der Prozess zur Zeit t im Zustand i ist.

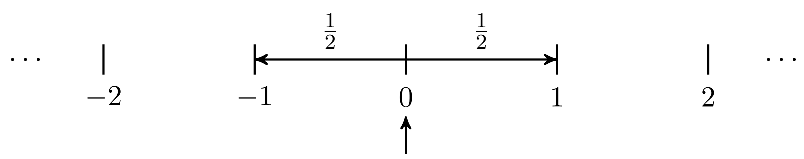
Beispiel 1.2 (stochastische Prozesse).

1. Wir werfen immer wieder dieselbe Münze, $X_t =$ Ergebnis des t-ten Münzwurfs.
   Standardannahme: $X_t, t \in \mathbb{N}_0$ sind unabhängig und identisch verteilt.

2. Die *einfache Irrfahrt auf* $\mathbb{Z}$. Seien $\xi_i, i \in \mathbb{N}$ unabhängig und identisch verteilt mit $P(\xi_i = 1) = \frac{1}{2} = P(\xi_i = -1)$. Sei

$$X_0 = 0, \quad X_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

die Position zur Zeit $n \in \mathbb{N}$. Man kann sich den stochastischen Prozess wie folgt vorstellen: Ein Teilchen startet in 0. Zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}_0$ wirft es eine Münze. Wenn Kopf fällt, springt es nach rechts, sonst links.



In diesem Beispiel sind die $X_n, n \in \mathbb{N}_0$ *nicht* unabhängig. Die Abhängigkeitsstruktur ist aber einfach. Es gilt:

$$X_{n+1} = X_n + \xi_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Die Zuwächse $X_{n+1} - X_n, n \in \mathbb{N}_0$ sind unabhängig und identisch verteilt. X_{n+1} hängt *nur* von X_n und ξ_{n+1} ab, nicht jedoch von $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$.
Der Prozess hat ein *Gedächtnis der Länge 1*. Dies ist auch bei Markovketten der Fall.

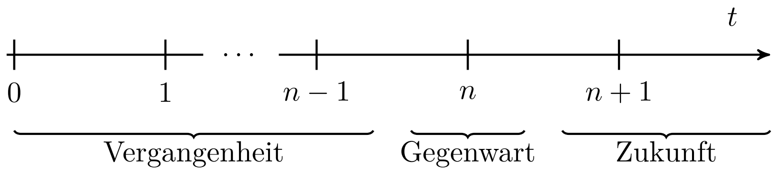
Eine Menge E heißt *abzählbar*, wenn sie endlich oder abzählbar unendlich ist.

Definition 1.3. Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ mit abzählbaren Zustandsraum E heißt *Markovkette*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ und Zustände $i, j, i_0, \ldots, i_{n-1} \in E$ mit $P(X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) > 0$ gilt:

$$P(X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i). \tag{1}$$

Falls zusätzlich die Wahrscheinlichkeit in (1) immer dann, wenn sie wohldefiniert ist, unabhängig von n ist, spricht man von einer *homogenen Markovkette*. Die Eigenschaft (1) heißt *Markov-Eigenschaft*.

Die Markov-Eigenschaft besagt, dass der nächste Zustand X_{n+1} nur vom gegenwärtigen Zustand X_n, nicht aber von der Vergangenheit $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ abhängt.



Lemma 1.4. *Sei* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei* $B \in \mathcal{F}$ *mit* $P(B) > 0$. *Dann ist*

$$P(\,\cdot \mid B) : \mathcal{F} \to [0,1], \quad A \mapsto P(A \mid B)$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Beweis. (P0) Zu zeigen: $P(A|B) \in [0,1]$ für alle $A \in \mathcal{F}$.

Offensichtlich ist $P(A|B) \geq 0$. Ausserdem gilt wegen der Monotonie von P

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \leq \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

(P1) $P(\Omega|B) = \dfrac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = 1.$

(P2) Für $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ paarweise disjunkt gilt:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i | B\right) = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cap B)\right)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B).$$

□

Definition. Eine Matrix $\Pi \in [0,1]^{E\times E}$ heißt *stochastisch*, falls

$$\sum_{j\in E} \Pi(i,j) = 1 \quad \text{für alle } i \in E,$$

d.h. wenn alle Zeilensummen 1 ergeben.

Definition 1.5. Eine stochastische Matrix $\Pi \in [0,1]^{E\times E}$ heißt *Übergangsmatrix* für die homogene Markovkette $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$, falls

$$\Pi(i,j) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \quad \text{für alle } i,j \in E \text{ und } n \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } P(X_n = i) > 0.$$

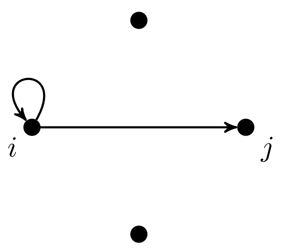
Die $\Pi(i,j)$ heißen *Übergangswahrscheinlichkeiten*.

Typischerweise wählen wir den Zustandsraum E so, dass für alle $i \in E$ ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $P(X_n = i) > 0$ existiert.

Betrachte $i \in E$ mit $P(X_n = i) > 0$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt nach Lemma 1.4:

$$\sum_{j\in E} \Pi(i,j) = \sum_{j\in E} P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P\left(\bigcup_{j\in E} \{X_{n+1} = j\} \,\middle|\, X_n = i \right) = 1.$$

Der Übergangsgraph einer Markovkette. Ein *Graph* $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ besteht aus einer abzählbaren *Knotenmenge* $\mathcal{V}$ und einer Menge von gerichteten Kanten $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$. Ist $e = (i,j) \in \mathcal{E}$, so geht eine Kante von i nach j. Die Kante $e = (i,i)$ ist eine Schleife bei i.



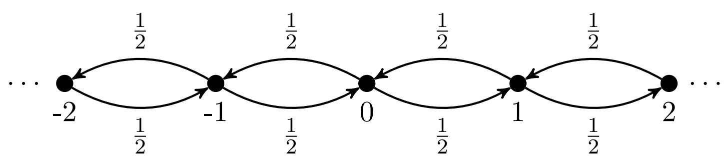
Definition 1.6. Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ eine homogene Markovkette mit abzählbarem Zustandsraum E und Übergangsmatrix Π. Der *Übergangsgraph* von $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ ist definiert durch $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ mit

$$\mathcal{V} = E \quad \text{und} \quad \mathcal{E} = \{(i,j) \in E \times E : \Pi(i,j) > 0\}.$$

Somit gibt es eine Kante von i nach j, wenn die Markovkette mit positiver Wahrscheinlichkeit in einem Schritt von i nach j gelangen kann. Man beschriftet die Kante (i,j) mit $\Pi(i,j)$.

Beispiel 1.7 (Einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$)**.** Intuitiv ist klar, dass hier eine Markovkette vorliegt (Beweis später).

- Übergangsgraph



- Übergangsmatrix

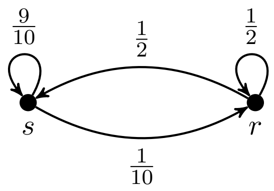
$$\Pi(i,j) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{falls } j \in \{i-1, i+1\}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel 1.8 (Stark vereinfachtes Modell für das Wetter in Los Angeles)**.** Homogene Markovkette mit Zustandsraum $E \in \{s, r\}$, wobei $s \mathrel{\widehat{=}}$ Sonne, $r \mathrel{\widehat{=}}$ Regen. Die Zeit wird in Tagen gemessen.

- Übergangsmatrix

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} s & r \end{matrix} \\ \begin{matrix} s \\ r \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

- Übergangsgraph



Wenn es an einem Tag sonnig ist, ist es mit Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{10}$ am nächsten Tag wieder sonnig.

Frage: Existiert zu jeder stochastischen Matrix Π eine Markovkette mit Übergangsmatrix Π?

Das folgende Kriterium ist oft nützlich, um nachzuweisen, dass ein stochastischer Prozess eine Markovkette ist. *Vorlesung 2, 23.10.2013*

Satz 1.9. *Sei $(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozess mit abzählbaren Zustandsraum E und sei $\Pi \in [0,1]^{E \times E}$ eine stochastische Matrix. Dann ist $(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ genau dann eine homogene Markovkette mit Übergangsmatrix Π, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ und $i, j, i_0, \ldots, i_{n-1} \in E$ mit $P(X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) > 0$ gilt:*

$$P(X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = \Pi(i, j).$$

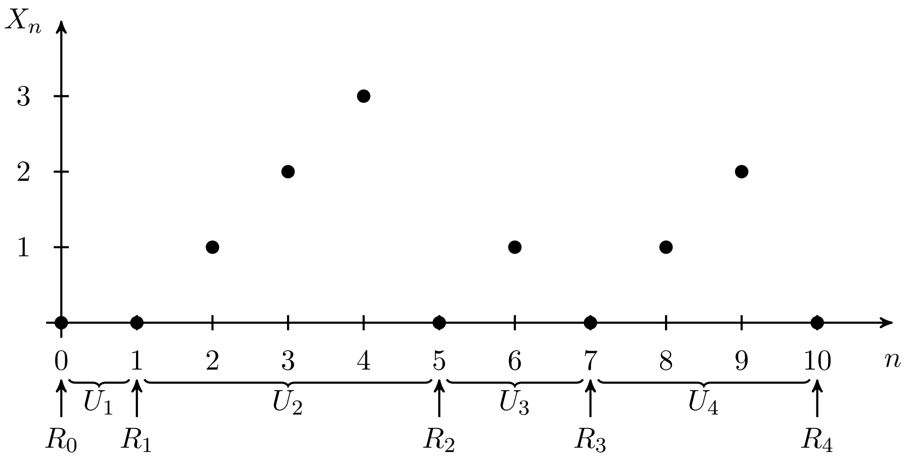
Beweis. Hausaufgabe 2, Übungsblatt 2. □

Beispiel 1.10. In einem Café kommt Kaffeemaschine 1 ab Zeit 0 zum Einsatz. Zur Zeit U_1 geht sie kaputt und wird durch Kaffeemaschine 2 ersetzt, die Lebensdauer U_2 hat, usw.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei U_n die Lebensdauer der n-ten Kaffeemaschine.

Annahme: $U_n, n \in \mathbb{N}$, sind unabhängig und identisch verteilt mit Werten in $\mathbb{N}$.

Sei X_n die Zeit, die die aktuelle Kaffeemaschine bereits eingesetzt wird. Z.B. erhalten wir für $U_1 = 1, U_2 = 4, U_3 = 2, U_4 = 3$ folgendes Bild für $n \mapsto X_n$:

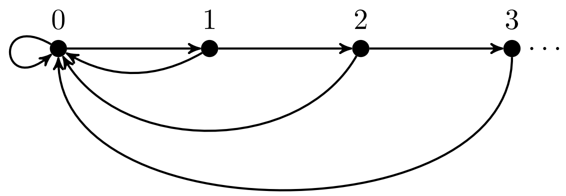


Die Zeiten $R_0 = 0, R_1, R_2, \dots$, zu denen $n \mapsto X_n$ den Wert 0 annimmt, bezeichnet man als *Erneuerungszeiten*. Zu diesen Zeiten beginnt der Prozess wieder von vorne.

Behauptung. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine homogene Markovkette mit Zustandsraum $\mathbb{N}_0$ und Übergangsmatrix

$$\Pi(i,j) = \begin{cases} \frac{P(U_1>i+1)}{P(U_1>i)}, & \text{falls } j = i+1, \\ 1 - \Pi(i,i+1), & \text{falls } j = 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Übergangsgraph:



Beweis. Seien $n \in \mathbb{N}, j_0, \dots, j_{n-1}, i \in \mathbb{N}_0$ mit

$$P(X_0 = j_0, X_1 = j_1, \dots, X_{n-1} = j_{n-1}, X_n = i) > 0,$$

Dann gilt $j_{n-1} = i - 1, j_{n-2} = i - 2, \dots, j_{n-i} = 0$. Wir setzen

$$A := \{X_{n-i-1} = j_{n-i-1}, \dots, X_0 = j_0\},$$
$$r_n := |\{k \in \mathbb{N} : 1 \le R_k \le n\}| = \text{Anzahl der Erneuerungszeiten bis zur Zeit } n.$$

Wir berechnen

$$
\begin{aligned}
&P(X_{n+1} = i+1, X_n = i, X_{n-1} = j_{n-1}, \dots, X_0 = j_0) \\
&= P(\{X_{n+1} = i+1, X_n = i, X_{n-1} = i-1, \dots, X_{n-i} = 0\} \cap A) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P(\underbrace{\{X_{n+1} = i+1, X_n = i, \dots, X_{n-i} = 0, r_n = k\}}_{=\{R_k = n-i, U_{k+1} > i+1\}} \cap A)
\end{aligned}
$$

Wir wissen: $R_k = U_1 + \dots + U_k$. Weiterhin hängt $\{R_k = n-i\} \cap A$ nur von $U_1, \dots, U_k$ ab, ist also unabhängig von $\{U_{k+1} > i+1\}$.

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} P(U_{k+1} > i+1) P(\{R_k = n-i\} \cap A) \\
&= P(U_1 > i+1) \cdot S \quad \text{mit } S = \sum_{k=0}^{\infty} P(\{R_k = n-i\} \cap A),
\end{aligned}
$$

da U_{k+1} dieselbe Verteilung wie U_1 hat.

Dasselbe Argument liefert

$$P(X_n = i, X_{n-1} = j_{n-1}, \dots, X_0 = j_0) = P(U_1 > i) \cdot S.$$

Damit ergibt sich

$$P(X_{n+1} = i+1 \mid X_n = i, X_{n-1} = j_{n-1}, \dots, X_0 = j_0) = \frac{P(U_1 > i+1)}{P(U_1 > i)}.$$

Weiter gilt mit $B := \{X_n = i, X_{n-1} = j_{n-1}, \dots, X_0 = j_0\}$):

$$
\begin{aligned}
1 &= P(X_{n+1} \in \{0, i+1\} \mid X_n = i, X_{n-1} = j_{n-1}, \dots, X_0 = j_0) \\
&= P(X_{n+1} = 0 \mid B) + \underbrace{P(X_{n+1} = i+1 \mid B)}_{=\frac{P(U_1 > i+1)}{P(U_1 > i)}}
\end{aligned}
$$

Es folgt

$$P(X_{n+1} = 0 \mid B) = 1 - \Pi(i, i+1) = \Pi(i, 0).$$

Da Π eine stochastische Matrix ist, folgt die Behauptung aus Satz 1.9. □

2 Existenz und Markov-Eigenschaft

Satz 2.1. *Seien Z_n, $n \in \mathbb{N}$, unabhängig und identisch verteilt auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Werten in F und sei E abzählbar. Sei $f : E \times F \to E$ eine messbare Funktion und sei $X_0 : \Omega \to E$ eine Zufallsvariable, die unabhängig von Z_n, $n \in \mathbb{N}$, ist. Wir setzen*

$$X_{n+1} := f(X_n, Z_{n+1}) \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Dann ist $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine homogene Markovkette mit Zustandsraum E und Übergangsmatrix

$$\Pi(i, j) = P(f(i, Z_1) = j) \quad \textit{für alle } i, j \in E.$$

Beweis. Nach Definition gilt

$$\begin{aligned}
X_1 &= f(X_0, Z_1),\\
X_2 &= f(X_1, Z_2) = f\left(f\left(X_0, Z_1\right), Z_2\right),\\
X_3 &= f(X_2, Z_3) = f\left(f\left(f\left(X_0, Z_1\right), Z_2\right), Z_3\right), \text{usw.}
\end{aligned}$$

Allgemein gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n = g_n(X_0, Z_1, \ldots, Z_n)$$

mit einer messbaren Funktion g_n.

Seien $n \in \mathbb{N}, i_0, \ldots, i_{n-1}, i, j \in E$ mit

$$P(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) > 0.$$

Wir setzen $A := \{X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0\}$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
&P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, \ldots, X_0 = i_0)\\
&= P\left(f\left(X_n, Z_{n+1}\right) = j \mid \{X_n = i\} \cap A\right)\\
&= P\left(f\left(i, Z_{n+1}\right) = j \mid \{X_n = i\} \cap A\right).\\
&\quad \text{Dabei hängt } \{X_n = i\} \cap A \text{ nur von } X_0, X_1, \ldots, X_n \text{ und damit nur von}\\
&\quad X_0, Z_1, \ldots, Z_n \text{ ab, und ist somit unabhängig von } Z_{n+1}.\\
&= P\left(f\left(i, Z_{n+1}\right) = j\right)\\
&= P\left(f\left(i, Z_1\right) = j\right) =: \Pi(i,j),
\end{aligned}$$

da Z_{n+1} dieselbe Verteilung wie Z_1 besitzt. Da Π eine stochastische Matrix ist, folgt aus Satz 1.9 die Behauptung. □

Beispiel 2.2. 1. Seien $\xi_n, n \in \mathbb{N}_0$, unabhängige faire Münzwürfe, d.h.

$$P(\xi_n = -1) = \frac{1}{2} = P(\xi_n = 1).$$

Wir setzen $Z_n := \xi_n$ für $n \in \mathbb{N}$, $f(i,j) = i + j$ und betrachten

$$X_0 := 0, \quad X_{n+1} := f(X_n, Z_{n+1}) = X_n + Z_{n+1} = X_n + \xi_{n+1}.$$

Induktiv ergibt sich

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i,$$

d.h. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist die einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$. Wegen Satz 2.1 ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine homogene Markovkette mit Übergangsmatrix

$$\begin{aligned}
\Pi(i,j) &= P\left(f\left(i, Z_1\right) = j\right) = P(i + Z_1 = j)\\
&= P(i + \xi_1 = j) = P(\xi_i = j - i) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{falls } j \in \{i+1, i-1\},\\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

2. Seien ξ_n und Z_n wie oben. Wir setzen $f(i,j) := j$ und betrachten

$$X_0 := \xi_0, \quad X_{n+1} := f(X_n, Z_{n+1}) = Z_{n+1} = \xi_{n+1}.$$

Dann ist $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine homogene Markovkette mit Übergangsmatrix

$$\Pi(i,j) = P\left(f\left(i, Z_1\right) = j\right) = P(Z_1 = j) = \frac{1}{2} \quad \text{für } i,j \in \{-1,1\}.$$

Satz 2.1 ist in vielen (aber nicht in allen) Fällen nützlich, um nachzuweisen, dass ein stochastischer Prozess eine Markovkette ist. In Beispiel 1.10 hilft er nicht.

Lemma 2.3. *Sei E ein abzählbarer Zustandsraum, $\Pi \in [0,1]^{E\times E}$ eine stochastische Matrix und $Z \sim \mathrm{Uniform}\,[0,1]$ gleichverteilt auf $[0,1]$. Dann gibt es eine messbare Funktion $f : E \times [0,1] \to E$ mit* *Vorlesung 3, 30.10.2013*

$$P\left(f\left(i, Z\right) = j\right) = \Pi(i,j) \quad \textit{für alle } i,j \in E.$$

Beweis. • *Fall $E = \mathbb{N}$.*

Für $i \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\begin{aligned} f(i,z) &:= j \qquad \text{für } z \in \left[\textstyle\sum_{k=1}^{j-1}\Pi(i,k), \sum_{k=1}^{j}\Pi(i,k)\right) \text{ und } j \in \mathbb{N}, \\ f(i,1) &:= 1. \end{aligned}$$

Dann ist f auf $E\times[0,1]$ definiert und messbar (Beachte $\Pi(i,j) \geq 0, \sum_{k=1}^{\infty}\Pi(i,k) = 1$). Für alle $i,j \in \mathbb{N}$ gilt:

$$P\left(f\left(i,z\right) = j\right) = P\left(\textstyle\sum_{k=1}^{j-1}\Pi(i,k) \leq Z < \sum_{k=1}^{j}\Pi(i,k)\right) = \Pi(i,j).$$

- *Fall $E = \{1,\dots,n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.*

  Ersetze „$j \in \mathbb{N}$“ in der Definition von f durch „$j \in \{1,\dots,n\}$“.
  Da sich jede abzählbare Menge bijektiv auf $\mathbb{N}$ oder $\{1,\dots,n\}$ abbilden lässt, folgt die Behauptung.

□

Satz 2.4. *Sei E abzählbar und $\Pi \in [0,1]^{E\times E}$ eine stochastische Matrix. Seien $Z_n, n \in \mathbb{N}$ unabhängige $\mathrm{Uniform}\,[0,1]$-verteilte Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Sei $f : E \times [0,1] \to E$ eine Funktion aus Lemma 2.3 und sei $i_0 \in E$. Wir definieren*

$$X_0 := i_0, \qquad X_{n+1} := f(X_n, Z_{n+1}) \quad \textit{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

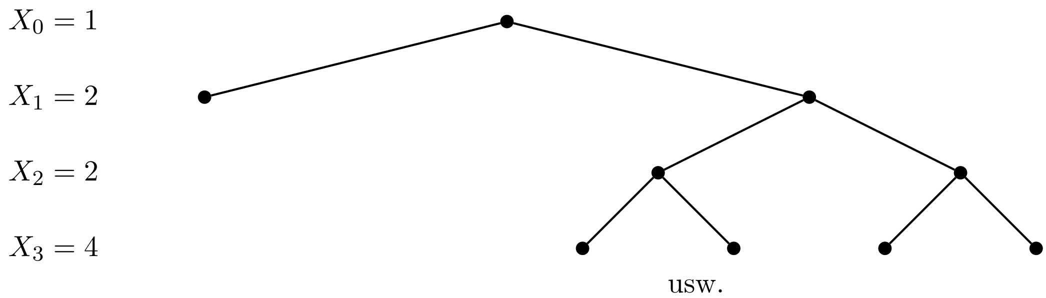
Dann ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine homogene Markovkette mit Übergangsmatrix Π und $P(X_0 = i_0) = 1$.

Beweis. Folgt aus Satz 2.1. □

Korollar 2.5. *Ist E abzählbar und $\Pi \in [0,1]^{E\times E}$ eine stochastische Matrix, so existiert eine homogene Markovkette mit Übergangsmatrix Π.*

Satz 2.4 gibt eine spezielle Konstruktion von Markovketten. Man nennt sie auch *Darstellung der Markovkette durch eine zufällige Abbildung.* Ist E endlich und klein, so lässt sich diese Darstellung zum Simulieren der Markovkette verwenden. Die Darstellung ist nicht eindeutig, da z.B. f nicht eindeutig ist.

Beispiel 2.6 (Verzweigungsprozesse)**.** Wir betrachten folgendes Modell: Sei ρ eine Verteilung auf $\mathbb{N}_0$. Jedes Individuum in einer gegebenen Population hat eine zufällige, gemäß ρ verteilte Anzahl von Kindern, unabhängig von allen anderen Individuen.
Sei X_n die Anzahl Individuen in der n-ten Generation.
Im Fall $\rho(0) = \rho(2) = \frac{1}{2}$ hat jedes Individuum 0 oder 2 Kinder, z.B.



Seien $Z_n^{(j)}, j, n \in \mathbb{N}$, unabhängig und identisch verteilt mit Verteilung ρ. Wir setzen

$$X_0 := 1, \qquad X_{n+1} := \sum_{k=1}^{X_n} Z_{n+1}^{(k)} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Dann beschreibt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Situation von oben. Der Prozess heißt *Verzweigungsprozess* oder *Galton-Watson-Prozess.*
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine Markovkette. Dies folgt aus Satz 2.1 mit $Z_n := (Z_n^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ und

$$f(i, (z^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}) := \sum_{k=1}^{i} z^{(k)} \quad \text{für } i \in \mathbb{N}_0, z^{(j)} \in \mathbb{N}_0,$$

da

$$X_{n+1} = f(X_n, Z_{n+1}) = \sum_{k=1}^{X_n} Z_{n+1}^{(k)}.$$

Sei

$$p = P(Z_n = 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N})$$

die Aussterbewahrscheinlichkeit. Man kann zeigen, dass p nur von $m = E[Z_1^{(1)}]$, der erwarteten Anzahl Kinder eines Individuums, abhängt. Es gilt:

- $p = 1$, falls $m \leq 1$ und $\rho(1) \neq 1$. (Im Fall $\rho(1) = 1$ hat jedes Indivdiduum genau ein Kind, so dass der Prozess nie ausstirbt.)

- $p < 1$, falls $m > 1$.

Definition 2.7. Für eine Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Zustandsraum E heißt das Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf E gegeben durch

$$\mu(A) := P(X_0 \in A)$$

die *Startverteilung* der Markovkette.

Die Startverteilung ist die Verteilung von X_0. Sie ist durch

$$\mu(x) := \mu(\{x\}) = P(X_0 = x) \quad \text{für } x \in E$$

eindeutig festgelegt, da

$$\mu(A) = \sum_{x\in A} \mu(x) \quad \text{für alle } A \subseteq E.$$

Für $k \in E$ sei δ_k das *Dirac-Maß* in k, d.h.

$$\delta_k(A) = \begin{cases} 1, \text{falls } k \in A, \\ 0, \text{falls } k \notin A. \end{cases}$$

Satz 2.8 (Markov-Eigenschaft)**.** *Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Übergangsmatrix Π. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $k \in E$ mit $P(X_m = k) > 0$. Bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes*

$$\tilde{P} := P(\,\cdot \mid X_m = k)$$

ist $(\tilde{X}_n := X_{n+m})_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Übergangsmatrix Π und Startverteilung δ_k. Die Markovkette $(\tilde{X}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist unter $\tilde{P}$ unabhängig von $X_0, \ldots, X_m$.

Beweis. Für alle $i \in E$ gilt:

$$\tilde{P}(\tilde{X}_0 = i) = P(X_m = i \mid X_m = k) = \delta_k(\{i\}).$$

Also hat $(\tilde{X}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Startverteilung δ_k.

Die Markov-Eigenschaft ist eine Eigenschaft der Verteilung. Daher können wir o.B.d.A. annehmen, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ als Darstellung durch eine zufällige Abbildung gegeben ist. Dazu seien $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig und Uniform $(0,1)$-verteilt, unabhängig von X_0 und sei $f : E \times [0,1] \to E$ eine messbare Funktion mit

$$P\left(f\left(i, Z_1\right) = j\right) = \Pi(i,j)$$

für alle $i, j \in E$. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$X_{n+1} := f(X_n, Z_{n+1}).$$

Wir setzen $\tilde{Z}_n := Z_{n+m}$ für $n \in \mathbb{N}$. Nach Konstruktion ist X_m eine Funktion von $X_0, Z_1, \ldots, Z_m$, d.h. $X_m = g(X_0, Z_1, \ldots, Z_m)$.

Behauptung. Unter $\tilde{P}$ sind $\tilde{Z}_n, n \in \mathbb{N}$, unabhängig und identisch verteilt mit derselben Verteilung wie Z_1 unter P. Außerdem sind alle $\tilde{Z}_n, n \in \mathbb{N}$, unter $\tilde{P}$ unabhängig von $\tilde{X}_0$.

Beweisidee. Für $A, B \subseteq [0,1]$ Borel-messbar und $i \in E$ gilt:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{P}(\tilde{Z}_1 \in A, \tilde{Z}_2 \in B, \tilde{X}_0 = i) \\
&= P(Z_{m+1} \in A, Z_{m+2} \in B, X_m = i \mid X_m = k) \\
&= \delta_k(\{i\}) P(Z_{m+1} \in A, Z_{m+2} \in B \mid X_m = k) \\
&= \tilde{P}(\tilde{X}_0 = i) P(Z_{m+1} \in A, Z_{m+2} \in B) && \text{da } X_m = g(X_0, Z_1, \ldots, Z_m) \\
& && \text{unabhängig von } Z_{m+1} \text{ und } Z_{m+2} \\
&= \tilde{P}(\tilde{X}_0 = i) P(Z_1 \in A) P(Z_1 \in B) && \text{da die } Z_n, n \in \mathbb{N}, \text{ unabhängig} \\
& && \text{und identisch verteilt sind.}
\end{aligned}
$$

Weiter gilt:

$$\tilde{P}(f(i, \tilde{Z}_1) = j) = P(f(i, Z_1) = j) = \Pi(i,j) \quad \text{für alle } i, j \in E,$$

und

$$
\begin{aligned}
\tilde{X}_0 &= X_m, \\
\tilde{X}_{n+1} &= X_{n+m+1} = f(X_{n+m}, Z_{n+m+1}) = f(\tilde{X}_n, \tilde{Z}_{n+1}).
\end{aligned}
$$

Dies ist eine Darstellung durch eine zufällige Abbildung für $(\tilde{X}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Nach Satz 2.1 ist $(\tilde{X}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Übergangsmatrix Π.

$(\tilde{X}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ hängt nur von X_m und $\tilde{Z}_n = Z_{n+m}, n \in \mathbb{N}$ ab, während $X_0, \ldots, X_{m-1}$ Funktionen von $X_0, Z_1, \ldots, Z_{m-1}$ sind. Gegeben $X_m = k$ sind somit $X_0, \ldots, X_m$ unabhängig von $(\tilde{X}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. □

3 Die endlich dimensionalen Verteilungen einer Markovkette

Satz 3.1. *Seien E abzählbar, $\Pi \in [0,1]^{E \times E}$ eine stochastische Matrix und μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf E. Für eine Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von Zufallsvariablen mit Werten in einer abzählbaren Menge E sind äquivalent:* *Vorlesung 4, 06.11.2013*

(a) $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist eine Markovkette mit Übergangsmatrix Π und Startverteilung μ.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}_0, i_0, \ldots, i_n \in E$ gilt:

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = \mu(i_0) \cdot \Pi(i_0, i_1) \cdot \Pi(i_1, i_2) \cdot \ldots \cdot \Pi(i_{n-1}, i_n).$$

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}_0, A_0, \ldots, A_n \subseteq E$ gilt:

$$
\begin{aligned}
&P(X_0 \in A_0, X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) \\
&\quad = \sum_{i_0 \in A_0} \mu(i_0) \sum_{i_1 \in A_1} \Pi(i_0, i_1) \sum_{i_2 \in A_2} \Pi(i_1, i_2) \cdots \sum_{i_n \in A_n} \Pi(i_{n-1}, i_n).
\end{aligned}
$$

Korollar 3.2. *Startverteilung und Übergangsmatrix legen die endlich-dimensionalen Verteilungen (d.h. die Wahrscheinlichkeiten aus Satz 3.1 (c)) einer Markovkette eindeutig fest.*

Beweis von Satz 3.1.

- $(a) \Rightarrow (b)$: Beweis mit vollständiger Induktion über n.
  - $n = 0$. $P(X_0 = i_0) = \mu(i_0)$ nach Definition der Startverteilung.
  - $n \to n+1$. Sei die Behauptung für $n \in \mathbb{N}_0$ richtig und $i_0, i_1, \ldots, i_{n+1} \in E$. Wir setzen $A_k := \{X_0 = i_0, \ldots, X_k = i_k\}$ für $k = n$ und $k = n+1$. Es gilt, falls $P(A_n) > 0$:

$$\begin{aligned} P(X_0 = i_0, \ldots, X_{n+1} = i_{n+1}) &= P(A_{n+1}) = P(A_n \cap \{X_{n+1} = i_{n+1}\}) \\ &= P(A_n) \underbrace{P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid A_n)}_{=\Pi(i_n, i_{n+1}) \text{ nach (a)}} \\ &= \mu_0 \cdot \Pi(i_0, i_1) \cdot \ldots \cdot \Pi(i_{n-1}, i_n) \cdot \Pi(i_n, i_{n+1}) \end{aligned}$$

    nach Induktionsvoraussetzung.

- $(b) \Rightarrow (c)$: Folgt aus der σ-Additivität von P.
- $(c) \Rightarrow (b)$: Klar.
- $(b) \Rightarrow (a)$: Für $n = 0$ liefert (b):

$$P(X_0 = i_0) = \mu(i_0) \quad \text{für alle } i_0 \in E.$$

  Daher ist μ die Startverteilung.
  Seien $n \in \mathbb{N}_0, i_0, \ldots, i_{n-1}, i, j \in E$ mit $P(\underbrace{X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i}_{=:A_n}) > 0$.
  Es gilt:

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = j \mid A_n) &= \frac{P(A_n \cap \{X_{n+1} = j\})}{P(A_n)} \\ &\overset{(b)}{=} \frac{\mu(i_0) \cdot \Pi(i_0, i_1) \cdot \ldots \cdot \Pi(i_{n-1}, i) \cdot \Pi(i, j)}{\mu(i_0) \cdot \Pi(i_0, i_1) \cdot \ldots \cdot \Pi(i_{n-1}, i)} = \Pi(i, j). \end{aligned}$$

  Also ist $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ nach Satz 1.9 eine Markovkette mit Übergangsmatrix Π.

□

Wir identifizieren jede Verteilung μ auf E mit dem Zeilenvektor (d.h. der $1 \times E$-Matrix)

$$(\mu(i))_{i \in E}.$$

Wir schreiben P_μ für das Wahrscheinlichkeitsmaß einer Markovkette mit Startverteilung μ und setzen $P_k := P_{\delta_k}$ für $k \in E$. Unter P_k startet die Markovkette mit Wahrscheinlichkeit 1 in k. Für $n \in \mathbb{N}_0$ bezeichne μ^n die Verteilung von X_n, d.h.

$$\mu^n(A) = P_\mu(X_n \in A) \quad \text{für } A \subseteq E.$$

Insbesondere gilt:

$$\mu^0 = \mu, \qquad \mu^n(i) = P_\mu(X_n = i) \quad \text{für alle } i \in E.$$

Satz 3.3. *Für eine Markovkette mit Starverteilung μ und Übergangsmatrix Π gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:*

$$\mu^n = \mu\Pi^n.$$

Dabei sind μ^n und μ als Zeilenvektoren zu verstehen und Π^n ist die n-te Potenz der Matrix Π; $\Pi^0 = \mathrm{Id} =$ Einheitsmatrix.

Beweis. Für $i \in E$ wenden wir Satz 3.1 (c) an mit $A_0 = \cdots = A_{n-1} = E$ und $A_n = \{i\}$:

$$\begin{aligned}\mu^n(i) &= P_\mu(X_n = i)\\ &= \sum_{i_0 \in E} \sum_{i_1 \in E} \cdots \sum_{i_{n-1} \in E} \mu(i_0) \cdot \Pi(i_0, i_1) \cdot \ldots \cdot \Pi(i_{n-2}, i_{n-1}) \cdot \Pi(i_{n-1}, i) = (\mu\Pi^n)(i).\end{aligned}$$

□

Mit Hilfe von Satz 3.3 kann man die Verteilung einer Markovkette zur Zeit n leicht berechnen.

Beispiel 3.4 (Häggström)**.** Betrachte das vereinfachte Modell für das Wetter in Los Angeles von Beispiel 1.8: $E = \{s, r\}$,

$$\Pi = \begin{array}{c} \\ s \\ r \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} s & r \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

Für $\mu = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)$ (d.h. $\mu(s) = \frac{5}{6}, \mu(r) = \frac{1}{6}$) gilt:

$$\begin{aligned}\mu^1 = \mu\Pi &= \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right) \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\\ &= \left(\frac{45}{60} + \frac{1}{12}, \frac{5}{60} + \frac{1}{12}\right)\\ &= \left(\frac{50}{60}, \frac{10}{60}\right) = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right) = \mu.\end{aligned}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ folgt:

$$\mu^n = \mu\Pi^n = \mu\Pi \cdot \Pi^{n-1} = \mu\Pi^{n-1} = \mu^{n-1}.$$

Somit folgt:

$$\mu^n = \mu^0 = \mu \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

D.h. für diese Wahl der Startverteilung μ hat X_n für alle $n \in \mathbb{N}_0$ dieselbe Verteilung, nämlich μ. Das ist die Ausnahme. Z.B. ergibt sich für $\mu = (1, 0)$

$$\mu^1 = \mu\Pi = \left(\frac{9}{10}, \frac{1}{10}\right) \neq \mu.$$

Satz 3.5. *Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Übergangsmatrix Π. Für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$, $i, j \in E$ mit $P(X_m = i) > 0$ gilt:*

$$P(X_{m+n} = j \mid X_m = i) = \Pi^n(i, j).$$

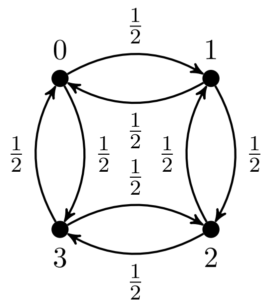
Beweis. Nach Satz 2.8 ist $(\tilde{X}_n = X_{m+n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ unter $\tilde{P}(\cdot|X_m = i)$ eine Markovkette mit Übergangsmatrix Π und Startverteilung δ_i. Es folgt:

$$P(X_{m+n} = j \mid X_m = i) = \tilde{P}(\tilde{X}_n = j) = P_{\delta_i}(X_n = j) = \Pi^n(i,j).$$

□

Gegeben $X_m = i$ ist die Wahrscheinlichkeit, n Schritte später in j zu sein, $\Pi^n(i,j)$. Man nennt $\Pi^n(i,j)$ auch die *n-Schritt Übergangswahrscheinlichkeit* von i nach j.

Beispiel 3.6. Wir betrachten die Symmetrische Irrfahrt auf der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$. Dies ist eine Markovkette mit $E = \mathbb{Z}_4$ und Übergangsgraph



Übergangsmatrix:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Beobachtung: Wenn die Markovkette zur Zeit 0 in 0 startet, ist sie zu geraden Zeiten in $\{0,2\}$, zu ungeraden Zeiten in $\{1,3\}$. Es gilt:

$$\Pi^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Allgemein gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\Pi^{2n} = \Pi^2, \quad \Pi^{2n+1} = \Pi.$$

Damit ergibt sich für die Irrfahrt mit Start in 0, d.h. $\mu = (1,0,0,0)$:
Verteilung von X_{2n} (d.h. zu geraden Zeiten):

$$\mu^{2n} = \mu\Pi^{2n} = \mu\Pi^2 = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right)$$

Verteilung von X_{2n+1} (d.h. zu ungeraden Zeiten):

$$\mu^{2n+1} = \mu\Pi^{2n+1} = \mu\Pi = \left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

Insbesondere konvergiert μ^n nicht für $n \to \infty$, aber $\mu^{2n}, n \in \mathbb{N}$, und $\mu^{2n+1}, n \in \mathbb{N}$, sind konstant.

4 Kommunikation und Periode

Alle Eigenschaften dieses Kapitels lassen sich am Übergangsgraphen ablesen, ohne die Übergangswahrscheinlichkeiten zu verwenden.

Definition 4.1. Seien $i, j \in E$.

- j ist von i *erreichbar*, $i \to j$, falls $n \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $\Pi^n(i,j) > 0$.
- i und j *kommunizieren*, $i \leftrightarrow j$, falls $i \to j$ und $j \to i$.

Wegen $\Pi^0(i,i) = 1$ gilt stets $i \to i$.

Bemerkung 4.2. $\leftrightarrow$ ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen heißen *kommunizierende Klassen.*

Beweis.

- Offenbar ist $\leftrightarrow$ reflexiv und symmetrisch.
- Seien $i, j, k \in E$ mit $i \leftrightarrow j$ und $j \leftrightarrow k$.
  Dann gibt es $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $\Pi^m(i,j), \Pi^n(j,k) > 0$. Es folgt:
  $$\Pi^{n+m}(i,k) = \sum_{\ell \in E} \Pi^n(i,\ell)\Pi^m(\ell,k) \geq \Pi^n(i,j)\Pi^m(j,k) > 0,$$
  d.h. $i \to k$. Analog ergibt sich $k \to i$. Also $i \leftrightarrow k$ und $\leftrightarrow$ ist transitiv.

□

Definition 4.3. Eine nichtleere Menge $C \subseteq E$ von Zuständen heißt *abgeschlossen*, wenn für alle $i \in C$ gilt: *Vorlesung 5, 13.11.2013*
$$\sum_{j \in C} \Pi(i,j) = 1.$$

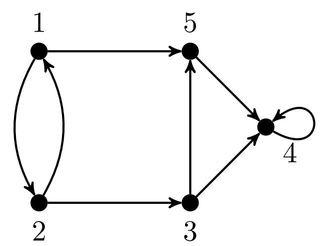
Definition 4.4. Eine Markovkette heißt *irreduzibel*, wenn sie nur eine kommunizierende Klasse besitzt. Sonst heißt sie *reduzibel.*

Bemerkung 4.5. Eine Markovkette ist genau dann irreduzibel, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen gilt:

(a) Für alle $i, j \in E$ mit $i \neq j$ existiert ein $n = n(i,j) \in \mathbb{N}$ mit $\Pi^n(i,j) > 0$.

(b) Für alle $i, j \in E$ gilt: $i \to j$.

Beispiel 4.6. Betrachte eine Markovkette mit folgendem Übergangsgraphen:



- $1 \leftrightarrow 2$
  $i \nrightarrow 1, i \nrightarrow 2$ für alle $i \neq 1, 2$
  Daher ist $\{1, 2\}$ eine kommunizierende Klasse.
- $4 \nrightarrow i$ für alle $i \neq 4$
  Also ist $\{4\}$ kommunizierende Klasse.
- $3 \to 5$ aber $5 \nrightarrow 3$
  Also sind $\{3\}$ und $\{5\}$ kommunizierende Klassen.
- Die Markovkette ist nicht irreduzibel.
- $\{4\}$ ist abgeschlossen, ebenso $\{3, 4, 5\}$ und $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
- Für jede Markovkette ist E abgeschlossen.

Definition 4.7. Für $i \in E$ sei

$$\mathcal{T}(i) := \{n \geq 1 : \Pi^n(i, i) > 0\}.$$

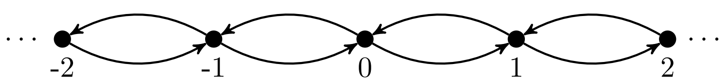
Der größte gemeinsame Teiler von $\mathcal{T}(i)$

$$d_i := \mathrm{ggT}(\mathcal{T}(i))$$

heißt *Periode* von i. Konvention: $\mathrm{ggT}(\emptyset) = \infty$.

Falls $d_i = 1$, so heißt i *aperiodisch*. Eine Markovkette heißt *aperiodisch*, wenn alle Zustände aperiodisch sind. Sonst heißt die Markovkette *periodisch*.

Beispiel 4.8 (Einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$).

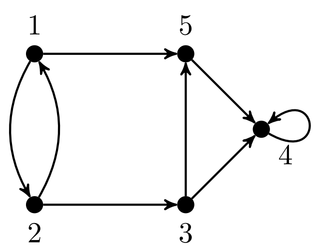


Für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\mathcal{T}(i) = 2\mathbb{N}.$$

Somit hat jeder Zustand Periode 2.

Beispiel 4.9.



- $\mathcal{T}(1) = 2\mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad d_1 = 2$
  Symmetrie zwischen 1 und 2, also $d_2 = 2$
- $1 \in \mathcal{T}(4) \quad \Rightarrow \quad d_4 = 1$

- $\Pi^n(3,3) = 0$ für alle $n \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{T}(3) = \emptyset \quad \Rightarrow \quad d_3 = \infty$.
- Analog $d_5 = \infty$.

Lemma 4.10. *Falls $i \leftrightarrow j$, so haben i und j dieselbe Periode.*

Beweis. O.B.d.A. gelte $i \neq j$. Da $i \leftrightarrow j$, existieren $r, s \in \mathbb{N}$ mit

$$\Pi^r(i,j) > 0 \quad \text{und} \quad \Pi^s(j,i) > 0.$$

Für alle $k \in \mathcal{T}(i)$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\Pi^{r+k+s}(j,j) = \sum_{\ell \in E} \sum_{m \in E} \Pi^s(j,\ell)\Pi^k(\ell,m)\Pi^r(m,j) \geq \Pi^s(j,i)\Pi^k(i,i)\Pi^r(i,j) > 0.$$

Wegen

$$\Pi^{s+r}(j,j) = \sum_{\ell \in E} \Pi^s(j,\ell)\Pi^r(\ell,j) \geq \Pi^s(j,i)\Pi^r(i,j) > 0$$

gilt $s + r \in \mathcal{T}(j)$. Somit folgt:

$$d_j \mid s + k + r \quad \text{und} \quad d_j \mid s + r.$$

Also: $d_j \mid s + k + r - (s + r) = k$ für alle $k \in \mathcal{T}(i)$ und $d_j \leq d_i$. Aus Symmetriegründen folgt ebenso $d_i \leq d_j$. □

Definition 4.11. Die *Periode* einer irreduziblen Markovkette ist die Periode ihrer Zustände.

Satz 4.12. *Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine irreduzible Markovkette mit Periode d. Für alle $i, j \in E$ existieren $m = m(i,j) \in \mathbb{N}_0$ und $n_0 = n_0(i,j) \in \mathbb{N}_0$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:*

$$\Pi^{m+nd}(i,j) > 0.$$

Im Fall $i = j$ können wir $m = 0$ wählen.

Korollar 4.13. *Für eine irreduzible, aperiodische Markovkette mit endlichem Zustandsraum existiert $n_0 \in \mathbb{N}_0$, sodass für alle $i, j \in E$ und alle $n \geq n_0$ gilt:*

$$\Pi^n(i,j) > 0.$$

Beweis. Die Bezeichnungen seien wie in Satz 4.12. Dann gilt $d = 1$. Wir definieren

$$n_1 := \max_{i,j \in E} (m(i,j)) + n_0(i,j)) \in \mathbb{N}_0.$$

Dann gilt nach Satz 4.12 für alle $n \geq n_1$

$$\Pi^n(i,j) = \Pi^{m(i,j)+(n-m(i,j))}(i,j) > 0.$$

□

Der Beweis von Satz 4.12 benötigt folgendes Lemma:

Lemma 4.14. *Sei $A = \{a_1, a_2, \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ eine Menge mit folgenden Eigenschaften:*

(a) $\mathrm{ggT}(A) = 1$

(b) $a \in A$ *und* $a' \in A \quad \Rightarrow \quad a + a' \in A$

Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $n \in A$ für alle $n \geq n_0$.

Beweis. Brémaud, Satz 1.1 im Anhang. □

Beweis von Satz 4.12. Sei $i \in E$. Wir betrachten

$$\mathcal{T}(i) = \{k \in \mathbb{N} : \Pi^k(i,i) > 0\}.$$

Für $k, \ell \in \mathcal{T}(i)$ gilt:

$$\Pi^{k+\ell}(i,i) \geq \Pi^k(i,i)\Pi^\ell(i,i) > 0$$

und somit folgt $k + \ell \in \mathcal{T}(i)$.

Nach Voraussetzung hat i die Periode $d_i = d$. Daher erfüllt

$$A := \frac{1}{d}\mathcal{T}(i) = \left\{\frac{a}{d} : a \in \mathcal{T}(i)\right\}$$

die Voraussetzungen von Lemma 4.14. Also existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$n \in A$$

und damit $nd \in \mathcal{T}(i)$, d.h.

$$\Pi^{nd}(i,i) > 0.$$

Das beweist die Behauptung für $i = j$.

Seien nun $i, j \in E$. Da die Markovkette irreduzibel ist, existiert ein $m \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\Pi^m(i,j) > 0.$$

Wähle $n_0 \in \mathbb{N}_0$ so, dass

$$\Pi^{nd}(j,j) > 0 \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$$\Pi^{m+nd}(i,j) \geq \Pi^m(i,j)\Pi^{nd}(j,j) > 0.$$

□

Satz 4.15. *Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible Markovkette mit Periode d. Dann existiert genau eine Partition $C_0, \dots, C_{d-1}$ des Zustandsraumes E, sodass für alle $k = 0, \dots, d-1$ und $i \in C_k$ gilt:*

Vorlesung 6, 20.11.2013

$$\sum_{j \in C_{k+1}} \Pi(i,j) = 1.$$

Dabei setzen wir $C_d = C_0$.

Beweis.

- *Existenz.* Für $i, j \in E$ sei
$$\begin{aligned} i \sim j &:\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } \Pi^{nd}(i,j) > 0 \\ &\Leftrightarrow i \text{ und } j \text{ kommunizieren bezüglich der Markovkette} \\ &\qquad \text{mit Übergangsmatrix } \Pi^d. \end{aligned}$$
Insbesondere ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation. Sei C_0 eine beliebige Äquivalenzklasse bezüglich $\sim$. Wir definieren
$$C_{k+1} := \{j \in E : \exists i \in C_k \text{ mit } \Pi(i,j) > 0\}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$
Dann gilt nach Konstruktion für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $i \in C_k$:
$$\sum_{j \in C_{k+1}} \Pi(i,j) = \sum_{j \in E} \Pi(i,j) = 1.$$
Behauptung. C_1 ist eine Äquivalenzklasse bezüglich $\sim$.
Offenbar ist $C_1 \neq \emptyset$.
  - Alle $j, j' \in C_1$ sind äquivalent: Es existieren $i, i' \in C_0$ mit
  $$\Pi(i,j) > 0, \qquad \Pi(i',j') > 0.$$
  Da die Markovkette irreduzibel ist, existiert ein $m \in \mathbb{N}_0$ mit
  $$\Pi^m(j,i) > 0.$$
  Es folgt:
  $$\Pi^{m+1}(j,j) \geq \Pi^m(j,i)\Pi(i,j) > 0.$$
  Da j Periode d hat, gilt $d \mid m+1$. Wegen $i \sim i'$ existiert ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit
  $$\Pi^{nd}(i,i') > 0.$$
  Es folgt:
  $$\Pi^{m+nd+1}(j,j') \geq \Pi^m(j,i)\Pi^{nd}(i,i')\Pi(i',j') > 0$$
  und $d \mid m + nd + 1$. Also gilt $j \sim j'$.
  - Seien $j \in C_1$ und $j' \in E$ mit $j \sim j'$. Dann gilt $j' \in C_1$:
  Wähle
  $$\begin{aligned} n &\in \mathbb{N}_0 && \text{mit } \Pi^{nd}(j',j) > 0, \\ i &\in C_0 && \text{mit } \Pi(i,j) > 0, \\ i' &\in E && \text{mit } \Pi(i',j') > 0, && (i' \text{ existiert wegen der Irreduzibilität}) \\ m &\in \mathbb{N}_0 && \text{mit } \Pi^m(j,i) > 0. \end{aligned}$$
  Wegen
  $$0 < \Pi^m(j,i)\Pi(i,j) \leq \Pi^{m+1}(j,j)$$
  gilt $d \mid m+1$. Es folgt:
  $$\Pi^{1+nd+m}(i',i) \geq \Pi(i',j')\Pi^{nd}(j',j)\Pi^m(j,i) > 0$$
  und aus $d \mid m+1$ folgt $d \mid 1 + nd + m$. Somit gilt $i \sim i'$, aber auch $i' \in C_0$. Somit gilt $j' \in C_1$.

Damit ist gezeigt, dass C_1 eine Äquivalenzklasse bezüglich $\sim$ ist. Induktiv folgt, dass C_k für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ eine Äquivalenzklasse bezüglich $\sim$ ist. Insbesondere gilt für alle $k, \ell \in \mathbb{N}_0 : C_k = C_\ell$ oder $C_k \cap C_\ell = \emptyset$. Außerdem ist $C_k \neq \emptyset$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Behauptung. $C_d = C_0$.
Da C_0 und C_d Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$ ist, genügt es zu zeigen, dass $C_d \subseteq C_0$. Sei $i_d \in C_d$. Nach Konstruktion existieren $i_k \in C_k, 0 \leq k \leq d-1$, mit $\Pi(i_k, i_{k+1}) > 0$ für $0 \leq k \leq d-1$. Es folgt:

$$\Pi^d(i_0, i_d) \geq \prod_{k=0}^{d-1} \Pi(i_k, i_{k+1}) > 0$$

und somit $i_0 \sim i_d$, also $i_d \in C_0$. Damit folgt $C_d \subseteq C_0$, also $C_0 = C_d$.
Da C_0 eine beliebige Äquivalenzklasse ist, folgt:

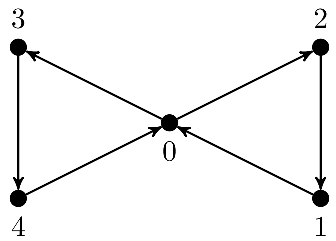
$$C_{kd+r} = C_r \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0, r = 0, 1, \dots, d-1.$$

Damit ist die Existenz der Partition gezeigt.

- *Eindeutigkeit.* Übung.

□

Beispiel 4.16. Betrachte eine Markovkette mit folgendem Übergangsgraph:



Die Markovkette ist irreduzibel und hat Periode 3.
Partition gemäß Satz 4.15 (eindeutig bis auf umnummerieren der C_k):

$$\begin{aligned} C_0 &= \{0\}, \\ C_1 &= \{j : \Pi(0, j) > 0\} = \{2, 3\}, \\ C_2 &= \{j : \Pi(2, j) > 0 \text{ oder } \Pi(3, j) > 0\} = \{1, 4\}. \end{aligned}$$

Bemerkung 4.17. Nach Satz 4.15 lassen sich die Zustände einer irreduziblen Markovkette mit Periode d derart umsortieren, dass die Übergangsmatrix folgende Blockgestalt hat:

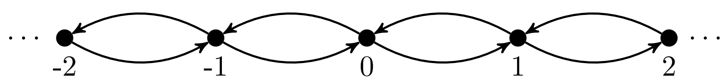
$$\Pi = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} C_0 & C_1 & C_2 & \dots & C_{d-2} & C_{d-1} \end{array} \\ \begin{array}{c} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ C_{d-2} \\ C_{d-1} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \Pi_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \ddots & \Pi_{d-2} \\ \Pi_{d-1} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Folglich hat auch Π^n für jedes n Blockgestalt. Insbesondere ist Π^{nd} für alle n eine Blockdiagonalmatrix.

Im Beispiel 4.16 ergibt sich damit:

$$\Pi = \begin{array}{rc} & \begin{array}{ccc} \overbrace{0}^{C_0} & \overbrace{2 \quad 3}^{C_1} & \overbrace{1 \quad 4}^{C_2} \end{array} \\ \begin{array}{r} C_0 \{\ 0 \\ C_1 \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases} \\ C_2 \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \boxed{\begin{matrix} p & 1-p \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \end{array}$$

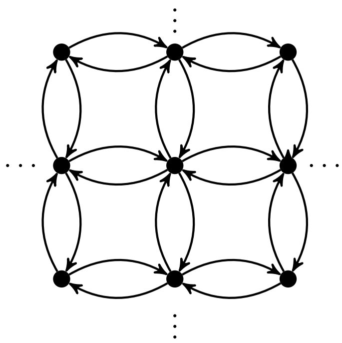
Beispiel 4.18. 1. *Irrfahrt auf* $\mathbb{Z}$



Die Markovkette ist irreduzibel und hat Periode 2.

$$C_0 = 2\mathbb{Z},$$
$$C_1 = 2\mathbb{Z} + 1.$$

2. *Irrfahrt auf* $\mathbb{Z}^2$



Die Markovkette ist irreduzibel und hat Periode 2.

$$\begin{aligned} C_0 &= \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : x \equiv y \mod 2\} \\ &= \text{Menge der Punkte in } \mathbb{Z}^2\text{, bei denen beide Koordinaten} \\ &\qquad \text{gerade oder beide ungerade sind,} \\ C_1 &= \mathbb{Z}^2 \setminus C_0. \end{aligned}$$

5 Stationarität

Definition 5.1. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß α heißt *stationär* für eine Markovkette mit Übergangsmatrix Π, falls für alle $i \in E$ gilt:

$$\alpha(i) = \sum_{j \in E} \alpha(j)\Pi(j,i).$$

In Matrixnotation ist dies äquivalent zu

$$\alpha = \alpha\Pi.$$

Gießt man an jedem Knoten j des Übergangsgraphen eine Menge $\alpha(j)$ Wasser in das Netzwerk, so fließt $\alpha(j)\Pi(j,i)$ von j nach i. Ist α stationär, so ist die Bilanz bei jedem Knoten ausgeglichen und das Netzwerk im Gleichgewicht.

Satz 5.2. *Ist die Startverteilung μ der Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ stationär, so hat X_n für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Verteilung μ, d.h.*

$$P_\mu(X_n \in A) = \mu(A)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $A \subseteq E$.

Beweis. Nach Satz 3.3 ist die Verteilung von X_n gegeben durch

$$\mu^n = \mu\Pi^n = \mu\Pi\,\Pi^{n-1} = \mu\Pi^{n-1} = \cdots = \mu\Pi = \mu.$$

□

Startet eine Markovkette in einer stationären Verteilung, so hat der Zustand zur Zeit n dieselbe Verteilung wie der Zustand zur Zeit 0. In diesem Sinn ist die Kette im Gleichgewicht.

Beispiel 5.3 (Ehrenfest-Modell)**.** Die Physiker Paul und Tatiana Ehrenfest haben es 1907 als vereinfachtes Modell für die Diffusion durch eine poröse Membran vorgeschlagen. Sie betrachteten ein Gefäß, das in zwei gleich große Kammern unterteilt ist, die miteinander verbunden sind. Das Gefäß enthalte viele, z.B. $N = 10^{23}$, Gasmoleküle.

Modell. N Kugeln sind auf zwei Urnen U_1 und U_2 verteilt. Zu jeder Zeit $n \in \mathbb{N}_0$ wird eine der N Kugeln ausgewählt und in die andere Urne gelegt. Sei X_n die Anzahl der Kugeln in U_1 zur Zeit n. Dann ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Übergangsmatrix Π gegeben durch

$$\begin{aligned}
\Pi(i,i-1) &= \frac{i}{N} && \text{für } 1 \le i \le N,\\
\Pi(i,i+1) &= 1 - \frac{i}{N} = \frac{N-i}{N} && \text{für } 0 \le i \le N-1,\\
\Pi(i,j) &= 0 && \text{für alle anderen Paare } (i,j).
\end{aligned}$$

Der Zustandsraum ist $E = \{0, 1, \ldots, N\}$. Übergangsgraph:

Behauptung. $\alpha(j) = \binom{N}{j}\dfrac{1}{2^N}$ für alle $0 \le j \le N$ ist eine stationäre Verteilung. Dies ist die Binomial $(N, \frac{1}{2})$-Verteilung. *Vorlesung 7, 27.11.2013*

Wenn man die N Kugeln unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ in U_1 und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ in U_2 legt, dann hat die Anzahl der Kugeln in U_1 Verteilung α.

Beweis. Zu zeigen: $\alpha(i) = \sum_{j=0}^{N} \alpha(j)\Pi(j,i)$ für alle $0 \le i \le N$.

- *Fall* $i = 0$: $\alpha(1)\Pi(1,0) = \binom{N}{1}\frac{1}{2^N} \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{2^N} = \alpha(0)$.
- *Fall* $i = n$: $\alpha(N-1)\Pi(N-1,N) = \binom{N}{N-1}\frac{1}{2^N} \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{2^N} = \alpha(N)$.
- *Fall* $1 \le i \le N-1$:

$$\begin{aligned}
&\alpha(i-1)\Pi(i-1,i) + \alpha(i+1)\Pi(i+1,i) \\
&= \binom{N}{i-1} \cdot \frac{1}{2^N} \cdot \frac{N-(i-1)}{N} + \binom{N}{i+1} \cdot \frac{1}{2^N} \cdot \frac{i+1}{N} \\
&= \frac{N!}{2^N} \cdot \frac{1}{N}\left(\frac{N-i+1}{(i-1)!(N-i+1)!} + \frac{i+1}{(i+1)!(N-i-1)!}\right) \\
&= \frac{N!}{2^N} \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{i+N-i}{i!(N-i)!} = \binom{N}{i} \cdot \frac{1}{2^N} = \alpha(i).
\end{aligned}$$

□

Beispiel 5.4 (Symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$)**.**

$$\Pi(i,j) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{falls } j \in \{i-1, i+1\}, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases} \qquad \text{für alle } i, j \in \mathbb{Z}.$$

Eine stationäre Verteilung α muss folgende Gleichung für alle $i \in \mathbb{Z}$ erfüllen:

$$\begin{aligned}
&& \alpha(i) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha(j)\Pi(j,i) &= \alpha(i-1)\frac{1}{2} + \alpha(i+1)\frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow && \frac{1}{2}(\alpha(i) - \alpha(i-1)) &= \frac{1}{2}(\alpha(i+1) - \alpha(i)) \\
\Rightarrow && \alpha(i+1) - \alpha(i) &= \alpha(i) - \alpha(i-1) \\
&& &= \alpha(i-1) - \alpha(i-2) \\
&& &= \alpha(1) - \alpha(0).
\end{aligned}$$

Sei $j \in \mathbb{N}_0$. Aufsummieren liefert :

$$\alpha(j) - \alpha(0) = \sum_{i=0}^{j-1}(\alpha(i+1) - \alpha(i)) = j(\alpha(1) - \alpha(0)).$$

Ausserdem gilt:

$$\begin{aligned}
&\alpha(0) - \alpha(-j) = \sum_{i=-j}^{-1} (\alpha(i+1) - \alpha(i)) = j(\alpha(1) - \alpha(0)) \\
\Rightarrow \quad &\alpha(-j) - \alpha(0) = -j(\alpha(1) - \alpha(0)).
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\alpha(j) = \alpha(0) + j(\alpha(1) - \alpha(0)) \quad \text{für alle } j \in \mathbb{Z}.$$

Wäre $\alpha(1) - \alpha(0) \neq 0$, so wäre

$$\lim_{j \to \infty} |\alpha(j)| = \infty.$$

Wegen $\alpha(j) \in [0,1]$ für alle $j \in \mathbb{Z}$, ist das unmöglich. Also ist $\alpha(1) - \alpha(0) = 0$ und es folgt:

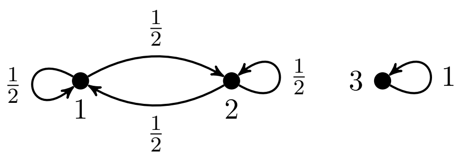
$$\alpha(j) = \alpha(0) \quad \text{für alle } j \in \mathbb{Z}.$$

Wegen

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha(j) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha(0) = \left\{\begin{matrix} 0, & \text{falls } \alpha(0) = 0 \\ \infty, & \text{falls } \alpha(0) > 0 \end{matrix}\right\} \neq 1$$

gibt es keine stationäre Verteilung.

Beispiel 5.5. Betrachte eine Markovkette mit folgendem Übergangsgraph:



Übergangsmatrix:

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\alpha = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ und $\beta = (0, 0, 1)$ sind stationäre Verteilungen.

Bemerkung 5.6. Wenn eine Markovkette zwei verschiedene stationäre Verteilungen besitzt, dann besitzt sie unendlich viele.

Beweis. Seien α und β stationäre Verteilungen. Für $\lambda \in (0,1)$ sei $\gamma_\lambda := \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\gamma_\lambda \Pi &= (\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta)\Pi \\
&= \lambda\alpha\Pi + (1-\lambda)\beta\Pi \\
&= \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta && \text{da } \alpha \text{ und } \beta \text{ stationär} \\
&= \gamma_\lambda.
\end{aligned}$$

Also ist γ_λ stationär. □

Beispiel 5.7. Betrachte das vereinfachte Modell für das Wetter in Los Angeles mit $E = \{s, r\}$ und Übergangsmatrix

$$\Pi = \begin{array}{c} \\ s \\ r \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} s & r \end{array} \\ \begin{pmatrix} p & 1-p \\ q & 1-q \end{pmatrix} \end{array}$$

mit unbekannten Übergangswahrscheinlichkeiten p und q. Man bestimme p und q so, dass

$$\alpha = \left(\frac{35}{36}, \frac{1}{36}\right)$$

eine stationäre Verteilung der Markovkette ist.

Hintergrund: Los Angeles hat ca. 10 Regentage pro Jahr. Somit ist die Wahrscheinlichkeit, dass es an einem Tag regnet

$$\approx \frac{10}{365} \approx \frac{10}{360} = \frac{1}{36}.$$

Es muss gelten:

$$\begin{aligned}
&& \alpha\Pi &= \alpha \\
\Leftrightarrow && \alpha(\Pi - \mathrm{Id}) &= 0 \\
\Leftrightarrow && \left(\frac{35}{36}, \frac{1}{36}\right) \begin{pmatrix} p-1 & 1-p \\ q & -q \end{pmatrix} &= (0,0) \\
\Leftrightarrow && 35(p-1) + q &= 0 \\
\Leftrightarrow && q &= 35(1-p).
\end{aligned}$$

Für $p \in [0,1]$ ist $q = 35(1-p) \geq 0$. Es bleibt die Bedingung

$$q = 35(1-p) \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{34}{35} \leq p.$$

Für $p \in [\frac{34}{35}, 1]$ und $q = 35(1-p)$ ist α eine stationäre Verteilung.

Für $p = \frac{34}{35}$ ergibt sich

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{34}{35} & \frac{1}{35} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für $p = \frac{69}{70}$ ergibt sich

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{69}{70} & \frac{1}{70} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Satz 5.8. *Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Übergangsmatrix Π und stationärer Verteilung α mit $\alpha(i) > 0$ für alle $i \in E$. Sei*

$$\Pi'(i,j) := \frac{\alpha(j)\Pi(j,i)}{\alpha(i)} \quad \textit{für alle } i,j \in E.$$

Dann gilt für alle $i,j \in E$ und $n \in \mathbb{N}_0$:

$$P_\alpha(X_n = j \mid X_{n+1} = i) = \Pi'(i,j).$$

Dies sind die Übergangswahrscheinlichkeiten rückwärts in der Zeit.

Beweis.

$$\begin{aligned} P_\alpha(X_n = j \mid X_{n+1} = i) &= \frac{P_\alpha(X_{n+1} = i \mid X_n = j)}{P_\alpha(X_{n+1} = i)} P_\alpha(X_n = j) \\ &= \frac{\Pi(j,i)\alpha(j)}{\alpha(i)} = \Pi'(i,j). \end{aligned}$$

□

Definition 5.9. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Übergangsmatrix Π. Eine Verteilung α auf E heißt *reversibel* für die Markovkette, falls für alle $i, j \in E$ gilt:

$$\alpha(i)\Pi(i,j) = \alpha(j)\Pi(j,i).$$

Die Markovkette heißt reversibel, wenn sie eine reversible Verteilung besitzt.

Gießt man an jedem Knoten j des Übergangsgraphen eine Menge $\alpha(j)$ Wasser in das Netzwerk, so fließt $\alpha(i)\Pi(i,j)$ von i nach j und $\alpha(j)\Pi(j,i)$ von j nach i. Ist α reversibel, so ist die Bilanz entlang jeder Kante im Gleichgewicht. Somit ist das Netzwerk lokal im Gleichgewicht. Intuitiv ist klar, dass dann auch an jedem Knoten die Bilanz ausgeglichen ist, was bei einer stationären Verteilung der Fall ist. Dies zeigt der folgende Satz.

Satz 5.10. *Jede reversible Verteilung ist stationär.*

Beweis. Sei α reversibel. Dann gilt für alle $i \in E$:

$$\begin{aligned} \sum_{j\in E} \alpha(j)\Pi(j,i) &= \sum_{j\in E} \alpha(i)\Pi(i,j) && \text{da } \alpha \text{ reversibel} \\ &= \alpha(i) && \text{da } \Pi \text{ stochastische Matrix.} \end{aligned}$$

□

Bemerkung 5.11. Ist eine Markovkette reversibel und erfüllt die reversible Verteilung $\alpha(i) > 0$ für alle $i \in E$, so gilt

$$\begin{aligned} P_\alpha(X_n = j \mid X_{n+1} = i) &= \frac{\alpha(j)\Pi(j,i)}{\alpha(i)} && \text{nach Satz 5.8} \\ &= \frac{\alpha(i)\Pi(i,j)}{\alpha(i)} && \text{da } \alpha \text{ reversibel} \\ &= \Pi(i,j) = P_\alpha(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \end{aligned}$$

für alle $i, j \in E$. D.h. die Übergangswahrscheinlichkeiten vorwärts und rückwärts in der Zeit sind gleich, wenn man in der reversiblen Verteilung startet.

Bemerkung 5.12. Das Ehrenfestmodell ist reversibel mit reversibler Verteilung *Vorlesung 8, 4.12.2013*

$$\alpha(j) = \binom{N}{j} \frac{1}{2^N}, \quad 0 \le j \le N.$$

Zur Erinnerung:

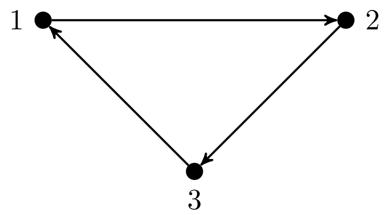
$$\Pi(i,i-1) = \frac{i}{N} \qquad \text{für } 1 \le i \le N,$$
$$\Pi(i,i+1) = \frac{N-i}{N} \qquad \text{für } 0 \le i \le N-1.$$

Zu zeigen:

$$\begin{aligned} & \alpha(i)\Pi(i,i+1) = \alpha(i+1)\Pi(i+1,i) \qquad \text{für } 0 \le i \le N-1 \\ \Leftrightarrow\quad & \binom{N}{i}\Pi(i,i+1) = \binom{N}{i+1}\Pi(i+1,i) \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{1}{N-i}\underbrace{\Pi(i,i+1)}_{=\frac{N-i}{N}} = \frac{1}{i+1}\underbrace{\Pi(i+1,i)}_{=\frac{i+1}{N}} \end{aligned}$$

Stimmt.

Beispiel 5.13. Wir betrachten eine Markovkette mit folgendem Übergangsgraphen:



Übergangsmatrix:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jede reversible Verteilung α erfüllt:

$$\begin{aligned} \alpha(1)\underbrace{\Pi(1,2)}_{=1} &= \alpha(2)\underbrace{\Pi(2,1)}_{=0} \quad \Rightarrow \quad \alpha(1) = 0, \\ \alpha(2)\underbrace{\Pi(2,3)}_{=1} &= \alpha(3)\underbrace{\Pi(3,2)}_{=0} \quad \Rightarrow \quad \alpha(2) = 0, \\ \alpha(3)\underbrace{\Pi(3,1)}_{=1} &= \alpha(1)\underbrace{\Pi(1,3)}_{=0} \quad \Rightarrow \quad \alpha(3) = 0. \end{aligned}$$

$(0,0,0)$ ist aber keine Verteilung. Also ist die Markovkette nicht reversibel.

Beispiel 5.14. Sei $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ ein Graph mit endlicher Knotenmenge $\mathcal{V}$ und einer Menge $\mathcal{E}$ ungerichteter Kanten $\{i,j\}$. Sei $d_i := |\{e \in \mathcal{E} : i \in e\}|$ der Grad von i.

Die *einfache Irrfahrt auf* G ist eine Markovkette mit Zustandsraum $\mathcal{V}$ und Übergangsmatrix

$$\Pi(i,j) = \begin{cases} \frac{1}{d_i}, & \text{falls } \{i,j\} \in \mathcal{E} \text{ für ein } j \in \mathcal{V}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt:

$$d_i \Pi(i,j) = d_j \Pi(j,i)$$

für alle $i, j \in \mathcal{V}$. Daher ist

$$\alpha(i) = \frac{d_i}{D}, \quad i \in \mathcal{V},$$

mit $D := \sum_{i \in \mathcal{V}} d_i$ ein reversibles Maß.

6 Starke Markov-Eigenschaft

Definition 6.1. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Folge $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}_0$, von σ-Algebren heißt *Filtration*, falls

$$\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

gilt.

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Zustandsraum E. Wir definieren

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n &:= \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n) \\ &:= \text{kleinste } \sigma\text{-Algebra, die alle Ereignisse der Form} \\ &\quad\; X_t^{-1}(A) \text{ mit } A \subseteq E \text{ und } t \in \{0, \ldots, n\} \text{ enthält.} \end{aligned}$$

$(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist eine Filtration, die *natürliche Filtration* des Prozesses $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Die σ-Algebra $\mathcal{F}_n$ enthält die Information des Prozesses bis zur Zeit n. Im folgenden arbeiten wir typischerweise mit dieser Filtration.

Definition 6.2. Eine Zufallsvariable $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ heißt *Stoppzeit* bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, falls für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Beispiel 6.3. Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Zustandsraum E und sei $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die natürliche Filtration. Für $A \subseteq E$ ist die *Eintrittszeit* von A definiert durch

$$\tau_A = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n \in A\}$$

mit der Konvention $\inf \emptyset = \infty$. Dann ist τ_A eine Stoppzeit, denn für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\{\tau_A = n\} = \{X_0 \notin A, X_1 \notin A, \ldots, X_{n-1} \notin A, X_n \in A\} \in \mathcal{F}_n.$$

Beispiel 6.4. Für festes $m \in \mathbb{N}_0$ ist $\tau \equiv m$ eine Stoppzeit, denn

$$\{\tau = n\} = \left\{\begin{matrix} \Omega, & \text{falls } n = m \\ \emptyset, & \text{falls } n \neq m \end{matrix}\right\} \in \mathcal{F}_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Beispiel 6.5. Die Zufallsvariable

$$\tau_A = \sup\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n \in A\}$$

ist im allgemeinen keine Stoppzeit, denn

$$\{\tau_A = 0\} = \{X_n \notin A \text{ für alle } n \geq 1\} \notin \sigma(X_0) = \mathcal{F}_0.$$

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Zustandsraum E und sei $\Delta \notin E$ beliebig. Wir definieren

$$X_\infty := \Delta.$$

Für eine Stoppzeit τ definieren wir

$$X_\tau : \Omega \to E \cup \{\Delta\}, \quad \omega \mapsto X_{\tau(\omega)} = \begin{cases} X_n(\omega), & \text{falls } \tau(\omega) = n \in \mathbb{N}_0, \\ \Delta, & \text{falls } \tau(\omega) = \infty. \end{cases}$$

Dies ist der Wert der Markovkette zur zufälligen Zeit τ.

Wir setzen $a \wedge b := \min\{a, b\}$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$X_{n\wedge\tau} = \begin{cases} X_n, & \text{auf dem Ereignis } \{\tau \geq n\}, \\ X_\tau, & \text{auf dem Ereignis } \{\tau \leq n\}. \end{cases}$$

Somit ist $(X_{n\wedge\tau})_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Markovkette gestoppt zur Zeit τ.

Satz 6.6 (Starke Markov-Eigenschaft). *Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Übergangsmatrix Π und sei τ eine Stoppzeit bezüglich der natürlichen Filtration von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Sei $k \in E$ mit $P(X_\tau = k) > 0$. Bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes*

$$\tilde{P} = P(\,\cdot \mid X_\tau = k)$$

ist $(\tilde{X}_n = X_{n+\tau})_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Übergangsmatrix Π und Startverteilung δ_k. Die Markovkette $(\tilde{X}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist unter $\tilde{P}$ unabhängig von $(X_{n\wedge\tau})_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Für $\tau \equiv m$ liefert die starke Markov-Eigenschaft gerade die gewöhnliche Markov-Eigenschaft aus Satz 2.8.

Beweis von Satz 6.6. Wir setzen $Y_n := X_{n\wedge\tau}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Seien $m, n \in \mathbb{N}_0, A_0, \ldots, A_m, B_0, \ldots, B_n \subseteq E$.

Behauptung:

$$\begin{aligned} &\tilde{P}(\tilde{X}_0 \in A, \ldots, \tilde{X}_m \in A_m, Y_0 \in B_0, \ldots, Y_n \in B_n) \\ &= P_{\delta_k}(X_0 \in A_0, \ldots, X_m \in A_m)\tilde{P}(Y_0 \in B_0, \ldots, Y_n \in B_n). \end{aligned} \tag{2}$$

Aus der Behauptung (2) für $B_0 = \cdots = B_n = E$ folgt

$$\tilde{P}(\tilde{X}_0 \in A_0, \ldots, \tilde{X}_m \in A_m) = P_{\delta_k}(X_0 \in A_0, \ldots, X_m \in A_m).$$

Also ist $(\tilde{X}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bezüglich $\tilde{P}$ eine Markovkette mit Übergangsmatrix Π und Startverteilung δ_k. Damit folgt aus (2) die Unabhängigkeit von $(\tilde{X}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bezüglich $\tilde{P}$.

Beweis von (2). Wir setzen

$$A := \{\tilde{X}_0 \in A_0, \ldots, \tilde{X}_m \in A_m\}, \quad B := \{Y_0 \in B_0, \ldots, Y_n \in B_n\}.$$

Wir berechnen

$$\tilde{P}(A \cap B)P(X_\tau = k) = P(A \cap B \cap \{X_\tau = k\}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} P(\{\tau = \ell\} \cap A \cap B \cap \{X_\tau = k\})$$

Beachte $X_\tau = k \in E \Rightarrow \tau < \infty$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} P(\tau = \ell, X_\ell \in A_0, \ldots, X_{\ell+m} \in A_m, X_{0\wedge\ell} \in B_0, \ldots, X_{n\wedge\ell} \in B_n, X_\ell = k)$$

Wir setzen $L := \{\ell \in \mathbb{N}_0 : P(X_\ell = k) > 0\}$. Wegen $P(X_\ell \in E) = 1$ ist $L \neq \emptyset$. Wir können die letzte Summe auf $\ell \in L$ beschränken. Es folgt:

$$\begin{aligned}
&\tilde{P}(A \cap B)P(X_\tau = k) \\
&= \sum_{\ell \in L} P(\underbrace{\tau = \ell}_{\in \mathcal{F}_\ell}, \underbrace{X_{0\wedge\ell} \in B_0, \dots, X_{n\wedge\ell} \in B_n}_{\text{hängt nur von } X_0,\dots,X_\ell \text{ ab}}, X_\ell \in A_0, \dots, X_{\ell+m} \in A_m | X_\ell = k)P(X_\ell = k)
\end{aligned}$$

Wir wenden die Markov-Eigenschaft aus Satz 2.8 an

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\ell \in L} P(\tau = \ell, X_{0\wedge\ell} \in B_0, \dots, X_{n\wedge\ell} \in B_n \mid X_\ell = k) \cdot \\
&\qquad \underbrace{P(X_\ell \in A_0, \dots, X_{\ell+m} \in A_m \mid X_\ell = k)}_{\overset{2.8}{=} P_{\delta_k}(X_0 \in A_0, \dots, X_m \in A_m)} P(X_\ell = k) \\
&= P_{\delta_k}(X_0 \in A_0, \dots, X_m \in A_m) \sum_{\ell=0}^{\infty} P(\tau = \ell, X_{0\wedge\ell} \in B_0, \dots, X_{n\wedge\ell} \in B_n, X_\ell = k) \\
&= P_{\delta_k}(X_0 \in A_0, \dots, X_m \in A_m) P(X_{0\wedge\tau} \in B_0, \dots, X_{n\wedge\tau} \in B_n, X_\tau = k) \\
&= P_{\delta_k}(X_0 \in A_0, \dots, X_m \in A_m) P(B \cap \{X_\tau = k\}).
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\tilde{P}(A \cap B) = P_{\delta_k}(X_0 \in A_0, \dots, X_m \in A_m) \underbrace{P(B \mid X_\tau = k)}_{=\tilde{P}(B)}.$$

Damit ist (2) gezeigt. □

Für $i \in E$ sei *Vorlesung 9, 11.12.2013*

$$T_i := \inf\{n \geq 1 : X_n = i\}$$

die erste Zeit ≥ 1, zu der die Markovkette in i ist. Man nennt T_i die *erste Rückkehrzeit* zu i. Für $i, j \in E$ setzen wir

$$f_{ij} := P_i(T_j < \infty).$$

Sei

$$N_i := \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{X_n = i\}}$$

die Anzahl der Besuche in i ab Zeit 1.

Satz 6.7. *Für alle $i, j \in E$ gilt:*

$$P_j(N_i = \ell) = \begin{cases} f_{ji} f_{ii}^{\ell-1}(1 - f_{ii}), & \textit{für } \ell \geq 1, \\ 1 - f_{ji}, & \textit{für } \ell = 0. \end{cases}$$

Beweis.

$$P_j(N_i = 0) = P_j(X_n \neq i \text{ für alle } n \geq 1) = P_j(T_i = \infty) = 1 - f_{ji}.$$

Wir beweisen die Behauptung

$$P_j(N_i = \ell) = f_{ji} f_{ii}^{\ell-1}(1 - f_{ii})$$

mit vollständiger Induktion über $\ell \geq 1$.

Sei $\ell \geq 0$ und sei die Behauptung für $1, 2, \ldots, \ell$ bewiesen. (Im Fall $\ell = 0$ setzen wir nichts voraus). Es gilt:

$$\begin{aligned}
P(N_i \geq \ell + 1) &= 1 - P(N_i \leq \ell) \\
&= 1 - \sum_{m=0}^{\ell} P(N_i = m) \\
&= 1 - \left(1 - f_{ji} + \sum_{m=1}^{\ell} f_{ji} f_{ii}^{m-1}(1 - f_{ii})\right) \\
&\qquad \text{nach Induktionsvoraussetzung. Im Fall } \ell = 0 \text{ ist die Summe leer.} \\
&= f_{ji}\left(1 - (1 - f_{ii}) \sum_{m=0}^{\ell-1} f_{ii}^m\right) \\
&= f_{ji}(1 - (1 - f_{ii}^{\ell})) \\
&\qquad \text{Beachte: dies gilt auch im Fall } f_{ii} = 1. \\
&= f_{ji} f_{ii}^{\ell}.
\end{aligned}$$

Wir setzen

$$T^1 := T_i, \qquad T^{\ell+1} := \inf\{n > T^{\ell} : X_n = i\} \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{N}.$$

Dann ist T^{ℓ} die *ℓ-te Rückkehrzeit* zu i und T^{ℓ} ist eine Stoppzeit. Es gilt:

$$\begin{aligned}
N_i = \ell + 1 \quad &\Leftrightarrow \quad T^{\ell+1} < \infty \quad \text{und} \quad T^{\ell+2} = \infty \\
&\Leftrightarrow \quad X_{T^{\ell+1}} = i \quad \text{und} \quad T_{\ell+2} - T^{\ell+1} = \infty.
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
P_j(N_i = \ell + 1) &= P_j(X_{T^{\ell+1}} = i, T^{\ell+2} - T^{\ell+1} = \infty) \\
&= P_j(T^{\ell+2} - T^{\ell+1} = \infty \mid X_{T^{\ell+1}} = i) P_j(X_{T^{\ell+1}} = i).
\end{aligned}$$

Aus der starken Markov-Eigenschaft aus Satz 6.6 folgt:

$$P_j(T^{\ell+2} - T^{\ell+1} = \infty \mid X_{T^{\ell+1}} = i) = P_i(T_i = \infty) = 1 - f_{ii}.$$

Außerdem gilt:

$$P_j(X_{T^{\ell+1}} = i) = P_j(N_i \geq \ell + 1) = f_{ji} f_{ii}^{\ell}.$$

Damit folgt die Behauptung. □

Korollar 6.8. *Für alle $i \in E$ und $\ell \in \mathbb{N}_0$ gilt:*

$$P_i(N_i = \ell) = f_{ii}^{\ell}(1 - f_{ii}).$$

Satz 6.9. *Für alle $i \in E$ gilt:*

$$\begin{aligned}
P_i(T_i < \infty) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad P_i(N_i = \infty) = 1, \\
P_i(T_i < \infty) < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad P_i(N_i < \infty) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad E_i[N_i] < \infty.
\end{aligned}$$

Beweis. Aus Korollar 6.8 folgt

$$P_i(N_i < \infty) = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_i(N_i = \ell) = \sum_{\ell=0}^{\infty} f_{ii}^{\ell}(1 - f_{ii}) = \begin{cases} 0, & \text{falls } f_{ii} = 1, \\ 1, & \text{falls } f_{ii} < 1. \end{cases}$$

Das beweist die ersten beiden Äquivalenzen.

Wir beweisen nun die letzte Äquivalenz. Offensichtlich gilt

$$E_i[N_i] < \infty \quad \Rightarrow \quad P_i(N_i < \infty) = 1.$$

Es sei $P_i(N_i < \infty) = 1$. Nach dem bereits gezeigten ist $f_{ii} < 1$. Aus Korollar 6.8 folgt

$$E_i[N_i] = \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell P_i(N_i = \ell) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell f_{ii}^{\ell}(1 - f_{ii}).$$

Zur Erinnerung: Für $|x| < 1$ gilt:

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \ell x^{\ell} = x \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell x^{\ell-1} = x \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} x^{\ell} \right)' = x \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Damit erhalten wir:

$$E_i[N_i] = (1 - f_{ii}) \cdot \frac{f_{ii}}{(1 - f_{ii})^2} = \frac{f_{ii}}{1 - f_{ii}} < \infty,$$

da $f_{ii} < 1$. □

Interpretation. Wenn eine Markovkette mit Wahrscheinlichkeit 1 in den Zustand i zurückkehrt, dann besucht sie i unendlich oft. Wenn eine Markovkette mit Wahrscheinlichkeit < 1 zu i zurückkehrt, besucht sie i höchstens endlich oft.

7 Rekurrenz

Definition 7.1. Ein Zustand $i \in E$ heißt

- *rekurrent*, wenn $P_i(T_i < \infty) = 1$,
- *transient*, wenn $P_i(T_i < \infty) < 1$.

Außerdem heißt i *positiv rekurrent*, wenn

$$E_i[T_i] < \infty.$$

Ist i rekurrent mit $E_i[T_i] = \infty$, so heißt i *null rekurrent*.

Jeder positiv rekurrente Zustand ist rekurrent. Rekurrente Zustände werden unendlich oft besucht, transiente Zustände höchstens endlich oft.

Satz 7.2. *Ein Zustand $i \in E$ ist rekurrent genau dann, wenn*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Pi^n(i,i) = \infty.$$

Beweis. Es gilt:

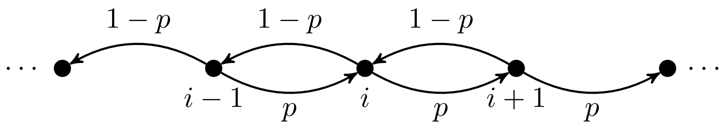
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \Pi^n(i,i) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_i(X_n = i) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E_i\left[1_{\{X_n=i\}}\right] \\ &= E_i\left[\sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{X_n=i\}}\right] \qquad \text{nach dem Satz von der monotonen Konvergenz} \\ &= 1 + E_i[N_i].\end{aligned}$$

Satz 6.9 liefert

$$\begin{aligned}E_i[N_i] = \infty \quad &\Leftrightarrow \quad P_i(T_i < \infty) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad i \text{ ist rekurrent.}\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. □

Beispiel 7.3 (Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$)**.** Sei $p \in (0,1)$. Übergangsgraph:



Für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\Pi(i, i+1) = p, \quad \Pi(i, i-1) = 1-p.$$

Frage: Ist 0 rekurrent oder transient?
Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\begin{aligned}P_0(X_{2n+1} = 0) &= 0, \\ P_0(X_{2n} = 0) &= \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n.\end{aligned}$$

Um zu entscheiden, ob $\sum_{n=0}^{\infty} P_0(X_{2n} = 0)$ divergiert, verwenden wir die Stirlingsche Formel:

$$n! \sim \sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \quad \text{für } n \to \infty.$$

Damit ergibt sich

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{n^{2n+1}} = c \cdot \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}$$

mit einer Konstanten $c > 0$. Also

$$P_0(X_{2n} = 0) \sim \frac{c}{\sqrt{n}} (4p(1-p))^n.$$

- Fall $p = \frac{1}{2}$.
$$P_0(X_{2n} = 0) \sim \frac{c}{\sqrt{n}} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} P_0(X_{2n} = 0) = \infty.$$
Wegen Satz 7.2 ist 0 rekurrent. Da die Übergangswahrscheinlichkeiten in jedem Punkt gleich sind, sind alle $i \in \mathbb{Z}$ für die symmetrische Irrfahrt rekurrent.

- Fall $p \neq \frac{1}{2}$. Dann ist $4p(1-p) < 1$ und somit
$$\sum_{n=0}^{\infty} P_0(X_{2n} = 0) < \infty.$$
Also ist 0 transient. Folglich sind für die asymmetrische Irrfahrt alle Zustände transient.

Man kann zeigen, dass im symmetrischen Fall alle Zustände null-rekurrent ist.

Satz 7.4. *Wenn zwei Zustände $i, j \in E$ miteinander kommunizieren, $i \leftrightarrow j$, dann sind beide rekurrent oder beide transient.*

Folglich sind bei einer irreduziblen Markovkette alle Zustände rekurrent oder alle Zustände transient. Man nennt dann die Markovkette *rekurrent* bzw. *transient*.

Beweis von Satz 7.4. Es gelte $i \leftrightarrow j$. Dann existieren $\ell, m \in \mathbb{N}_0$ mit *Vorlesung 10, 18.12.2013*
$$\Pi^\ell(i,j) > 0 \quad \text{und} \quad \Pi^m(j,i) > 0.$$
Wir setzen
$$a := \Pi^\ell(i,j)\Pi^m(j,i).$$
Dann ist $a > 0$. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:
$$\Pi^{\ell+n+m}(i,i) \geq \Pi^\ell(i,j)\Pi^n(j,j)\Pi^m(j,i) = a\Pi^n(j,j)$$
und
$$\Pi^{m+n+\ell}(j,j) \geq \Pi^m(j,i)\Pi^n(i,i)\Pi^\ell(i,j) = a\Pi^n(i,i).$$
Summation liefert:
$$\sum_{k=0}^{\infty} \Pi^k(i,i) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \Pi^{\ell+n+m}(i,i) \geq a \sum_{n=0}^{\infty} \Pi^n(j,j) \geq a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \Pi^n(i,i).$$
Also divergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \Pi^n(i,i)$ genau dann, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} \Pi^n(j,j)$ divergiert. Wegen Satz 7.2 ist i genau dann rekurrent, wenn j rekurrent ist. $\square$

Satz 7.5. *Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine irreduzible Markovkette.*

(a) Ist die Markovkette rekurrent, so gilt für alle $i, j \in E$:
$$E_i[N_j] = \infty.$$

(b) Ist die Markovkette transient, so gilt für alle $i, j \in E$:

$$E_i[N_j] < \infty.$$

Beweis. Seien $i, j \in E$.

(a) Da die Markovkette irreduzibel ist, existiert $m \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\Pi^m(i,j) > 0.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} E_i[N_j] &= E_i\left[\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{X_n=j\}}\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P_i(X_n = j) \\ &\geq \sum_{n=m+1}^{\infty} P_i(X_n = j) \\ &\geq \sum_{n=m+1}^{\infty} P_i(X_n = j \mid X_m = j) P_i(X_m = j) \\ &\quad \text{Beachte: } P_i(X_m = j) = \Pi^m(i,j) > 0 \text{ nach Voraussetzung.} \\ &= \Pi^m(i,j) \sum_{n=1}^{\infty} P_j(X_n = j) \\ &\quad \text{nach der Markov-Eigenschaft.} \\ &= \Pi^m(i,j) \sum_{n=1}^{\infty} \Pi^n(j,j) \\ &= \infty \end{aligned}$$

nach Satz 7.2, da die Markovkette rekurrent ist.

(b) Ähnlich wie im Teil (a) erhält man aus der Transienz

$$\begin{aligned} \infty > E_i[N_i] &\geq \sum_{n=m+1}^{\infty} P_i(X_n = i \mid X_m = j) P_i(X_m = j) \\ &= \Pi^m(i,j) \sum_{n=1}^{\infty} P_j(X_n = j) \\ &\quad \text{nach der Markov-Eigenschaft.} \\ &= \Pi^m(i,j) E_j[N_i]. \end{aligned}$$

Damit folgt $E_j[N_i] < \infty$.

□

Eine irreduzible Markovkette mit endlichem Zustandsraum ist rekurrent, da es nicht möglich ist, dass alle Zustände nur endlich oft besucht werden.

Definition 7.6. Ein Maß α auf $(E, \mathcal{P}(E))$ heißt *invariant* für die Markovkette mit Übergangsmatrix Π, falls gilt:

- $\alpha(i) \in [0, \infty)$ für alle $i \in E$,
- α ist nicht das Null-Maß, d.h. es gilt nicht $\alpha(i) = 0$ für alle $i \in E$,
- $\alpha(i) = \sum_{j \in E} \alpha(j)\Pi(j, i)$.

Die invarianten Wahrscheinlichkeitsmaße sind gerade die stationären Verteilungen.

Satz 7.7. *Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine irreduzible rekurrente Markovkette und sei $0 \in E$ ein beliebiger Zustand. Sei*

$$T_0 = \inf\{n \geq 1 : X_n = 0\}$$

die erste Rückkehrzeit zu 0. Setze für $i \in E$:

$$\alpha(i) = E_0 \left[\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{X_n = i\}} 1_{\{T_0 \geq n\}} \right].$$

Dann gilt $\alpha(i) \in (0, \infty)$ für alle $i \in E$ und α ist ein invariantes Maß für die Markovkette.

Für $i \neq 0$ ist $\alpha(i)$ die erwartete Anzahl Besuche in i bis zur Zeit T_0.
Für $i = 0$ gilt:

$$X_n = 0 \text{ für } n \in \{1, \ldots, T_0\} \quad \Leftrightarrow \quad n = T_0.$$

Somit ist $\alpha(0) = 1$. Hier haben wir verwendet, dass $P_0(T_0 < \infty) = 1$ ist, da die Markovkette rekurrent ist.

Lemma 7.8.

$$\sum_{i \in E} \alpha(i) = E_0[T_0].$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in E} \alpha(i) &= \sum_{i \in E} E_0 \left[\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{X_n = i\}} 1_{\{T_0 \geq n\}} \right] \\
&= E_0 \Big[\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{i \in E} 1_{\{X_n = i\}}}_{=1} 1_{\{T_0 \geq n\}} \Big] \\
&\qquad \text{nach dem Satz der monotonen Konvergenz.} \\
&= E_0[T_0].
\end{aligned}$$

□

Beweis von Satz 7.7. Für alle $i \in E$ folgt aus dem Satz der monotonen Konvergenz:

$$\alpha(i) = \sum_{n=1}^{\infty} P_0(X_n = i, T_0 \geq n).$$

Es gilt:

$$P_0(X_n = i, T_0 \geq 1) = P_0(X_n = i) = \Pi(0,i). \tag{3}$$

Für $n \geq 2$ gilt:

$$\begin{aligned}
P_0(X_n = i, T_0 \geq n) &= \sum_{j \in E} P_0(X_{n-1} = j, X_n = i, T_0 \geq n) \\
&= \sum_{j \in E \setminus \{0\}} P_0(X_{n-1} = j, X_n = i, T_0 \geq n) \\
&= \sum_{j \in E \setminus \{0\}} P_0(X_{n-1} = j, X_n = i, T_0 \geq n-1) \qquad \text{da } j \neq 0. \\
&= \sum_{j \in E \setminus \{0\}} P_0(X_n = i, T_0 \geq n-1 \mid X_{n-1} = j) P_0(X_{n-1} = j) \qquad (4)
\end{aligned}$$

Da T_0 eine Stoppzeit ist, gilt:

$$\{T_0 \geq n-1\} = \{T_0 \leq n-2\}^{\mathrm{c}} \in \mathcal{F}_{n-2}.$$

Somit hängt das Ereignis $\{T_0 \geq n-1\}$ nur von $X_0, X_1, \ldots, X_{n-2}$ ab. Anwenden der Markov-Eigenschaft liefert:

$$\begin{aligned}
P_0(X_n = i, T_0 \geq n-1 \mid X_{n-1} = j) &= P_0(X_n = i \mid X_{n-1} = j) P_0(T_0 \geq n-1 \mid X_{n-1} = j) \\
&= \Pi(j,i) P_0(T_0 \geq n-1 \mid X_{n-1} = j).
\end{aligned}$$

Einsetzen in (4) liefert:

$$P_0(X_n = i, T_0 \geq n) = \sum_{j \in E \setminus \{0\}} \Pi(j,i) P_0(X_{n-1} = j, T_0 \geq n-1). \tag{5}$$

Aus (3) und (5) folgt für alle $i \in E$:

$$\begin{aligned}
\alpha(i) &= \sum_{n=1}^{\infty} P_0(X_n = i, T_0 \geq n) \\
&= \Pi(0,i) + \sum_{j \in E \setminus \{0\}} \Pi(j,i) \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} P_0(X_{n-1} = j, T_0 \geq n-1)}_{=\alpha(j)} \\
&= \sum_{j \in E} \alpha(j) \Pi(j,i) \qquad \text{da } \alpha(0) = 1.
\end{aligned}$$

Somit ist α ein invariantes Maß. Insbesondere gilt:

$$\alpha = \alpha \Pi = \alpha \Pi^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, also

$$\alpha(i) = \sum_{j \in E} \alpha(j) \Pi^n(j,i). \tag{6}$$

Wäre $\alpha(i) = 0$, so würde wegen $\alpha(0) = 1$ folgen, dass

$$\Pi^n(0,i) = 0 \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Irreduzibilität der Markovkette. Also gilt $\alpha(i) > 0$ für alle $i \in E$.

(6) liefert für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$1 = \alpha(0) = \sum_{j \in E} \alpha(j)\Pi^n(j,0).$$

Wäre $\alpha(i) = \infty$ für ein $i \in E$, so würde mit Hilfe der Irreduzibilität $\alpha(0) = \infty$ folgen, ein Widerspruch. Also ist $\alpha(i) < \infty$ für alle $i \in E$. □

Damit ist gezeigt, dass jede irreduzible rekurrente Markovkette mindestens ein invariantes Maß besitzt.

Satz 7.9. *Das invariante Maß einer irreduziblen rekurrenten Markovkette ist bis auf Multiplikation mit einer positiven Konstanten eindeutig.*

Beweis. Sei β ein invariantes Maß. Im Beweis von Satz 7.7 wurde gezeigt, dass für jedes invariantes Maß β gilt:

$$\beta(i) > 0 \quad \text{für alle } i \in E.$$

Definiere

$$\tilde{\Pi}(j,i) := \frac{\beta(i)}{\beta(j)}\Pi(i,j) \quad \text{für alle } i,j \in E.$$

Wegen

$$\sum_{i \in E} \tilde{\Pi}(j,i) = \frac{1}{\beta(j)} \underbrace{\sum_{i \in E} \beta(i)\Pi(i,j)}_{=\beta(j)} = 1$$

ist Π eine stochastische Matrix.

Behauptung.

$$\tilde{\Pi}^n(j,i) = \frac{\beta(i)}{\beta(j)}\Pi^n(i,j) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, i,j \in E.$$

Für $n = 1$ ist dies die Definition von $\tilde{\Pi}$. Sei die Behauptung richtig für n. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Pi}^{n+1}(j,i) &= \sum_{k \in E} \tilde{\Pi}(j,k)\tilde{\Pi}^n(k,i) \\
&= \sum_{k \in E} \frac{\beta(k)}{\beta(j)}\Pi(k,j)\frac{\beta(i)}{\beta(k)}\Pi^n(i,k) \\
&\quad \text{nach der Definition von } \tilde{\Pi} \text{ und der Induktionsvoraussetzung.} \\
&= \frac{\beta(i)}{\beta(j)}\Pi^{n+1}(i,j).
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt

$$\Pi^n(i,j) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\Pi}^n(i,j) > 0.$$

Folglich ist die Markovkette mit Übergangsmatrix $\tilde{\Pi}$ irreduzibel. Wegen *Vorlesung 11, 8.1.2014*

$$\tilde{\Pi}^n(i,i) = \Pi^n(i,i) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0, i \in E$$

folgt
$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\Pi}^n(i,i) = \sum_{n=0}^{\infty} \Pi^n(i,i) = \infty$$
nach Satz 7.2, da $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rekurrent ist. Somit ist auch die Markovkette mit Übergangsmatrix $\tilde{\Pi}$ rekurrent.

Sei $\tilde{P}$ die Verteilung der Markovkette mit Übergangsmatrix $\tilde{\Pi}$. Wir setzen
$$g_i(n) := \tilde{P}_i(T_0 = n) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$
als die Wahrscheinlichkeit, dass die Markovkette mit Übergangsmatrix $\tilde{\Pi}$ zur Zeit n zum ersten Mal in 0 ist. Dann gilt für alle $i \in E, n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned}
g_i(n+1) &= \tilde{P}_i(T_0 = n+1) \\
&= \sum_{j\in E} \underbrace{\tilde{P}_i(X_1 = j, T_0 = n+1)}_{= 0 \text{ für } j=0, \text{ da } n \geq 1} \\
&= \sum_{j\in E\setminus\{0\}} \tilde{P}_i(T_0 = n+1 \mid X_1 = j)\tilde{P}_i(X_1 = j) \\
&= \sum_{j\in E\setminus\{0\}} \tilde{P}_j(T_0 = n)\tilde{\Pi}(i,j) \\
&\qquad \text{nach der Markov-Eigenschaft.} \\
&= \sum_{j\in E\setminus\{0\}} g_j(n)\frac{\beta(j)}{\beta(i)}\Pi(j,i) \\
\Leftrightarrow \qquad \beta(i)g_i(n+1) &= \sum_{j\in E\setminus\{0\}} \beta(j)g_j(n)\Pi(j,i).
\end{aligned}$$
Gleichung (5) aus dem Beweis von Satz 7.7 besagt
$$P_0(X_{n+1} = i, T_0 \geq n+1) = \sum_{j\in E\setminus\{0\}} P_0(X_n = j, T_0 \geq n)\Pi(j,i).$$
Somit erfüllen die Folgen
$$\begin{aligned}
a_i(n) &:= \beta(0)P_0(X_n = i, T_0 \geq n), \\
b_i(n) &:= \beta(i)g_i(n),
\end{aligned}$$
$i \in E, n \in \mathbb{N}$ beide die Gleichung
$$c_i(n+1) = \sum_{j\in E\setminus\{0\}} c_j(n)\Pi(j,i).$$
Außerdem gilt:
$$\begin{aligned}
a_i(1) &= \beta(0)P_0(X_n = i, T_0 \geq 1) \\
&= \beta(0)P_0(X_1 = i) \\
&= \beta(0)\Pi(0,i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_i(1) &= \beta(i) g_i(1) \\ &= \beta(i) \tilde{P}_i(T_0 = 1) \\ &= \beta(i) \tilde{P}_i(X_1 = 0) \\ &= \beta(i) \tilde{\Pi}(i, 0) \\ &= \beta(0) \Pi(0, i) \\ &= a_i(1). \end{aligned}$$

Damit folgt $a_i(n) = b_i(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Für das invariante Maß α aus Satz 7.7 gilt für alle $i \in E$:

$$\begin{aligned} \alpha(i) &= \sum_{n=1}^{\infty} P_0(X_1 = i, T_0 \geq n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta(0)} a_i(n) \\ &= \frac{1}{\beta(0)} \sum_{n=1}^{\infty} b_i(n) \\ &= \frac{\beta(i)}{\beta(0)} \sum_{n=1}^{\infty} g_i(n) \\ &= \frac{\beta(i)}{\beta(0)} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{P}_i(T_0 = n) \\ &= \frac{\beta(i)}{\beta(0)} \tilde{P}_i(T_0 < \infty). \end{aligned}$$

Da die Markovkette mit Übergangsmatrix $\tilde{\Pi}$ irreduzibel und rekurrent ist, folgt aus Lemma 7.10 $\tilde{P}_i(T_0 < \infty) = 1$. Damit haben wir für alle $i \in E$ gezeigt:

$$\beta(i) = \beta(0)\alpha(i).$$

Somit ist jedes invariante Maß ein Vielfaches des invarianten Maßes α. $\square$

Lemma 7.10. *Für eine irreduzible rekurrente Markovkette gilt für alle $i, j \in E$:*

$$P_i(T_j < \infty) = 1.$$

Beweis. Seien $i, j \in E$. Da die Markovkette irreduzibel ist, existiert ein $m \in \mathbb{N}_0$ mit $\Pi^m(j, i) > 0$. Aus der Rekurrenz von j folgt

$$\begin{aligned} 1 &= P_j(X_n = j \text{ für ein } n \geq m + 1) \\ &= \sum_{k \in E} P_j(X_n = j \text{ für ein } n \geq m + 1 \mid X_m = k) P_j(X_m = k) \\ &= \sum_{k \in E} P_k(X_n = j \text{ für ein } n \geq 1) \Pi^m(j, k) \qquad \text{nach der Markov-Eigenschaft.} \\ &= \sum_{k \in E} P_k(T_j < \infty) \Pi^m(j, k). \end{aligned} \tag{7}$$

Nun ist $\sum_{k\in E}\Pi^m(j,k)=1$ und $\Pi^m(j,i)>0$. Wäre $P_i(T_j<\infty)<1$, so wäre die rechte Seite von (7) <1, ein Widerspruch. Also gilt

$$P_i(T_j<\infty)=1.$$

□

Satz 7.11. *Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible rekurrente Markovkette.*

(a) Wenn für ein invariantes Maß α

$$\sum_{i\in E}\alpha(i)<\infty$$

gilt, dann sind alle Zustände positiv rekurrent.

(b) Ist ein Zustand positiv rekurrent, so sind alle Zustände positiv rekurrent und es gilt

$$\sum_{i\in E}\alpha(i)<\infty$$

für jedes invariante Maß.

Beweis. (a) Bis auf einen Faktor ist das invariante Maß eindeutig und somit gegeben durch das Maß aus Satz 7.7. Für dieses Maß gilt nach Lemma 7.8

$$\sum_{i\in E}\alpha(i)=E_0[T_0].$$

Also ist 0 positiv rekurrent. Da man in der Definition von α 0 durch jeden anderen Zustand ersetzen kann, folgt die Behauptung.

(b) Ist 0 positiv rekurrent, so folgt mit Lemma 7.8

$$\infty>E_0[T_0]=\sum_{i\in E}\alpha(i).$$

Aus Teil (a) und der Tatsache, dass jedes invariante Maß ein Vielfaches von α ist, folgt die Behauptung.

□

Eine Markovkette, deren Zustände positiv rekurrent sind, heißt *positiv rekurrent.*

Korollar 7.12. *Eine irreduzible positiv rekurrente Markovkette besitzt genau eine stationäre Verteilung.*

Satz 7.13. *Eine irreduzible Markovkette ist positiv rekurrent genau dann, wenn sie eine stationäre Verteilung besitzt. Wenn eine stationäre Verteilung α existiert, ist sie eindeutig und erfüllt $\alpha(i)>0$ für alle $i\in E$.*

Beweis. Betrachte eine irreduzible Markovkette.

„⇒“ Sei die Markovkette positiv rekurrent. Nach Korollar 7.12 gibt es eine eindeutig bestimmte stationäre Verteilung α. Diese ist bis auf eine multiplikative Konstante gegeben durch das invariante Maß α aus Satz 7.7, welches $\alpha(i) > 0$ für alle $i \in E$ erfüllt.

„⇐“ Sei α eine stationäre Verteilung. Angenommen, die Markovkette wäre transient. Dann folgt aus Satz 7.5

$$\infty > E_j[N_i] = E_j\left[\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{X_n=i\}}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P_j(X_n = i) = \sum_{n=1}^{\infty} \Pi^n(j,i)$$

für alle $i, j \in E$. Insbesondere folgt

$$\lim_{n\to\infty} \Pi^n(j,i) = 0.$$

Da α eine stationäre Verteilung ist, gilt

$$\alpha = \alpha\Pi = \alpha\Pi^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Somit gilt für alle $i \in E$

$$\alpha(i) = \sum_{j\in E} \alpha(j)\Pi^n(j,i) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da $0 \leq \Pi^n(j,i) \leq 1$ und $\sum_{j\in E} \alpha(j) = 1$ folgt aus dem Satz von der dominierten Konvergenz

$$\begin{aligned}\alpha(i) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in E} \alpha(j)\Pi^n(j,i)\\ &= \sum_{j\in E} \alpha(j) \lim_{n\to\infty} \Pi^n(j,i) = 0.\end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zu $\sum_{i\in E} \alpha(i) = 1$. Also ist die Markovkette rekurrent. Aus Satz 7.11 (a) folgt die positive Rekurrenz.

□

Satz 7.14. *Für die stationäre Verteilung einer irreduziblen positiv rekurrenten Markovkette gilt:*

$$\alpha(i) = \frac{1}{E_i[T_i]} \quad \text{\textit{für alle} } i \in E,$$

wobei $T_i := \min\{n \geq 1 : X_n = i\}$.

Beweis. Für das invariante Maß β aus Satz 7.7 gilt:

$$\beta(0) = 1, \quad \sum_{i\in E} \beta(i) = E_0[T_0].$$

Da α sich nur durch eine Konstante von β unterscheidet und ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, folgt

$$\alpha(0) = \frac{\beta(0)}{\sum_{i\in E} \beta(i)} = \frac{1}{E_0[T_0]}.$$

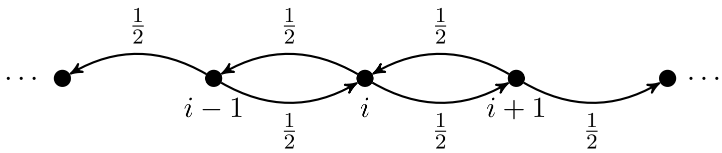
Da in der Definition von β 0 durch jeden beliebigen Zustand ersetzt werden kann, folgt die Behauptung. □

Satz 7.15. *Jede irreduzible Markovkette mit endlichem Zustandsraum ist positiv rekurrent.*

Beweis. Die Markovkette ist rekurrent, da nicht alle Zustände nur endlich oft besucht werden können. Nach Satz 7.7 gibt es ein invariantes Maß α mit $0 < \alpha(i) < \infty$ für alle $i \in E$. Da E endlich ist, gilt $\sum_{i \in E} \alpha(i) < \infty$. Somit folgt positive Rekurrenz aus Satz 7.11 (a). $\square$

Vorlesung 12, 15.1.2014

Beispiel 7.16. Betrachte die symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ mit Übergangsgraph



In Beispiel 5.4 haben wir gesehen, dass die Markovkette das invariante Maß

$$\alpha(i) = 1 \quad \text{für alle } i \in \mathbb{Z}$$

besitzt. Aus

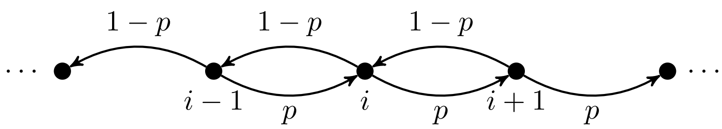
$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \alpha(i) = \infty$$

folgt mit Satz 7.11, dass alle Zustände null rekurrent sind.

Beispiel 7.17. Betrachte die asymmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ mit Übergangsmatrix

$$\begin{aligned} \Pi(i, i+1) &= p, \\ \Pi(i, i-1) &= 1-p, \quad i \in \mathbb{Z}, p \in (0,1), p \neq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

und Übergangsgraph



Wir wissen bereits, dass die Markovkette transient ist.
Behauptung. Für alle $a, b > 0$ ist

$$\alpha(i) = a + b \left(\frac{p}{1-p} \right)^i, \quad i \in \mathbb{Z},$$

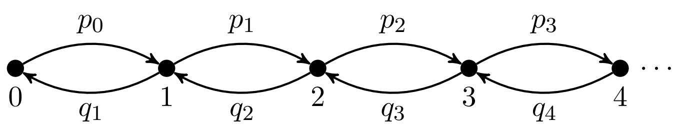
ein invariantes Maß.
Zu zeigen: $\alpha(i) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha(j) \Pi(j, i) = \alpha(i-1)p + \alpha(i+1)(1-p)$ für alle $i \in \mathbb{Z}$.

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
&p\alpha(i-1) + (1-p)\alpha(i+1) \\
=&p\left(a + b\left(\frac{p}{1-p}\right)^{i-1}\right) + (1-p)\left(a + b\left(\frac{p}{1-p}\right)^{i+1}\right) \\
=&a + b\left(\frac{p^i}{(1-p)^{i-1}} + \frac{p^{i+1}}{(1-p)^i}\right) \\
=&a + b\left(\frac{p}{1-p}\right)^i (1-p+p) \\
=&a + b\left(\frac{p}{1-p}\right)^i = \alpha(i).
\end{aligned}
$$

In diesem Fall ist das invariante Maß nicht eindeutig bis auf eine Konstante.

Beispiel 7.18. Betrachte die Irrfahrt auf $\mathbb{N}_0$ mit Reflexion in 0 mit ortsabhängigen Übergangswahrscheinlichkeiten. Dies ist die Markovkette mit Übergangsgraph



Übergangsmatrix:

$$
\begin{aligned}
\Pi(i, i+1) &= p_i, && i \in \mathbb{N}_0, \\
\Pi(i, i-1) &= q_i := 1 - p_i, && i \in \mathbb{N}, \\
\Pi(i, j) &= 0 && \text{für alle anderen Paare } (i, j).
\end{aligned}
$$

Dabei seien $p_i \in (0,1)$ für $i \in \mathbb{N}, p_0 = 1$.

Jedes invariante Maß α erfüllt

$$
\alpha(i) = \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \alpha(j)\Pi(j, i) \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}_0.
$$

Also:

$$
\begin{aligned}
\alpha(0) &= \alpha(1)q_1, \\
\alpha(i) &= \alpha(i-1)p_{i-1} + \alpha(i+1)q_{i+1} \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Diese Gleichungen haben folgende Lösung:

$$
\alpha(i) = \frac{p_0 \cdots p_{i-1}}{q_1 \cdots q_i}\alpha(0), \quad i \in \mathbb{N}.
$$

Denn für $i \in \mathbb{N}$ gilt:

$$
\frac{p_0 \cdots p_{i-2}}{q_1 \cdots q_{i-1}}\alpha(0)p_{i-1} + \frac{p_0 \cdots p_i}{q_1 \cdots q_{i+1}}\alpha(0)q_{i+1} = \frac{p_0 \cdots p_{i-1}}{q_1 \cdots q_i}\alpha(0)\underbrace{(q_i + p_i)}_{=1} = \alpha(i).
$$

Außerdem gilt: $\alpha(1) = \frac{1}{q_1}\alpha(0)$. Die Markovkette ist positiv rekurrent, wenn

$$1 + \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{p_0 \cdots p_{i-1}}{q_1 \cdots q_i} < \infty.$$

Im Spezialfall $p_i = p$ für alle $i \in \mathbb{N}$ folgt $q_i = q = 1 - p$. Dann ist

$$\alpha(i) = \left(\frac{p}{q}\right)^i, \quad i \in \mathbb{N}_0.$$

Die Markovkette ist positiv rekurrent genau dann, wenn

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^i < \infty \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{p}{q} < 1 \\ \Leftrightarrow \quad & p < 1 - p \\ \Leftrightarrow \quad & p < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

8 Konvergenzsatz

Hat eine Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine stationäre Verteilung α als Startverteilung, so hat X_n für alle $n \in \mathbb{N}_0$ Verteilung α. Was können wir über die Verteilung von X_n bei einer beliebigen Startverteilung sagen? Konvergiert sie für $n \to \infty$ gegen eine stationäre Verteilung? Wir interessieren uns z.B. für

$$\lim_{n\to\infty} P_i(X_n = j) = \lim_{n\to\infty} \Pi^n(i,j)$$

für $i, j \in E$.

Definition 8.1. Sei E abzählbar und seien μ, ν Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(E, \mathcal{P}(E))$. Der *Abstand* von μ und ν *in Totalvariation* ist definiert durch

$$\mathrm{d}_{\mathrm{TV}}(\mu,\nu) := \frac{1}{2}\sum_{i\in E} |\mu(i) - \nu(i)|.$$

Offensichtlich ist d_{TV} eine Metrik auf dem Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße auf E.

Satz 8.2 (Konvergenzsatz)**.** *Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible, aperiodische, positiv rekurrente Markovkette. Dann gilt für alle Startverteilungen μ, ν:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}_{\mathrm{TV}}(P_\mu(X_n \in \cdot\,), P_\nu(X_n \in \cdot\,)) = 0.$$

Mit anderen Worten:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i\in E} |P_\mu(X_n = i) - P_\nu(X_n = i)| = 0.$$

Insbesondere gilt für die stationäre Verteilung α:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}_{\mathrm{TV}}(P_\mu(X_n \in \cdot\,), \alpha) = 0$$

d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i\in E} |P_\mu(X_n = i) - \alpha(i)| = 0$$

und

$$\lim_{n\to\infty} P_i(X_n = j) = \alpha(j)$$

für alle $i, j \in E$.

Beispiel 8.3. Betrachte als vereinfachtes Beispiel für das Wetter die Markovkette mit Übergangsmatrix

$$\Pi = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} s & r \end{array} \\ \begin{array}{c} s \\ r \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \end{array}$$

Gesucht: $\lim_{n\to\infty} \Pi^n(i,j)$ für $i, j \in \{r, s\}$.

Die Markovkette ist irreduzibel und aperiodisch. Da der Zustandsraum endlich ist, ist sie positiv rekurrent. Die eindeutige stationäre Verteilung α erfüllt

$$\begin{aligned} & & \alpha\Pi &= \alpha \\ &\Leftrightarrow & \alpha(\Pi - \mathrm{Id}) &= 0 \\ &\Leftrightarrow & (\alpha(r), \alpha(s)) \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} &= (0,0) \\ &\Leftrightarrow & -\frac{\alpha(r)}{10} + \frac{\alpha(s)}{5} &= 0 \\ &\Leftrightarrow & \alpha(r) &= 2\alpha(s) \end{aligned}$$

Aus $\alpha(r) + \alpha(s) = 1$ folgt

$$\alpha(r) = \frac{2}{3}, \quad \alpha(s) = \frac{1}{3}.$$

Aus dem Konvergenzsatz folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \Pi^n(i,r) &= \alpha(r) = \frac{2}{3} \\ \lim_{n\to\infty} \Pi^n(i,s) &= \alpha(s) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

für $i \in \{r, s\}$.

Zum Beweis des Konvergenzsatzes benötigen wir einige Vorbereitungen:

Lemma 8.4. *Für Wahrscheinlichkeitsmaße μ und ν auf $(E, \mathcal{P}(E))$ gilt:*

$$\mathrm{d}_{\mathrm{TV}}(\mu,\nu) = \sup_{A\subseteq E} |\mu(A) - \nu(A)| = \sup_{A\subseteq E} (\mu(A) - \nu(A)).$$

Beweis. Wegen

$$\mu(A^c) - \nu(A^c) = 1 - \mu(A) - (1 - \nu(A)) = \nu(A) - \mu(A)$$

folgt die zweite Gleichung.

Für alle $A \subseteq E$ gilt:

$$\mu(A) - \nu(A) = \sum_{i \in E} 1_A(i)(\mu(i) - \nu(i)).$$

Der Ausdruck ist maximal für

$$A = A_{\max} = \{i \in E : \mu(i) > \nu(i)\}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} S &:= \sup_{A \subseteq E} (\mu(A) - \nu(A)) \\ &= \mu(A_{\max}) - \nu(A_{\max}) \\ &= \sum_{i \in A_{\max}} (\mu(i) - \nu(i)) \\ &= \sum_{i \in A_{\max}} |\mu(i) - \nu(i)|. \end{aligned}$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i \in A_{\max}} (\mu(i) - \nu(i)) \\ &= \underbrace{\sum_{i \in E} \mu(i)}_{=1} - \underbrace{\sum_{i \in E} \nu(i)}_{=1} - \sum_{i \in A_{\max}^c} \underbrace{(\mu(i) - \nu(i))}_{=-|\mu(i)-\nu(i)|} \\ &= \sum_{i \in A_{\max}^c} |\mu(i) - \nu(i)| \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathrm{d_{TV}}(\mu, \nu) &= \frac{1}{2} \sum_{i \in E} |\mu(i) - \nu(i)| \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \in A_{\max}} |\mu(i) - \nu(i)| + \frac{1}{2} \sum_{i \in A_{\max}^c} |\mu(i) - \nu(i)| \\ &= \frac{1}{2} S + \frac{1}{2} S \\ &= S. \end{aligned}$$

□

Für eine Zufallsvariable X bezeichne $\mathcal{L}(X)$ die *Verteilung* von X. Nimmt X Werte in E an, so ist $\mathcal{L}(X)$ das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(E, \mathcal{P}(E))$ mit

Vorlesung 13, 22.1.2014

$$\mathcal{L}(X)(A) = P(X \in A),$$

für alle $A \subseteq E$.

Definition 8.5. Eine *Kopplung* von zwei Zufallsvariablen $X : \Omega_X \to E$ und $Y : \Omega_Y \to E$ ist ein Zufallsvektor $(\tilde{X}, \tilde{Y}) : \Omega \to E \times E$ mit der Eigenschaft

$$\mathcal{L}(\tilde{X}) = \mathcal{L}(X) \quad \text{und} \quad \mathcal{L}(\tilde{Y}) = \mathcal{L}(Y).$$

Man nennt $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ auch eine Kopplung der Verteilungen $\mathcal{L}(X)$ und $\mathcal{L}(Y)$.

Satz 8.6. *Seien μ und ν Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(E, \mathcal{P}(E))$. Für jede Kopplung (X, Y) von μ und ν gilt*

$$P(X = Y) \leq 1 - \mathrm{d_{TV}}(\mu, \nu).$$

Außerdem gibt es eine Kopplung (X, Y) von μ und ν, sodass Gleichheit gilt. Diese Kopplung heißt optimal.

Beweis. Sei (X, Y) eine Kopplung von μ und ν. Dann gilt für alle $A \subseteq E$:

$$\begin{aligned} P(X \neq Y) &\geq P(X \in A, Y \notin A) \\ &= P(X \in A) - P(X \in A, Y \in A) \\ &\geq P(X \in A) - P(Y \in A) \\ &= \mu(A) - \nu(A). \end{aligned}$$

Da A beliebig, folgt mit Lemma 8.4

$$P(X \neq Y) \geq \sup_{A \subseteq E} (\mu(A) - \nu(A)) = \mathrm{d_{TV}}(\mu, \nu).$$

Somit ergibt sich

$$P(X = Y) = 1 - P(X \neq Y) \leq 1 - \mathrm{d_{TV}}(\mu, \nu).$$

Bleibt eine optimale Kopplung zu konstruieren. Für $x \in \mathbb{R}$ sei

$$\begin{aligned} x^+ &:= \max\{x, 0\} \quad \text{der } \textit{Positivteil} \text{ von } x, \\ x^- &:= \max\{-x, 0\} \quad \text{der } \textit{Negativteil} \text{ von } x. \end{aligned}$$

Im Beweis von Lemma 8.4 wurde gezeigt:

$$\mathrm{d_{TV}}(\mu, \nu) = \sum_{i \in E} (\mu(i) - \nu(i))^+ = \sum_{i \in E} (\nu(i) - \mu(i))^+.$$

Für $x, y \in \mathbb{R}$ sei

$$x \wedge y := \min\{x, y\}.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} 1 - \sum_{i \in E} \mu(i) \wedge \nu(i) &= \sum_{i \in E} (\mu(i) - \mu(i) \wedge \nu(i)) \\ &= \sum_{\substack{i \in E \\ \mu(i) > \nu(i)}} (\mu(i) - \nu(i)) \\ &= \sum_{i \in E} (\mu(i) - \nu(i))^+ \\ &= \mathrm{d_{TV}}(\mu, \nu) \end{aligned} \tag{8}$$

Im Fall $\mu = \nu$ ist (X, X) eine optimale Kopplung. Sei $\mu \neq \nu$. Dann ist

$$\mathrm{d}_{\mathrm{TV}}(\mu, \nu) > 0.$$

Falls $\mathrm{d}_{\mathrm{TV}}(\mu, \nu) = 1$, folgt aus (8)

$$\sum_{i \in E} \mu(i) \wedge \nu(i) = 0.$$

Insbesondere haben μ und ν disjunkte Träger. Dann gilt für jede Kopplung (X, Y) von μ und ν

$$P(X = Y) = \sum_{i \in E} P(X = Y = i) = 0 = 1 - \mathrm{d}_{\mathrm{TV}}(\mu, \nu)$$

Also ist jede Kopplung optimal.

Sei im Folgenden $\mathrm{d}_{\mathrm{TV}}(\mu, \nu) < 1$. Seien U, Z, V, W unabhängige Zufallsvariablen auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum mit

$$\begin{aligned}
U &= \begin{cases} 0 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \mathrm{d}_{\mathrm{TV}}(\mu, \nu) \\ 1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - \mathrm{d}_{\mathrm{TV}}(\mu, \nu) \end{cases} \\
P(Z = i) &= \frac{\mu(i) \wedge \nu(i)}{1 - \mathrm{d}_{\mathrm{TV}}(\mu, \nu)}, \quad i \in E, \\
P(V = i) &= \frac{(\mu(i) - \nu(i))^+}{\mathrm{d}_{\mathrm{TV}}(\mu, \nu)}, \quad i \in E, \\
P(W = i) &= \frac{(\nu(i) - \mu(i))^+}{1 - \mathrm{d}_{\mathrm{TV}}(\mu, \nu)}, \quad i \in E.
\end{aligned}$$

Dies sind wohldefinierte Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Setze

$$\begin{aligned}
X &:= UZ + (1 - U)V, \\
Y &:= UZ + (1 - U)W.
\end{aligned}$$

Man kann X und Y wie folgt erzeugen: Man wirft eine Münze, die mit Wahrscheinlichkeit $1 - \mathrm{d}_{\mathrm{TV}}(\mu, \nu)$ Kopf zeigt. Fällt Kopf, setzt man $X = Z$ und $Y = Z$, sonst setzt man $X = V$ und $Y = W$.

Für alle $i \in E$ gilt:

$$\begin{aligned}
P(X = i) &= P(X = i, U = 1) + P(X = i, U = 0) \\
&= P(Z = i, U = 1) + P(V = i, U = 0) \\
&= P(Z = i)P(U = 1) + P(V = i)P(U = 0), \qquad \text{da } U, V, Z \text{ unabhängig.} \\
&= \mu(i) \wedge \nu(i) + (\mu(i) - \nu(i))^+ \\
&= \mu(i), \\
P(Y = i) &= \mu(i) \wedge \nu(i) + (\nu(i) - \mu(i))^+ \\
&= \nu(i).
\end{aligned}$$

Somit ist (X, Y) eine Kopplung von μ und ν.

Es gilt:

$$X = Y \quad \Leftrightarrow \quad (1 - U)V = (1 - U)W.$$

Da die Verteilungen von V und W disjunkte Träger haben, folgt

$$P(X = Y) = P(U = 1) = 1 - \mathrm{d_{TV}}(\mu, \nu).$$

Somit ist (X, Y) eine optimale Kopplung. $\square$

Definition 8.7. Eine *Kopplung* von zwei stochastischen Prozessen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein stochastischer Prozess $(\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit der Eigenschaft

$$\mathcal{L}((\tilde{X}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}) = \mathcal{L}((X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}) \quad \text{und} \quad \mathcal{L}((\tilde{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}) = \mathcal{L}((Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}).$$

Satz 8.8. *Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ unabhängige irreduzible, aperiodische, positiv rekurrente Markovketten mit derselben Übergangsmatrix Π und Startverteilungen μ und ν. Sei*

$$\tau = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n = Y_n\}.$$

Dann gilt $P(\tau < \infty) = 1$. Der Prozess

$$\tilde{X}_n = \begin{cases} X_n, & \text{falls } n \le \tau, \\ Y_n, & \text{falls } n \ge \tau, \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N}_0$ ist eine Markovkette mit Übergangsmatrix Π.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}_0$ setze $Z_n := (X_n, Y_n)$.
Behauptung. $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine Markovkette mit Zustandsraum $E \times E$ und Übergangsmatrix

$$P((i, i'), (j, j')) = \Pi(i, j)\Pi(i', j'), \quad i, i', j, j' \in E.$$

Dazu seien $n \in \mathbb{N}, i_\ell, i'_\ell \in E, 0 \le \ell \le n+1$ mit $P(Z_\ell = (i_\ell, i'_\ell)$ für alle $0 \le \ell \le n) > 0$. Setze

$$A_L := \{X_\ell = i_\ell \text{ für alle } 0 \le \ell \le L\},$$
$$B_L := \{Y_\ell = i'_\ell \text{ für alle } 0 \le \ell \le L\}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} &P(Z_{n+1} = (i_{n+1}, i'_{n+1}) \mid Z_\ell = (i_\ell, i'_\ell) \text{ für alle } 0 \le \ell \le n) \\ &= \frac{P(A_{n+1} \cap B_{n+1})}{P(A_n \cap B_n)} \\ &= \frac{P(A_{n+1})}{P(A_n)} \cdot \frac{P(B_{n+1})}{P(B_n)}, \qquad \text{da } (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ und } (Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ unabhängig sind.} \\ &= P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid A_n) P(Y_{n+1} \mid B_n) \\ &= \Pi(i_n, i_{n+1})\Pi(i'_n, i'_{n+1}). \end{aligned}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} P^n((i, i'), (j, j')) &= P(Z_n = (j, j') \mid Z_0 = (i, i')) \\ &= \frac{P(X_n = j, X_0 = i, Y_n = j', Y_0 = i')}{P(X_0 = i, Y_0 = i')}, \\ &= P(X_n = j \mid X_0 = i) P(Y_n = j' \mid Y_0 = i') \\ &\qquad \text{da } (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ und } (Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ unabhängig sind.} \\ &= \Pi^n(i, j)\Pi^n(i', j'). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist Π die Übergangsmatrix einer irreduziblen aperiodischen Markovkette. Nach Satz 4.12 existiert für alle $i, j \in E$ ein $n_0(i,j)$, sodass für alle $n \geq n_0(i,j)$ gilt:

$$\Pi^n(i,j) > 0.$$

Daher gilt für alle $n \geq \max\{n_0(i,j), n_0(i',j')\}$:

$$P^n((i,i'),(j,j')) > 0.$$

Also ist $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreduzibel.

Außerdem gilt für alle $n \geq \max\{n_0(i,i), n_0(j,j)\}$:

$$P^n((i,j),(i,j)) = \Pi^n(i,i)\Pi^n(j,j) > 0.$$

Insbesondere können wir für n zwei verschiedene Primzahlen wählen und es folgt, dass (i,j) Periode 1 hat. Also ist $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ aperiodisch.

Sei α die stationäre Verteilung von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Behauptung. $\beta(i,j) = \alpha(i)\alpha(j), i, j \in E$, ist eine stationäre Verteilung für $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i,i'\in E} \beta(i,i')P((i,i'),(j,j')) &= \sum_{i,i'\in E} \alpha(i)\alpha(i')\Pi(i,j)\Pi(i',j') \\
&= \sum_{i\in E} \alpha(i)\Pi(i,j) \sum_{i'\in E} \alpha(i')\Pi(i',j') \\
&= \alpha(j)\alpha(j'), \qquad \text{da } \alpha \text{ stationär ist.} \\
&= \beta(j,j').
\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\sum_{i,i'\in E} \beta(i,i') = \sum_{i,i'\in E} \alpha(i)\alpha(i') = 1.$$

Insbesondere ist $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nach Satz 7.13 positiv rekurrent. Mit Lemma 7.10 folgt für alle $i, j \in E$

$$\begin{aligned}
1 &= P_{(i,j)}(T_{(i,i)} < \infty) \\
&\leq P_{(i,j)}(X_n = Y_n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}) \\
&= P_{(i,j)}(\tau < \infty).
\end{aligned}$$

Somit ist

$$P_{(i,j)}(\tau < \infty) = 1.$$

Bleibt zu zeigen dass $(\tilde{X}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Übergangsmatrix Π ist. Wir setzen *Vorlesung 14, 29.1.2014*

$$\tilde{\tilde{X}}_n := \begin{cases} Y_n, & \text{falls } n \leq \tau, \\ X_n, & \text{falls } n \geq \tau. \end{cases}$$

Dann gilt:

$$(\tilde{X}_n, \tilde{\tilde{X}}_n) = \begin{cases} (X_n, Y_n), & \text{falls } n \leq \tau, \\ (Y_n, X_n), & \text{falls } n \geq \tau. \end{cases}$$

Aus der starken Markov-Eigenschaft folgt

$$(X_{\tau+n}, Y_{\tau+n})_{n\in\mathbb{N}_0} \quad \text{und} \quad (Y_{\tau+n}, X_{\tau+n})_{n\in\mathbb{N}}$$

sind Markovketten mit Übergangsmatrix P und unabhängig von $(Z_0, \dots, Z_\tau)$. Daher hat $(\tilde{X}_n, \tilde{\tilde{X}}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ dieselbe Verteilung wie

$$\left\{\begin{matrix} (X_n, Y_n), & \text{falls } n \le \tau \\ (Y_n, X_n), & \text{falls } n \ge \tau \end{matrix}\right\} = (Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}.$$

Also ist $(\tilde{X}_n, \tilde{\tilde{X}}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Übergangsmatrix P. Insbesondere ist die erste Komponente $(\tilde{X}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Übergangsmatrix Π. □

Beweis des Konvergenzsatzes (Satz 8.2). Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible, aperiodische, positiv rekurrente Markovkette mit Übergangsmatrix Π und Startverteilung μ. Sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Übergangsmatrix Π und Startverteilung ν, unabhängig von der Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Sei

$$\tau = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n = Y_n\}.$$

Nach Satz 8.8 ist $P(\tau < \infty) = 1$. Der Prozess

$$\tilde{X}_n = \begin{cases} X_n, & \text{falls } n \le \tau, \\ Y_n, & \text{falls } n \ge \tau, \end{cases}$$

ist nach Satz 8.8 eine Markovkette mit Übergangsmatrix Π und Startverteilung μ, hat also dieselbe Verteilung wie $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Insbesondere ist $(\tilde{X}_n, Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Kopplung von P_μ und P_ν. Daher gilt für alle $A \subseteq E$:

$$\begin{aligned} P_\mu(X_n \in A) - P_\nu(X_n \in A) &= P(\tilde{X}_n \in A) - P(Y_n \in A) \\ &= \underbrace{P(\tilde{X}_n \in A, \tau \le n)}_{=P(Y_n \in A, \tau \le n)} + P(\tilde{X}_n \in A, \tau > n) \\ &\qquad - P(Y_n \in A, \tau \le n) - P(Y_n \in A, \tau > n) \\ &= P(\tilde{X}_n \in A, \tau > n) - P(Y_n \in A, \tau > n) \\ &\le P(\tilde{X}_n \in A, \tau > n) \\ &\le P(\tau > n). \end{aligned}$$

Wir nehmen das Supremum über alle $A \subseteq E$ und folgern mit Lemma 8.4:

$$\mathrm{d}_{\mathrm{TV}}(P_\mu(X_n \in \cdot\,), P_\nu(X_n \in \cdot\,)) \le P(\tau > n).$$

Mit

$$\lim_{n\to\infty} P(\tau > n) = P(\tau = \infty) = 0$$

folgt die Behauptung. □

9 Ergodensatz

Satz 9.1. *Sei* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *eine irreduzible, positiv rekurrente Markovkette und sei*

$$T_0 := \min\{n \geq 1 : X_n = 0\}.$$

Für jede Startverteilung μ *gilt:*

$$P_\mu\left(\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} 1_{\{X_n=0\}} = \frac{1}{E_0[T_0]}\right) = 1.$$

D.h. die Markovkette verbringt asymptotisch den Anteil $\frac{1}{E_0[T_0]}$ *ihrer Zeit im Zustand* 0.

Beweis. Seien

$$T^1 := T_0, \qquad T^{\ell+1} := \min\{n > T^\ell : X_n = 0\} \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{N},$$

die Rückkehrzeiten zur 0.

Wegen der starken Markov-Eigenschaft sind

$$\tau_\ell := T^{\ell+1} - T^\ell \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{N}$$

unabhängig und jedes τ_ℓ hat bezüglich P_μ dieselbe Verteilung wie T_0 bezüglich P_0. Da die Markovkette positiv rekurrent ist, gilt für alle $\ell \in \mathbb{N}$:

$$E_\mu[\tau_\ell] = E_0[T_0] < \infty.$$

Aus dem starken Gesetz der großen Zahlen folgt mit $T^0 := 0$

$$\frac{1}{L}T^L = \frac{1}{L}\sum_{\ell=0}^{L-1}(T^{\ell+1} - T^\ell) = \frac{1}{L}\sum_{\ell=0}^{L-1}\tau_\ell \xrightarrow[L\to\infty]{} E_0[T_0]$$

P_μ-fast sicher, d.h. die Konvergenz gilt für ω aus einer Menge Ω' mit $P_\mu(\Omega') = 1$.

Wir setzen

$$\nu(N) := \sum_{n=0}^{N-1} 1_{\{X_n=0\}}$$

als die Anzahl Besuche in 0 bis zur Zeit $N-1$. Da $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rekurrent ist, wird 0 unendlich oft besucht. Insbesondere gilt

$$\lim_{N\to\infty}\nu(N) = \infty$$

P_μ-fast sicher. Für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$T^{\nu(N)} \leq N - 1 < T^{\nu(N)+1}.$$

Daraus folgt

$$\underbrace{\frac{T^{\nu(N)}}{\nu(N)}}_{\xrightarrow[N\to\infty]{} E_0[T_0]} \leq \frac{N-1}{\nu(N)} \leq \underbrace{\frac{T^{\nu(N)+1}}{\nu(N)+1}}_{\xrightarrow[N\to\infty]{} E_0[T_0]} \cdot \underbrace{\frac{\nu(N)+1}{\nu(N)}}_{\xrightarrow[N\to\infty]{} 1}$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{N\to\infty}\frac{N-1}{\nu(N)} = E_0[T_0] \qquad P_\mu\text{-fast sicher}$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{N\to\infty}\frac{\nu(N)}{N} = \lim_{N\to\infty}\frac{\nu(N)}{N-1}\cdot\frac{N-1}{N} = \frac{1}{E_0[T_0]} \qquad P_\mu\text{-fast sicher}$$

□

Satz 9.2. *Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible, positiv rekurrente Markovkette mit stationärer Verteilung α und sei*

$$f : E \to \mathbb{R}$$

eine beschränkte Funktion. Dann gilt für jede Startverteilung μ P_μ-fast sicher:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(X_n) = \sum_{i\in E} f(i)\alpha(i) = E_\alpha[f(X_0)].$$

Beweis. Sei $C := \sup_{i\in E} |f(i)|$. Wir setzen für $i \in E$

$$\nu_i(N) = \sum_{n=0}^{N-1} 1_{\{X_n=i\}}.$$

Aus Satz 9.1 und Satz 7.14 folgt:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\nu_i(N) = \frac{1}{E_i[T_i]} = \alpha(i) \quad P_\mu\text{-fast sicher für alle } i \in E.$$

Für alle $N \in \mathbb{N}$ und $I \subseteq E$ gilt:

$$\begin{aligned}
S_N &:= \left| \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(X_n) - \sum_{i\in E} f(i)\alpha(i) \right| \\
&= \left| \sum_{i\in E} \frac{1}{N}\nu_i(N) f(i) - \sum_{i\in E} f(i)\alpha(i) \right| \\
&\le \sum_{i\in I} \left| \frac{\nu_i(N)}{N} - \alpha(i) \right| \cdot |f(i)| \\
&= C\sum_{i\in E} \left| \frac{\nu_i(N)}{N} - \alpha(i) \right| + C\sum_{i\in E\setminus I} \left| \frac{\nu_i(N)}{N} - \alpha(i) \right| \\
&\le C\sum_{i\in E} \left| \frac{\nu_i(N)}{N} - \alpha(i) \right| + C\sum_{i\in E\setminus I} \left(\frac{\nu_i(N)}{N} + \alpha(i) \right)
\end{aligned}$$

Nach Definition von $\nu_i(N)$ gilt:

$$\sum_{i\in E} \frac{\nu_i(N)}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i\in E}\sum_{n=0}^{N-1} 1_{\{X_n=i\}} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{\sum_{i\in E} 1_{\{X_n=i\}}}_{=1} = 1.$$

Damit berechnen wir

$$\sum_{i\in E\setminus I} \frac{\nu_i(N)}{N} = 1 - \sum_{i\in I} \frac{\nu_i(N)}{N} = \sum_{i\in I} \left(\alpha(i) - \frac{\nu_i(N)}{N} \right) + \sum_{i\in E\setminus I} \alpha(i).$$

Einsetzen liefert

$$S_N \le 2C\sum_{i\in I} \left| \frac{\nu_i(N)}{N} - \alpha(i) \right| + 2C\sum_{i\in E\setminus I} \alpha(i).$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $I \subseteq E$ endlich, sodass

$$\sum_{i \in E \setminus I} \alpha(i) < \frac{\varepsilon}{4C}.$$

Dann gilt für alle $N \in \mathbb{N}$:

$$S_N \leq 2C \sum_{i \in I} \left| \frac{\nu_i(N)}{N} - \alpha(i) \right| + \frac{\varepsilon}{2}$$

und es folgt:

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} S_N \leq 2C \overline{\lim_{N\to\infty}} \sum_{i \in I} \underbrace{\left| \frac{\nu_i(N)}{N} - \alpha(i) \right|}_{\xrightarrow[N\to\infty]{} 0} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2},$$

da I endlich ist. Wegen $\varepsilon > 0$ beliebig, folgt

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} S_N = 0.$$

Da $S_N \geq 0$ für alle $N \in \mathbb{N}$, folgt die Behauptung. $\square$

Beispiel 9.3. Betrachte eine Markovkette als vereinfachtes Modell für das Wetter mit Zustandsraum $E = \{r, s, w\}$, $r \mathrel{\hat{=}}$ Regen, $s \mathrel{\hat{=}}$ Sonne, $w \mathrel{\hat{=}}$ Wolken und Übergangsmatrix

$$\Pi = \begin{array}{c} \\ r \\ s \\ w \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} r & s & w \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

Ein Eiscafé macht an einem

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{regnerischen} \\ \text{sonnigen} \\ \text{wolkigen} \end{array} \right\} \text{Tag} \left\{ \begin{array}{c} 150 \\ 600 \\ 300 \end{array} \right\} \text{€ Umsatz.}$$

Berechnen Sie den mittleren Umsatz pro Tag im langjährigen Mittel. Dazu sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Markovkette mit Übergangsmatrix Π. Definiere $f : E \to \mathbb{R}$ durch

$$f(r) = 150, \quad f(s) = 600, \quad f(w) = 300.$$

Gesucht ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(X_n).$$

Die Markovkette ist irreduzibel. Da der Zustandsraum endlich ist, ist sie positiv rekurrent. Es gibt eine eindeutige stationäre Verteilung α. Diese erfüllt

$$\begin{aligned} & & \alpha\Pi = \alpha = \alpha \,\mathrm{Id} \\ &\Leftrightarrow & \alpha(\Pi - \mathrm{Id}) = 0 \\ &\Leftrightarrow & (\alpha(r), \alpha(s), \alpha(w)) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

Man sieht, dass
$$\alpha(r) = \alpha(s) = \alpha(w) = \frac{1}{3}$$
die Gleichung löst. Damit können wir den Ergodensatz anwenden und erhalten
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(X_n) = \sum_{i\in E} f(i)\alpha(i) = \frac{1}{3}(150+600+300) = 350.$$
Der mittlere Umsatz pro Tag beträgt im langjährigen Mittel 350 €.

10 Monte-Carlo Simulation

Dieses Kapitel basiert auf Kapitel 7 des Buches O. Häggström, Finite Markov chains and algorithmic applications, Cambridge University Press, 2002.

Problem: Wie simuliert man ein Wahrscheinlichkeitsmaß α auf einer endlichen Menge $E = \{1, \ldots, k\}$?

Eigentlich ist dies ganz einfach: Definiere $g : [0,1) \to E$ durch
$$g(x) = i \qquad \text{für } x \in \left[\sum_{l=1}^{i-1} \alpha(l), \sum_{l=1}^{i} \alpha(l)\right), i \in E.$$
Ist U gleichverteilt auf $[0,1)$, dann hat $g(U)$ die Verteilung α, denn für alle $i \in E$ gilt:
$$P(g(U) = i) = P\left(U \in \left[\sum_{l=1}^{i-1} \alpha(l), \sum_{l=1}^{i} \alpha(l)\right)\right) = \alpha(i).$$
Problem: Dies funktioniert in der Praxis nur, wenn $|E|$ klein ist.

Beispiel 10.1 (Harte-Kugel-Modell)**.** Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit

- Knotenmenge $V = \{v_1, \ldots, v_k\}$ und
- Menge ungerichteter Kanten $E = \{e_1, \ldots, e_l\}$.

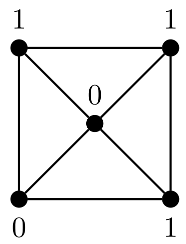
Wir betrachten das *Harte-Kugel-Modell* auf G:
Jedem Knoten ordnen wir zufällig den Wert 0 oder 1 zu, unter der Nebenbedingung, dass zwei benachbarte Knoten nicht beide den Wert 1 haben können. Dabei heißen $u, v \in V$ *benachbart*, wenn sie durch eine Kante verbunden sind.

Elemente von $\{0,1\}^V$ heißen *Konfigurationen*. Eine Konfiguration heißt *zulässig*, wenn sich keine zwei Einsen an benachbarten Knoten befinden.

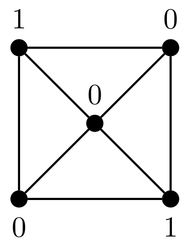
Alle zulässigen Konfigurationen sollen gleich wahrscheinlich sein.

Das Modell wurde in der statistischen Physik eingeführt. Dabei nahm man an, dass der zugrundeliegende Graph ein Teilwürfel von $\mathbb{Z}^3$ ist, d.h. etwa $V = [-N, N]^3 \cap \mathbb{Z}^3$. Man möchte Gase modellieren, deren Teilchen nicht vernachlässigbare Radien besitzen und sich nicht überschneiden können.

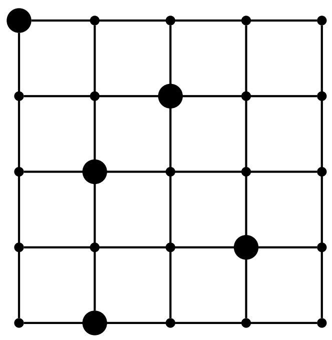
- Eine 1 bei $v \in V$ bedeutet, dass sich an der Stelle v ein Teilchen befindet.



Diese Konfiguration ist *nicht zulässig.*



Diese Konfiguration ist *zulässig.*



hier bedeutet ein dicker schwarzer Punkt eine Eins.

- Eine 0 bei $v \in V$ steht für einen leeren Gitterplatz.

Definition 10.2. Sei Z_G die Anzahl der zulässigen Konfigurationen auf G. Definiere ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ_G auf $(\{0,1\}^V, \mathcal{P}(\{0,1\}^V))$ durch

$$\mu_G(\{\xi\}) = \begin{cases} \frac{1}{Z_G}, & \text{falls } \xi \text{ zulässige Konfiguration,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

D.h. μ_G ist die Gleichverteilung auf der Menge der zulässigen Konfigurationen.

Betrachte als Graph z.B. ein Quadrat in $\mathbb{Z}^2$: $V = [-N, N]^2 \cap \mathbb{Z}^2$. Dann gilt

$$|\{0,1\}^V| = 2^{(2N+1)^2}.$$

Das ist exponentiell in N. Auch die Anzahl der zulässigen Konfigurationen wächst exponentiell in N. Typischerweise ist man an großen N interessiert, so dass man μ_G nicht naiv simulieren kann.

Bemerkung 10.3.

- Für $\xi \in \{0,1\}^V$ sei $e(\xi)$ die Anzahl Einsen in ξ.
- Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilung μ_G.

- Eine Größe von Interesse: $E[e(X)]$ = erwartete Anzahl von Einsen in einer Konfiguration, die zufällig gemäß μ_G ausgewürfelt wird.

Es gilt:

$$E[e(X)] = \sum_{\xi \in \{0,1\}^V} e(\xi)\mu_G(\xi) = \frac{1}{Z_G} \sum_{\xi \in \{0,1\}^V} e(\xi) 1_{\{\xi \text{ ist zulässig}\}}.$$

Angenommen, wir können eine Zufallsvariable X mit Verteilung μ_G simulieren. Dann simulieren wir Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ (n groß) mit Verteilung μ_G, unabhängig voneinander. Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen gilt:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e(X_i) = E[e(X)] \right) = 1.$$

So bekommen wir einen Schätzer, nämlich $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e(X_i)$, für $E[e(X)]$.

Um μ_G zu simulieren, verwendet man die sogenannte Markov Chain Monte Carlo-Methode (MCMC, 1950). Sie hat Anwendungen u.a. in der Bildverarbeitung und der Bayesschen Statistik.

Allgemeine Idee: Um ein Wahrscheinlichkeitsmaß α auf einer endlichen Menge E zu simulieren, konstruieren wir eine irreduzible, aperiodische Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, deren eindeutige stationäre Verteilung α ist. Dann folgt aus dem Konvergenzsatz, dass für jede beliebe Anfangsverteilung μ die Verteilung $\mu^{(n)}$ von X_n gegen α konvergiert. D.h. für große n ist $\mu^{(n)}$ eine Approximation von α. Durch verlängern der Laufzeit kann man die Güte der Approximation verbessern.

Problem: Wie konstruiert man eine solche Markovkette?

Ein MCMC-Algorithmus für das Harte-Kugel-Modell. Da $\mu_G(\xi) > 0$ genau dann, wenn ξ zulässig ist, wollen wir eine irreduzible, aperiodische Markovkette mit Zustandsraum

$$E = \{\xi \in \{0,1\}^V : \xi \text{ zulässige Konfiguration}\}$$

und stationärer Verteilung $\mu_G|_E$ konstruieren.

Definition 10.4. Definiere die Übergangswahrscheinlichkeiten einer Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ folgendermaßen: Zu jeder Zeit $n+1$

1. Wähle einen Knoten $v \in V$ zufällig gemäß der Gleichverteilung.
2. Wir werfen eine faire Münze.
3. Falls Kopf fällt und alle Nachbarn von v in X_n den Wert 0 haben, setze $X_{n+1}(v) = 1$. Andernfalls setze $X_{n+1}(v) = 0$.
4. Setze $X_{n+1}(u) = X_n(u)$ für alle $u \in V \setminus \{v\}$.

Lemma 10.5. *Die Markovkette mit diesen Übergangswahrscheinlichkeiten ist irreduzibel und aperiodisch.*

Beweis.
- Irreduzibel: Eine 1 am Knoten v lässt sich mit Zahl in eine 0 verwandeln. Um in v eine 1 zu produzieren, erzwingt man zunächst eine 0 an allen Nachbarpunkten und erzeugt dann mit Kopf eine 1. Damit kann man jede zulässige Konfiguration von jeder zulässigen Konfiguration erreichen.

- Aperiodisch: Es gilt $\Pi(\xi,\xi) > 0$ für alle $\xi \in E$. Denn jede zulässige Konfiguration enthält mindestens eine 0. Mit Hilfe von Zahl bleibt diese in einem Schritt erhalten.

$\square$

Lemma 10.6. *$\mu_G|_E$ ist ein reversibles Maß für die Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.*

Beweis. Seien $\xi, \eta \in E$. Zu zeigen:

$$\mu_G(\xi)\Pi(\xi,\eta) = \mu_G(\eta)\Pi(\eta,\xi) \quad \Longleftrightarrow \quad \Pi(\xi,\eta) = \Pi(\eta,\xi)$$

Sei $d(\xi,\eta)$ die Anzahl der Knoten, in denen sich ξ und η unterscheiden.
Fall $d(\xi,\eta) = 0$: Dann ist $\xi = \eta$ und die Behauptung klar.
Fall $d(\xi,\eta) \geq 2$: Da sich bei einem Übergang die Konfiguration nur an einem Knoten ändert, ist $\Pi(\xi,\eta) = 0 = \Pi(\eta,\xi)$. Also gilt die Behauptung.
Fall $d(\xi,\eta) = 1$: Sei v der Knoten, in dem sich ξ und η unterscheiden. Dann ist oBdA $\xi(v) = 0$ und $\eta(v) = 1$. In jedem Fall haben alle Nachbarn von v in ξ und η den Wert 0 und es gilt:

$$\Pi(\xi,\eta) = \frac{1}{|V|} \cdot \frac{1}{2} = \Pi(\eta,\xi).$$

$\square$

Definition 10.7. Der beschriebene MCMC-Algorithmus gehört zur Klasse der *Gibbs sampler*. Gibbs sampler snd nützlich zum Simulieren von Wahrscheinlichkeitsmaßen α auf Zustandsräumen der Form

$$E = S^V$$

mit S und V endlich.

Der Gibbs sampler ist eine Markovkette mit folgenden Übergangswahrscheinichkeiten: Zu jeder Zeit $n+1$, $n \in \mathbb{N}_0$,

1. Wähle einen Knoten $v \in V$ zufällig gemäß der Gleichverteilung.
2. Wähle $X_{n+1}(v)$ gemäß der Verteilung

   $$P(X_{n+1}(v) = \sigma) = \alpha(\omega(v) = \sigma | \omega(u) = X_n(u)\, \forall u \neq v)$$

   für $\sigma \in S$. Dabei schreiben wir kurz

   $$\{\omega(v) = \sigma\} = \{\omega \in E : \omega(v) = \sigma\} \quad \text{etc.}$$

3. Setze $X_{n+1}(u) = X_n(u)$ für alle $u \in V \setminus \{v\}$.

Bemerkung 10.8. Im Fall des Harte-Kugel-Modells ist $\alpha = \mu_G$ die Gleichverteilung auf der Menge der zulässigen Konfigurationen. Sei $v \in V$.

- Angenommen, $X_n(u) = 0$ für alle Nachbarn u von v. Dann gilt für $\sigma \in \{0,1\}$:

  $$\begin{aligned}&\alpha(\omega(v) = \sigma | \omega(u) = X_n(u)\, \forall u \neq v)\\ =&\frac{\mu_G(\omega(v) = \sigma, \omega(u) = X_n(u)\, \forall u \neq v)}{\mu_G(\omega(u) = X_n(u)\, \forall u \neq v)} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

  da μ_G die Gleichverteilung ist und $\omega(v)$ genau zwei Werte annehmen kann.

- Angenommen, $X_n(u) = 1$ für einen Nachbarn u von v. Dann gilt:

$$\begin{aligned}&\alpha(\omega(v) = 0 | \omega(u) = X_n(u)\,\forall u \neq v)\\ =&\frac{\mu_G(\omega(v) = 0, \omega(u) = X_n(u)\,\forall u \neq v)}{\mu_G(\omega(u) = X_n(u)\,\forall u \neq v)} = 1,\end{aligned}$$

da $\omega(v)$ nur den Wert 0 annehmen kann, wenn $\omega(u) = 1$ für einen Nachbarn von v.

Bemerkung 10.9. α ist ein reversibles Maß für den Gibbs sampler.

Beweis. Seien $\xi, \eta \in E$. Zu zeigen:

$$\alpha(\xi)\Pi(\xi, \eta) = \alpha(\eta)\Pi(\eta, \xi).$$

Sei $d(\xi, \eta)$ die Anzahl der Knoten, in denen sich ξ und η unterscheiden.
Fall $d(\xi, \eta) = 0$: Dann ist $\xi = \eta$ und die Behauptung klar.
Fall $d(\xi, \eta) \geq 2$: Dann ist $\Pi(\xi, \eta) = 0 = \Pi(\eta, \xi)$ und die Behauptung klar.
Fall $d(\xi, \eta) = 1$: Sei v der Knoten, in dem sich ξ und η unterscheiden. Es gilt:

$$\begin{aligned}\alpha(\xi)\Pi(\xi, \eta) =&\alpha(\xi)\alpha(\omega(v) = \eta(v) | \omega(u) = \xi(u)\,\forall u \neq v)\\ =&\frac{\alpha(\xi)\alpha(\omega(v) = \eta(v), \omega(u) = \xi(u)\,\forall u \neq v)}{\alpha(\omega(u) = \xi(u)\,\forall u \neq v)}\\ =&\frac{\alpha(\xi)\alpha(\eta)}{\alpha(\omega(u) = \xi(u)\,\forall u \neq v)}.\end{aligned}$$

Der Nenner ändert sich nicht, wenn wir ξ durch η ersetzen. Somit können wir auch auf der linken Seite ξ durch η ersetzen und die Behauptung folgt. $\square$

Metropoliskette. Eine andere Möglichkeit, eine Verteilung α auf $E = \{1, \ldots, k\}$ zu simulieren, bietet die Metropoliskette.

Zunächst konstruiert man sich einen ungerichteten Graph G mit Knotenmenge E. G soll zusammenhängend sein. Die Knotengrade sollen nicht zu groß sein. Jede Kante soll zwei verschiedene Endpunkte haben, d.h. G enthält keine Schleifen.

Sei d_i der Grad des Knoten i, d.h. die Anzahl der Kanten, die von i ausgehen. Wir schreiben $i \sim j$, wenn G eine Kante zwischen i und j enthält.

Definition 10.10. Die Metropoliskette zu einem gegebenen Graphen G ist eine Markovkette mit Zustandsraum E und Übergangsmatrix

$$\Pi(i, j) = \begin{cases} \frac{1}{d_i} \min\left\{\frac{\alpha(j)d_i}{\alpha(i)d_j}, 1\right\}, & \text{falls } i \sim j,\\ 0, & \text{falls } i \neq j \text{ und } i \not\sim j,\\ 1 - \sum_{l:l\sim i} \frac{1}{d_i} \min\left\{\frac{\alpha(l)d_i}{\alpha(i)d_l}, 1\right\}, & \text{falls } i = j.\end{cases}$$

Beachte: $\Pi(i, j) \in [0, 1]$ und $\sum_{j\in E} \Pi(i, j) = 1$.

Bemerkung 10.11. Die Metropoliskette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ läßt sich wie folgt erzeugen: Angenommen $X_n = i$. Wähle j gleichverteilt aus allen Nachbarn von i und setze

$$X_{n+1} = \begin{cases} j & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \min\left\{\frac{\alpha(j)d_i}{\alpha(i)d_j}, 1\right\},\\ i & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - \min\left\{\frac{\alpha(j)d_i}{\alpha(i)d_j}, 1\right\}.\end{cases}$$

Beweis. Dann gilt für $j \sim i$

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1} = j | X_n = i) =& \frac{1}{d_i} \min\left\{\frac{\alpha(j)d_i}{\alpha(i)d_j}, 1\right\} = \Pi(i,j), \\
P(X_{n+1} = i | X_n = i) =& \sum_{l:l\sim i} \frac{1}{d_i}\left(1 - \min\left\{\frac{\alpha(l)d_i}{\alpha(i)d_l}, 1\right\}\right) \\
=& 1 - \sum_{l:l\sim i} \frac{1}{d_i} \min\left\{\frac{\alpha(l)d_i}{\alpha(i)d_l}, 1\right\} = \Pi(i,i).
\end{aligned}$$

□

Lemma 10.12. *α ist ein reversibles Maß für die Metropoliskette.*

Beweis. Zu zeigen: $\alpha(i)\Pi(i,j) = \alpha(j)\Pi(j,i)$ für alle $i, j \in E$.
Fall $i = j$: klar.
Fall $i \not\sim j$: $\Pi(i,j) = 0 = \Pi(j,i)$.
Fall $i \sim j$: Angenommen $\frac{\alpha(j)d_i}{\alpha(i)d_j} \geq 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\alpha(i)\Pi(i,j) &= \alpha(i) \cdot \frac{1}{d_i}, \\
\alpha(j)\Pi(j,i) &= \alpha(j) \cdot \frac{1}{d_j} \frac{\alpha(i)d_j}{\alpha(j)d_i} = \frac{\alpha(i)}{d_i}.
\end{aligned}$$

Ähnlich folgt im Fall $\frac{\alpha(j)d_i}{\alpha(i)d_j} \leq 1$

$$\begin{aligned}
\alpha(i)\Pi(i,j) &= \alpha(i) \cdot \frac{1}{d_i} \frac{\alpha(j)d_i}{\alpha(i)d_j} = \frac{\alpha(j)}{d_j}, \\
\alpha(j)\Pi(j,i) &= \alpha(j) \cdot \frac{1}{d_j}.
\end{aligned}$$

□