WS 2013/14

Notizen zur Vorlesung Markovketten (MA2404)

Silke Rolles

17. Oktober 2013

Fehler in der Mitschrift an jonas.keinholz@tum.de

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Diese Aufzeichnungen sind ausschließlich für die Studierenden der Vorlesung "Markovketten" bestimmt. Es handelt sich um die Vorlesungsvorbereitung der Dozentin, die den Studenten der Vorlesung zur Verfügung gestellt wird. Die Weitergabe oder Verbreitung ist nicht erlaubt. Den Aufzeichnungen liegt das Buch P. Brémaud, Markov chains, Gibbs fields, Monte Carlo simulation, and queues, Springer, 1999 zugrunde. Viele Passagen sind sehr nahe an dieser Quelle, jedoch nicht speziell gekennzeichnet. Diese Notizen ersetzen kein Lehrbuch.

1 Definition

Vorlesung 1, 16.10.2013

Definition 1.1. Ein *stochastischer Prozess* in diskreter Zeit ist eine Folge $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ von Zufallsvariablen auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Werten in derselben Menge E:

$$X_t : \Omega \to E.$$

E heißt *Zustandsraum.* t wird als *Zeit* interpretiert. $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ beschreibt eine stochastische Evolution im Lauf der Zeit. Ist $X_t = i$, so sagen wir, dass der Prozess zur Zeit t im Zustand i ist.

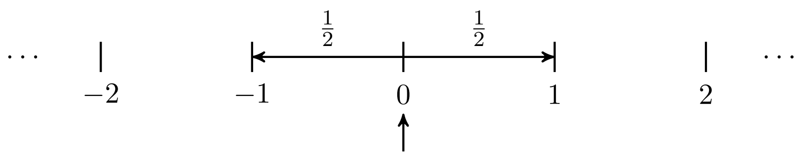
Beispiel 1.2 (stochastische Prozesse)**.**

1. Wir werfen immer wieder dieselbe Münze, X_t = Ergebnis des t-ten Münzwurfs.
   Standardannahme: $X_t, t \in \mathbb{N}_0$ sind unabhängig und identisch verteilt.

2. Die *einfache Irrfahrt auf* $\mathbb{Z}$. Seien $\xi_i, i \in \mathbb{N}$ unabhängig und identisch verteilt mit $P(\xi_i = 1) = \frac{1}{2} = P(\xi_i = -1)$. Sei

   $$X_0 = 0, \quad X_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

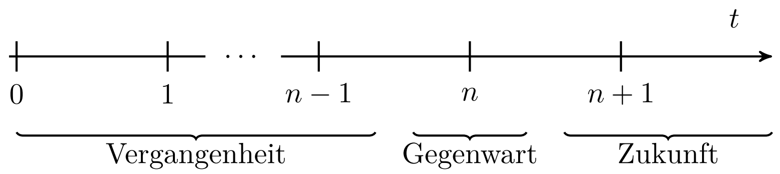
   die Position zur Zeit $n \in \mathbb{N}$. Man kann sich den stochastischen Prozess wie folgt vorstellen: Ein Teilchen startet in 0. Zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}_0$ wirft es eine Münze. Wenn Kopf fällt, springt es nach rechts, sonst links.

   In diesem Beispiel sind die $X_n, n \in \mathbb{N}_0$ *nicht* unabhängig. Die Abhängigkeitsstruktur ist aber einfach. Es gilt:

   $$X_{n+1} = X_n + \xi_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Die Zuwächse $X_{n+1} - X_n, n \in \mathbb{N}_0$ sind unabhängig und identisch verteilt. X_{n+1} hängt *nur* von X_n und ξ_{n+1} ab, nicht jedoch von $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$.



Der Prozess hat ein *Gedächtnis der Länge 1*. Dies ist auch bei Markovketten der Fall.

Eine Menge E heißt *abzählbar*, wenn sie endlich oder abzählbar unendlich ist.

Definition 1.3. Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ mit abzählbaren Zustandsraum E heißt *Markovkette*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ und Zustände $i, j, i_0, \ldots, i_{n-1} \in E$ mit $P(X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) > 0$ gilt:

$$P(X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i). \tag{1}$$

Falls zusätzlich die Wahrscheinlichkeit in (1) immer dann, wenn sie wohldefiniert ist, unabhängig von n ist, spricht man von einer *homogenen Markovkette*. Die Eigenschaft (1) heißt *Markov-Eigenschaft*.

Die Markov-Eigenschaft besagt, dass der nächste Zustand X_{n+1} nur vom gegenwärtigen Zustand X_n, nicht aber von der Vergangenheit $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ abhängt.

Lemma 1.4. *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $B \in \mathcal{F}$ mit $P(B) > 0$. Dann ist*

$$P(\,\cdot \mid B) : \mathcal{F} \to [0,1], \quad A \mapsto P(A \mid B)$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Beweis. (P0) Zu zeigen: $P(A|B) \in [0,1]$ für alle $A \in \mathcal{F}$.

Offensichtlich ist $P(A|B) \geq 0$. Ausserdem gilt wegen der Monotonie von P

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \leq \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

(P1) $P(\Omega|B) = \dfrac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = 1.$

(P2) Für $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ paarweise disjunkt gilt:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i | B\right) = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cap B)\right)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B).$$

$\square$

Definition. Eine Matrix $\Pi \in [0,1]^{E\times E}$ heißt *stochastisch*, falls

$$\sum_{j\in E} \Pi(i,j) = 1 \quad \text{für alle } i \in E,$$

d. h. wenn alle Zeilensummen 1 ergeben.

Definition 1.5. Eine stochastische Matrix $\Pi \in [0,1]^{E\times E}$ heißt *Übergangsmatrix* für die homogene Markovkette $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$, falls

$$\Pi(i,j) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \quad \text{für alle } i,j \in E \text{ und } n \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } P(X_n = i) > 0.$$

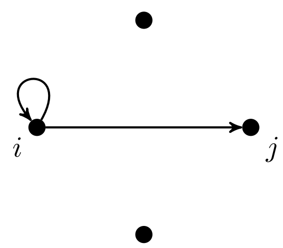
Die $\Pi(i,j)$ heißen *Übergangswahrscheinlichkeiten*.

Typischerweise wählen wir den Zustandsraum E so, dass für alle $i \in E$ ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $P(X_n = i) > 0$ existiert.

Betrachte $i \in E$ mit $P(X_n = i) > 0$ für ein $N \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt nach Lemma 1.4:

$$\sum_{j\in E} \Pi(i,j) = \sum_{j\in E} P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P\left(\bigcup_{j\in E}\{X_{n+1} = j\} \,\middle|\, X_n = i\right) = 1.$$

Der Übergangsgraph einer Markovkette. Ein *Graph* $G = (\mathcal{V},\mathcal{E})$ besteht aus einer abzählbaren *Knotenmenge* $\mathcal{V}$ und einer Menge von gerichteten Kanten $\mathcal{E} \subset \mathcal{V}\times\mathcal{V}$. Ist $e = (i,j) \in \mathcal{E}$, so geht eine Kante von i nach j. Die Kante $e = (i,i)$ ist eine Schleife bei i.



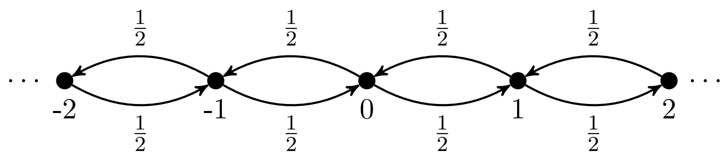
Definition 1.6. Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ eine homogene Markovkette mit abzählbarem Zustandsraum E und Übergangsmatrix Π. Der *Übergangsgraph* von $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ ist definiert durch $G = (\mathcal{V},\mathcal{E})$ mit

$$\mathcal{V} = E \quad \text{und} \quad \mathcal{E} = \{(i,j) \in E\times E : \Pi(i,j) > 0\}.$$

Somit gibt es eine Kante von i nach j, wenn die Markovkette mit positiver Wahrscheinlichkeit in einem Schritt von i nach j gelangen kann. Man beschriftet die Kante (i,j) mit $\Pi(i,j)$.

Beispiel 1.7 (Einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$)**.** Intuitiv ist klar, dass hier eine Markovkette vorliegt (Beweis später).

- Übergangsgraph



- Übergangsmatrix

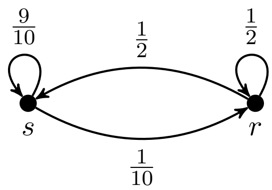
$$\Pi(i,j) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{falls } j \in \{i-1, i+1\}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel 1.8 (Stark vereinfachtes Modell für das Wetter in Los Angeles)**.** Homogene Markovkette mit Zustandsraum $E \in \{s, r\}$, wobei $s \mathrel{\widehat{=}}$ Sonne, $r \mathrel{\widehat{=}}$ Regen. Die Zeit wird in Tagen gemessen.

- Übergangsmatrix

$$\begin{array}{c} \\ s \\ r \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} s & r \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

- Übergangsgraph



Wenn es an einem Tag sonnig ist, ist es mit Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{10}$ am nächsten Tag wieder sonnig.

Frage: Existiert zu jeder stochastischen Matrix Π eine Markovkette mit Übergangsmatrix Π?