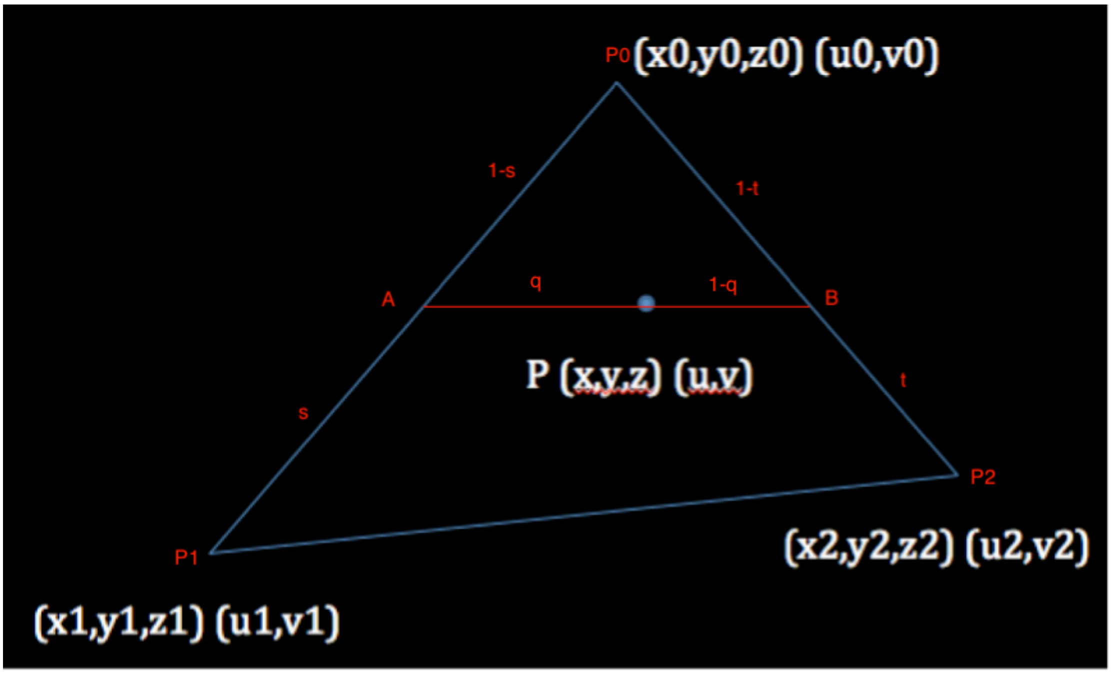
# Assignment #1

**解答：**过点 P 作 x 轴的平行线，分别相交 P0P1、P0P2 于点 A、B，因此 A、B 两点的纵坐标值为 y。具体情况如下图所示：




**主要思路：**通过透视矫正技术得到 A、B 两点的纹理坐标(ua,va)、(ub,vb)。再对线段 AB 采用同样的技术得到 P 点的纹理坐标(u,v)。

**具体步骤：**

首先，考虑 P0P1 上的情况。根据线性插值定义，得出插值系数：

$$s = \frac{xa - x1}{x0 - x1} = \frac{y - y1}{y0 - y1}$$

可得：

$$xa = sx0 + (1 - s)x1$$

已知：（具体解释见补充部分）

$$za = \frac{1}{(1 - s)\frac{1}{z1} + s\frac{1}{z0}}$$

因为 z 的倒数是线性插值的，所以有：

$$\frac{ua - u1}{u0 - u1} = \frac{za - z1}{z0 - z1}$$

可解得：

$$ua = za[\frac{u1}{z1}(1 - s) + \frac{u0}{z0}s]$$

同理可得：

$$va = za[\frac{v1}{z1}(1 - s) + \frac{v0}{z0}s]$$

然后，考虑 P0P2 上的情况。得到以下结果（过程同上）：
插值系数：

$$t = \frac{xb - x2}{x0 - x2} = \frac{y - y2}{y0 - y2}$$

可得：

$$xb = tx0 + (1 - t)x2$$

已知：

$$zb = \frac{1}{(1 - t)\frac{1}{z2} + t\frac{1}{z0}}$$

有：

$$\frac{ub - u2}{u0 - u1} = \frac{zb - z2}{z0 - z1}$$

可解得：

$$ub = zb[\frac{u2}{z2}(1 - t) + \frac{u0}{z0}t]$$

同理：

$$vb = zb[\frac{v2}{z2}(1 - t) + \frac{v0}{z0}t]$$

最后，考虑 AB 上的情况。得到最终结果（过程依旧同上）：
插值系数：

$$q = \frac{x - xa}{xb - xa}$$

已知：

$$z = \frac{1}{(1 - q)\frac{1}{za} + q\frac{1}{zb}}$$

有：

$$\frac{u - ua}{ub - ua} = \frac{z - za}{zb - za}$$

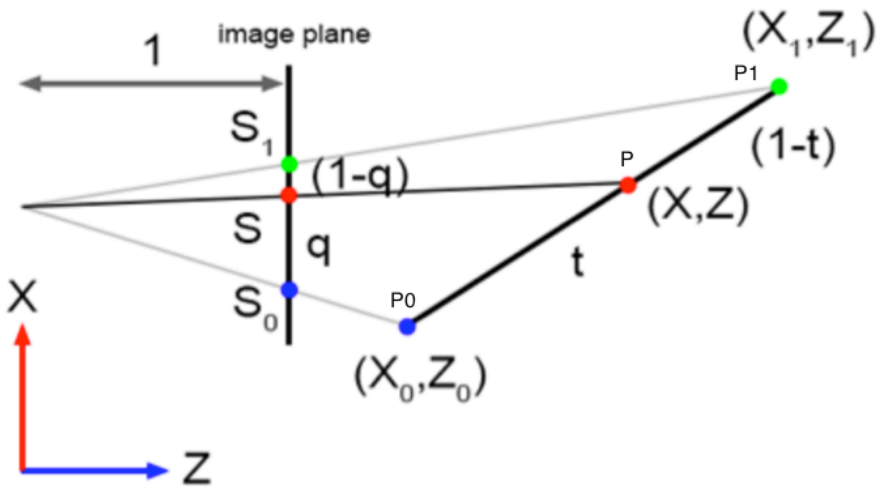
可解得：

$$u = z[\frac{ua}{za}(1 - q) + \frac{ub}{zb}q]$$

同理：

$$v = z[\frac{va}{za}(1 - q) + \frac{vb}{zb}q]$$

**补充部分：**下图为图形透视投影的示意图。其中，$\frac{X0X}{X0X1} = t$, $\frac{X1X}{X0X1} = 1 - t$。t 与 1-t 在屏幕空间上对应的系数分别为 q 与 1-q，P1、P、P0 对应的屏幕点分别为 S1、S、S0。




由相似三角形的性质，可得：

$$t = \frac{qz0}{qz0 + (1 - qz1)}$$

因为有：

$$z = z0 + t(z1 - z0)$$

所以可解得：

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z0}(1 - q) + \frac{1}{z1}q$$