

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

DIPLOMSKI RAD br. 1099

Harry Potter
i analiza vremenskih nizova
zasnovana na kompleksnim
mrežama

Lovre Mrčela

Zagreb, lipanj 2017.

Zahvaljujem.

SADRŽAJ

1. Uvod	1
2. Metode i koncepti	2
2.1. Statistička arbitraža	2
2.1.1. Razlika normaliziranih log-cijena	3
2.1.2. Normalizirana razlika log-cijena	6
2.1.3. Mjera kointegracije slučajnih procesa	7
2.1.4. Nedostaci statističke arbitraže	10
2.2. Relacija preferencije i funkcija korisnosti	10
2.3. Graf toka preferencija	11
2.4. Metoda potencijala	13
2.4.1. Računanje potencijala čvorova	13
2.4.2. Konzistentna rekonstrukcija grafa	15
2.5. Koeficijent obrtaja	15
3. Algoritam	17
3.1. Konstrukcija grafa toka preferencija	18
3.2. Konstrukcija portfelja	19
3.3. Minimizacija koeficijenta obrtaja	20
4. Rezultati	21
5. Zaključak	23
Literatura	24
A. Računanje momenata vremenskog niza na pomičnom prozoru	25

1. Uvod

Klasične metode statističke arbitraže uzimaju u obzir parove vrijednosnica čije cijene se ponašaju slično tijekom određenom vremenskog perioda. Sličnost se mjeri kointegracijom, korelacijom, ili nekom drugom mjerom, s ciljem pronalaska trenutka kada te cijene izlaze van statistički utvrđeno visoko pouzdanog intervala. Takve prilike mogu se iskoristiti predviđanjem da će se cijene u idućem trenutku ponovno vratiti unutar visoko pouzdanog intervala, te se u skladu s tim predviđanjem može provesti trgovanje.

U ovom radu predložena je nova metoda temeljena na predviđanjima koja su dobivena metodom statističke arbitraže, pri čemu se statističke mjere koriste za opisivanje relacije preferencije među parovima vrijednosnica. Razlikuju se dvije vrste preferencije: preferencija jedne vrijednosnice nad drugom i individualna mjera preferencije za svaku vrijednosnicu. Iz dobivene relacije preferencije konstruira se graf toka preferencija iz kojeg se može proučiti međusobna interakcija svih vrijednosnica koje su na raspolaganju. Konačno, za svaku vrijednosnicu izračunava se individualna mjera preferencije, na temelju čega se donosi odluka o sastavljanju portfelja.

Ideja ove metode je ostvariti generalizaciju klasičnih metoda statističke arbitraže koja će biti robusnija i ostvarivati bolje rezultate kada ima velik broj vrijednosnica na raspolaganju tako što izvlači zajedničku interakciju iz svih vrijednosnica.

Organizacija poglavlja je sljedeća: ...

2. Metode i koncepti

Ovdje su opisane matematičke metode i koncepti koji su korišteni u radu, kao i definicije korištenih osnovnih pojmova.

2.1. Statistička arbitraža

Statistička arbitraža (engl. *statistical arbitrage*) je algoritam trgovanja zasnovan na statistici. Pojam arbitraža u kontekstu financija označava okolnosti pod kojima se može konstruirati portfelj koji ostvaruje nenegativan profit s vjerojatnošću 1, dok pritom njegova početna vrijednost iznosi 0. Trivijalan primjer arbitraže je situacija u kojoj bi se ista vrijednosnica nudila po različitoj cijeni na dva različita tržišta, i tada je arbitražu moguće ostvariti kupovanjem vrijednosnice po nižoj cijeni na jednom tržištu i prodavanjem po višoj na drugom. Matematička definicija arbitražnih okolnosti je sljedeća:

$$\begin{aligned} V^{(0)} &= 0 \\ P(V^{(t)} \geq 0) &= 1, \end{aligned} \tag{2.1}$$

gdje $V^{(t)}$ označava vrijednost portfelja u trenutku t .

U statističkoj arbitraži cilj je eksploatirati statističke zakonitosti koje vrijede među parovima vrijednosnica kako bi se ostvario profit. Valja napomenuti da, iako nosi naziv arbitraža, statistička arbitraža zapravo ne zadovoljava nužno (2.1), jer korištene statističke mjere imaju određeni interval pouzdanosti koji je manji od 100%. Tako se može dogoditi da bude $V^{(t)} < 0$ za neke t . Ipak, uz pretpostavku dovoljne likvidnosti tržišta, kako $t \rightarrow +\infty$, tako vjerojatnost $P(V^{(t)} > 0) \rightarrow 1$. U praksi, potrebno je osigurati dovoljno velik početni iznos $V^{(0)}$ kako bi se izbjegla mogućnost *defaulta*.

Algoritam statističke arbitraže u svakom vremenskom trenutku čine najčešće sljedeći koraci:

1. određivanje neke mjere sličnosti među parovima vrijednosnica nad proteklom vremenskim periodom zadane duljine,
2. uzimanje u obzir samo onih parova kod kojih mjera sličnosti ne prelazi zadani prag, odnosno odbacivanje preostalih parova;
3. za parove čije je ponašanje međusobno dovoljno slično utvrđuje se nalaze li se u sadašnjem trenutku njihove cijene izvan očekivanog intervala,
4. u skladu s utvrđenim provodi se trgovanje parovima vrijednosnica na način da se u jednoj od njih zauzme kratka, a u drugoj duga pozicija, te se u idućem trenutku te pozicije resetiraju.

Najčešće korištene mjere sličnosti su: razlika normaliziranih log-cijena, normalizirana razlika log-cijena, te kointegracija slučajnih procesa. U nastavku su ukratko opisane navedene mjere.

2.1.1. Razlika normaliziranih log-cijena

Neka je sa $P_X^{(t)}$ označena log-cijena vrijednosnice X u trenutku t , i neka se koristi period od T vremenskih koraka. Neka je ukupno M vremenskih koraka, tj. $t \in [0, 1, \dots, M-1]$. Za svaku vrijednosnicu X u trenucima $t \geq T$ izračunaju se normalizirane log-cijene $\bar{P}_X^{(t)}$:

$$\bar{P}_X^{(t)} = \frac{P_X^{(t)} - \mathbf{E} [P_X^{(\tau)} \mid t - T \leq \tau < t]}{\sqrt{\mathbf{Var} [P_X^{(\tau)} \mid t - T \leq \tau < t]}}. \quad (2.2)$$

Oznake $\mathbf{E} [P_X^{(\tau)} \mid t_1 \leq \tau < t_2]$ i $\mathbf{Var} [P_X^{(\tau)} \mid t_1 \leq \tau < t_2]$ predstavljaju očekivanje i varijancu cijene vrijednosnice X nad intervalom $[t_1, t_2]$. Nadalje, za svaki par vrijednosnica X i Y izračuna se razlika njihovih normaliziranih log-cijena $D_{X,Y}^{(t)}$ u trenutku t :

$$D_{X,Y}^{(t)} = \bar{P}_X^{(t)} - \bar{P}_Y^{(t)} \quad (2.3)$$

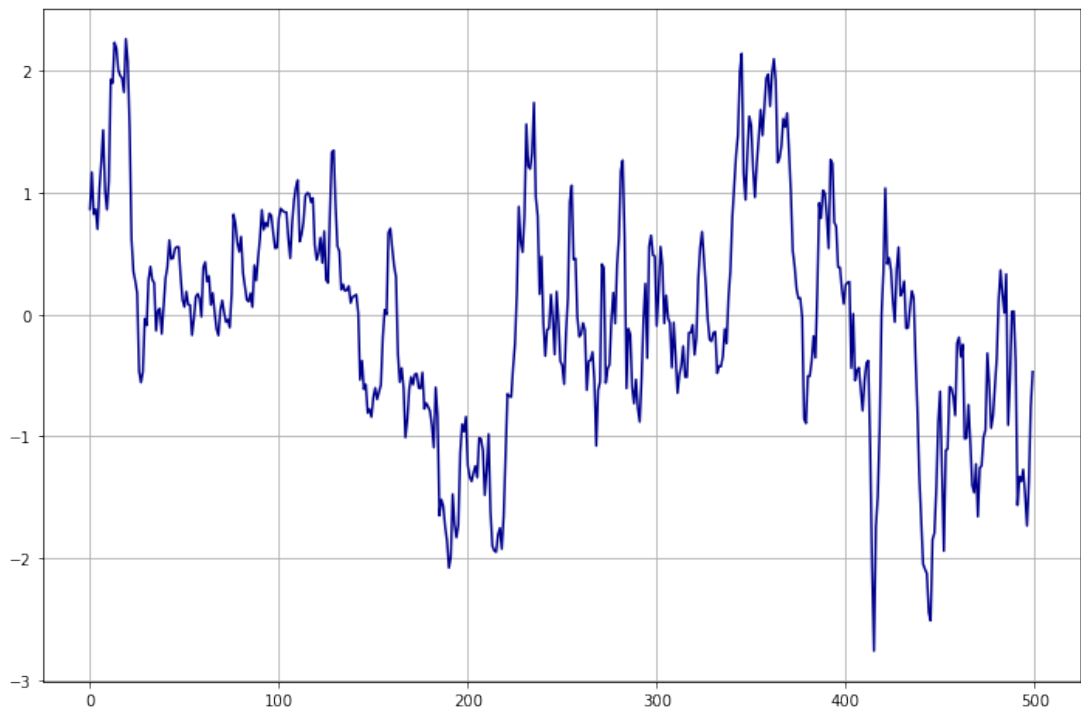
Razlika normaliziranih log-cijena se koristi kao mjera sličnosti u algoritmu statističke arbitraže. Kod ove mjere normalizacijom se postiže ravnopravna usporedba dviju vrijednosnica različitih volatiliteta, što znači da će se prilikom usporedbe dviju dionica čiji su intenziteti promjene cijene različiti nakon normalizacije oni dovesti na istu razinu. Ilustrativni primjer kretanja cijena vrijednosnica prikazan je na slici 2.1, normalizirane cijene na slici 2.2, i razlika normaliziranih cijena na slici 2.3.



Slika 2.1: Prikaz kretanja cijena dviju vrijednosnica u razdoblju od 500 dana. Plavom bojom prikazano je $P_X^{(t)}$, a zelenom $P_Y^{(t)}$. Svjetlijim nijansama tih boja prikazano je punom linijom očekivanje, i crtkanom linijom udaljenost za jednu devijaciju od očekivanja; očekivanje i devijacija izračunati su na proteklom vremenskom periodu T duljine 120 dana.



Slika 2.2: Plavo: normalizirana cijena $\bar{P}_X^{(t)}$, zeleno: normalizirana cijena $\bar{P}_Y^{(t)}$.



Slika 2.3: Razlika normaliziranih cijena, $D_{X,Y}^{(t)}$.

2.1.2. Normalizirana razlika log-cijena

Za razliku od prethodne mjere sličnosti, u ovom slučaju se razlika računa nad nenormaliziranim log-cijenama za sve t , označeno sa $d_{X,Y}^{(t)}$:

$$d_{X,Y}^{(t)} = P_X^{(t)} - P_Y^{(t)}, \quad (2.4)$$

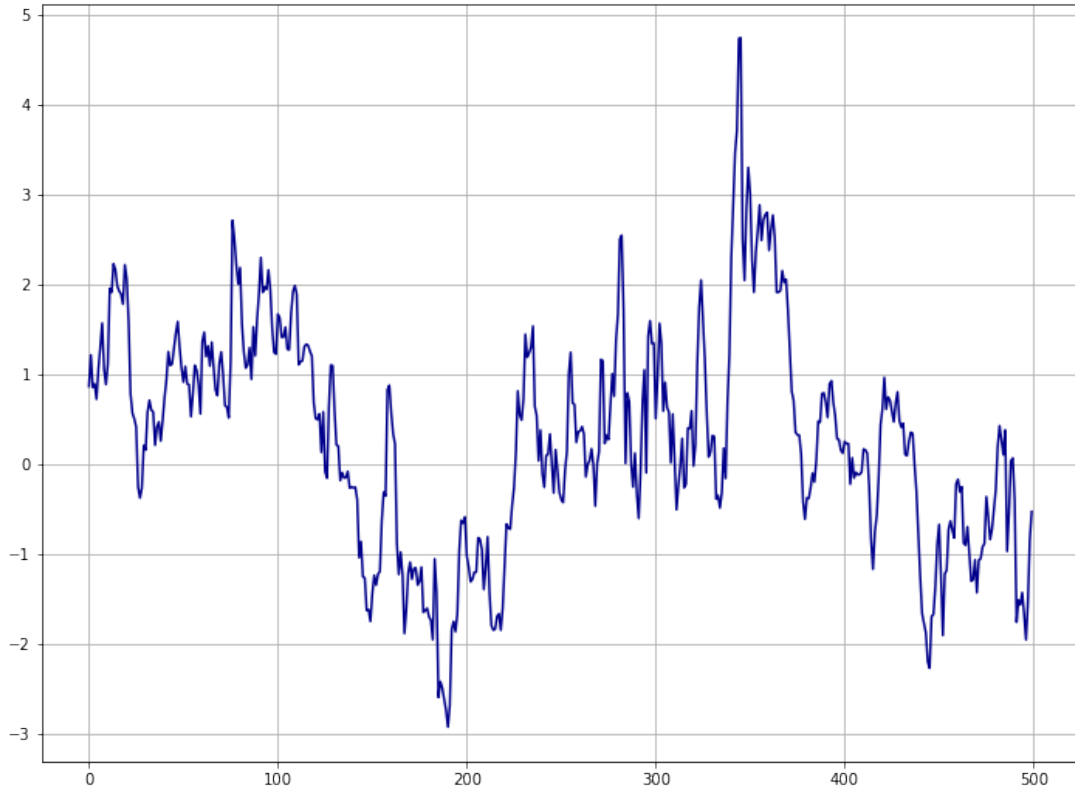
a zatim se iz razlika $d_{X,Y}^{(t)}$ računaju normalizirane razlike $\bar{d}_{X,Y}^{(t)}$ za $t \geq T$:

$$\bar{d}_{X,Y}^{(t)} = \frac{d_{X,Y}^{(t)} - \mathbf{E} \left[d_{X,Y}^{(\tau)} \mid t - T \leq \tau < t \right]}{\sqrt{\mathbf{Var} \left[d_{X,Y}^{(\tau)} \mid t - T \leq \tau < t \right]}}. \quad (2.5)$$

Ovako dobivena normalizirana razlika log-cijena koristi se kao mjera sličnosti. U odnosu na prethodnu, ova mjera je više osjetljiva na promjene log-cijena neovisno o volatilitetima samih vrijednosnica, što će doći do izražaja prilikom usporedbe dviju vrijednosnica čije se cijene mijenjaju različitom brzinom i intenzitetom. Primjer razlike nenormaliziranih log-cijena istih dionica X i Y kao i u prethodnom slučaju prikazan je na slici 2.4, te normalizirane razlike na slici 2.5.



Slika 2.4: Tamnijom bojom prikazana je razlika nenormaliziranih cijena $d_{X,Y}^{(t)}$, a svijetlijom punom linijom očekivanje i crtkanom linijom udaljenost od očekivanja za jednu devijaciju.



Slika 2.5: Normalizirana razlika cijena, $\bar{d}_{X,Y}^{(t)}$.

2.1.3. Mjera kointegracije slučajnih procesa

Za razliku od prethodne dvije mjere sličnosti gdje se cijene dionica tretiraju kao vremenski nizovi, kod ove mjere one se tretiraju kao realizacije slučajnog procesa. Za neki slučajni proces zanimljivo je proučiti svojstvo stacionarnosti — slučajni proces $U[t]$ je stacionaran ako i samo ako vrijedi:

$$\mathbf{E}[U[t]] = \text{const.} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{R}_{UU}[t, \tau] = \mathbf{E}[U[t] \cdot U[t + \tau]] = \mathbf{R}_{UU}[\tau]. \quad (2.7)$$

Za stacionarne slučajne procese vrijedi da njihova statistička svojstva ne ovise o vremenu: jednačba (2.6) tvrdi da je za stacionaran proces $U[t]$ očekivanje slučajnog procesa $\mathbf{E}[U[t]]$ neovisna o vremenu t , a jednačba (2.7) tvrdi da njegova autokorelacija $\mathbf{R}_{UU}[t, \tau]$ ovisi samo o vremenskom pomaku τ , ali ne i o t . Ovakva definicija stacionarnosti naziva se još i “stacionarnost u širem smislu”.

Red integracije slučajnog procesa, označen sa $I(d)$, gdje je d red integracije, opisuje njegovu stacionarnost. Stacionarni slučajni procesi su $I(0)$. Za općenit proces

$V[t]$ koji je $I(1)$ vrijedi da je proces $\Delta V[t]$ dobiven njegovim diferenciranjem

$$\Delta V[t] = (1 - L) V[t] = V[t] - V[t - 1] \quad (2.8)$$

stacionaran proces, a za općenit proces $W[t]$ koji je $I(d)$ vrijedi da je proces $\Delta^d W[t]$ dobiven njegovim uzastopnim diferenciranjem d puta

$$\begin{aligned} \Delta^d W[t] &= (1 - L)^d W[t] = \left(\sum_{n=0}^d \binom{d}{n} (-1)^n L^n \right) W[t] \\ &= \sum_{n=0}^d \binom{d}{n} (-1)^n W[t - n] \end{aligned} \quad (2.9)$$

stacionaran proces. U (2.8) i (2.9) korišten je operator kašnjenja L sa značenjem $LU[t] = U[t - 1]$.

Trivijalno je provjeriti da linearna kombinacija dvaju slučajnih procesa koji su $I(0)$ jest također $I(0)$, kao i da linearna kombinacija dvaju slučajnih procesa od kojih je jedan $I(0)$, a drugi $I(1)$ jest $I(1)$. Malo je teže odrediti kojeg je reda integracije linearna kombinacija dvaju slučajnih procesa koji su $I(1)$: to može biti $I(1)$, ali u posebnim slučajevima može biti i $I(0)$. Kointegracija dvaju slučajnih procesa $X[t]$ i $Y[t]$ koji su $I(1)$ označava da je njihova linearna kombinacija $U[t]$ stacionaran proces, odnosno $I(0)$:

$$X[t] + \beta Y[t] = U[t], \quad (2.10)$$

gdje je β konstanta koja se još naziva i kointegracijski koeficijent. Stacionarni slučajni proces $U[t]$ pritom se može prikazati kao:

$$U[t] = \mu + \varepsilon[t], \quad (2.11)$$

gdje je $\mu = \mathbf{E}[U[t]]$, očekivanje, a $\varepsilon[t]$ rezidualna vrijednost za koju vrijedi $\mathbf{E}[\varepsilon[t]] = 0$.

Pretpostavka kod ove mjere sličnosti jest da su dva nestacionarna slučajna procesa $P_X[t]$ i $P_Y[t]$ koji predstavljaju kretanje log-cijena vrijednosnica X i Y kointegrirana. Postoji nekoliko metoda za provjeru kointegracije, najčešće korištene su Engle-Granger metoda, Johansen metoda i Phillips-Ouliaris metoda. Najjednostavnija od navedenih je Engle-Granger metoda, koja je opisana u nastavku.

Ideja metode Engle-Granger je u prvom koraku estimirati stacionaran proces $U[t]$ koji je linearna kombinacija cijena $P_X[t]$ i $P_Y[t]$, zatim u drugom koraku

provjeriti je li estimirani proces zaista stacionaran. Postupkom najmanjih kvadrata najprije se određuju procjene parametara μ i β , označene sa $\hat{\mu}$ i $\hat{\beta}$:

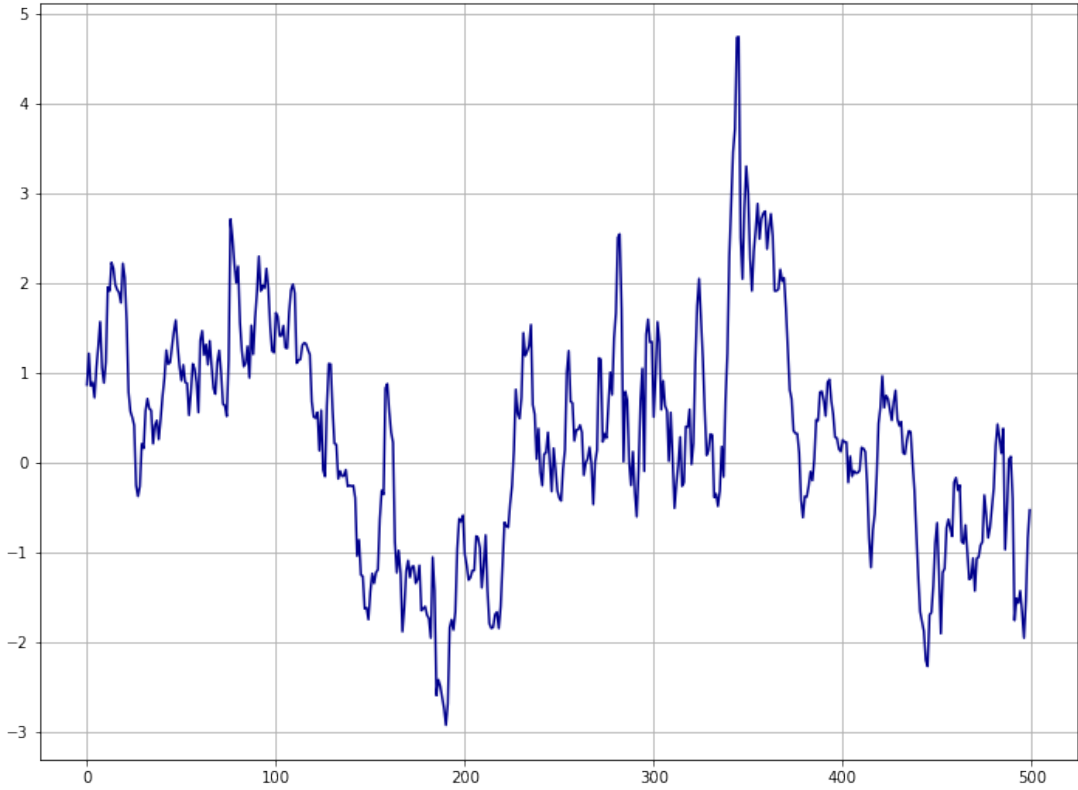
$$\hat{\mu}, \hat{\beta} = \arg \min_{\mu, \beta} \left\{ \sum_{\tau=t-T}^{t-1} |P_X[\tau] + \beta P_Y[\tau] - \mu|^2 \right\}, \quad (2.12)$$

a zatim se izraze procijenjene rezidualne vrijednosti $\hat{\varepsilon}[t]$:

$$\hat{\varepsilon}[t] = -\hat{\mu} + P_X[t] + \hat{\beta}P_Y[t]. \quad (2.13)$$

U drugom koraku provjerava se je li $\hat{\varepsilon}[t]$ zaista stacionaran proces, čime se dobiva p-vrijednost kao mjera pouzdanosti utvrđene kointegracije.

Procijenjene rezidualne vrijednosti $\hat{\varepsilon}[t]$ koriste se kao mjera sličnosti. Primjer dobivenih rezidualnih vrijednosti za iste vrijednosnica X i Y prikazan je na slici 2.6. U odnosu na prethodne dvije mjere, ova mjera je rezultat dublje statističke analize, zbog čega je i računski zahtjevnija, što je ujedno prednost i nedostatak. Kada se radi o velikom broju parova vrijednosnica, kointegracije se može pokazati nepraktičnom za računanje, stoga je bolje koristiti neku od dvije prethodno navedene mjere sličnosti. U ovom radu korištena je normalizirana razlika log-cijena.



Slika 2.6: Procijenjene rezidualne vrijednosti $\hat{\varepsilon}[t]$.

2.1.4. Nedostaci statističke arbitraže

Jedan od nedostataka statističke arbitraže jest generalno slaba preciznost izražena kao udio broja trgovanja koji rezultira pozitivnim profitom u ukupnom broju trgovanja. Uzrok tome su statističke mjere na kojima se algoritam temelji, koje ne mogu dati apsolutno pouzdanu odluku samim time što je kretanje cijena slučajan proces. Također, problem može biti i tzv. varljiva korelacija u kojoj je kretanje cijena dviju vrijednosnica naizgled povezano, no zapravo je uzrok tome neki nepoznati vanjski faktor; tada predviđeno ponašanje može biti poprilično različito od stvarnog. Isto tako statističke metode ne mogu razlikovati one devijacije u ponašanju cijena koje su svojstvene koreliranim slučajnim procesima od onih za koje stvarno postoji fundamentalan uzrok, kao što je npr. značajna promjena u načinu poslovanja neke firme, promjena vlasništva i tome slično. Pri testiranju algoritma statističke arbitraže nad testnim skupovima podataka preciznost rijetko kada prelazi 60%, a većinom je manja od 50%. No, unatoč tome što algoritam griješi u više od pola slučajeva, ukupni profit je ipak pozitivan jer pogreške donose znatno manje gubitke u odnosu na zaradu ostvarenu pogotcima.

Drugi nedostatak tiče se načina tretiranja vrijednosnica koje su na raspolaganju i koje se mogu uključiti u portfelj. Svaki par vrijednosnica gleda se zasebno i pritom je isključena dublja analiza međusobnih interakcija svih vrijednosnica zajedno. Trgovanje se također odvija uvijek u parovima, odnosno jednaki broj vrijednosnica se kupuje i prodaje u svakom trenutku. U ovom radu istražena je metoda koja omogućuje trgovanje kupovanjem i prodajom svih vrijednosnica nezavisno, koristeći pritom metode statističke arbitraže kao opis relacije preferencije među vrijednosnicama. Interakcija među vrijednosnicama opisuje se grafom toka preferencija, iz čega se naposljetku izvlači poredak prema individualnoj preferenciji svih vrijednosnica.

2.2. Relacija preferencije i funkcija korisnosti

Neka je Ω skup općenitih dobara. Relacija preferencije, označena sa \succ i definirana nad $\Omega \times \Omega$, je strogi slabi uređaj koji odgovara načinu na koji ljudi preferiraju jednu vrijednosnicu u odnosu na drugu. Između dvaju dobara $a, b \in \Omega$ relacija može, ali i ne mora postojati. Primjerice, a može biti više preferirano u odnosu na b , ili b u odnosu na a , ali moguća je situacija gdje su oba dobra podjednako preferirana. U tom slučaju radi se o indiferentnosti između a i b , i to

se označava kao $a \sim b$.

Ova relacija specifična je po tome što je:

- *irrefleksivna*: $\forall x \in \Omega: \neg(x \succ x)$ — za nijedno dobro ne vrijedi da je više preferirano od samog sebe,
- *asimetrična*: $\forall x, y \in \Omega: x \succ y \Rightarrow \neg(y \succ x)$ — ako je x više preferirano od y , onda y nije više preferirano od x ,
- *tranzitivna*: $\forall x, y, z \in \Omega: x \succ y \wedge y \succ z \Rightarrow x \succ z$ — ako je x više preferirano od y , te y više preferirano od z , tada je i x više preferirano od z ,
- *tranzitivna po indiferentnosti*: $\forall x, y, z \in \Omega: x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$ — ako je x podjednako preferirano kao i y , te y podjednako preferirano kao i z , tada je i x podjednako preferirano kao i z .

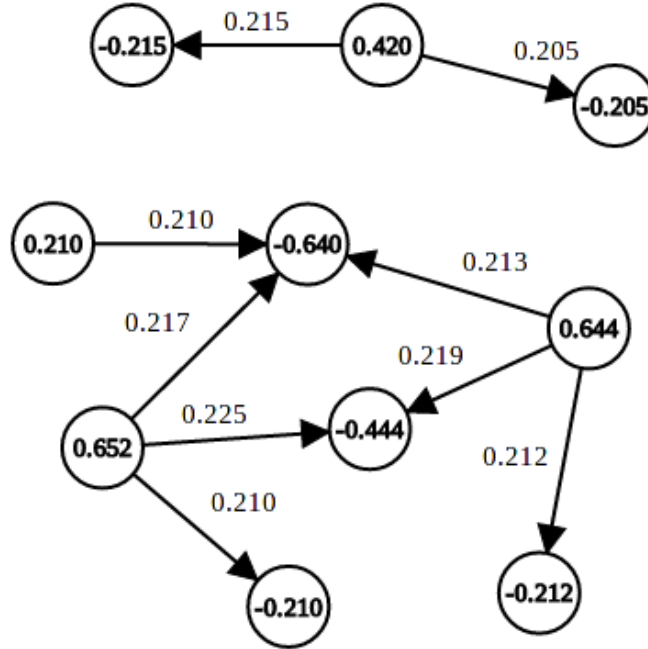
Ovakva vrsta relacije prirodno opisuje odnose među različitim vrijednosnicama, npr. dionica A u nekom trenutku može biti više preferirana od dionice B . Razlog tome je što je za čovjeka lakše ocijeniti odnos (više, manje, jednako preferirano) između svakog para vrijednosnica, nego pridijeliti svakoj vrijednosnici individualnu mjeru preferencije, pogotovo ako se radi o velikom broju vrijednosnica. No ipak, u svrhu konstruiranja portfelja korisnije je posjedovati individualnu mjeru preferencije za svaku vrijednosnicu. Stoga je poželjno pronaći način da se iz relacije preferencije dobiju individualne mjere preferencije.

Funkcija korisnosti (engl. *utility function*) $U: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je preslikavanje iz skupa dobara u skup realnih brojeva, na način da poredak preslikanih realnih brojeva odgovara poretку dobara prema individualnoj preferenciji, tj. vrijedi $\forall x, y \in \Omega: U(x) > U(y) \Leftrightarrow x \succ y$. Jedno takvo preslikavanje ostvaruje se korištenjem metode potencijala koja je opisana u poglavlju 2.4. Uz to što određuje poredak dobara prema individualnoj preferenciji, funkcija korisnosti također unosi i mjeru intenziteta preferencije prema nekoj vrijednosnici, što znači da nosi više informacija od same relacije.

2.3. Graf toka preferencija

Graf toka preferencija je težinski usmjereni graf, bez višestrukih bridova i petlji. Njegovi čvorovi predstavljaju vrijednosnice, usmjereni bridovi preferenciju jedne vrijednosnice nad drugom, a težine bridova odgovaraju intenzitetu preferencije. Ukoliko između dva čvora nedostaje brid, smatra se da su pripadne vrijednosnice

podjednako preferirane (indiferentnost u odlučivanju). Graf kao cjelina opisuje tok preferencija među vrijednosnicama. Primjer grafa prikazan je na slici 2.7.



Slika 2.7: Primjer grafa toka preferencija. Na bridovima su prikazani intenziteti preferencija jedne vrijednosnice u odnosu na drugu, a u čvorove su upisane izračunate individualne mjere preferencija za pripadnu vrijednosnicu.

Konstrukcija grafa temelji se na metodi statističke arbitraže. Brid koji ide od čvora i do čvora j s težinom $w_{i,j}$ je prisutan u grafu ako i samo ako su se dvije pripadne vrijednosnice i i j ponašale slično tijekom proteklog vremenskog perioda, ali su prema određenim statističkim mjerama trenutačno razdvojile. Težina $w_{i,j}$ opisuje magnitudu ovog razdvajanja. Detaljan opis korištenih statističkih mjera dan je u odjeljku 3.1.

Veze u ovom grafu nameću relaciju preferencije među vrijednosnicama koje su opisane grafom, na način da brid koji ide iz čvora i u čvor j pokazuje da je vrijednosnica i više preferirana od vrijednosnice j . Kako ne graf sadrži petlje, tj. nijedna vrijednosnica nije u relaciji sama sa sobom, ispunjeno je svojstvo irrefleksivnosti; a kako nema višestrukih bridova među čvorovima vrijedi i svojstvo asimetričnosti. Ipak, problemi se pojavljuju kod prethodno spomenutih svojstava tranzitivnosti, i tranzitivnosti po indiferentnosti, koja ne moraju uvijek vrijediti za proizvoljno konstruiran graf. Poželjno bi bilo da relacija preferencije koju graf nameće zadovoljava sva četiri prethodno navedena svojstva; no konstruiranje grafa

koji posjeduje takva svojstva je nepraktično, pogotovo kada se radi o većem broju vrijednosnica.

Umjesto da cilj bude konstrukcija grafa koji će biti konzistentan sa svojstvima relacije preferencije, definirana je mjera konzistentnosti koja opisuje koliko je neki graf sličan sa svojom najbližom konzistentnom rekonstrukcijom. Mjera konzistentnosti se koristi kao dodatan parametar pri konstruiranju portfelja. Opis mjere konzistentnosti te način dobivanja najbliže konzistentne rekonstrukcije grafa dan je u odjeljku 2.4.

2.4. Metoda potencijala

Iz prethodno dobivenog grafa moguće je utvrditi u kojem paru vrijednosnica je tok preferencije najveći. Ipak, još uvijek nije moguće izravno utvrditi koja konkretna vrijednosnica je najviše ili najmanje poželjna, ili odrediti individualne mjere preferencije za svaku vrijednosnicu. Kako bi to bilo moguće korištena je metoda potencijala koja je opisana u nastavku.

2.4.1. Računanje potencijala čvorova

Neka je za promatrani graf \mathcal{G} ukupno N čvorova, te najviše $E = \binom{N}{2}$ bridova, ukoliko se radi o potpunom grafu. Ako \mathcal{G} nije potpun graf, on se može dopuniti na način da se dodaju bridovi između čvorova koji nisu povezani, čija je težina jednaka 0, a sam smjer nije bitan. U nastavku se podrazumijeva da je \mathcal{G} potpun graf.

Neka je \mathbf{B} matrica incidencije grafa \mathcal{G} . Matrica incidencije je matrica za koju vrijedi:

1. broj redaka jednak je broju bridova E , i broj stupaca jednak je broju čvorova N ;
2. za svaki od E bridova grafa postoji odgovarajući redak u matrici koji ga opisuje: ako brid ide od čvora i do čvora j , tada taj redak sadrži -1 i 1 u stupcima koji odgovaraju čvorovima i i j ;
3. ostali elementi matrice su jednaki 0.

Neka je \mathbf{f} vektor dimenzija $E \times 1$ koji sadrži težine bridova, tj. tokove preferencije, i neka je ϕ vektor dimenzija $N \times 1$ koji sadrži potencijale čvorova, koji se žele

pronaći. Redoslijed pripadnih čvorova i bridova moraju odgovarati redoslijedu čvorova i bridova u matrici incidencija \mathbf{B} .

U idealnom slučaju, kada je \mathcal{G} konzistentan, \mathbf{B} , $\boldsymbol{\phi}$, i \mathbf{f} zadovoljavaju jednadžbu:

$$\mathbf{B}\boldsymbol{\phi} = \mathbf{f}. \quad (2.14)$$

Jednadžba (2.14) tvrdi da razlike potencijala dvaju čvorova odgovaraju toku preferencije, odnosno težini brida koji povezuje te čvorove (do na predznak). Ovo je zadovoljivo samo za konzistentne grafove, što često i nije slučaj u ovom zadatku. U slučaju kada je graf \mathcal{G} nekonzistentan, od interesa je pronaći rješenje $\boldsymbol{\phi}^*$ koje ima minimalnu kvadratnu pogrešku. Tako originalni problem postaje:

$$\boldsymbol{\phi}^* = \arg \min_{\boldsymbol{\phi}} \left\{ \|\mathbf{B}\boldsymbol{\phi} - \mathbf{f}\|^2 \right\} \Leftrightarrow \frac{\partial \|\mathbf{B}\boldsymbol{\phi}^* - \mathbf{f}\|^2}{\partial \boldsymbol{\phi}^*} = \mathbf{0}. \quad (2.15)$$

Matričnim deriviranjem (2.15) dobiva se sljedeća jednadžba:

$$\begin{aligned} 2\mathbf{B}^\top [\mathbf{B}\boldsymbol{\phi}^* - \mathbf{f}] &= \mathbf{0} \\ \mathbf{B}^\top \mathbf{B}\boldsymbol{\phi}^* &= \mathbf{B}^\top \mathbf{f}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Jednadžba (2.16) određuje $\boldsymbol{\phi}^*$ do na konstantu, tj. rješenje ima jedan stupanj slobode. Stoga se dodaje sljedeće ograničenje:

$$\mathbf{j}^\top \boldsymbol{\phi}^* = 0 \quad (2.17)$$

gdje je \mathbf{j} vektor jedinica istih dimenzija kao i $\boldsymbol{\phi}^*$. Jednadžba (2.17) osigurava jedinstveno rješenje u kojem je ukupan zbroj potencijala svih čvorova jednak nuli.

Združivanjem prethodnih dviju jednadžbi u jednu, tako da se (2.17) doda svakom retku u (2.16), dobiva se:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^\top \mathbf{B}\boldsymbol{\phi}^* + \mathbf{J}\boldsymbol{\phi}^* &= \mathbf{B}^\top \mathbf{f} \\ [\mathbf{B}^\top \mathbf{B} + \mathbf{J}] \boldsymbol{\phi}^* &= \mathbf{B}^\top \mathbf{f}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

gdje je \mathbf{J} matrica jedinica istih dimenzija kao i $\mathbf{B}^\top \mathbf{B}$. Konačno, rješavanjem (2.18) po $\boldsymbol{\phi}^*$ dobiva se:

$$\boldsymbol{\phi}^* = [\mathbf{B}^\top \mathbf{B} + \mathbf{J}]^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{f}. \quad (2.19)$$

Dodatno, izraz (2.19) sadrži u sebi Laplaceovu matricu $\mathbf{L} = \mathbf{B}^\top \mathbf{B}$. Za Laplaceovu matricu vrijedi:

- $(\mathbf{L})_{ii}$ je jednak broju susjeda čvora i ,

– ostali elementi jednaki su -1 .

Kako je graf \mathcal{G} potpun, tj. broj susjeda svakog čvora jednak je $N - 1$, izraz $[\mathbf{B}^\top \mathbf{B} + \mathbf{J}]^{-1}$ se može pojednostavniti u $\frac{1}{N} \mathbf{I}$; i stoga, se (2.19) može svesti na:

$$\boldsymbol{\phi}^* = \frac{1}{N} \mathbf{B}^\top \mathbf{f}, \quad (2.20)$$

tako da se dobije računalno optimalan izraz. Jednadžba (2.20) tvrdi da se rješenje u smislu najmanjih kvadrata $\boldsymbol{\phi}^*$ jednadžbe (2.14) dobije na način da se za svaki čvor pribroje težine svih bridova koji izlaze iz njega, i oduzmu težine svih bridova koji ulaze u njega.

2.4.2. Konzistentna rekonstrukcija grafa

Sada se na temelju dobivenog potencijala čvorova $\boldsymbol{\phi}^*$ može izračunati tok preferencije \mathbf{f}^* koji je konzistentan s potencijalnom, tako da se u (2.14) supstituiraju $\boldsymbol{\phi}^*$ umjesto $\boldsymbol{\phi}$:

$$\mathbf{f}^* = \mathbf{B} \boldsymbol{\phi}^*. \quad (2.21)$$

Rekonstruirani tok preferencije \mathbf{f}^* u odnosu na originalni \mathbf{f} može sadržavati neke nove, pa čak i izgubiti neke stare težine. Dodatno, \mathbf{B} , $\boldsymbol{\phi}^*$, i \mathbf{f} opisuju konzistentan graf \mathcal{G}^* . Mjera konzistentnosti κ definira se kao:

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{f}^*\|}{\|\mathbf{f}\|}. \quad (2.22)$$

Jednadžba (2.22) predstavlja kosinus kuta između \mathbf{f} i \mathbf{f}^* u prostoru određenom vektor stupcima matrice incidencije \mathbf{B} . Mjera konzistentnosti κ opisuje koliko je sličan graf \mathcal{G} s grafom \mathcal{G}^* , te je u rasponu od 0 do 1, gdje 0 znači potpunu nekonzistentnost (u praksi nedostižno), a 1 potpunu konzistentnost.

2.5. Koeficijent obrtaja

Koeficijent obrtaja (engl. *turnover ratio*) je mjera koja određuje koliki udio vrijednosnica u portfelju je promijenjen između dva vremenska koraka. Ova mjera može biti u rasponu od 0 do 2, gdje 0 označava da su vrijednosnice u portfelju ostale iste između dva vremenska koraka, dok 2 označava da među vrijednosnicama uključenima u portfelj u prethodnom i sadašnjem koraku nijedna nije ostala ista. Ova mjera je važna između ostalog jer opisuje troškove trgovanja:

u svakom vremenskom koraku troškovi trgovanja su direktno proporcionalni količini vrijednosnica koje su prodane ili kupljene u tom koraku.

Koeficijent obrtaja $\eta^{(t)}$ u vremenskom koraku t u odnosu na $t - 1$ računa se na sljedeći način. Neka je na raspolaganju N vrijednosnica. Vektor $\boldsymbol{\alpha}^{(t)} = [\alpha_1^{(t)} \ \alpha_2^{(t)} \ \dots \ \alpha_N^{(t)}]$ opisuje portfelju u koraku t ; $\alpha_i^{(t)}$ je udio i -te vrijednosnice, te vrijedi $\alpha_i > 0$, $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$. Tada se koeficijent obrtaja $\eta^{(t)}$ računa na način:

$$\eta^{(t)} = \sum_{i=1}^N \left| \alpha_i^{(t)} - \alpha_i^{(t-1)} \right|. \quad (2.23)$$

Iz (2.23) može se vidjeti da se minimum $\eta^{(t)} = 0$ doista postiže ako i samo ako je ispunjeno $\boldsymbol{\alpha}^{(t)} = \boldsymbol{\alpha}^{(t-1)}$, a maksimum $\eta^{(t)} = 2$ ako i samo ako je ispunjeno $\alpha_i^{(t)} \neq 0 \Rightarrow \alpha_i^{(t-1)} = 0$ i $\alpha_i^{(t-1)} \neq 0 \Rightarrow \alpha_i^{(t)} = 0$, jer tada vrijedi:

$$\eta^{(t)} = \sum_{i=1}^N \left| \alpha_i^{(t)} - \alpha_i^{(t-1)} \right| = \sum_{i=1}^N \left| \alpha_i^{(t)} \right| + \sum_{i=1}^N \left| \alpha_i^{(t-1)} \right| = 1 + 1 = 2.$$

Neka troškovi trgovanja, bilo kupovanja bilo prodavanja vrijednosnice, iznose p dijelova vrijednosti po kojoj se vrijednosnica kupuje, odnosno prodaje. Ukoliko se računa s logaritmima cijena umjesto s običnim cijenama, troškovi trgovanja mogu se obračunati tako da se u svakom trenutku od ostvarenog profita oduzme $p \cdot \eta^{(t)}$.

3. Algoritam

Neka u zadanom skupu podataka ima ukupno N vrijednosnica kroz D vremenskih koraka. Neka je cijena vrijednosnice i u vremenskom koraku t jednaka $a_i^{(t)}$, za $i \in [1, 2, \dots, N]$ i $t \in [0, 1, \dots, D - 1]$. Logaritamske cijene $b_i^{(t)}$, i razlike logaritamskih cijena po parovima $c_{i,j}^{(t)}$ dobivaju se na sljedeći način:

$$b_i^{(t)} = \log(a_i^{(t)}) \quad (3.1)$$

$$c_{i,j}^{(t)} = b_i^{(t)} - b_j^{(t)}, \quad (3.2)$$

i očekivanje $m_{i,j}^{(t)}$ i standardna devijacija $d_{i,j}^{(t)}$ razlika logaritamskih cijena tijekom proteklog perioda duljine T dobivaju se kako slijedi:

$$m_{i,j}^{(t)} = \frac{1}{T} \sum_{\tau=t-T}^{t-1} c_{i,j}^{(\tau)} \quad (3.3)$$

$$d_{i,j}^{(t)} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{\tau=t-T}^{t-1} (c_{i,j}^{(\tau)} - m_{i,j}^{(t)})^2}. \quad (3.4)$$

Valja primijetiti kako je u izrazima sumiranja u (3.3) i (3.4) vremenski korak t namjerno izostavljen jer se radi nad proteklom periodom trajanja T , stoga sumiranje ide do $t - 1$. Ovi izračuni su temelj za daljnji tijek algoritma.

Također valja primijetiti da bi izračunavanje očekivanja i standardnih devijacija zasebno za svaki vremenski korak bilo računski jako neefikasno, pogotovo kad se radi o velikom skupu podataka. Stoga je preporučljivo koristiti algoritam za računanje s pomičnim prozorima, koji je opisan u dodatku. Što se tiče redukcije memorijske potrošnje, $c_{i,j}^{(t)}$, $m_{i,j}^{(t)}$, i $d_{i,j}^{(t)}$ su idejno tenzori dimenzija $(D - T) \times N \times N$. Međutim, sva tri tenzora su simetrična ili antisimetrična, u smislu da vrijedi $c_{i,j}^{(t)} = -c_{j,i}^{(t)}$, $m_{i,j}^{(t)} = -m_{j,i}^{(t)}$, i $d_{i,j}^{(t)} = d_{j,i}^{(t)}$, stoga je polovina informacije sadržane u njima redundantna. Imajući to u vidu, ti tenzori se mogu gusto upakirati u matrice dimenzija $(D - T) \times N \cdot (N - 1)/2$, koristeći sljedeće preslikavanje — za kodiranje para (i, j) u kod k koristi se izraz:

$$k = N \cdot (i - 1) + j - 1 - i \cdot (i + 1)/2, \quad (3.5)$$

a za dekodiranje (i, j) iz k izrazi:

$$i = \left\lfloor N + 1/2 - \sqrt{(N + 1/2)^2 - 2(N + k)} \right\rfloor, \quad (3.6)$$

$$j = k + i \cdot (i + 1)/2 - N \cdot (i - 1) + 1. \quad (3.7)$$

Na slici 3.1 prikazano je kodiranje u slučaju $N = 5$ vrijednosnica.

i/j	1	2	3	4	5		k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	·	0	1	2	3		i	1	1	1	1	2	2	2	3	3	4
2	·	·	4	5	6		j	2	3	4	5	3	4	5	4	5	5
3	·	·	·	7	8												
4	·	·	·	·	9												
5	·	·	·	·	·												

Slika 3.1: Primjer predložene sheme kodiranja i dekodiranja za $N = 5$. Točka (·) označava da se određena kombinacija ne koristi.

3.1. Konstrukcija grafa toka preferencija

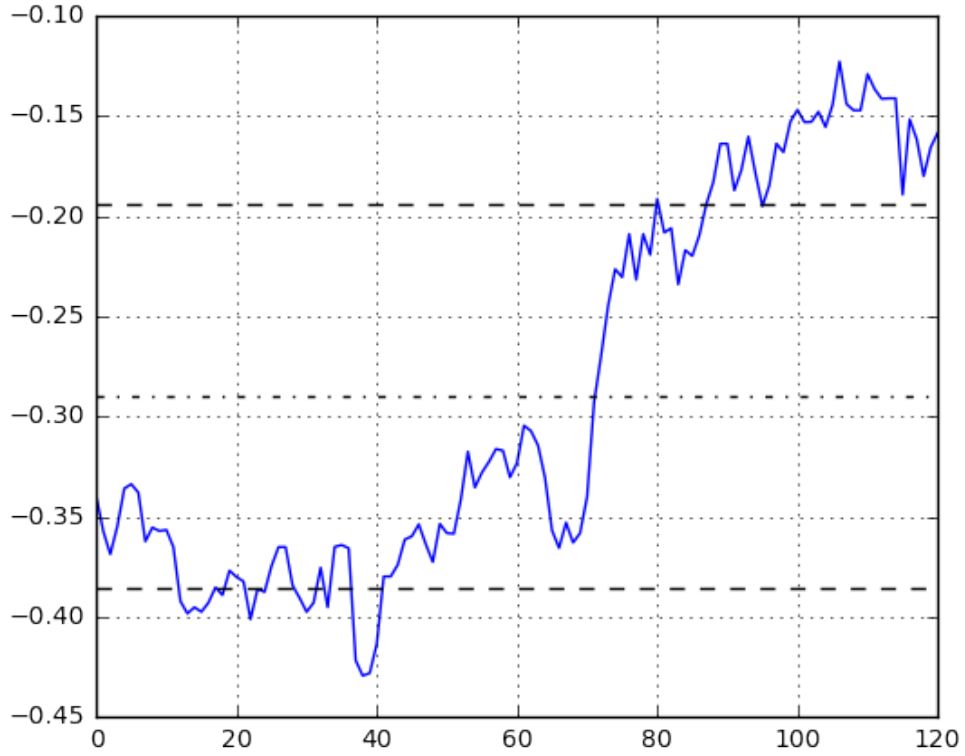
Korištenjem prethodno dobivenih $c_{i,j}^{(t)}$, $m_{i,j}^{(t)}$, i $d_{i,j}^{(t)}$ sada je moguće kreirati graf toka preferencija među vrijednosnicama u svakom vremenskom koraku t . Razmatrajući fiksni vremenski korak t , izdvajaju se svi parovi vrijednosnica (i, j) za koje vrijedi:

$$|c_{i,j}^{(t)} - m_{i,j}^{(t)}| > \alpha \cdot d_{i,j}^{(t)}, \quad (3.8)$$

tj. trenutna apsolutna vrijednost razlike log-cijena para vrijednosnica (i, j) je barem za α standardnih devijacija udaljena od očekivanja, izmjerenih u proteklom periodu. Nakon toga, za svaki par (i, j) koji zadovoljava (3.8) dodaju se u graf čvorovi i i j , te brid koji ide od i do j s težinom $w_{i,j}^{(t)}$. Težina $w_{i,j}^{(t)}$ dobiva se kao:

$$w_{i,j}^{(t)} = (c_{i,j}^{(t)} - m_{i,j}^{(t)}) / d_{i,j}^{(t)}, \quad (3.9)$$

što odgovara udaljenosti razlike log-cijena od očekivanja, mjerene u standardnim devijacijama, i po apsolutnoj vrijednosti je veća od α . Negativan predznak težine $w_{i,j}^{(t)}$ znači da je stvarni smjer preferencije obrnut od pretpostavljenog — drugim riječima, brid koji ide od j do i s težinom $w_{j,i}^{(t)} = -w_{i,j}^{(t)} > 0$ ekvivalentan je prethodnome bridu. Ilustracija ove mjere prikazana je na slici 3.2.



Slika 3.2: Razlika log-cijena u paru vrijednosnica (i, j) tijekom perioda od $T + 1$ vremenskih koraka, uz $T = 120$. Točka-crta linija predstavlja očekivanje, a područje između dviju crtanih linija predstavlja α standardnih devijacija udaljenosti od očekivanja; obje mjere su izračunate nad prvih T vremenskih koraka. Tijekom vremenskog koraka $T + 1$, razlika log-cijena prelazi preko α standardnih devijacija iznad očekivanja proteklog perioda duljine T . To znači da će vrijednosnice i i j biti dodane u graf toka preferencija u vremenskom koraku $T + 1$. Težina $w_{i,j}^{(T+1)}$ opisuje devijaciju od očekivanja.

Na taj način moguće je konstruirati graf toka preferencija za bilo koji vremenski korak $t \in [T, T + 1, \dots, D - 1]$. U nekim vremenskim koracima moguće je da dobiveni graf bude prazan, ukoliko nijedan par vrijednosnica (i, j) ne zadovoljava (3.8). Postavljanjem nižih vrijednosti za α dobivaju se gušći grafovi i manje često se događa da je graf prazan, dok se postavljanjem $\alpha = 0$ uvijek dobivaju potpuni grafovi.

3.2. Konstrukcija portfelja

Individualna mjera preferencije za svaku vrijednosnicu dobivena je metodom potencijala, na način kako je ranije opisano u 2.4.1. Vrijednosnice s trenutačno naj-

većom preferencijom preporučeno je kupiti, dok je one s najmanjom preferencijom preporučeno prodati, odnosno *shortati* ukoliko je to moguće.

Neka je $\phi^{(t)} = [\phi_1^{(t)} \ \phi_2^{(t)} \ \dots \ \phi_N^{(t)}]$ vektor individualnih preferenci vrijednosnica u vremenskom koraku t , te $\phi_i^{(t)}$ individualna preferencija vrijednosnice i u vremenskom koraku t . Pri odabiru vrijednosnica za portfelj, u obzir se također uzima i mjera konzistentnosti κ . Uključivanje mjere konzistentnosti pri odabiru omogućuje zaštitu od fundamentalnog rizika (propadanja neke dionice) putem diverzifikacije portfelja. Interpretacija mjere konzistentnosti je sljedeća: niska mjera konzistentnosti sugerira da procjena u sadašnjem vremenskom koraku nije pouzdana, stoga je bolje diverzificirati portfelj uzimanjem većeg broja vrijednosnica, dok visoka vrijednost mjere konzistentnosti sugerira da je sigurno trgovati s manjim brojem vrijednosnica.

Granica mjere preferencije za vrijednosnice koje će biti uključene u portfelj je proporcionalna mjeri konzistentnosti κ . Ovisno o prirodi skupa vrijednosnica koji je na raspolaganju, mjera konzistentnosti može se preinačiti tako da algoritam bude više ili manje sklon diverzifikaciji portfelja, na sljedeći način:

$$\kappa' = a + (1 - a)\kappa^b, \quad (3.10)$$

gdje je $a \in [0, 1], b \in \mathbb{R}^+$. Za vrijednosti $a = 0, b = 1$, κ' postaje jednak κ . Parametar a regulira utjecaj mjere konzistentnosti na određivanje portfelja: za $a = 0$, diverzifikacija u potpunosti ovisi o mjeri konzistentnosti κ , dok za $a = 1$ mjera konzistentnosti ne dolazi do izražaja te se u portfelju zadržava samo vrijednosnica s najvećom individualnom preferencijom. S druge strane, parametar b regulira diverzifikaciju portfelja: kada je $0 < b < 1$, algoritam je više privržen diverzifikaciji čak i kada je konzistentnost mala, a kada je $b > 1$, algoritam je više privržen diverzifikaciji čak i kada je mjera konzistencije velika.

Za odabir vrijednosnica koje će ući u portfelj u vremenskom koraku t , pronalaze se sve vrijednosnice i za koje u trenutku t vrijedi:

$$\phi_i^{(t)} \geq \kappa' \cdot \Phi,$$

gdje je $\Phi = \max_j \{|\phi_j|\}$. Isto tako, za prodaju se biraju vrijednosnice i , za koje u trenutku t vrijedi:

$$\phi_i^{(t)} \leq -\kappa' \cdot \Phi.$$

3.3. Minimizacija koeficijenta obrtaja

Minimizacija: energija signala.

4. Rezultati

Skup podataka nad kojim je algoritam testiran je podskup koji sadrži 203 od 500 dionica koje su bile kontinuirano uključene u S&P indeks u razdoblju od 1. siječnja 1980. do 31. prosinca 2003. Razdoblje uključuje 6261 dan trgovanja, odnosno vremenskih koraka. Ukupno 20503 parova dionica je ispitano metodom statističke arbitraže u svakom vremenskom koraku. Simulirani su troškovi trgovanja u iznosu 0.10% za svako obavljeno trgovanje. Sažeti prikaz rezultat dan je u tablici 4.1.

Godišnji Sharpeov omjer S definiran je kao omjer srednjeg godišnjeg povrata μ_r i srednje godišnje volatilnosti σ_r . Analizirana su zasebno trgovanja koja rezultiraju pozitivnim i negativnim profitom, njihova razlika i omjer. Mjera preciznosti definirana je kao omjer broja trgovanja koja rezultiraju pozitivnim profitom u ukupnom broju trgovanja. Mjera obrtaja (engl. *turnover ratio*) opisuje promjenu portfelja između dva vremenska koraka. Ova mjera može biti u rasponu od 0 do 2, gdje vrijednost 0 znači da nema promjene, vrijednost 1 odgovara prelasku iz ili u prazan portfelj, a vrijednost 2 znači da su vrijednosnice između dva vremenska koraka potpuno različite. Konačno, izračunat je ukupan profit uz uključene troškove trgovanja.

Tablica 4.1: Results for $T = 60, \alpha = 0$.

Parameter:	0.0			0.5			1.0		
	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
a									
b									
Average return (year)	0.95339	0.88967	0.84463	0.98336	0.95663	0.89704	0.95663	0.89704	1.00223
Volatility (year)	0.77042	0.76595	0.74077	0.77905	0.77054	0.76660	0.77054	0.76660	0.78363
Sharpe ratio (year)	1.23750	1.16152	1.14020	1.26225	1.24150	1.17015	1.24150	1.17015	1.27896
Profit:									
positive only	89.27624	88.89440	88.32548	89.58775	89.29840	89.04414	89.29840	89.04414	89.55020
negative only	-58.37779	-59.03715	-58.41396	-58.24852	-58.32385	-59.02220	-58.32385	-59.02220	-58.05316
total	30.89846	29.85725	29.91152	31.33923	30.97456	30.02195	30.97456	30.02195	31.49704
positive to negative ratio	1.52928	1.50574	1.51206	1.53803	1.53108	1.50866	1.53108	1.50866	1.54256
Average accuracy	0.36485	0.39276	0.43413	0.34902	0.36458	0.39145	0.36458	0.39145	0.33241
Average turnover ratio	0.59976	0.64224	0.73597	0.57585	0.59947	0.64089	0.59947	0.64089	0.55112
Actual profit, if transaction cost were 0.1%	23.46019	21.89215	20.78402	24.19757	23.53996	22.07361	23.53996	22.07361	24.66204

5. Zaključak

Algorithm works on pairs of assets, looking for those deviations which are uncommon, so generally it is expected to perform better where there is larger number of assets as more deviations will be discovered. It adapts to the inconsistency of preferences by picking variable number of assets into the portfolio.

LITERATURA

Dodatak A

Računanje momenata vremenskog niza na pomičnom prozoru

Pri izračunavanju momenata (očekivanje, varijanca) vremenskih nizova nad prozorima konačne duljine, pokazalo se neefikasnim izračunavati svaki prozor zasebno u svakom koraku, jer se većina uzoraka između dva susjedna prozora ponavlja. Neka vremenski niz traje ukupno D vremenskih koraka, te neka je veličina vremenskog prozora T . Momenti se računaju u ukupno $D - T + 1$ vremenskih koraka, svaki put preko prozora veličine T , tako da je vremenska složenost nerekurzivne metode računanja momenata $\mathcal{O}((D - T + 1) \cdot T)$, odnosno približno $\mathcal{O}(DT)$, kako je $D \gg T$. Stoga se isplati potražiti rekurzivne izraze za očekivanje i varijancu kako bi se izračun mogao obaviti na učinkovitiji način.

Neka je $a[t]$ vremenski niz, za $t \in [0, 1, \dots, D - 1]$. Nenormirani momenti n -tog reda S_n niza $a[t]$ nad vremenskim prozorom duljine T definirani su na sljedeći način:

$$S_n^{(t)} = \sum_{\tau=t-T+1}^t a^n[\tau]. \quad (\text{A.1})$$

Za nulti moment uvijek vrijedi $S_0^{(t)} = T$ neovisno o t . Rekurzivni izraz za ažuriranje nenormiranog momenta je očigledan:

$$\begin{aligned} S_n^{(t+1)} &= \sum_{\tau=t+1-T+1}^{t+1} a^n[\tau] \\ &= -a^n[t - T + 1] + \sum_{\tau=t-T+1}^t a^n[\tau] + a^n[t + 1] \\ &= -a^n[t - T + 1] + S_n^{(t)} + a^n[t + 1]. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Preko nenormiranih momenata mogu se izraziti očekivanje i varijanca. Očekivanje $\mathbf{E}[a[\tau] | t - T < \tau \leq t]$ je normirani moment prvog reda, i može se izraziti kao:

$$\mathbf{E}[a[\tau] | t - T < \tau \leq t] = \frac{S_1^{(t)}}{S_0^{(t)}}, \quad (\text{A.3})$$

što je bilo relativno jednostavno za izračunati i bez korištenja nenomiranih momenata. No, kod računanja varijance situacija je nešto složenija. Varijanca je centrirani i normirani moment drugog reda. Prema definiciji, varijanca $\mathbf{Var}[a[\tau] | t - T < \tau \leq t]$ može se računati još i kao:

$$\begin{aligned} \mathbf{Var}[a[\tau] | t - T < \tau \leq t] &= \mathbf{E}[(a[\tau] - \mathbf{E}[a[\tau]])^2 | t - T < \tau \leq t] \\ &= \mathbf{E}[a^2[\tau] - 2a[\tau]\mathbf{E}[a[\tau]] + \mathbf{E}^2[a[\tau]] | t - T < \tau \leq t] \\ &= \mathbf{E}[a^2[\tau] | t - T < \tau \leq t] \\ &\quad - 2\mathbf{E}^2[a[\tau] | t - T < \tau \leq t] + \mathbf{E}^2[a[\tau] | t - T < \tau \leq t] \\ &= \mathbf{E}[a^2[\tau] | t - T < \tau \leq t] + \mathbf{E}^2[a[\tau] | t - T < \tau \leq t] \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Sada se $\mathbf{E}[a^2[\tau] | t - T < \tau \leq t]$ također može izraziti preko nenormiranih momenata kao $S_2^{(t)} / S_0^{(t)}$. Konačno, varijanca se može izraziti preko nenormiranih momenata kao:

$$\mathbf{Var}[a[\tau] | t - T < \tau \leq t] = \frac{S_2^{(t)}}{S_0^{(t)}} - \frac{(S_1^{(t)})^2}{(S_0^{(t)})^2} = \frac{S_0^{(t)}S_2^{(t)} - (S_1^{(t)})^2}{(S_0^{(t)})^2}. \quad (\text{A.5})$$

Na ovaj način moguće je izračunati očekivanje i varijancu nad pomičnim prozorom na mnogo učinkovitiji način nego nerekurzivnim postupkom. Inicijalno je potrebno izračunati momente $S_0^{(T-1)}$, $S_1^{(T-1)}$ i $S_2^{(T-1)}$, te iz njih $\mathbf{E}[a[\tau] | 0 \leq \tau < T]$ i $\mathbf{Var}[a[\tau] | 0 \leq \tau < T]$; u složenosti $\mathcal{O}(T)$. Nadalje, za svaki pomak vremenskog prozora rekursivno se ažuriraju vrijednosti nenormiranih momenata, te se putem njih izračunavaju očekivanje i varijanca, u složenosti $\mathcal{O}(T - D)$. Ukupna vremenska složenost algoritma time je pala s $\mathcal{O}(DT)$ na $\mathcal{O}(D)$.

Harry Potter
i analiza vremenskih nizova zasnovana na kompleksnim mrežama

Sažetak

Sažetak na hrvatskom jeziku.

Ključne riječi: Ključne riječi, odvojene zarezima.

Complex network based time series analysis

Abstract

Abstract.

Keywords: Keywords.