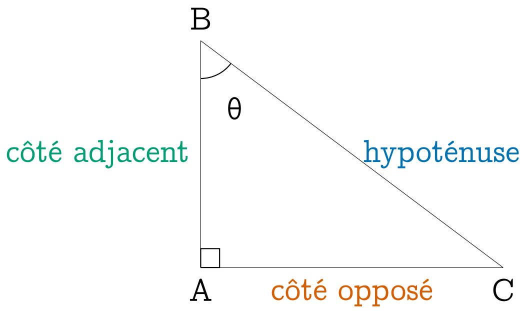
Dans tout ce chapitre, il sera nécessaire de vérifier que les formules sont bien appliquées dans le cas d'un triangle rectangle. Il sera de plus obligatoire de citer ce triangle et le point en lequel il est rectangle.

1 Définitions des rapports trigonométriques

Définition 1

Soit ABC un triangle rectangle en A. On note θ l'angle $\widehat{ABC}$ pour des notations plus courtes. On définit alors les notions de côtés opposé et adjacent relativement à l'angle θ.

- [CA] est le côté opposé à θ.
- [AB] est le côté adjacent à θ.
- [BC] est l'hypoténuse.



Remarque 1

Attention, les notions d'**adjacent** et d'**opposé** sont relatives à un angle. En effet, si l'angle considéré est $\widehat{ACB}$, alors :

- [AB] est le côté opposé ;
- [AC] est le côté adjacent.

Définition 2

Dans ABC triangle rectangle en A on définit trois rapports dits trigonométriques pour l'angle θ : le **cosinus**, le **sinus** et la **tangente**.

$$\cos\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} \qquad \text{(cosinus)}$$

$$\sin\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \qquad \text{(sinus)}$$

$$\tan\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} \qquad \text{(tangente)}$$

Les valeurs de **cosinus** et **sinus** sont toujours comprises entre 0 et 1 [1].

Exercice 1

Soit le triangle isocèle rectangle ABC en A tel que $AC = 4$ cm. Quelles sont les mesures des **cosinus**, **sinus** et **tangente** de l'angle $\widehat{ABC}$?

1. Il peut être intéressant de prouver cette propriété. Astuce : regarder le quotient.

Solution 1

Le triangle ABC est rectangle en A, on peut donc appliquer la trigonométrie. La longueur de l'hypoténuse est manquante, nous utilisons donc le théorème de Pythagore.

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ &= 4^2 + 4^2 \\ &= 16 + 16 \\ &= 32 \end{aligned}$$

Ainsi, l'hypoténuse de ce triangle mesure $\sqrt{32}$ cm.
On note $\theta = \widehat{ABC}$, appliquons maintenant la trigonométrie.

$$\cos\theta = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{\sqrt{32}} \qquad \text{(cosinus)}$$

$$\sin\theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{\sqrt{32}} \qquad \text{(sinus)}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{4} = 1 \qquad \text{(tangente)}$$

2 Utilisation des rapports trigonométriques

Les rapports trigonométriques permettent de **calculer une mesure manquante si une longueur et un angle sont connus**. Cela n'est vrai que dans un triangle rectangle.

Exercice 2

Soit le triangle ABC rectangle en A tel que $\widehat{ABC} = 60^\circ$ et $AB = 5$ cm. Calculer les mesures manquantes à l'aide de la trigonométrie.

Solution 2

Le triangle ABC est rectangle en A, on peut donc appliquer la trigonométrie.

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} \qquad \sin\widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} \qquad \tan\widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}$$

Calcul de AC à l'aide de la tangente Il faut résoudre l'équation $\tan\widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}$.

$$\begin{aligned} \tan\widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} &\iff \tan 60^\circ = \frac{AC}{5} \\ &\iff \sqrt{3} = \frac{AC}{5} && \text{(utilisation calculatrice)} \\ &\iff AC = \sqrt{3} \times 5 && \text{(produit en croix)} \end{aligned}$$

Ainsi $AC = 5\sqrt{3}$ cm.

Calcul de BC **à l'aide du cosinus** Il faut résoudre l'équation $\cos\widehat{\mathrm{ABC}} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}$

$$\begin{aligned}
\cos\widehat{\mathrm{ABC}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} &\iff \cos 60^\circ = \frac{5}{\mathrm{BC}} \\
&\iff \frac{1}{2} = \frac{5}{\mathrm{BC}} && \text{(utilisation calculatrice)} \\
&\iff \mathrm{BC} = 5 \times 2 && \text{(produit en croix, } \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{1}\text{)} \\
&\iff \mathrm{BC} = 10
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{BC} = 10$ cm.