Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Investigação Operacional

Trabalho 1

LEI - 2º Ano - 2º Semestre

Realizador por:
A98695 Lucas Oliveira
A89292 Mike Pinto
A96208 Rafael Gomes

Braga,
20 de março de 2023

Conteúdo

1 Introdução

Este relatório objetiva descrever a resolução do Trabalho n.º 1 da Unidade Curricular de Investigação Operacional.
O trabalho proposto pela equipa docente passa pela resolução de um problema de empacotamento de um conjunto de *"itens"* em contentores, de modo a otimizar uma determinada medida de eficiência.

1.1 Análise do Problema

O problema proposto envolve o empacotamento de um conjunto de *"itens"* de variados comprimentos, num conjunto de contentores de capacidades distintas. A sua resolução passa pela otimização de uma medida de eficiência, *i.e.*, empacotar a totalidade dos *"itens"* minimizando a quantidade de contentores usados, sem exceder a sua capacidade. É possível, no entanto, existir espaço não ocupado nos contentores.
Estes problemas de empacotamento possuem uma estrutura semelhante aos "problemas de corte".

2 Formulação do Problema

Pretende-se, então, empacotar a totalidade dos *"itens"*, na menor quantidade de contentores possível, tendo em atenção nunca superar a sua capacidade máxima. Contudo, pode-se dar o caso de haver espaço livre.
Após análise do problema, recorre-se a padrões de corte dos contentores, *i.e.*, de quantas maneiras possíveis os cinco *"itens"* poderiam caber nos três tipos de contentores.
Em cada padrão de corte foi maximizado o espaço ocupado pelos *"itens"*, tendo no máximo um desperdício de espaço de 1. Assim, cada padrão de corte, irá representar um contentor usado.
Por fim, o número de contentores usados é o somatório de padrões de corte utilizados do respetivo contentor. Já a quantidade de *"itens"* empacotados é o somatório da multiplicação dos padrões de corte que usam um *"item"* com a quantidade de vezes que esse *"item"* é usado no padrão de corte. Para garantir que os "items" cabem todos nos diferentes contentores, é necessário que o somatório da multiplicação dos contentores usados com o seu tamanho seja maior ou igual à soma dos comprimentos de todos os "items".
Então a função objetivo a minimizar será o somatório da multiplicação do comprimento de um contentor com quantidade usada desse contentor.

2.1 Número de contentores disponíveis e quantidade de *"itens"*

O maior número de inscrição pertence ao aluno Lucas Oliveira, com o número mecanográfico A98695.
Considerando que (x, A, B, C, D, E) = (0, 9, 8, 6, 9, 5) e seguindo as regras definidas no enunciado do trabalho para a determinação das listas de contentores e *"itens"*, temos:

1. Contentores:
   - Como o algarismo B = 8, então a quantidade disponível de contentores, de comprimento 10, é 9;
   - Como o algarismo D = 9, então a quantidade disponível de contentores, de comprimento 7, é 10;
2. Itens:
   - Como o algarismo B é par então $k_1 = 0$;
   - Como o algarismo C é par então $k_2 = C + 2 = 8$;
   - Como o algarismo D é ímpar então $k_3 = 10$;
   - Como o algarismo E é ímpar então $k_4 = E + 8 = 13$;

Por fim, obtemos as listas de contentores conforme a Tabela 1 apresentada abaixo:

Tabela 1: Comprimento e quantidade disponível de contentores

Contentores	
Comprimento	**Quantidade disponível**
11	ilimitada
10	9
7	10

E a lista de *"itens"* e a respetiva soma de comprimentos conforme a Tabela 2 apresentada abaixo:

Tabela 2: Comprimento, quantidade e soma dos comprimentos dos *"itens"*

	Itens	
Comprimento	**Quantidade**	**Soma do Comprimento**
1	0	0
2	8	16
3	10	30
4	13	52
5	5	25
	Total	123

3 Modelo de Programação Linear

3.1 Variáveis de decisão

As variáveis de decisão escolhidas irão representar padrões de corte possíveis e a quantidade de contentores usados.

Usaremos então a variável x_{ij} para representar os padrões de corte, onde a variável i representa o contentor, conforme a Tabela 3 apresentada abaixo, e j representa um padrão de corte possível para esse contentor segundo as Tabelas 4, 5 e 6.

Usaremos ainda a variável c_i que irá representar a quantidade de contentores usados, onde i representa um contentor, conforme a Tabela 3 apresentada abaixo.

Tabela 3: Identificação dos valores de i segundo os diferentes contentores

Contentor	i
Comprimento 11	1
Comprimento 10	2
Comprimento 7	3

Temos então:

c_i : *Quantidade de contentor i usados*
x_{ij} : *Padrão de corte j do contentor i*
onde i, j $\in \mathbb{N}$
e $c_i, x_{ij} \in \mathbb{N}_0$

Foram então identificados um total de 32 padrões de corte possíveis para os três contentores, 6 para os contentores de comprimento 7, 12 para os contentores de comprimento 10 e 14 para os contentores de comprimento 11 como demonstrado abaixo:

3.1.1 Padrões de corte possíveis do contentor de comprimento 11

Tabela 4: Padrões de corte possíveis de contentores de comprimento 11. Os "Itens" são os referenciados na Tabela 2

x_{ij}	**Comprimento "Itens" empacotados**	**Desperdício**
x_{11}	$item5 + item5 = 10$	1
x_{12}	$item5 + item4 + item2 = 11$	0
x_{13}	$item5 + item3 + item3 = 11$	0
x_{14}	$item5 + item3 + item2 = 10$	1
x_{15}	$item5 + item2 + item2 + item2 = 11$	0
x_{16}	$item4 + item4 + item3 = 11$	0
x_{17}	$item4 + item4 + item2 = 10$	1
x_{18}	$item4 + item3 + item3 = 10$	1
x_{19}	$item4 + item3 + item2 + item2 = 11$	0
x_{110}	$item4 + item2 + item2 + item2 = 10$	1
x_{111}	$item3 + item3 + item3 + item2 = 11$	0
x_{112}	$item3 + item3 + item2 + item2 = 10$	1
x_{113}	$item3 + item2 + item2 + item2 + item2 = 11$	0
x_{114}	$item2 + item2 + item2 + item2 + item2 = 10$	1

Da Tabela 4 obtemos que:

$$c_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{19} + x_{110} + x_{111} + x_{112} + x_{113} + x_{114}$$

3.1.2 Padrões de corte possíveis do contentor de comprimento 10

Tabela 5: Padrões de corte possíveis de contentores de comprimento 10. Os "Itens" são os referenciados na Tabela 2

x_{ij}	**Comprimento "Itens" empacotados**	**Desperdício**
x_{21}	$item5 + item5 = 10$	0
x_{22}	$item5 + item4 = 9$	1
x_{23}	$item5 + item3 + item2 = 10$	0
x_{24}	$item5 + item2 + item2 = 9$	1
x_{25}	$item4 + item4 + item2 = 10$	0
x_{26}	$item4 + item3 + item3 = 10$	0
x_{27}	$item4 + item3 + item2 = 10$	0
x_{28}	$item4 + item2 + item2 + item2 = 10$	0
x_{29}	$item3 + item3 + item3 = 9$	1
x_{210}	$item3 + item3 + item2 + item2 = 10$	0
x_{211}	$item3 + item2 + item2 + item2 = 9$	1
x_{212}	$item2 + item2 + item2 + item2 + item2 = 10$	0

Da Tabela 5 obtemos que:

$$c_2 = x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} + x_{28} + x_{29} + x_{210} + x_{211} + x_{212}$$

3.1.3 Padrões de corte possíveis de contentores de comprimento 7

Tabela 6: Padrões de corte possíveis de contentores de comprimento 7. Os "Itens" são os referenciados na Tabela 2

x_{ij}	**Comprimento "Itens" empacotados**	**Desperdício**
x_{31}	$item5 + item2 = 7$	0
x_{32}	$item4 + item3 = 7$	0
x_{33}	$item4 + item2 = 6$	1
x_{34}	$item3 + item3 = 6$	1
x_{35}	$item3 + item2 + item2 = 7$	0
x_{36}	$item2 + item2 + item2 = 6$	1

Da Tabela 6 obtemos que:

$$c_3 = x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36}$$

3.2 Função Objetivo

Pretende-se minimizar a quantidade de contentores usados, empacotando todos os *"itens"*, portanto a função objetivo passará por minimizar a soma dos comprimentos de contentores utilizados, obtendo então:

$$\min z = \sum y_i \times c_i$$

em que i$\in \mathbb{N}$

e y_i*: comprimento do contentor i*,

c_i : *Quantidade usada do contentor i*

3.3 Restrições

É necessário garantir que as restrições de quantidade de *"itens"* e contentores, conforme as Tabelas 1 e 2, são respeitadas, para isso foi identificado três tipos de restrições:

1. Restrições para quantidade total de contentores.
2. Restrições para o número de *"itens"* a serem usados.
3. Restrições do comprimento de contentores usados pelo comprimento total de *"itens"*

3.3.1 Restrições quantidades de contentores

Para assegurar que a quantidade de contentores nunca é ultrapassado é necessário restringir os valores das variáveis de decisão c_i conforme os valores apresentado na Tabela 1, logo:

$$0 \leq c_i \leq \textit{quantidade máxima disponível contentor i}$$
$$\textit{em que } i \in \mathbb{N}$$

Por exemplo, a restrição para o contentor de comprimento 10 será:

$$\textit{contentor10: } 0 \leq c_2 \leq 9$$

3.3.2 Restrições quantidades de *"itens"*

Para poder solucionar o problema é necessário que todos os *"itens"* disponíveis sejam empacotados. Para tal é necessário criar uma restrição para cada "item" segundo a quantidade usada desse "item" nos padrões de corte:

$$\sum k_{iz} \times x_{ij} \geq item_z$$
$$\textit{onde } i, j, z \in \mathbb{N}$$
$$\text{e } k_{iz}\textit{: Quantidade de "item" z no padrão de corte } x_{ij},$$
$$x_{ij} \textit{ : Padrão de corte j do contentor i},$$
$$item_z \textit{ : Quantidade do "item" z}$$

Por exemplo, a restrição para o "item" de comprimento 5 será:

$$\textit{item5: } 2x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + 2x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{31} \geq 5$$

3.3.3 Restrições do comprimento de contentores usados pelo comprimento total de *"itens"*

Para garantir que todos os *"itens"* caibam nos contentores utilizados é necessário restringir a soma do comprimento dos contentores com a soma do comprimento de todos os*"itens"*, obtemos então a seguinte restrição:

$$\sum y_i \times c_i \geq \sum item_j \times q_j$$
$$\textit{onde } i, j \in \mathbb{N}$$
$$\textit{e } y_i \textit{ : Comprimento do contentor i},$$
$$c_i \textit{ : Quantidade de contentores i usados},$$
$$item_j \textit{ : Quantidade de "itens" j},$$
$$q_j \textit{ : Comprimento do "item" j}$$

4 Ficheiro de Input

```
/* Função Objetivo: Minimizar o comprimento utilizado nos contentores */
min: 11 c1 + 10 c2 + 7 c3;

/* Restrições das quantidades de contentores */

contentor11: 0 <= c1;
contentor10: 0 <= c2 <= 9;
contentor7:  0 <= c3 <= 10;

/* Restrições quantidades dos items */

item2:   x12 +   x14 + 3 x15 +   x17 + 2 x19 + 3 x110 +   x111 + 2 x112 + 4 x113 +
5 x114 + x23 + 2 x24 +   x25  + x27 + 3 x28 + 2 x210 + 3 x211 + 5 x212 + x31 + x33 +
2 x35 + 3 x36 >= 8;

item3: 2 x13 +   x14 +   x16 + 2 x18 +   x19 + 3 x111 + 2 x112 +   x113 +   x23  +
2 x26  + x27 + 3 x29 + 2 x210 + x211 +  x32 + 2 x34  +   x35 >= 10;

item4:   x12 + 2 x16 + 2 x17 +   x18 +   x19 +   x110 +   x22  + 2 x25  +   x26  +
x27  + x28 +   x32 +   x33 >= 13;

item5: 2 x11 +   x12 +   x13 +   x14 +   x15 + 2 x21  +   x22  +   x23  +   x24  +
x31 >= 5;

/* Padrões de corte de cada contentor */

itemsContentor11: c1 = x11 + x12 + x13 + x14 + x15 + x16 + x17 + x18 + x19 + x110 +
x111 + x112 + x113 + x114;

itemsContentor10: c2 = x21 + x22 + x23 + x24 + x25 + x26 + x27 + x28 + x29 + x210 +
x211 + x212;

itemsContentor7:  c3 = x31 + x32 + x33 + x34 + x35 + x36;

/* Defenir as variaveis como inteiras */

int c1, c2, c3, x11, x12, x13, x14, x15, x16, x17, x18, x19, x110, x111, x112, x113,
x114, x21, x22, x23, x24, x25, x26, x27, x28, x29, x210, x211, x212, x31, x32, x33,
x34, x35, x36;
```

5 Ficheiro de Output

```
Model name:  'LPSolver' - run #1
Objective:  Minimize(R0)

SUBMITTED
Model size:  10 constraints, 35 variables, 100 non-zeros.
Sets:  0 GUB, 0 SOS.

Using DUAL simplex for phase 1 and PRIMAL simplex for phase 2.
The primal and dual simplex pricing strategy set to 'Devex'.

Relaxed solution 123 after 13 iter is BB base.

Feasible solution 222 after 45 iter, 23 nodes (gap 79.8%)
Improved solution 218 after 46 iter, 24 nodes (gap 76.6%)
Improved solution 211 after 57 iter, 35 nodes (gap 71.0%)
Improved solution 207 after 58 iter, 36 nodes (gap 67.7%)
Improved solution 200 after 69 iter, 47 nodes (gap 62.1%)
Improved solution 196 after 70 iter, 48 nodes (gap 58.9%)
Improved solution 189 after 87 iter, 59 nodes (gap 53.2%)
Improved solution 186 after 90 iter, 62 nodes (gap 50.8%)
Improved solution 179 after 107 iter, 73 nodes (gap 45.2%)
Improved solution 176 after 110 iter, 76 nodes (gap 42.7%)
Improved solution 169 after 127 iter, 87 nodes (gap 37.1%)
Improved solution 166 after 130 iter, 90 nodes (gap 34.7%)
Improved solution 159 after 147 iter, 101 nodes (gap 29.0%)
Improved solution 156 after 150 iter, 104 nodes (gap 26.6%)
Improved solution 149 after 167 iter, 115 nodes (gap 21.0%)
Improved solution 146 after 170 iter, 118 nodes (gap 18.5%)
Improved solution 139 after 187 iter, 129 nodes (gap 12.9%)
Improved solution 136 after 190 iter, 132 nodes (gap 10.5%)
Improved solution 129 after 209 iter, 141 nodes (gap 4.8%)
Improved solution 127 after 232 iter, 155 nodes (gap 3.2%)
Improved solution 126 after 250 iter, 167 nodes (gap 2.4%)
Improved solution 123 after 287 iter, 189 nodes (gap 0.0%)

Optimal solution 123 after 287 iter, 189 nodes (gap 0.0%).

Relative numeric accuracy ||*|| = 1.97373e-016

MEMO: lp_solve version 5.5.2.11 for 32 bit OS, with 64 bit REAL variables.
In the total iteration count 287, 5 (1.7%) were bound flips.
There were 93 refactorizations, 0 triggered by time and 1 by density.
...  on average 3.0 major pivots per refactorization.  The largest [LUSOL v2.2.1.0]
fact(B) had 26 NZ entries, 1.0x largest basis.
The maximum B&B level was 28, 0.4x MIP order, 11 at the optimal solution.
The constraint matrix inf-norm is 5, with a dynamic range of 5.
Time to load data was 0.016 seconds, presolve used 0.015 seconds,
...  0.111 seconds in simplex solver, in total 0.142 seconds.
```

Tabela 7: *"Output"* das variáveis cujo valor difere de zero.

Variables	result
	123
c1	9
c2	1
c3	2
x11	1
x12	2
x15	1
x16	4
x19	1
x21	1
x32	2
(...)	(...)

6 Validação do Modelo

Após obter o resultado, através da ferramenta *LPSolve*, é necessário interpretar e validar o seu valor.
Através da análise da Tabela 7, verificamos que a solução ótima utiliza 9 contentores de comprimento 11, 1 contentor de comprimento 10 e 2 de comprimento 7, logo a soma dos seus comprimentos será:

$$11 \times c_1 + 10 \times c_2 + 7 \times c_2 = \tag{1}$$
$$= 11 \times 9 + 10 \times 1 + 7 \times 2 = 123 \tag{2}$$

O que vai de encontro à restrição proposta na secção 3.3.3. Pela tabela 7 e 2 é possível confirmar este valor.

Recorrendo às Tabelas 4, 5, 6 e verificando aos padrões de corte da solução ótima apresentada na Tabela 7 obtemos:

Tabela 8: Quantidade de *"items"* da solução. Os *"items"* e os contentores são referenciados nas Tabelas 2 e 3

			Quantidade *"items"*				
Contentor	**Padrão de corte**	**Quantidade**	**Item 1**	**Item 2**	**Item 3**	**Item 4**	**Item 5**
	x_{12}	2	0	1	0	1	1
	x_{15}	1	0	3	0	0	1
c_1	x_{16}	4	0	0	1	2	0
	x_{19}	1	0	2	1	1	0
	x_{111}	1	0	1	3	0	0
c_2	x_{21}	1	0	0	0	0	2
c_3	x_{32}	2	0	0	1	1	0
		Total	0	8	10	13	5

Verificamos assim que a quantidade de itens correspondem com a Tabela 2, obdecendo então à restrição da secção 3.3.2.

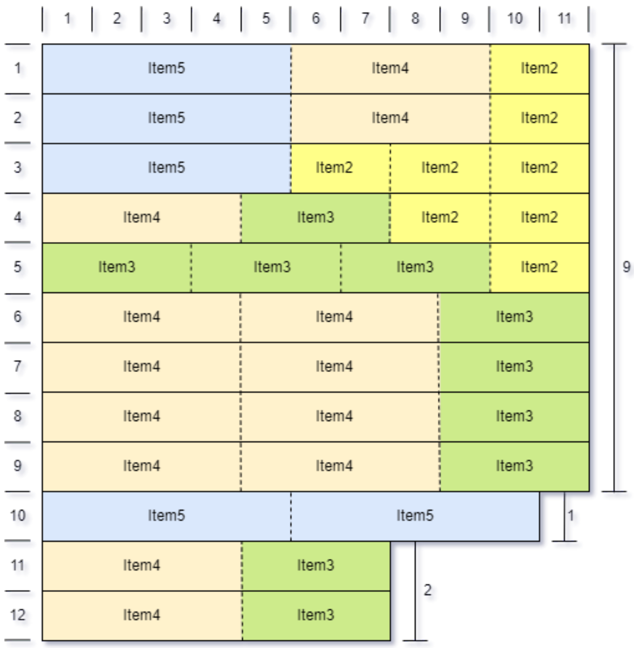

Figura 1: Diagrama da distribuição dos itens, da solução ótima, nos contentores.

Através do diagrama da figura 1 verificamos visualmente a distribuição dos diversos itens pelos diversos contentores, evidenciando que a capacidade máxima dos contentores não é ultrapassado, assim como a sua quantidade, e que não há desperdício de espaço nos contentores. É possível verificar também que a quantidade de contentores de comprimento 11, 10 e 7 não é ultrapassada(consoante a Tabela 1).

7 Conclusão

Na realização deste trabalho prático da Unidade Curricular de Investigação Operacional tentamos aplicar os conceitos lecionados nas aulas numa situação real.

Tentamos ser críticos durante todas as fases deste trabalho, acreditando sempre que tenhamos superado positivamente todas as dificuldades encontradas e conseguido realizar com sucesso todos os objetivos propostos.