بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه علم و صنعت ایران

بهار ۱۳۹۸

سیگنال‌ها و سیستم‌ها	پاسخ تمرین سری هفتم

---

۱. سیگنال $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + 1$ با ضرایب سری فوریه a_k مفروض است. اگر سیگنال $y[n] = a_n + (-1)^n$ تعریف شود، ضرایب سری فوریه آن را به کمک خاصیتی که در ادامه می آید، بیابید.

خاصیت دوگانی: $x[n] \leftrightarrow a_k \Leftrightarrow a_n \leftrightarrow \frac{1}{N}x[-n]$

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + 1 \Rightarrow N = 6 \Rightarrow \omega_0 = \frac{\pi}{3}$$

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n]$$

$$y_1[n] = a_n \leftrightarrow a_k^1 = \frac{1}{6}x[-k] = \frac{1}{6}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}k\right) + 1\right)$$

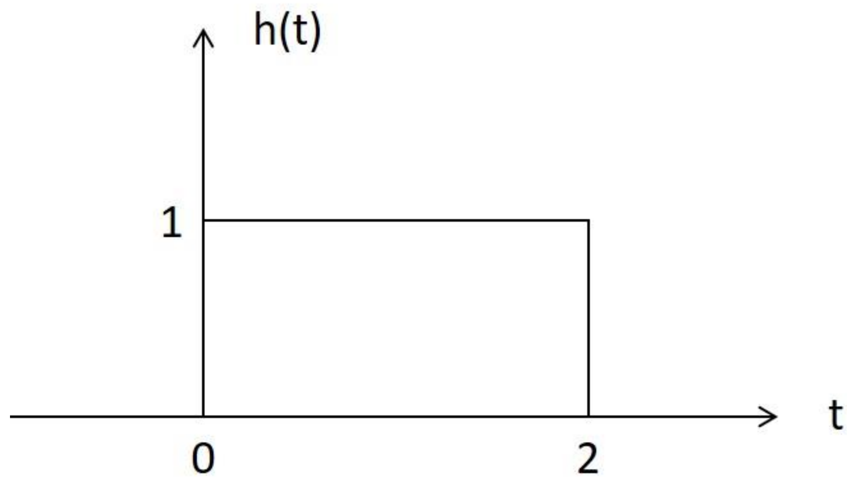
$$y_2[n] = (-1)^n = e^{j\pi n} \xrightarrow{N=6,\omega_0=\frac{\pi}{3}} a_3^2 = 1, a_k^2 = 0\ k$$

$$\notin \{\pm 3, \pm 9, \pm 15, \dots\} \Rightarrow a_k^2 = \delta[k-3]$$

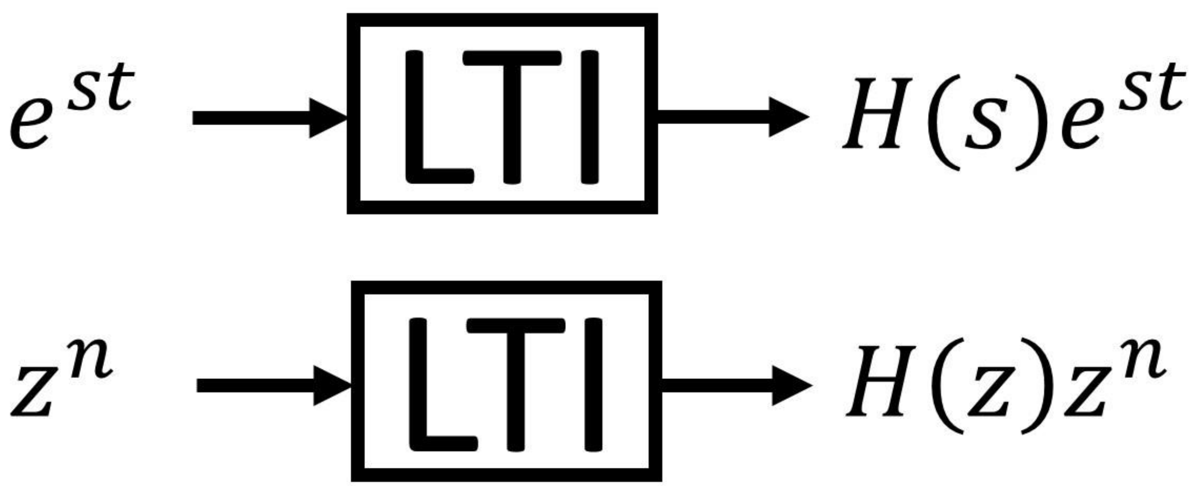
$$y[n] \leftrightarrow a_k = a_k^1 + a_k^2 = \frac{1}{6}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}k\right) + 1\right) + \delta[k-3]$$

دقت کنید که خاصیت خطی بودن سری فوریه زمانی برقرار است که دوره تناوب دو سیگنال یکسان باشد. به همین دلیل در این مثال دوره تناوب سیگنال $(-1)^n$ را ٦ فرض کردیم و با همین فرض ضرایب سری فوریه را حساب کردیم.

۲. فرض کنید یک سیستم LTI دارای پاسخ ضربه زیر است.



پاسخ سیستم به ورودی های $x_1(t) = e^{j\omega t}$ و $x_2(t) = \cos(\omega t)$ را به ازای ω ای ثابت و بدون کانوالو کردن(یعنی با محاسبه پاسخ فرکانسی سیستم) به دست بیاورید.



$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt\,, s = j\omega$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}\,, z = e^{j\omega}$$

$$H(s) = \int_0^2 e^{-st}dt = \left[\frac{-1}{s}e^{-st}\right]_{t=0}^{2} = \frac{-1}{s}(e^{-2s} - 1)$$

$$= \frac{1}{s}(1 - e^{-2s}) \Rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{j\omega}\left(1 - e^{-2j\omega}\right)$$

$$x_1(t) = e^{j\omega t} \Rightarrow y_1(t) = H(j\omega)e^{j\omega t} = \frac{e^{j\omega t}}{j\omega}\left(1 - e^{-2j\omega}\right)$$

$$x_2(t) = \cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)$$

$$\Rightarrow y_2(t) = \frac{1}{2}H(j\omega)e^{j\omega t} + \frac{1}{2}H(-j\omega)e^{-j\omega t}$$

$$= \frac{e^{j\omega t}}{2j\omega}\left(1 - e^{-2j\omega}\right) - \frac{e^{-j\omega t}}{2j\omega}\left(1 - e^{2j\omega}\right)$$

۳. یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t) = 3e^{-10t}u(t)$ مفروض است. بدون کانوالو کردن و با محاسبه پاسخ فرکانسی سیستم، خروجی سیستم به ورودی $x(t) = 3\cos(5t)$ را بیابید.

$$H(s) = \int_0^\infty 3e^{-10t}e^{-st}dt = \left[\frac{-3}{s+10}e^{-(s+10)t}\right]_{t=0}^{\infty} = \frac{3}{s+10}$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{3}{10 + j\omega}$$

$$x(t) = 3\cos(5t) = \frac{3}{2}\left(e^{j5t} + e^{-j5t}\right) \Rightarrow y(t)$$

$$= \frac{3}{2}H(5j)e^{j5t} + \frac{3}{2}H(-5j)e^{-j5t} = \frac{9e^{5jt}}{10j + 20} + \frac{9e^{-5jt}}{-10j + 20}$$

۴. تبدیل فوریه سیگنال های زیر را بیابید.

$$\boxed{X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt}$$

a. $x(t) = \delta(t)$

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}dt = e^{-j\omega 0}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

b. $x(t) = e^{-\alpha t}u(t), \alpha > 0$

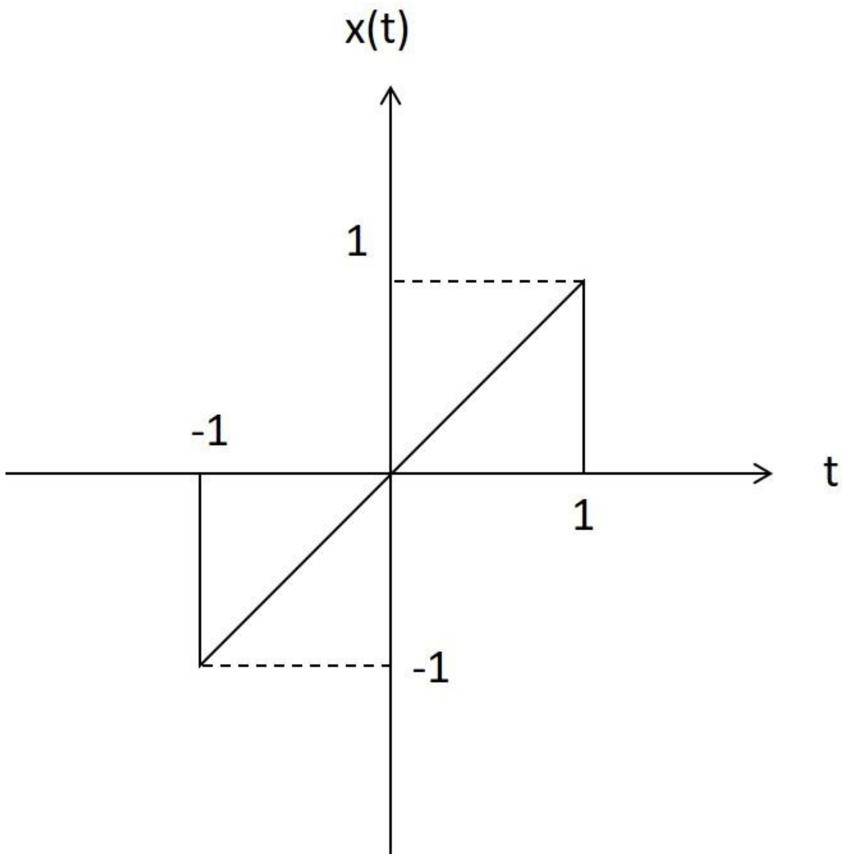
$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{e^{-\alpha t}u(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t}u(t)e^{-j\omega t}dt = \int_0^\infty e^{-(\alpha + j\omega)t}dt$$

$$= \left[\frac{-1}{\alpha + j\omega}e^{-(\alpha + j\omega)t}\right]_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

c. $x(t) = e^{-\alpha|t|}, \alpha > 0$

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{e^{-\alpha|t|}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|}e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t}e^{-j\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}dt$$
$$= \left[\frac{1}{\alpha - j\omega}e^{(\alpha - j\omega)t}\right]_{t = -\infty}^{0} + \left[\frac{-1}{\alpha + j\omega}e^{-(\alpha + j\omega)t}\right]_{t = 0}^{\infty}$$
$$= \frac{1}{\alpha - j\omega} + \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

.d



$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-1}^{1} te^{-j\omega t}dt$$
$$= \left[\left(-\frac{t}{j\omega}e^{-j\omega t} + \frac{1}{\omega^2}e^{-j\omega t}\right)\right]_{t = -1}^{1}$$
$$= -\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega} + \frac{1}{\omega^2}e^{-j\omega} - \frac{1}{j\omega}e^{j\omega} - \frac{1}{\omega^2}e^{j\omega}$$
$$= -\frac{1}{j\omega}\left(e^{j\omega} + e^{-j\omega}\right) - \frac{1}{\omega^2}\left(e^{j\omega} - e^{-j\omega}\right)$$
$$= \frac{-2}{j\omega}\cos(\omega) + \frac{2}{j\omega^2}\sin(\omega)$$

۵. ویژگی های زیر را برای تبدیل فوریه زمان پیوسته اثبات کنید.

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

a. جابجایی زمانی: $x(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X(j\omega)\Rightarrow x(t-t_0)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$

$$x(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X(j\omega)\Rightarrow x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\Rightarrow x(t-t_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega(t-t_0)}d\omega$$

$$\Rightarrow x(t-t_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-j\omega t_0}X(j\omega)\right)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\Rightarrow x(t-t_0)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$$

b. مزدوج: $x(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X(j\omega)\Rightarrow x^*(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X^*(-j\omega)$

$$x(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X(j\omega)\Rightarrow x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\xRightarrow{\text{مزدوج کردن طرفین}} x^*(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X^*(j\omega)e^{-j\omega t}d\omega$$

$$\xRightarrow{\Omega=-\omega} x^*(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{-\infty}X^*(-j\Omega)e^{j\Omega t}(-d\Omega)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X^*(-j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

$$\xRightarrow{\omega=\Omega} x^*(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X^*(-j\omega)e^{j\omega t}d\omega\Rightarrow x^*(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X^*(-j\omega)$$

c. مقیاس زمان: $x(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X(j\omega)\Rightarrow x(at)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}\frac{1}{|a|}X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$

$$\mathcal{F}\{x(at)\}=\int_{-\infty}^{\infty}x(at)e^{-j\omega t}dt$$

$$\xrightarrow{\tau=at} \mathcal{F}\{x(at)\} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\frac{\tau}{a}} \frac{1}{a} d\tau & a \geq 0 \\ \int_{\infty}^{-\infty} x(\tau) e^{-j\omega\frac{\tau}{a}} \frac{1}{a} d\tau & a < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\tau\frac{\omega}{a}} d\tau & a \geq 0 \\ -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\tau\frac{\omega}{a}} d\tau & a < 0 \end{cases} = \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

d. دوگانی: $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(\omega) \Rightarrow X(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 2\pi x(-\omega)$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\Rightarrow 2\pi x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \xRightarrow{t \to -t} 2\pi x(-t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \xRightarrow{t\to\omega,\omega\to t} 2\pi x(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\Rightarrow X(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 2\pi x(-\omega)$$