**بسم الله الرحمن الرحیم**

دانشگاه علم و صنعت ایران

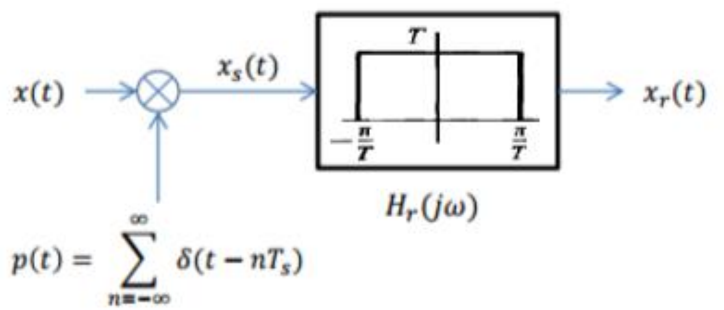
بهار ۱۳۹۸

سیگنال‌ها و سیستم‌ها پاسخ تمرین سری یازدهم

---

.۱

a. در سیستم شکل زیر سیگنال $x(t)$ توسط قطار ضربه، نمونه برداری می شود. سپس سیگنال $x_r(t)$ با استفاده از یک فیلتر پایین گذر ایده‌آل بازسازی می‌شود. با فرض این که دوره تناوب نمونه‌برداری یک هزارم ثانیه و $x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \theta)$ باشد، به ازای مقادیر $f_0 = 750Hz, \theta = \frac{\pi}{6}$ سیگنال $x_r(t)$ را تعیین کنید.




$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \theta) \xRightarrow{\omega_0 = 2\pi f_0} x(t) = \frac{1}{2} e^{j\theta} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\theta} e^{-j\omega_0 t} \Rightarrow$$

$$X(j\omega) = \pi e^{j\theta} \delta(\omega - \omega_0) + \pi e^{-j\theta} \delta(\omega + \omega_0)$$

$$P(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right) \Rightarrow$$

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\pi^2}{T}\right)\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\theta} \delta\left(\omega - \frac{2k\pi}{T} - \omega_0\right) + e^{-j\theta} \delta\left(\omega - \frac{2k\pi}{T} + \omega_0\right)\right]$$

$$X_r(j\omega) = H_r(j\omega) X_p(j\omega)$$

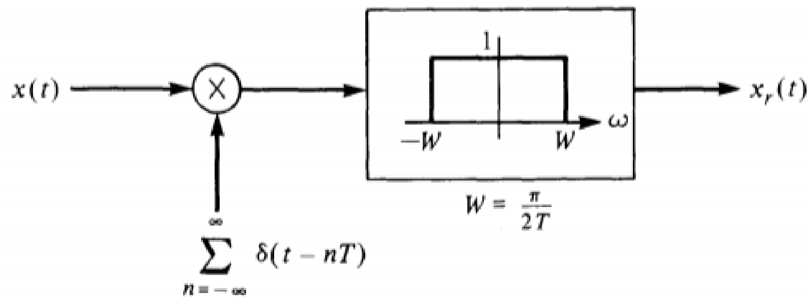
$$f_0 = 750Hz \Rightarrow \omega_0 = 2\pi \times f_0 \Rightarrow \omega_0 = 2\pi \times 750, \qquad T = 10^{-3}$$

$$\Rightarrow X_r(j\omega) = \frac{\pi}{T}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\theta} \delta(\omega - 2k\pi \times 10^3 - 2\pi \times 750) + e^{-j\theta} \delta(\omega - 2k\pi \times 10^3 + 2\pi \times 750)\right]$$

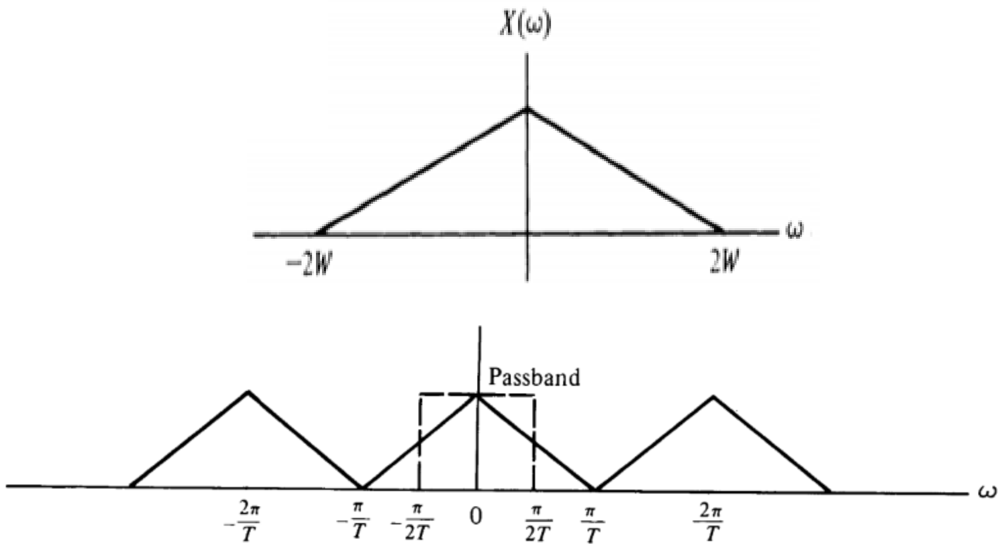
$$\Rightarrow X_r(j\omega) = \frac{\pi}{T}\left[e^{j\theta} \delta(\omega + 2\pi \times 250) + e^{-j\theta} \delta(\omega - 2\pi \times 250)\right]$$

$$\Rightarrow x_r(t) = \cos(2\pi \times 250 - \theta) = \cos\left(2\pi \times 250 - \frac{\pi}{6}\right)$$

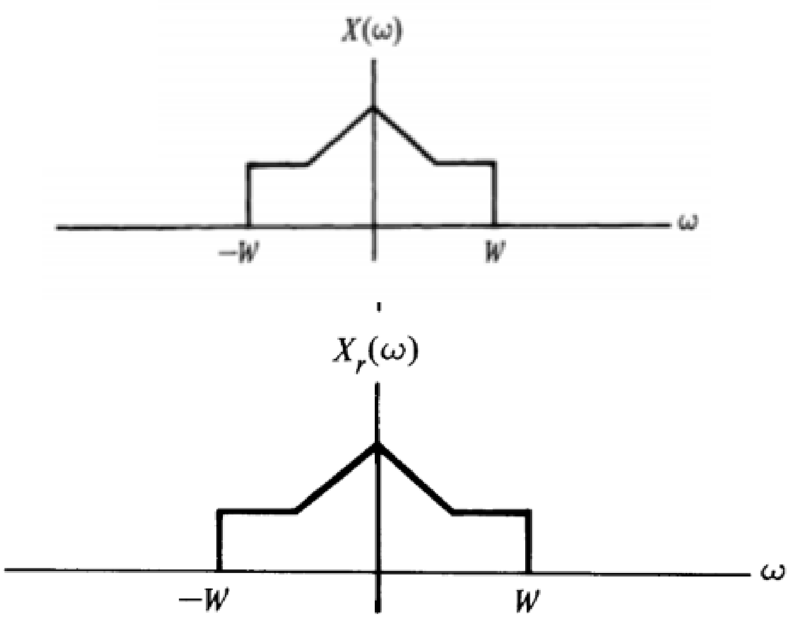
b. تبدیل فوریه خروجی سیستم زیر را به ازای ورودی‌های زیر تعیین کنید.




.i




.ii



۲.

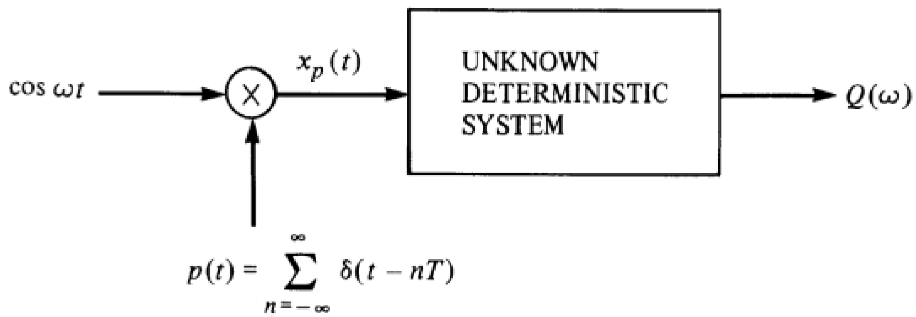
a. سیگنال $x[n]=(-1)^n$ توسط نمونه برداری از سیگنال زمان پیوسته $x(t)=\cos(\omega_0 t)$ در هر ۱ میلی ثانیه بدست می آید. به عنوان مثال:

$$\cos(\omega_0 nT)=(-1)^n,\ \ T=10^{-3}s$$

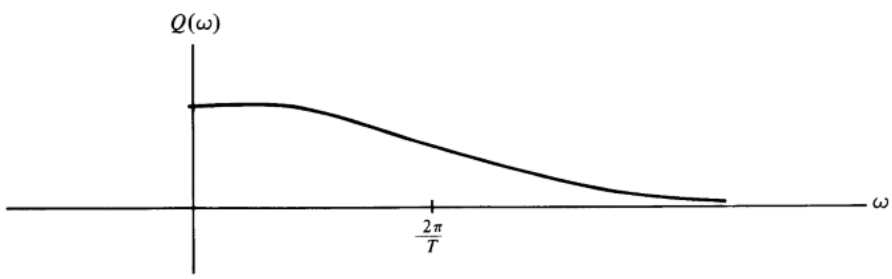
سه مقدار متمایز ممکن برای $\omega_0$ تعیین کنید.

$$\omega_0=\pi\times 10^3,\qquad \omega_0=3\pi\times 10^3,\qquad \omega_0=5\pi\times 10^3$$

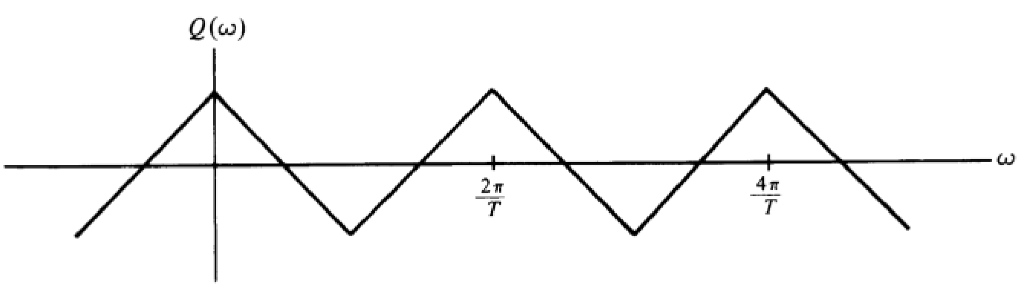
b. فرض کنید با استفاده از سیستم زیر یک سیگنال را توسط قطار ضربه نمونه برداری کردیم و نتیجه بعد از قطار ضربه را مورد پردازش قرار دادیم. تعیین کنید نمودار خروجی سیستم ما کدام یک از نمودارهای زیر می تواند باشد (با ذکر دلیل).




i.



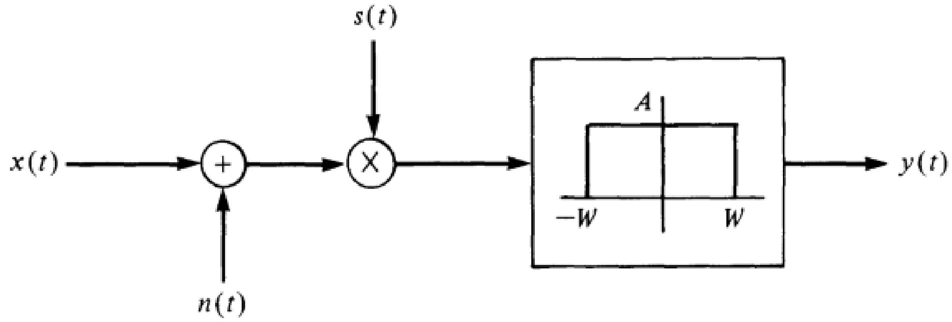

ii.

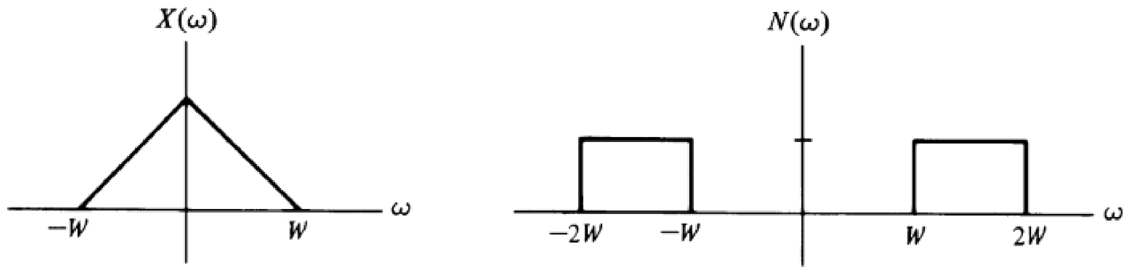



با توجه به ورودی سیستم، مقادیر تبدیل فوریه $X_p(j\omega)$ برای ω های خاص نمی‌تواند متفاوت باشد پس خروجی سیستم نیز نمی تواند برای ω های خاص متفاوت باشد در نتیجه $Q(j\omega)$ باید متناوب باشد و نمودار دوم می تواند نمودار خروجی سیستم باشد.

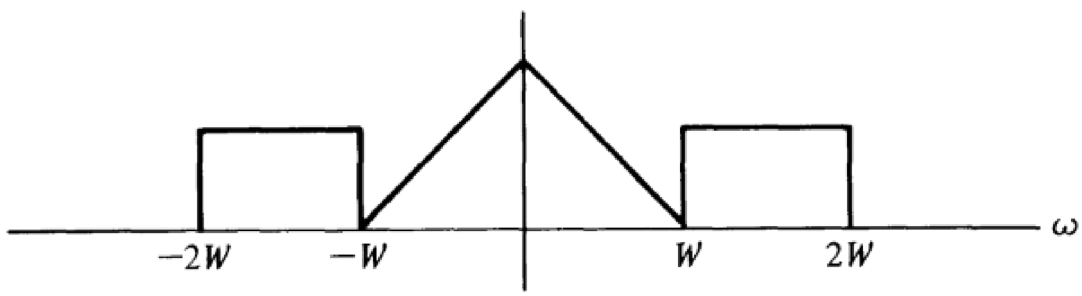
۳. سیستم زیر و نمودارهای تبدیل های فوریه زیر به شما داده شده است. مقدار $A$ و حداکثر مقدار $T$ بر حسب $W$ را طوری تعیین کنید که $y(t)=x(t)$ شود اگر $s(t)$ به صورت زیر باشد.

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

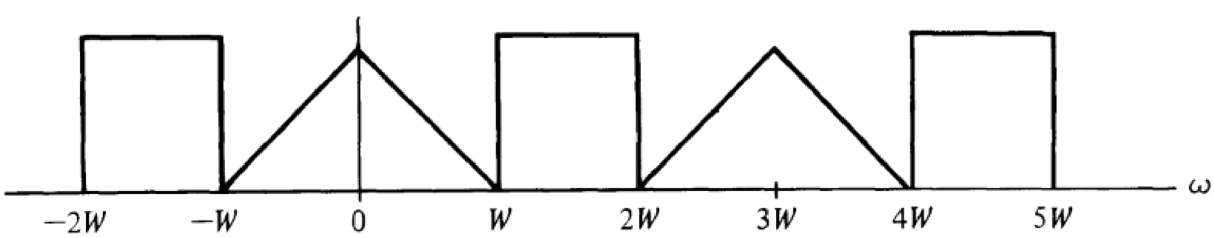



ورودی سیستم به صورت زیر خواهد بود:

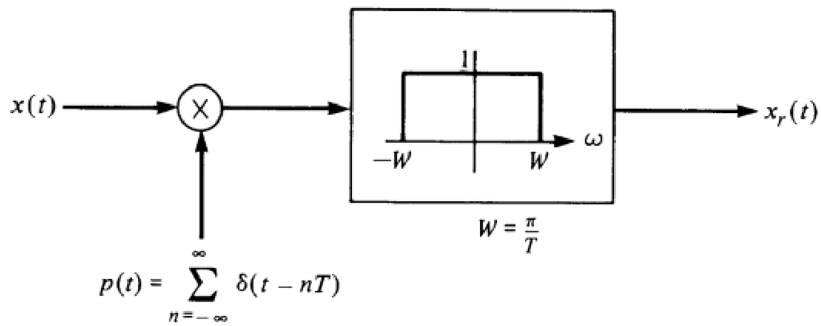


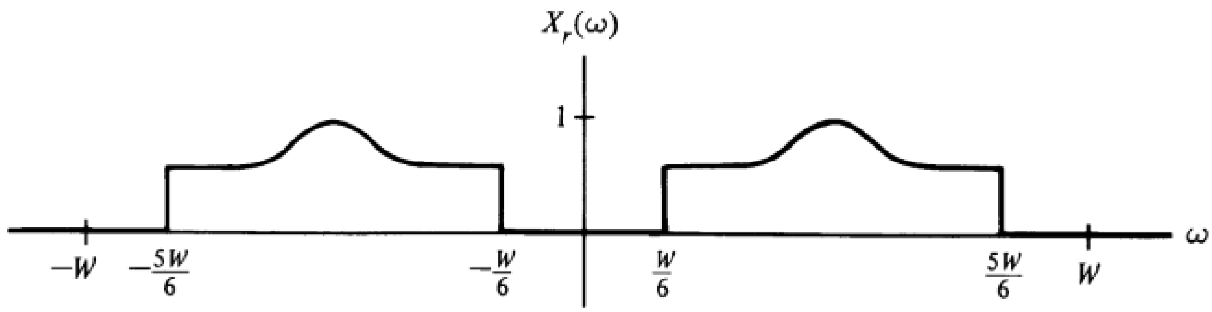

اگر بخواهیم ورودی و خروجی سیستم یکسان شود پس باید پس از عبور از قطار ضربه نمودار زیر را داشته باشیم:



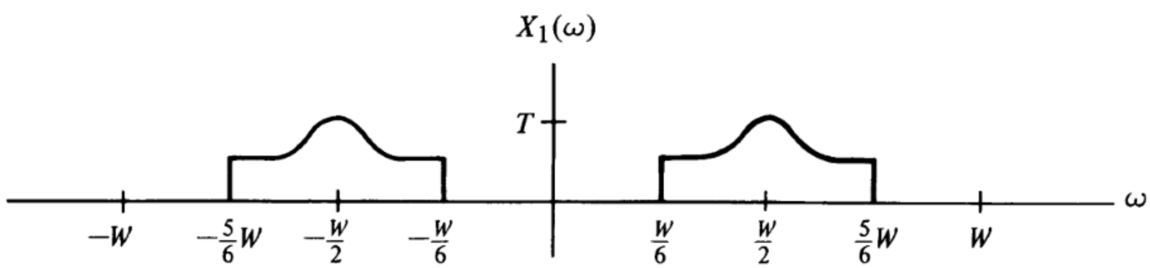

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{T} = 3W \Rightarrow A = T_{max} = \frac{2\pi}{3W}$$

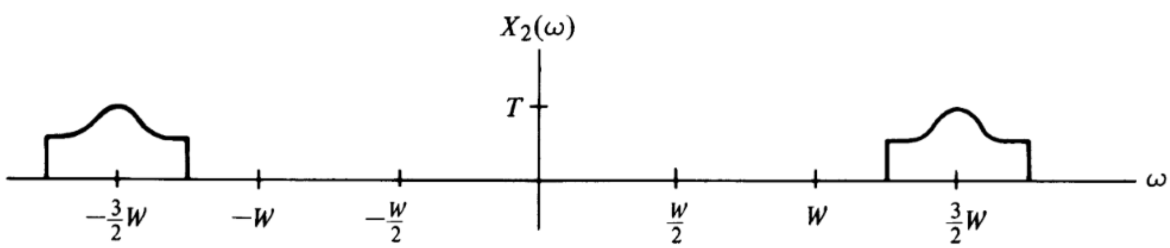
۴. سیستم زیر را در نظر بگیرید. نمودار تبدیل فوریه خروجی سیستم به صورت زیر است. دو نمودار تبدیل فوریه مختلف از ورودی سیستم را رسم کنید که خروجی زیر را بدهد.



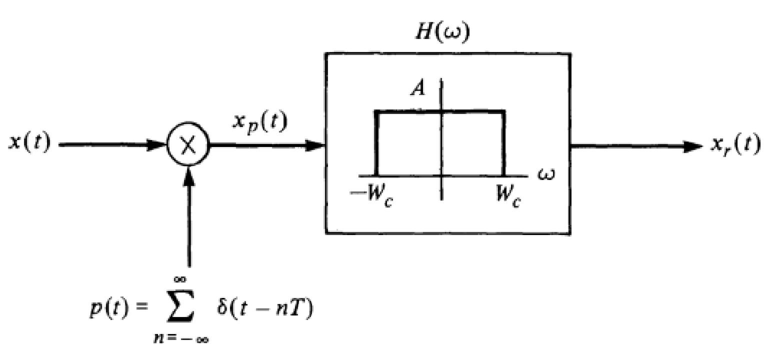




$$T = \frac{\pi}{W}$$




۵. سیستم زیر را در نظر بگیرید.




a. اگر برای $|\omega| > W$ داشته باشیم $X(\omega) = 0$ آنگاه مقادیری برای $A$ و $W_c$ و حداکثر مقدار ممکن برای $T$ را طوری بیابید که ورودی و خروجی سیستم یکسان شود.

قضیه نمونه برداری: $\frac{2\pi}{T} \geq 2W \Rightarrow T \leq \frac{\pi}{W} \Rightarrow T_{max} = \frac{\pi}{W}$

از آنجاییکه

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right))$$

پس برای برابری ورودی و خروجی باید داشته باشیم.

$$\Rightarrow A = T$$

و کوچکترین مقدار $W_c$ برای این که اطلاعات از دست نرود برابر $W$ است و بزرگترین مقدار ممکن برای این که خروجی و ورودی یکسان شود برابر $\frac{2\pi}{T} - W$ است.

$$\Rightarrow W < W_c < \frac{2\pi}{T} - W$$

b. فرض کنید برای $|\omega| > 2W$ داشته باشیم $X_1(\omega) = 0$ و برای $|\omega| > W$ داشته باشیم $X_2(\omega) = 0$ آنگاه بخش قبلی را به ازای ورودی های زیر تکرار کنید.

i. $x(t) = x_1(t) * x_2(t)$

$$\Rightarrow X(\omega) = 0 \ for \ |\omega| > 3W$$

$$\Rightarrow T_{max} = \frac{\pi}{W}, \ \ A = T, \ \ W < W_c < \frac{2\pi}{T} - W$$

ii. $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

$$\Rightarrow X(\omega) = 0 \ for \ |\omega| > 2W$$

$$\Rightarrow T_{max} = \frac{\pi}{2W}, \ \ A = T, \ \ 2W < W_c < \frac{2\pi}{T} - 2W$$

iii. $x(t) = x_1(t) \times x_2(t)$

$$\Rightarrow X(\omega) = 0 \ for \ |\omega| > 3W$$

$$\Rightarrow T_{max} = \frac{\pi}{3W}, \ \ A = T, \ \ 3W < W_c < \frac{2\pi}{T} - 3W$$

iv. $x(t) = x_1(10t)$

$$\Rightarrow X(\omega) = 0 \ for \ |\omega| > \frac{W}{10}$$

$$\Rightarrow T_{max} = \frac{10\pi}{W}, \ \ A = T, \ \ \frac{W}{10} < W_c < \frac{2\pi}{T} - \frac{W}{10}$$