بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه علم و صنعت ایران

بهار ۱۳۹۸

پاسخ تمرین سری ششم — سیگنال‌ها و سیستم‌ها

۱. فرض کنید سیگنال حقیقی $x[n]$ متناوب با دوره تناوب ۴ بوده و ضرایب سری فوریه آن برابر با $a_5 = -j, a_{-2} = 1, a_8 = -1$ باشد. ضرایب سری فوریه سیگنال $y[n] = x[1-n]$ را محاسبه کنید.

$$a_k = a_{k+N} \text{ (برای سیگنال زمان گسسته با دوره تناوب } N\text{)}$$

$$\text{حقیقی } x[n] \Rightarrow a_k = a_{-k}^*$$

$$f(t) \Rightarrow a_k : f(at) \Rightarrow a_{\frac{k}{a}}$$

$$N = 4 \Rightarrow \omega_0 = \frac{\pi}{2}, a_8 = -1 \Rightarrow a_0 = -1, a_{-2} = 1 \Rightarrow a_2 = 1, a_5 = -j \Rightarrow a_1 = -j$$

$$\text{حقیقی } x[n] \Rightarrow a_k = a_{-k}^* \Rightarrow a_{-1} = j \Rightarrow a_3 = j$$

$$x[n] \leftrightarrow a_k \Rightarrow x[n+1] \leftrightarrow a_k e^{jk\omega_0} \Rightarrow x[-n+1] \leftrightarrow a_{-k} e^{-jk\omega_0}$$

$$y[n] = x[1-n], y[n] \leftrightarrow b_k \Rightarrow b_k = a_{-k} e^{-jk\omega_0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_0 = a_0 = -1 \\ b_1 = a_{-1} e^{-j\omega_0} = j(-j) = 1 \\ b_2 = a_{-2} e^{-2j\omega_0} = -1 \\ b_3 = a_{-3} e^{-3j\omega_0} = (-j)(j) = 1 \end{cases}$$

۲. ضرایب سری فوریه سیگنال $x(t) = (\sin(t))^2$ را به دست آورید.

$$x(t) \leftrightarrow a_k \Rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}$$

$$T = \pi \Rightarrow \omega_0 = 2$$

$$x(t) = (\sin(t))^2 = \left(\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}\right)^2 = \frac{e^{2jt} + e^{-2jt} - 2}{-4}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(e^{2jt} + e^{-2jt}\right)$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{2}, a_1 = -\frac{1}{4}, a_{-1} = -\frac{1}{4}, a_k = 0 (k \notin \{0, \pm 1\})$$

۳. فرض کنید سیگنال $x(t)$ دارای ضرایب سری فوریه ای به صورت a_k بوده و متناوب با دوره تناوب T است. ضرایب سری فوریه سیگنال $v(t) = x(t)\cos(\frac{2\pi t}{T})$ را بدست آورید.

$$x(t) \leftrightarrow a_k \Rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}$$

$$v(t) \leftrightarrow b_k, v(t) = x(t)\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = x(t)\left(\frac{e^{j\left(\frac{2\pi t}{T}\right)} + e^{-j\left(\frac{2\pi t}{T}\right)}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t} e^{j\left(\frac{2\pi t}{T}\right)}$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t} e^{-j\left(\frac{2\pi t}{T}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(k+1)\left(\frac{2\pi}{T}\right)t} + \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(k-1)\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}$$

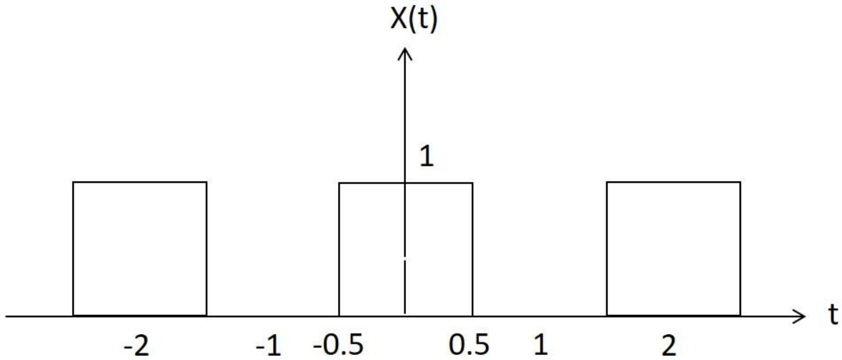
برای سیگمای اول از تغییر متغیر K=k+1 و برای سیگمای دوم از تغییر متغیر K=k-1 استفاده می کنیم.

$$\Rightarrow v(t) = \frac{1}{2}\sum_{K=-\infty}^{\infty} a_{K-1} e^{jK\left(\frac{2\pi}{T}\right)t} + \frac{1}{2}\sum_{K=-\infty}^{\infty} a_{K+1} e^{jK\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}$$

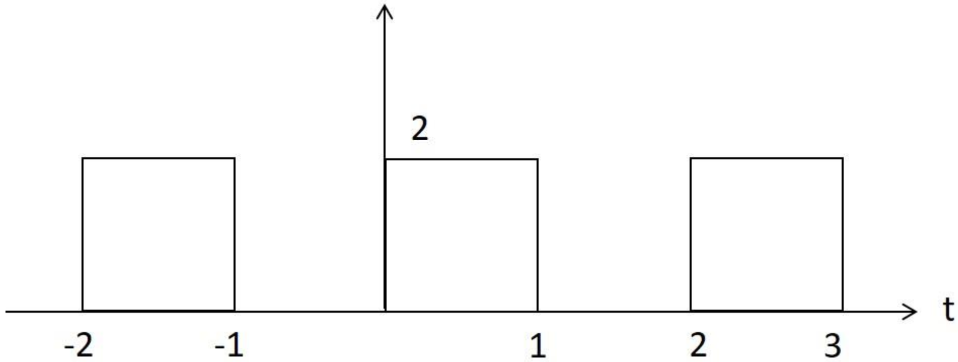
$$= \frac{1}{2}\sum_{K=-\infty}^{\infty} (a_{K-1} + a_{K+1}) e^{jK\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}$$

$$\Rightarrow b_k = \frac{1}{2}(a_{k-1} + a_{k+1})$$

۴. سیگنال $x(t)$ به صورت زیر است و دارای ضرایب تبدیل فوریه به صورت $a_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & k = 0 \\ \frac{\sin(\frac{k\pi}{2})}{k\pi} & ow \end{cases}$ است.



ضرایب سری فوریه سیگنال زیر را محاسبه کنید.



$$T = 2, x(t) \leftrightarrow a_k$$

$$\Rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}$$

$$y(t) = 2x\left(t-\frac{1}{2}\right), x\left(t-\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)\left(t-\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow y(t)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)\left(t-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2a_k e^{-jk\frac{\pi}{2}} e^{jk\pi t} \Rightarrow y(t) \leftrightarrow b_k, b_k = 2a_k e^{-jk\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow b_0 = 1, b_k = 2\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi} e^{-jk\frac{\pi}{2}} (k \neq 0)$$

۵. اطلاعات زیر را درباره سیگنال $x[n]$ داریم. سیگنال $x[n]$ را بیابید.

a. سیگنال $x[n]$ زوج وحقیقی است.

b. سیگنال $x[n]$ متناوب به دوره تناوب ۵ است.

c. $\sum_{<N>} |x[n]|^2 = 25$

d. $\sum_{<N>} (-1)^{\frac{2n}{5}} x[n] = 5$

e. ضریب جمله ۷- ام سری فوریه سیگنال $x[n]$ مثبت است.

زوج و حقیقی $x[n] \Rightarrow a_k = a_{-k}^* = a_{-k}$ فرد و حقیقی $x[n] \Rightarrow a_k = a_{-k}^* = -a_{-k}$ $\frac{1}{N}\sum_{<N>} \lvert x[n]\rvert^2 = \sum_{<N>} \lvert a_k\rvert^2$

$$a \Rightarrow a_k = a_{-k}^* = a_{-k}$$

$$b \Rightarrow N = 5 \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{5}$$

$$c \Rightarrow \frac{1}{N} \sum_{<N>} |x[n]|^2 = 5 \Rightarrow \sum_{<N>} |a_k|^2 = 5 \Rightarrow a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 5$$

$$d \xRightarrow{(-1)=e^{j\pi}} \sum_{<N>} (e^{j\pi})^{\frac{2n}{5}} x[n] \quad = 5 \Rightarrow a_1 = 1 \Rightarrow a_{-1} = 1 \Rightarrow a_4 = 1$$

$$d \xRightarrow{(-1)^{\frac{2n}{5}}=1} \sum_{<N>} x[n] \quad = 5 \Rightarrow a_0 = 1$$

$$a \Rightarrow a_3 = a_{-3} \Rightarrow a_3 = a_2$$

$$e \Rightarrow a_{-7} > 0 \Rightarrow a_3 > 0$$

$$\Rightarrow 1 + 1 + a_2^2 + a_3^2 + 1 = 5 \Rightarrow 2a_3^2 = 2 \Rightarrow a_3 = \pm 1 \overset{e}{\Rightarrow} a_3 = 1 \overset{a}{\Rightarrow} a_2 = 1$$

$$\Rightarrow x[n] = \sum\nolimits_{<N>} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$= 1 + e^{j\left(\frac{2\pi}{5}\right)n} + e^{2j\left(\frac{2\pi}{5}\right)n} + e^{3j\left(\frac{2\pi}{5}\right)n} + e^{4j\left(\frac{2\pi}{5}\right)n}$$