به نام خدا

دانشگاه علم و صنعت ایران

زمستان ۱۳۹۷

سیگنال ها و سیستم ها　　　　　پاسخ تمرین سری اول

---

۱. یک نمونه سیستم و یک نمونه سیگنال مثال بزنید.(۱۰ نمره)

هدف از این سوال آشنایی شما با مفهوم سیگنال و سیستم و تفاوت بین این دو مفهوم است.

به الگوی تغییرات یک متغیر بر حسب یک (یا چند) متغیر مستقل سیگنال می گویند. مثل صوت، تصویر، سیگنال های پزشکی، معدل نمرات دانشجویان در طول یک ترم و ...(۵ نمره مثال)

به مجموعه ای که دارای ورودی و خروجی که رابطه ای بین ورودی و خروجی آن برقرار است و در واقع ورودی و خروجی آن سیگنال هستند، سیستم گفته می شود. مثل: موتور خودرو، بلندگو و ...
(۵ نمره مثال)

۲. اعداد زیر را به فرم کارتزین $(x + jy)$ بنویسید.(۱۰ نمره؛ هرکدام ۳ نمره راه حل و فرمول ۲، نمره جواب آخر)

$$2e^{j\frac{\pi}{3}} \qquad\qquad e^{(j\frac{5\pi}{2}+1)}$$

$$\boxed{e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)}$$

$$2e\hat{}(j\,\pi/3) = 2\cos(\pi/3) + 2\,j\sin(\pi/3) = 1 + j\,\sqrt{}3$$

$$e^{(j\frac{5\pi}{2}+1)} = e \times e^{(j\frac{5\pi}{2})} = e\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + e\,j\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = e\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + e\,j\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= e \times j = 0 + j\,e$$

۳. اعداد زیر را به فرم قطبی ($Ae^{j\omega}$ که $A \in \mathbb{Q}$ و $-\pi < \omega \leq \pi$) ببرید و اندازه وفاز هر کدام را نیز حساب کنید.(۲۰ نمره ،هرقسمت ٤ نمره؛ محاسبه فاز ۲ نمره محاسبه اندازه ۲ نمره)

$1-j$	$(1-j)^2$	$j(1-j)$
$\dfrac{1+j}{1-j}$	$\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}j}{1+\sqrt{3}j}$	

$$\boxed{x + j\,y \rightarrow Ae^{j\omega} \quad A = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \omega = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$1-j \Rightarrow A = \sqrt{2} \quad \omega = \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow 1-j = \sqrt{2}e^{j\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$(1-j)^2$

روش اول:

$$1-j = \sqrt{2}e^{j\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \Rightarrow (1-j)^2 = \left(\sqrt{2}e^{j\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right)^2 = 2e^{j\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \Rightarrow$$
$$A = 2 \quad \omega = -\frac{\pi}{2}$$

روش دوم:

$$(1-j)^2 = (1-j)(1-j) = 1 - 2j - 1 = -2j \Rightarrow A = 2$$
$$\omega = \tan^{-1}\left(\frac{-2}{0}\right) = \tan^{-1}(-\infty) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow (1-j)^2 = 2e^{j\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$$
$$\Rightarrow A = 2 \quad \omega = -\frac{\pi}{2}$$

$j(1-j)$

روش اول:

$$1-j = \sqrt{2}e^{j\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$j \Rightarrow A = 1 \quad \omega = \tan^{-1}\left(\frac{1}{0}\right) = \tan^{-1}(\infty) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow j = e^{\frac{\pi}{2}}$$
$$j(1-j) = \left(e^{\frac{\pi}{2}}\right)\left(\sqrt{2}e^{j\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right) = \sqrt{2}e^{j\left(\frac{\pi}{4}\right)} \Rightarrow$$
$$A = \sqrt{2} \quad \omega = \frac{\pi}{4}$$

روش دوم:

$$j(1-j) = j+1 = 1+j \;\Rightarrow A = \sqrt{2} \;\; \omega = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \; j(1-j) = \sqrt{2}e^{j\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\frac{1+j}{1-j}$$

روش اول:

$$1+j = \sqrt{2}e^{j\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$1-j = \sqrt{2}e^{j\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\frac{1+j}{1-j} = \frac{\left(\sqrt{2}e^{j\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)}{\left(\sqrt{2}e^{j\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right)} = e^{j\left(\frac{\pi}{2}\right)} \;\Rightarrow\; A = 1 \;\; \omega = \frac{\pi}{2}$$

روش دوم:

$$\frac{1+j}{1-j} = \frac{1+j}{1-j} \times \frac{1+j}{1+j} = \frac{(1+j)(1+j)}{(1-j)(1+j)} = \frac{1+2j-1}{1-j+j+1} = \frac{2j}{2} = j$$

$$\Rightarrow A = 1 \;\; \omega = \tan^{-1}\left(\frac{1}{0}\right) = \tan^{-1}(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1+j}{1-j} = e^{j\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}j}{1+\sqrt{3}j}$$

$$\sqrt{2}+\sqrt{2}j \;\Rightarrow A = 2 \;\; \omega = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sqrt{2}+\sqrt{2}j$$

$$= 2e^{\frac{\pi}{4}}$$

$$1+\sqrt{3}j \;\Rightarrow A = 2 \;\; \omega = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow 1+\sqrt{3}j$$

$$= 2e^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}j}{1+\sqrt{3}j}=\frac{\left(2e^{\frac{\pi}{4}}\right)}{\left(2e^{\frac{\pi}{3}}\right)}=e^{j\left(-\frac{\pi}{12}\right)}\Rightarrow A=1\quad \omega=-\frac{\pi}{12}$$

٤. انرژی کل و توان متوسط کل را برای سیگنال های زیر محاسبه کنید.(۳۰ نمره)

$$P(t)\triangleq|x(t)|^2 \qquad P[n]\triangleq|x[n]|^2$$

$$E_\infty\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}P(t)dt \qquad E_\infty\triangleq\sum_{n=-\infty}^{\infty}P[n]$$

$$P_\infty\triangleq\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}P(t)dt \qquad P_\infty\triangleq\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}P[n]$$

a. $x(t)=e^{-jt}$ (۱۰ نمره؛ محاسبه هر قسمت ۵ نمره)

$$P(t)=\left|e^{-jt}\right|^2=1$$

$$E_\infty=\int_{-\infty}^{\infty}P(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}dt=\infty$$

$$P_\infty=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}P(t)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}dt=\lim_{T\to\infty}\frac{2T}{2T}=\lim_{T\to\infty}1=1$$

b. $x[n]=\sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)$ (۲۰ نمره؛ محاسبه هر قسمت ۱۰ نمره)

$$P[n]=\left|\sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)\right|^2=\left(\sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)\right)^2$$

$$E_\infty=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P[n]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)\right)^2=\infty$$

$$x[n]=\sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)\Rightarrow N=\frac{2k\pi}{\frac{\pi}{8}}\xRightarrow{k=1}N_0=16(\text{دوره تناوب})$$

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} P[n] = \lim_{N\to\frac{N_0}{2}} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N-1} P[n]$$

$$= \lim_{N\to 8} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N-1} \left(\sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)\right)^2$$

$$= \frac{1}{2\times 8} \sum_{n=-8}^{7} \left(\sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)\right)^2 = \frac{8}{2\times 8} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=-8}^{7} \left(\sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)\right)^2 = \sum_{n=-8}^{7} \left(\frac{1-\cos(2\times\frac{\pi}{8}n)}{2}\right)$$

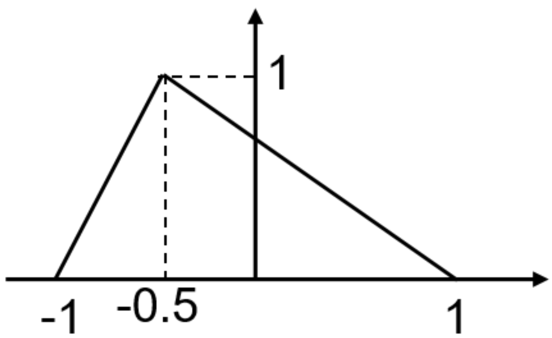
$$= \sum_{n=-8}^{7} \left(\frac{1}{2}\right) - \sum_{n=-8}^{7} \left(\frac{\cos(\frac{\pi}{4}n)}{2}\right) = 8$$

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) \Rightarrow N = \frac{2k\pi}{\frac{\pi}{4}} \xRightarrow{k=2} N_0 = 16(\text{دوره تناوب})$$

در محاسبه توان متوسط کل برای توابع متناوب می توان به جای این که حد را بر روی بی نهایت گرفت، بر روی دوره تناوب تابع گرفت.

حاصل انتگرال و مجموع بر روی دوره تناوب توابع مثلثاتی صفر است.

۵. سیگنال $x(-\frac{t}{3}-2)$ داده شده است. سیگنال $x(t)$ را رسم بفرمایید.(۱۵نمره؛۵ نمره شیفت زمانی،۵نمره معکوس، ۵ نمره مقیاس زمانی)

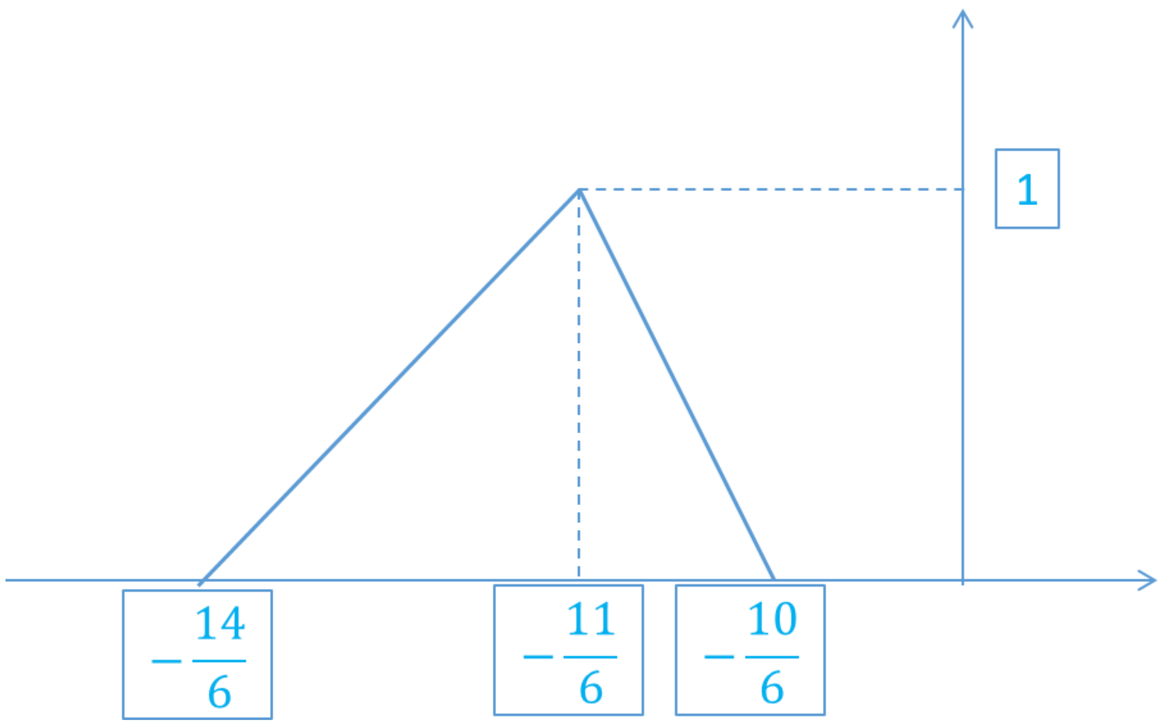


روش اول:

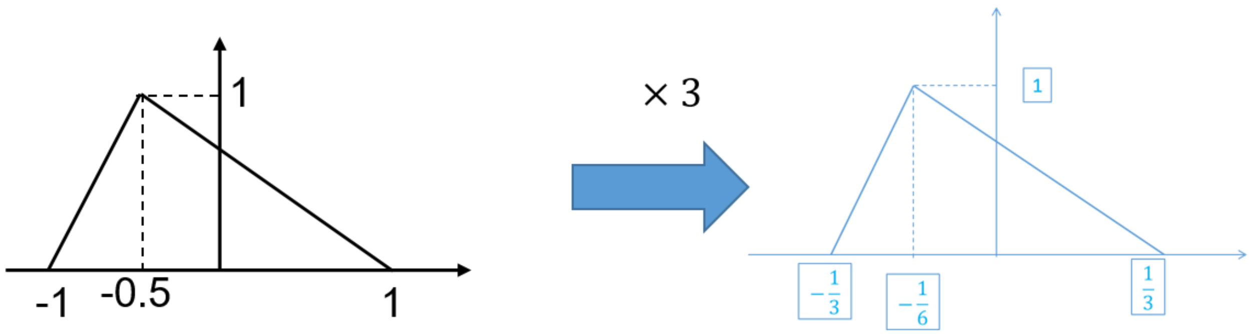
$$t = -1 \Rightarrow x\left(\frac{1}{3} - 2\right) = 0 \Rightarrow x\left(-\frac{5}{3}\right) = 0 \Rightarrow x\left(-\frac{10}{6}\right) = 0$$

$$t = -0.5 \Rightarrow x\left(\frac{1}{6} - 2\right) = 1 \Rightarrow x\left(-\frac{11}{6}\right) = 1$$

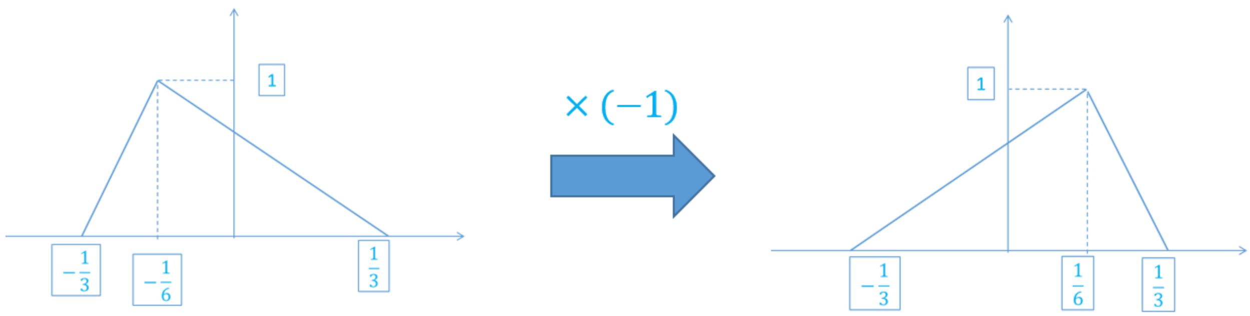
$$t = 1 \Rightarrow x\left(-\frac{1}{3} - 2\right) = 0 \Rightarrow x\left(-\frac{7}{3}\right) = 0 \Rightarrow x\left(-\frac{14}{6}\right) = 0$$



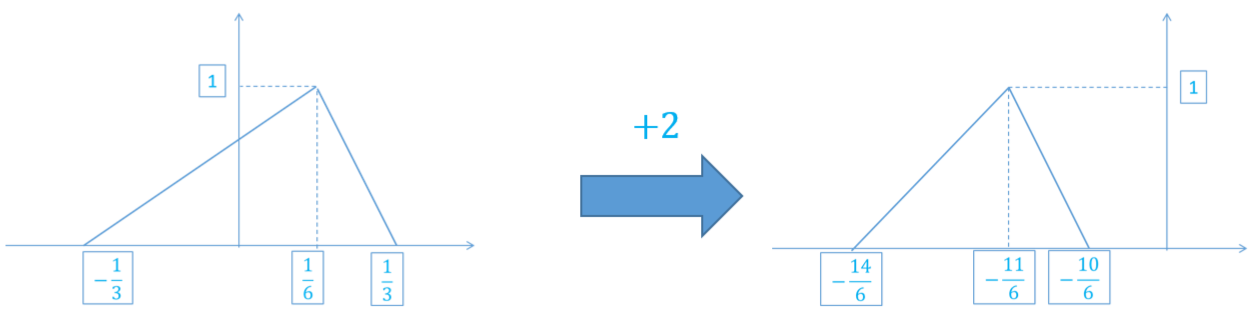
روش دوم:



$x(-\frac{t}{3}-2)$ $x(-t-2)$

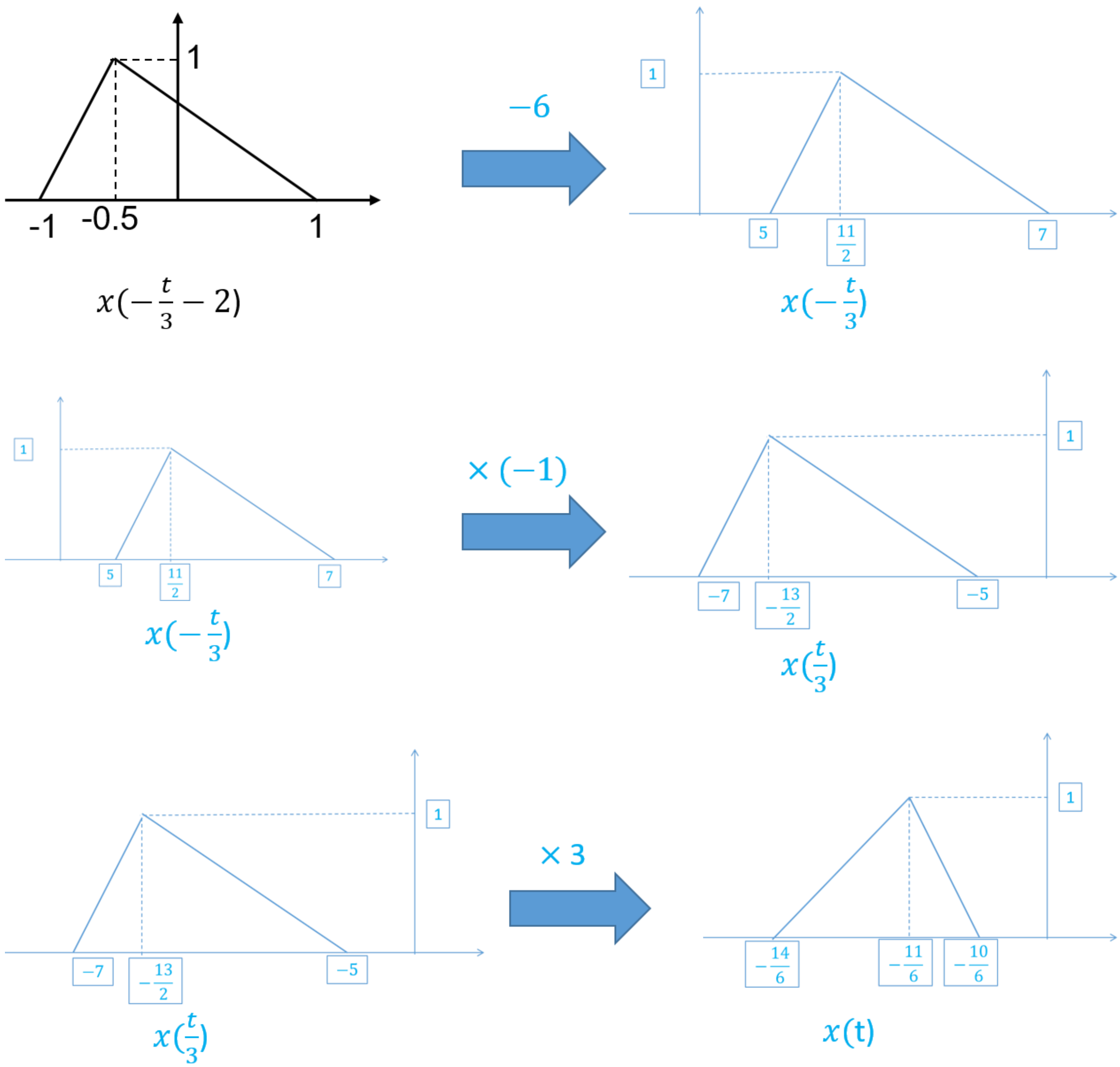


$x(-t-2)$ $x(t-2)$

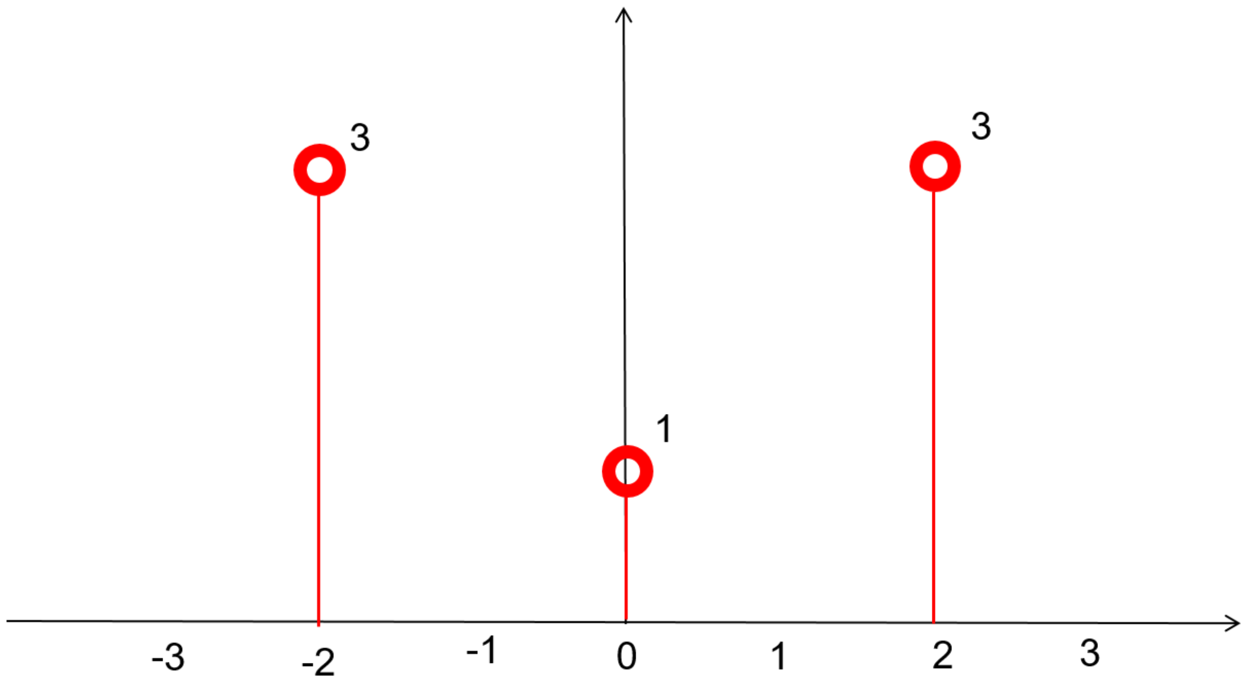


$x(t-2)$ $x(t)$

روش سوم:

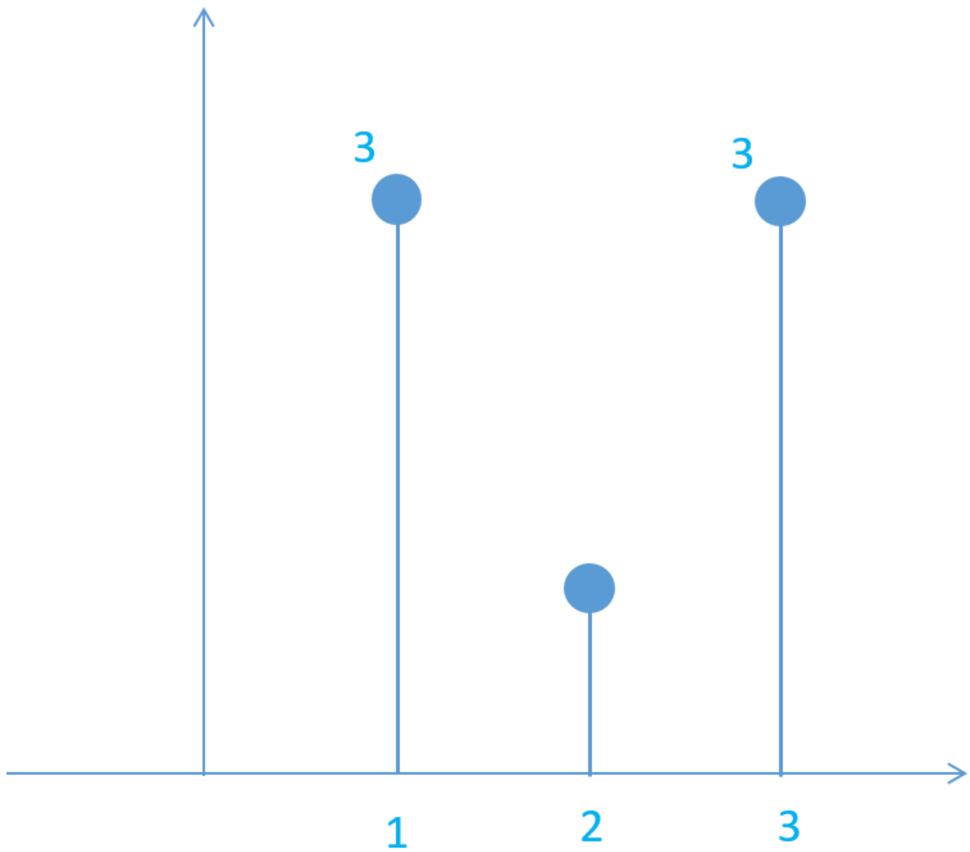

1
-1
-0.5
1
x(-t/3 - 2)
-6
1
5
11/2
7
x(-t/3)
1
5
11/2
7
x(-t/3)
× (-1)
1
-7
-13/2
-5
x(t/3)
1
-7
-13/2
-5
x(t/3)
× 3
1
-14/6
-11/6
-10/6
x(t)

۶. سیگنال $x[n]$ در زیر داده شده است. سیگنال $x[2n-4]$ را رسم بفرمایید.(۱۵ نمره؛۷,۵ نمره شیفت زمانی،۷,۵ نمره مقیاس زمانی)

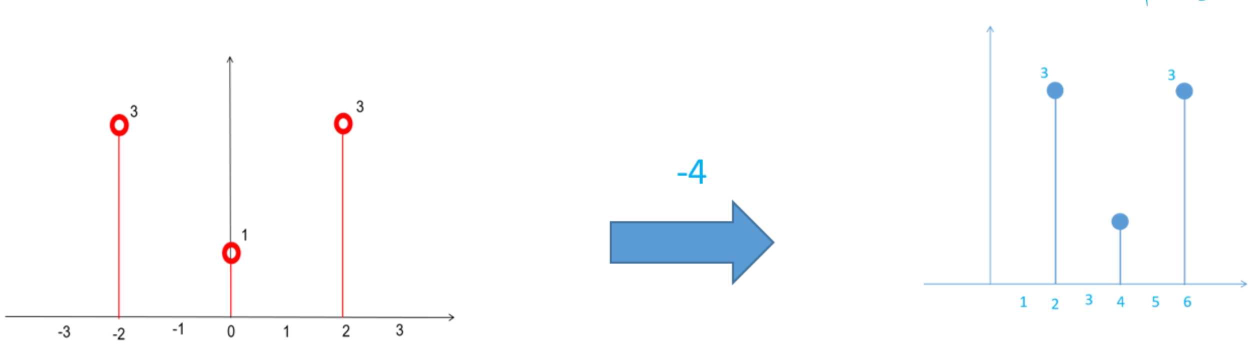


روش اول:

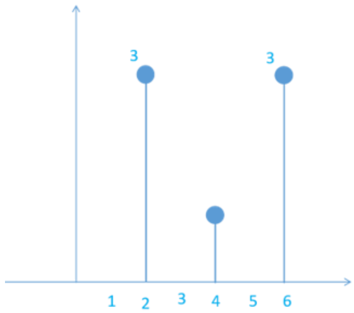
$$2n-4=-2 \Rightarrow 2n=2 \Rightarrow n=1 \Rightarrow n=1: x[2n-4]=3$$
$$2n-4=0 \Rightarrow 2n=4 \Rightarrow n=2 \Rightarrow n=2: x[2n-4]=1$$
$$2n-4=2 \Rightarrow 2n=6 \Rightarrow n=3 \Rightarrow n=3: x[2n-4]=3$$



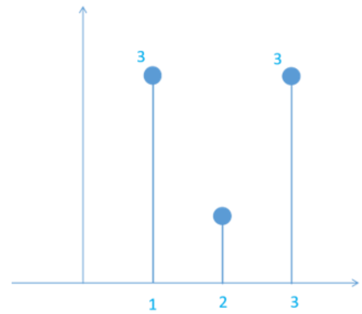
روش دوم:



$x[n]$ $x[n-4]$



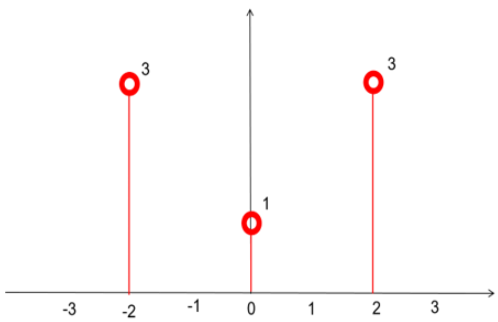
$\times 2$



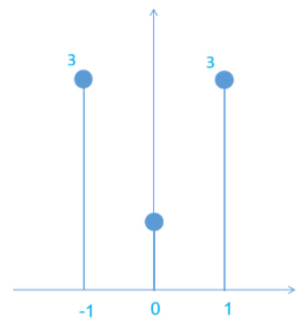
$x[n-4]$

$x[2n-4]$

روش سوم:

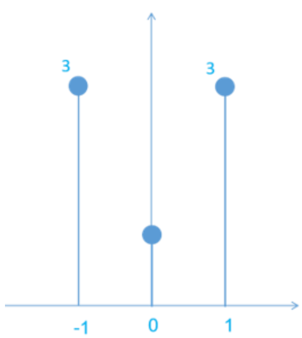


$\times 2$

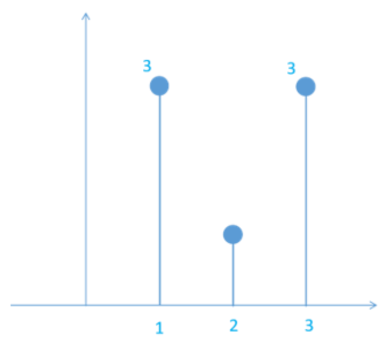


$x[n]$

$x[2n]$



-2



$x[2n]$

$x[2n-4]$