بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه علم و صنعت ایران

بهار ۱۳۹۸

پاسخ تمرین سری نهم — سیگنال‌ها و سیستم‌ها

---

۱. تبدیل فوریه زمان گسسته سیگنال های زیر رابیابید.

$$x_1[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_1(e^{j\omega}), x_2[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_2(e^{j\omega}) \Rightarrow x_1[n] \times x_2[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi} X_1(e^{j\omega}) * X_2(e^{j\omega})$$

a. $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{4} e^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}}$$

b. $x[n] = (a^n \sin(\omega_0 n)) u[n]$

$$x[n] = x_1[n] \times x_2[n]$$

$$x_1[n] = \sin(\omega_0 n) \Rightarrow x_1[n] = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}\right)$$

$$\Rightarrow \sin(\omega_0 n) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{j} [\delta(\omega - 2\pi l - \omega_0) - \delta(\omega - 2\pi l + \omega_0)]$$

$$x_2[n] = a^n u[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}$$

$$\Rightarrow x[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi} X_1(e^{j\omega}) * X_2(e^{j\omega})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{<2\pi>} X_1(e^{j\theta}) \times X_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{1 - a e^{-j(\omega - 2\pi l - \omega_0)}} - \frac{1}{1 - a e^{-j(\omega - 2\pi l + \omega_0)}}\right]$$

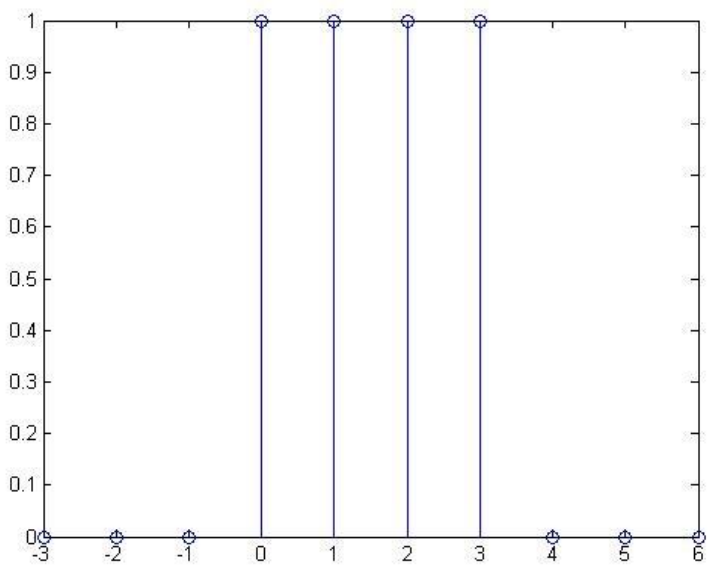
c. $x[n] = (\frac{1}{4})^n u[n+2]$

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n+2] = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} u[n+2] = 16 \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} u[n+2]$$

$$16\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{16}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$\Rightarrow x[n] = 16\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} u[n+2] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{16e^{2j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

.d



$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{3} e^{-j\omega n}$$
$$= \frac{1-e^{-4j\omega}}{1-e^{-j\omega}}$$

۲. یک سیستم با پاسخ ضربه $h[n] = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos(\frac{n\pi}{2})\right] u[n]$ داریم. پاسخ فرکانسی آن را محاسبه کنید و به کمک آن خروجی سیستم به ورودی $x[n] = \cos(\frac{n\pi}{2})$ را محاسبه کنید.

$$h[n] = h_1[n] \times h_2[n]$$
$$h_1[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \Rightarrow h_1[n] = \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{\pi}{2}n} + e^{-j\frac{\pi}{2}n}\right)$$
$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \pi\left[\delta\left(\omega - 2\pi l - \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\omega - 2\pi l + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$h_2[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$\Rightarrow h[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi} H_1\left(e^{j\omega}\right) * H_2\left(e^{j\omega}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{<2\pi>} H_1\left(e^{j\theta}\right) \times H_2\left(e^{j(\omega-\theta)}\right) d\theta$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\left(\omega - 2\pi l - \frac{\pi}{2}\right)}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\left(\omega - 2\pi l + \frac{\pi}{2}\right)}} \right]$$

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right) = \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{\pi}{2}n} + e^{-j\frac{\pi}{2}n}\right)$$

$$H\left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{2j\pi l}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\pi} e^{2j\pi l}} \right]$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{2j\pi l}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{2} e^{2j\pi l}} \right]$$

$$H\left(e^{-j\frac{\pi}{2}}\right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{j\pi} e^{2j\pi l}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{2j\pi l}} \right]$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 + \frac{1}{2} e^{2j\pi l}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{2j\pi l}} \right]$$

$$\Rightarrow y[n] = \frac{1}{2}\left(H\left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right) e^{j\frac{\pi}{2}n} + H\left(e^{-j\frac{\pi}{2}}\right) e^{-j\frac{\pi}{2}n}\right)$$

البته اگر از متناوب بودن تبدیل فوریه صرف نظر کنیم و برای یک دوره تناوب محاسبه کنیم خواهیم داشت.

$$y[n] = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} e^{j\frac{\pi}{2}n} + \frac{4}{3} e^{-j\frac{\pi}{2}n}\right) = \frac{4}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2} n\right)$$

۳. فرض کنید سیگنال $x[n]$ یک سیگنال محدود به طول N به صورت مقابل است:

$$x[n] = 0 \; for \; n < 0 \, , n > N - 1$$

تبدیل فوریه $x[n]$ به صورت $X\left(e^{j\omega}\right)$ است. سیگنال $y[n]$ را به صورت تکرار متناوب سیگنال $x[n]$ تعریف می کنیم:

$$y[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n + rN]$$

a. عبارتی بر حسب $x[n]$ برای محاسبه ضرایب سری فوریه سیگنال $y[n]$، a_k بنویسید.

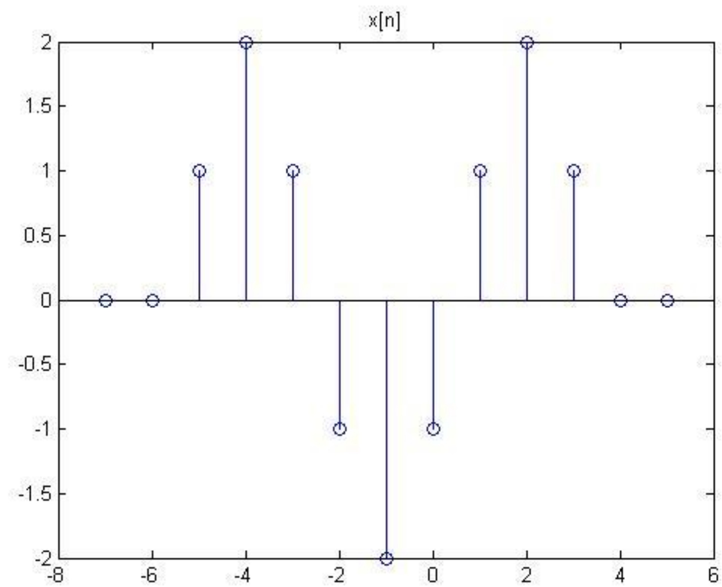
$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} y[n]e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

b. رابطه ای بین a_k و $X(e^{j\omega})$ بیابید.

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{N}X\left(e^{j\left(\frac{2K\pi}{N}\right)}\right) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} = a_k$$

۴. فرض کنید $X(e^{j\omega})$ تبدیل فوریه سیگنال $x[n]$ داده شده باشد. بدون محاسبه صریح $X(e^{j\omega})$، مقادیر زیر را حساب کنید.



$$x[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(e^{j\omega}) \Rightarrow x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

حقیقی $x[n] \Rightarrow$ زوج $Re\{X(e^{j\omega})\}$, فرد $Im\{X(e^{j\omega})\}$

حقیقی $x[n] \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}[Re\{X(e^{j\omega})\}] = Even\{x[n]\}$

حقیقی $x[n] \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}[Im\{X(e^{j\omega})\}] = Odd\{x[n]\}$

a. $X(e^{j0})$

$$X(e^{j0}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(0)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = 4$$

b. $X(e^{j\pi})$

$$X(e^{j0}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(\pi)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x[n] = 0$$

c. $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, d\omega$

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega \Rightarrow 2\pi x[0]$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega}\right)d\omega \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega}\right)d\omega=-2\pi$$

d. $\int_{-\pi}^{\pi}|X\left(e^{j\omega}\right)|^2\,d\omega$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>}\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2d\omega \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2d\omega$$

$$=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2=36\pi$$

e. $\int_{-\pi}^{\pi}|\frac{d}{d\omega}X\left(e^{j\omega}\right)|^2\,d\omega$

$$(-jn)x[n]\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}\frac{d}{d\omega}X\left(e^{jk\omega}\right)\Rightarrow\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{d}{d\omega}X\left(e^{jk\omega}\right)\right|^2d\omega$$

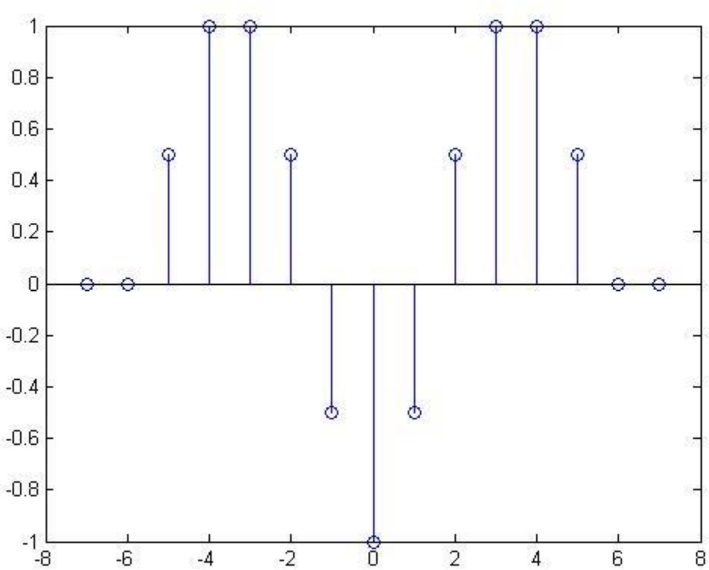
$$=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|(-jn)x[n]|^2=264\pi$$

f. $\angle X\left(e^{j\omega}\right)$

فرد $x[n-1]\Rightarrow$ حقیقی $e^{-j\omega}X\left(e^{j\omega}\right)\Rightarrow\angle X\left(e^{j\omega}\right)=j\omega$

g. $\mathcal{F}^{-1}\left[Re\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}\right]$

حقیقی $x[n]\Rightarrow\mathcal{F}^{-1}\left[Re\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}\right]=Even\{x[n]\}=\frac{1}{2}\{x[n]+x[-n]\}$



۵. سیستمی LTI در نظر بگیرید که خروجی آن به سیگنال ورودی $x_1[n] = (\frac{1}{3})^n u[n]$ برابر سیگنال $y_1[n] = (n+4)(\frac{1}{3})^n u[n]$ است. پاسخ این سیستم به چه ورودی ای، $y_2[n] = (\frac{1}{3})^n u[n]$ است؟

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

$$\Rightarrow X_1(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} e^{-j\omega}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{3} e^{-j\omega}}$$

$$y_1[n] = (n+4)\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] = (n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

$$\Rightarrow Y_1(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{y_1[n]\} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3} e^{-j\omega}\right)^2} + \frac{3}{1 - \frac{1}{3} e^{-j\omega}}$$

$$= \frac{1 + 3 - e^{-j\omega}}{\left(1 - \frac{1}{3} e^{-j\omega}\right)^2} = \frac{4\left(1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}\right)}{\left(1 - \frac{1}{3} e^{-j\omega}\right)^2}$$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{Y_1(e^{j\omega})}{X_1(e^{j\omega})} = \frac{4\left(1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}\right)}{\left(1 - \frac{1}{3} e^{-j\omega}\right)^2} \times \left(1 - \frac{1}{3} e^{-j\omega}\right)$$

$$= \frac{4\left(1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}\right)}{\left(1 - \frac{1}{3} e^{-j\omega}\right)}$$

$$y_2[n] = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

$$\Rightarrow Y_2(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{y_2[n]\} = \frac{4}{1 - \frac{1}{3} e^{-j\omega}}$$

$$\Rightarrow X_2(e^{j\omega}) = \frac{Y_2(e^{j\omega})}{H(e^{j\omega})} = \frac{4}{1 - \frac{1}{3} e^{-j\omega}} \times \frac{\left(1 - \frac{1}{3} e^{-j\omega}\right)}{4\left(1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}\right)}$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}\right)}$$

$$\Rightarrow x_2[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

۶. فرض کنید $h_1[n]$ و $h_2[n]$ پاسخ ضربه دو سیستم LTI و علی و $H_1(e^{j\omega})$ و $H_2(e^{j\omega})$ به ترتیب پاسخ فرکانسی آن ها است. در این شرایط، آیا رابطه زیر در حالت کلی برقرار است(با ذکر دلیل)؟

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_1(e^{j\omega})\,d\omega\right] \times \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_2(e^{j\omega})\,d\omega\right]$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega})\,d\omega$$

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \Rightarrow h[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})d\omega$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_1(e^{j\omega})\,d\omega\right] \times \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_2(e^{j\omega})\,d\omega\right] = h_1[0] \times h_2[0]$$

$$h_1[n] * h_2[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} H_1(e^{j\omega}) \times H_2(e^{j\omega})$$

$$\Rightarrow h_1[n] * h_2[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(H_1(e^{j\omega}) \times H_2(e^{j\omega})\right) e^{j\omega n}d\omega$$

$$\Rightarrow \left[h_1[n] * h_2[n]\right]_{n\,=\,0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_1(e^{j\omega}) \times H_2(e^{j\omega})d\omega$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_1(e^{j\omega}) \times H_2(e^{j\omega})d\omega = \left[h_1[n] * h_2[n]\right]_{n\,=\,0}$$
$$= \left[\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} h_1[m] \times h_2[n-m]\right)\right]_{n\,=\,0}$$
$$= \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} h_1[m] \times h_2[-m]\right)$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{-1} h_1[m] \times h_2[-m] + h_1[0] \times h_2[0]$$
$$+ \sum_{m=0}^{\infty} h_1[m] \times h_2[-m] = h_1[0] \times h_2[0]$$

چون دو سیستم علی بودند، تساوی انتهایی حاصل می شود.

چون دو طرف تساوی برابر هستند پس رابطه داده شده در صورت سوال برقرار است.