Métodos de Apoio à Decisão

Otimização Linear (Introdução)

João Pedro Pedroso

2021/2022

Última aula: noções estudadas

- Formulação em programação matemática
- Função e desigualdade lineares
- Problema de otimização linear
- Hipóteses da otimização linear
- Utilização do software glpk/ampl
- Resolução gráfica de problemas com duas variáveis.
- Noção de solução admissível e de solução não admissível.
- Linhas de isolucro/isocusto.
- Restrições ativas e não ativas.

Formulação em Programação Matemática

Formulação em Programação Matemática

Noções essenciais

- Variáveis de decisão: correspondem às quantidades que se podem controlar para melhorar o objetivo. Devem descrever completamente o conjunto de decisões a tomar.
- Restrições: descrevem limitações que são impostas nos valores das variáveis de decisão.
- Função objetivo: mede valor utilizado para classificar soluções alternativas
  - pretende-se maximizar ou minimizar esse valor
  - exemplos: minimizar custo, maximizar lucro

Formulação em Programação Matemática

Em programação linear:

1. Determinar quais são as variáveis de decisão
2. Definir as restrições como funções lineares das variáveis de decisão
3. Escrever a função objetivo como função linear das variáveis de decisão

Problema linear

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar /minimizar} \quad & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & \\
\text{sujeito a} \quad : \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & \leq = \geq b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & \leq = \geq b_2 \\
& \ldots & \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & \leq = \geq b_m \\
& x_i \geq 0 \text{ ou } x_i \leq 0 \text{ ou } x_i \text{ livre} & i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

Resolução gráfica de problemas de minimização

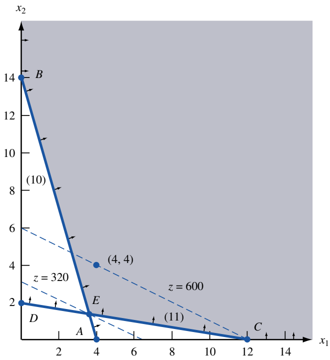
- Diferença relativamente a problemas de maximização:
  - linhas de **isocusto** são deslocadas paralelamente, no sentido de diminuir o custo, até intersectarem o último ponto da região admissível
  - esse é o ponto ótimo

Exemplo

$$
\begin{aligned}
\min z = \quad & 50x_1 + 100x_2 & \\
\text{sujeito a} \quad & 7x_1 + 2x_2 & \geq 28 \\
& 2x_1 + 12x_2 & \geq 24 \\
& x_1, x_2 & \geq 0
\end{aligned}
$$

Exemplo

$$\begin{aligned} \min z = \quad & 50x_1 + 100x_2 & \\ \text{sujeito a} \quad & 7x_1 + 2x_2 & \geq 28 \\ & 2x_1 + 12x_2 & \geq 24 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{aligned}$$



(veremos a seguir que o ponto ótimo pode não ser único)

Casos especiais em Programação Linear

Casos especiais em Programação Linear

Os problemas de programação linear podem ter soluções de vários tipos.

- solução única
- número infinito de soluções
- problemas impossíveis: não têm soluções admissíveis
- problemas ilimitados: objetivo pode assumir valores arbitrariamente
  - altos $\rightarrow$ maximização
  - baixos $\rightarrow$ minimização

Exemplo

- *Uma empresa produz automóveis e camiões. Cada veículo deverá ser processado numa linha de pintura e numa linha de montagem. A capacidade da linha de pintura é de 40 camiões por dia, ou de 60 carros por dia. A linha de montagem tem as capacidades de 50 camiões/dia, ou de 50 carros/dia. Cada camião contribui com 3 contos para o lucro, e cada carro com 2 contos.*

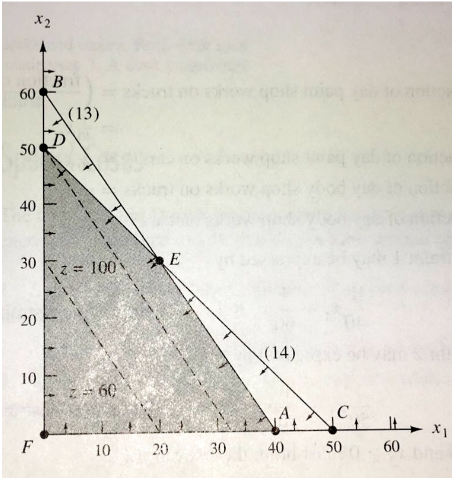
Exemplo

- *Uma empresa produz automóveis e camiões. Cada veículo deverá ser processado numa linha de pintura e numa linha de montagem. A capacidade da linha de pintura é de 40 camiões por dia, ou de 60 carros por dia. A linha de montagem tem as capacidades de 50 camiões/dia, ou de 50 carros/dia. Cada camião contribui com 3 contos para o lucro, e cada carro com 2 contos.*
- Formulação:

$$\begin{array}{rrl} \max z = & 3x_1 + 2x_2 & \\ \text{sujeito a} & x_1/40 + x_2/60 & \leq 1 \\ & x_1/50 + x_2/50 & \leq 1 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Soluções ótimas múltiplas

- Linha de isolucro: $3x_1 + 2x_2 =$ constante; ao mover-se paralelamente no sentido de aumentar os lucros, a última parte da região admissível intersectada é um segmento de reta.
- Região admissível: F-A-E-D
- Conjunto de pontos ótimos: segmento de reta AE.
- Todos esses pontos têm a função objetivo com o mesmo valor.



Modelo em AMPL/Gnu Mathprog

```
var x1 >=0;
var x2 >=0;

maximize  z : 300*x1 + 200*x2 ;

R1:     x1/40 + x2/60 <= 1;
R2:     x1/50 + x2/50 <= 1;
```

Resolvendo com

`glpsol --math lp-feasible.mod`

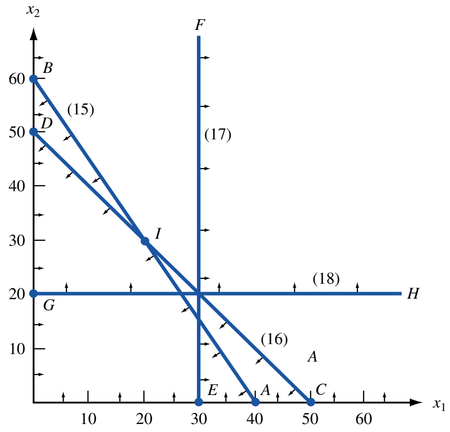
```
GLPSOL--GLPK LP/MIP Solver 5.0
[...]
OPTIMAL LP SOLUTION FOUND
Time used:   0.0 secs
Memory used: 0.1 Mb (102200 bytes)
```

Solução

```
Problem:    lp
Rows:       3
Columns:    2
Non-zeros:  6
Status:     OPTIMAL
Objective:  z = 12000 (MAXimum)
   No.   Row name   St   Activity     Lower bound   Upper bound    Marginal
------ ------------ -- ------------- ------------- ------------- -------------
     1 z            B          12000
     2 R1           NU             1                           1         12000
     3 R2           B            0.8                           1
   No. Column name  St   Activity     Lower bound   Upper bound    Marginal
------ ------------ -- ------------- ------------- ------------- -------------
     1 x1           B             40             0
     2 x2           NL             0             0                       < eps
Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions:
KKT.PE: max.abs.err = 0.00e+00 on row 0
        max.rel.err = 0.00e+00 on row 0
        High quality
KKT.PB: max.abs.err = 0.00e+00 on row 0
        max.rel.err = 0.00e+00 on row 0
        High quality
KKT.DE: max.abs.err = 5.68e-14 on column 1
        max.rel.err = 9.46e-17 on column 1
        High quality
```

Problemas impossíveis

- *Suponha que a empresa deverá produzir pelo menos 30 camiões e 20 carros. Resolva de novo o problema.*
- Agora a região admissível não contém nenhum ponto $\rightarrow$ problema é impossível.



Modelo em AMPL/Gnu Mathprog

```
var x1 >=0;
var x2 >=0;

maximize  z : 300*x1 + 200*x2 ;

R1:     x1/40 + x2/60 <= 1;
R2:     x1/50 + x2/50 <= 1;

R3: x1 >= 30;
R4: x2 >= 20;
```

Solving with `glpsol --math lp-infeasible.mod`

```
GLPSOL--GLPK LP/MIP Solver 5.0
[...]
Preprocessing...
PROBLEM HAS NO PRIMAL FEASIBLE SOLUTION
If you need actual output for non-optimal solution, use --nopresol
Time used:   0.0 secs
Memory used: 0.1 Mb (90642 bytes)
```

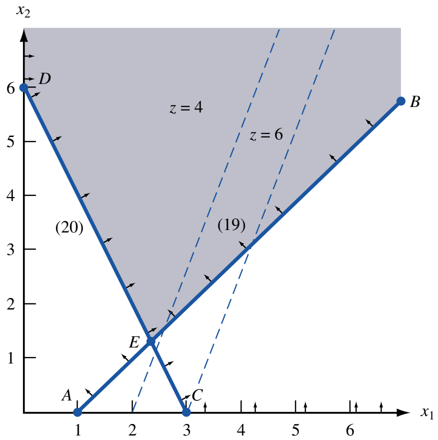
Solução

```
Problem:    lp
Rows:       5
Columns:    2
Non-zeros:  8
Status:     UNDEFINED
Objective:  z = 0 (MAXimum)
   No.   Row name   St   Activity     Lower bound   Upper bound    Marginal
------ ------------ -- ------------- ------------- ------------- -------------
     1 z            B              0
     2 R1           B              0                           1
     3 R2           B              0                           1
     4 R3           B              0            30
     5 R4           B              0            20
   No. Column name  St   Activity     Lower bound   Upper bound    Marginal
------ ------------ -- ------------- ------------- ------------- -------------
     1 x1           NL             0             0                       < eps
     2 x2           NL             0             0                       < eps
Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions:
KKT.PE: max.abs.err = 0.00e+00 on row 0
        max.rel.err = 0.00e+00 on row 0
        High quality
KKT.PB: max.abs.err = 3.00e+01 on row 4
        max.rel.err = 9.68e-01 on row 4
        PRIMAL SOLUTION IS INFEASIBLE
KKT.DE: max.abs.err = 3.00e+02 on column 1
```

Problemas ilimitados

Resolva graficamente:

$$\begin{aligned} \max z = \quad & 2x_1 - x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Modelo em AMPL/Gnu Mathprog

```
var x1 >=0;
var x2 >=0;

maximize  z : 2*x1 - x2 ;

R1:      x1 - x2 <= 1;
R2:      2*x1 + x2 >= 6;
```

Solving with `glpsol --math lp-unbounded.mod`

```
GLPSOL--GLPK LP/MIP Solver 5.0
[...]
LP HAS UNBOUNDED PRIMAL SOLUTION
glp_simplex: unable to recover undefined or non-optimal solution
If you need actual output for non-optimal solution, use --nopresol
Time used:   0.0 secs
Memory used: 0.1 Mb (102201 bytes)
```

Solução

```
Problem:    lp
Rows:       3
Columns:    2
Non-zeros:  6
Status:     UNDEFINED
Objective:  z = 0 (MAXimum)
   No.   Row name   St   Activity     Lower bound   Upper bound    Marginal
------ ------------ -- ------------- ------------- ------------- -------------
     1 z            B              0
     2 R1           B              0                           1
     3 R2           B              0             6
   No. Column name  St   Activity     Lower bound   Upper bound    Marginal
------ ------------ -- ------------- ------------- ------------- -------------
     1 x1           NL             0             0                       < eps
     2 x2           NL             0             0                       < eps
Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions:
KKT.PE: max.abs.err = 0.00e+00 on row 0
        max.rel.err = 0.00e+00 on row 0
        High quality
KKT.PB: max.abs.err = 6.00e+00 on row 3
        max.rel.err = 8.57e-01 on row 3
        PRIMAL SOLUTION IS INFEASIBLE
KKT.DE: max.abs.err = 2.00e+00 on column 1
        max.rel.err = 6.67e-01 on column 1
        DUAL SOLUTION IS WRONG
```

Formulação: mais exemplos

Problema de planeamento financeiro

Uma pequena empresa de electrónica produz discos USB e leitores blu-ray, com os seguintes custos e preços de venda unitários (em euros):

	Discos	Leitores
preço de venda	100	90
custo de mão de obra	50	35
custo de matéria prima	30	40

No dia 1 de Dezembro de 1999, a empresa tem disponível matéria prima para produzir 100 discos USB e 100 leitores blu-ray. Na mesma data, a folha de balanço da empresa é a seguinte:

	ativo	passivo
dinheiro em caixa	10000	
débitos de clientes	3000	
valor do inventário	7000	
empréstimo bancário		10000

O rácio ativo/passivo é de $20000/10000 = 2$.

A companhia pretende determinar quantos discos USB e leitores blu-ray deverão ser produzidos no mês de Dezembro. A procura é suficientemente grande para garantir que toda a produção será vendida. As vendas são efetuadas a crédito, e a mercadoria produzida em Dezembro só poderá ser recebida em 1 de Fevereiro. Em Dezembro, prevê-se receber 2000 euros dos débitos de clientes, e terá de se pagar 1000 euros do empréstimo bancário, e a renda mensal de 1000 euros. No dia 1 de Janeiro de 2000, chegará uma encomenda de matéria prima, no valor de 2000 euros, que deverá ser paga a 1 de Fevereiro.
A administração decidiu que o valor em caixa a 1 de Janeiro deverá ser de pelo menos 4000 euros, e o banco com que a empresa trabalha exige que o rácio ativo/passivo nessa altura seja de pelo menos 2.
Para maximizar a contribuição para o lucro da produção de Dezembro (receitas a receber – custos de produção variáveis), qual deverá ser a produção nesse mês?

Problema de composição de misturas *(blending)*

Uma companhia petrolífera fabrica três tipos de gasolina: G1, G2 e G3. Cada tipo de gasolina é produzido utilizando três tipos de petróleo bruto: C1, C2 e C3. Os preços de venda em euros por barril de gasolina, e os preços de compra em euros por barril de petróleo bruto são indicados a seguir.

Preços de venda	
G1	70
G2	60
G3	50

Preços de compra	
C1	45
C2	35
C3	25

A companhia tem disponíveis até 5000 barris de cada tipo de petróleo bruto diariamente. Os três tipos de gasolina diferem no seu conteúdo em enxofre e no índice de octanas. A mistura de petróleos a utilizar para produzir cada tipo de gasolina deverá ter o índice de octanas mínimo e o teor de enxofre máximo indicados a seguir:

	Índice de octanas (min)	Conteúdo em enxofre (max)
Mistura para produzir G1	10	1.0%
Mistura para produzir G2	8	2.0%
Mistura para produzir G3	6	1.0%

Os índices de octanas e conteúdos em enxofre dos petróleos brutos são:

	Índice de octanas	Conteúdo em enxofre
C1	12	0.5%
C2	6	2.0%
C3	8	3.0%

Custa 4 euros transformar um barril de petróleo bruto em gasolina, e a empresa pode produzir até 14000 barris de gasolina por dia.
As encomendas dos clientes deverão ser satisfeitas exatamente (não há stocks), e são de 3000, 2000 e 1000 barris por dia, para as gasolinas G1, G2, e G3, respetivamente.
A empresa pode também investir em publicidade, para estimular as encomendas. Cada euro despendido diariamente na publicidade de um tipo particular de gasolina aumenta a procura desse tipo de gasolina em 10 barris/dia. (Por exemplo, se se investir 20 euros por dia em publicidade para a gasolina G2, as suas encomendas aumentarão em 200 barris/dia.)
Formule o problema linear que permite à companhia maximizar os lucros diários (receitas – custos).

Problema de localização

Uma empresa de assistência e manutenção de sistemas informáticos pretende determinar onde colocar os seus escritórios. As posições no plano dos seus quatro clientes principais, e o número de visitas anuais previstas, são os seguintes:

Cliente	x	y	visitas
1	5	10	200
2	10	5	150
3	0	12	200
4	12	0	300

A empresa pretende determinar a localização que minimiza a distância total percorrida. Formule este problema em programação matemática.

Nota: este problema é linear?

Noções estudadas

- Noção formal de problema de otimização linear.
- Casos especiais em programação linear.
- Formulação em programação matemática: mais alguns exemplos.

Próxima aula

- Método do simplex: noções preliminares.