Métodos de Apoio à Decisão

Introdução

João Pedro Pedroso

2021/2022

Informação geral

- Na página da disciplina no SIGARRA

Exemplo de um problema de otimização:

- Dado um conjunto de números, dividi-los em dois subconjuntos de tal forma que a diferença entre as somas seja o menor possível
- Exemplo: 7, 10, 13, 17, 20, 22
- A soma destes números é 89
- Pode ser dividido em $\{7, 10, 13, 17\}$ (soma=47) e $\{20, 22\}$ (soma é 42)
- Podemos fazer melhor?
- Para este problema, a maior parte das instâncias pode ser exatamente dividida (a soma das diferenças é 0 ou 1)
- Sem métodos de otimização formais, é muito difícil conseguir obter a solução.

História da IO

- Origem: fim do década de 30 no Reino Unido, durante a segunda guerra mundial
- Primeiras atividades:
  - desenvolvimento do radar
  - organização da manutenção e inspeção de aviões
  - comparação de diversos tipos de aviões
  - dimensionamento da frota naval
  - deteção de submarinos
  - melhoramento da probabilidade de morte em ataques a *U-boats*. Variáveis:
    - profundidade (tempo) para a explosão
    - raio de ação
    - precisão de tiro
    - orientação da arma em relação ao barco
    - espaçamento entre as cargas
    - resultado: melhoramento da eficácia do ataque em 40%

História da IO (cont.)

- no pós guerra:
  operações militares $\rightarrow$ operações de caráter económico
- gestão de recursos materiais (ex: companhias petrolíferas)
- gestão de recursos humanos (ex: gestão de projetos)
- hoje em dia: conjunto de técnicas
  - programação matemática
  - simulação
  - ...

Fases de um estudo de investigação operacional

1. Definir o problema. Recolher os dados necessários.
2. Formular um modelo matemático que represente o problema. Definir:
   - variáveis de decisão
   - restrições
   - função objetivo
   - parâmetros do modelo
   - *normalmente em ciclo com* ***análise de sensibilidade*** *e* ***teste***
3. Desenvolver um procedimento para obter soluções a partir do modelo (normalmente utilizando computadores).
4. Testar o modelo. Se necessário, aperfeiçoá-lo.
5. Preparar a aplicação do modelo.
6. Implementar.

Exemplo introdutório

Uma companhia mineira possui duas minas, X e Y, nas quais se produz minério de 3 qualidades: alta, média, e baixa. A companhia tem contratos de venda para cada uma dessas qualidades, nas seguintes quantidades:

- alta qualidade — 12 ton/semana
- qualidade média — 8 ton/semana
- qualidade baixa — 24 ton/semana

As características de operação de cada uma das minas são as seguintes:

Mina	custo/dia (milhares de euro)	produção diária (ton) alta	média	baixa
X	180	6	3	4
Y	160	1	1	6

Em cada dia da semana, a companhia pode enviar equipas de mineiros para uma mina ou para a outra. O problema é o de saber quantos dias por semana se deve trabalhar em cada mina.

Resolução

- A firma pode utilizar, por exemplo, 1 dia/semana na mina X e 4 dias em Y. Mas será esta solução ótima?
- Forma de resolução sistemática:
  - Definir variáveis. Seja x o número de dias por semana que se opera na mina X e y o mesmo para a mina Y.
    (Ambas as variáveis são maiores do que, ou iguais a zero.)
  - Definir restrições.
    - Para assegurar as encomendas dos clientes, as produções têm que ser:
      $6x + 1y \geq 12$ (alta qualidade)
      $3x + 1y \geq 8$ (média)
      $4x + 6y \geq 24$ (baixa)
    - Trabalha-se 5 dias/semana: $x + y \leq 5$
    - Restrições de sinal: $x, y \geq 0$
  - Definir o objetivo: pretende-se minimizar o custo:

$$\text{minimizar } z = 180x + 160y$$

  - Aos valores constantes que aparecem nestes modelos (por exemplo, 180 e 160 no objetivo) dá-se o nome de *parâmetros* do modelo.

(Neste caso, o problema é linear?)

Um outro exemplo:

Uma firma de exportação de sementes pretende satisfazer a sua carteira de encomendas. Em alguns casos, é conveniente enviar as encomendas por correio. Os CTT exigem que as caixas utilizadas tenham formato de um paralelepípedo retângulo, obedecendo às seguintes regras:

- O comprimento não pode exceder 42~cm, e a soma do comprimento com a largura não pode exceder 72~cm.
- A altura tem de ser inferior ou igual à largura, e esta não pode exceder o comprimento.

Qual será o maior volume de sementes que pode ser enviado numa única encomenda postal que obedeça a estes regulamentos?
(Neste caso, o problema é linear?)

Formulação em Programação Matemática

Definir:

- variáveis
- restrições
- objetivo

Mais um exemplo

- A companhia DEG fabrica dois tipos de computadores: portáteis e desktops. Cada computador deverá passar por uma linha de montagem e por um controlo de qualidade.
- Se a linha de montagem fosse completamente dedicada aos portáteis, poder-se-ia montar até 9 computadores por dia, enquanto que com desktops este limite seria de 8 por dia.
- Se o controlo de qualidade fosse completamente dedicado aos portáteis, poder-se-ia verificar 10 unidades por dia; com desktops este limite seria de 15 computadores.
- Por decisão do departamento de marketing, deve-se produzir menos portáteis do que desktops.
- Cada portátil contribui para o lucro em 250 euros, e cada desktop em 150 euros.

Formulação em programação matemática

Resolução de problemas lineares:

- Utilização de GNU MathProg e do software `glpsol`
- Em alternativa, software comercial `ampl`

Uma fábrica de aços tem que decidir como utilizar o tempo da semana seguinte num moinho. O moinho utiliza restos de aço, podendo produzir fitas ou bobinas. As fitas podem ser produzidas à razão de 200 toneladas por hora, e as bobinas à razão de 140 toneladas por hora. Os lucros obtidos são de 25 contos por tonelada com as fitas e de 30 contos por tonelada com as bobinas. Atendendo à carteira de encomendas, a produção máxima na semana seguinte é de 6000 toneladas para fitas e de 4000 toneladas para bobinas.
Se nessa semana se dispuser de 40 horas de produção, quantas toneladas de cada um dos produtos deverão ser produzidas de forma a maximizar o lucro?

Formulação

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar } z = \quad & 25x_F + 30x_B & \\
\text{sujeito a} \quad & x_F/200 + x_B/140 & \leq 40 \\
& x_F & \leq 6000 \\
& x_B & \leq 4000 \\
& x_F, x_B & \geq 0
\end{aligned}
$$

GNU MathProg

Modelo AMPL/GMLP Ficheiro `steel-a.mod`:

```
var XF;
var XB;

subject to Tempo: XF/200 + XB/140 <= 40;

subject to LimiteF: 0 <= XF <= 6000;

LimiteB: 0 <= XB <= 4000;   # "subject to" is optional

maximize lucro: 25*XF + 30*XB;
```

Try it: `https://ampl.com/try-ampl/try-ampl-online/`

Resolução com GLPK

- Para resolver: na *shell* do Linux escrever:

```
glpsol --math steel-a.mod -o steel-a.sol
```

- A solução será registada no ficheiro `steel-a.sol`

```
Problem:    steel-a
Rows:       4
Columns:    2
Non-zeros:  6
Status:     OPTIMAL
Objective:  lucro = 192000 (MAXimum)

   No.   Row name   St   Activity     Lower bound   Upper bound    Marginal
------ ------------ -- ------------- ------------- ------------- -------------
     1 Tempo        NU            40                          40          4200
     2 LimiteF      NU          6000             0          6000             4
     3 LimiteB      B           1400             0          4000
     4 lucro        B         192000

   No. Column name  St   Activity     Lower bound   Upper bound    Marginal
------ ------------ -- ------------- ------------- ------------- -------------
     1 XF           B           6000
     2 XB           B           1400

Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions:

KKT.PE: max.abs.err. = 3.12e-16 on row 1
        max.rel.err. = 7.62e-18 on row 1
        High quality

KKT.PB: max.abs.err. = 0.00e+00 on row 0
        max.rel.err. = 0.00e+00 on row 0
        High quality
```

Noções estudadas

- Investigação operacional.
- Fases de um estudo de investigação operacional.
- Formulação em programação matemática.

Próxima aula

- Formulação em programação matemática
- AMPL/GLPK.
- Resolução gráfica de problemas com duas variáveis

Questões para esta aula

https://codex.dcc.fc.up.pt/cc3003