# Métodos de Apoio à Decisão

## Algoritmo do Simplex (método do *Big M*)

João Pedro Pedroso

2021/2022

- Aulas passadas:
  - resolução gráfica de problemas lineares de otimização
  - introdução ao algoritmo do simplex

# Algoritmo do simplex: descrição geral

1. Converter o problema à forma *standard*.
2. Determinar uma solução básica admissível (SBA).
3. Verificar se a SBA é ótima; se sim, STOP.
4. Se não, passar para outra SBA, adjacente à anterior mas com um melhor objetivo, utilizando operações algébricas elementares.
5. Começar uma nova iteração (passo 3).

## Aula de hoje

- Algoritmo do simplex para problemas de minimização

# Algoritmo do simplex para problemas de minimização

Para minimizar:

Método 1 Modificar o objectivo:

$$\text{minimizar } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$\longrightarrow \text{maximizar } -z = -c_1x_1 - c_2x_2 + \ldots - c_nx_n$$

Método 2 Modificar o passo 3 do algoritmo:

Passo 3 Todas as variáveis não-básicas têm coeficientes $\leq 0$ na linha 0?

- se sim, então a solução é óptima.
- se não: escolher a variável que tem o coeficiente mais positivo para entrar na base (heurística).

# Quadro do simplex nos casos especiais da programação linear

- Caso de **soluções óptimas múltiplas**:
  - há uma variável não básica com coeficiente 0 na linha 0 do quadro óptimo
  - essa variável pode entrar na base (saindo outra) sem que o objectivo seja alterado
- Caso de **problemas ilimitados**:
  - num passo do algoritmo há uma variável não básica que pode ser aumentada (de zero para um valor positivo)
  - quando essa variável entra na base, não há nenhuma restrição que a limite
  - *em problemas de maximização: uma variável tem coeficiente negativo na linha 0, e coeficientes não positivos em todas as restrições*

# Algoritmo do simplex: método do *big M*

Quando não se consegue inferir directamente uma solução básica admissível, tem de se utilizar uma etapa inicial para a determinar.

- Modificar as restrições por forma a que todos os termos independentes sejam não negativos.
  Identificar todas as restrições do tipo $=$ ou $\geq$.
- Converter desigualdades para a forma standard.
- Adicionar uma *variável artificial* $a_i$ por cada restrição $i$ que inicialmente era $\geq$ ou $=$.
- Seja $M$ um valor positivo muito elevado
  - Minimização: novo objectivo $z' = z + Ma_i$
  - Maximização: novo objectivo $z' = z - Ma_i$
- Resolver o problema transformado pelo método do simplex.

- Nada nos garante que a solução óptima deste problema seja a solução óptima do problema original...
- Mas caso na solução óptima todas as variáveis $a_i$ sejam nulas, a solução é válida para o problema original
- se alguma variável $a_i$ for diferente de zero no quadro óptimo, o problema original é **impossível**

# Exemplo

*Uma companhia fabrica uma bebida vitaminada com base em sumo de laranja e num extracto artificial. Cada centilitro do extracto artificial contém 0.5 cl de melaço e 1 mg de vitamina C. Cada centilitro de sumo contem 0.25 cl de melaço e 3 mg de vitamina C. O extracto custa 2 cêntimos/cl, e o sumo 3 cêntimos/cl.*
*O departamento de marketing decidiu que cada lata de 10 cl deverá ter no máximo 4 cl de melaço e pelo menos 20 mg de vitamina C.*
*Determinar como é que a empresa poderá satisfazer os requisitos do departamento de marketing ao custo mínimo.*

# Exemplo

*Uma companhia fabrica uma bebida vitaminada com base em sumo de laranja e num extracto artificial. Cada centilitro do extracto artificial contém 0.5 cl de melaço e 1 mg de vitamina C. Cada centilitro de sumo contem 0.25 cl de melaço e 3 mg de vitamina C. O extracto custa 2 cêntimos/cl, e o sumo 3 cêntimos/cl.*
*O departamento de marketing decidiu que cada lata de 10 cl deverá ter no máximo 4 cl de melaço e pelo menos 20 mg de vitamina C.*
*Determinar como é que a empresa poderá satisfazer os requisitos do departamento de marketing ao custo mínimo.*

$$
\begin{array}{rll}
\text{minimizar } z = & 2x_1 + 3x_2 & \\
\text{sujeito a} & 1/2x_1 + 1/4x_2 & \leq 4 \\
& x_1 + 3x_2 & \geq 20 \\
& x_1 + x_2 & = 10 \\
& x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

# Problema transformado

- Forma standard:

$$\begin{array}{ccccccc}
z & -2x_1 & -3x_2 & & & & = 0 \\
 & 1/2x_1 & +1/4x_2 & +s_1 & & & = 4 \\
 & x_1 & +3x_2 & & & -e_2 & = 20 \\
 & x_1 & +x_2 & & & & = 10
\end{array}$$

- Introdução das variáveis artificiais (linhas 2 e 3); objectivo fica minimizar $z = 2x_1 + 3x_2 + Ma_2 + Ma_3$:

$$\begin{array}{cccccccc}
z & -2x_1 & -3x_2 & & & -Ma_2 & -Ma_3 & = 0 \\
 & 1/2x_1 & +1/4x_2 & +s_1 & & & & = 4 \\
 & x_1 & +3x_2 & & -e_2 & +a_2 & & = 20 \\
 & x_1 & +x_2 & & & & +a_3 & = 10
\end{array}$$

Queremos que $a_2$ e $a_3$ estejam na solução básica admissível (por isso é que as introduzimos!); temos que eliminar os seus coeficientes da linha 0:

| | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $e_2$ | $a_2$ | $a_3$ | $rhs$ | $VB$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $linha0$ | 1 | $2M-2$ | $4M-3$ | 0 | $-M$ | 0 | 0 | $30M$ | $z = 30M$ |
| $linha1$ | 0 | $1/2$ | $1/4$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 4 | $s_1 = 4$ |
| $linha2$ | 0 | 1 | 3 | 0 | $-1$ | 1 | 0 | 20 | $a_2 = 20$ |
| $linha3$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 10 | $a_3 = 10$ |

$x_2$ entra na base, saindo $a_2$:

| | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $e_2$ | $a_2$ | $a_3$ | $rhs$ | $VB$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $linha0$ | 1 | $\frac{2M-3}{3}$ | 0 | 0 | $\frac{M-3}{3}$ | $\frac{3-4M}{3}$ | 0 | $\frac{60+10M}{3}$ | $z = \frac{60+10M}{3}$ |
| $linha1$ | 0 | $5/12$ | 0 | 1 | $1/12$ | $-1/12$ | 0 | $7/3$ | $s_1 = 7/3$ |
| $linha2$ | 0 | $1/3$ | 1 | 0 | $-1/3$ | $1/3$ | 0 | $20/3$ | $x_2 = 20/3$ |
| $linha3$ | 0 | $2/3$ | 0 | 0 | $1/3$ | $-1/3$ | 1 | $10/3$ | $a_3 = 10/3$ |

$x_1$ entra na base, saindo $a_3$:

| | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $e_2$ | $a_2$ | $a_3$ | $rhs$ | $VB$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $linha0$ | 1 | 0 | 0 | 0 | $-1/2$ | $\frac{1-2M}{2}$ | $\frac{3-2M}{2}$ | 25 | $z = 25$ |
| $linha1$ | 0 | 0 | 0 | 1 | $-1/8$ | $1/8$ | $-5/8$ | $1/4$ | $s_1 = 1/4$ |
| $linha2$ | 0 | 0 | 1 | 0 | $-1/2$ | $1/2$ | $-1/2$ | 5 | $x_2 = 5$ |
| $linha3$ | 0 | 1 | 0 | 0 | $1/2$ | $-1/2$ | $3/2$ | 5 | $x_1 = 5$ |

(Este quadro é optimo; qualquer das variáveis não básicas piora o objectivo se entrar na base.)

# Análise de sensibilidade: intuição gráfica

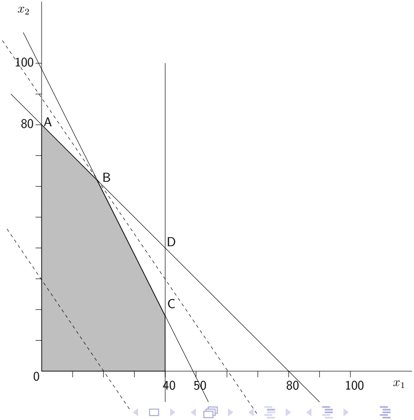
# Análise de sensibilidade: intuição gráfica

- Retomemos um problema apresentado há algumas aulas atrás:
  - fabrico de mesas ($x_1$) e de cadeiras ($x_2$)
  - lucro: 3€/mesa, 2€/mesa
  - recursos: 100 horas de acabamentos, 80 horas de carpintaria
  - vendas de mesas inferiores a 40 unidades.

Formulação em programação linear

$$
\begin{array}{llll}
\text{maximizar} & z = 3x_1 + 2x_2 & & \\
\text{sujeito a} \; : & 2x_1 + x_2 & \leq 100 \\
 & x_1 + x_2 & \leq 80 \\
 & x_1 & \leq 40 \\
 & x_1, x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

Resolução gráfica:

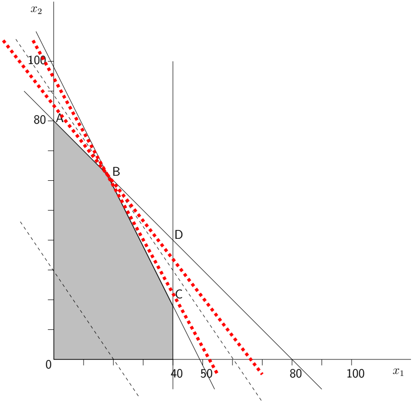


# Modificações nos coeficientes da função objectivo

Se a contribuição para o lucro de cada mesa aumentar suficientemente, no óptimo iremos produzir mais mesas.

- Aumentar o coeficiente de $x_1$ ou diminuir o de $x_2 \Rightarrow$ aumenta o incentivo para produzir mesas ($x_1$);
- Aumentar o coeficiente de $x_2$ ou diminuir o de $x_1 \Rightarrow$ aumenta o incentivo para produzir cadeiras ($x_2$);

Questão: para que valores de $c_1$ é que a solução se mantém óptima?



# Modificações nos coeficientes da função objectivo

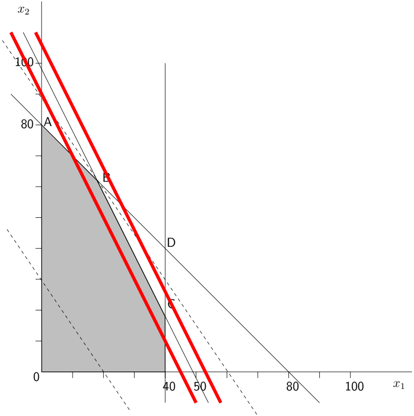
- Linha de isocusto: $z = 3x_1 + 2x_2 = \text{constante}$
- Colocando $x_2$ em função de $x_1$: $x_2 = -3/2x_1 + \text{constante}'$
- Se a recta de isolucro ficar mais inclinada do que BC $\Rightarrow$ ponto óptimo passa para C
- Se a recta de isolucro ficar menos inclinada do que AB $\Rightarrow$ ponto óptimo passa para A
- O ponto óptimo mantém-se em B (mas com lucro diferente) para $2 \leq c_1 \leq 4$
- De uma forma geral: $z = c_1x_1 + c_2x_2 \Rightarrow x_2 = -c_1/c_2x_1 + \text{constante}$
    - este declive deverá ser comparado com o das restrições activas.

# Modificações num termo independente

Se alterarmos a quantitidade de um recurso, como se modificará a solução óptima?

- A restrição correspondente é deslocada paralelamente;
- Variações superiores a certos valores implicam alteração do ponto óptimo:
  - restrições activas deixam de o ser
  - vice-versa

Questão: para que valores de $b_i$ é que a base da solução se mantém óptima?



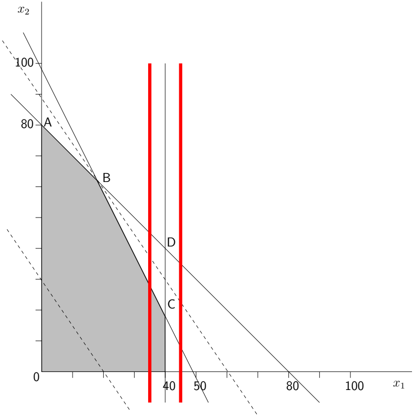
# Modificações num termo independente

- Restrição (1): $2x_1 + x_2 \leq 100$
- Para que valores de $b_1$ é que a base da solução actual se mantém óptima? Seja $b_1 = 100 + \Delta$
- A solução actual é dada pela intersecção de (1) e (2):
$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 100 + \Delta \\ x_1 + x_2 = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 20 + \Delta \\ x_2 = 60 - \Delta \end{cases}$
- Aumentando $b_1$ diminui o número de cadeiras e aumenta o número de mesas produzidas na solução óptima.
- Variação no valor do objectivo:

$$z' = 3x_1 + 2x_2 = 3(20 + \Delta) + 2(60 - \Delta) = 180 + \Delta$$

- **Preço sombra** da restrição $i$: quantidade em que $z^*$ melhora se se aumentar $b_i$ em 1
  - neste caso: preço sombra = coeficiente de $\Delta = 1$.

# Modificações num termo independente




- Restrição (3): $x_1 \leq 40$;
  seja $b_3 = 40 + \Delta$
- Ponto óptimo não é alterado para $\Delta \geq -20$
- Preço sombra é nulo.
- Variável de desvio $s_i > 0 \Rightarrow$ preço sombra associado à restrição $i$ é nulo.

Estudaremos nas próximas aulas estas propriedades no contexto da **dualidade**.

# Noções estudadas

- Variáveis artificiais
- Método do *Big M*
- Quadros do simplex nos casos especiais em otimização linear
  - problemas impossíveis
    - usando o método do Big M $\rightarrow$ variável artificial com valor positivo na solução ótima
  - problemas ilimitados: objetivo pode melhorar indefinidamente
    - entra uma variável na base
    - nenhuma restrição a impede de ter valores arbitrariamente altos
  - solução única
    - na solução ótima não há variáveis $= 0$ com custo reduzido $= 0$
  - soluções múltiplas
    - na solução ótima há variáveis iguais a zero com custo reduzido $= 0$
    - se uma dessas variáveis entrar na base, o objetivo não se altera
- Programação linear: análise de sensibilidade, interpretação económica.

# Próxima aula

- Dualidade em programação linear.