FYS4160

OPPGAVEARK A – Løsningsforslag av Håkon Enger

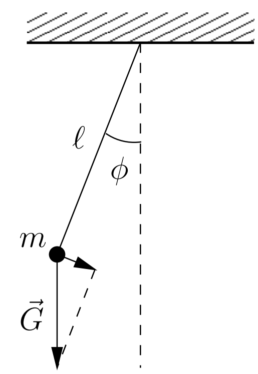
Oppgave A1: Tidekraftpendel

a) En matematisk pendel er et punktformet lodd som henger i en masseløs snor. Komponenten av gravitasjonskraften $\vec{G}$ som går i bevegelsesretningen normalt på snora er $G \sin\phi$. Newtons lov $F = ma$ gir $mg \sin\phi = -m\ell\ddot{\phi}$, eller

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{\ell} \sin\phi \approx -\frac{g}{\ell}\phi, \tag{A.1}$$

hvor vi har brukt tilnærmelsen $\sin\phi \approx \phi$ som gjelder ved små vinkler ϕ. Denne tilnærmelsen er nødvendig for å få en likning hvor vi kan skrive løsningen på lukket form. Dette er en harmonisk oscillator-linkning, med generell løsning

$$\phi = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t), \tag{A.2}$$



Figur A.1: Matematisk pendel

der vinkelfrekvensen ω er gitt ved $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$.

For den oppgitte verdien $\ell = 0.25\,\mathrm{m}$ og $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$, blir perioden $T = \frac{2\pi}{\omega} = 1.00\,\mathrm{s}$.

b) Tidekraftpendelen består av to like, massive punkter forbundet med ei stiv, masseløs stang. Pendelen er i likevekt når det ikke er noe netto kraftmoment på stanga, dette skjer i posisjonene $\phi = 0$ og $\phi = \frac{\pi}{2}$, hvor det i det førstnevnte tilfellet ikke er noen krefter normalt på stanga, og kreftene i det andre tilfellet gir like store og motsatt rettet kraftmoment.

Vi kan undersøke stabiliteten til disse punktene ved å se på et lite avvik fra likevektsposisjonen. For posisjonen $\phi = 0$, vil krafta i det massepunktet som er nærmest jorda være større enn krafta i massepunktet lengst unna. Dette gir et netto kraftmoment som bringer stanga tilbake til likevektsposisjonen. Dermed er denne posisjonen stabil.

For posisjonen $\phi = \frac{\pi}{2}$, vil det ene massepunktet bevege seg nærmere jorda ved et avvik fra likevektsposisjonen. Dette fører til at krafta i dette punktet blir større enn i det andre, noe som vil bringe systemet ytterligere lenger bort fra likevektsposisjonen. Denne likevektsposisjonen er dermed ustabil.

Kreftene som virker på stanga er $\vec{F}_1 = \frac{GMm}{|\vec{R}+\vec{\ell}|^3}(\vec{R}+\vec{\ell})$ i det ene massepunktet og $\vec{F}_2 = \frac{GMm}{|\vec{R}-\vec{\ell}|^3}(\vec{R}-\vec{\ell})$ i det andre. Dette gir et netto kraftmoment

$$\vec{\tau} = \vec{\ell} \times \vec{F}_1 + (-\vec{\ell}) \times \vec{F}_2 = \left(\frac{GMm}{|\vec{R}+\vec{\ell}|^3} - \frac{GMm}{|\vec{R}-\vec{\ell}|^3} \right) \vec{\ell} \times \vec{R} \tag{A.3}$$

Vi bruker at $\vec{\ell} \times \vec{R} = \ell R \sin\phi \, \vec{n}$ og vinkelakselerasjonen $\vec{\alpha} = \ddot{\phi}\vec{n}$, der $\vec{n}$ er en enhetsvektor normalt på svingeplanet, og at treghetsmomentet for pendelen er $I = 2m\ell^2$. Dermed gir spinnlikningen $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$

$$2m\ell^2\ddot{\phi} = GMm\ell R \sin\phi \left(\frac{1}{|\vec{R}+\vec{\ell}|^3} - \frac{1}{|\vec{R}-\vec{\ell}|^3} \right) \approx \frac{-6GMm\ell^2 \sin\phi\cos\phi}{R^3}, \tag{A.4}$$

hvor tilnærmingen gjelder når $\ell \ll R$. Vi gjør også tilnærmelsene $\cos\phi = 1 + \mathcal{O}(\phi^2)$ og $\sin\phi = 1 + \mathcal{O}(\phi^3)$ for $\phi \approx 0$, noe som gir svingelikningen

$$\ddot{\phi} = -\frac{3GM}{R^3}\phi. \tag{A.5}$$

Vi ser at svingefrekvansen er $\omega = \sqrt{\frac{3GM}{R^3}}$, og perioden $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2927\,\mathrm{s}$ når vi setter inn $G = 6.67 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2\mathrm{kg}$, $M = 5.98 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ og $R = 6.38 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$.

I et homogent gravitasjonsfelt får man ingen svingebevegelse, siden kreftene i begge massepunktene da alltid vil være like.

Oppgave A2: Potensialproblemer

a) På grunn av rotasjonssymmetrien i problemet, må gravitasjonskraften i et punkt $\vec{r}$ være rettet parallelt med $\vec{r}$ og størrelsen på kraften må være uavhengig av retningen til $\vec{r}$ (dvs. kraftfeltet må være rotasjonssymmetrisk). Dermed kan vi finne kraften ved å bruke Gauss' lov,

$$\int_{\partial V} \vec{F}(r) d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{F}(r) dV, \tag{A.6}$$

hvor integrasjonen på venstre side går over en tenkt kuleflate (som kan være innenfor eller utenfor masseskallet i problemet), og integrasjonen på høyre side går over det volumet denne kuleflaten omkranser. Ved å bruke Newtons gravitasjonslov (på lokal form),

$$\nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}) = -m\nabla^2 \phi(\vec{r}) = -4\pi m G \rho(\vec{r}), \tag{A.7}$$

hvor $\phi(\vec{r})$ er gravitasjonspotensialet, $\rho(\vec{r})$ er massetettheten i punktet $\vec{r}$, og m er massen til en "testpartikkel" vi setter inn i gravitasjonsfeltet i posisjonen $\vec{r}$, får vi

$$4\pi r^2 F(r) = -4\pi G m \int \rho(\vec{r}) dV. \tag{A.8}$$

Her vil resultatet på høyre side avhenge av om kuleflaten vi integrerer over er innenfor eller utenfor masseskallet. Hvis kuleflaten vår er utenfor masseskallet, vil integralet gi den totale massen M til masseskallet, hvis ikke vil integralet gi 0.

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{GMm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} & r \geq R \\ 0 & r < R \end{cases} \tag{A.9}$$

Vi kan nå finne potensialet i et punkt ved å beregne arbeidet vi må utføre for å føre en partikkel inn fra det uendelig fjerne (hvor vi setter potensialet lik 0) og til punktet $\vec{r}$. (Arbeidet blir negativt, siden gravitasjonen virker i bevegelsesretningen)

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{m}\int_\infty^r \vec{F} \cdot d\vec{s} = \begin{cases} -\int_\infty^r \frac{GM}{r'^2} dr' = -\frac{GM}{r} & r \geq R \\ -\int_\infty^R \frac{GM}{r'^2} dr' = -\frac{GM}{R} & r < R \end{cases} \tag{A.10}$$

b) For en kule med konstant massetetthet, kan vi bruke samme framgangsmåte som i forrige deloppgave for å beregne potensialet. For $r \geq R$ blir resultatet det samme, siden all massen fremdeles er innenfor kuleflaten vi integrerer over i Gauss' lov. Når $r < R$, blir resultatet i likning (A.8) ikke lenger 0, men lik den delen av massen som ligger innenfor kuleskallet. Denne massen er $\frac{4}{3}\pi r^3\rho$, der $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ er den konstante massetettheten til jorda. For $r < R$ får vi dermed

$$4\pi r^2 F(r) = -4\pi \frac{GMmr^3}{R^3} \tag{A.11}$$

og det generelle uttrykket for gravitasjonskraften blir

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{GMm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} & r \geq R \\ -\frac{GMmr}{R^3}\frac{\vec{r}}{r} & r < R \end{cases} \tag{A.12}$$

Integrerer vi som over, får vi uttrykket for potensialet:

$$\phi(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{GM}{r} & r \geq R \\ -\frac{GM(3R^2-r^2)}{2R^3} & r < R \end{cases} \tag{A.13}$$

c) Her kan vi bruke uttrykket (A.12) for $r < R$ for kraften på kulen som slippes ned i røret. Newtons andre lov gir da

$$m\ddot{r} = -\frac{GMmr}{R^3} \tag{A.14}$$

som gir harmoniske svigninger med frekvens $\omega = \sqrt{\frac{GMr}{R^3}}$, og periode $T = \frac{2\pi}{\omega} = 5070\,\mathrm{s}$ når vi setter inn verdiene vi brukte i forrige oppgave. Dette tilsvarer 1 time 24 minutter.

d) Når tunnellen ikke lenger går gjennom jordas sentrum, men har en minste avstand s fra jordas sentrum, får vi situasjonen på figur A.2. Her er

$$x = r\sin\theta,$$

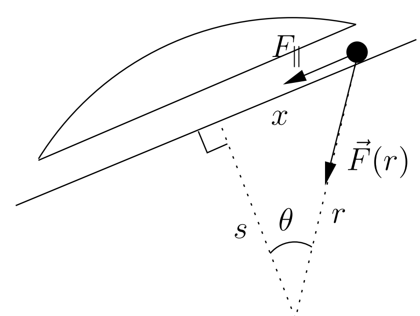
videre er kraftkomponenten i bevegelsesretningen

$$F_{\parallel} = F(r)\sin\theta = -\frac{GMmr}{R^3}\sin\theta = -\frac{GMm}{R^3}x.$$

Dermed blir bevegelseslikningen

$$m\ddot{x} = -\frac{GMm}{R^3}x,$$

som igjen gir harmoniske svigninger med samme frekvens og periode som over.



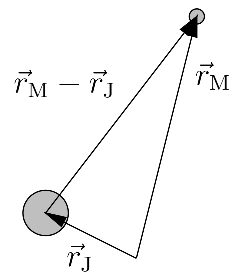
Figur A.2: Tunnell gjennom jorda

Oppgave A3: Jord-månesystemet

a) Vi lar jorda ha posisjon $\vec{r}_\mathrm{J}$ og masse M_J, og månen posisjon $\vec{r}_\mathrm{M}$ og masse M_M. Bevegelseslikningene blir da

$$M_\mathrm{J}\ddot{\vec{r}}_\mathrm{J} = \frac{GM_\mathrm{J}M_\mathrm{M}}{|\vec{r}_\mathrm{M}-\vec{r}_\mathrm{J}|^3}(\vec{r}_\mathrm{M}-\vec{r}_\mathrm{J}) \tag{A.15}$$

$$M_\mathrm{M}\ddot{\vec{r}}_\mathrm{M} = \frac{GM_\mathrm{J}M_\mathrm{M}}{|\vec{r}_\mathrm{M}-\vec{r}_\mathrm{J}|^3}(\vec{r}_\mathrm{J}-\vec{r}_\mathrm{M}) \tag{A.16}$$



Figur A.3: Jord-månesystemet

Massesenterets posisjon er gitt ved $r_\mathrm{CM} = \frac{M_\mathrm{J}\vec{r}_\mathrm{J}+M_\mathrm{M}\vec{r}_\mathrm{M}}{M_\mathrm{J}+M_\mathrm{M}}$. Siden det ikke er noen ytre krefter på systemet, vil massesenteret ligge i ro. Vi kan dermed velge et koordinatsystem slik at massesenteret er i origo, dvs. $M_\mathrm{J}\vec{r}_\mathrm{J} = -M_\mathrm{M}\vec{r}_\mathrm{M}$.

Vi er bedt om å vise at en mulig løsning av disse likningene er en bevegelse der begge legemene går i sirkelbaner rundt massesenteret. En slik bevegelse kan for jorda uttrykkes ved

$$x_\mathrm{J}(t) = A\sin(\omega t), \qquad y_\mathrm{J}(t) = A\cos(\omega t), \tag{A.17}$$

der x_J og y_J er komponentene til vektoren $\vec{r}_\mathrm{J}$. Betingelsen $M_\mathrm{J}\vec{r}_\mathrm{J} = -M_\mathrm{M}\vec{r}_\mathrm{M}$ gir dermed for månens bevegelse

$$x_\mathrm{M}(t) = -\frac{M_\mathrm{J}}{M_\mathrm{M}}A\sin(\omega t), \qquad y_\mathrm{M}(t) = -\frac{M_\mathrm{J}}{M_\mathrm{M}}A\cos(\omega t). \tag{A.18}$$

x-komponenten av bevegelseslikningen for jorda (A.15) blir nå

$$-M_\mathrm{J}\omega^2 A\sin(\omega t) = \frac{GM_\mathrm{J}M_\mathrm{M}}{|\vec{r}_\mathrm{M}-\vec{r}_\mathrm{J}|^3}A\left(1+\frac{M_\mathrm{J}}{M_\mathrm{M}}\right)\sin(\omega t), \tag{A.19}$$

og vi har at

$$|\vec{r}_\mathrm{M}-\vec{r}_\mathrm{J}| = A\left(1+\frac{M_\mathrm{J}}{M_\mathrm{M}}\right) \tag{A.20}$$

slik at bevegelseslikninga er oppfylt dersom

$$\omega^2 A^3 = \frac{GM_\mathrm{M}}{\left(1+\frac{M_\mathrm{J}}{M_\mathrm{M}}\right)^2}. \tag{A.21}$$

Vi kan også sjekke at dette oppfyller resten av bevegelseslikningene.

Setter vi inn verdiene for G og M_{J} brukt i oppgave A1, samt månens masse $M_{\mathrm{M}} = 7.36 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$ og vinkelfrekvens $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{27.3\,\mathrm{d}} = 2.66 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}^{-1}$, får vi at radius i jordas sirkelbevegelse er $A = 4.67 \cdot 10^{6}\,\mathrm{m}$ og i månens bevegelse er $\frac{M_{\mathrm{J}}}{M_{\mathrm{M}}} A = 3.80 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}$.

b) Gravitasjonspotensialet i inertialsystemet hvor jorda og månen roterer rundt et felles massesenter er gitt ved summen av potensialene for hver av legemene. Langs forbindelseslinjen mellom jorda og månen får vi

$$\phi(r) = -\frac{GM_{\mathrm{J}}}{r} - \frac{GM_{\mathrm{M}}}{R - r}, \tag{A.22}$$

der r er avstanden fra jordas sentrum og R er avstanden mellom jordas og månens sentre. Gravitasjonskraften på en testpartikkel med masse m er

$$F(r) = -\frac{GM_{\mathrm{J}}m}{r^2} + \frac{GM_{\mathrm{M}}m}{(R - r)^2}. \tag{A.23}$$

Denne kraften forsvinner i to punkter der kraften fra jorda og månen er like store, gitt ved $r = \frac{M_{\mathrm{J}} \pm \sqrt{M_{\mathrm{J}} M_{\mathrm{M}}}}{M_{\mathrm{J}} - M_{\mathrm{M}}} R$, eller i tallverdi $r = 3.46 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}$ eller $r = 4.32 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}$. Den første av disse er mellom jorda og månen, den andre bortenfor månens bane.

Mer fysisk interessant er kanskje situasjonen i et roterende referansesystem der jorda og månen er i ro. I dette systemet må vi i Newtonsk mekanikk legge inn en fiktiv sentrifugalkraft som har retning bort fra rotasjonsaksen og gir opphav til en akselerasjon $a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$ (v er rotasjonshastigheten). Hvis vi ønsker å legge til et ledd fra denne kraften i potensialet, får vi problemer siden potensialet $\phi_{\mathrm{rot}} = \int_r^\infty \omega^2 r'\, dr'$ divergerer. Vi kan dermed ikke lenger legge nullpunktet for potensialet i det uendelig fjerne. Vi velger å legge nullpunktet slik at potensialet i det roterende system blir det samme som i inertialsystemet ved rotasjonsaksen $r = r_{\mathrm{CM}}$. Det totale potensialet blir dermed

$$\phi_{\mathrm{rot}}(r) = -\frac{GM_{\mathrm{J}}}{r} - \frac{GM_{\mathrm{M}}}{R - r} - \frac{1}{2}\omega^2 (r - r_{\mathrm{CM}})^2. \tag{A.24}$$

Den totale kraften på en testpartikkel sett fra det roterende referansesystemet er

$$F_{\mathrm{rot}}(r) = -\frac{GM_{\mathrm{J}}m}{r^2} + \frac{GM_{\mathrm{M}}m}{(R - r)^2} + \omega^2 (r - r_{\mathrm{CM}}), \tag{A.25}$$

For å finne punktene der denne kraften forsvinner må man løse en femtegradslikning. Dette kan i det minste gjøres numerisk, og de reelle løsningene er $r = -3.87 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}$, $r = 3.54 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}$ og $r = 4.15 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}$.

c) Forskjellen mellom månens tiltrekning på et lodd med masse m på den siden av jorda som vender mot månen og et tilsvarende lodd på den andre siden er

$$\Delta F = \frac{GM_{\mathrm{M}}m}{(R-\delta r)^2} - \frac{GM_{\mathrm{M}}m}{(R+\delta r)^2} \approx \frac{4GM_{\mathrm{M}}m\delta r}{R^3}, \tag{A.26}$$

der δr er jordas radius. I tallverdi gir dette $\Delta F = 2.21 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{N}$ for et lodd på 1 kg.

I praksis er det fysisk mer interessant med situasjonen i det roterende systemet, ettersom det vil fortelle oss hva som faktisk blir observert. Forskjellen i den totale kraften sett fra det roterende referansesystemet (A.25), blir

$$\begin{aligned} \Delta F_{\mathrm{rot}} &= \frac{GM_{\mathrm{M}}m}{(R-\delta r)^2} + \omega^2(\delta r - r_{\mathrm{CM}}) - \frac{GM_{\mathrm{M}}m}{(R+\delta r)^2} - \omega^2(-\delta r - r_{\mathrm{CM}}) \\ &\approx \frac{4GM_{\mathrm{M}}m\delta r}{R^3} + 2\omega^2\delta r, \end{aligned} \tag{A.27}$$

noe som gir verdien $\Delta F_{\mathrm{rot}} = 8.84 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{N}$. Vi ser dermed at variasjonen i sentrifugalkraften dominerer over variasjonen i den “statiske” gravitasjonskraften fra månen.

FYS4160

OPPGAVEARK B – Løsningsforslag av Håkon Enger

Oppgave B1: Roche-grensen

a) Newtons gravitasjonslov gir total kraft for en stein med masse μ på overflaten til månen:

$$F = -\frac{GM\mu}{(r-R)^2} + \frac{Gm\mu}{R^2}, \tag{B.1}$$

hvor M er massen til planeten som månen går i bane rundt, m er massen til månen, R er radius til månen og r er avstanden mellom massesenteret til planeten og massesenteret til månen.

Kraften på månen er $F_M = -\frac{GMm}{r^2}$. Dette gir månen en (sentripetal)akselerasjon på $a_0 = -\frac{GM}{r^2}$. For at steinen på overflaten skal følge månen i banen, kan gravitasjonskreftene på steinen ikke være mindre enn dette.

$$\begin{gathered} a \geq a_0 \\ -\frac{GM\mu}{(r-R)^2} + \frac{Gm\mu}{R^2} \geq -\frac{GM}{r^2} \end{gathered} \tag{B.2}$$

Vi har

$$\begin{aligned} a - a_0 &= -\frac{GM}{(r-R)^2} + \frac{Gm}{R^2} + \frac{GM}{r^2} \\ &\approx -\frac{GM}{r^2}\left(1 + \frac{2Rr}{r^2}\right) + \frac{Gm}{R^2} + \frac{GM}{r^2} = \frac{Gm}{R^2} - \frac{2GMR}{r^3}. \end{aligned} \tag{B.3}$$

Betingelsen $a - a_0 \geq 0$ gir dermed tilnærmet

$$\begin{aligned} \frac{Gm}{R^2} &\geq \frac{2GMR}{r^3} \\ r &\geq \left(\frac{2M}{m}\right)^{\frac{1}{3}} R \equiv r_l. \end{aligned} \tag{B.4}$$

b) Setter vi inn verdiene $m = 2.0 \cdot 10^{12}\,\mathrm{kg}$, $M = 1.9 \cdot 10^{27}\,\mathrm{kg}$ og $r_l = 96000\,\mathrm{km}$, får vi

$$R = \left(\frac{m}{2M}\right)^{\frac{1}{3}} r_l = 775\,\mathrm{m} \tag{B.5}$$

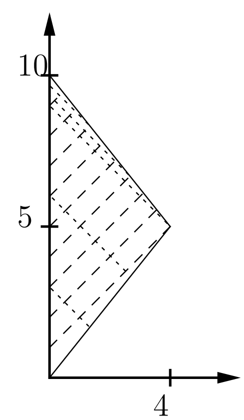
Oppgave B2: Tvilling-paradokset

A reiser 4 ly (målt i jordas referansesystem) med $v = 0.8c$. B blir igjen på jorda.

a) *Sett fra Bs referansesystem*: B selv måler at reisen tar 10 år (total reiselengde er 8 lysår, og farten er $0.8c$.) B sender dermed 10 hilsener.

Sett fra As referansesystem: A oppfatter seg selv i ro, mens systemet jorda–α Centauri beveger seg med hastigheten $v = 0.8c$. Avstanden mellom jorda og stjernen blir dermed "lengdekontraktert" og blir observert til $L_A = L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 2.4\,\mathrm{ly}$. Tiden det tar før "$\alpha$ Centauri når fram til A" blir dermed $t_A = \frac{L_A}{v} = 3$ år. Tilsvarende tar også tilbakereisen 3 år, så totalt sender A 6 hilsener.

b) Figuren viser både A og Bs signaler. Den viser at A mottar én hilsen i det han kommer fram til α Centauri, de andre 9 hilsenene mottas i løpet av tilbakereisen (den siste mottas på hjemkomstdagen).



c) Figuren viser at B mottar den første hilsenen etter tre år, den neste etter seks år, altså etter at A har begynt tilbakereisen. Det siste året mottas alle de tre hilsenene A sender på tilbakereisen.

d) Hvis et foton blir sendt ut i et referansesystem A og mottatt i systemet B som beveger seg med hastighet v i forhold til A, blir forholdet mellom frekvensene observert i de to systemene

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} = \sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} \tag{B.6}$$

Dermed, hvis utsendt frekvens er 1/år, blir hilsenene mottatt med en frekvens på $\nu_B = \sqrt{\frac{1-0.8}{1+0.8}}\,1\,\mathrm{y}^{-1} = \frac{1}{3}\,\mathrm{y}^{-1}$, eller en hilsen mottatt hvert 3. år.

Med motsatt fortegn på hastigheten for tilbakereisen, blir resultatet tre hilsener pr. år.

Oppgave B3:

a) Vi får

$$\begin{aligned}
\vec{A}\cdot\vec{A} &= (4\vec{e}_t + 3\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + \vec{e}_z)\cdot(4\vec{e}_t + 3\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + \vec{e}_z) = -2,\\
\vec{B}\cdot\vec{B} &= (5\vec{e}_t + 4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y)\cdot(5\vec{e}_t + 4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y) = 0,\\
\vec{C}\cdot\vec{C} &= (\vec{e}_t + 2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + 4\vec{e}_z)\cdot(\vec{e}_t + 2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + 4\vec{e}_z) = 28.
\end{aligned} \tag{B.7}$$

b) Vi antar nå at $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$. Hvis $\vec{A}$ er tidlik, dvs. $\vec{A}\cdot\vec{A} < 0$, kan vi alltid velge en basis der $\vec{A}$ går langs tidretningen, $\vec{A} = A^{t'}\vec{e}_{t'}$. Dermed blir $\vec{A}\cdot\vec{B} = -A^{t'}B^{t'}$. I denne basisen må dermed $B^{t'} = 0$. Dermed får vi at $\vec{B}$ er romlik, hvis ikke $\vec{B}$ er nullvektoren.

Hvis $\vec{A}$ er lyslik, $\vec{A}\cdot\vec{A} = 0$, anta at $\vec{B}$ er tidlik. Dermed kan vi velge en basis der $\vec{B} = B^{t'}\vec{e}_{t'}$. Vi får nå at $\vec{A}\cdot\vec{B} = -A^{t'}B^{t'}$. Siden $\vec{A}$ er lyslik, kan ikke $A^{t'}$ være null, og vi antar at verken $\vec{A}$ eller $\vec{B}$ er nullvektoren. Vi får dermed en selvmotsigelse siden $\vec{A}\cdot\vec{B} \neq 0$. $\vec{B}$ kan dermed ikke være tidlik.

Hvis både $\vec{A}$ og $\vec{B}$ er lyslike kan vi velge en basis der $\vec{A} = A(\vec{e}_{t'} + \vec{e}_{x'})$. Vi får $\vec{A}\cdot\vec{B} = A(-B^{t'} + B^{x'})$, og for at dette skal bli null må vi ha $B^{x'} = B^{t'}$. Men, siden $\vec{B}$ også skal være lyslik, må nå y' og z'-komponentene til $\vec{B}$ være null, og vektorene er dermed proporsjonale.

Hvis $\vec{A}$ er romlik, kan vi velge en basis der en av de romlige komponentene er den eneste forskjellig fra null, f.eks. $\vec{A} = A^{x'}\vec{e}_{x'}$. Dermed får vi $\vec{A}\cdot\vec{B} = A^{x'}B^{x'}$, og $B^{x'} = 0$, men de andre romlige komponentene til $\vec{B}$ får vi ingen krav til, slik at $\vec{B}$ kan være både tid-, lys- eller romlik.

c) En Lorentz-transformasjon langs x-aksen har formen

$$t = \frac{t' + vx'}{\sqrt{1-v^2}}, \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-v^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \tag{B.8}$$

hvor v er hastigheten til det merkede systemet i forhold til det umerkede, og vi bruker enheter slik at $c = 1$. Definerer vi α ved $\tanh\alpha = v$, kan vi bruke relasjonene

$$\cosh\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh\alpha}} \quad \text{og} \quad \sinh\alpha = \frac{\tanh\alpha}{\sqrt{1-\tanh\alpha}} \tag{B.9}$$

til å skrive dette som

$$t = t'\cosh\alpha + x'\sinh\alpha, \quad x = x'\cosh\alpha + t'\sinh\alpha, \quad y = y', \quad z = z', \tag{B.10}$$

noe som gir for transformasjonsmatrisen ${\Lambda^\mu}_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha & 0 & 0 \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{B.11}$$

som er den oppgitte transformasjonen.

d) 4-hastigheten $\vec{u}$ er en vektor i et 4-dimensjonalt vektorrom. Denne vektoren kan beskrives ved å uttrykke dens komponenter i en valgt basis, men selve vektoren er ikke knyttet til noen bestemt basis, og dermed definert uavhengig av denne. Dette kommer til uttrykk ved

$$\vec{u} = u^0\vec{e}_0 + u^1\vec{e}_1 + u^2\vec{e}_2 + u^3\vec{e}_3 = u^{0'}\vec{e}_{0'} + u^{1'}\vec{e}_{1'} + u^{2'}\vec{e}_{2'} + u^{3'}\vec{e}_{3'}, \tag{B.12}$$

der de enkelte komponentene u^μ er avhengig av basisen $\{e_\mu\}$, men summen $u^\mu\vec{e}_\mu$ er uavhengig av basisen.

Komponentene til 4-hastigheten observert i et gitt referansesystem er

$$\vec{u} = \gamma(1, \vec{v}), \tag{B.13}$$

der $\vec{v}$ er 3-hastigheten målt i dette referansesystemet og $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ (vi bruker fremdeles enheter der $c = 1$!). Vi kan uttrykke komponentene til $\vec{v}$ ved $v^i = \frac{u^i}{u^0}$. Dermed er 3-hastigheten ikke definert uavhengig av en basis, men avhenger av referansesystemet (det momentane hvilesystemet) til observatøren.

Ved å bruke uttrykket (B.13) er det lett å se at $\vec{u}^2 = -1$. Dermed er $\vec{u}$ tidlik, og vi ser også at $\vec{p} = m\vec{u}$ er tidlik med $\vec{p}^2 = -m^2$. Når $m \to 0$, blir $\vec{p}$ en lyslik vektor med $\vec{p}^2 = 0$.

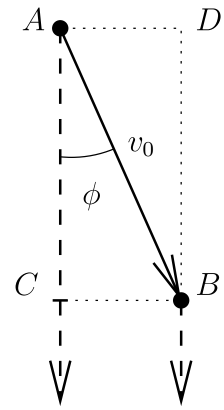
Energien til partikkelen, målt av en observatør som måler 3-hastigheten til partikkelen til å være $\vec{v}$, er $E = \gamma m$. I denne observatørens (momentane) hvilesystem er *observatørens* 4-hastighet lik $\vec{u} = (1, \vec{0})$. Dermed blir $-\vec{p} \cdot \vec{u} = E$, der $\vec{p} = m\gamma(1, \vec{v})$. Siden dette er et skalarproduct av to vektorer er resultatet uavhengig av basis.

Oppgave B4: Overlyshastighet?

a) Vi regner med at kvasaren er så langt unna oss at avstandene fra jorda til punktene B og C er tilnærmet like. Dermed blir avstandsforskjellen mellom A–jorda og B–jorda (tilnærmet) lik avstanden mellom punktene A og C, som er lik $\ell \cos \phi$, der ℓ er avstanden fra A til B. Vi får dermed at signalet fra B når jorda

$$\Delta t = \frac{\ell \cos \phi}{c} \tag{B.14}$$

tidligere enn signalet fra A.



b) Etter en tid ΔT_0 har den utskutte delen beveget seg en avstand $\ell = v_0 \Delta T_0$. Den transverselle avstanden, altså avstanden mellom A og D på figuren, er

$$\ell_t = \ell \sin \phi = v_0 \Delta T_0 \sin \phi. \tag{B.15}$$

Sett fra jorda er den transverselle avstanden $\ell_t = v\Delta T$, der ΔT er observert tid fra jorda. Det betyr at vi må ta hensyn til "tidsforsinkelsen" for lyset fra kvasaren A relativt til delen B, så

$$\Delta T = \Delta T_0 - \Delta t = \frac{\ell}{v_0} - \frac{\ell \cos \phi}{c}. \tag{B.16}$$

c) Uttrykkene (B.15) og (B.16) kombinert gir

$$\ell \sin \phi = \ell_t = v\Delta T = \ell \left(\frac{v}{v_0} - \frac{v}{c} \cos \phi \right). \tag{B.17}$$

Bruker vi at $\phi = 10°$ og $\frac{v}{c} = 10$, får vi $\frac{v}{v_0} = 10.0217$, eller $v_0 = 0.998c$. Den reelle hastigheten er dermed under lyshastigheten, som påkrevet av relativitetsteorien.

Dersom vi antar at $v_0 = c$, får vi den største mulige vinkelen ϕ. Dette gir $\frac{v}{v_0} = 10$, og vi må løse likningen

$$\begin{aligned} 10 &= \sin \phi + 10 \cos \phi \\ &= \sqrt{1 - \cos^2 \phi} + 10 \cos \phi. \end{aligned} \tag{B.18}$$

Dette gir løsningene $\phi = 0$ og $\phi = 11.42°$. $\phi = 0$ gir ingen transversell hastighet, så dette er ikke en reell løsning.

FYS4160

OPPGAVEARK C – Løsningsforslag av Håkon Enger

Oppgave C1:

a) Her er poenget å forstå forskjellen mellom $\underline{p}(A^\alpha \vec{e}_\alpha)$ og $A^\alpha \underline{p}(\vec{e}_\alpha)$. Siden $\underline{p} = p_\beta \underline{\omega}^\beta$, har vi

$$\begin{aligned}\underline{p}(A^\alpha \vec{e}_\alpha) =& p_0\underline{\omega}^0(A^0\vec{e}_0 + A^1\vec{e}_1 + A^2\vec{e}_2 + A^3\vec{e}_3) + \\ & p_1\underline{\omega}^1(A^0\vec{e}_0 + A^1\vec{e}_1 + A^2\vec{e}_2 + A^3\vec{e}_3) + \\ & p_2\underline{\omega}^2(A^0\vec{e}_0 + A^1\vec{e}_1 + A^2\vec{e}_2 + A^3\vec{e}_3) + \\ & p_2\underline{\omega}^2(A^0\vec{e}_0 + A^1\vec{e}_1 + A^2\vec{e}_2 + A^3\vec{e}_3)\end{aligned} \tag{C.1}$$

og

$$\begin{aligned}A^\alpha \underline{p}(\vec{e}_\alpha) =& A^0p_0\underline{\omega}^0(\vec{e}_0) + A^0p_1\underline{\omega}^1(\vec{e}_0) + A^0p_2\underline{\omega}^2(\vec{e}_0) + A^0p_3\underline{\omega}^3(\vec{e}_0) + \\ & A^1p_0\underline{\omega}^0(\vec{e}_0) + A^1p_1\underline{\omega}^1(\vec{e}_0) + A^1p_2\underline{\omega}^2(\vec{e}_0) + A^1p_3\underline{\omega}^3(\vec{e}_0) + \\ & A^2p_0\underline{\omega}^0(\vec{e}_0) + A^2p_1\underline{\omega}^1(\vec{e}_0) + A^2p_2\underline{\omega}^2(\vec{e}_0) + A^2p_3\underline{\omega}^3(\vec{e}_0) + \\ & A^3p_0\underline{\omega}^0(\vec{e}_0) + A^3p_1\underline{\omega}^1(\vec{e}_0) + A^3p_2\underline{\omega}^2(\vec{e}_0) + A^3p_3\underline{\omega}^3(\vec{e}_0).\end{aligned} \tag{C.2}$$

Disse er like siden en-formene er *lineære*, slik at første linje i (C.1) er lik første kolonne i (C.2), osv.

b) Komponentnotasjonene betyr at $\underline{p} = -\underline{\omega}^0 + \underline{\omega}^1 + 2\underline{\omega}^2$, $\vec{A} = 2\vec{e}_0 + \vec{e}_1 - \vec{e}_3$ og $\vec{B} = 2\vec{e}_1$. Siden vi har at $\underline{\omega}^\mu(\vec{e}_\nu) = \delta^\mu{}_\nu$, blir rett og slett $\underline{p}(\vec{A}) = p_\alpha A^\alpha$, så svarene blir (i) -1; (ii) 2; (iii) -7; (iv) -7.

Oppgave C2:

a) Et tensorprodukt $\underline{p} \otimes \underline{q}$ virker på to vektorer $(\vec{A}, \vec{B})$, og resultatet er tallet $\underline{p}(\vec{A})$ ganget med tallet $\underline{q}(\vec{B})$. Vi skal vise at $\underline{p} \otimes \underline{q} \neq \underline{q} \otimes \underline{p}$ ved å bruke to vektorer $\vec{A}$ og $\vec{B}$ som argumenter. Vi kan f.eks. velge $\vec{A} = \vec{e}_0$ og $\vec{B} = \vec{e}_1$. Da har vi

$$\begin{aligned}\underline{p} \otimes \underline{q}(\vec{A}, \vec{B}) &= \underline{p}(\vec{A})\underline{q}(\vec{B}) = p_0q_1 = 0 \\ \underline{q} \otimes \underline{p}(\vec{A}, \vec{B}) &= \underline{q}(\vec{A})\underline{p}(\vec{B}) = q_0p_1 = -1,\end{aligned} \tag{C.3}$$

så vi ser at resultatene ikke er like.

Komponentene til $\underline{p} \otimes \underline{q}$ er $p_\alpha q_\beta$, for alle mulige kombinasjoner av α og β. Dette passer det å skrive som en matrise:

$$p_\alpha q_\beta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{C.4}$$

b) Den symmetriske delen av $\underline{p} \otimes \underline{q}$ er gitt ved (Se likning 2.91 i kompendiet)

$$p_{(\alpha}\, q_{\beta)} = \frac{1}{2}(p_\alpha q_\beta + p_\beta q_\alpha) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{C.5}$$

og den antisymmetriske ved

$$p_{[\alpha}\, q_{\beta]} = \frac{1}{2}(p_\alpha q_\beta - p_\beta q_\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{C.6}$$

Oppgave C3:

a) Notasjonen $h(\,\cdot\,, \vec{A}) = \alpha h(\,\cdot\,, \vec{B})$ betyr på komponentform

$$h_{\mu\nu} A^\nu = \alpha h_{\mu\nu} B^\nu. \tag{C.7}$$

Dette skal gjelde for villkårlige $\vec{A}$ og $\vec{B}$, men tallet α kan avhenge av $\vec{A}$ og $\vec{B}$. I det følgende vil vi derfor skrive $\alpha(\vec{A}, \vec{B})$. Vi skal vise at h nå kan skrives som et tensorprodukt av to en-former. (Dette er slett ikke riktig for villkårlige $\binom{0}{2}$-tensorer!)

Siden vi antar at (C.7) gjelder, kan vi finne $\alpha(\vec{A}, \vec{B})$ ved

$$\alpha(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{h(\vec{C}, \vec{A})}{h(\vec{C}, \vec{B})} \tag{C.8}$$

for en villkårlig $\vec{C}$ som vi velger slik at $h(\vec{C}, \vec{B}) \neq 0$. (Dersom det ikke finnes noen slik $\vec{C}$, så er alltid $h(\vec{C}, \vec{A}) = 0$ for alle $\vec{A}$ og $\vec{C}$, og da er $h = 0 = \underline{0} \otimes \underline{0}$, så beviset er ferdig.)

Hvis vi nå velger $\vec{B}$ en gang for alle, så er $h(\vec{C},\vec{A}) = f(\vec{C})g(\vec{A})$, der $f(\vec{C}) = h(\vec{C},\vec{B})$ og $g(\vec{A}) = \alpha(\vec{A},\vec{B})$. Vi må nå vise at funksjonene $f(\vec{C})$ og $g(\vec{A})$ definerer en-former ved $\underline{p}(\vec{C}) = f(\vec{C})$ og $\underline{q}(\vec{A}) = g(\vec{A})$. Det vi må vise er at disse funksjonene er lineære, men det er lett å se fra definisjonene.

b) Det vi må vise er at komponentene $T^\mu{}_\nu v^\nu$ transformerer som en vektor, dvs. at under et basisskifte $\vec{e}_{\mu'} = M^\mu{}_{\mu'}\vec{e}_\mu$ transformerer $T^\mu{}_\nu v^\nu$ til $T^{\mu'}{}_\nu v^\nu = M^{\mu'}{}_\mu T^\mu{}_\nu v^\nu$. Tilsvarende må vi vise at $T^\mu{}_\nu \omega_\mu$ transformerer som en 1-form. Ved å bruke reglene for hvordan kovariante og kontravariante tensorkomponenter transformerer, har vi

$$T^{\mu'}{}_{\nu'} v^{\nu'} = M^{\mu'}{}_\mu M^\alpha{}_{\nu'} M^{\nu'}{}_\beta T^\mu{}_\alpha v^\beta, \tag{C.9}$$

men siden $M^\alpha{}_{\nu'} M^{\nu'}{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta$ (dette betyr at matrisen $M^\nu{}_{\nu'}$ er den inverse av matrisen $M^{\nu'}{}_\nu$), får vi

$$T^{\mu'}{}_{\nu'} v^{\nu'} = M^{\mu'}{}_\mu T^\mu{}_\alpha v^\alpha, \tag{C.10}$$

som var det vi skulle vise.

For transformasjonen av $T^\mu{}_\nu \omega_\mu$ får vi

$$T^{\mu'}{}_{\nu'} \omega_{\mu'} = M^{\mu'}{}_\alpha M^\nu{}_{\nu'} M^\beta{}_{\mu'} T^\alpha{}_\nu \omega_\beta = M^\nu{}_{\nu'} T^\alpha{}_\nu \omega_\alpha. \tag{C.11}$$

Oppgave C4:

a) Vi har

$$M^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \tag{C.12}$$

og finner

$$M^{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}(M^{\alpha\beta} + M^{\beta\alpha}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{C.13}$$

$$M^{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2}(M^{\alpha\beta} - M^{\beta\alpha}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{C.14}$$

$$M^{\alpha}{}_{\beta} = \eta_{\beta\mu} M^{\alpha\mu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{C.15}$$

$$M_{\alpha}{}^{\beta} = \eta_{\alpha\mu} M^{\mu\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{C.16}$$

$$M_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu} M^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{C.17}$$

$$\tag{C.18}$$

b) Du kan ikke snakke om de symmetriske og antisymmetriske delene av $M^{\alpha}{}_{\beta}$, siden du ikke kan bytte om en kovariant og en kontravariant indeks, så uttrykkene $M^{\alpha}{}_{\beta} \pm M^{\beta}{}_{\alpha}$ gir ingen mening.

Oppgave C5:

Siden A er antisymmetrisk, kan vi skrive $A^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(A^{\alpha\beta} - A^{\beta\alpha})$. Tilsvarende kan vi skrive $B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(B_{\alpha\beta} + B_{\beta\alpha})$. Dermed får vi

a)

$$\begin{aligned} A^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4}(A^{\alpha\beta} - A^{\beta\alpha})(B_{\alpha\beta} + B_{\beta\alpha}) \\ &= \frac{1}{4}(A^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} + A^{\alpha\beta} B_{\beta\alpha} - A^{\beta\alpha} B_{\alpha\beta} - A^{\beta\alpha} B_{\beta\alpha}) = 0 \end{aligned} \tag{C.19}$$

b)

$$\begin{aligned} A^{\alpha\beta}C_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(A^{\alpha\beta} - A^{\beta\alpha})C_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(A^{\alpha\beta}C_{\alpha\beta} - A^{\beta\alpha}C_{\alpha\beta}) \\ &= \frac{1}{2}(A^{\alpha\beta}C_{\alpha\beta} - A^{\alpha\beta}C_{\beta\alpha}) = A^{\alpha\beta}\frac{1}{2}(C_{\alpha\beta} + C_{\beta\alpha}) \end{aligned} \tag{C.20}$$

her har vi byttet navn på summasjonsindeksene α og β i det siste leddet.

c) Tilsvarende,

$$B_{\alpha\beta}D^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(B_{\alpha\beta}D^{\alpha\beta} + B_{\beta\alpha}D^{\alpha\beta}) = B_{\alpha\beta}\frac{1}{2}(D^{\alpha\beta} + D^{\beta\alpha}). \tag{C.21}$$

Oppgave C6:

Vi setter inn, og får

$$\underline{\alpha} \wedge \underline{\beta} = \alpha_\mu \underline{\omega}^\mu \wedge \beta_{\nu\gamma}\underline{\omega}^\nu \wedge \underline{\omega}^\gamma = \alpha_\mu\beta_{\nu\gamma}\underline{\omega}^\mu \wedge \underline{\omega}^\nu \wedge \underline{\omega}^\gamma \tag{C.22}$$

$$\underline{\beta} \wedge \underline{\alpha} = \beta_{\nu\gamma}\underline{\omega}^\nu \wedge \underline{\omega}^\gamma \wedge \alpha_\mu\underline{\omega}^\mu = \alpha_\mu\beta_{\nu\gamma}\underline{\omega}^\nu \wedge \underline{\omega}^\gamma \wedge \underline{\omega}^\mu \tag{C.23}$$

$$= -\alpha_\mu\beta_{\nu\gamma}\underline{\omega}^\nu \wedge \underline{\omega}^\mu \wedge \underline{\omega}^\gamma = \alpha_\mu\beta_{\nu\gamma}\underline{\omega}^\mu \wedge \underline{\omega}^\nu \wedge \underline{\omega}^\gamma \tag{C.24}$$

$$= \underline{\alpha} \wedge \underline{\beta}. \tag{C.25}$$

Det vi har brukt her, er at ytreproduktet $\underline{\omega}^\nu \wedge \underline{\omega}^\gamma \wedge \underline{\omega}^\mu$ er totalt antisymmetrisk, slik at hvis vi bytter om på to av faktorene får vi motsatt fortegn.

På samme måte får vi

$$\underline{\alpha} \wedge \underline{\gamma} = \alpha_\mu\underline{\omega}^\mu \wedge \gamma_\nu\underline{\omega}^\nu = \alpha_\mu\gamma_\nu\underline{\omega}^\mu \wedge \underline{\omega}^\nu \tag{C.26}$$

$$= -\alpha_\mu\gamma_\nu\underline{\omega}^\nu \wedge \underline{\omega}^\mu \tag{C.27}$$

$$= -\underline{\gamma} \wedge \underline{\alpha}, \tag{C.28}$$

$$\underline{\beta} \wedge \underline{\delta} = \beta_{\mu\nu}\underline{\omega}^\mu \wedge \underline{\omega}^\nu \wedge \delta_{\gamma\sigma}\underline{\omega}^\gamma \wedge \underline{\omega}^\sigma = \beta_{\mu\nu}\delta_{\gamma\sigma}\underline{\omega}^\mu \wedge \underline{\omega}^\nu \wedge \underline{\omega}^\gamma \wedge \underline{\omega}^\sigma \tag{C.29}$$

$$= -\beta_{\mu\nu}\delta_{\gamma\sigma}\underline{\omega}^\gamma \wedge \underline{\omega}^\nu \wedge \underline{\omega}^\mu \wedge \underline{\omega}^\sigma = \beta_{\mu\nu}\delta_{\gamma\sigma}\underline{\omega}^\gamma \wedge \underline{\omega}^\sigma \wedge \underline{\omega}^\mu \wedge \underline{\omega}^\nu \tag{C.30}$$

$$= \underline{\delta} \wedge \underline{\beta} \tag{C.31}$$

Den generelle regelen er at hvis $\underline{\alpha}$ er en n-form og $\underline{\beta}$ er en m-form, er $\underline{\alpha}\wedge\underline{\beta} = -\underline{\beta} \wedge \underline{\alpha}$ hvis både m og n er oddetall, og $\underline{\alpha} \wedge \underline{\beta} = \underline{\beta} \wedge \underline{\alpha}$ hvis enten m eller n er et liketall. Dette kommer av at hvis m eller n er like, blir det alltid et like antall ombyttinger av basis-enformer.

Oppgave C7: Koordinattransformasjoner i to dimensjoner

a) Likningene som er oppgitt gir relasjonen

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{C.32}$$

og denne matrisa er $M^\mu{}_m$, siden $x^\nu = M^\mu{}_m x^m$. Dette er den inverse av den transformasjonsmatrisa vi skal finne, $M^m{}_\mu$. Ved hjelp av uttrykket for den inverse av ei 2×2-matrise, finner vi

$$M^m{}_\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \tag{C.33}$$

b) Avstanden mellom punktene $\vec{x}$ og $\vec{x} + d\vec{x}$ er $ds = |d\vec{x}|$. Vi uttrykker denne vektoren ved komponentene, og får

$$\begin{aligned} |d\vec{x}|^2 &= |dx^1\vec{e}_1 + dx^2\vec{e}_2|^2 = (dx^1\vec{e}_1 + dx^2\vec{e}_2) \cdot (dx^1\vec{e}_1 + dx^2\vec{e}_2) \\ &= dx^1dx^1\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + dx^1dx^2\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + dx^2dx^1\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 + dx^2dx^2\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 \\ &= dx^\mu dx^\nu \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu \end{aligned} \tag{C.34}$$

Siden vi har at $|d\vec{x}|^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, ser vi at vi må ha $\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu = g_{\mu\nu}$.

Vi kan finne $g_{\mu\nu}$ ved å bruke transformasjonsmatrisa, ved at $g_{\mu\nu} = M^m{}_\mu M^n{}_\nu g_{mn}$. Siden $g_{mn} = \delta_{mn}$, får vi da at $g_{\mu\nu} = M^m{}_\mu M^m{}_\nu$. Eksplisitt blir den metriske tensoren

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} \tag{C.35}$$

Ved å bruke transformasjonsmatrisa finner vi komponentene til $\vec{u}$ og $\vec{v}$ i x, y-basisen,

$$\begin{aligned} u^x &= \frac{1}{3}u^1 + \frac{1}{3}u^2 = \frac{2}{3}, \qquad & u^y &= -\frac{1}{3}u^1 + \frac{2}{3}u^2 = -\frac{2}{3}, \\ v^x &= \frac{1}{3}v^1 + \frac{1}{3}v^2 = 1, \qquad & v^y &= -\frac{1}{3}v^1 + \frac{2}{3}v^2 = 2. \end{aligned} \tag{C.36}$$

Regner vi ut skalarproduktet $\vec{u} \cdot \vec{v}$ i de to forskjellige basisene, får vi som forventet det samme resultatet $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{2}{3}$.

c) Vi definerer $\vec{\omega}^\mu$ ved

$$\vec{\omega}^\mu \cdot \vec{e}_\nu = \delta^\mu{}_\nu. \tag{C.37}$$

Dette er fire likninger, en for hver kombinasjon av μ og ν, med fire ukjente som er de to komponentene til $\vec{\omega}^0$ og de to komponentene til $\vec{\omega}^1$.

Vi kunne finne disse komponentene ved å løse likningene på vanlig måte, men ved å skrive vektorene ut ved komponentene i $\{\vec{e}_\mu\}$-basisen, $\vec{\omega}^\mu = (\vec{\omega}^\mu)^\alpha \vec{e}_\alpha$, kan vi skrive likningene som

$$\delta^\mu{}_\nu = \vec{\omega}^\mu \cdot \vec{e}_\nu = (\vec{\omega}^\mu)^\alpha \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\nu = (\vec{\omega}^\mu)^\alpha g_{\alpha\nu}, \tag{C.38}$$

hvor vi bruker uttrykket for den metriske tensoren som skalarproduktet av basisvektorene. Vi ser at $(\vec{\omega}^\mu)^\alpha$ som matrise med indekser μ, α må være den inverse matrisa til $g_{\alpha\nu}$, og dette er nettopp $g^{\mu\alpha}$. Så vi får at vektorene $\{\vec{\omega}^\mu\}$ er gitt ved

$$\vec{\omega}^\mu = g^{\mu\nu}\vec{e}_\nu, \tag{C.39}$$

hvor matrisa $g^{\mu\nu}$ finnes ved å invertere (C.35),

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{C.40}$$

Vi kan så bruke basisskift-matrisa $M^m{}_\mu$ gjennom relasjonen $\vec{e}_\nu = M^n{}_\nu \vec{e}_n$ for å finne vektorene $\vec{\omega}^\mu$ uttrykt ved $\vec{e}_m$, og siden vi også har relasjonen $g^{\mu\nu} = M^\mu{}_m M^\nu{}_m$, får vi

$$\vec{\omega}^\mu = g^{\mu\nu} M^n{}_\nu \vec{e}_n = M^\mu{}_m M^\nu{}_m M^n{}_\nu \vec{e}_n = M^\mu{}_n \vec{e}_n \tag{C.41}$$

$$\vec{\omega}^1 = 2\vec{e}_x - \vec{e}_y \quad \vec{\omega}^2 = \vec{e}_x + \vec{e}_y \tag{C.42}$$

Basisskifte-matrisa mellom basisene $\{\vec{\omega}^\mu\}$ og $\{\vec{e}_\mu\}$ er nettopp matrisa for den metriske tensoren $g^{\mu\nu}$. Dermed får vi også for komponentene uttrykt i den "kovariante" basisen,

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \tag{C.43}$$

Vi skal nå finne komponentene til vektoren $\vec{a} = 3\vec{e}_x + \vec{e}_y$ i de to basisene. Først bruker vi transformasjonsmatrisa $M^m{}_\mu$ til å finne $a^m = M^m{}_\mu a^\mu$, og får

$$a^1 = 2a^x - a^y = 5, \quad a^2 = a^x + a^y = 4. \tag{C.44}$$

Deretter bruker vi $g_{\mu\nu}$ for å finne $a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$,

$$a_1 = \frac{2}{9}a^1 - \frac{1}{9}a^2 = \frac{2}{3}, \quad a_2 = -\frac{1}{9}a^1 + \frac{5}{9}a^2 = \frac{5}{3}. \tag{C.45}$$

d) Vi regner ut $\vec{\omega}^\mu \cdot \vec{\omega}^\nu$ ved å bruke uttrykkene (C.42), og får

$$\begin{pmatrix} \vec{\omega}^1 \cdot \vec{\omega}^1 & \vec{\omega}^1 \cdot \vec{\omega}^2 \\ \vec{\omega}^2 \cdot \vec{\omega}^1 & \vec{\omega}^2 \cdot \vec{\omega}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2\vec{e}_x - \vec{e}_y)^2 & (2\vec{e}_x - \vec{e}_y) \cdot (\vec{e}_x + \vec{e}_y) \\ (\vec{e}_x + \vec{e}_y) \cdot (2\vec{e}_x - \vec{e}_y) & (\vec{e}_x + \vec{e}_y)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{C.46}$$

Dette er samme matrise vi fant i (C.40), som forventet.

Vi skal vise at $g_{\mu\nu}\vec{\omega}^\mu \otimes \vec{\omega}^\nu = g^{\mu\nu}\vec{e}_\mu \otimes \vec{e}_\nu = g^{mn}\vec{e}_m \otimes \vec{e}_n$, og gjør dette ved å først uttrykke $\vec{\omega}^\mu$ ved $\vec{e}_\mu$, og deretter uttrykke $\vec{e}_\mu$ ved $\vec{e}_m$:

$$g_{\mu\nu}\vec{\omega}^\mu \otimes \vec{\omega}^\nu = g_{\mu\nu}(g^{\mu\alpha}\vec{e}_\alpha) \otimes (g^{\nu\beta}\vec{e}_\beta) = g_{\mu\nu}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\beta = \delta^\alpha{}_\nu g^{\nu\beta}\vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\beta = g^{\alpha\beta}\vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\beta \tag{C.47}$$

$$g^{\mu\nu}\vec{e}_\mu \otimes \vec{e}_\nu = g^{\mu\nu}(M^m{}_\mu \vec{e}_m) \otimes (M^n{}_\nu \vec{e}_n) = g^{\mu\nu}M^m{}_\mu M^n{}_\nu \vec{e}_m \otimes \vec{e}_n = g^{mn}\vec{e}_m \otimes \vec{e}_n \tag{C.48}$$

Det er fire basisvektorer $\vec{e}_m \otimes \vec{e}_n$, så de utspenner et firedimensjonalt rom.

En antisymmetrisk tensor $A^{[mn]}$ kan skrives på matriseform som

$$A^{[mn]} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \tag{C.49}$$

hvor a er en konstant. Basisvektoren $\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y$ uttrykt i x, y-basisen er på matriseform

$$\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_x \otimes \vec{e}_y - \vec{e}_y \otimes \vec{e}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{C.50}$$

så vi kan skrive $A^{[mn]} = a\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y$.

Vi regner ut $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ved å sette inn uttrykkene for $\vec{u}$ og $\vec{v}$i x, y-basisen, (C.36),

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= \vec{u} \otimes \vec{v} - \vec{v} \otimes \vec{u} \\ &= (\frac{2}{3}\vec{e}_x - \frac{2}{3}\vec{e}_y) \otimes (\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) - (\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) \otimes (\frac{2}{3}\vec{e}_x - \frac{2}{3}\vec{e}_y) \\ &= 2(\vec{e}_x \otimes \vec{e}_y - \vec{e}_y \otimes \vec{e}_x) = 2\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y \end{aligned} \tag{C.51}$$

Tilsvarende finner vi

$$\vec{\omega}^1 \wedge \vec{\omega}^2 = 3. \tag{C.52}$$

FYS4160

OPPGAVEARK D – Løsningsforslag av Håkon Enger

Oppgave D1: Duale former

a) Vektorene har komponenter $A^1 = 1$, $A^2 = 2$, $A^3 = -1$, $B^1 = 2$, $B^2 = -3$ og $B^3 = 1$. Siden vi er i det Euklidske rommet med en ortonormal basis $g_{ij} = \delta_{ij}$, er komponentene til 1-formene $\underline{A}$ og $\underline{B}$ lik komponentene til de tilsvarende vektorene, $A_i = \delta_{ij}A^j$ og $B_i = \delta_{ij}B^j$:

$$\underline{A} = \underline{\omega}^1 + 2\underline{\omega}^2 - \underline{\omega}^3, \qquad \underline{B} = 2\underline{\omega}^1 - 3\underline{\omega}^2 + \underline{\omega}^3, \tag{D.1}$$

De duale 1-formene $\underline{\alpha} = *\underline{A}$ og $\underline{\beta} = *\underline{B}$ har komponenter $\alpha_{ij} = \epsilon_{ijk}A^k$ og $\beta_{ij} = \epsilon_{ijk}B^k$, altså

$$\alpha_{12} = A^3 = -1, \quad \alpha_{13} = -A^2 = -2, \quad \alpha_{23} = A^1 = 1 \tag{D.2}$$

$$\beta_{12} = B^3 = 1, \quad \beta_{13} = -B^2 = 3, \quad \beta_{23} = B^1 = 2. \tag{D.3}$$

$$\tag{D.4}$$

To-formen $\underline{\theta} = *(\underline{\omega}^x - 2\underline{\omega}^y)$ har komponenter $\theta_{ij} = \epsilon_{ijk}\sigma^k = \epsilon_{ijk}g^{k\ell}\sigma_\ell$, som gir

$$\theta_{12} = -\theta_{21} = \sigma^3 = 0, \quad \theta_{13} = -\theta_{31} = -\sigma^2 = 2, \quad \theta_{23} = -\theta_{32} = \sigma^1 = 1. \tag{D.5}$$

b) Ytreproduktet $\underline{\theta} = \underline{A} \wedge \underline{B}$ finner vi ved å sette inn uttrykkene for 1-formene direkte:

$$\underline{A} \wedge \underline{B} = (\underline{\omega}^x + 2\underline{\omega}^y - \underline{\omega}^z) \wedge (2\underline{\omega}^x - 3\underline{\omega}^y + \underline{\omega}^z) \tag{D.6}$$

$$= 2\underline{\omega}^x \wedge \underline{\omega}^x - 3\underline{\omega}^x \wedge \underline{\omega}^y + \underline{\omega}^x \wedge \underline{\omega}^z \tag{D.7}$$

$$+ 4\underline{\omega}^y \wedge \underline{\omega}^x - 6\underline{\omega}^y \wedge \underline{\omega}^y + 2\underline{\omega}^y \wedge \underline{\omega}^z \tag{D.8}$$

$$- 2\underline{\omega}^z \wedge \underline{\omega}^x + 3\underline{\omega}^z \wedge \underline{\omega}^y - \underline{\omega}^z \wedge \underline{\omega}^z \tag{D.9}$$

$$= -7\underline{\omega}^x \wedge \underline{\omega}^y + 3\underline{\omega}^x \wedge \underline{\omega}^z - \underline{\omega}^y \wedge \underline{\omega}^z. \tag{D.10}$$

(Her bruker vi at $\underline{\omega}^x \wedge \underline{\omega}^y = -\underline{\omega}^y \wedge \underline{\omega}^x$, etc.)

Kryssproduktet av $\vec{A}$ og $\vec{B}$ kan regnes ut på vanlig måte, $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{e}_x - 3\vec{e}_y - 7\vec{e}_z$. Vi ser at komponentene er de samme som komponentene for $\underline{\theta} = \underline{A} \wedge \underline{B}$. Dette kan vi vise generelt: Vi kan uttrykke kryssproduktet ved hjelp av den antisymmetriske tensoren ϵ_{ijk} som $C^k = \epsilon_{mnk} A^m B^n$,

$$\epsilon_{ijk} C^k = \epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} A^m B^n = (\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}) A^m B^n = A^i B^j - A^j B^i, \quad \text{(D.11)}$$

og siden ytreproduktet av to 1-former gir $\theta_{ij} = A_i B_j - A_j B_i$, ser vi at i tilfellet $g_{ij} = \delta_{ij}$ (euklidsk ortonormal basis[1]) overensstemmelse mellom de to uttrykkene.

Ytreproduktet $\underline{A} \wedge *\underline{B}$ er gitt ved

$$\begin{aligned}
\underline{A} \wedge *\underline{B} &= (A_\ell \underline{\omega}^\ell) \wedge (\frac{1}{2}\epsilon_{ijk} B^k \underline{\omega}^i \wedge \underline{\omega}^j) \\
&= (A_x \underline{\omega}^x + A_y \underline{\omega}^y + A_z \underline{\omega}^z) \wedge (B^z \underline{\omega}^x \wedge \underline{\omega}^y - B^y \underline{\omega}^x \wedge \underline{\omega}^z + B^x \underline{\omega}^y \wedge \underline{\omega}^z) \\
&= (\vec{A} \cdot \vec{B}) \underline{\omega}^x \wedge \underline{\omega}^y \wedge \underline{\omega}^z
\end{aligned} \quad \text{(D.12)}$$

c) Den ytrederiverte av $\underline{A}$ blir

$$\begin{aligned}
\underline{dA} &= A_{i,j} \underline{\omega}^j \wedge \underline{\omega}^i \\
&= (A_{2,1} - A_{1,2}) \underline{\omega}^1 \wedge \underline{\omega}^2 + (A_{3,1} - A_{1,3}) \underline{\omega}^1 \wedge \underline{\omega}^3 + (A_{3,2} - A_{2,3}) \underline{\omega}^2 \wedge \underline{\omega}^3.
\end{aligned} \quad \text{(D.13)}$$

Vi ser at komponentene er de samme som komponentene til

$$\nabla \times \vec{A} = (A_{3,2} - A_{2,3})\vec{e}_1 + (A_{1,3} - A_{3,1})\vec{e}_2 + (A_{2,1} - A_{1,2})\vec{e}_3, \quad \text{(D.14)}$$

nærmere bestemt $(\underline{dA})_{ij} = \epsilon_{ijk} (\nabla \times \vec{A})^k$.

Den ytrederiverte av den duale $*\underline{A}$ er gitt ved

$$\begin{aligned}
\underline{d} * \underline{A} &= \frac{1}{2!} (*\underline{A})_{ij,k} \underline{\omega}^k \wedge \underline{\omega}^i \wedge \underline{\omega}^j \\
&= \frac{1}{2!} (\epsilon_{ij\ell} A^\ell)_{,k} \underline{\omega}^k \wedge \underline{\omega}^i \wedge \underline{\omega}^j \\
&= A^k{}_{,k} \underline{\omega}^x \wedge \underline{\omega}^y \wedge \underline{\omega}^z
\end{aligned} \quad \text{(D.15)}$$

For et skalarfelt f er

$$\underline{d}f = \partial_i f \underline{\omega}^i, \quad \text{(D.16)}$$

som opplagt har samme komponenter som ∇f. Vi kan så bruke korrespondansen (D.15) for $\underline{A} = \underline{d}f$ til å vise at

$$\underline{d} * \underline{d}f = \nabla^2 f \underline{\omega}^x \wedge \underline{\omega}^y \wedge \underline{\omega}^z \quad \text{(D.17)}$$

[1]Dersom vi definerer ϵ som en virkelig tensor (dvs. med transformasjonsegenskaper som en tensor), har vi at $\epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} = g_{im}g_{jn} - g_{in}g_{jm}$, og uttrykket i oppgaven stemmer uavhengig av metrikk.

Oppgave D2: Relativistisk roterende skive

a) En observatør måler avstanden $d\ell$ mellom to punkter på skiven med koordinater (i det roterende koordinatsystemet) (r, ϕ) og $(r + dr, \phi + d\phi)$. Vi vil finne avstandene han måler ved å bruke med momentane hvilesystemet til observatøren, som er et inertialsystem med samme hastighet som observatøren på et gitt tidspunkt. Dermed kan vi bruke spesiell relativitatsteori. Siden dette referansesystemet har en hastighet i forhold til laboratoriesystemet, kan avstandene som bli målt bli påvirket av "lengdekontraksjon".

Hvis vi først antar at $d\phi = 0$, er avstanden som blir målt i r-retningen, og dermed normalt på hastigheten til systemet. Dermed blir det ingen lengdekontraksjon, og avstanden $d\ell_r = dr$, det samme som i labsystemet.

Så antar vi at $dr = 0$. Nå er avstanden som blir målt fullstendig i lengderetningen. Vi må tenke oss at observatøren har med seg en standard målestav til å måle avstanden med. Denne målestaven vil bli forkortet av lengdekontraksjonen, og avstanden som blir målt vil dermed virke lengre. Formelen for lendgekontraksjon forteller at avstanden observatøren måler dermed blir $d\ell_\phi = \gamma r d\phi = \frac{1}{\sqrt{1-\omega^2 r^2}} r d\phi$, siden avstanden i labsystemet ville være $r d\phi$ og hastigheten er $\omega^2 r^2$.

Vi kan bruke Pytagoras til å finne avstanden når den har komponenter i både r og ϕ-retningene, og resultatet blir

$$d\ell^2 = d\ell_r^2 + d\ell_\phi^2 = dr^2 + \frac{r^2}{1 - \omega^2 r^2} d\phi^2. \tag{D.18}$$

Vi har dermed at $f_1(r, \phi) = 1$ og $f_2(r, \phi) = \frac{r^2}{1-\omega^2 r^2}$.

Måler observatøren avstanden fra $A = (0, 0)$ til $(R, 0)$, kan vi finne resultatet ved å integrere $d\ell$ gitt ved (D.18) langs linjen mellom punktene. Resultatet blir

$$R' = \int_{(0,0)}^{(R,0)} d\ell = \int_0^R dr = R. \tag{D.19}$$

På samme måte kan vi integrere $d\ell$ langs sirkelen $r = R$ for å finne omkretsen L' observatøren måler:

$$L' = \int_0^{2\pi} \frac{R}{\sqrt{1 - \omega^2 R^2}} d\phi = \frac{2\pi R}{\sqrt{1 - \omega^2 R^2}}. \tag{D.20}$$

Siden observatøren finner at $L' \neq 2\pi R'$, vil han kunne konkludere med at metrikken er ikke-Euklidsk. På en positivt krummet flate (f.eks. en kule) ville omkretsen være mindre enn $2\pi R$, på en negativt krummet flate (f.eks. en salflate) ville den være større. Dermed vil observatøren oppfatte skiven som en negativt krummet flate.

b) For å finne $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dt^2$ uttrykt ved $\tilde{x}$ og $\tilde{y}$ må vi først uttrykke x og y ved $\tilde{x}$ og $\tilde{y}$. Det kan vi gjøre slik:

$$x = r\cos(\omega t + \phi) = r\cos\phi\cos(\omega t) - r\sin\phi\sin(\omega t) = \tilde{x}\cos(\omega t) - \tilde{y}\sin(\omega t), \tag{D.21}$$

$$y = r\sin(\omega t + \phi) = r\sin\phi\cos(\omega t) + r\cos\phi\sin(\omega t) = \tilde{y}\cos(\omega t) + \tilde{x}\sin(\omega t). \tag{D.22}$$

Dermed får vi

$$dx = \cos(\omega t)d\tilde{x} - \sin(\omega t)d\tilde{y} + (-\omega\tilde{x}\sin(\omega t) - \omega\tilde{y}\cos(\omega t))dt, \tag{D.23}$$

$$dy = \sin(\omega t)d\tilde{x} + \cos(\omega t)d\tilde{y} + (-\omega\tilde{y}\sin(\omega t) + \omega\tilde{x}\cos(\omega t))dt. \tag{D.24}$$

Vi setter inn, og finner

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 - dt^2 \\ &= d\tilde{x}^2 - 2\omega\tilde{y}d\tilde{x}dt + d\tilde{y}^2 + 2\omega\tilde{x}d\tilde{y}dt - (1 - \omega^2(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2))dt^2 \end{aligned} \tag{D.25}$$

Lagrangefunksjonen $L = \frac{1}{2}g_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\dot{\tilde{x}}^\mu\dot{\tilde{y}}^\nu$ blir dermed

$$L = \frac{1}{2}\dot{\tilde{x}}^2 - \omega\tilde{y}\dot{\tilde{x}}\dot{t} + \frac{1}{2}\dot{\tilde{y}}^2 + \omega\tilde{x}\dot{\tilde{y}}\dot{t} - \frac{1}{2}(1 - \omega^2(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2))\dot{t}^2 \tag{D.26}$$

Lagrangelikningene $\frac{\partial L}{\partial \tilde{x}^\mu} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{x}}^\mu} = 0$ gir

$$\omega\dot{\tilde{y}}\dot{t} + \omega^2\tilde{x}\dot{t}^2 - \ddot{\tilde{x}} + \omega\dot{\tilde{y}}\dot{t} + \omega\tilde{y}\ddot{t} = 0, \tag{D.27}$$

$$-\omega\dot{\tilde{x}}\dot{t} + \omega^2\tilde{y}\dot{t}^2 - \ddot{\tilde{y}} - \omega\dot{\tilde{x}}\dot{t} - \omega\tilde{x}\ddot{t} = 0, \tag{D.28}$$

$$\ddot{t} + \omega\dot{\tilde{y}}\dot{\tilde{x}} + \omega\tilde{y}\ddot{\tilde{x}} - \omega\dot{\tilde{x}}\dot{\tilde{y}} - \omega\tilde{x}\ddot{\tilde{y}} + \omega^2(\tilde{x}\dot{\tilde{x}} + \tilde{y}\dot{\tilde{y}})\dot{t} + \omega^2(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)\ddot{t} = 0. \tag{D.29}$$

Vi ser at $\ddot{t}$ er proporsjonal med ωr, og dermed kan settes lik null i den ikke-relativistiske grensen. Dermed er $t = \tau$ i denne grensen. I så fall blir bevegelseslikningene

$$\ddot{\tilde{x}} = \omega^2\tilde{x} + \omega\dot{\tilde{y}} \tag{D.30}$$

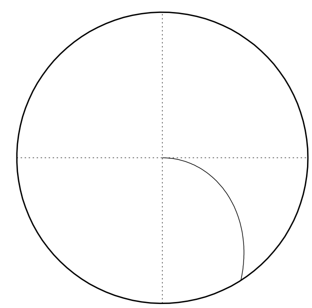
$$\ddot{\tilde{y}} = \omega^2\tilde{y} - \omega\dot{\tilde{x}}, \tag{D.31}$$

som på vektorform kan skrives $\ddot{\vec{r}} = \omega^2\vec{r} - \vec{\omega}\times\vec{r}$, der $\vec{\omega}$ er en vektor med lengde ω og retning langs z-aksen. Dette er nettopp det klassiske uttrykket for sentrifugal- og coriolisakselerasjonen til en partikkel i et roterende referansesystem.

c) Lyssignaler blir sendt ut fra aksen A. I det ikke-roterende labsystemet vil lyset gå i en rett linje langs x-aksen (for eksempel), gitt ved $x = ct$. Ved å bruke (D.22) får vi denne banen uttrykt i $(\tilde{x}, \tilde{y}, t)$-systemet;

$$\tilde{x} = x\cos(\omega t) + y\sin(\omega t) = ct\cos(\omega t), \tag{D.32}$$

$$\tilde{y} = -x\sin(\omega t) + y\cos(\omega t) = -ct\sin(\omega t). \tag{D.33}$$



Dette er en spiral i $(\tilde{x}, \tilde{y})$-planet. For en observatør i dette referansesystemet vil det se ut som lyset også blir påvirket av Corioliskraften.

Fra metrikken (D.25) ser vi at egentiden for en observatør med konstant $\tilde{x}$ og $\tilde{y}$ er gitt ved $d\tau = \sqrt{1-\omega^2 r^2}dt$. Frekvensen denne observatøren måler, kan skrives som $\nu = \frac{dN}{d\tau}$, der dN er antall pulser i løpet av tiden $d\tau$. Frekvensen på det utsendte lyset er $\nu_0 = \frac{dN}{dt}$. Dermed får vi

$$\nu = \frac{dN}{d\tau} = \frac{dN}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{\nu_0}{\sqrt{1-\omega^2 r^2}}. \tag{D.34}$$

Denne frekvensen er større enn den utsendte, noe som vil oppfattes som at fotonene får tilført energi når de beveger seg nedover i tyndgefeltet.

d) Vi kan vise problemet med synkroniseringen ved å studere prosessen fra labsystemet. En Lorentztransformasjon fra det roterende systemet til det ikke-roterende labsystemet gir en tidsforskjell i de to naboklokkene med koordinat ϕ og $\phi + \Delta\phi$ som er synkronisert i det roterende systemet. Denne tidsforskjellen blir

$$\Delta t = \gamma(\Delta\tau + v\Delta\ell) = \gamma^2\omega R^2\Delta\phi, \tag{D.35}$$

der vi bruker at $\Delta\tau = 0$ for de synkroniserte klokkene, $v = \omega R$ og avstanden mellom klokkene i det roterende systemet er $\Delta\ell = \gamma R\Delta\phi$, som vi fant i oppgave a). Rundt skiven integreres $\Delta\phi$ opp til 2π, og vi finner at klokken i punktet $(R, 0)$ som synkroniseringen tok utgangspunkt i vil ha en tidsforskjell (i labsystemet) med den siste klokken i rekken rundt skiven på

$$\Delta T = 2\pi\gamma^2\omega R^2. \tag{D.36}$$

e) Linjeelementet i koordinatene (r, ϕ) er

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + 2\omega r^2 d\phi dt - (1-\omega^2 r^2)dt^2. \tag{D.37}$$

Metrikken gir skalarproduktene av basisvektorene $\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu = g_{\mu\nu}$, og vi ser at koordinatbasisvektorene $(\vec{e}_t, \vec{e}_r, \vec{e}_\phi)$ ikke er en ortonormal basis. Vi kan finne en ortonormal basis ved en ortonormaliseringsprosess:

Vi tar utgangspunkt i tidsretningen, og vil konstruere en vektor $\vec{e}_{\hat{\lambda}}$ med samme retning som $\vec{e}_t$, men med lengde 1. (Dvs. $\vec{e}_{\hat{\lambda}} \cdot \vec{e}_{\hat{\lambda}} = -1$, siden dette er en tidlik vektor). Det gjør vi enkelt ved å dele på lengden til $\vec{e}_t$:

$$\vec{e}_{\hat{\lambda}} = \frac{\vec{e}_t}{|\vec{e}_t|} = \frac{\vec{e}_t}{\sqrt{|\vec{e}_t \cdot \vec{e}_t|}} = \frac{\vec{e}_t}{\sqrt{|g_{tt}|}} = \frac{\vec{e}_t}{\sqrt{1-\omega^2 r^2}}. \tag{D.38}$$

Vi vil så finne en vektor $\vec{e}_{\hat{\xi}}$ med utgangspunkt i $\vec{e}_r$, men vil at den skal være ortogonal med $\vec{e}_{\hat{\lambda}}$. Da må vi trekke fra en eventuell komponent i retning av $\vec{e}_{\hat{\lambda}}$, og vi får vektoren $\vec{e}_r - (\vec{e}_r \cdot \vec{e}_{\hat{\lambda}})(-\vec{e}_{\hat{\lambda}})$ (Merk at siden $\vec{e}_{\hat{\lambda}} \cdot \vec{e}_{\hat{\lambda}} = -1$ må vi bruke $-\vec{e}_{\hat{\lambda}}$ her istedenfor $\vec{e}_{\hat{\lambda}}$!). Til slutt må denne vektoren også normaliseres til lengde en. Siden $g_{rt} = 0$, er det i dette tilfellet ingen komponent i retning av $\vec{e}_{\hat{\lambda}}$, og vektoren $\vec{e}_r$ har også allerede lengde en:

$$\vec{e}_{\hat{\xi}} = \frac{\vec{e}_r - (\vec{e}_r \cdot \vec{e}_{\hat{\lambda}})(-\vec{e}_{\hat{\lambda}})}{|\vec{e}_r - (\vec{e}_r \cdot \vec{e}_{\hat{\lambda}})(-\vec{e}_{\hat{\lambda}})|} = \frac{\vec{e}_r}{|\vec{e}_r|} = \vec{e}_r \tag{D.39}$$

Til slutt gjør vi det samme med vektoren $\vec{e}_{\hat{\eta}}$, hvor vi tar utgangspunkt i $\vec{e}_\phi$, trekker fra komponenter i $\hat{\xi}$- og $\hat{\lambda}$-retningene, og normaliserer:

$$\vec{e}_{\hat{\eta}} = \frac{\vec{e}_\phi - (\vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_{\hat{\xi}})\vec{e}_{\hat{\xi}} - (\vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_{\hat{\lambda}})(-\vec{e}_{\hat{\lambda}})}{|\vec{e}_\phi - (\vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_{\hat{\xi}})\vec{e}_{\hat{\xi}} - (\vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_{\hat{\lambda}})(-\vec{e}_{\hat{\lambda}})|} = \frac{\vec{e}_\phi + \frac{2\omega r^2}{\sqrt{1-\omega^2 r^2}}\vec{e}_{\hat{\lambda}}}{|\vec{e}_\phi + \frac{2\omega r^2}{\sqrt{1-\omega^2 r^2}}\vec{e}_{\hat{\lambda}}|} = \frac{\vec{e}_\phi + \frac{2\omega r^2}{(1-\omega^2 r^2)}\vec{e}_t}{\sqrt{r^2 + \frac{4\omega^2 r^4}{1-\omega^2 r^2}}} \tag{D.40}$$

Lyssignalet med koordinater $(t, 0, t)$ i (x, y, t)-systemet har retning $\vec{u} = \vec{e}_r + \vec{e}_t$. Vi kan regne ut komponentene i $\hat{\xi}$ og $\hat{\eta}$-retningene ved å ta prikkproduktet med de tilsvarende vektorene (dette gjelder siden $(\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\lambda})$-systemet er ortonormalt),

$$u_{\hat{\xi}} = (\vec{e}_r + \vec{e}_t) \cdot \vec{e}_{\hat{\xi}} = 1 \tag{D.41}$$

$$u_{\hat{\eta}} = (\vec{e}_r + \vec{e}_t) \cdot \vec{e}_{\hat{\eta}} = 0 \tag{D.42}$$

FYS4160

OPPGAVEARK E – Løsningsforslag av Håkon Enger

Oppgave E1: Fri partikkel i hyperbolsk koordinatsystem

a) Lagrangefunksjonen er gitt ved

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{1}{2} \dot{V}^2 - \frac{1}{2} V^2 \dot{U}^2. \tag{E.1}$$

Bevegelseslikningene blir

$$\ddot{V} + V \dot{U}^2 = 0, \tag{E.2}$$

$$\frac{d}{d\tau}(V^2 \dot{U}) = 0. \tag{E.3}$$

Uttrykket vi skal vise at er en løsning er V som en (implisitt) funksjon av U. Vi finner dermed en differensiallikning for $V(U)$ og viser at det oppgitte uttrykket løser denne likningen.

Bevegelseslikningen for U, (E.3) forteller at $p_U = V^2 \dot{U}$ er en bevegelseskonstant. Dermed kan vi skrive

$$\dot{U} = \frac{p_U}{V^2}. \tag{E.4}$$

Dette uttrykket kan vi bruke til å uttrykke deriverte med hensyn på τ som deriverte med hensyn på U, gjennom $\frac{d}{d\tau} = \frac{dU}{d\tau} \frac{d}{dU} = \dot{U} \frac{d}{dU}$. Vi får

$$\dot{V} = \dot{U} \frac{dV}{dU} = \frac{p_U}{V^2} \frac{dV}{dU}, \tag{E.5}$$

$$\ddot{V} = \dot{U} \frac{d\dot{V}}{dU} = \frac{p_U}{V^2} \frac{d}{dU} \left(\frac{p_U}{V^2} \frac{dV}{dU} \right) = \frac{p_U^2}{V^4} \left(\frac{d^2V}{dU^2} - \frac{2}{V} \left(\frac{dV}{dU} \right)^2 \right). \tag{E.6}$$

Ved å sette (E.6) inn i (E.2) får vi

$$\frac{d^2V}{dU^2} - \frac{2}{V} \left(\frac{dV}{dU} \right)^2 + V = 0. \tag{E.7}$$

Ved å sette inn uttrykket gitt i oppgaven, $V = \frac{V_0}{\cosh(U - U_0)}$, ser vi at det er en løsning av denne likningen. Vi ser også direkte at begynnelsesposisjonen $V(U_0) = V_0$ og begynnelseshastigheten $\dot{V}(U_0) = 0$.

b) Ved å sette inn løsningen $V(U)$ i koordinattransformasjonen gitt i oppgaven, får vi

$$x = V \cosh U = \frac{V_0 \cosh U}{\cosh(U - U_0)}, \tag{E.8}$$

$$t = V \sinh U = \frac{V_0 \sinh U}{\cosh(U - U_0)}. \tag{E.9}$$

Vi regner ut hastigheten $v = \frac{dx}{dt}$ ved

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dx}{dU}}{\frac{dt}{dU}} = \frac{\sinh U \cosh(U - U_0) - \cosh U \sinh(U - U_0)}{\cosh U \cosh(U - U_0) - \sinh U \sinh(U - U_0)} = \frac{\sinh U_0}{\cosh U_0}, \tag{E.10}$$

hvor vi har brukt uttrykket for sinh og cosh av summen av to vinkler. Siden dette er en konstant, er partikkelbanene rette linjer i (x, t)-koordinatsystemet.

$t = 0$ gir betingelsen $V \sinh U = 0$ som betyr at $U = 0$, og vi får at

$$x(0) = \frac{V_0 \cosh U}{\cosh(U - U_0)} = \frac{V_0}{\cosh(U_0)}. \tag{E.11}$$

Intervallet $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ uttrykt ved x og t kan vi finne ved å bruke koordinattransformasjonsmatrisen på g, $g_{ij} = M^\mu{}_i M^\nu{}_j g_{\mu\nu}$ (der i, j står for koordinatene x, t og μ, ν står for U, V). Siden $M^\mu{}_i = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^i}$ er den inverse matrisa til $M^i{}_\mu = \frac{\partial x^i}{\partial x^\mu}$ regner vi ut den sistnevnte matrisa fra koordinattransformasjonen gitt i oppgaveteksten, og inverterer matrisa:

$$(M^i{}_\mu) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial U} & \frac{\partial x}{\partial V} \\ \frac{\partial t}{\partial U} & \frac{\partial t}{\partial V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \sinh U & \cosh U \\ V \cosh U & \sinh U \end{pmatrix}. \tag{E.12}$$

Den inverse av denne matrisa blir

$$(M^\mu{}_i) = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial t} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sinh U}{V} & \frac{\cosh U}{V} \\ \cosh U & -\sinh U \end{pmatrix}, \tag{E.13}$$

og dermed finner vi ved å sette inn at

$$ds^2 = dx^2 - dt^2. \tag{E.14}$$

Dette er nettopp Minkowski-metrikken for et rom med en rom- og en tidskoordinat.

c) Vi kan finne p_U uttrykt ved $p_t = -E$ og $p_x = p$ ved hjelp av transformasjonsmatrisa:

$$p_U = \frac{\partial x^i}{\partial U} p_i = \frac{\partial x}{\partial U} p_x + \frac{\partial t}{\partial U} p_t = V \sinh U p - V \cosh U E = tp - xE. \tag{E.15}$$

Vi har allerede sett at dette er en bevegelseskonstant. Dette kan man se direkte fra metrikken ved at koordinaten U ikke inngår eksplisitt.

Den kontravariante komponenten får man ved å bruke den metriske tensoren til å heve indeksen. Vi regner ut $g^{\mu\nu}$ ved å invertere matrisa for $g_{\mu\nu}$:

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -V^2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{V^2} \end{pmatrix}. \tag{E.16}$$

Dermed blir

$$p^U = g^{U\mu} p_\mu = g^{UU} p_U = -\frac{p_U}{V^2} \tag{E.17}$$

Siden V opplagt ikke er en bevegelseskonstant (noe vi f.eks. kan se fra løsningen oppgitt i oppgaveteksten) kan heller ikke p^U være det.

Vi finner at $p_V = \frac{\partial L}{\partial \dot{V}} = \dot{V}$, som ikke er en bevegelseskonstant, og $p^V = g^{V\mu} p_\mu = p_V$ som dermed heller ikke er en bevegelseskonstant.

Oppgave E2: Romlig geodet i roterende referansesystem

a) Komponentene til tangentvektorene er oppgitt i oppgaven som $\dot{x}^i = (\dot{r}, \dot{\theta})$. Betingelsen for at disse har lengde en blir

$$1 = \dot{x}_i \dot{x}^i = g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = \dot{r}^2 + \frac{r^2}{1 - r^2\omega^2} \dot{\theta}^2. \tag{E.18}$$

(Bruker her $c = 1$, til forskjell fra oppgaveteksten).

b) Lagrangefunksjonen er gitt ved

$$L = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{r^2}{1 - r^2\omega^2} \frac{\dot{\theta}^2}{2}. \tag{E.19}$$

c) Siden koordinaten θ ikke inngår eksplisitt i Lagrangefunksjonen, kalles denne syklisk. Det betyr at den konjugerte impulsen,

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{r^2 \dot{\theta}}{1 - r^2\omega^2} \tag{E.20}$$

er en bevegelseskonstant.

d) Fra (E.18) finner vi at

$$\dot{r}^2 = 1 - \frac{r^2}{1 - r^2\omega^2}\dot{\theta}^2 \tag{E.21}$$

Ved å bruke fra c) at $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{r^2}(1 - r^2\omega^2)$ får vi fra (E.21)

$$\frac{\dot{r}^2}{\dot{\theta}^2} = \frac{1}{\dot{\theta}^2} - \frac{r^2}{1 - r^2\omega^2} = \frac{r^4}{p_\theta{}^2(1 - r^2\omega^2)^2} - \frac{r^2}{1 - r^2\omega^2}, \tag{E.22}$$

og ved å ta kvadratroten av dette finner vi differensiallikningen til kurven,

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \frac{r}{\sqrt{1 - r^2\omega^2}}\sqrt{\frac{r^2}{p_\theta{}^2(1 - r^2\omega^2)} - 1} \tag{E.23}$$

e) Vi setter inn $\theta = 0$, $r = r_0$, $\dot{r} = 0$ og $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{r^2}(1 - r^2\omega^2)$ i (E.18), og får

$$1 = \frac{p_\theta}{r_0{}^2}(1 - r_0{}^2\omega^2) \tag{E.24}$$

som gir at

$$p_\theta{}^2 = \frac{r_0{}^2}{1 - r_0{}^2\omega^2}. \tag{E.25}$$

Vi får også at

$$\frac{p_\theta}{r_0} = \sqrt{1 + p_\theta{}^2\omega^2}. \tag{E.26}$$

f) Vi setter (E.25) inn i (E.23) og får

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \frac{r}{\sqrt{1 - r^2\omega^2}}\sqrt{\frac{r^2(1 - r_0{}^2\omega^2)}{r_0{}^2(1 - r^2\omega^2)} - 1} \\ &= \frac{r}{\sqrt{1 - r^2\omega^2}}\sqrt{\frac{r^2 - r_0{}^2}{r_0{}^2(1 - r^2\omega^2)}} = \frac{r}{r_0}\frac{\sqrt{r^2 - r_0{}^2}}{1 - r^2\omega^2}. \end{aligned} \tag{E.27}$$

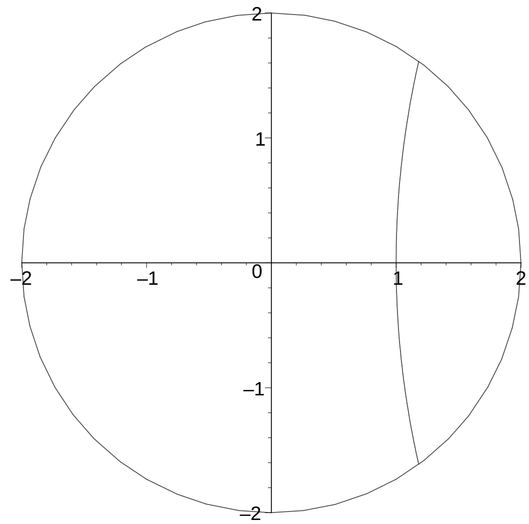
Dette kan vi uttrykke som

$$\frac{dr}{r\sqrt{r^2 - r_0{}^2}} - \frac{\omega^2 r dr}{\sqrt{r^2 - r_0{}^2}} = \frac{d\theta}{r_0}. \tag{E.28}$$

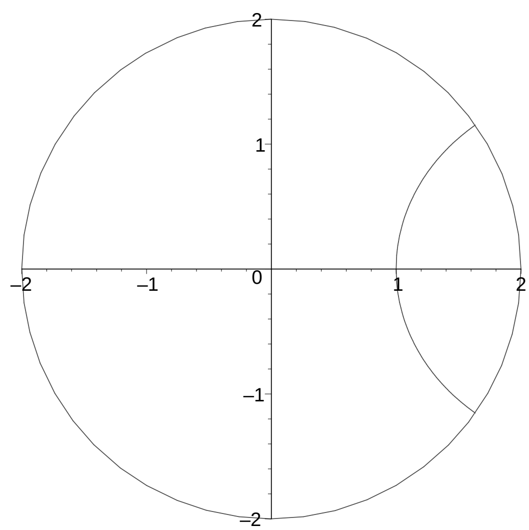
Integrerer vi, får vi

$$\theta(r) = -\arctan\left(\frac{r_0}{\sqrt{r^2 - r_0{}^2}}\right) - r_0\omega^2\sqrt{r^2 - r_0{}^2} + \theta_0, \tag{E.29}$$

hvor θ_0 er en integrasjonskonstant. Grafen til kurven med to forskjellige valg av parametre er gitt på neste side.



Figur E.1: $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\omega = 0.25$ og $r_0 = 1$



Figur E.2: $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\omega = 0.5$ og $r_0 = 1$

FYS4160

OPPGAVEARK F – Løsningsforslag av Håkon Enger

Oppgave F1: Differensialoperatorer i sfæriske koordinater

a) Vi finner den metriske tensoren i de nye koordinatene ved å bruke transformasjonsmatrisen ${M^i}_\mu$ på den kartesiske metrikken $g_{ij} = \delta_{ij}$, hvor vi her lar latinske indekser som i stå for de kartesiske koordinatene x, y, z og greske indekser som μ stå for polarkoordinatene r, θ, ϕ.

$$g_{\mu\nu} = {M^i}_\mu {M^j}_\nu g_{ij}. \tag{F.1}$$

Vi må dermed regne ut komponentene ${M^i}_\mu = \frac{\partial x^i}{\partial x^\mu}$;

$$\left({M^i}_\mu\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}. \tag{F.2}$$

Setter vi inn dette i (F.1), og bruker gjentatte ganger at $\cos^2 + \sin^2 = 1$, får vi

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2. \tag{F.3}$$

Vi ser at koordinatene er ortogonale (men vi har ikke en ortonormal basis!) siden det ikke er noen ikke-diagonale ledd i metrikken.

b) Komponentene til $\underline{d}f$ er $(\underline{d}f)_\mu = f_{,\mu} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu}$. Vi danner en vektor ved å bruke den inverse metrikken $g^{\mu\nu}$. For å finne denne må vi invertere matrisa $(g_{\mu\nu})$,

$$(g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}. \tag{F.4}$$

(Siden metrikken er diagonal, trenger vi i dette tilfellet bare å invertere komponentene.) Dermed er komponentene til ∇f gitt ved

$$(\nabla f)^\mu = g^{\mu\nu}(\underline{d}f)_\nu = g^{\mu\nu}\frac{\partial f}{\partial x^\nu}, \tag{F.5}$$

eller

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\right). \tag{F.6}$$

c) Fra oppgave D1 har vi at sammenhengen mellom den ytrederiverte og curlen til et vektorfelt er

$$(\underline{dA})_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\lambda}(\nabla \times \vec{A})^{\lambda}, \tag{F.7}$$

der$\epsilon_{\mu\nu\lambda}$ er komponentenen til volumformen $\underline{\boldsymbol{\epsilon}}$ (se læreboka kapittel 4.9–4.10). Disse er definert ved $\epsilon_{\mu\nu\lambda} = \sqrt{|g|}\varepsilon_{ijk}$ og $g = \det(g_{ij}) = r^4 \sin^2\theta$, samt at vi bruker definisjonen $\varepsilon_{r\theta\phi} = +1$. Så vi har dermed

$$r^2 \sin\theta(\nabla \times \vec{A})^r = (\underline{dA})_{\theta\phi} = A_{[\phi,\theta]} = \frac{\partial A_\phi}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}. \tag{F.8}$$

Vi ønsker å uttrykke dette ved deriverte av vektorkomponentene A^μ, så vi bruker metrikken: $A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu$,

$$(\nabla \times \vec{A})^r = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r^2\sin^2\theta A^\phi\right) - \frac{\partial}{\partial\phi}\left(r^2 A^\theta\right)\right] \tag{F.9}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin^2\theta A^\phi\right) - \frac{\partial}{\partial\phi}\left(A^\theta\right)\right). \tag{F.10}$$

For de to andre komponentene blir beregningen tilsvarende,

$$(\nabla \times \vec{A})^\theta = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial A^r}{\partial\phi} - \sin^2\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A^\phi\right)\right] \tag{F.11}$$

$$(\nabla \times \vec{A})^\phi = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A^\theta\right) - \frac{\partial A^r}{\partial\theta}\right]. \tag{F.12}$$

d) Sammenhengen mellom divergensen til en vektor og den ytrederiverte av den duale er

$$\underline{d}*\underline{A} = (\nabla \cdot \vec{A})\underline{\boldsymbol{\epsilon}}, \tag{F.13}$$

hvor $\underline{\boldsymbol{\epsilon}}$ er volumformen (se læreboka kapittel 4.9–4.10). Den duale av en vektor er definert ved

$$(*\underline{A})_{ij} = \boldsymbol{\epsilon}_{ijk}A^k = \sqrt{|g|}\varepsilon_{ijk}A^k, \tag{F.14}$$

hvor $g = \det(g_{ij}) = r^4\sin^2\theta$ og ε_{ijk} er Levi–Civita-symbolet definert ved at $\varepsilon_{r\theta\phi} = +1$.

Vi får dermed

$$(*A)_{r\theta} = r^2\sin\theta A^\phi \quad (*A)_{r\phi} = -r^2\sin\theta A^\theta \quad (*A)_{\theta\phi} = r^2\sin\theta A^r. \tag{F.15}$$

Den ytrederiverte har bare en komponent,

$$\begin{aligned}(\underline{d}{*}\underline{A})_{r\theta\phi} &= \partial_r(*A)_{\theta\phi} - \partial_\theta(*A)_{r\phi} + \partial_\phi(*A)_{r\theta} \\ &= \partial_r(r^2 \sin\theta A^r) + \partial_\theta(r^2 \sin\theta A^\theta) + \partial_\phi(r^2 \sin\theta A^\phi).\end{aligned} \tag{F.16}$$

Fra likning (F.13) ser vi at vi skal ha at $(\underline{d}{*}\underline{A})_{r\theta\phi} = (\nabla \cdot \vec{A})\boldsymbol{\epsilon}_{r\theta\phi} = (\nabla \cdot \vec{A})r^2 \sin\theta$, så dermed får vi

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{(\underline{d}{*}\underline{A})_{r\theta\phi}}{r^2 \sin\theta} = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 A^r) + \frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta A^\theta) + \partial_\phi A^\phi. \tag{F.17}$$

For $\nabla^2 f$ bruker vi bare det samme uttrykket med $\vec{A} = \nabla f$ og uttrykket (F.6) for ∇f. Dermed får vi

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} \tag{F.18}$$

Sammelikner vi med uttrykkene i Rottmann, ser vi at uttrykket for $\nabla^2 f$ stemmer, men de andre uttrykkene vi regnet ut er ikke i samsvar med Rottmann. Dette kommer av at Rottmann bruker en ortonormal basis for polarkoordinatsystemet (siden verken f og $\nabla^2 f$ er vektorer, spiller basisen ingen rolle for det uttrykket).

Vi regner om til ortonormerte polarkoordinater ved å bruke $M^r{}_{\hat{r}} = 1$, $M^\theta{}_{\hat{\theta}} = \frac{1}{r}$ og $M^\phi{}_{\hat{\phi}} = \frac{1}{r\sin\theta}$. Vi får

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 A^{\hat{r}}) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta A^{\hat{\theta}}) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi A^{\hat{\phi}}. \tag{F.19}$$

Og for curl til $\vec{A}$ får vi

$$(\nabla \times \vec{A})^{\hat{r}} = \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin^2\theta M^\phi{}_{\hat{\phi}}A^\phi\right) - \frac{\partial}{\partial\phi}\left(M^\theta{}_{\hat{\theta}}A^\theta\right)\right) \tag{F.20}$$

$$= \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A^{\hat{\phi}}\right) - \frac{\partial}{\partial\phi}A^{\hat{\theta}}\right) \tag{F.21}$$

$$(\nabla \times \vec{A})^{\hat{\theta}} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\phi}M^r{}_{\hat{r}}A^r - \sin^2\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 M^\phi{}_{\hat{\phi}}A^\phi\right)\right] \tag{F.22}$$

$$= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial A^{\hat{r}}}{\partial\phi} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(rA^{\hat{\phi}}\right)\right] \tag{F.23}$$

$$(\nabla \times \vec{A})^{\hat{\phi}} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 M^\theta{}_{\hat{\theta}}A^\theta\right) - \frac{\partial M^r{}_{\hat{r}}A^r}{\partial\theta}\right] \tag{F.24}$$

$$= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rA^{\hat{\theta}}\right) - \frac{\partial A^{\hat{r}}}{\partial\theta}\right]. \tag{F.25}$$

Rottmann oppgir komponentene med indeks nede. For å sammenlikne må vi senke indeksene vha $g_{\mu\nu}$. Vi får da tilslutt

$$(\nabla \times \vec{A})_{\hat{r}} = g_{\mu\hat{r}}(\nabla \times \vec{A})^{\hat{r}} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A^{\hat{\phi}}\right) - \frac{\partial}{\partial\phi}A^{\hat{\theta}}\right) \tag{F.26}$$

$$(\nabla \times \vec{A})_{\hat{\theta}} = g_{\mu\hat{\theta}}(\nabla \times \vec{A})^{\hat{\theta}} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial A^{\hat{r}}}{\partial\phi} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(rA^{\hat{\phi}}\right)\right] \tag{F.27}$$

$$(\nabla \times \vec{A})_{\hat{\phi}} = g_{\mu\hat{\phi}}(\nabla \times \vec{A})^{\hat{\phi}} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rA^{\hat{\theta}}\right) - \frac{\partial A^{\hat{r}}}{\partial\theta}\right]. \tag{F.28}$$

Oppgave F2: Poincarés lemma

a) Komponentene til $\underline{d}f$ er komponentene til ∇f. For en en-form $\underline{A}$ er komponentene til $\underline{dA}$ lik komponentene til $\nabla \times \vec{A}$. Ved å sette $\underline{A} = \underline{d}f$ får en umiddelbart at $\underline{d}^2 f = 0$ tilsvarer $\nabla \times \nabla f = 0$.

b) Vi har at

$$(\underline{dA})_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\lambda}(\nabla \times \vec{A})^\lambda. \tag{F.29}$$

Tar vi den ytrederiverte av dette, får vi kun en enkelt komponent,

$$(\underline{ddA})_{123} = \partial_\lambda(\nabla \times \vec{A})^\lambda. \tag{F.30}$$

Vi ser at dette er lik $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A})$, og at Poincarés identitet i dette tilfellet er det samme som $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$.

Oppgave F3: Parabolske koordinater

a) Basisvektorene finner vi ved hjelp av transformasjonsmatrisa: $\vec{e}_\mu = M^i{}_\mu \vec{e}_i$, hvor vi lar latinske indekser som i stå for de kartesiske koordinatene x, y og greske indekser som μ stå for de parabolske ξ, η. Denne matrisa er gitt ved

$$\left(M^i{}_\mu\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta & \xi \\ \xi & -\eta \end{pmatrix}. \tag{F.31}$$

Dermed får vi

$$\vec{e}_\xi = M^x{}_\xi \vec{e}_x + M^y{}_\xi \vec{e}_y = \eta \vec{e}_x + \xi \vec{e}_y, \tag{F.32}$$
$$\vec{e}_\eta = M^x{}_\eta \vec{e}_x + M^y{}_\eta \vec{e}_y = \xi \vec{e}_x - \eta \vec{e}_y. \tag{F.33}$$

Den metriske tensoren kan vi enten finne ved transformasjonsmatrisa, $g_{\mu\nu} = M^i{}_\mu M^j{}_\nu g_{ij}$, eller vi kan finne den ved å bruke at $g_{\mu\nu} = \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu$:

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \vec{e}_\xi \cdot \vec{e}_\xi & \vec{e}_\xi \cdot \vec{e}_\eta \\ \vec{e}_\eta \cdot \vec{e}_\xi & \vec{e}_\eta \cdot \vec{e}_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^2 + \eta^2 & 0 \\ 0 & \xi^2 + \eta^2 \end{pmatrix}. \tag{F.34}$$

Vi kan skrive metrikken på den vanlige måten ved linjeelementet

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (\xi^2 + \eta^2) d\xi^2 + (\xi^2 + \eta^2) d\eta^2. \tag{F.35}$$

b) Christoffelsymbolene kan finnes ved hjelp av uttrykket for disse,

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(g_{\lambda\nu,\rho} + g_{\lambda\rho,\nu} - g_{\nu\rho,\lambda} \right), \tag{F.36}$$

men i dette tilfellet er det lettere å regne dem ut ved hjelp av transformasjonsegenskapene til Christoffelsymbolene,

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{i}} \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{k}}{\partial x^{\rho}} \Gamma^{i}{}_{jk} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{i}} \frac{\partial^2 x^{i}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\rho}}, \tag{F.37}$$

som forenkles kraftig ved at $\Gamma^{i}{}_{jk} = 0$ i den kartesiske basisen. $\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{i}} = M^{\mu}{}_{i}$ finner vi ved å invertere matrisa $(M^{i}{}_{\mu})$ gitt i (F.31),

$$(M^{\mu}{}_{i}) = \left(M^{i}{}_{\mu} \right)^{-1} = \frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \begin{pmatrix} \eta & \xi \\ \xi & -\eta \end{pmatrix}. \tag{F.38}$$

Vi kan dermed lett regne ut Christoffelsymbolene;

$$\begin{aligned}
&\Gamma^{\xi}{}_{\xi\xi} = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} \qquad &&\Gamma^{\xi}{}_{\xi\eta} = \Gamma^{\xi}{}_{\eta\xi} = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} \qquad &&\Gamma^{\xi}{}_{\eta\eta} = -\frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} \\
&\Gamma^{\eta}{}_{\xi\xi} = -\frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} \qquad &&\Gamma^{\eta}{}_{\xi\eta} = \Gamma^{\xi}{}_{\eta\xi} = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} \qquad &&\Gamma^{\eta}{}_{\eta\eta} = -\frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2}
\end{aligned} \tag{F.39}$$

Siden koordinatbasisvektorene allerede er ortogonale, trenger vi bare å normere dem (dele på lengden) for å få en ortonormal basis:

$$\vec{e}_{\hat{\xi}} = \frac{\vec{e}_{\xi}}{|\vec{e}_{\xi}|} = \frac{\vec{e}_{\xi}}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, \qquad \vec{e}_{\hat{\eta}} = \frac{\vec{e}_{\eta}}{|\vec{e}_{\eta}|} = \frac{\vec{e}_{\eta}}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}. \tag{F.40}$$

Sammenhengen mellom basisvektorene $\vec{e}_{\hat{\mu}}$ og $\vec{e}_{\mu}$ er gitt ved en basistransformasjonsmatrise $M^{\mu}{}_{\hat{\mu}}$, $\vec{e}_{\hat{\mu}} = M^{\mu}{}_{\hat{\mu}} \vec{e}_{\mu}$, hvor vi kan lese av komponentene til denne matrisa ved å se på likninga over,

$$(M^{\mu}{}_{\hat{\mu}}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} \end{pmatrix}. \tag{F.41}$$

Sammenhengen mellom basis-enformene er gitt ved den inverse av denne matrisa,

$$\underline{\omega}^{\hat{\mu}} = M^{\hat{\mu}}{}_{\mu} \underline{\omega}^{\mu}. \tag{F.42}$$

som blir

$$(M^{\hat{\mu}}{}_{\mu}) = \begin{pmatrix} \sqrt{\xi^2 + \eta^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \end{pmatrix}. \tag{F.43}$$

Vi får dermed

$$\underline{\omega}^{\hat{\xi}} = \sqrt{\xi^2+\eta^2}\underline{\omega}^{\xi}, \qquad \underline{\omega}^{\hat{\eta}} = \sqrt{\xi^2+\eta^2}\underline{\omega}^{\eta}. \tag{F.44}$$

For å finne $\underline{\omega}^{\xi}$ og $\underline{\omega}^{\eta}$ uttrykt ved $\underline{\omega}^{x}$ og $\underline{\omega}^{y}$ bruker vi igjen den (inverse) transformasjonsmatrisa $M^{\mu}{}_{i}$ gitt ved (F.38). Dermed får vi

$$\begin{aligned} \underline{\omega}^{\xi} &= M^{\xi}{}_{i}\underline{\omega}^{i} = \frac{1}{\xi^2+\eta^2}\left(\eta\underline{\omega}^{x} + \xi\underline{\omega}^{y}\right), \\ \underline{\omega}^{\eta} &= M^{\eta}{}_{i}\underline{\omega}^{i} = \frac{1}{\xi^2+\eta^2}\left(\xi\underline{\omega}^{x} - \eta\underline{\omega}^{y}\right). \end{aligned} \tag{F.45}$$

c) Vi bruker transformasjonsmatrisene gjentatte ganger for å finne $(A^{\hat{\xi}}, A^{\hat{\eta}})$ uttrykt ved A^x og A^y:

$$A^{\hat{\mu}} = M^{\hat{\mu}}{}_{\mu}A^{\mu} = M^{\hat{\mu}}{}_{\mu}M^{\mu}{}_{i}A^{i}. \tag{F.46}$$

Dette gir

$$A^{\hat{\xi}} = \frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\left(\eta A^x + \xi A^y\right), \qquad A^{\hat{\eta}} = \frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\left(\xi A^x - \eta A^y\right). \tag{F.47}$$

Siden vi har en ortogonal basis, $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \delta_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$, har de kovariante og de kontravariante komponentene samme verdi, $A_{\hat{\xi}} = A^{\hat{\xi}}$ og $A_{\hat{\eta}} = A^{\hat{\eta}}$.

Sammenhengen mellom den ytrederiverte og curlen til en vektorfelt er

$$(\underline{dA})_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\lambda}(\nabla\times\vec{A})^{\lambda} \tag{F.48}$$

i et tre-dimensjonalt rom. Curlen, som er en vektorstørrelse, er ikke i utgangspunktet definert for annet enn tre-dimensjonale rom, men i to dimensjoner er det mulig å definere en curl som en skalar størrelse tilsvarende z-komponenten til curlen i et rom utvidet til tre dimensjoner. Denne komponenten blir

$$\begin{aligned} (\nabla\times\vec{A})^{\hat{z}} &= (\underline{dA})_{\hat{\xi}\hat{\eta}} = M^{\mu}{}_{\hat{\xi}}M^{\nu}{}_{\hat{\eta}}A_{[\mu,\nu]} \\ &= \frac{1}{\xi^2+\eta^2}\left(\partial_\eta(\sqrt{\xi^2+\eta^2}A^{\hat{\xi}}) - \partial_\xi(\sqrt{\xi^2+\eta^2}A^{\hat{\eta}})\right). \end{aligned} \tag{F.49}$$

FYS4160

OPPGAVEARK G – Løsningsforslag av Håkon Enger

Oppgave G1: Uniformt akselerert referansesystem

a) Vi kan finne linjeelementet ds^2 ved å bruke koordinattransformasjons-matrisa $M^\mu{}_\alpha$ på den metriske tensoren: $g_{\alpha\beta} = M^\mu{}_\alpha M^\nu{}_\beta g_{\mu\nu}$. Vi lar her μ, ν representere Minkowski-koordinatene t, x og α, β representere koordinatene U, V. Først regner vi ut matrisa $M^\mu{}_\alpha$:

$$(M^\mu{}_\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\partial t}{\partial U} & \frac{\partial t}{\partial V} \\ \frac{\partial x}{\partial U} & \frac{\partial x}{\partial V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aV\cosh(aU) & \sinh(aU) \\ aV\sinh(aU) & \cosh(aU) \end{pmatrix}. \tag{G.1}$$

Komponentene til den metriske tensoren blir

$$\begin{aligned} g_{UU} &= M^\mu{}_U M^\nu{}_U g_{\mu\nu} \\ &= -(aV\cosh(aU))^2 + (aV\sinh(aU))^2 = -a^2V^2, \\ g_{UV} &= g_{VU} = M^\mu{}_U M^\nu{}_V g_{\mu\nu} \\ &= -aV\cosh(aU)\sinh(aU) + aV\sinh(aU)\cosh(aU) = 0, \\ g_{VV} &= M^\mu{}_V M^\nu{}_V g_{\mu\nu} \\ &= -(\sinh(aU))^2 + (\cosh(aU))^2 = 1, \end{aligned}$$

og linjeelementet blir

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = -a^2V^2dU^2 + dV^2. \tag{G.2}$$

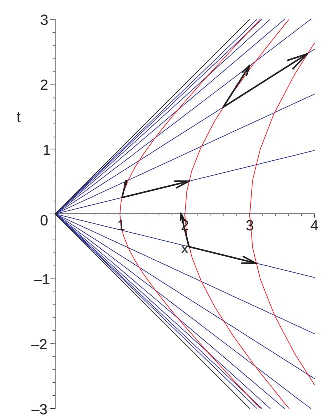
b) Kurven V = konstant danner en hyperbel i Minkowski-rommet (med koordinatene (x, t)), derav begrepet hyperbolsk bevegelse.

Hastigheten til partikkelen er gitt ved

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{dU}{dt}\frac{dx}{dU} = \frac{\sinh(aU)}{\cosh(aU)} = \tanh(aU). \tag{G.3}$$

Videre er akselerasjonen i "labsystemet"

$$g_0 = \frac{dv}{dt} = \frac{dU}{dt}\frac{dv}{dU} = \frac{1}{V\cosh^3(aU)}. \tag{G.4}$$



Figur G.1: Linjer med konstant U og V og basisvektorer i noen punkter.

Vi kan dermed bruke formelen for Lorentz-transformasjon av akselerasjon til å finne akselerasjonen i det momentane hvilesystemet med hastighet v:

$$g = (1 - v^2)^{-\frac{3}{2}} g_0 = \left(\frac{1}{1 - \tanh^2(aU)} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{V \cosh^3(aU)} = \frac{1}{V}, \tag{G.5}$$

hvor vi har brukt at $\frac{1}{1-\tanh^2 \phi} = \cosh^2 \phi$. Dermed ser vi at akselerasjonen i hvilesystemet er konstant.

c) Tidsaksen til det momentane hvilesystemet er gitt ved firerhastigheten $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$, der τ er egentiden til partikkelen. Siden partikkelen har konstant V, dvs. $dV = 0$, gir dette fra (G.2)

$$d\tau = aV dU \tag{G.6}$$

ved å bruke at $d\tau^2 = -ds^2$ langs partikkelbanen. Hvis vi kaller basisvektoren i tidsretningen i det momentane hvilesystemet $\vec{e}_{\hat{0}}$, får vi dermed

$$\vec{e}_{\hat{0}} = U^\mu \vec{e}_\mu = \frac{1}{aV} \frac{dx^\mu}{dU} \vec{e}_\mu = \frac{1}{aV} M^\mu{}_U \vec{e}_\mu \tag{G.7}$$

(husk at V er konstant her), og denne vektoren er parallell med $\vec{e}_U = M^\mu{}_U \vec{e}_\mu$. Siden $\vec{e}_V$ er ortogonal til $\vec{e}_U$ er den dermed også ortogonal til $\vec{e}_{\hat{0}}$, og $\vec{e}_V$ er dermed en rent romlig vektor i det momentane hvilesystemet.

Siden $\vec{e}_V$ er normert, måler V-koordinaten lengden langs romaksen, mens U koordinaten ikke måler lengde langs tidsaksen siden $\vec{e}_U$ har lengde aV. Dersom $V = \frac{1}{a}$ er likevel $\vec{e}_U$ normert, og egentiden og koordinattiden faller sammen.

Vi ser av figur G.1 at området $|t| > |x|$ ikke kan beskrives av (U, V)-koordinatene. Dette kan vi også se fra likninga for koordinattransformasjonen, (G.1) og (G.2) på oppgavearket, ved at $t^2 = x^2 - V^2$ for alle verdier av U og V. Vi får derfor en koordinatsingularitet der $x = t$, som tilsvarer $V \to 0$.

d) I det tilfellet der den forreste delen av staven har konstant akselerasjon sett fra det momentane hvilesystemet til staven, kan vi angi koordinatene på følgende måte

$$\text{Forreste del}: \; V = V_0 \tag{G.8}$$
$$\text{Bakerste del}: \; V = V_0 - L. \tag{G.9}$$

Vi fant hastigheten til staven i det stasjonære systemet i b). Vi kan uttrykke $v = dx/dt$ ved koordinatene t og V ved å derivere $x = \sqrt{t^2 + V^2}$ med hensyn på t. Det gir

$$v = \frac{t}{\sqrt{t^2 + V^2}}. \tag{G.10}$$

Hastighet til forreste og bakerste ende til staven blir dermed

$$v_f = \frac{t}{\sqrt{t^2 + V_0^2}} \tag{G.11}$$

$$v_b = \frac{t}{\sqrt{t^2 + (V_0 - L)^2}}. \tag{G.12}$$

Vi ser altså nå at den bakerste delen av staven beveger seg raskere enn den forreste. (Observert fra det stasjonære systemet vil dette oppleves ved at man får en Lorentzkontraksjon av stavens lengde målt ved samtidighet i (t, x)-systemet). Et krav vi må sette til hastigheten til stavens bakre (og selvsagt også fremre) ende, er at den må være mindre enn lyshastigheten. Vi har

$$\lim_{L \to V_0} v_b = 1, \quad (c = 1). \tag{G.13}$$

Dette innebærer at $L = V_0$ er den øvre grensen for lengden av en stav med stiv hyperbolsk bevegelse. Altså er $L_{\max} = V_0$.

Hvis den bakerste enden har konstant akselerasjon og er fiksert i V_0 og den forreste har koordinat $V_0 + L$, er hastigheten til stavens forreste punkt gitt ved

$$v_f = \frac{t}{\sqrt{t^2 + (V_0 + L)^2}}. \tag{G.14}$$

Denne er mindre enn 1 (husk at $c = 1$) for alle verdier av L. Det er derfor ingen begrensning på koordinaten til det fremre punktet av staven i dette tilfellet. Følgelig er det heller ingen begrensning på dens lengde.

En annen mulig forklaring er å observere at vi har en singularitet i origo. Dersom stavens forreste ende er fiksert i V_0 er $x_f = V_0$ ved tiden $t = 0$. Dermed må stavens bakre ende, sett fra det stasjonære systemet, være til *venstre* for $x_f = V_0$ langs x-aksen, men siden vi har en singularitet i origo (dvs i $(t, x) = (0, 0)$) kan vi ikke ha negative verdier av x. Det er derfor en største avstand mellom fremre og bakre ende av staven, altså kan ikke staven være vilkårlig lang. I motsatt fall, når bakre ende av staven har konstant akselerasjon, dvs fiksert V, er $x_b(t = 0) = V_0$. Da er det ingen begrensning på koordinaten til det fremre punktet. Målt ved $t = 0$ er $x_f = V_0 + L$ til høyre for x_b langs x-aksen. Her er det ingenting som begrenser verdien av koordinaten.

e) Romskipet beveger seg langs en kurve med konstant $V = \frac{1}{g}$. Egentiden er gitt ved $\Delta\tau = \int d\tau = \int aV\, dU = \frac{a}{g}\Delta U$. 10 år i romskipets egentid tilsvarer $\Delta U = \frac{g}{a} \cdot 10\,\text{år}$. Siden romskipet starter fra jorda ved $t = U = 0$, er dermed romskipets U-koordinat $U = \frac{g}{a} \cdot 10\,\text{år}$ etter 10 år i romskipets egentid. Dette tilsvarer

$$x = V\cosh(aU) = \frac{1}{g}\cosh(g \cdot 10\,\text{år}). \tag{G.15}$$

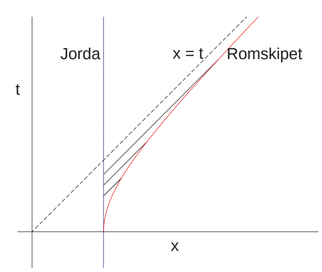
Siden romskipet starter ved $x(0) = V = \frac{1}{g}$, er avstanden det har tilbakelagt

$$\Delta x = x - x(0) = \frac{1}{g}(\cosh(g \cdot 10\,\text{år}) - 1) = 14548,7\,\text{lysår}. \tag{G.16}$$

(Tiden det har tatt sett fra jorden, er $\Delta t = 14549,7\,\text{år}$.)

Det er lett å se fra figur G.2 at lyssignaler som sendes fra jorden etter tidspunktet $t = x_J$, der x_J er jordens x-koordinat, ikke vil nå romskipet. I dette koordinatsystemet er x-koordinaten til jorda lik V-koordinaten til romskipet (siden $x = V$ ved $t = 0$, da romskipet forlater jorda), så tiden T da signalene ikke lenger vil nå romskipet er gitt ved

$$T = x_J = V = \frac{1}{g}. \tag{G.17}$$



Figur G.2: Romskipets bane og lyssignaler fra jorda.

Ved en geometrisk betraktning av figur G.2 ser en at et signal mottatt av romskipet i posisjon x_1 ved tidspunktet t_1 må være sendt ut ved tiden $t_0 = t_1 - (x_1 - x_J)$ ($x_1 - x_J$ er avstanden fra jorda til romskipet, som også er tiden det tar å sende et lyssignal denne avstanden siden $c = 1$.) Når egentiden $\tau = 10\,\text{år}$ får vi at $aU = g \cdot 10\,\text{år}$ som over, og dermed at

$$\begin{aligned} t_1 &= V\sinh(aU) = \frac{1}{g}\sinh(g \cdot 10\,\text{år}), \\ x_1 &= V\cosh(aU) = \frac{1}{g}\cosh(g \cdot 10\,\text{år}). \end{aligned} \tag{G.18}$$

Tidspunktet for utsendelsen av signalet blir dermed

$$t_0 = t_1 - (x_1 - x_J) = \frac{1}{g}(\sinh(g \cdot 10\,\text{år}) - \cosh(g \cdot 10\,\text{år}) + 1) = 0,969\,\text{år}. \tag{G.19}$$

Frekvensen ν på signalet som blir målt i romskipet er gitt ved

$$\nu = \sqrt{\frac{1-v}{1+v}}\nu_0 = \sqrt{\frac{1-\tanh(aU)}{1+\tanh(aU)}}\nu_0, \tag{G.20}$$

der ν_0 er frekvensen på signalet målt i jordas hvilesystem, og $v = \tanh(aU)$ er hastigheten til skipet, gitt ved (G.3). Som over får vi at et signal mottatt i romskipet ved et tidpunkt gitt ved U ble sendt ut ved

$$\begin{aligned} t_0 = t_1 - (x_1 - x_J) &= \frac{1}{g}(\sinh(aU) - \cosh(aU) + 1) \\ &= \frac{1}{g}(\frac{\tanh(aU)}{\sqrt{1-\tanh^2(aU)}} - \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2(aU)}} + 1). \end{aligned} \tag{G.21}$$

Vi løser denne likningen for $\tanh(aU)$ og får

$$\tanh(aU) = \frac{gt_0(2-gt_0)}{2+g^2t_0^2-2gt_0}. \tag{G.22}$$

Dermed får vi fra (G.20)

$$\nu = \sqrt{(1-gt_0)^2}\nu_0 = |1-gt_0|\nu_0. \tag{G.23}$$

Frekvensen blir null når $t_0 = T = \frac{1}{g}$, og signalet blir dermed uendelig rødforskjøvet. For $t_0 > T$ gir uttrykket ingen mening, siden signalet da ikke vil nå fram til skipet, så vi kunne like gjerne droppe absoluttverdi-tegnet i uttrykket.

Oppgave G2: Kovariant derivert

a) Det første vi skal vise er at komponentene $A^{\mu\nu}{}_{\nu}$ transformerer som en vektor, dvs. at under et basisskifte $\vec{e}_{\mu'} = M^{\mu}{}_{\mu'}\vec{e}_{\mu}$ transformerer $A^{\mu\nu}{}_{\nu}$ til $A^{\mu'\nu}{}_{\nu} = M^{\mu'}{}_{\mu}A^{\mu\nu}{}_{\nu}$. Ved å bruke reglene for hvordan kovariante og kontravariante tensorkomponenter transformerer, har vi

$$A^{\mu'\nu'}{}_{\nu'} = M^{\mu'}{}_{\mu}M^{\nu'}{}_{\alpha}M^{\beta}{}_{\nu'}A^{\mu\alpha}{}_{\beta} \tag{G.24}$$

men siden $M^{\beta}{}_{\nu'}M^{\nu'}{}_{\alpha} = \delta^{\beta}{}_{\alpha}$ (dette betyr at matrisen $M^{\nu}{}_{\nu'}$ er den inverse av matrisen $M^{\nu'}{}_{\nu}$), får vi

$$A^{\mu'\nu'}{}_{\nu'} = M^{\mu'}{}_{\mu}A^{\mu\alpha}{}_{\alpha}, \tag{G.25}$$

som var det vi skulle vise.

Så skal vi vise at komponentene $A^{\mu\mu}{}_{\nu}$ ikke transformerer som en 1-form. (Her er det implisitt en summasjon over μ, så den eneste frie indeksen er den kovariante indeksen ν.) Vi setter inn transformasjonsmatriser som over:

$$A^{\mu'\mu'}{}_{\nu'} = M^{\mu'}{}_{\alpha}M^{\mu'}{}_{\beta}M^{\nu}{}_{\nu'}A^{\alpha\beta}{}_{\nu} \tag{G.26}$$

Her kan vi ikke "fjerne" noen transformasjonsmatriser, fordi matrisen $M^{\mu'}{}_{\alpha}$ ikke generelt er den inverse av $M^{\mu'}{}_{\beta}$ (merk at dette faktisk er samme matrise to ganger). Dermed får vi ikke transformasjonsegenskapen til en 1-form.

b) Vi regner ut Christoffelsymbolene i en annen (koordinat)basis ved å sette inn transformasjonsmatrisene:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu'\nu'\lambda'} &= \frac{1}{2}\left(g_{\mu'\nu',\lambda'} + g_{\mu'\lambda',\nu'} - g_{\nu'\lambda',\mu'}\right) \\
&= \frac{1}{2}\big(M^{\lambda}{}_{\lambda'}(M^{\mu}{}_{\mu'}M^{\nu}{}_{\nu'}g_{\mu\nu})_{,\lambda} + M^{\nu}{}_{\nu'}(M^{\mu}{}_{\mu'}M^{\lambda}{}_{\lambda'}g_{\mu\lambda})_{,\nu} \\
&\qquad - M^{\mu}{}_{\mu'}(M^{\nu}{}_{\nu'}M^{\lambda}{}_{\lambda'}g_{\nu\lambda})_{,\mu}\big) \\
&= M^{\mu}{}_{\mu'}M^{\nu}{}_{\nu'}M^{\lambda}{}_{\lambda'}\Gamma_{\mu\nu\lambda} + M^{\beta'}_{\nu}M^{\nu}{}_{\nu',\lambda'}g_{\mu'\beta'}
\end{aligned} \tag{G.27}$$

Det ekstra leddet som inneholder $M^{\nu}{}_{\nu',\lambda'} = \frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}\partial x^{\lambda'}}$ viser at Γ ikke transformerer som en tensor.

c) Vi setter inn transformasjonsmatrisene for å undersøke hvordan $A^{\mu}{}_{,\nu}$ transformerer:

$$A^{\mu'}{}_{,\nu'} = M^{\nu}{}_{\nu'}(M^{\mu'}{}_{\mu}A^{\mu})_{,\nu} = M^{\nu}{}_{\nu'}M^{\mu'}{}_{\mu}A^{\mu}{}_{,\nu} + M^{\nu}{}_{\nu'}M^{\mu'}{}_{\mu,\nu}A^{\mu} \tag{G.28}$$

Vi ser at $A^{\mu}{}_{,\nu}$ ikke transformerer som en tensor.

Så ser vi på hvordan den kovariant deriverte transformerer. Vi kan bruke uttrykkene vi fant over for henholdsvis de transformerte Christoffelsymbolene og den transformerte partielt deriverte:

$$\begin{aligned} A^{\mu'}{}_{;\nu'} &= A^{\mu'}{}_{,\nu'} + \Gamma^{\mu'}{}_{\alpha'\nu'} A^{\alpha'} \\ &= M^{\mu'}{}_{\mu} M^{\nu}{}_{\nu'} A^{\mu}{}_{,\nu} + M^{\nu}{}_{\nu'} M^{\mu'}{}_{\mu,\nu} A^{\mu} \\ &\qquad + M^{\mu'}{}_{\mu} M^{\nu}{}_{\nu'} \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu} A^{\alpha} + M^{\mu'}{}_{\alpha} M^{\alpha}{}_{\alpha',\nu'} A^{\alpha'} \end{aligned} \tag{G.29}$$

(I tredje linje har vi brukt at $g^{\mu'\alpha'} g_{\alpha'\beta'} = \delta^{\mu'}{}_{\beta'}$.) Nå trenger vi en identitet for å vise at det siste leddet i denne likninga kansellerer det andre. Denne identiteten kan utledes ved å derivere likninga $M^{\mu'}{}_{\alpha} M^{\alpha}{}_{\alpha'} = \delta^{\mu'}{}_{\alpha'}$ på begge sider med hensyn på $x^{\nu'}$. Da finner man at

$$M^{\mu'}{}_{\alpha} M^{\alpha}{}_{\alpha',\nu'} = -M^{\mu'}{}_{\alpha,\nu} M^{\nu}{}_{\nu'} M^{\alpha}{}_{\alpha'}. \tag{G.30}$$

Setter vi inn dette i (G.29), får vi rett og slett

$$A^{\mu'}{}_{;\nu'} = M^{\mu'}{}_{\mu} M^{\nu}{}_{\nu'} (A^{\mu}{}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu} A^{\alpha}) = M^{\mu'}{}_{\mu} M^{\nu}{}_{\nu'} A^{\mu}{}_{;\nu}, \tag{G.31}$$

som viser at den kovariant deriverte transformerer som en tensor.

d) Den raskeste måten å vise at metrikken er kovariant konstant, er å bruke at vi alltid kan gå til en ortonormal basis der $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$. Siden metrikken dermed er konstant i denne basisen, er opplagt den (kovariant) deriverte null,

$$g_{\hat{\mu}\hat{\nu};\hat{\lambda}} = 0. \tag{G.32}$$

Men siden den kovariant deriverte transformerer som en tensor, blir dermed komponentene til den kovariant deriverte null i alle basiser,

$$g_{\mu\nu;\lambda} = 0. \tag{G.33}$$

e) Vi setter rett inn uttrykket for den kovariant deriverte for en $\binom{1}{1}$-tensor:

$$\begin{aligned} (A^{\mu} B_{\nu})_{;\lambda} &= (A^{\mu} B_{\nu})_{,\lambda} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu} A^{\alpha} B_{\nu} - \Gamma^{\beta}{}_{\nu\lambda} B_{\beta} A^{\mu} \\ &= (A^{\mu}{}_{,\lambda} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu} A^{\alpha}) B_{\nu} + (B_{\nu,\lambda} - \Gamma^{\beta}{}_{\nu\lambda} B_{\beta}) A^{\mu} \\ &= A^{\mu}{}_{;\lambda} B_{\nu} + A^{\mu} B_{\nu;\lambda}. \end{aligned} \tag{G.34}$$

f) Først tar vi en titt på venstre side i denne likninga:

$$\begin{aligned} A^{\mu}{}_{;\mu} &= A^{\mu}{}_{,\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\mu} A^{\alpha} \\ &= A^{\mu}{}_{,\mu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\nu\alpha,\mu} + g_{\nu\mu,\alpha} - g_{\alpha\mu,\nu}) A^{\alpha} = A^{\mu}{}_{,\mu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\nu\mu,\alpha} A^{\alpha}, \end{aligned} \tag{G.35}$$

hvor det siste følger av at den metriske tensoren er symmetrisk, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. Så ser vi på høyre side, og bruker at $|g| = -g$, i tillegg til trikset som er oppgitt i oppgaven, $g_{,\alpha} = g\, g^{\mu\nu} g_{\mu\nu,\alpha}$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}A^{\mu})_{,\mu} &= \frac{1}{\sqrt{-g}}(\frac{-g_{,\mu}}{2\sqrt{-g}}A^{\mu} + \sqrt{-g}A^{\mu}{}_{,\mu}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{-g}}(\frac{-g}{2\sqrt{-g}}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu,\alpha}A^{\alpha} + \sqrt{-g}A^{\mu}{}_{,\mu}) \\
&= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\nu\mu,\alpha}A^{\alpha} + A^{\mu}{}_{,\mu}.
\end{aligned}
\tag{G.36}
$$

(I det første leddet på den andre linja har vi byttet navn på indeksen μ til α.) Vi ser at venstre og høyre side er like, og dermed har vi vist det vi skulle.

FYS4160

OPPGAVEARK H – Løsningsforslag av Håkon Enger

Oppgave H1: Parallellforskyvning

a) At en vektor blir parallellforskjøvet langs en kurve betyr at den deriverte av vektoren langs kurven er null:

$$\nabla_{\vec{u}}\vec{A}(\lambda) = 0, \tag{H.1}$$

der $\vec{u}$ er en tangentvektor langs kurven (kurven er parametrisert med λ). På komponentform får vi en kovariant derivert:

$$A^{\mu}{}_{;\nu}u^{\nu} = A^{\mu}{}_{;\nu}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda} = 0. \tag{H.2}$$

Siden den kovariant deriverte er gitt ved $A^{\mu}{}_{;\nu} = A^{\mu}{}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu}A^{\lambda}$, får vi dermed

$$A^{\mu}{}_{,\nu}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda} = \frac{dA^{\mu}}{d\lambda} = -\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu}A^{\lambda}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda}. \tag{H.3}$$

For en infinitesimal forskyvning dx^{ν} langs kurven blir dermed forandringen i vektorkomponentene

$$dA^{\mu} = -\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu}A^{\lambda}dx^{\nu}. \tag{H.4}$$

b) Resultatet fra a) kan vi skrive som

$$A^{\mu}(x+dx) = A^{\mu}(x) - \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu}A^{\lambda}dx^{\nu}. \tag{H.5}$$

Dette kan vi se på som en Taylorutvikling til 1. orden av A^{μ} i punktet x. Taylorutviklingen et generelt gitt som

$$A^{\mu}(x+dx) = A^{\mu}(x) + \frac{\partial A^{\mu}(x)}{\partial x^{\nu}}dx^{\nu} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 A^{\mu}(x)}{\partial x^{\nu}\partial x^{\gamma}}dx^{\nu}dx^{\gamma} + \ldots. \tag{H.6}$$

Vi ser at $\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = -\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu}A^{\lambda}$. I denne oppgaven vil vi også trenge neste ledd i Taylorutviklingen, gitt ved $\frac{\partial^2 A^{\mu}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\gamma}}$. Dette kan vi regne ut:

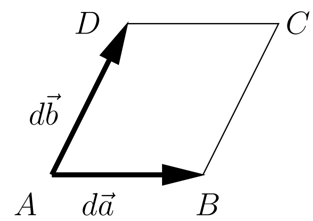
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 A^{\mu}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\gamma}} &= \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}(-\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu}A^{\lambda}) \\ &= -\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu,\gamma}A^{\lambda} - \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu}\frac{\partial A^{\lambda}}{\partial x^{\gamma}} = -\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu,\gamma}A^{\lambda} + \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\delta\gamma}A^{\delta}.\end{aligned} \tag{H.7}$$

Dermed får vi fra (H.6) at til 2. orden er vektoren parallelltransportert fra et punkt x til et nærliggende punkt $x + dx$ gitt ved

$$A^\mu(x+dx) = A^\mu - \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} A^\lambda dx^\nu - \frac{1}{2}\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu,\gamma} A^\lambda dx^\nu dx^\gamma + \frac{1}{2}\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}\Gamma^\lambda{}_{\delta\gamma} A^\delta dx^\nu dx^\gamma. \tag{H.8}$$

Vi lar $\vec{A}_{AB}$ betegne vektoren $\vec{A}$ parallellforskjøvet fra punktet A til punktet B. Ved å bruke formelen (H.8) får vi

$$A^\mu_{AB} = A^\mu - \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}(A) A^\lambda da^\nu - \frac{1}{2}\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu,\gamma}(A) A^\lambda da^\nu da^\gamma + \frac{1}{2}\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}(A)\Gamma^\lambda{}_{\delta\gamma}(A) A^\delta da^\nu da^\gamma, \tag{H.9}$$



Figur H.1: Infinitesimalt parallellogram

hvor $\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}(A)$ betegner verdien av konneksjonskoeffisientene i punktet A. Så setter vi vektoren $\vec{A}_{AB}$ inn i formelen for parallellforskyvning langs $d\vec{b}$, og får vektoren $\vec{A}_{ABC}$:

$$A^\mu_{ABC} = A^\mu_{AB} - \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}(B) A^\lambda_{AB} db^\nu - \frac{1}{2}\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu,\gamma}(B) A^\lambda_{AB} db^\nu db^\gamma + \frac{1}{2}\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}(B)\Gamma^\lambda{}_{\delta\gamma}(B) A^\delta_{AB} db^\nu db^\gamma, \tag{H.10}$$

Det er viktig å legge merke til at siden vi nå starter forskyvningen fra punktet B, er det konneksjonskoeffisientene i dette punktet som må inn i formelen. Disse avviker infinitesimalt fra de i punktet A, og vi kan finne dem med en Taylorutvikling:

$$\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}(B) = \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}(A + d\vec{a}) = \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}(A) + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu,\gamma}(A) da^\gamma + \ldots \tag{H.11}$$

Setter vi (H.9) og (H.11) inn i (H.10), får vi til slutt

$$\begin{aligned} A^\mu_{ABC} = A^\mu &- \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} A^\lambda da^\nu - \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} A^\lambda db^\nu \\ &- \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu,\gamma} A^\lambda (db^\nu da^\gamma + \frac{1}{2} da^\nu da^\gamma + \frac{1}{2} db^\nu db^\gamma) \\ &+ \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}\Gamma^\lambda{}_{\delta\gamma} A^\delta (db^\nu da^\gamma + \frac{1}{2} da^\nu da^\gamma + \frac{1}{2} db^\nu db^\gamma), \end{aligned} \tag{H.12}$$

der vi har neglisjert bidrag av 3. orden i $d\vec{a}$ og $d\vec{b}$. Her er det underforstått at konneksjonskoeffisientene er de som gjelder i punktet A.

Vi kan gjøre den samme utregningen via punktet D istedenfor B, og forskjellen blir i praksis at $d\vec{a}$ og $d\vec{b}$ bytter plass:

$$\begin{aligned}A^\mu_{ADC} = A^\mu - \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} A^\lambda db^\nu - \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} A^\lambda da^\nu \\ - \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu,\gamma} A^\lambda (da^\nu db^\gamma + \frac{1}{2} da^\nu da^\gamma + \frac{1}{2} db^\nu db^\gamma) \\ + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} \Gamma^\lambda{}_{\delta\gamma} A^\delta (da^\nu db^\gamma + \frac{1}{2} da^\nu da^\gamma + \frac{1}{2} db^\nu db^\gamma),\end{aligned} \tag{H.13}$$

Differansen av disse to er

$$\begin{aligned}A^\mu_{ABC} - A^\mu_{ADC} &= -\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu,\gamma} da^\gamma A^\lambda db^\nu + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu,\gamma} db^\gamma A^\lambda da^\nu \\ &\quad + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} \Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta} A^\alpha da^\beta db^\nu - \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} \Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta} A^\alpha db^\beta da^\nu \\ &= \left(\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu,\gamma} - \Gamma^\mu{}_{\lambda\gamma,\nu} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\gamma} \Gamma^\alpha{}_{\lambda\nu} - \Gamma^\mu{}_{\alpha\nu} \Gamma^\alpha{}_{\lambda\gamma}\right) A^\lambda da^\nu db^\gamma,\end{aligned} \tag{H.14}$$

hvor vi til slutt har byttet navn på noen av summasjonsindeksene for å få samme indekser på A, da og db i alle leddene.

Skal vi fortsette å parallelltransportere A^μ_{ABC} rundt den lukkede kurven, trenger vi også konneksjonskoeffisientene i C:

$$\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}(C) = \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}(A) + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu,\gamma}(A) da^\gamma + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu,\gamma}(A) db^\gamma + \ldots, \tag{H.15}$$

og setter vi dette inn i (H.8) for å parallelltransportene A^μ_{ABC} langs $-d\vec{a}$ til punkt D får vi

$$\begin{aligned}A^\mu_{ABCD} = A^\mu - \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} A^\lambda db^\nu - \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu,\gamma} A^\lambda (db^\nu da^\gamma - da^\nu db^\gamma + \frac{1}{2} db^\nu db^\gamma) \\ + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} \Gamma^\lambda{}_{\delta\gamma} A^\delta (db^\nu da^\gamma - da^\nu db^\gamma + \frac{1}{2} db^\nu db^\gamma),\end{aligned} \tag{H.16}$$

som vi så kan transportere langs $-d\vec{b}$ tilbake til A med resultatet

$$\begin{aligned}A^\mu_{ABCDA} = A^\mu - \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu,\gamma} A^\lambda (db^\nu da^\gamma - da^\nu db^\gamma) \\ + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} \Gamma^\lambda{}_{\delta\gamma} A^\delta (db^\nu da^\gamma - da^\nu db^\gamma).\end{aligned} \tag{H.17}$$

Dette kan vi også skrive som

$$A^\mu_{ABCDA} = A^\mu - \left(\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu,\gamma} - \Gamma^\mu{}_{\lambda\gamma,\nu} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\gamma} \Gamma^\alpha{}_{\lambda\nu} - \Gamma^\mu{}_{\alpha\nu} \Gamma^\alpha{}_{\lambda\gamma}\right) A^\lambda da^\nu db^\gamma, \tag{H.18}$$

hvor vi kjenner igjen uttrykket for Riemanns krumningstensor i koordinatbasis.

Oppgave H2: Geodetisk avvik

Vi kan skrive $\vec{\tau}$ som

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{\partial \vec{n}}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{ds}. \tag{H.19}$$

På komponentform blir dette (husk at vi må bruke kovariant derivert når vi deriverer vektorer!)

$$\tau_A^\mu = n^\mu_{A;\nu}\frac{dx^\nu}{ds} = n^\mu_{A;\nu}t^\nu_A = \frac{dn^\mu_A}{ds} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\nu}n^\alpha_A t^\nu_A. \tag{H.20}$$

Komponenten til den parallelltransporterte tangentvektoren er

$$\left(P_{AA'}\vec{t}_{A'}\right)^\mu = t^\mu_{A'} - \Gamma^\mu{}_{\alpha\nu}t^\alpha_{A'}(-n^\nu_A). \tag{H.21}$$

Siden $\Gamma^\mu{}_{\alpha\nu} = \Gamma^\mu{}_{\nu\alpha}$ og forskjellen på $t^\nu_{A'}$ og t^ν_A gir et høyere ordens bidrag, er de siste leddene i (H.20) og (H.21) like. Videre er

$$\frac{dn^\mu_A}{ds} = \frac{dx'^\mu}{ds} - \frac{dx^\mu}{ds}, \tag{H.22}$$

så dermed får vi

$$\vec{\tau}_A = P_{AA'}\vec{t}_{A'} - \vec{t}_A. \tag{H.23}$$

Komponentene til den kovariant deriverte $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ er gitt som $\tau^\mu{}_{;\nu}t^\nu$, der t^ν er tangentvektoren $t^\nu = \frac{dx^\nu}{ds}$, så på komponentform er venstre siden i likningen i oppgaven gitt ved

$$\tau^\mu{}_{;\nu}t^\nu\Delta s = \tau^\mu{}_{,\nu}t^\nu\Delta s + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}\tau^\lambda t^\nu\Delta s \approx \tau^\mu_B - \tau^\mu_A + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}\tau^\lambda t^\nu\Delta s \tag{H.24}$$

hvor vi har tilnærmet den deriverte ved $\tau^\mu{}_{,\nu}t^\nu = \frac{d\tau^\mu}{ds} \approx \frac{\tau^\mu_B - \tau^\mu_A}{\Delta s}$. Vi kjenner igjen uttrykket $\tau^\mu_B + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}\tau^\lambda t^\nu\Delta s$ fra oppgave H1 som den parallelltransporterte av $\vec{\tau}$ langs vektoren $-t^\nu\Delta s$, altså fra B til A. (Dette er den velkjente geometriske tolkningen av den kovariant deriverte.)

Setter vi disse to uttrykkene sammen, får vi

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds}\Delta s = P_{AB}(P_{BB'}\vec{t}_{B'} - \vec{t}_B) - (P_{AA'}\vec{t}_{A'} - \vec{t}_A). \tag{H.25}$$

Siden kurvene er geodeter, vil det pr. definisjon si at tangentvektorene er parallelltransportert langs kurvene, slik at $P_{AB}\vec{t}_B = \vec{t}_A$ og $\vec{t}_{B'} = P_{B'A'}\vec{t}_{A'}$. (Men $P_{BB'}\vec{t}_{B'} \neq \vec{t}_B$!!) Setter vi inn dette, får vi

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds}\Delta s = P_{ABB'A'}\vec{t}_{A'} - P_{AA'}\vec{t}_{A'} = P_{AA'}\left(P_{A'ABB'A'}\vec{t}_{A'} - \vec{t}_{A'}\right). \tag{H.26}$$

Fra oppgave H1 vet vi at den parallelltransporterte rundt en lukket kurve er gitt ved

$$P_{A'ABB'A'}t^{\mu}_{A'} = t^{\mu}_{A'} - R^{\mu}{}_{\beta\gamma\delta}t^{\beta}_{A'}dx^{\gamma}(-n^{\delta}_{A}), \tag{H.27}$$

så ved å bruke at $\frac{dx^{\gamma}}{\Delta s} \approx t^{\gamma}_{A'}$ får vi

$$\tau^{\mu}_{A';\nu}t^{\nu} = R^{\mu}{}_{\beta\gamma\delta}t^{\beta}_{A'}t^{\gamma}_{A'}n^{\delta}_{A} \tag{H.28}$$

Forskjellen på $\vec{t}_{A'}$ og $\vec{t}_{A}$ er liten, så vi kan til 1. orden erstatte $\vec{t}_{A'}$ med $\vec{t}_{A}$ her. Siden $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d^2\vec{n}}{ds^2}$ får vi dermed

$$\frac{d^2\vec{n}}{ds^2} + \vec{e}_{\mu}R^{\mu}{}_{\beta\gamma\delta}t^{\beta}_{A}t^{\gamma}_{A}n^{\delta}_{A} = 0, \tag{H.29}$$

som var det vi skulle vise. På komponentform får vi

$$n^{\mu}{}_{;\nu\lambda}t^{\nu}t^{\lambda} + n^{\mu}{}_{;\nu}t^{\nu}{}_{;\lambda}t^{\lambda} + R^{\mu}{}_{\beta\gamma\delta}t^{\beta}t^{\gamma}n^{\delta} = 0, \tag{H.30}$$

og siden kurvene er geodeter er $t^{\nu}{}_{;\lambda}t^{\lambda} = 0$, så dette reduseres til

$$n^{\mu}{}_{;\nu\lambda}t^{\nu}t^{\lambda} + R^{\mu}{}_{\beta\gamma\delta}t^{\beta}t^{\gamma}n^{\delta} = 0, \tag{H.31}$$

FYS4160

OPPGAVEARK I – Løsningsforslag av Håkon Enger

Oppgave I1: Et krumlinjet koordinatsystem i to dimensjoner

a) Vi tar den ytrederiverte på begge sider av uttrykket

$$\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu = g_{\mu\nu}, \tag{I.1}$$

og får

$$(\underline{d}\vec{e}_\mu) \cdot \vec{e}_\nu + \vec{e}_\mu \cdot (\underline{d}\vec{e}_\nu = g_{\mu\nu,\lambda}\underline{\omega}^\lambda. \tag{I.2}$$

Vi har at

$$\begin{aligned}(\underline{d}\vec{e}_\mu) \cdot \vec{e}_\nu &= (\Gamma^\delta{}_{\mu\lambda}\vec{e}_\delta \otimes \underline{\omega}^\lambda) \cdot \vec{e}_\nu = \Gamma^\delta{}_{\mu\lambda}\underline{\omega}^\lambda(\vec{e}_\delta \cdot \vec{e}_\nu) \\ &= \Gamma^\delta{}_{\mu\lambda}\underline{\omega}^\lambda g_{\delta\nu} = \Gamma_{\nu\mu\lambda}\underline{\omega}^\lambda = \underline{\Omega}_{\nu\mu},\end{aligned} \tag{I.3}$$

så vi ser av (I.2) at vi kan finne den symmetriske delen $\underline{\Omega}_{(\mu\nu)}$ av matrisa med konneksjonsformene ved å derivere metrikken,

$$\underline{\Omega}_{\nu\mu} + \underline{\Omega}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu,\lambda}\underline{\omega}^\lambda. \tag{I.4}$$

Ved å gå igjennom alle 8 kombinasjoner av μ, ν og λ i uttrykket $g_{\mu\nu,\lambda}$, får vi at de eneste som ikke er null er

$$g_{uu,v} = 2v, \qquad g_{vv,u} = 2u. \tag{I.5}$$

Dermed har vi

$$\underline{\Omega}_{uu} = v\underline{\omega}^v, \quad \underline{\Omega}_{uv} + \underline{\Omega}_{vu} = 0, \quad \underline{\Omega}_{vv} = u\underline{\omega}^u. \tag{I.6}$$

For å finne den antisymmetriske delen $\underline{\Omega}_{[uv]}$ av matrisa, må vi bruke uttrykket for konneksjonskoeffisientene direkte,

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\mu\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\mu}), \tag{I.7}$$

$$\Gamma_{[uv]u} = \frac{1}{2}(g_{uu,v}) = v, \quad \Gamma_{[uv]v} = -\frac{1}{2}(g_{vv,u}) = -u, \tag{I.8}$$

$$\underline{\Omega}_{[uv]} = \Gamma_{[uv]\lambda}\underline{\omega}^\lambda = v\underline{\omega}^u - u\underline{\omega}^v. \tag{I.9}$$

Vi kan sette opp alle konneksjonsformene i et matrise:

$$(\underline{\Omega}_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} v\underline{\omega}^v & v\underline{\omega}^u - u\underline{\omega}^v \\ u\underline{\omega}^v - v\underline{\omega}^u & u\underline{\omega}^u \end{pmatrix}. \tag{I.10}$$

Ved å heve den første indeksen, $\underline{\Omega}^\mu{}_\nu = g^{\mu\lambda}\underline{\Omega}_{\lambda\nu}$, får vi

$$(\underline{\Omega}^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \frac{1}{v}\underline{\omega}^v & \frac{1}{v}\underline{\omega}^u - \frac{u}{v^2}\underline{\omega}^v \\ \frac{1}{u}\underline{\omega}^v - \frac{v}{u^2}\underline{\omega}^u & \frac{1}{u}\underline{\omega}^u \end{pmatrix}. \tag{I.11}$$

Nå kan vi regne ut krumningsformene $\underline{R}^\mu{}_\nu$ ved å bruke *Cartans 2. strukturlikning*,

$$\underline{R}^\mu{}_\nu = \underline{d\Omega}^\mu{}_\nu + \underline{\Omega}^\mu{}_\lambda \wedge \underline{\Omega}^\lambda{}_\nu. \tag{I.12}$$

Setter vi inn for eksempel $\mu = \nu = u$, får vi

$$\underline{R}^u{}_u = \underline{d}(\frac{1}{v}\underline{\omega}^v) + (\frac{1}{v}\underline{\omega}^v) \wedge (\frac{1}{v}\underline{\omega}^v) + (\frac{1}{v}\underline{\omega}^u - \frac{u}{v^2}\underline{\omega}^v) \wedge (\frac{1}{u}\underline{\omega}^v - \frac{v}{u^2}\underline{\omega}^u) = 0, \tag{I.13}$$

hvor vi har brukt antisymmetrien til ytreproduktet, som blant annet betyr at $\underline{\omega}^v \wedge \underline{\omega}^v = 0$. Tilsvarende finner vi at alle de andre krumningsformene også er null.

b) Vi skal finne en transformasjon til et koordinatsystem der metrikken har formen

$$ds^2 = dx^2 + dy^2. \tag{I.14}$$

Merk at dette ikke kun betyr å finne en ortonormal basis (det kan vi alltid gjøre), vi krever i tillegg at det ortonormale basisen skal være en *koordinatbasis* (dette er ikke alltid mulig). For en koordinatbasis er transformasjonsmatrisene gitt ved

$$M^m{}_\mu = \frac{\partial x^m}{\partial x^\mu}, \tag{I.15}$$

der $m = x, y$. For at dette skal være mulig må vi ha at

$$\frac{\partial M^m{}_\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial M^m{}_\nu}{\partial x^\mu}, \tag{I.16}$$

siden $\frac{\partial^2 x^m}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial^2 x^m}{\partial x^\nu \partial x^\mu}$. Vi må dermed finne en transformasjonsmatrise som bringer metrikken over på ortonormal form,

$$g_{\mu\nu} = g_{mn} M^m{}_\mu M^n{}_\nu, \tag{I.17}$$

og som i tillegg oppfyller (I.16).

Likning (I.17) gir når vi setter inn metrikken vår

$$v^2 = (M^x{}_u)^2 + (M^y{}_u)^2, \tag{I.18}$$
$$u^2 = (M^x{}_v)^2 + (M^y{}_v)^2, \tag{I.19}$$
$$0 = M^x{}_u M^x{}_v + M^y{}_u M^y{}_v. \tag{I.20}$$

De to første likningene her betyr at vi kan parametrisere $M^m{}_\mu$ med to vinkler θ og ϕ,

$$M^x{}_u = v\sin\theta, \qquad M^y{}_u = v\cos\theta, \tag{I.21}$$
$$M^x{}_v = u\sin\phi, \qquad M^y{}_v = u\cos\phi. \tag{I.22}$$

(Merk at θ og ϕ godt kan være funksjoner av u og v her.) Den tredje likninga gir når vi setter inn dette,

$$0 = uv\sin\theta\sin\phi + uv\cos\theta\cos\phi, \tag{I.23}$$

noe som betyr at vi må ha (f.eks)

$$\phi = \theta + \frac{\pi}{2}, \tag{I.24}$$

slik at $\sin\phi = \cos\theta$ og $\cos\phi = -\sin\theta$.

Nå setter vi inn dette i (I.16), som gir

$$\sin\theta + v\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial v} = \cos\theta - u\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial u}, \tag{I.25}$$
$$\cos\theta - v\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial v} = -\sin\theta - u\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial u}, \tag{I.26}$$

som vi kan rearrangere til

$$u\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial u} + v\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial v} = \cos\theta - \sin\theta \tag{I.27}$$
$$u\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial u} - v\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial v} = -\cos\theta - \sin\theta \tag{I.28}$$

Dette er to lineære likninger med $\frac{\partial\theta}{\partial u}$ og $\frac{\partial\theta}{\partial v}$ som ukjente, så vi kan lett løse dem; ganger vi (I.27) med $\sin\theta$ og legger til (I.28) ganget med $\cos\theta$ står vi igjen med

$$\frac{\partial\theta}{\partial u} = -\frac{1}{u}, \tag{I.29}$$

og ganger vi (I.27) med $\cos\theta$ og trekker fra (I.28) ganget med $\sin\theta$ får vi

$$\frac{\partial\theta}{\partial u} = \frac{1}{v}. \tag{I.30}$$

Integrerer vi disse likningene, får vi

$$\theta = \ln v - \ln u + C = \ln \frac{v}{u} + C. \tag{I.31}$$

Her er C en integrasjonskonstant som vi kan velge til $C = 0$. Dermed blir transformasjonsmatrisa vi skulle finne

$$(M^m{}_\mu) = \begin{pmatrix} v \sin \ln \frac{v}{u} & u \cos \ln \frac{v}{u} \\ v \cos \ln \frac{v}{u} & -u \sin \ln \frac{v}{u} \end{pmatrix}. \tag{I.32}$$

Dersom vi vil gå videre med dette, kan vi integrere likningene (I.15) for å finne x og y som funksjoner av u og v. Dette faller utenfor denne oppgaven, men vil gi resultatet

$$x = \frac{1}{2} uv(\cos \ln \frac{v}{u} + \sin \ln \frac{v}{u}) + x_0, \tag{I.33}$$

$$y = \frac{1}{2} uv(\cos \ln \frac{v}{u} - \sin \ln \frac{v}{u}) + y_0, \tag{I.34}$$

noe som kan sjekkes ved å derivere disse uttrykkene med hensyn på u og v. (x_0 og y_0 er integrasjonskonstanter.)

Oppgave I2: Krumningstensoren til en kuleflate

En kuleflate har metrikken

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \tag{I.35}$$

der R er radius til kula. For å bruke Cartan-formalismen er det lurt å bruke en ortonormal basis. Som vanlig kan vi gjøre dette med en ortonormaliseringsprosess der vi tar utgangspunkt i en basisvektor og normerer denne. For neste basisvektor trekker vi først fra komponenten langs den første, for så å normere. Se f.eks. oppgave D2 for en gjennomgang av denne prosessen.

Vi kan også ortonormalisere basis-enformene med samme prosess. Skalarproduktet av basis-enformer er den inverse metrikken,

$$\underline{\omega}^\mu \cdot \underline{\omega}^\nu = g^{\mu\nu}. \tag{I.36}$$

Nøyaktig samme framgangsmåte vi bruker for å ortonormalisere basisvektorer kan brukes for å ortonormalisere basis-enformer. I dette tilfellet er allerede basis-enformene ortogonale, så vi trenger bare å normalisere dem:

$$\underline{\omega}^{\hat{\theta}} = \frac{\underline{\omega}^\theta}{|\underline{\omega}^\theta|} = R\underline{\omega}^\theta, \qquad \underline{\omega}^{\hat{\phi}} = \frac{\underline{\omega}^\phi}{|\underline{\omega}^\phi|} = R \sin \theta \underline{\omega}^\phi. \tag{I.37}$$

Cartans 1. strukturlikning gir oss konneksjonsformene $\underline{\Omega}^{\mu}{}_{\nu}$ ved

$$\underline{d\omega}^{\hat{\mu}} = -\underline{\Omega}^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}} \wedge \underline{\omega}^{\hat{\nu}}. \tag{I.38}$$

Den ytrederiverte av en *koordinat*basisenform er alltid null (ved Poincarés lemma, siden koordinatbasisenformene kan uttrykkes som ytrederiverte av koordinatene), men dette gjelder ikke ikke for en generell basis. Vi setter derfor inn de ortonormale basisenformene uttrykt ved koordinatbasisenformene,

$$\underline{d\omega}^{\hat{\theta}} = \underline{d}(R\underline{\omega}^{\theta}) = R\underline{d\omega}^{\theta} = 0, \tag{I.39}$$

$$\underline{d\omega}^{\hat{\phi}} = R\underline{d}(\sin\theta\underline{\omega}^{\phi}) = R(\underline{d}\sin\theta) \wedge \underline{\omega}^{\phi} = R\cos\theta\underline{\omega}^{\theta} \wedge \underline{\omega}^{\phi} = \frac{\cos\theta}{R\sin\theta}\underline{\omega}^{\hat{\theta}} \wedge \underline{\omega}^{\hat{\phi}}. \tag{I.40}$$

En grunn til at det er lurt å bruke ortonormal basis med Cartanformalismen, er at konneksjonsformene er antisymmetriske, $\underline{\Omega}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = -\underline{\Omega}_{\hat{\nu}\hat{\mu}}$. (Dette kan vi se fra uttrykket $\underline{d}g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = 0$ ved å sette inn $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \vec{e}_{\hat{\mu}} \cdot \vec{e}_{\hat{\nu}}$.) Dermed vet vi at $\underline{\Omega}^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\phi}} = \underline{\Omega}^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\theta}} = 0$. Det betyr at $\underline{d\omega}^{\hat{\theta}} = -\underline{\Omega}^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\phi}} \wedge \underline{\omega}^{\hat{\phi}}$, og fra (I.39) får vi dermed at

$$\underline{\Omega}^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\phi}} = \alpha\underline{\omega}^{\hat{\phi}}, \tag{I.41}$$

der α er ubestemt. (For å få null i uttrykket $\underline{\Omega}^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\phi}} \wedge \underline{\omega}^{\hat{\phi}}$, må $\underline{\Omega}^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\phi}}$ være proporsjonal med $\underline{\omega}^{\hat{\phi}}$, men siden $\underline{\omega}^{\hat{\phi}} \wedge \underline{\omega}^{\hat{\phi}} = 0$ kan vi ikke si noe om α.) Setter vi inn dette i Cartans 1. strukturlikning for $\underline{d\omega}^{\hat{\phi}}$ og sammenlikner med (I.40) ser vi at

$$\underline{\Omega}^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\phi}} = -\underline{\Omega}^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\theta}} = -\frac{\cos\theta}{R\sin\theta}\underline{\omega}^{\hat{\phi}}. \tag{I.42}$$

For å finne krumningsformene bruker vi Cartans 2. strukturlikning,

$$\underline{R}^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}} = \underline{d\Omega}^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}} + \underline{\Omega}^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\lambda}} \wedge \underline{\Omega}^{\hat{\lambda}}{}_{\hat{\nu}}. \tag{I.43}$$

Vi regner ut den ytrederiverte,

$$\begin{aligned}
\underline{d\Omega}^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\theta}} &= \underline{d}(\frac{\cos\theta}{R\sin\theta}\underline{\omega}^{\hat{\phi}}) = (\underline{d}\frac{\cos\theta}{R\sin\theta}) \wedge \underline{\omega}^{\hat{\phi}} + \frac{\cos\theta}{R\sin\theta}\underline{d\omega}^{\hat{\phi}} \\
&= -\frac{1}{R\sin^2\theta}\underline{\omega}^{\theta} \wedge \underline{\omega}^{\hat{\phi}} + \left(\frac{\cos\theta}{R\sin\theta}\right)^2 \underline{\omega}^{\hat{\theta}} \wedge \underline{\omega}^{\hat{\phi}} \\
&= \left(\frac{\cos^2\theta - 1}{R^2\sin^2\theta}\right)\underline{\omega}^{\hat{\theta}} \wedge \underline{\omega}^{\hat{\phi}} = -\frac{1}{R^2}\underline{\omega}^{\hat{\theta}} \wedge \underline{\omega}^{\hat{\phi}},
\end{aligned} \tag{I.44}$$

hvor vi har brukt (I.40) og (I.37). Dermed får vi

$$\underline{R}^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\theta}} = \underline{d\Omega}^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\theta}} + \underline{\Omega}^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\lambda}} \wedge \underline{\Omega}^{\hat{\lambda}}{}_{\hat{\theta}} = -\frac{1}{R^2}\underline{\omega}^{\hat{\theta}} \wedge \underline{\omega}^{\hat{\phi}} \tag{I.45}$$

Riemanns krumningstensor finner vi ved å sammenlikne med

$$\underline{R}^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\theta}} = \frac{1}{2}R^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\theta}\hat{\mu}\hat{\nu}}\underline{\omega}^{\hat{\mu}} \wedge \underline{\omega}^{\hat{\nu}}, \tag{I.46}$$

og vi ser at

$$R^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}} = \frac{1}{R^2}. \tag{I.47}$$

(På en flate, altså i et 2-dimensjonalt rom, har bare Riemanns krumningstensor en uavhengig komponent.)

Oppgave I3: Krumningsskalaren til et samtidighetsplan

Vi skal studere flaten med metrikk

$$d\ell^2 = dr^2 + \frac{r^2}{1-\omega^2 r^2}d\phi^2 \tag{I.48}$$

der vi har satt $c = 1$. Vi bruker en ortonormal basis, siden vi skal bruke Cartan-formalismen. Denne oppgaven er helt parallell til oppgave I2, så referer til denne for en grundigere diskusjon.

Vi ortonormaliserer basis-enformene, som har et skalarproduktet gitt av den inverse metrikken, $\underline{\omega}^\mu \cdot \underline{\omega}^\nu = g^{\mu\nu}$. I dette tilfellet er allerede basis-enformene ortogonale, så vi trenger bare å normalisere dem:

$$\underline{\omega}^{\hat{r}} = \frac{\underline{\omega}^r}{|\underline{\omega}^r|} = \underline{\omega}^r, \qquad \underline{\omega}^{\hat{\phi}} = \frac{\underline{\omega}^\phi}{|\underline{\omega}^\phi|} = \frac{r}{\sqrt{1-\omega^2 r^2}}\underline{\omega}^\phi. \tag{I.49}$$

Cartans 1. strukturlikning gir oss konneksjonsformene $\underline{\Omega}^\mu{}_\nu$ ved $\underline{d\omega}^{\hat{\mu}} = -\underline{\Omega}^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}} \wedge \underline{\omega}^{\hat{\nu}}$. Vi setter inn de ortonormale basisenformene uttrykt ved koordinatbasisenformene,

$$\underline{d\omega}^{\hat{r}} = \underline{d}(\underline{\omega}^r) = 0, \tag{I.50}$$

$$\begin{aligned}\underline{d\omega}^{\hat{\phi}} &= \underline{d}\left(\frac{r}{\sqrt{1-\omega^2 r^2}}\underline{\omega}^\phi\right) = \left(\underline{d}\frac{r}{\sqrt{1-\omega^2 r^2}}\right) \wedge \underline{\omega}^\phi \\ &= \frac{1}{(1-\omega^2 r^2)^{\frac{3}{2}}}\underline{\omega}^r \wedge \underline{\omega}^\phi = \frac{1}{r(1-\omega^2 r^2)}\underline{\omega}^{\hat{r}} \wedge \underline{\omega}^{\hat{\phi}}.\end{aligned} \tag{I.51}$$

Konneksjonsformene er antisymmetriske, og fra (I.50) får vi

$$\underline{\Omega}^{\hat{r}}{}_{\hat{\phi}} = \alpha \underline{\omega}^{\hat{\phi}}, \tag{I.52}$$

der α er ubestemt. Setter vi inn dette i Cartans 1. strukturlikning for $\underline{d\omega}^{\hat{\phi}}$ og sammenlikner med (I.51) ser vi at

$$\underline{\Omega}^{\hat{\phi}}{}_{\hat{r}} = -\underline{\Omega}^{\hat{r}}{}_{\hat{\phi}} = \frac{\underline{\omega}^{\hat{\phi}}}{r(1-\omega^2 r^2)}. \tag{I.53}$$

For å finne krumningsformene bruker vi Cartans 2. strukturlikning,

$$\underline{R}^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}} = \underline{d\Omega}^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}} + \underline{\Omega}^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\lambda}} \wedge \underline{\Omega}^{\hat{\lambda}}{}_{\hat{\nu}}. \tag{I.54}$$

Vi får

$$\begin{aligned} \underline{R}^{\hat{\phi}}{}_{\hat{r}} &= \underline{d\Omega}^{\hat{\phi}}{}_{\hat{r}} = \underline{d}\left(\frac{1}{r(1-\omega^2 r^2)}\underline{\omega}^{\hat{\phi}}\right) = \underline{d}\left(\frac{1}{(1-\omega^2 r^2)^{\frac{3}{2}}}\underline{\omega}^{\phi}\right) \\ &= \frac{3\omega^2 r}{(1-\omega^2 r^2)^{\frac{5}{2}}}\underline{\omega}^{r} \wedge \underline{\omega}^{\phi} = \frac{3\omega^2}{(1-\omega^2 r^2)^2}\underline{\omega}^{\hat{r}} \wedge \underline{\omega}^{\hat{\phi}} = -\frac{3\omega^2}{(1-\omega^2 r^2)^2}\underline{\omega}^{\hat{\phi}} \wedge \underline{\omega}^{\hat{r}} \end{aligned} \tag{I.55}$$

hvor vi igjen har brukt at $\underline{d\omega}^{\phi} = \underline{dd}\phi = 0$ (Poincarés lemma). Dermed får vi

$$R^{\hat{\phi}}{}_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{r}} = -\frac{3\omega^2}{(1-\omega^2 r^2)^2}. \tag{I.56}$$

For å regne ut Ricci-tensoren $R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}$ trenger vi en komponent til, som ved Riemann-tensorens symmetrier $R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\beta\alpha} = R_{\alpha\beta\mu\nu}$ er gitt ved

$$R^{\hat{r}}{}_{\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}} = R^{\hat{\phi}}{}_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{r}} = -\frac{3\omega^2}{(1-\omega^2 r^2)^2} \tag{I.57}$$

Vi får

$$R_{\hat{r}\hat{r}} = R^{\hat{\phi}}{}_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{r}} = -\frac{3\omega^2}{(1-\omega^2 r^2)^2} \tag{I.58}$$

$$R_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = R^{\hat{r}}{}_{\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}} = -\frac{3\omega^2}{(1-\omega^2 r^2)^2} \tag{I.59}$$

Til slutt finner vi Riccis krumningsskalar ved å ta trasen av $R^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\nu}}$,

$$R = R^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\mu}} = R^{\hat{r}}{}_{\hat{r}} + R^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\phi}} = -\frac{6\omega^2}{(1-\omega^2 r^2)^2} \tag{I.60}$$

Vi ser at for $\omega = 0$ blir krumningsskalaren null som den skal bli for flatt rom.

FYS4160

OPPGAVEARK J – Løsningsforslag av Håkon Enger

Oppgave J1: Projeksjonstensoren

a) Komponenten til en vektor $\vec{a}$ parallell med en annen vektor $\vec{u}$ (vi kaller denne komponenten $\vec{a}_\parallel$) er generelt definert slik at $\vec{a}_\parallel$ er proporsjonal med $\vec{u}$ og $\vec{a}_\parallel \cdot \vec{u} = \vec{a} \cdot \vec{u}$. Vi sjekker at dette er tilfellet for den $\vec{a}_\parallel$ som er gitt i oppgaveteksten.

Den første betingelsen er opplagt oppfylt, siden

$$\vec{a}_\parallel = \frac{\vec{a} \cdot \vec{u}}{u^2} \vec{u} \tag{J.1}$$

pr definisjon er parallell med $\vec{u}$. Vi har også at

$$\vec{a}_\parallel \cdot \vec{u} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{u}}{u^2} \vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{a} \cdot \vec{u}, \tag{J.2}$$

så den andre betingelsen er også oppfylt. Likheten $(\vec{a} \cdot \vec{u})\vec{u}/u^2 = -(\vec{a} \cdot \vec{u})\vec{u}$ får vi ved at $u^2 = -1$.

Den ortogonale komponenten $\vec{a}_\perp$ er rett og slett definert ved $\vec{a}_\perp = \vec{a} - \vec{a}_\parallel$, og vi ser at dette medfører

$$\vec{a}_\perp = \vec{a} - \vec{a}_\parallel = \vec{a} + (\vec{a} \cdot \vec{u})\vec{u}. \tag{J.3}$$

Komponentene til projeksjonstensoren blir med definisjonen i oppgaveteksten

$$P^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + u^\mu u_\nu = \delta^\mu{}_\nu + u^\mu u^\lambda g_{\nu\lambda}. \tag{J.4}$$

Vi skal vise at $a_\perp^\mu = P^\mu{}_\nu a^\nu$. Dette viser vi ved å sette rett inn:

$$P^\mu{}_\nu a^\nu = (\delta^\mu{}_\nu + u^\mu u_\nu) a^\nu = a^\mu + u^\mu (\vec{u} \cdot \vec{a}) = a_\perp^\mu. \tag{J.5}$$

b) Hvis observatøren er i ro, er de romlige komponentene av 4-hastigheten null, og 4-hastigheten har formen $\vec{u} = (u^0, 0, 0, 0)$. Tidskomponenten er bestemt av kravet om at $\vec{u}^2 = -1$, som gir

$$g_{00}(u^0)^2 = -1 \qquad u^0 = \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}. \tag{J.6}$$

Dermed blir de blandede komponentene til projeksjonstensoren i følge (J.4)

$$P^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + u^{\mu}u^{\lambda}g_{\nu\lambda} = \delta^{\mu}{}_{\nu} - \delta^{\mu}{}_{0}\frac{g_{\nu 0}}{g_{00}}. \tag{J.7}$$

På matriseform kan dette skrives

$$(P^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{g_{10}}{g_{00}} & -\frac{g_{20}}{g_{00}} & -\frac{g_{30}}{g_{00}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{J.8}$$

Vi ser at projeksjonstensoren blir spesielt enkel dersom metrikken er ortogonal.

De kovariante komponentene får vi ved å senke den første indeksen,

$$P_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_{\mu}u_{\nu} = g_{\mu\nu} + g_{\mu\lambda}g_{\nu\delta}u^{\lambda}u^{\delta} = g_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu 0}g_{\nu 0}}{g_{00}}. \tag{J.9}$$

c) Vi skal studere en bevegelse slik at

$$P^{\mu}{}_{\nu}\frac{da^{\nu}}{d\tau} = 0, \tag{J.10}$$

der $\vec{a}$ er 4-akselerasjonen, $\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{d\tau}$.

Vi har fått oppgitt at komponentene til $\frac{d\vec{a}}{d\tau}$ i et instantant hvilesystem for partikkelen er

$$\frac{d\vec{a}}{d\tau} = (g^2, \frac{d\vec{g}}{d\tau}), \tag{J.11}$$

der 3-vektoren $\vec{g}$ er hvileakselerasjonen. I dette systemet gjelder uttrykket for komponentene til $P^{\mu}{}_{\nu}$ som vi fant i oppgave b). Vi setter inn:

$$0 = P^{\mu}{}_{\nu}\frac{da^{\nu}}{d\tau} = (\delta^{\mu}{}_{\nu} - \delta^{\mu}{}_{0}\frac{g_{\nu 0}}{g_{00}})\frac{da^{\nu}}{d\tau} = (g^2 + \frac{g_{\nu 0}}{g_{00}}\frac{da^{\nu}}{d\tau}, \frac{d\vec{g}}{d\tau}). \tag{J.12}$$

Vi ser at dette betyr at 3-akselerasjonen i hvilesystemet er konstant, $\frac{d\vec{g}}{d\tau} = 0$, så dette betyr at bevegelsen er *hyperbolsk akselerasjon*.

d) Vi har at $\gamma_{\mu\nu}$ er gitt ved

$$d\ell^2 = \gamma_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = g_{\alpha\beta}d\sigma^{\alpha}d\sigma^{\beta} = g_{\alpha\beta}P^{\alpha}{}_{\mu}dx^{\mu}P^{\beta}{}_{\nu}dx^{\nu}, \tag{J.13}$$

så vi ser at $\gamma_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta} P^{\alpha}{}_{\mu} P^{\beta}{}_{\nu}$. Vi setter inn uttrykket for $P^{\mu}{}_{\nu}$:

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta}(\delta^{\alpha}{}_{\mu} + u^{\alpha}u_{\mu})(\delta^{\beta}{}_{\nu} + u^{\beta}u_{\nu}) = g_{\mu\nu} + u_{\mu}u_{\nu}, \tag{J.14}$$

hvor vi har brukt at $\vec{u}^2 = -1$.

For det tilfellet at observatøren er i ro i systemet K, setter vi inn $u_{\mu} = g_{\mu\alpha}u^{\alpha} = \frac{g_{\mu 0}}{\sqrt{-g_{00}}}$,

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu 0}g_{\nu 0}}{g_{00}}. \tag{J.15}$$

Dette er det velkjente uttrykket for det romlige linjeelementet. (Merk at vi får $\gamma_{\mu\nu} = 0$ når $\mu = 0$ eller $\nu = 0$.)

Oppgave J2: Oppspalting av hastighetsfelt

I: Ikke-relativistisk hastighetsfelt

a) Den konvektivt deriverte på komponentform blir

$$\frac{dv_i}{dt} = (v_j \partial_j) v_i = v_j v_{i,j}. \tag{J.16}$$

Skriver vi matriselikningen gitt i oppgaven på komponentform blir dette

$$\frac{dv_i}{dt} = v_{i,j} v_j, \tag{J.17}$$

så vi ser at uttrykkene er ekvivalente.

b) Vi vil ha

$$v_{i,j} = \theta_{ij} + \omega_{ij} + \sigma_{ij} \tag{J.18}$$

og insisterer på at θ_{ij} skal utgjøre trasen til $v_{i,j}$,

$$\theta_{ii} = v_{i,i} \qquad \text{(sum over } i\text{)} \tag{J.19}$$

men ellers være proporsjonal med en identitetsmatrise. Dette innebærer

$$\theta_{ij} = \frac{1}{3} v_{k,k} \delta_{ij}. \qquad \text{(sum over } k\text{)} \tag{J.20}$$

(Siden trasen til identitetsmatrisen $\delta_{ii} = 3$.)

Så skal ω_{ij} være den antisymmetriske delen av $v_{i,j}$,

$$\omega_{ij} = v_{[i,j]} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}), \tag{J.21}$$

og σ_{ij} være den symmetriske delen unntatt den delen gitt av θ_{ij},

$$\sigma_{ij} = v_{(i,j)} - \theta_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) - \theta_{ij}. \tag{J.22}$$

Vi sjekker at $v_{i,j}$ er gitt ved (J.18):

$$\theta_{ij} + \omega_{ij} + \sigma_{ij} = \theta_{ij} + \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) + \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) - \theta_{ij} = v_{i,j}. \tag{J.23}$$

II: Relativistisk hastighetsfelt

c) En partikkel med null 4-akselerasjon er i fritt fall, dvs. bare påvirket av gravitasjonen. Vi vet at en slik partikkel følger en bane gitt av en *geodet* i tidrommet. Dette kan vi også se fra komponentene: 4-akselerasjonen er gitt ved $\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{d\tau} = u^{\alpha}{}_{;\mu}u^{\mu}\vec{e}_{\alpha}$, og likningen $\vec{a} = 0$ blir dermed

$$\begin{aligned} 0 = u^{\alpha}{}_{;\mu}u^{\mu} &= \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\right) + \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\mu}\left(\frac{dx^{\nu}}{d\tau}\right)\right)\frac{dx^{\mu}}{d\tau} \\ &= \frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\right) + \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\mu}\left(\frac{dx^{\nu}}{d\tau}\right)\left(\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\right) \end{aligned} \tag{J.24}$$

Vi kjenner igjen geodetlikningen $\ddot{x}^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\mu}\dot{x}^{\nu}\dot{x}^{\mu} = 0$.

d) Vi ønsker å splitte opp $u_{\perp\alpha;\beta}$ slik at

$$u_{\perp\alpha;\beta} = \theta_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta}, \tag{J.25}$$

der rotasjonstensoren $\omega_{\alpha\beta}$ skal være antisymmetrisk, skjærtensoren $\sigma_{\alpha\beta}$ symmetrisk og trasefri, og ekspansjonstensoren $\theta_{\alpha\beta}$ skal inneholde trasen.

Istedenfor at $\theta_{\alpha\beta}$ nå skal være proporsjonal med identitetsmatrisen, er det naturlig å la denne være proporsjonal med projeksjonstensoren $P_{\alpha\beta}$. Trasen til projeksjonstensoren er $P^{\alpha}{}_{\alpha} = \delta^{\alpha}{}_{\alpha} + u^{\alpha}u_{\alpha} = 4 - 1 = 3$. Dermed må vi ha

$$\theta_{\alpha\beta} = \frac{1}{3}u^{\mu}_{\perp;\mu}P_{\alpha\beta}. \tag{J.26}$$

Videre får vi som over

$$\omega_{\alpha\beta} = u_{\perp[\alpha;\beta]} = \frac{1}{2}(u_{\perp[\alpha;\beta]} - u_{\perp[\beta;\alpha]}), \tag{J.27}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = u_{\perp(\alpha;\beta)} - \theta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\perp[\alpha;\beta]} + u_{\perp[\beta;\alpha]}) - \theta_{\alpha\beta}. \tag{J.28}$$

e) Vi regner ut

$$
\begin{aligned}
u_{\perp\alpha;\beta} &= u_{\mu;\nu} P^{\mu}{}_{\alpha} P^{\nu}{}_{\beta} = u_{\mu;\nu}(\delta^{\alpha}{}_{\mu} + u^{\alpha} u_{\mu})(\delta^{\beta}{}_{\nu} + u^{\beta} u_{\nu}) \\
&= u_{\mu;\nu}(\delta^{\mu}{}_{\alpha}\delta^{\nu}{}_{\beta} + \delta^{\mu}{}_{\alpha} u^{\nu} u_{\beta} + u^{\mu} u_{\alpha} \delta^{\nu}{}_{\beta} + u^{\mu} u^{\nu} u_{\alpha} u_{\beta}) \\
&= u_{\alpha;\beta} + u_{\alpha;\nu} u^{\nu} u_{\beta} + u_{\mu;\beta} u^{\mu} u_{\alpha} + u_{\mu;\nu} u^{\mu} u^{\nu} u_{\alpha} u_{\beta} \\
&= u_{\alpha;\beta} + a_{\alpha} u_{\beta}.
\end{aligned}
\tag{J.29}
$$

Her har vi brukt at $u_{\alpha;\nu} u^{\nu} = a_{\alpha}$ og at $u_{\mu;\beta} u^{\mu} = 0$ (siden $0 = (-1)_{;\beta} = (u_{\mu} u^{\mu})_{;\beta} = 2u_{\mu;\beta} u^{\mu}$.) Dermed kan vi skrive (J.27) og (J.28) som

$$\omega_{\alpha\beta} = u_{[\alpha;\beta]} + a_{[\alpha} u_{\beta]} \tag{J.30}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = u_{(\alpha;\beta)} + a_{(\alpha} u_{\beta)} - \theta_{\alpha\beta} \tag{J.31}$$

FYS4160

OPPGAVEARK K – Løsningsforslag av Håkon Enger

Oppgave K1: Ikke-relativistisk Kepler-bevegelse

a) Lagrangefunksjonen er gitt ved

$$L = T - V = \frac{1}{2} m g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j + \frac{GMm}{r} \tag{K.1}$$

hvor metrikken g_{ij} for polarkoordinatene (r, θ, ϕ) er gitt ved $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2$, så Lagrangefunksjonen blir

$$L = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \sin^2\theta \dot{\phi}^2 + \frac{GMm}{r}. \tag{K.2}$$

Impulsen p_ϕ som er kanonisk konjugert til ϕ, dvs $p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}$ er gitt ved

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m r^2 \sin^2\theta \dot{\phi} = \ell, \tag{K.3}$$

som er banespinnet (impulsmomentet) om z-aksen. Vi ser at dette er en bevegelseskonstant siden ϕ ikke inngår i Lagrangefunksjonen, slik at bevegelseslikningen for ℓ blir $\dot{\ell} = 0$.

Eulerlikningen for θ blir

$$\begin{gathered} \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0, \\ m r^2 \sin\theta \cos\theta \dot{\phi}^2 - 2 m r \dot{r} \dot{\theta} - m r^2 \ddot{\theta} = 0. \end{gathered} \tag{K.4}$$

Vi setter inn konstanten ℓ for $\dot{\phi} = \frac{\ell}{m r^2 \sin^2\theta}$,

$$\frac{\ell^2 \cos\theta}{m r^2 \sin^3\theta} - 2 m r \dot{r} \dot{\theta} - m r^2 \ddot{\theta} = 0, \tag{K.5}$$

og for å vise uttrykket i oppgaven ser vi at vi må gange med $2r^2\dot{\theta}$,

$$\begin{gathered} \frac{2\ell^2 \dot{\theta} \cos\theta}{m \sin^3\theta} - 4 m r^3 \dot{r} \dot{\theta}^2 - 2 m r^4 \dot{\theta} \ddot{\theta} = 0, \\ \frac{d}{dt}\left(m r^4 \dot{\theta}^2 + \frac{\ell^2}{m \sin^2\theta}\right) = 0. \end{gathered} \tag{K.6}$$

Vi ser av denne likningen at $K = mr^4\dot{\theta}^2 + \frac{\ell^2}{m\sin^2\theta}$ er en bevegelseskonstant. Det innebærer at hvis $\theta = \frac{\pi}{2}$ og $\dot{\theta} = 0$ ved $t = 0$, kan vi sette inn dette i K, og K må ha samme tallverdien i hele bevegelsen,

$$\begin{aligned} K(t) &= K(0) \\ mr^4\dot{\theta}^2 + \frac{\ell^2}{m\sin^2\theta} &= \frac{\ell^2}{m} \end{aligned} \tag{K.7}$$

Dette gir

$$\begin{aligned} \ell^2(\sin^2\theta - 1) &= m^2r^4\dot{\theta}^2\sin^2\theta, \\ -\ell^2\cos^2\theta &= m^2r^4\dot{\theta}^2\sin^2\theta. \end{aligned} \tag{K.8}$$

Vi ser at venstre side i likningen er negativ mens høyre side er positiv. Dette er bare mulig hvis begge sider er null, så vi må ha $\theta = \frac{\pi}{2}$ og $\dot{\theta} = 0$ for hele bevegelsen. Dermed vil planeten alltid bevege seg i et plan.

b) Eulerlikningen for r:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) &= 0, \\ mr\dot{\theta}^2 + mr\sin^2\theta\dot{\phi}^2 - \frac{GMm}{r^2} - m\ddot{r}. \end{aligned} \tag{K.9}$$

Vi vil finne r som funksjon av ϕ, og gjør dette ved å uttrykke tidsderiverte gjennom deriverte mhp. ϕ,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d\phi}{dt}\frac{dr}{d\phi} = \frac{\ell}{mr^2}\frac{dr}{d\phi}, \tag{K.10}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d\phi}{dt}\frac{d}{d\phi}\frac{dr}{dt} = \frac{\ell}{mr^2}\frac{d}{d\phi}\left(\frac{\ell}{mr^2}\frac{dr}{d\phi}\right) = \frac{\ell^2}{m^2r^4}\frac{d^2r}{d\phi^2} - \frac{2\ell^2}{mr^5}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2. \tag{K.11}$$

hvor vi har brukt at $\dot{\phi} = \frac{\ell}{mr^2}$ når $\theta = \frac{\pi}{2}$. Setter vi inn dette i (K.9), får vi

$$\frac{\ell^2}{m^2r^4}r''(\phi) - \frac{2\ell^2}{mr^5}\left(r'(\phi)\right)^2 = -\frac{GM}{r^2} + \frac{\ell^2}{m^2r^3} \tag{K.12}$$

Vi innfører nå en ny koordinat $u = \frac{1}{r}$. Dette gir

$$r' = -\frac{u'}{u^2} \qquad r'' = -\frac{u''}{u^2} + \frac{2(u')^2}{u^3}. \tag{K.13}$$

Bevegelseslikningen blir

$$-\frac{\ell^2}{m^2}u^4\left(-\frac{u''}{u^2} + \frac{2(u')^2}{u^3}\right) - 2\frac{\ell^2}{m^2}u^5\frac{(u')^2}{u^4} = -GMu^2 + \frac{\ell^2}{m^2}u^3 \tag{K.14}$$

som til slutt gir

$$u'' + u = \frac{GMm^2}{\ell^2}. \tag{K.15}$$

Dette er en inhomogen svingelikning med generell løsning

$$u = \frac{GMm^2}{\ell^2}(1 + \epsilon \sin(\phi - \phi_0)), \tag{K.16}$$

der ϵ og ϕ_0 er integrasjonskonstanter. ϕ_0 kan alltid settes lik null ved en redefinisjon av ϕ.

Denne løsningen beskriver en ellipsebevegelse. For en sirkelbevegelse er $\epsilon = 0$. Radius i sirkelen er $R = \frac{1}{u} = \frac{\ell^2}{GMm^2}$, som gir

$$\ell = \sqrt{GMm^2R}, \tag{K.17}$$

og perioden T_0 blir

$$T_0 = \frac{2\pi}{\dot{\phi}} = \frac{2\pi mR^2}{\ell} = \frac{2\pi R^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM}}. \tag{K.18}$$

c) Med potensialet $V(r) = -\frac{GM}{r} - \frac{Q}{r^3}$ blir bevegelseslikninga modifisert til

$$\frac{\ell^2}{m^2}(u'' + u) = GM + 3Qu^2. \tag{K.19}$$

En sirkelbevegelse er karakterisert ved at r, og dermed u er konstant, $\frac{\ell^2}{m^2}u = GM + 3Qu^2$, som gir

$$\ell^2 = \frac{GMm^2 + Qm^2u^2}{u} = GMm^2R + \frac{3Qm^2}{R}. \tag{K.20}$$

Vi får fremdeles at $\dot{\phi} = \frac{\ell}{mr^2}$ når $\theta = \frac{\pi}{2}$, og perioden blir

$$T = \frac{2\pi}{\dot{\phi}} = \frac{2\pi mR^2}{\ell} = \frac{2\pi R^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3Q}{GMR^2}}} \approx T_0 \left(1 - \frac{3Q}{2GMR^2}\right). \tag{K.21}$$

d) Vi antar nå at $u = u_0 + u_1$, hvor $u_0 = \frac{1}{R}$ og $u_1 \ll \frac{1}{R}$. Vi setter dette inn i (K.19), og får

$$\frac{\ell^2}{m^2}(u_1'' + u_0 + u_1) = GM + 3Qu_0^2 + 6Qu_0u_1 + 3Qu_1^2. \tag{K.22}$$

Det siste leddet ser vi bort fra, siden vi antar at u_1 er liten, og siden u_0 oppfyller (K.19), får vi

$$\frac{\ell^2}{m^2}(u_1'' + u_1) = 6Qu_0u_1. \tag{K.23}$$

eller

$$\frac{d^2u_1}{d\phi^2} = -f^2u_1, \qquad f^2 = 1 - \frac{6Qu_0m^2}{\ell^2} \tag{K.24}$$

Så lenge $\frac{6Qu_0m^2}{\ell^2} < 1$ er dette en svingelikning med løsning

$$u_1 = \epsilon u_0 \sin(f(\phi - \phi_0)), \tag{K.25}$$

hvor ϵ og ϕ_0 er integrasjonskonstanter (vi skriver integrasjonskonstanten på formen $k = \epsilon u_0$ for at ϵ skal betegne eksentrisiteten til ellipsebanen), og hvor vi igjen kan velge $\phi_0 = 0$.

Perioden til u_1 er $\frac{2\pi}{f}$, hvis $f \neq 1$, vil ikke banen gi en lukket ellipse i løpet av en omdreining. Dette vil oppfattes som en presesjon av ellipsen der denne dreies en vinkel

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{f} - 2\pi \tag{K.26}$$

for hvert omløp om sola. Vi regner ut f ved å sette inn $u_0 = \frac{1}{R}$ og ℓ fra (K.20),

$$f = \sqrt{1 - \frac{6Qu_0m^2}{\ell^2}} = \sqrt{1 - \frac{6Q}{GMR^2 + 3Q}}. \tag{K.27}$$

Dermed får vi

$$\Delta\phi = 2\pi\left(\frac{1}{f} - 1\right) \approx \frac{6\pi Q}{GMR^2}. \tag{K.28}$$

Setter vi inn $Q = \frac{1}{2}J_2GMR_s^2$, får vi

$$\Delta\phi \approx \frac{3\pi J_2 R_s^2}{R^2}, \tag{K.29}$$

og setter vi inn $J_2 = 3 \cdot 10^{-5}$, solradien $R_s = 7.0 \cdot 10^8$ m og Merkurs avstand fra sola $R = 5.8 \cdot 10^{10}$ m får vi $\Delta\phi \approx 4.1 \cdot 10^{-8}$ radianer pr omløp. Regner vi om til buesekunder pr århundre (Merkur gjør 415 omløp pr århundre) får vi $3.5''$/århundre, som ikke kan forklare den observerte $43''$/århundre.

Oppgave K2: Den lineære felt-approksimasjonen

Vi skal regne ut Riemanns krumningstensor, og trenger derfor først konneksjonskoeffisientene $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$, som (i koordinatbasis) er gitt ved

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}). \tag{K.30}$$

Til 1. orden i h blir dette

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta}(h_{\beta\mu,\nu} + h_{\beta\nu,\mu} - h_{\mu\nu,\beta}). \tag{K.31}$$

Setter vi inn i uttrykket gitt i oppgaven for $R^{\alpha}{}_{\mu\beta\nu}$, får vi (fremdeles til 1. orden i h)

$$\begin{aligned} R^{\alpha}{}_{\mu\beta\nu} &= \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu,\beta} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta,\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\beta}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\beta} \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\alpha\gamma}(h_{\gamma\nu,\mu\beta} + h_{\mu\beta,\gamma\nu} - h_{\mu\nu,\gamma\beta} - h_{\gamma\beta,\mu\nu} \end{aligned} \tag{K.32}$$

Vi regner ut Ricci-tensoren ved å kontrahere 1. og 3. indeks,

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} &= \frac{1}{2}\eta^{\alpha\gamma}(h_{\gamma\nu,\mu\alpha} + h_{\mu\alpha,\gamma\nu} - h_{\mu\nu,\gamma\alpha} - h_{\gamma\alpha,\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2}(h_{\nu\alpha,\mu}{}^{\alpha} + h_{\mu\alpha,\nu}{}^{\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - h_{\alpha}{}^{\alpha}{}_{,\mu\nu}), \end{aligned} \tag{K.33}$$

hvor vi har brukt at $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$.

Vi trenger også Ricci-skalaren til feltlikningene,

$$\begin{aligned} R = R^{\mu}{}_{\mu} &= \frac{1}{2}(h^{\mu}{}_{\alpha,\mu}{}^{\alpha} + h^{\mu}{}_{\alpha,\mu}{}^{\alpha} - h^{\mu}{}_{\mu,\alpha}{}^{\alpha} - h_{\alpha}{}^{\alpha,\mu}{}_{\mu} \\ &= h_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - h_{,\alpha}{}^{\alpha}. \end{aligned} \tag{K.34}$$

Dermed blir Einsteins feltlikninger $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu}$

$$\frac{1}{2}(h_{\nu\alpha,\mu}{}^{\alpha} + h_{\mu\alpha,\nu}{}^{\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - h_{,\mu\nu}) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(h_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - h_{,\alpha}{}^{\alpha}) = 8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{K.35}$$

Vi innfører $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$, og antar at $\bar{h}_{\mu\alpha}{}^{,\alpha} = 0$. Denne betingelsen gir

$$h_{\mu\alpha}{}^{,\alpha} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\alpha}h^{,\alpha} = 0 \tag{K.36}$$

$$h_{\mu\alpha}{}^{,\alpha} = \frac{1}{2}h_{,\mu} \tag{K.37}$$

Setter vi inn dette i (K.35), får vi

$$(\frac{1}{2}h_{,\nu\mu} + \frac{1}{2}h_{,\mu\nu} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - h_{,\mu\nu}) - \eta_{\mu\nu}(\frac{1}{2}h_{,\beta}{}^{\beta} - h_{,\alpha}{}^{\alpha}) = 16\pi G T_{\mu\nu} \tag{K.38}$$

$$-h_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h_{,\alpha}{}^{\alpha} = 16\pi G T_{\mu\nu} \tag{K.39}$$

eller

$$\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} = -16\pi G T_{\mu\nu}. \tag{K.40}$$

FYS4160

OPPGAVEARK L – Løsningsforslag av Håkon Enger

Oppgave L1: Schwarzschild-løsningen uttrykt i isotrope koordinater

a) Siden vi har at r bare skal avhenge av ρ, må vi ha

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 = f^2(\rho) d\rho^2. \tag{L.1}$$

Vi får også kravet

$$r^2 = f^2(\rho)\rho^2 \tag{L.2}$$

ved å sammenlikne leddene med $d\Omega^2$ i metrikken. Dette gir $f = \frac{r}{\rho}$ (fortegnet er villkårlig, siden kun f^2 inngår i metrikken, så vi velger det positivt.) Setter vi dette inn i (L.1), får vi

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dr}{\sqrt{r^2 - 2Mr}}. \tag{L.3}$$

Vi integerer på begge sider, og får

$$\ln \rho = \ln\left(-M + r + \sqrt{r^2 - 2Mr}\right) + C, \tag{L.4}$$

der C er en integrasjonskonstant. Denne kan velges fritt, siden vi ikke har andre betingelser enn (L.1). Vi velger $C = -\ln 2$, siden vi da får $\frac{d\rho}{dr} = 1$ til 1. orden i $\frac{M}{r}$ (Dette vil vise seg å være en god egenskap). I så fall får vi

$$\rho = -\frac{M}{2} + \frac{r}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{r^2 - 2Mr}. \tag{L.5}$$

Løser vi denne likninga med hensyn på r, får vi

$$r(\rho) = \frac{4\rho^2 + 4\rho M + M^2}{4\rho}, \tag{L.6}$$

som dermed gir

$$f(\rho) = \frac{r}{\rho} = \frac{4\rho^2 + 4\rho M + M^2}{4\rho^2} = \left(1 + \frac{M}{2\rho}\right)^2. \tag{L.7}$$

Den fulle metrikken uttrykt i isotrope koordinater blir da

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{8M\rho}{4\rho^2 + 4\rho M + M^2}\right) dt^2 + \left(\frac{4\rho^2 + 4\rho M + M^2}{4\rho^2}\right)^2 \left(d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2\right) \\ &= -\frac{\left(1 - \frac{M}{2\rho}\right)^2}{\left(1 + \frac{M}{2\rho}\right)^2} dt^2 + \left(1 + \frac{M}{2\rho}\right)^4 \left(d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2\right). \end{aligned} \tag{L.8}$$

b) Vi får

$$\rho(2M) = \frac{M}{2}, \quad \text{og} \quad \rho(0) = -\frac{M}{2}, \tag{L.9}$$

men den siste verdien er uinteressant, siden $\rho(r)$ ikke er definert i området $0 < r < 2M$ i følge (L.5). Dette koordinatsystemet kan dermed bare brukes utenfor horisonten.

Oppgave L2: Gravitasjonsfeltet utenfor en punktmasse i ro

a) Feltlikningene er

$$\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} = -16\pi G T_{\mu\nu}, \tag{L.10}$$

der $T_{00} = m\delta(\vec{r})$, og $T_{\mu j} = 0$ for $\mu = \{0, 1, 2, 3\}$ og $j = 1, 2, 3$. Vi skal vise at

$$\bar{h}_{00} = \frac{4Gm}{r}, \qquad \text{der} \quad r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \tag{L.11}$$

$$\bar{h}_{\mu i} = 0 \tag{L.12}$$

er en løsning av disse likningene.

Deltafunksjonen er null når $r \neq 0$. I dette tilfellet kan vi sette løsningen rett inn i (L.10):

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} &= \left(-(\partial_0)^2 + (\partial_1)^2 + (\partial_2)^2 + (\partial_3)^2\right) \bar{h}_{\mu\nu} \\ \bar{h}_{00,\alpha}{}^{\alpha} &= \left(-(\partial_0)^2 + (\partial_1)^2 + (\partial_2)^2 + (\partial_3)^2\right) \frac{4Gm}{r} = \frac{3x^2 + 3y^2 + 4z^2}{r^5} - \frac{3}{r^3} = 0. \\ \bar{h}_{\mu i,\alpha}{}^{\alpha} &= 0. \end{aligned}$$

Så likningene er løst for $r \neq 0$. For å vise at det oppgitte uttrykket for $\bar{h}_{00}$ er en løsning også for $r = 0$, må vi bruke integrasjonsegenskapen til deltafunksjonen:

$$\int \delta(\vec{r}) dr = 1, \tag{L.13}$$

for et villkårlig integrasjonsvolum som inneholder punktet $r = 0$.

Integrerer vi på begge sider av (L.10) med $\mu = \nu = 0$, får vi

$$\int \nabla^2 \bar{h}_{00} d^3 r = -16\pi G m. \tag{L.14}$$

Vi skal vise at (L.11) er en løsning av denne likninga. Det gjør vi ved å bruke Gauss' lov:

$$\int_V \nabla \cdot \nabla \bar{h}_{00} d^3 r = \int_{\partial V} (\nabla \bar{h}_{00}) \cdot \vec{n}\, dS, \tag{L.15}$$

der ∂V er overflaten til det volumet (V) vi integrerer over, og $\vec{n}$ er en enhetsvektor normalt på denne overflaten. Vi lar integrasjonsvolumet være en kule med sentrum i origo og radius R, dermed får vi

$$\begin{aligned}\int_{\partial V} (\nabla \bar{h}_{00}) \cdot \vec{n}\, dS = \int_{\partial V} (\nabla \frac{4Gm}{r}) \cdot \frac{\vec{r}}{r}\, dS = \int_{\partial V} (-\frac{4Gm\vec{r}}{r^3}) \cdot \frac{\vec{r}}{r}\, dS \\ = -\frac{4Gm}{R^2} 4\pi R^2 = -16\pi G m.\end{aligned} \tag{L.16}$$

b) Definisjonen av $\bar{h}_{\mu\nu}$ fra oppgave K2 er

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h, \tag{L.17}$$

der $h = h^\alpha{}_\alpha$. Ved å definere $\bar{h} = \bar{h}^\alpha{}_\alpha$ får vi

$$\bar{h} = h^\alpha{}_\alpha - \frac{1}{2}\eta^\alpha{}_\alpha h = -h, \tag{L.18}$$

hvor vi har brukt at $\eta^\alpha{}_\alpha = 4$. Dette setter vi inn i (L.17),

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h} \tag{L.19}$$

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}. \tag{L.20}$$

Dermed kan vi lett regne ut $h_{\mu\nu}$ ut fra uttrykkene for $\bar{h}_{\mu\nu}$ oppgitt:

$$\bar{h} = \bar{h}^\mu{}_\mu = -\frac{4Gm}{r}, \tag{L.21}$$

$$h_{00} = \frac{4Gm}{r} - \frac{1}{2}\eta_{00}\left(-\frac{4Gm}{r}\right) = \frac{2Gm}{r}, \tag{L.22}$$

$$h_{ii} = -\frac{1}{2}\eta_{ii}\left(-\frac{4Gm}{r}\right) = \frac{2Gm}{r}. \tag{L.23}$$

Det fulle uttrykket for linjeelementet i denne approksimasjonen får vi så ved å sette $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Gm}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{2Gm}{r}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{L.24}$$

c) Når vi innfører sfæriske koordinater (polarkoordinater), har vi $dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2$, og vi får

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Gm}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{2Gm}{r}\right) (dr^2 + r^2 d\Omega^2). \tag{L.25}$$

Fra oppgave L1 har vi metrikken (L.8),

$$ds^2 = -\frac{\left(1 - \frac{M}{2\rho}\right)^2}{\left(1 + \frac{M}{2\rho}\right)^2} dt^2 + \left(1 + \frac{M}{2\rho}\right)^4 \left(d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2\right). \tag{L.26}$$

Rekkeutvikler vi denne til 1. orden i $\frac{M}{\rho}$ får vi

$$ds^2 \approx -\left(1 - \frac{2M}{\rho}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{2M}{\rho}\right) \left(d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2\right), \tag{L.27}$$

altså det samme som (L.25) med $G = 1$, $m = M$ og $r = \rho$.

FYS4160

OPPGAVEARK M – Løsningsforslag av Håkon Enger

Oppgave M1: Romskip som faller i et sort hull

a) Solas masse er $M_\odot = 1.989 \cdot 10^{30}$ kg, så Schwarzschild-radien til det sorte hullet er

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2 \cdot 6.673 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3/kgs^2} \cdot 5 \cdot 1.989 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}}{(2.998 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s^2})^2} = 14.77\,\mathrm{km}. \tag{M.1}$$

Metrikken er Schwarzschild-metrikken,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)} + r^2 d\Omega^2. \tag{M.2}$$

Lagrangefunksjonen blir dermed

$$L = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{2\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)} \tag{M.3}$$

hvor vi har brukt at $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$ for dette tilfellet, der romskipet faller radielt. Bevegelseslikningene finner vi ved

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0, \tag{M.4}$$

og setter vi inn $x^\mu = t$, blir dette

$$\frac{d}{d\tau}\left[\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)\dot{t}\right] = 0, \tag{M.5}$$

som forteller oss at $p_t = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)\dot{t}$ er en bevegelseskonstant.

Vi kunne sette opp bevegelseslikningen for r på samme måte ved hjelp av Lagrangelikningene, men ofte er det lettere å bruke identiteten $\vec{U}^2 = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = -1$, som gir en 1. ordens difflikning:

$$-\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)} = -1. \tag{M.6}$$

Setter vi inn $\dot{t} = \frac{p_t}{1-\frac{R_S}{r}}$, får vi

$$-p_t^2 + \dot{r}^2 = -1 + \frac{R_S}{r}. \tag{M.7}$$

Bevegelseskonstanten p_t representerer energien (målt av en observatør i ro langt borte, som har egentid lik koordinattiden t), ved $E = mp_t$, der m er hvilemassen til romskipet. Siden en av randbetingelsene er at totalenergien er lik hvileenergien, betyr dette at $p_t = 1$. Vi får altså

$$\dot{r}^2 = \frac{R_S}{r}, \tag{M.8}$$

$$\frac{dr}{d\tau} = -\sqrt{\frac{R_S}{r}}. \tag{M.9}$$

Vi har valgt negativt fortegn på kvadradrota her fordi vi vet at romskipet faller inn mot det sorte hullet, så $\dot{r}$ må være negativ. Vi kan løse denne difflikningen ved å skrive

$$\int \sqrt{r} dr = -\sqrt{R_S} \int d\tau, \tag{M.10}$$

som gir

$$\frac{2}{3} r^{\frac{3}{2}} = -\sqrt{R_S}\tau + C, \tag{M.11}$$

der C er en integrasjonskonstant. Ved å sette inn randbetingelsen $r = r_0 = 10^{10}\,\text{m}$ ved $\tau = 0$, får vi $C = \frac{2}{3} r_0^{\frac{3}{2}}$, så vi får

$$\tau = \frac{2}{3\sqrt{R_S}} \left(r_0^{\frac{3}{2}} - r^{\frac{3}{2}} \right). \tag{M.12}$$

Vi skal finne hvor lang egentid τ_S romskipet bruker på å nå Schwarzschild-radien $r = R_S$, fra r_0, så vi setter inn:

$$\tau_S = \frac{2}{3\sqrt{R_S}} \left(r_0^{\frac{3}{2}} - R_S^{\frac{3}{2}} \right) / c = 1.830 \cdot 10^4\,\text{s} \approx 5\,\text{timer}. \tag{M.13}$$

Her har vi gjeninnført enheter der vi eksplisitt tar med lyshastigheten c for å få svaret i sekunder.

For å finne ut hvor lang tid romskipet bruker fra horisonten $r = R_S$ og inn til singulariteten $r = 0$, bruker vi samme uttrykk, men bytter ut r_0 med R_S og setter $r = 0$,

$$\tau_{\text{sing}} = \frac{2}{3\sqrt{R_S}} R_S^{\frac{3}{2}} / c = 3.28 \cdot 10^{-5}\,\text{s}. \tag{M.14}$$

Romskipet bruker altså bare en brøkdel av en sekund på å nå inn til singulariteten etter at det har passert horisonten.

b) Egentiden $\Delta\tau$ det tar romskipet å reise fra $r = R_S$ til $r = 0$ er generelt gitt ved

$$\Delta\tau = \int_{r=R_S}^{r=0} d\tau, \tag{M.15}$$

der $d\tau^2 = -ds^2$. Vi har dermed

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{(1 - \frac{R_S}{r})} - r^2 d\Omega^2 \\ &= \frac{dr^2}{(\frac{R_S}{r} - 1)} - \left(\frac{R_S}{r} - 1\right) dt^2 - r^2 d\Omega^2 \\ &\leq \frac{dr^2}{(\frac{R_S}{r} - 1)} \end{aligned} \tag{M.16}$$

(Her har vi skrevet om $(1 - \frac{R_S}{r}) = -(\frac{R_S}{r} - 1)$, siden $r < R_S$ for denne bevegelsen.) Vi får altså

$$\Delta\tau \leq \int_{r=R_S}^{r=0} \frac{dr}{\sqrt{\frac{R_S}{r} - 1}} = \frac{\pi}{2} R_S = \pi G M. \tag{M.17}$$

Vi legger merke til at dersom $d\Omega > 0$, vil dette gjøre $d\tau$ mindre, slik at det faktisk er en *rett linje* inn mot singulariteten som tar *lengst tid*!

c) Både A og B sender ut signaler med frekvens ω. A mottar signalene fra B med frekvens ω_A , og B mottar signalene fra A med frekvens ω_B. Vi skal finne ω_A og ω_B ved å gå via et (momentant) stasjonært inertialsystem C med posisjon r_A. Den "fiktive observatøren" C vil motta signaler fra A med en frekvens ω_{C_A} og signaler fra B med frekvens ω_{C_B}. Merk at $\omega_{C_A} \neq \omega_{C_B}$.

Vi tar først signalene fra A til B via C. Siden A beveger seg bort fra C, blir signalet rødforskjøvet på grunn av den kinematiske Dopplereffekten, men det er ingen gravitasjonell effekt mellom A og C siden disse befinner seg i samme posisjon. Likningen for Dopplereffekt gir

$$\omega_{C_A} = \sqrt{\frac{1 - v}{1 + v}}\,\omega. \tag{M.18}$$

Hastigheten (målt lokalt) er $\frac{dr}{d\tau} = \sqrt{\frac{R_S}{r}}$ ved likning (M.9). Mellom C og B blir signalet utsatt for den gravitasjonelle Dopplereffekten, som også fører til en rødforskyving siden signalet beveger seg oppover i tyngdefeltet og således mister energi. Det er ingen kinetisk Dopplereffekt mellom C og B, siden disse er i ro i forhold til hverandre. Lininga for gravitasjonell Dopplereffekt mellom to stasjonære observatører gir

$$\omega_B = \sqrt{\frac{(g_{tt})_C}{(g_{tt})_B}}\,\omega_{C_A} = \sqrt{\frac{1-\frac{R_S}{r_A}}{1-\frac{R_S}{r_B}}}\,\omega_{C_A}, \tag{M.19}$$

der $(g_{tt})_C$ betyr verdien av komponenten til metrikken i posisjonen til C. Kombinerer vi disse to likningene, får vi

$$\omega_B = \sqrt{\frac{1-\frac{R_S}{r_A}}{1-\frac{R_S}{r_B}}}\sqrt{\frac{1-\sqrt{\frac{R_S}{r_A}}}{1+\sqrt{\frac{R_S}{r_A}}}}\,\omega = \frac{1-\sqrt{\frac{R_S}{r_A}}}{\sqrt{1-\frac{R_S}{r_B}}}\,\omega. \tag{M.20}$$

Signalene fra romstasjonen til romskipet behandler vi på samme måte, først som signaler fra B til den fiktive stasjonære observatøren C, som observerer en gravitasjonelt blåforskjøvet frekvens, siden signalet nå "faller" i gravitasjonsfeltet,

$$\omega_{C_B} = \sqrt{\frac{(g_{tt})_B}{(g_{tt})_A}}\,\omega = \sqrt{\frac{1-\frac{R_S}{r_B}}{1-\frac{R_S}{r_A}}}\,\omega. \tag{M.21}$$

Deretter blir signalet rødforskjøvet på vei fra C til A, siden A fjerner seg fra C,

$$\omega_A = \sqrt{\frac{1-v}{1+v}}\,\omega_{C_B} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{\frac{R_S}{r_A}}}{1+\sqrt{\frac{R_S}{r_A}}}}\,\omega_{C_B}. \tag{M.22}$$

Kombinerer vi disse effektene, får vi

$$\omega_A = \sqrt{\frac{1-\sqrt{\frac{R_S}{r_A}}}{1+\sqrt{\frac{R_S}{r_A}}}}\sqrt{\frac{1-\frac{R_S}{r_B}}{1-\frac{R_S}{r_A}}}\,\omega = \frac{\sqrt{1-\frac{R_S}{r_B}}}{1+\sqrt{\frac{R_S}{r_A}}}\,\omega. \tag{M.23}$$

Vi legger merke til at dette faktisk også er et rødforskjøvet signal, $\omega_A < \omega$, slik at den kinetiske effekten er sterkere enn den gravitasjonelle i dette tilfellet.

Når romskipet nærmer seg Schwarzschild-radien, $r_A \to R_S$, ser vi at frekvensen ω_B mottatt av romstasjonen går mot null. Dette betyr at signalet blir uendelig rødforskjøvet, så observatører i romstasjonen vil aldri se romskipet passere Schwarzschild-radien. Frekvensen ω_A mottatt i romskipet, derimot, skjer det ingenting spesielt med ved passering av horisonten.

Oppgave M2: Merkurs perihel-presesjon og den kosmologiske konstanten

a) Einsteins feltlikninger med en kosmologisk konstant har formen

$$E_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = -\Lambda g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \tag{M.24}$$

som gir for koordinatene $x^\mu = r, t$,

$$E_{\hat{t}\hat{t}} = \Lambda, \tag{M.25}$$

$$E_{\hat{r}\hat{r}} = -\Lambda. \tag{M.26}$$

Vi går fram på samme måte som i utledningen av Scwarzschild-metrikken uten Λ, og antar at metrikken har formen

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)}dt^2 + e^{2\beta(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{M.27}$$

Dette gir følgende uttrykk innsatt i utrykkene for Einstein-tensoren:

$$E_{\hat{t}\hat{t}} = \frac{2}{r}e^{-2\beta}\beta' + \frac{1}{r^2}(1 - e^{-2\beta}), \tag{M.28}$$

$$E_{\hat{r}\hat{r}} = \frac{2}{r}e^{-2\beta}\alpha' - \frac{1}{r^2}(1 - e^{-2\beta}). \tag{M.29}$$

Vi legger sammen likningene (M.25) og (M.26), og får som i den opprinnelige løsningen kravet $\beta + \alpha =$ konstant, hvor vi vet at vi kan sette denne konstanten lik null ved å velge et passende nullpunkt for koordinattiden. Dette gir altså $\alpha = -\beta$. Vi velger så å løse likninga (M.25), som gir

$$\frac{2}{r}e^{-2\beta}\beta' + \frac{1}{r^2}(1 - e^{-2\beta}) = \Lambda. \tag{M.30}$$

Vi observerer at denne likninga kan skrives om som

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r\left(1 - e^{-2\beta}\right)\right] = \Lambda, \tag{M.31}$$

$$\frac{d}{dr}\left[r\left(1 - e^{-2\beta}\right)\right] = \Lambda r^2, \tag{M.32}$$

som har løsningen

$$r\left(1 - e^{-2\beta}\right) = \frac{\Lambda}{3}r^3 + K, \tag{M.33}$$

hvor K er en integrasjonskonstant. Vi får dermed

$$e^{2\alpha} = e^{-2\beta} = 1 - \frac{K}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2, \tag{M.34}$$

og på samme måte som tidligere kan vi finne $K = 2GM$ ved å gå til den Newtonske grensen. Metrikken blir altså

$$ds^2 = -(1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2} + r^2 d\Omega^2. \tag{M.35}$$

b) Denne utledningen blir også helt analog til tilfellet $\Lambda = 0$. Lagrangefunksjonen blir

$$L = -(1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2)\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2} + \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}r^2 \sin^2\theta\dot{\phi}^2 \quad \text{(M.36)}$$

og gir bevegelseskonstantene

$$p_t = (1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2)\dot{t}, \quad \text{(M.37)}$$

$$p_\phi = r^2 \sin^2\theta\dot{\phi}. \quad \text{(M.38)}$$

På samme måte som for $\Lambda = 0$, vil bevegelsen alltid være i et plan, så vi kan sette $\theta = \frac{\pi}{2}, \dot{\theta} = 0$. Vi bruker så identiteten $\vec{U}^2 = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = -1$ til å finne en 1. ordens difflikning for r:

$$-\frac{p_t^2}{1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2} + \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2} = -1, \quad \text{(M.39)}$$

$$\dot{r}^2 = p_t^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)\left(1 + \frac{p_\phi^2}{r^2}\right). \quad \text{(M.40)}$$

Vi ønsker så å finne banelikninga, dvs. r som en funksjon av ϕ og ikke τ. Dette gjør vi ved å observere at

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{d\phi}{d\tau}\frac{d}{d\phi} = \frac{p_\phi}{r^2}\frac{d}{d\phi}. \quad \text{(M.41)}$$

Videre kan vi forenkle likninga ved å bruke koordinaten $u = \frac{1}{r}$, og vi får dermed

$$\dot{r} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{u}\right) = p_\phi u^2 \frac{d}{d\phi}\left(\frac{1}{u}\right) = -p_\phi\frac{du}{d\phi}. \quad \text{(M.42)}$$

Setter vi inn dette i (M.40), får vi

$$p_\phi^2\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = p_t^2 - \left(1 - 2Mu - \frac{\Lambda}{3u^2}\right)\left(1 + p_\phi^2 u^2\right), \quad \text{(M.43)}$$

og deriverer vi denne likninga med hensyn på ϕ, får vi etter litt forenkling

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{M}{p_\phi^2} + 3Mu^2 - \frac{\Lambda}{3p_\phi^2 u^3}, \quad \text{(M.44)}$$

som var det vi skulle vise.

c) En sirkelbevegelse vil ha $u = u_0 =$ konstant, der u_0 oppfyller

$$u_0 = \frac{M}{p_\phi^2} + 3Mu_0^2 - \frac{\Lambda}{3p_\phi^2 u_0^3}, \tag{M.45}$$

noe som gir betingelsen

$$p_\phi^2 = \frac{3Mu_0^3 - \Lambda}{u_0^4 - 9Mu_0^5}. \tag{M.46}$$

Vi antar nå at bevegelsen er nær en sirkelbevegelse, $u = u_0 + u_1$, der $u_1 \ll u_0$. Setter vi dette inn i (M.44) og rekkeutvikler til 1. orden i u_1, får vi

$$\frac{d^2u_1}{d\phi^2} + u_1 = 6Mu_0u_1 + \frac{\Lambda}{p_\phi^2 u_0^4}u_1 = 2ku_0u_1, \tag{M.47}$$

der $k = 3M + \frac{\Lambda}{2p_\phi^2 u_0^5}$. Dette gir løsningen

$$u_1 = \epsilon u_0 \cos\left(f(\phi - \phi_0)\right), \tag{M.48}$$

der $f = \sqrt{1 - 2ku_0}$, og ϵ, ϕ_0 er integrasjonskonstanter. Denne funksjonen har periode $\frac{2\pi}{f}$, noe som innebærer at perihelpresesjonen blir

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{f} - 2\pi \approx 2\pi k u_0 = \pi\left(6Mu_0 + \frac{\Lambda}{p_\phi^2 u_0^4}\right). \tag{M.49}$$

d) Bidraget til $\Delta\phi$ fra Λ må være mindre enn usikkerheten $\delta\phi = 1''$/århundre i observasjonene:

$$\Delta\phi_\Lambda = \frac{\pi\Lambda}{p_\phi^2 u_0^4} < \delta\phi, \tag{M.50}$$

Vi setter inn $u_0 = \frac{1}{r_0}$, der $r_0 = 5.8 \cdot 10^{10}$ m er Merkurs gjennomsnittsavstand fra Sola. I tillegg setter vi inn massen til Sola $M = 2.0 \cdot 10^{30}$ kg i (M.46), hvor vi antar at $\Lambda \ll 3Mu_0^3$, slik at vi kan se bort fra Λ i denne likninga. For å få fysiske enheter må vi sette inn igjen riktige potenser av G og c i likningene, dermed får vi

$$p_\phi^2 \approx \frac{3GMr_0^2}{r_0 - 9GM/c^2} = 2.32 \cdot 10^{31}\,\mathrm{m^4/s^2} \tag{M.51}$$

$$\delta\phi = 1''/\text{århundre} = \frac{1}{3600}\frac{\pi}{180}\frac{1}{417\,\text{omløp}} = 1.16 \cdot 10^{-8}\,\text{rad/omløp} \tag{M.52}$$

$$\Lambda < \frac{p_\phi^2}{\pi r_0^4}\delta\phi = 7.58 \cdot 10^{-21}\,\mathrm{s^{-2}}, \tag{M.53}$$

noe som tilsvarer en vakuumenergi på

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} < 4.52 \cdot 10^{-12}\mathrm{kg/m^3} \tag{M.54}$$

FYS4160

OPPGAVEARK N – Løsningsforslag av Håkon Enger

Oppgave N1: Tidrommet inni og utenfor et roterende kuleskall

a) Vi skal bruke den lineære feltapproksimasjonen,

$$\nabla^2 \bar{h}_{\alpha\beta} = -16\pi T_{\alpha\beta}, \tag{N.1}$$

der

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \rho u_\mu u_\nu, \qquad \rho = M\delta(r-R)/4\pi R^2, \\ u_\mu &= (-1, -R\omega_s \sin\theta \sin\phi, R\omega_s \sin\theta\cos\phi, 0). \end{aligned} \tag{N.2}$$

Dette gir likningene

$$\nabla^2 \bar{h}_{00} = -\frac{4M}{R^2}\delta(r-R), \tag{N.3}$$

$$\nabla^2 \bar{h}_{ii} = 0, \tag{N.4}$$

$$\nabla^2 \bar{h}_{0x} = \frac{4M\omega_s}{R}\sin\theta\sin\phi\,\delta(r-R), \tag{N.5}$$

$$\nabla^2 \bar{h}_{0y} = -\frac{4M\omega_s}{R}\sin\theta\cos\phi\,\delta(r-R). \tag{N.6}$$

Siden høyresiden i (N.3) er kulesymmetrisk, antar vi at $\bar{h}_{00}$ er kulesymmetrisk. Vi får dermed

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \bar{h}_{00}}{\partial r} = 0, \quad r \neq R. \tag{N.7}$$

På grunn av deltafunksjonen for $r = R$, deler vi funksjonen i to deler, og får

$$\bar{h}_{00} = \begin{cases} \frac{K_1}{r} + A_1 & r > R \\ \frac{K_2}{r} + A_2 & r < R \end{cases} \tag{N.8}$$

der K_1, K_2, A_1, A_2 er integrasjonskonstanter. Vi krever at $\bar{h}_{00}$ skal være definert for $r = 0$, dermed må $K_2 = 0$. Vi krever også at metrikken skal gå mot Minkowski-metrikken for stor r, dette betyr at $\bar{h}_{00} \to 0$, så vi må ha $A_1 = 0$. I tillegg må vi kreve at metrikken, og dermed $\bar{h}_{00}$, skal være kontinuerlig i

$r = R$. Dette gir $A_2 = \frac{K_1}{R}$. For å bestemme K_1 må vi integrere uttrykket (på grunn av deltafunksjonen):

$$\int_0^{r'} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \bar{h}_{00}}{\partial r} dr = -\frac{4M}{R^2} \int_0^{r'} r^2 \delta(r - R) dr \tag{N.9}$$

$$\left[r^2 \frac{\partial \bar{h}_{00}}{\partial r} \right]_0^{r'} = -4M \tag{N.10}$$

$$-K_1 = -4M \tag{N.11}$$

(Dette gjelder for $r' > R$.) Vi har dermed:

$$\bar{h}_{00} = \begin{cases} -\frac{4M}{r} & r > R \\ -\frac{4M}{R} & r < R \end{cases} \tag{N.12}$$

Likningen (N.4) og kravet om at metrikken skal være asymptotisk Minkowski gir $\bar{h}_{ii} = 0$.

Vi trenger nå på grunn av symmetrien bare å løse likning (N.6), og vi antar at $\bar{h}_{0y} = f(r) \sin\theta \cos\phi$. Dette gir

$$\begin{aligned} \nabla^2 \bar{h}_{0y} &= \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] f(r) \sin\theta \cos\theta \\ &= -\frac{2}{r^2} f(r) \sin\theta \cos\phi + \frac{2}{r} f'(r) \sin\theta \cos\phi + f''(r) \sin\theta \cos\phi. \end{aligned} \tag{N.13}$$

Likning (N.6) gir nå

$$-\frac{2}{r^2} f(r) + \frac{2}{r} f'(r) + f''(r) = -\frac{4M\omega_s}{R} \delta(r - R). \tag{N.14}$$

Det er naturlig å prøve en løsning av typen $f(r) = Kr^n$, som gir

$$(n^2 + n - 2) K r^{n-2} = 0, \tag{N.15}$$

eller $n = \{-2, 1\}$. Igjen deler vi løsningen i to:

$$f(r) = \begin{cases} \frac{B_1}{r^2} + C_1 r & r > R \\ \frac{B_2}{r^2} + C_2 r & r < R \end{cases} \tag{N.16}$$

Kravet om at metrikken skal være asymptotisk lik Minkowski-metrikken, gir at $C_1 = 0$. Kravet om at metrikken skal være definert for $r = 0$ gir $B_2 = 0$.

Kravet om kontinuitet for $r = R$ gir $B_1 = C_2 R^3$. Vi finner B_1 ved å integrere: (N.6) kan uttrykkes som

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 f(r))\right) = -\frac{4M\omega_s}{R}\delta(r-R) \tag{N.17}$$

Innsetting av $f(r)$ fra (N.16) med $C_1 = B_2 = 0$ gir

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 f\right) = \begin{cases} 3C_2 & r < R \\ 0 & r > R \end{cases} \tag{N.18}$$

som kan skrives

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 f\right) = 3C_2\Theta(R-r) \tag{N.19}$$

der

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \tag{N.20}$$

er Heavisides stepfunksjon. Derivasjon av (N.19) gir

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 f\right)\right] = -3C_2\delta(R-r) \tag{N.21}$$

der vi har brukt $\delta(r-R) = -\delta(R-r)$. Sammenligning med (N.17) gir

$$-3C_2 = -\frac{4M\omega_s}{R} \tag{N.22}$$

$$C_2 = \frac{4M\omega_s}{3R}, \tag{N.23}$$

$$B_1 = \frac{4}{3}M\omega_s R^2. \tag{N.24}$$

Så løsningen blir

$$f(r) = \begin{cases} \frac{4M\omega_s R^2}{3r^2} & r > R \\ \frac{4M\omega_s r}{3R} & r < R \end{cases} \tag{N.25}$$

Fra oppgave L2 har vi at

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}, \tag{N.26}$$

og i tillegg har vi fått oppgitt at

$$g_{0\phi} = g_{\phi\phi}^{1/2}[g_{0y}]_{\phi=0}. \tag{N.27}$$

Her er $g_{\phi\phi}$ til 0. orden i M gitt ved $g_{\phi\phi} = r\sin\theta$, som i flatt rom. (Siden g_{0y} er proporsjonal med M trenger vi bare 0. ordensleddet.) Alt i alt gir dette oss metrikken

$$ds^2 = \begin{cases} -\left(1-\dfrac{2M}{R}\right)dt^2 + \left(1+\dfrac{2M}{R}\right)(dx^2+dy^2+dz^2) \\ \qquad\qquad -\dfrac{8M\omega_s}{3R}r^2\sin^2\theta d\phi dt, \quad r<R \\ -\left(1-\dfrac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1+\dfrac{2M}{r}\right)(dx^2+dy^2+dz^2) \\ \qquad\qquad -\dfrac{8M\omega_s R^2}{3r}\sin^2\theta d\phi dt, \quad r>R \end{cases} \tag{N.28}$$

b) Kerr-metrikken er gitt ved

$$ds^2 = -e^{2\nu}dt^2 + e^{2\mu}dr^2 + e^{2\lambda}d\theta^2 + e^{2\psi}(d\phi - \omega dt)^2, \tag{N.29}$$

der

$$\begin{aligned} e^{2\nu} &= \frac{\rho^2\Delta}{\Sigma^2}, \quad e^{2\mu} = \frac{\rho^2}{\Delta}, \quad e^{2\lambda} = \rho^2 \\ e^{2\psi} &= \left(\frac{\Sigma^2}{\rho^2}\right)\sin^2\theta, \quad \omega = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} = \frac{2Mar}{\Sigma^2} \\ \rho^2 &= r^2 + a^2\cos^2\theta, \quad \Delta = r^2 + a^2 - 2Mr, \quad \Sigma^2 = (r^2+a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta \end{aligned}$$

der M er det sorte hullets masse og a er en konstant hvis fysiske betydning vi skal bestemme. Vi skal i tillegg til $r \gg M$ anta at $\frac{J}{Mr} \ll 1$, dette betyr $r \gg \frac{2}{3}R^2\omega$.

Til 1. orden i $\frac{J}{Mr}$ har vi dermed

$$e^{2\lambda} = \rho^2 = r^2 + \frac{J^2}{M^2}\cos^2\theta \approx r^2 \tag{N.30}$$

$$\Delta = r^2 + \frac{J^2}{M^2} - 2Mr \approx r^2 - 2Mr \tag{N.31}$$

$$\Sigma^2 = \left(r^2 + \frac{J^2}{M^2}\right)^2 - \frac{J^2}{M^2}\Delta\sin^2\theta \approx r^4 \tag{N.32}$$

$$e^{2\nu} \approx \frac{r^2(r^2-2Mr)}{r^4} = 1 - \frac{2M}{r} \tag{N.33}$$

$$e^{2\mu} \approx \frac{r^2}{r^2-2Mr} \approx 1 + \frac{2M}{r} \tag{N.34}$$

$$e^{2\psi} \approx r^2\sin^2\theta \tag{N.35}$$

så i denne tilnærmingen blir metrikken (N.28)

$$ds^2 \approx -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2+\left(1+\frac{2M}{r}\right)dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta(d\phi-\omega dt)^2. \tag{N.36}$$

Vi kan uttrykke denne metrikken i isotrope koordinater på samme måte som i oppgave (L1),

$$ds^2 \approx -\left(1-\frac{2M}{r(\rho)}\right)dt^2+f^2(\rho)\left(d\rho^2+\rho^2d\theta^2+\rho^2\sin^2\theta(d\phi-\omega dt)^2\right), \tag{N.37}$$

og til 1. orden i $\frac{M}{\rho}$ er $r(\rho)\approx\rho$ og $f^2(\rho)\approx 1+\frac{2M}{\rho}$, så vi får

$$ds^2 \approx -\left(1-\frac{2M}{\rho}\right)dt^2+\left(1+\frac{2M}{\rho}\right)\left(d\rho^2+\rho^2d\theta^2+\rho^2\sin^2\theta(d\phi-\omega dt)^2\right). \tag{N.38}$$

Sammenligning av (N.38) med (N.28) for $r=R$ gir

$$\omega=\frac{4}{3}\frac{M}{R}\omega_s \tag{N.39}$$

Insetting for ω fra (N.29) og bruk av tilnærmelsen $\Sigma^2=r^4$ fra (N.32) gir

$$a=\frac{2}{3}R^2\omega_s=\frac{J}{M} \tag{N.40}$$

ifølge det oppgitte uttrykket for skallets impulsmoment. Dvs a er skallets impulsmoment pr masseenhet.

c) Vi har for $r>R$

$$\omega_L=-\frac{g_{0\phi}}{g_{\phi\phi}}=\begin{cases}\frac{\frac{2J}{r}\sin^2\theta}{r^2\sin^2\theta\left(1+\frac{2M}{r}\right)}\approx\frac{2J}{r^3} & r>R\\ \frac{\frac{4M\omega}{3R}r^2\sin^2\theta}{r^2\sin^2\theta\left(1+\frac{2M}{R}\right)}=\frac{\frac{4M\omega}{3R}}{1+\frac{2M}{R}} & r<R\end{cases} \tag{N.41}$$

Innenfor skallet er vinkelhastigheten uavhengig av posisjonen, utenfor går den mot null når $r\to\infty$.

Oppgave N2: Kinematikk i Kerr-tidrommet

a) For lys er $ds^2 = 0$. Dette gir

$$-e^{2\nu}dt^2 + e^{2\mu}dr^2 + e^{2\lambda}d\theta^2 + e^{2\psi}(d\phi - \omega dt)^2 = 0, \tag{N.42}$$

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 - 2\omega\frac{d\phi}{dt} - e^{2\nu-2\psi} + \omega^2 = 0, \tag{N.43}$$

som vi løser for $\frac{d\phi}{dt}$ og får

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega \pm e^{\nu-\psi} = \omega \pm \frac{\rho^2\sqrt{\Delta}}{\Sigma^2 \sin\theta} = \pm(c_0 \mp \omega). \tag{N.44}$$

(Merk at $\omega = \frac{2Mar}{\Sigma^2}$ er en funksjon av r.) Vi antar at $\omega < c_0 = \frac{\rho^2\sqrt{\Delta}}{\Sigma^2 \sin\theta}$, og ser at lys som går i den ene retningen dermed har farten $|\frac{d\phi}{dt}| = c_0 + \omega$ og i den andre $|\frac{d\phi}{dt}| = c_0 - \omega$. I ϕ-koordinaten er omkretsen i en sirkel rundt hullet alltid 2π, så vi får at forskjellen i tid lyset bruker på en runde er

$$\Delta t = \frac{2\pi}{c_0 - \omega} - \frac{2\pi}{c_0 + \omega} = \frac{4\pi\omega}{c_0^2 - \omega^2}. \tag{N.45}$$

Denne forskjellen går mot null når $r \to \infty$.

b) Lagrangefunksjonen for en fri partikkel i Kerr-rommet blir

$$L = -\frac{1}{2}e^{2\nu}\dot{t}^2 + \frac{1}{2}e^{2\mu}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}e^{2\lambda}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}e^{2\psi}(\dot{\phi} - \omega\dot{t})^2, \tag{N.46}$$

og den kanoniske impulsen p_ϕ blir

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = e^{2\psi}\dot{\phi} - \omega e^{2\psi}\dot{t}. \tag{N.47}$$

Dersom $p_\phi = 0$, får vi $\dot{\phi} = \omega$, eller

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{\dot{\phi}}{\dot{t}} = \omega. \tag{N.48}$$

Vinkelhastigheten til en partikkel med null impulsmoment om z-aksen er ω.

c) Vi vet at for et ikke-roterende sort hull ($a = 0$), vil en partikkel med null impulsmoment ha en akselerasjon innover mot det sorte hullet, så en slik partikkel kan ikke ha fast r-koordinat. Generelt vil derfor ikke ZAMOer med fast r-koordinat være i fritt fall.

For å vise at uttrykkene oppgitt for $e_{\hat{\mu}'}$ er riktige, holder det å sjekke at $\underline{\omega}^{\hat{\mu}'}(\vec{e}_{\hat{\nu}'}) = \delta^{\hat{\mu}'}{}_{\hat{\nu}'}$, ved å bruke at $\underline{\omega}^{\mu}(\vec{e}_{\nu}) = \delta^{\mu}{}_{\nu}$. Dette er rett fram.

Den fysiske hastigheten målt av en ZAMO kan vi finne ved å uttrykke 4-hastigheten $\vec{U}$ i basisen $(\vec{e}_{\hat{\mu}'})$. Siden dette er en ortonormal basis og $\vec{e}_{\hat{t}'}$ er 4-hastigheten til en ZAMO, vil dermed $U^{\hat{\mu}'} = \gamma(1, v^{\hat{\mu}'})$, der $v^{\hat{\mu}'}$ er hastigheten målt av ZAMOen. Siden komponentene til en vektor transformerer på samme måte som basis-enformene,

$$U^{\hat{\mu}'} = M^{\hat{\mu}'}{}_{\mu} U^{\mu} \qquad \underline{\omega}^{\hat{\mu}'} = M^{\hat{\mu}'}{}_{\mu} \underline{\omega}^{\mu}, \tag{N.49}$$

kan vi lese transformasjonen direkte av uttrykkene oppgitt i oppgaveteksten. I den opprinnelige koordinatbasisen er

$$U^{t} = \frac{dt}{d\tau}, \qquad U^{\phi} = \frac{d\phi}{d\tau} = \Omega \frac{dt}{d\tau}, \tag{N.50}$$

der τ er egentiden til partikkelen (ikke ZAMOen), så vi får

$$U^{\hat{t}'} = e^{\nu} U^{t} = e^{\nu} \dot{t}, \qquad U^{\hat{\phi}'} = e^{\psi}(U^{\phi} - \omega U^{t}) = e^{\psi} \dot{t}(\Omega - \omega), \tag{N.51}$$

og til slutt

$$v^{\hat{\phi}'} = \frac{U^{\hat{\phi}'}}{U^{\hat{t}'}} = e^{\psi - \nu}(\Omega - \omega). \tag{N.52}$$

Et fast koordinatpunkt har $\Omega = 0$, og

$$v_0^{\hat{\phi}'} = -e^{\psi - \nu} \omega. \tag{N.53}$$

d) Nå innfører vi et ortonormalt basisfelt med utgangspunkt i den opprinnelige koordinatbasisen. Dette vil være referansesystemet til en partikkel med konstante koordinater. Vi har

$$g_{00} = -e^{2\nu} + \omega^2 e^{2\psi} = -e^{2\nu}\left(1 - (v_0^{\hat{\phi}'})^2\right) = -e^{2\nu}\hat{\gamma}^{-2}, \tag{N.54}$$

og får

$$\gamma_{rr} = g_{rr} = e^{2\mu} \tag{N.55}$$

$$\gamma_{\theta\theta} = g_{\theta\theta} = e^{2\lambda} \tag{N.56}$$

$$\gamma_{\phi\phi} = g_{\phi\phi} - \frac{g_{\phi t}^2}{g_{tt}} = e^{2\psi} + \frac{\omega^2 e^{2\psi}}{e^{2\nu}\hat{\gamma}^{-2}} = e^{2\psi}\left(1 + \hat{\gamma}^2 (v_0^{\hat{\phi}'})^2\right) = \hat{\gamma}^2 e^{2\psi}. \tag{N.57}$$

Dermed får vi

$$\vec{e}_{\hat{t}} = \frac{\vec{e}_t}{\sqrt{-g_{tt}}} = \hat{\gamma} e^{-\nu} \vec{e}_t, \tag{N.58}$$

$$\vec{e}_{\hat{r}} = (\gamma_{rr})^{-\frac{1}{2}} \vec{e}_r = e^{-\mu} \vec{e}_r, \tag{N.59}$$

$$\vec{e}_{\hat{\theta}} = (\gamma_{\theta\theta})^{-\frac{1}{2}} \vec{e}_\theta = e^{-\lambda} \vec{e}_\theta, \tag{N.60}$$

$$\vec{e}_{\hat{\phi}} = (\gamma_{\phi\phi})^{-\frac{1}{2}} \left(\vec{e}_\phi - \frac{\omega e^{2\psi}}{\hat{\gamma}^{-2} e^{2\nu}} \vec{e}_t \right) = \hat{\gamma}^{-1} e^{-\psi} \vec{e}_\phi + \hat{\gamma} e^{-\nu} v_0^{\hat{\phi}'} \vec{e}_t, \tag{N.61}$$

som var det vi skulle vise. For å finne basis-enformene, inverterer vi matrisa

$$(M^\mu{}_{\hat{\mu}}) = \begin{pmatrix} \hat{\gamma} e^{-\nu} & 0 & 0 & \hat{\gamma} e^{-\nu} v_0^{\hat{\phi}'} \\ 0 & e^{-\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{\gamma}^{-1} e^{-\psi} \end{pmatrix}, \tag{N.62}$$

og får

$$(M^{\hat{\mu}}{}_\mu) = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}^{-1} e^{\nu} & 0 & 0 & -\hat{\gamma} e^{\psi} v_0^{\hat{\phi}'} \\ 0 & e^{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{\gamma} e^{\psi} \end{pmatrix}, \tag{N.63}$$

slik at ved $\underline{\omega}^{\hat{\mu}} = M^{\hat{\mu}}{}_\mu \underline{\omega}^\mu$ er

$$\underline{\omega}^{\hat{t}} = \hat{\gamma}^{-1} e^{\nu} \underline{\omega}^t - \hat{\gamma} e^{\psi} v_0^{\hat{\phi}'} \underline{\omega}^\phi, \tag{N.64}$$

$$\underline{\omega}^{\hat{r}} = e^{\mu} \underline{\omega}^r, \tag{N.65}$$

$$\underline{\omega}^{\hat{\theta}} = e^{\lambda} \underline{\omega}^\theta, \tag{N.66}$$

$$\underline{\omega}^{\hat{\phi}} = \hat{\gamma} e^{\psi} \underline{\omega}^\phi. \tag{N.67}$$

e) Vi bruker samme transformasjonsmatrise som over til å finne 4-hastighetens komponenter $U^{\hat{\mu}} = M^{\hat{\mu}}{}_\mu U^\mu$,

$$U^{\hat{t}} = \hat{\gamma}^{-1} e^{\nu} U^t - \hat{\gamma} e^{\psi} v_0^{\hat{\phi}'} U^\phi = \hat{\gamma}^{-1} e^{\nu} \dot{t} - \hat{\gamma} e^{\psi} v_0^{\hat{\phi}'} \Omega \dot{t} \tag{N.68}$$

$$U^{\hat{\phi}} = \hat{\gamma} e^{\psi} U^\phi = \hat{\gamma} e^{\psi} \Omega \dot{t} \tag{N.69}$$

$$v^{\hat{\phi}} = \frac{U^{\hat{\phi}}}{U^{\hat{t}}} = \frac{e^{\psi-\nu}\Omega}{\hat{\gamma}^{-2} + \omega \Omega^{2\psi-2\nu}} = \frac{e^{\psi-\nu}\Omega}{1 - \omega^2 e^{2\psi-2\nu} + \omega \Omega e^{2\psi-2\nu}} = \frac{v^{\hat{\phi}'} - v_0^{\hat{\phi}'}}{1 - v^{\hat{\phi}'} v_0^{\hat{\phi}'}}, \tag{N.70}$$

altså tilsvarende regelen for Lorentz-sammensetning av $v^{\hat{\phi}'}$ og $(-v_0^{\hat{\phi}'})$.

FYS4160

OPPGAVEARK O – Løsningsforslag av Håkon Enger

Oppgave O1: Den kosmiske frekvensforskyvning

Romtiden er gitt ved metrikken på standard form,

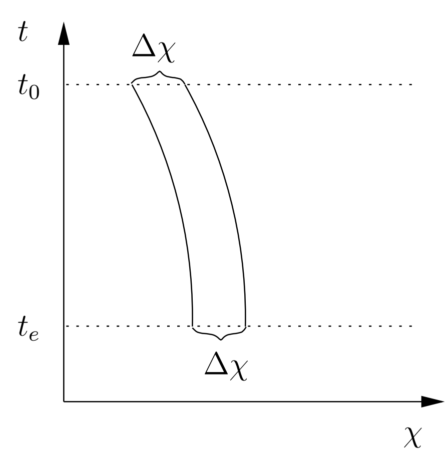
$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[d\chi^2 + r^2(\chi)d\Omega^2], \tag{O.1}$$

der $r(\chi)$ er en funksjon som avhenger av krumningen til rommet. Observatøren O (Jorden) har koordinaten $\chi = 0$, og en ikke alt for fjern galakse G koordinaten χ_e. Vi vet at observatør og galakse i dette koordinatsystemet vil ha konstante koordinater, men den fysiske avstanden $D = \int_0^{\chi_e} d\ell = a(t)\chi_e$ mellom dem vil øke med tiden på grunn av skalafaktoren $a(t)$. G har dermed en hastighet $V = \dot{a}(t)\chi_e$ i forhold til O.

Ved tidspunktet t_e, da lyssignalet blir sendt ut, setter vi $\dot{a}_e = \dot{a}(t_e)$, og vi kaller hastigheten $V_e = \dot{a}_e\chi_e$. Tilsvarende setter vi $\dot{a}_0 = \dot{a}(t_0)$ for tidspunktet t_0 da signalet blir mottatt. Oppgaveteksten innfører også størrelsene $H_0 = \frac{\dot{a}_0}{a_0}$ og $q_0 = -\frac{\ddot{a}_0 a_0}{\dot{a}_0^2}$.

Vi tenker oss en bølgelengde av lyssignalet som to signaler (se figur O.1), gitt ved begynnelsen og slutten av bølgelendgen. Lyset går langs kurver med $ds^2 = 0$, der $ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\chi^2$ (radiell bevegelse, $d\Omega = 0$.) Dermed får vi

$$\frac{d\chi}{dt} = -\frac{1}{a(t)}. \tag{O.2}$$



Figur O.1: En bølgelengde

(Negativt fortegn, siden signalet går fra $\chi_e > 0$ til $\chi = 0$.) Denne lyshastigheten er til enhver tid den samme for begge signalene (dvs. for lyset på begynnelsen og slutten av en bølgelengde), dermed vil "bølgelengden" $\Delta\chi$ (avstanden mellom begynnelsen og slutten på en bølgelengde målt i χ-koordinaten) målt i koordinaten χ være konstant. Den *fysiske* bølgelengden, som blir målt av en observatør, er $\lambda = a(t)\Delta\chi$. Ved utsendelsen er denne bølgelenden $\lambda_e = a_e\Delta\chi$ og ved mottagelsen $\lambda_0 = a_0\Delta\chi$. Vi får dermed for rødforskyvningen

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{a_0\Delta\chi - a_e\Delta\chi}{a_e\Delta\chi} = \frac{a_0}{a_e} - 1. \tag{O.3}$$

Vi definerer $\Delta t = t_0 - t_e$ og rekkeutvikler $a(t)$ i punktet t_0:

$$a_e = a(t_0 - \Delta t) = a_0 - \dot{a}_0\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{a}_0\Delta t^2 + \ldots = a_0(1 - H_0\Delta t - \frac{1}{2}q_0 H_0^2(\Delta t)^2) + \ldots \tag{O.4}$$

Dermed får vi ved å rekkeutvikle z,

$$z = \frac{a_0}{a_e} - 1 \approx \frac{1}{1 - H_0\Delta t - \frac{1}{2}q_0 H_0^2(\Delta t)^2} - 1 \approx H_0\Delta t + \frac{1}{2}q_0 H_0(\Delta t)^2 + H_0^2(\Delta t)^2 \tag{O.5}$$

til 2. orden i Δt.

Vi innfører så en “fiktiv” observatør A som er “i ro i forhold til O”, dvs. med konstant *fysisk* avstand til Jorden, slik at A har hastigheten V_e i forhold til galaksen G. Vi innfører også rødforskyvingene

$$z_K = \frac{\lambda_A - \lambda_e}{\lambda_e} \qquad z_G = \frac{\lambda_0 - \lambda_A}{\lambda_A}, \tag{O.6}$$

der λ_A er bølgelengden observatøren A måler.

Nå har vi

$$z = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} - 1 = \frac{\lambda_0}{\lambda_A}\frac{\lambda_A}{\lambda_e} - 1 = (z_G + 1)(z_K + 1) - 1 = z_K + z_G + z_K z_G \tag{O.7}$$

så til 1. orden i z_K og z_G er $z \approx z_K + z_G$.

Likninga for Dopplereffekt gir

$$\frac{\lambda_A}{\lambda_e} = \sqrt{\frac{1 + V_e}{1 - V_e}} \tag{O.8}$$

så vi får til 2. orden i V_e,

$$z_K = \frac{\lambda_A}{\lambda_e} - 1 = \sqrt{\frac{1 + V_e}{1 - V_e}} - 1 \approx V_e + \frac{1}{2}V_e^2 + \ldots \tag{O.9}$$

Vi vil så uttrykke z_K som en funksjon av H_0, a_0, q_0 og $(t_0 - t_e)$. Vi må dermed uttrykke $V_e = \dot{a}_e\chi_e$ som en funksjon av disse. $\dot{a}_e$ kan vi finne ved en enkel rekkeutvikling:

$$\dot{a}_e = \dot{a}(t_e) = \dot{a}(t_0) - (t_0 - t_e)\ddot{a}(t_0) + \ldots = a_0 H_0 + a_0 q_0 H_0^2(t_0 - t_e) + \ldots \tag{O.10}$$

Koordinaten χ_e kan vi uttrykke som en funksjon av $a(t)$ ved å integrere likning (O.2)

$$\chi_e = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \tag{O.11}$$

(Merk fortegnet siden $\int_{\chi_e}^{0} d\chi = -\chi_e$!) Vi rekkeutvikler så $\frac{1}{a(t)}$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{a(t)} &\approx \frac{1}{a_0 - \dot{a}_0(t_0-t) + \frac{1}{2}\ddot{a}_0(t_0-t)^2} \\ &\approx \frac{1}{a_0}\left(1 + \frac{\dot{a}_0}{a_0}(t_0-t) - \frac{1}{2}\frac{\ddot{a}_0}{a_0}(t_0-t)^2 + \frac{\dot{a}_0^2}{a_0^2}(t_0-t)^2\right),\end{aligned} \tag{O.12}$$

dette er riktig til 2. orden i $(t_0 - t)$. Integrerer vi, får vi

$$\chi_e = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \frac{1}{a_0}\left((t_0-t_e) + \frac{1}{2}\frac{\dot{a}_0}{a_0}(t_0-t_e)^2\right) + \ldots, \tag{O.13}$$

til 2. orden i $(t_0 - t_e)$. Bruker vi definisjonene av H_0 og q_0, får vi

$$V_e = \dot{a}_e\chi_e \approx H_0(t_0-t_e) + \frac{1}{2}H_0^2(t_0-t_e)^2 + q_0H_0^2(t_0-t_e)^2, \tag{O.14}$$

$$z_K \approx V_e + \frac{1}{2}V_e^2 \approx H_0(t_0-t_e) + H_0^2(t_0-t_e)^2 + q_0H_0^2(t_0-t_e)^2. \tag{O.15}$$

For å finne z_G, bruker vi uttrykket (O.5) vi viste for z, og får

$$z_G \approx z - z_K \approx -\frac{1}{2}q_0H_0^2(t_0-t_e)^2. \tag{O.16}$$

Vi ser av definisjonen for q_0 at $q_0 < 0$ når universets ekspansjon akselererer, og $q_0 > 0$ når den deselererer (derav navnet deselerasjonsparameter.) Vi får altså at den "gravitasjonelle" frekvensforskyvningen $z_G > 0$ (rødforskyvning) ved akselerert og $z_G < 0$ (blåforskyvning) ved deselerert ekspansjon.

Dersom ekspansjonen deselererer kan vi tenke oss en analog situasjon der vi er i bunnen av et gravitasjonsfelt som trekker galaksene mot oss. Vi vet at i en slik situasjon vil lyset fra galaksene bli blåforskjøvet i det det "faller" mot oss. Tilsvarende vil vi ved akselerert ekspansjon kunne trekke analogien at lyset fra stjernene må "klatre" mot oss i gravitasjonsfeltet, noe som gjør at de taper energi og blir rødforskjøvet.

Friedmanns likninger er

$$3\frac{\dot{a}^2+k}{a^2} = 8\pi G\rho + \Lambda, \tag{O.17}$$

$$-2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k}{a^2} = 8\pi Gp - \Lambda. \tag{O.18}$$

Setter vi $p = 0$ og $\Lambda = 0$, gir den siste likningen

$$\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = -2\frac{\ddot{a}}{a} = 2qH^2, \tag{O.19}$$

og insatt i den første gir dette

$$qH^2 = \frac{4\pi}{3}G\rho, \tag{O.20}$$

som er det vi skulle vise hvis vi setter inn $t = t_0$. I Netwons gravitasjonsteori er

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho = 3q_0H_0^2, \tag{O.21}$$

og en sfærisk symmetrisk løsning på denne likningen finner vi ved å observere at $\nabla^2 r^2 = 6$,

$$\phi(r) = \frac{1}{2}q_0H_0^2r^2. \tag{O.22}$$

Dette er det Newtonske gravitasjonspotensialet i en avstand r fra Jorden. Når $c = 1$, er avstanden lik tiden det tar lyset å tilbakelegge avstanden, $r = t_0 - t_e$ (Dette er kun gyldig i den Newtonske tilnærmingen, der rommet ikke utvider seg!) og vi får

$$\phi_e = \phi(t_0 - t_e) = \frac{1}{2}q_0H_0^2(t_0 - t_e)^2 = -z_G. \tag{O.23}$$

Oppgave O2: Gravitasjonskollaps

a) I oppgave M1 studerte vi et romskip som falt fra ro i det uendelig fjerne og inn mot et sort hull. Vi fant likningene

$$\dot{r} = -\sqrt{\frac{R_S}{r}}, \tag{O.24}$$

$$\dot{t} = \frac{1}{1 - \frac{R_S}{r}}, \tag{O.25}$$

og løsningen på den første av disse med randbetingelsen $r = r'$ for $\tau = 0$ ble i denne oppgaven funnet:

$$\tau = \frac{2}{3\sqrt{R_S}}\left(r'^{\frac{3}{2}} - r^{\frac{3}{2}}\right). \tag{O.26}$$

Dette er samme uttrykk som det vi skal vise for τ.

Uttrykket for t i oppgaven,

$$t = \tau - 4M\left(\frac{r}{2M}\right)^{1/2} + 2M\ln\frac{(r/2M)^{1/2}+1}{(r/2M)^{1/2}-1}, \tag{O.27}$$

deriverer vi for å vise at dette oppfyller likning (O.25),

$$\dot{t} = \frac{-r + R_S + \sqrt{R_S r}\dot{r}}{R_S - r}, \tag{O.28}$$

og setter vi inn likning (O.24), får vi

$$\dot{t} = \frac{1}{1-\frac{R_S}{r}}, \tag{O.29}$$

som var det vi skulle vise.

Vi skal finne metrikken $ds^2 = g_{\mu'\nu'}dx^{\mu'}dx^{\nu'}$ hvor $\mu', \nu' = \tau, r', \theta, \phi$. Vi må i prinsippet finne $g_{\mu'\nu'}$ ved å bruke transformasjonsmatrisene på Schwarzschild-metrikken,

$$g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}}g_{\mu\nu}, \tag{O.30}$$

hvor $\mu, \nu = t, r, \theta, \phi$ og $g_{\mu\nu}$ er gitt ved

$$ds^2 = -\left(1-\frac{R_S}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{R_S}{r}} + r^2 d\Omega^2. \tag{O.31}$$

Siden uttrykket for t (O.27) er oppgitt som funksjon av τ og r (og ikke τ og r'), er det antageligvis enklest å gjøre koordinattransformasjonen i to omganger: først $(t, r) \to (\tau, r)$ og så $(\tau, r) \to (\tau, r')$. I det første koordinatskiftet må vi eliminere dt ved å bruke (O.27):

$$dt = \frac{\partial t}{\partial \tau}d\tau + \frac{\partial t}{\partial r}dr = d\tau - \frac{\sqrt{R_S r}dr}{r - R_S}, \tag{O.32}$$

som ved insetting i (O.31) gir metrikken

$$ds^2 = -\left(1-\frac{R_S}{r}\right)d\tau^2 + 2\sqrt{\frac{R_S}{r}}d\tau dr + dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{O.33}$$

Deretter eliminerer vi dr ved hjelp av (O.26), som vi omskriver til

$$r = \left(r'^{\frac{3}{2}} - \frac{3\sqrt{R_S}}{2}\tau\right)^{\frac{2}{3}}, \tag{O.34}$$

og får

$$dr = \sqrt{\frac{r'}{r}}dr' - \sqrt{\frac{R_S}{r}}d\tau, \tag{O.35}$$

hvor r her skal forstås som uttrykket (O.34). Hvis vi setter inn dette i (O.33), får vi

$$ds^2 = -d\tau^2 + \frac{r'}{r}dr'^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{O.36}$$

Vi kan skrive om (O.34) for å få metrikken på formen gitt i oppgaveteksten:

$$r = \left(r'^{\frac{3}{2}} - \frac{3\sqrt{R_S}}{2}\tau\right)^{\frac{2}{3}} = r'\left(1 - \frac{3\sqrt{R_S}}{2}\tau r'^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}, \tag{O.37}$$

$$ds^2 = -d\tau^2 + \left(1 - \frac{3\sqrt{R_S}}{2}\tau r'^{-\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}} dr'^2 + \left(1 - \frac{3\sqrt{R_S}}{2}\tau r'^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{3}} r'^2 d\Omega^2. \tag{O.38}$$

Denne metrikken er singulær når $1 - \frac{3\sqrt{R_S}}{2}\tau r'^{-\frac{3}{2}} = 0$, dvs. når

$$r'^{\frac{3}{2}} = \frac{3\sqrt{R_S}}{2}\tau, \tag{O.39}$$

som vi ser av (O.34) tilsvarer $r = 0$, dvs. den fysiske singulariteten.

b) Vi skal anta at romtiden inne i stjerna er beskrevet av en Friedmann-løsning med null trykk, $k = 0$ og $\Lambda = 0$, dvs.

$$ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau)(dr'^2 + r'^2 d\Omega^2), \tag{O.40}$$

hvor a må finnes ved å løse Friedmann-likningene

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi G\rho(\tau), \tag{O.41}$$

$$-2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = 0. \tag{O.42}$$

Tettheten til stjerna er konstant i rom, men øker med tiden ettersom stjerna kollapser. Den totale massen er konstant, og volumet til stjerna er $\frac{4}{3}\pi R^3$, der R er stjernas radius. Ettersom overflaten til stjerna faller fritt (intet trykk), vil vi ha at R er gitt ved (O.37), med stjernas radius R_0 ved $\tau = 0$ insatt for r'. Tettheten blir dermed

$$\rho(\tau) = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R_0^3\left(1 - \frac{3\sqrt{R_S}}{2}\tau R_0{}^{-\frac{3}{2}}\right)^2}. \tag{O.43}$$

Setter vi inn dette i (O.41), får vi

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{A^2}{(1 - B\tau)^2}, \tag{O.44}$$

hvor vi har definert $A^2 = \frac{2GM}{R_0^3}$ og $B = \frac{3\sqrt{R_S}}{2} R_0{}^{-\frac{3}{2}}$. Tar vi kvadratrota, får vi

$$\frac{da}{a} = \pm \frac{Ad\tau}{1 - B\tau}, \tag{O.45}$$

som vi kan integrere til

$$a(\tau) = C(1 - B\tau)^{\mp\frac{A}{B}}, \tag{O.46}$$

der C er en integrasjonskonstant. Vi har at $\frac{A}{B} = \frac{2}{3}$ ved innsetting av $R_S = 2GM$. Setter vi (O.46) inn i (O.42), får vi

$$\frac{3A^2 \pm 2AB}{(1 - B\tau)^2} = 0, \tag{O.47}$$

så vi ser at vi må velge det nederste fortegnet, altså blir løsningen

$$a(\tau) = C \left(1 - \frac{3\sqrt{R_S}}{2} R_0{}^{-\frac{3}{2}} \tau\right)^{\frac{2}{3}}. \tag{O.48}$$

Vi kan finne C ved å kreve at den ytre metrikken (O.38) stemmer med den indre metrikken (O.40) ved $\tau = 0$, noe som gir $C = 1$. Dermed blir metrikken inne i den kollapsende stjerna

$$ds^2 = -d\tau^2 + \left(1 - \frac{3\sqrt{R_S}}{2} R_0{}^{-\frac{3}{2}} \tau\right)^{\frac{4}{3}} (dr'^2 + r'^2 d\Omega^2) \tag{O.49}$$