

Problème du castor affairé

Maxime Rochkoulets

6 avril 2023

Table des matières

1	Machines de Turing	2
1.1	Généralités	2
1.2	Castors affairés	3
2	Fonctions Σ et S	3
2.1	Définitions	3
2.2	Non-calculabilité	3
2.3	Complexité algorithmique	4
3	Implémentation	4
4	Valeurs connues	5

1 Machines de Turing

1.1 Généralités

Ce problème implique une certaine classe de machines de Turing, nous allons donc définir cet objet mathématique.

Une machine de Turing (inventée par le mathématicien anglais Alan Turing en 1936) est un système de règles, d'états et de transitions.

On peut la voir comme une machine opérant sur un ruban infini divisé en cellules. Chacune pouvant représenter un symbole, parmi un ensemble fini non vide de symboles noté Σ (souvent, $\Sigma = \{0, 1, B\}$, $B = \text{Vide}$), qu'on appelle aussi son *alphabet*.

Une machine peut avoir plusieurs états différents, parmi un ensemble fini non vide d'états noté Q , avec un état initial noté q_0 .

On peut décrire le fonctionnement d'une machine de Turing comme une suite d'étapes :

1. La machine lit la cellule sur laquelle elle se trouve.
2. Écrit un symbole dans la cellule.
3. Effectue une des trois actions suivantes :
 - Arrêter le calcul.
 - Se décaler d'une cellule vers la gauche.
 - Se décaler d'une cellule vers la droite.
4. Change (ou pas) d'état.

Le comportement d'une machine peut être représenté sous forme d'un tableau ayant $\#(\Sigma \times Q)$ lignes, décrivant les actions à effectuer en fonction de tous les cas possibles.

État Actuel	Lecture	Écriture	Direction	État Prochain
q_1	1	0	G	q_0
q_0	0	1	D	q_1
q_1	B	0	G	q_0
q_0	1	B	G	q_0
q_1	0	1	D	q_0
q_0	B	0	D	q_1

TABLE 1 – Tableau d'une MT avec $\Sigma = \{0, 1, B\}$ et $Q = \{q_0, q_1\}$.

Malgré (ou grâce à) son apparente simplicité, une machine de Turing peut réaliser n'importe quel calcul ou algorithme (calculable), c'est le niveau d'automates le plus puissant dans la [hiérarchie de Chomsky](#).

Aussi, une machine peut ne pas se terminer (une qui n'écrit que des "1" à l'infini en allant vers la gauche par exemple), on dit alors qu'elle **dérive**, ou, à l'opposé, qu'elle **termine**.

Il existe [d'autres catégories de machines de Turing](#) mais nous avons ici décrit la version la plus simple et générale, qui est aussi celle utilisée dans le problème du castor affairé.

1.2 Castors affairés

Un **n -ième castor affairé** est une machine de Turing terminante qui, pour un n donné, produit le plus de "1" sur le ruban parmi toutes les autres machines à n -états à la fin de son exécution. Ici $\Sigma = \{0, 1\}$, et le ruban est initialisé avec des "0". *Le problème est à la base joué avec cet alphabet, mais il peut être étendu.*

Le "*problème du castor affairé*", ou encore "*jeu du castor affairé*" consiste donc à trouver une des machines de Turing gagnantes ([il y'a en a au moins 4](#)) pour tout n .

Parfois, un castor affairé est aussi défini comme la machine à n états qui effectue un maximum de déplacements (ou d'étapes) avant de terminer, cette définition correspond à la fonction S donnée ci-dessous.

Ce concept fut introduit par [Tibor Radó](#) en 1962, dans son article [On Non-Computable functions](#), le nom venant de l'expression "busy beaver" en anglais.

2 Fonctions Σ et S

2.1 Définitions

Tibor Radó définit $\Sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la fonction qui associe à un nombre n le nombre de "1" sur le ruban à la fin de l'exécution d'un n -ième castor affairé.

En addition à la fonction Σ , il définit $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ comme :

- $s(M)$: le nombre de déplacements de M pour tout $M \in E_n$, avec E_n l'ensemble des MTs de taille n .
- $S(n) : \max\{s(M) : M \in E\}$

2.2 Non-calculabilité

Ces deux fonctions sont non-calculables. Cela vient du fait qu'à partir d'un n assez grand, on ne sait pas si une machine de Turing donnée est en train de boucler temporairement avant de continuer, ou si elle bouclera à l'infini. Résoudre ce problème consiste à résoudre le [problème de l'arrêt](#), qui fut montré indécidable par Alan Turing.

Elles font partie des fonctions ayant les croissances les plus rapides en mathématiques, plus que la [fonction non recursive primitive d'Ackermann](#) par exemple ($A < \Sigma < S$). En fait, il a été prouvé que ces fonctions grandissent plus rapidement que n'importe quelle fonction $f(n)$ calculable, pour n assez grand.

2.3 Compléxité algorithmique

L'algorithme, pour trouver $\Sigma(2)$ par exemple, consiste à tester toutes les MTs à 2 symboles et 2 états, en essayant de rejeter les machines divergentes.

Le nombre de machines de Turing à n -états, s symboles et d directions nous est donné par

$$((n+1) \times s \times d)^{(n \times s)}$$

Pour se rendre compte de la compléxité temporelle de l'algorithme calculant $\Sigma(n)$ (*en supposant que toutes les MTs soient terminantes*), définissons $f(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ comme étant la fonction qui donne le nombre de MTs à tester pour trouver le n -ième castor affairé. Dans le problème du castor affairé, la formule donnée ci-dessus est simplifiable par $f(n) = \#E_n = (4n+4)^{2n}$. On a donc $f(1) = 64$ machines à tester, $f(2) = 20736$, $f(3) = 16^8 \dots$

De plus, le temps requis pour tester chaque machine de Turing croît exponentiellement par rapport à n , on comprend aisément pourquoi si peu de valeurs de Σ et S ont été trouvées à ce jour.

3 Implémentation

On peut tester simplement le problème du castor affairé sur des petites valeurs de n en implémentant une machine de Turing à 2 états, on définira une constante à partir de laquelle on considérera que la machine est en train de boucler indéfiniment.

La fonction qui associe les valeurs d'entrées de la machine à son comportement peut être vue comme une table de hachage associant une paire (**symbole**, **état**) au triplet (**symbole**, **direction**, **état**), et le ruban comme un tableau de taille constante.

Vous pouvez trouver une machine de Turing à 2 états qui teste différents castors affairés écrite en Go [sur mon Github](#). Une version en C du professeur Brailsford est trouvable [ici](#), en complément à une [vidéo](#) qui parle de ce problème.

4 Valeurs connues

TABLE 2 – Valeurs connues et bornes de S .

Symboles	2-état	3-état	4-état	5-état	6-état
2	6	21	107	\geq 47 176 870	$> 10 \uparrow \uparrow$ 15
3	38	$> 1.1 \times 10^{17}$	$> 1.0 \times 10^{14\ 072}$?	?
4	\geq 3 932 964	$> 5.2 \times 10^{13\ 036}$?	?	?
5	$> 1.9 \times 10^{704}$?	?	?	?
6	$> 2.4 \times 10^{9\ 866}$?	?	?	?

TABLE 3 – Valeurs connues et bornes de Σ .

Symboles	2-état	3-état	4-état	5-état	6-état
2	4	6	13	≥ 4098	$> 10 \uparrow \uparrow$ 15
3	9	$> 1.1 \times 10^{17}$	$> 1.3 \times 10^{7\ 036}$?	?
4	≥ 2050	$> 3.7 \times 10^{6\ 518}$?	?	?
5	$> 1.7 \times 10^{352}$?	?	?	?
6	$> 1.9 \times 10^{4\ 4\ 933}$?	?	?	?