

Transporte direcionado e leis de escala em um mapeamento Hamiltoniano não-twist

Matheus Rolim Sales¹

Daniel Borin, Leonardo Costa de Souza, José Danilo Szezech Jr., Ricardo Luiz Viana, Iberê Luiz Caldas, Edson Denis Leonel

¹Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

17 de Julho de 2024



O mapeamento

Consideramos o mapeamento não-*twist* introduzido no contexto do movimento de deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ de partículas carregadas¹:

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_n + \varepsilon \sin(2\pi\theta_n), \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + \mu v(I_{n+1}) \left[\frac{M}{q(I_{n+1})} - L \right] + \rho \frac{E(I_{n+1})}{\sqrt{|I_{n+1}|}} \mod 1, \end{aligned} \quad (1)$$

onde $q(I)$, $E(I)$, e $v(I)$ são dados por

$$\begin{aligned} q(I) &= q_1 + q_2 I^2 + q_3 I^3, \\ E(I) &= e_1 I + e_2 \sqrt{|I|} + e_3, \\ v(I) &= v_1 + v_2 \tanh(v_3 I + v_4). \end{aligned} \quad (2)$$

O parâmetro de controle é a perturbação $\varepsilon \geq 0$ e tanto os demais parâmetros quanto os perfis na Eq. (2) foram escolhidos de acordo com medidas realizadas no tokamak TCABR no Instituto de Física da Universidade de São Paulo².

¹W. Horton et al., *Physics of Plasmas*, 1998, **5**, 3910–3917; L. C. Souza et al., *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2023, **33**, 083132; L. C. Souza et al., *Phys. Rev. E*, 2024, **109**, 015202.

²I. C. Nascimento et al., *Nuclear Fusion*, 2005, **45**, 796.

O espaço de fase

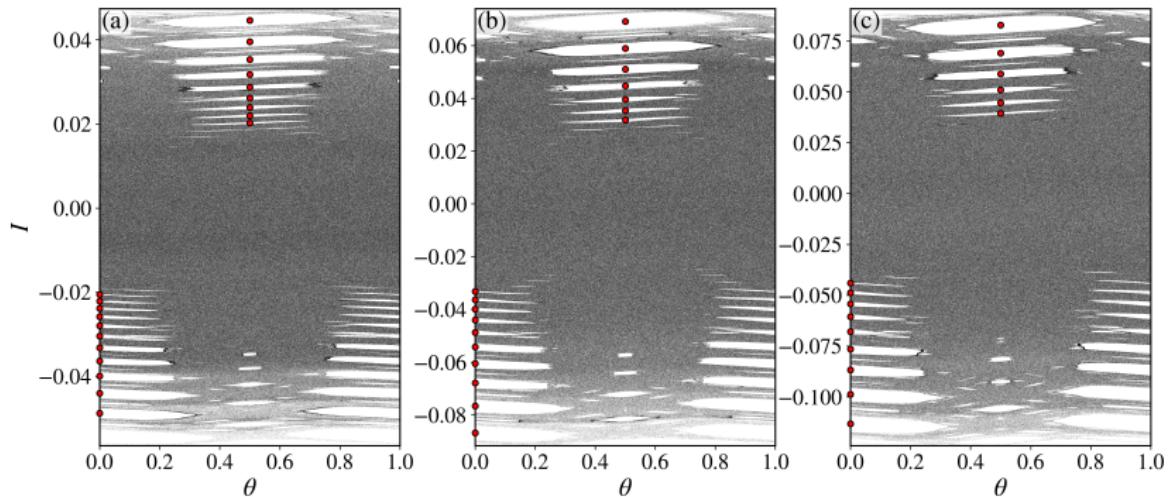


Figura 1: O espaço de fase para (a) $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-3}$, (b) $\varepsilon = 2.0 \times 10^{-3}$, e (c) $\varepsilon = 3.0 \times 10^{-3}$. Os pontos vermelhos correspondem aos pontos elípticos localizados no centro das ilhas de estabilidade de período 1.

Probabilidade de sobrevivência

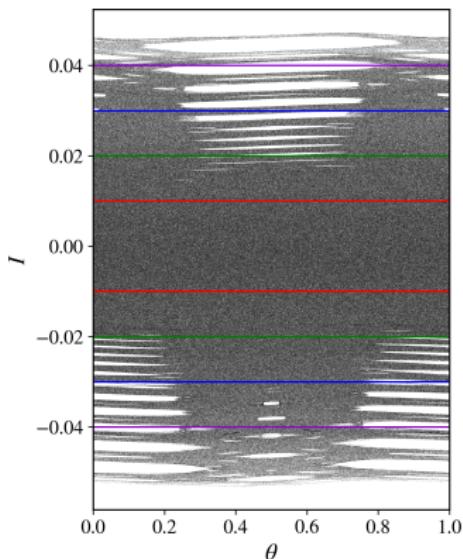


Figura 2: As regiões delimitadas pelas linhas horizontais correspondem às regiões de sobrevivência.

Matematicamente, a probabilidade de sobrevivência é definida por

$$P(n) = \frac{N_{\text{surv}}(n)}{M}, \quad (3)$$

onde $N_{\text{surv}}(n)$ é o número de partículas que sobreviveram até o tempo n , isto é, que não escaparam e $M = 1 \times 10^6$ é o número total de partículas.

Para sistemas completamente caóticos, a probabilidade de sobrevivência segue um decaimento exponencial:

$$P(n) = P_0 \exp(-\kappa n), \quad (4)$$

onde κ é a taxa de decaimento.

Probabilidade de sobrevivência

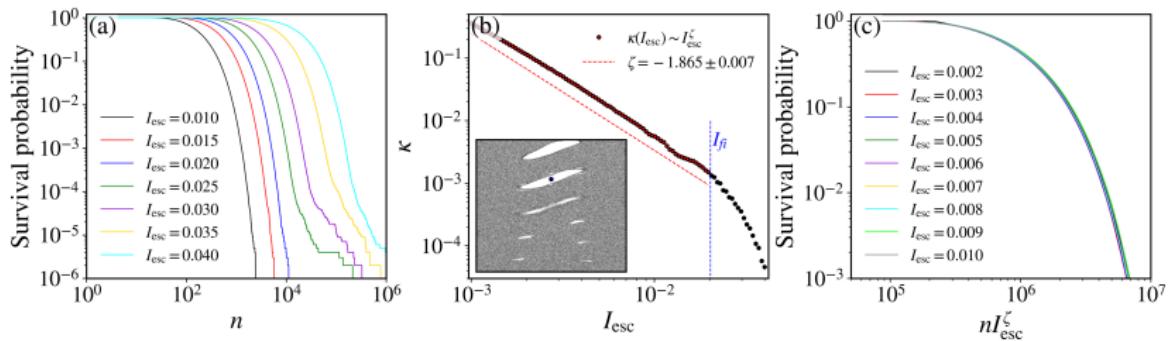


Figura 3: (a) Probabilidade de sobrevivência para diferentes regiões de sobrevivência com $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-3}$.
(b) A taxa de escape κ em função do tamanho da região de escape. (c) A sobreposição da probabilidade de sobrevivência em uma única curva universal após a transformação $n \rightarrow nI_{\text{esc}}^\zeta$.

Tempos e bacias de escape

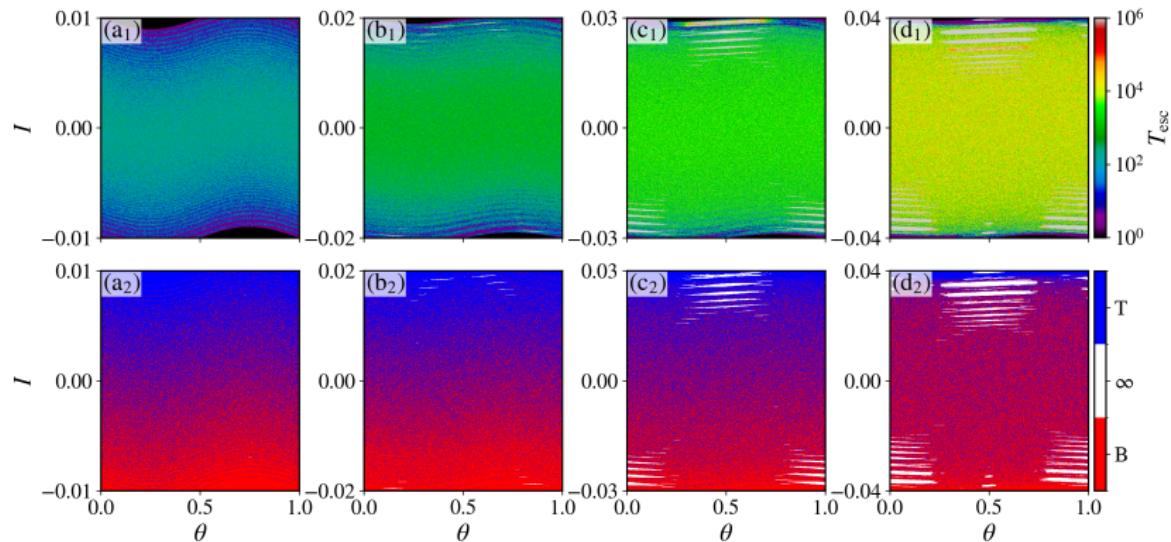


Figura 4: Tempos e bacias de escape para diferentes regiões de sobrevivência.

Tempos e bacias de escape

Tabela 1: Fração de condições iniciais que escapam por baixo (p_B), por cima (p_T), e que nunca escapam (p_∞) calculada através das bacias de escape da Fig. 4.

Fig. 4	p_B	p_T	p_∞	p_B/p_T
(a ₂)	0.498364	0.501601	0.000035	0.993548
(b ₂)	0.513745	0.484148	0.002107	1.061132
(c ₂)	0.502372	0.467406	0.030222	1.074810
(d ₂)	0.606776	0.327269	0.065954	1.854058

Tempos e bacias de escape: efeito catraca³

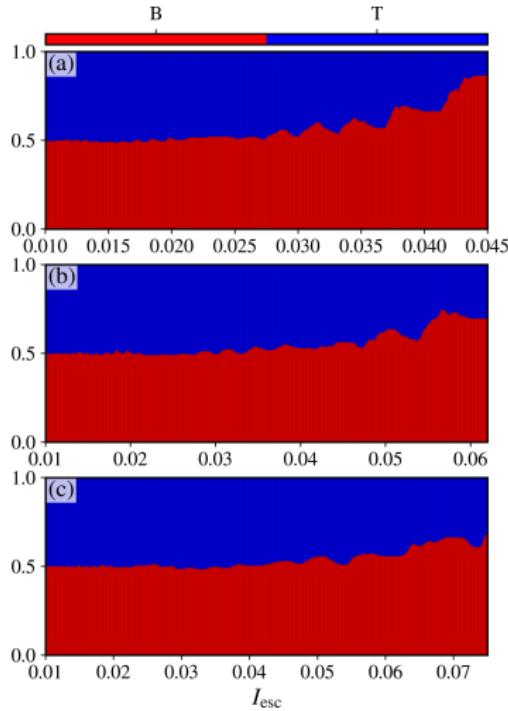


Figura 5: (a) $\epsilon = 1.0 \times 10^{-3}$, (b) $\epsilon = 2.0 \times 10^{-3}$, e (c) $\epsilon = 3.0 \times 10^{-3}$.

³T. Dittrich et al., *Annalen der Physik*, 2000, **512**, 755–763; H. Schanz et al., *Phys. Rev. Lett.*, 2001, **87**, 070601; J. Gong e P. Brumer, *Phys. Rev. E*, 2004, **70**, 016202.

Tempos de recorrência e efeito catraca

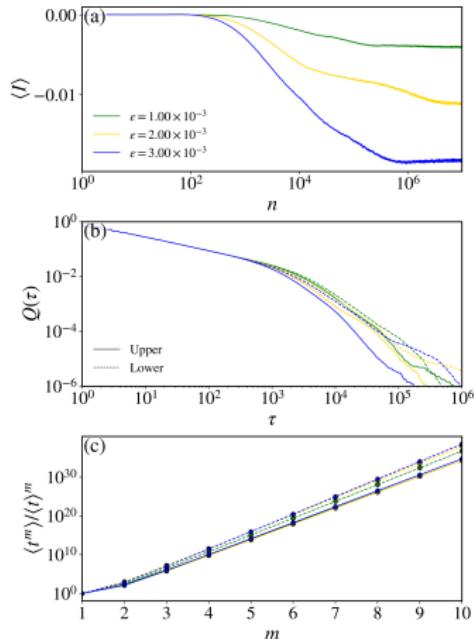


Figura 6

$$Q(\tau) = \sum_{t > \tau} P(t) = \frac{N_\tau}{N_t}. \quad (5)$$

$$\langle t^m \rangle = \int_0^{t_{\max}} t^m P(t) dt. \quad (6)$$

Tabela 2: O tempo de recorrência médio para diferentes valores de ϵ para as regiões superior e inferior do espaço de fase.

ϵ	$\langle t \rangle^{(U)}$	$\langle t \rangle^{(L)}$	$\langle t \rangle^{(L)} - \langle t \rangle^{(U)}$
1.0×10^{-3}	1.31×10^2	1.51×10^2	0.20×10^2
2.0×10^{-3}	1.02×10^2	1.33×10^2	0.31×10^2
3.0×10^{-3}	0.83×10^2	1.21×10^2	0.38×10^2

Exponentes críticos e lei de escala

Analisamos a difusão de partículas caóticas no espaço de fase através do desvio quadrático médio da ação, I_{rms} , definido por

$$I_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I_{i,j}^2} \quad (7)$$

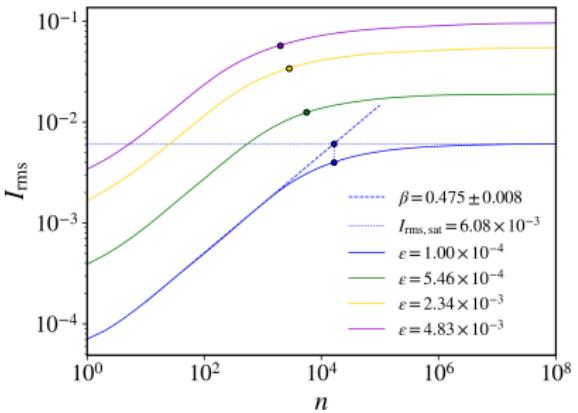


Figura 7: I_{rms} em função do tempo para diferentes valores de ϵ .

Expoentes críticos e lei de escala

- Para $n \ll n_x$, I_{rms} segue a seguinte lei

$$I_{\text{rms}} \sim (n\varepsilon^\alpha)^\beta. \quad (8)$$

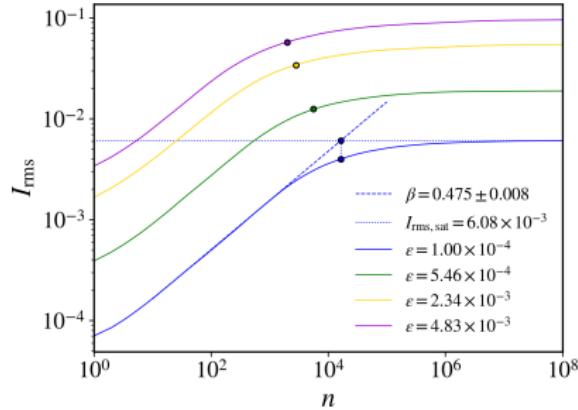


Figura 7: I_{rms} em função do tempo para diferentes valores de ε .

- Para $n \gg n_x$ a curva satura e o valor de saturação depende de ε de acordo com

$$I_{\text{rms}, \text{sat}} \sim \varepsilon^\gamma. \quad (9)$$

- O ponto onde ocorre a mudança de comportamento é identificado por n_x e segue

$$n_x \sim \varepsilon^z. \quad (10)$$

- O expoente z pode ser escrito em função dos demais expoentes como

$$z = \frac{\gamma}{\beta} - \alpha. \quad (11)$$

Expoentes críticos e lei de escala

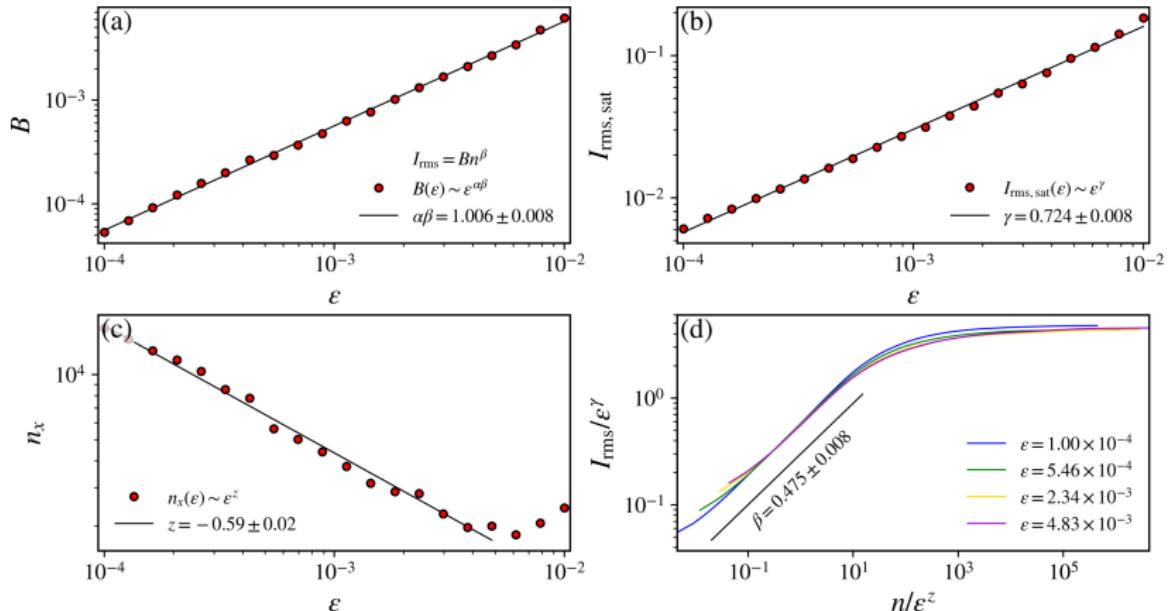


Figura 8: O expoente $B(\varepsilon)$ obtido do fitting de I_{rms} versus n , (b) o valor de saturação e (c) o ponto de transição em função de ε . (d) A superposição das curvas após as transformações $n \rightarrow n/\varepsilon^z$ e $I_{\text{rms}} \rightarrow I_{\text{rms}}/\varepsilon^\gamma$.

Agradecimentos



Contato e mais informações

- rolim.sales@unesp.br
- github.com/mrolims
- 0000-0002-1121-6371

