

Evaluación en cálculo lambda

Mario Román

<2018-05-25 Fri 18:02>

Esta es una recopilación de los enunciados que nos llevan a usar la evaluación mediante β -reducciones del cálculo lambda como un lenguaje de programación. Los obtuve principalmente del libro de Barendregt y de las notas de Peter Selinger cuando buscaba la base teórica para implementar [Mikrokosmos](#). Detallo estos mismos enunciados recopilando sus demostraciones en [M42/lambda.notes](#).

Forma normal

Una expresión está en *forma normal* si no se le pueden aplicar más β -reducciones. La forma normal es *única* como consecuencia del teorema de Church-Rosser.

Teorema de Church-Rosser. Si a un mismo término se le aplican dos cadenas de reducciones distintas, los términos que se obtienen pueden a su vez reducirse a un término común. Es decir,

- si A puede reducirse mediante β -reducciones a otro término B , lo que se nota por $A \rightarrow_{\beta} B$,
- y A puede reducirse también mediante otras β -reducciones, posiblemente distintas o en distinto orden, a C , $A \rightarrow_{\beta} C$,
- entonces existe un término D tal que ambos se pueden reducir mediante β -reducciones a él; es decir, tal que $B \rightarrow_{\beta} D$ y $C \rightarrow_{\beta} D$.

En particular, esto implica que si un término tuviera dos formas normales, debería existir otro término al cual se pudieran reducir ambas; como son formas normales y no pueden reducirse, esto debe implicar que son iguales.

Divergencia

Hemos visto que la forma normal es única, pero no que exista o que sepamos encontrarla de alguna forma. Puede ocurrir que un término no esté en forma normal y sin embargo las reducciones no lo lleven a ella. Por ejemplo, el término $\Omega = (\lambda x.x\ x)(\lambda x.x\ x)$ es invariante a β -reducciones y **no llega a forma normal**. O por ejemplo, el término $(\lambda x.x\ x\ x)(\lambda x.x\ x\ x)$ se hace cada vez más grande al aplicarle reducciones, decimos que *diverge*.

Evaluación a izquierda

Hay expresiones que llegarán a una forma normal o no dependiendo de cómo los evaluemos. Por ejemplo, el término $(\text{const id } \Omega)$ llega a la forma normal **id** si evaluamos primero la aplicación de **const**, pero diverge si empezamos intentando evaluar Ω . Sin embargo, existe una estrategia de reducción que siempre encuentra una forma normal si esta existe. Tenemos el siguiente teorema.

- Si existe una forma normal, la estrategia que reduce a cada paso la aplicación más a la izquierda posible la encuentra.

Y quizá sorprendentemente, existe otra estrategia de reducción que siempre encuentra la forma de **no** llegar a la forma normal si esta existiera.

- Si existe alguna sucesión que no llega a forma normal, la estrategia que reduce a cada paso la aplicación más a la derecha posible la encuentra.

Estas dos formas de evaluación se suelen llamar *call-by-value* y *call-by-name*.