Diagramas para categorías monoidales

Mario Román

<2019-01-21 Mon 19:01>

Este es un post de enlaces sobre lenguajes diagramáticos. Me temo que todo el material está en inglés, pero quería tener una nota sobre el tema que no estuviera en inglés.

Vamos a motivarlos primero siguiendo un ejemplo de [CK17]; la explicación de todo está en el libro, aquí sólo quiero dar una idea. Supongamos que tenemos los siguientes ingredientes representados en un diagrama. Dos partes (Alice y Bob) comparten un *estado* común representado como un cable en forma de U. Alice tiene además cierta información propia que quiere enviar a Bob. Por último, Alice puede tomar dos estados y hacerlos iguales introduciendo un error en el proceso. Bob puede corregir este error una vez Alice le informa de él. Todos los procesos se representan como cajas con una serie de entradas (abajo) y salidas (arriba). El eje y se interpreta como una línea temporal de abajo a arriba.

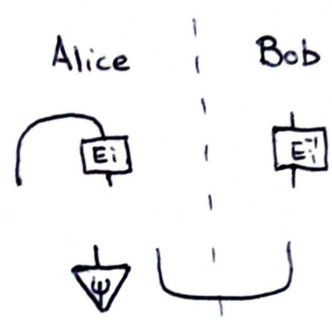

Figure 1: Los ingredientes.

¿Cómo combinamos estas piezas? La respuesta obvia es el siguiente diagrama. Aquí, Alice toma el estado que quiere enviar y el estado compartido y los hace iguales introduciendo un error; Bob corrige este error. Las siguientes igualdades son válidas en el cálculo diagramático y muestran que esto es equivalente a que Bob acabe teniendo la información que Alice le quería mandar.

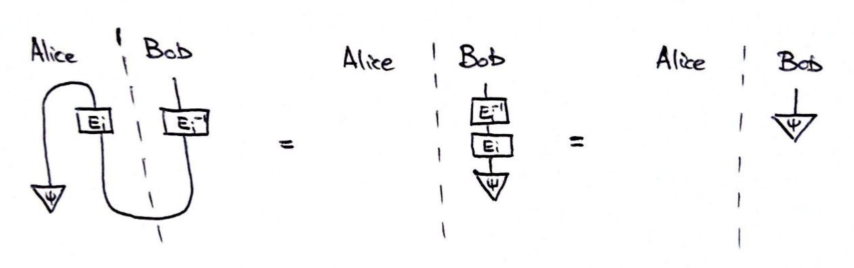

Figure 2: La solución.

Este diagrama puede traducirse formalmente a un morfismo en una categoría con suficiente estructura (explícitamente, a una categoría monoidal cerrada compacta, pero no necesitamos detalles). La categoría de conjuntos cuyos morfismos son relaciones, **Rel**, tiene esa estructura; y cuando interpretamos este diagrama obtenemos el protocolo de *libreta de un solo uso* (one-time pad). La categoría de espacios de Hilbert con matrices unitarias tiene esa estructura también, y cuando interpretamos el morfismo ¡obtenemos un protocolo de *teleportación cuántica*! Es decir, un poco de razonamiento diagramático nos ha servido para obtener en abstracto un protocolo y descubrir que dos protocolos conocidos son dos de sus instancias particulares en distintas categorías. Podríamos estudiar otros protocolos, y podríamos interpretarlos en otras categorías. ¿Qué más podemos hacer con diagramas?, lo que sigue es una lista no exhaustiva.

- **Álgebra lineal.** Un ejemplo perfecto de categorías con esta estructura son los espacios vectoriales. En el blog Graphical Linear Algebra, Pawel Sobocinski da una introducción informal al álgebra lineal y al razonamiento diagramático.

- **Mecánica cuántica diagramática.** *Picturing Quantum Processes*, de Coecke y Kissinger [CK17], de donde viene el primer ejemplo. Es una introducción elemental que no asume prácticamente ningún conocimiento previo: ni de mecánica cuántica ni de diagramas. Profundiza mucho en los diagramas en sí y no requiere conocer la teoría de categorías subyacente.

- **Mecánica cuántica categórica.** *Categorical Quantum Mechanics (link),* de Vicary y Heunen da otra introducción a las aplicaciones en mecánica cuántica. Enfatiza mucho más la teoría de categorías, aquí sí es un prerrequisito haber leído teoría de categorías. Como bonus, hay un estudio muy detallado de cómo las categorías justifican el razonamiento diagramático.

- **Teoría de categorías**. *Category theory with string diagrams*, de Marsden, es muy accesible y explica 2-categorías, adjunciones, mónadas e incluso límites; usando razonamiento gráfico.

- **Lingüística.** *Distributional compositional categorical semantics* es un marco teórico para calcular el significado de las frases en función del significado de las palabras. Es *distribucional* porque el significado de una palabra se calcula según las palabras que aparecen cerca de ella en un corpus de texto suficientemente grande; es *composicional* porque podemos componer esos significados usando la estructura categórica para calcular el significado de frases completas. Una introducción es [CSC10] de Coecke, Sadrzadeh y Clark.

- **Teoría de juegos**, usando una categoría de lentes. Hay una charla introductoria de Jules Hedges y varios artículos como [GHWZ18].

Por último, una visión general de los lenguages diagramáticos es [Sel10].

References

[CK17] Bob Coecke and Aleks Kissinger. *Picturing quantum processes.* Cambridge University Press, 2017.

[CSC10] Bob Coecke, Mehrnoosh Sadrzadeh, and Stephen Clark. Mathematical foundations for a compositional distributional model of meaning. *arXiv preprint arXiv:1003.4394*, 2010.

[GHWZ18] Neil Ghani, Jules Hedges, Viktor Winschel, and Philipp Zahn. Compositional game theory. In *Proceedings of the 33rd Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science, LICS 2018, Oxford, UK, July 09-12, 2018*, pages 472–481, 2018.

[Sel10] Peter Selinger. A survey of graphical languages for monoidal categories. In *New structures for physics*, pages 289–355. Springer, 2010.