Adjunciones

Mario Román

21 de abril de 2019

Contents

Las adjunciones son un concepto básico que no suele aparecer en cursos de matemáticas hasta que se empieza a usar teoría de categorías. Muchas construcciones pueden expresarse como adjunciones, y saber identificarlas y usarlas simplifica muchos razonamientos. La mayoría de estas notas vienen de traducir partes de mi trabajo de fin de grado, pero pueden encontrarse (y bastante mejor explicadas) en cualquier libro básico de teoría de categorías ([Awo10], [Rie17], [Lan78]), quizá con otra notación. Especialmente la notación como secuentes en lógica viene inspirada por teoría de tipos y no parece especialmente común, pero aquí la usaremos en la mayoría de demostraciones.

Definiciones

Definición 1. Una **adjunción** entre dos categorías $\mathbf{X}$ to $\mathbf{Y}$ es un par de funtores $F\colon \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ y $G\colon \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$, junto a una biyección $\varphi\colon \hom(FX,Y) \cong$

$\hom(X, GY)$ natural en $X \in \mathbf{X}$ y en $Y \in \mathbf{Y}$. Decimos que F es *adjunto izquierdo* a G y que G es *adjunto derecho* a F, y escribimos eso como $F \dashv G$.

Nota 2. Decir que φ es natural significa para cualquier $h\colon X \to X'$ y para cualquier $k\colon Y \to Y'$, los siguientes cuadrados conmutan. Como además φ es una biyección, podemos tomar φ^{-1}, darle la vuelta a las flechas, y seguir teniendo cuadrados que conmutan.

$$\begin{tikzcd}
\hom(FX, Y) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "-\circ Fh"'] & \hom(X, GY) \arrow[d, "-\circ h"] \\
\hom(FX', Y) \arrow[r, "\varphi"'] & \hom(X', GY)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\hom(FX, Y) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "k\circ -"'] & \hom(X, GY) \arrow[d, "Gk\circ -"] \\
\hom(FX, Y') \arrow[r, "\varphi"'] & \hom(X, GY')
\end{tikzcd}$$

Una notación más sencilla para condensar toda esta información es usando diagramas que simulan relaciones lógicas.[1] Una adjunción $F \dashv G$ puede escribirse como sigue.

$$\frac{FX \xrightarrow{f} Y}{X \xrightarrow{\varphi(f)} GY}$$

Esta notación enfatiza que a cada morfismo $FX \to Y$ le corresponde un morfismo $X \to GY$; y que esta es una relación biyectiva, yendo en ambas direcciones. La naturalidad se traduce en que la precomposición y la poscomposición de morfismos son respetados por esta regla de inferencia. Dados cualesquiera $h\colon X' \to X$ y $k\colon Y \to Y'$, sabemos por naturalidad que las flechas compuestas en los siguientes diagramas son adjuntas entre sí.

$$\frac{\begin{tikzcd} FX' \arrow[r, "Fh"] \arrow[rr, bend left, "f\circ Fh"] & FX \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}}{\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "h"'] \arrow[rr, bend right, "\varphi(f)\circ h"'] & X \arrow[r, "\varphi(f)"'] & GY \end{tikzcd}}
\qquad
\frac{\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "k\circ f"] & Y \arrow[r, "k"] & Y' \end{tikzcd}}{\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi(f)"'] \arrow[rr, bend right, "Gk\circ\varphi(f)"'] & GY \arrow[r, "Gk"'] & GY' \end{tikzcd}}$$

Es decir, $\varphi(f) \circ h = \varphi(f \circ Fh)$ y $Gk \circ \varphi(f) = \varphi(k \circ f)$.

[1] Aprendí esta notación de unos apuntes de Lawvere [Law] y de Manuel Bullejos. No he podido trazar cuál es el origen exacto, parece que es folklore en teoría de categorías.

Definición 3. Dada una adjunción $F \dashv G$, la **unidad** y la **counidad** son las familias de morfismos $\eta_X \colon X \to GFX$ y $\varepsilon \colon FGY \to Y$, que se obtienen al aplicar el isomorfismo a las identidades en cada categoría respectivamente.

$$\frac{FX \xrightarrow{\mathrm{id}} FX}{X \xrightarrow{\eta_x} GFX} \qquad \frac{FGY \xrightarrow{\varepsilon_y} Y}{GY \xrightarrow{\mathrm{id}} GY}$$

Proposición 4. *La unidad y la counidad son transformaciones naturales.*

Proof. Sean $h \colon X \to X'$ y $k \colon Y \to Y'$. Comprobaremos que el morfismo adjunto a Fh es $GFh \circ \eta_X$ y $\eta'_X \circ h$ al mismo tiempo, lo que implica que deben ser iguales. De la misma forma, el adjunto a Gk es $k \circ \varepsilon_Y$ pero tambień $\varepsilon_{Y'} \circ FGk$.

$$\begin{array}{c} X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{\eta} GFY \\ \hline FX \xrightarrow{\mathrm{id}} FX \xrightarrow{Fh} FY \xrightarrow{\mathrm{id}} FY \\ \hline X \xrightarrow{\eta} GFX \xrightarrow{GFh} GFY \end{array} \qquad \begin{array}{c} FGX \xrightarrow{\varepsilon} X \xrightarrow{k} Y \\ \hline GX \xrightarrow{\mathrm{id}} GX \xrightarrow{Gk} GY \xrightarrow{\mathrm{id}} GY \\ \hline FGx \xrightarrow{FGk} FGy \xrightarrow{\varepsilon} y \end{array}$$

□

Proposición 5. *La unidad y la counidad cumplen las ecuaciones dadas en los siguientes diagramas, llamadas* ecuaciones triangulares *o* ecuaciones de zig-zag.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, equal] & GFG \arrow[d, "G\varepsilon"] \\ & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} FGF \arrow[d, "\varepsilon"'] & F \arrow[l, "F\eta"'] \arrow[dl, equal] \\ F & \end{tikzcd}$$

Es decir, tenemos $G\varepsilon \circ \eta = \mathrm{id}$ *y también* $\varepsilon \circ F\eta = \mathrm{id}$.

Proof. Probaremos algo todavía más general, que $Gf \circ \eta = \varphi(f)$ y que también $\varepsilon \circ Fg = \varphi^{-1}(g)$ para cualesquiera $f \colon FX \to Y$ y $g \colon X \to GY$. En efecto, aplicando naturalidad en los diagramas tenemos que deben coincidir.

$$\begin{array}{c} \begin{tikzcd} FX \arrow[r, "Fg"] \arrow[rr, bend left, "\varepsilon_Y \circ Fg"] & FGY \arrow[r, "\varepsilon_Y"] & Y \end{tikzcd} \\ \hline \begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"'] \arrow[rr, bend right, "g"'] & GY \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & GY \end{tikzcd} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{tikzcd} FX \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[rr, bend left, "f"] & FX \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd} \\ \hline \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"'] \arrow[rr, bend right, "Gf \circ \eta_X"'] & GFX \arrow[r, "Gf"'] & GY \end{tikzcd} \end{array}$$

□

Caracterización y propiedades

Las adjunciones contienen muchísima información. Ahora mismo nos sería muy difícil probar que dos funtores forman una adjunción. Lo que necesitamos son formas de caracterizarlas.

Proposition 6 (Caracterización de adjunciones)**.** *Una adjunción $F \dashv G$ entre categorías $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ viene determinada por cualesquiera de las siguientes opciones,*

1. *funtores F, G y $\eta\colon 1 \Rightarrow GF$ donde $\eta_X : X \to GFX$ es universal sobre G.*
2. *funtor G y universales $\eta_X : X \to GF_0X$; aquí $F_0X \in \mathbf{Y}$ crea un funtor F.*
3. *funtores F, G y $\varepsilon\colon FG \Rightarrow 1$ donde $\varepsilon_Y : FGY \to Y$ es universal sobre F.*
4. *funtor F y universales $\varepsilon_Y : FG_0Y \to Y$; aquí $G_0Y \in \mathbf{X}$ crea un funtor G.*
5. *funtores F, G, con transformaciones naturales satisfaciendo $G\varepsilon \circ \eta G = \mathrm{id}$ y $\varepsilon F \circ F\eta = \mathrm{id}$ (zig-zag).*

Proof. *1.* Universality of η_X gives a isomorphism $\varphi\colon \hom(FX, Y) \cong \hom(X, GY)$ between the arrows in the following diagram

$$\begin{tikzcd} & GY & & Y \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\eta_x"'] & GFX \arrow[u, dashed, "Gg"'] & & FX \arrow[u, dashed, "\exists! g"'] \end{tikzcd}$$

defined as $\varphi(g) = Gg \circ \eta_X$. This isomorphism is natural in X; for every $h\colon X' \to X$ we know by naturality of η that $Gg \circ \eta \circ h = G(g \circ Fh) \circ \eta$. The isomorphism is also natural in Y; for every $k\colon Y \to Y'$ we know by functoriality of G that $Gh \circ Gg \circ \eta = G(h \circ g) \circ \eta$.

2. We can define a functor F on objects as $FX = F_0X$. Given any $h\colon X \to X'$, we can use the universality of η to define Fh as the unique arrow making this diagram commute

$$\begin{tikzcd} & GFX' & & FX' \\ X \arrow[ur, "\eta_{X'} \circ h"] \arrow[r, "\eta_X"'] & GFX \arrow[u, dashed, "GFh"'] & & FX \arrow[u, dashed, "\exists! Fh"'] \end{tikzcd}$$

and this choice makes F a functor and η a natural transformation, as it can be checked in the following diagrams using the existence and uniqueness given by the universality of η in both cases.

$$
\begin{tikzcd}
 & GFX \\
X \arrow[ur, "\eta_X"] \arrow[r, "\eta_X"'] & GFX \arrow[u, dashed, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
FX \\
FX \arrow[u, dashed, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X'' \arrow[r, "\eta_{X''}"] & GFX'' \\
X' \arrow[u, "h'"] \arrow[r, "\eta_{X'}"] & GFX' \arrow[u, "GFh'"'] \\
X \arrow[u, "h"] \arrow[r, "\eta_X"] & GFX \arrow[u, "GFh"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
FX'' \\
FX' \arrow[u, dashed, "\exists! Fh'"] \\
FX \arrow[u, dashed, "\exists! Fh'"] \arrow[uu, dashed, bend right, "\exists! F(h' \circ h)"']
\end{tikzcd}
$$

3. The proof is dual to that of *1.*

4. The proof is dual to that of *2.*

5. We can define two functions $\varphi(f) = Gf \circ \eta_X$ and $\theta(g) = \varepsilon_Y \circ Fg$. We checked in 1 (and 3) that these functions are natural in both arguments; now we will see that they are inverses of each other using naturality and the triangle identities

- $\varphi(\theta(g)) = G\varepsilon \circ GFg \circ \eta = G\varepsilon \circ \eta \circ g = g$;
- $\theta(\varphi(f)) = \varepsilon \circ FGf \circ F\eta = f \circ \varepsilon \circ F\eta = f$. $\square$

Proposition 7 (Unicidad esencial de adjuntos)**.** *Dos adjuntos al mismo funtor $F, F' \dashv G$ son naturalmente isomorfos.*

Proof. Construiremos un isomorfismo natural a partir de las dos unidades η, η' que determinan las adjunciones. Para cada X, sabemos que $\eta_X \colon X \to GFX$ y $\eta_{X'} \colon X \to GF'X$ son universales desde X hacia G. Se puede ver que en general los morfismos universales son únicos salvo isomorfismo, así que existe un $\theta_X \colon FX \to F'X$ tal que $G\theta_X \circ \eta_X = \eta'_X$.

Sabemos que θ es natural porque para cualquier $f \colon X \to Y$ los morfismos $\theta \circ Ff$ y $F'f \circ \theta$, hacen conmutar el siguiente diagrama.

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\eta'"] & GF'Y \\
X \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\eta"] & GFX \arrow[u, dashed]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F'Y \\
FX \arrow[u, dashed, "\exists!"]
\end{tikzcd}
$$

En efecto,

- $G(\theta \circ Ff) \circ \eta = G\theta \circ GFf \circ \eta = G\theta \circ \eta \circ f = \eta' \circ f$;

- $G(F'f \circ \theta) \circ \eta = GF'f \circ G\theta \circ \eta = GF'f \circ \eta' = \eta' \circ f$.

Pero el morfismo haciendo conmutar el diagrama debería ser único, así que $\theta \circ Ff = F'f \circ \theta$. $\square$

Theorem 8 (Composición de adjunciones)**.** *Dadas dos adjunciones $\varphi\colon F \dashv G$ y $\theta\colon F' \dashv G'$ entre dos pares de categorías $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ y $\mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ respectivamente, los funtores compuestos crean una adjunción $\varphi \cdot \theta\colon F' \circ F \dashv G \circ G'$.*

Proof. La composición de isomorfismos naturales es de nuevo un isomorfismo natural, así que lo único que hacemos es obtener el isomorfismo que buscamos por composición.

$$\begin{array}{c}
F'FX \xrightarrow{\ f\ } Y \\ \hline
FX \xrightarrow{\theta(f)} G'Y \\ \hline
X \xrightarrow{\varphi\theta(f)} GG'Y
\end{array}$$

$\square$

Si además queremos conocer la unidad y counidad de esta adjunción, podemos aplicar la biyección compuesta a las identidades, como sigue. Si la unidad y la counidad de φ son $\langle \eta, \varepsilon \rangle$ y las de θ son $\langle \eta', \varepsilon' \rangle$, la unidad y la counidad de la adjunción compuesta vienen dadas por $\langle G\eta' F \circ \eta,\ \varepsilon' \circ F'\varepsilon G' \rangle$.

$$\begin{array}{c}
F'FX \xrightarrow{\mathrm{id}} F'FX \\ \hline\hline
FX \xrightarrow{\mathrm{id}} FX \xrightarrow{\eta'_{FX}} G'F'FX \\ \hline\hline
X \xrightarrow[\eta]{} GFX \xrightarrow[G\eta'_{FX}]{} GG'F'FX
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
GG'Z \xrightarrow{\mathrm{id}} GG'Z \\ \hline\hline
FGG'Z \xrightarrow{\varepsilon_{G'Z}} G'Z \xrightarrow{\mathrm{id}} G'Z \\ \hline\hline
F'FGG'Z \xrightarrow[F'\varepsilon_{G'Z}]{} F'G'Z \xrightarrow[\varepsilon']{} Z
\end{array}$$

Muchas adjunciones

Esta parte viene inspirada por la numerosísima cantidad de adjunciones que pueden encontrarse al hacer categorías y por un hilo en Math.SE.

Monoides libres

Proposición 9. *Consideremos la categoría de los monoides con los homomorfismos de monoide. El funtor* $F\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Mon}$ *que envía cada conjunto a su monoide libre es el adjunto izquierdo del funtor* $U\colon \mathbf{Mon} \to \mathbf{Set}$ *que a cada monoide le asocia su conjunto subyacente.*

Proof. Vamos a usar la caracterización de las adjunciones. Crearemos una familia de funciones $\eta_X\colon X \to UFX$ y probaremos la universalidad del siguiente diagrama. Aquí M es un monoide con unidad e y multiplicación $(\cdot)$.

$$\begin{tikzcd} & UM & & M \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\eta_x"'] & UFX \arrow[u, dashed, "Uh"'] & & FX \arrow[u, dashed, "\exists! h"'] \end{tikzcd}$$

Puede ayudar pensar que si X es un conjunto, FX es el conjunto de las listas finitas sobre X. Por el diagrama sabemos que $h[x] = f(x)$ está determinado; pero además, como h debe ser un homomorfismo de monoides, esto lo hace estar determinado sobre cualquier lista. Concluimos que el único morfismo posible está definido como $h[x_1, \dots, x_n] = f(x_1) \cdot \dots \cdot f(x_n)$. □

La mónada asociada a esta adjunción es la mónada lista. Las álgebras sobre esta mónada son precisamente los monoides.

Conexiones de Galois

Definición 10. Los conjuntos parcialmente ordenados forman categorías en las que hay un único morfismo $a \to b$ cuando $a \leqslant b$. Un funtor entre dos conjuntos parcialmente ordenados es una función monótona. Una **conexión de Galois** es una adjunción entre conjuntos parcialmente ordenados.

Es decir, una adjunción entre P y Q consiste en funciones monótonas $f\colon P \to Q$ y $g\colon Q \to P$, con la siguiente doble implicación para cualesquiera $x \in P, y \in Q$.

$$\frac{f(x) \leqslant y}{x \leqslant g(y)}$$

Estos casos son especialmente fáciles de identificar y de demostrar porque en ellos las condiciones de naturalidad se satisfacen automáticamente. Esto es así porque hay a lo sumo un único morfismo entre cualesquiera dos objetos, y por tanto, dos morfismos entre los mismos objetos deben coincidir.

Ejemplo 11. Sea una topología en un conjunto X. Los abiertos forman un conjunto parcialmente ordenado con la inclusión $\mathcal{O}(X)$, pero de hecho todos los elementos del conjunto potencia forman un conjunto parcialmente ordenado con la inclusión, $\mathcal{P}(X)$. Podemos ver un abierto como un elemento del conjunto potencia $i\colon \mathcal{O}(X) \to \mathcal{P}(X)$. El **interior** de un conjunto $\mathsf{int}\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{O}(X)$ es el adjunto derecho a esa inclusión, $i \dashv \mathsf{int}$.

$$\frac{i(U) \subseteq A}{U \subseteq \mathsf{int}(A)}$$

Nótese que ambos son equivalentes para cualquier $U \in \mathcal{O}(X)$ y cualquier $A \in \mathcal{P}(X)$. Esto también nos dice que el interior es comonádico; y sus coálgebras son los conjuntos abiertos.

Distribuciones y símplices

Consideramos un funtor que envía un conjunto X al conjunto de distribuciones finitas sobre él, DX. Las álgebras sobre la mónada de esta adjunción son los conjuntos convexos; en particular las álgebras libres sobre conjuntos finitos se llaman **símplices**.

Los cuantificadores son adjunciones

Mónadas y álgebras

Definición 12. Una **mónada** es un funtor $T\colon X \to X$ con una transformación natural $\eta\colon \mathrm{Id} \Rightarrow T$ llamada **unidad** y una transformación natural $\mu\colon T^2 \Rightarrow T$, llamada *multiplicación*; tales que los siguientes diagramas conmutan.

$$\begin{tikzcd}
T^3 \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu T"] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\
T^2 \arrow[r, "\mu"] & T
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Id} \circ T \arrow[r, "\eta T"] \arrow[dr, "\cong"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] & T \circ \mathrm{Id} \arrow[l, "T\eta"'] \arrow[dl, "\cong"] \\
& T &
\end{tikzcd}$$

Una **comónada** es el dual a una mónada, con una **counidad** $\varepsilon\colon T \Rightarrow \mathrm{Id}$ y una comultiplicación $T \Rightarrow T^2$.

Ejemplo 13. Las mónadas en un preorden son funciones idempotentes crecientes.

Proposición 14. *Dada una adjunción $G \dashv F$, la composición $G \circ F$ es una mónada.*

Proof. La unidad de la adjunción es la unidad de la mónada. El producto será $\mu = G\varepsilon$. La asociatividad es el siguiente diagrama, que se obtiene primero por naturalidad y luego aplicando funtores.

$$\begin{tikzcd} FGFG \arrow[r, "FG\varepsilon"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & FG \arrow[d, "\varepsilon"] \\ FG \arrow[r, "\varepsilon"] & I \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} GFGFGF \arrow[r, "GFG\varepsilon"] \arrow[d, "G\varepsilon"'] & GFGF \arrow[d, "G\varepsilon"] \\ GFGF \arrow[r, "G\varepsilon"] & GF \end{tikzcd}$$

La unitalidad viene dada precisamente por las ecuaciones de zigzag. □

Álgebras

Definición 15. Un **álgebra** sobre un funtor $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ viene dada por un objeto $X \in \mathbf{C}$ equipado con un morfismo $FX \to X$ llamado *morfismo de estructura.*

Un morfismo entre dos álgebras dadas por $FX \to X$ y por $FY \to Y$ viene dado por un $h\colon X \to Y$ haciendo conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "Fh"] \arrow[d, "\mu"] & FY \arrow[d, "\nu"] \\ X \arrow[r, "h"] & Y \end{tikzcd}$$

Con estos morfismos, las álgebras sobre un funtor forman una categoría. El objeto inicial de esta categoría no necesita existir, pero cuando lo hace es único salvo isomorfismo.

Teorema 16 (Lambek)**.** *El morfismo de estructura de un álgebra inicial es un isomorfismo. Es decir, si X es un álgebra inicial, entonces $\mu\colon FX \cong X$ (véase [Awo10]).*

Proof. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo, donde $l\colon X \to FX$ viene dado por la inicialidad de X.

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "Fl"] \arrow[d, "\mu"'] & FFX \arrow[r, "F\mu"] \arrow[d, "F\mu"] & FX \arrow[d, "\mu"] \\ X \arrow[r, "l"] & FX \arrow[r, "\mu"] & X \end{tikzcd}$$

Por inicialidad de X sabemos que $\mu \circ l = \mathrm{id}$, y por conmutatividad de la parte izquierda, $l \circ \mu = F(\mu \circ l) = \mathrm{id}$. □

Podemos usar el punto fijo de los funtores para definir catamorfismos y anamorfismos. Hay un problema y es que `Fix` encontrará *un* punto fijo si lo hay (teorema de reducción a izquierda para el cálculo lambda), pero no tenemos forma de fijar el que queremos.

```
-- Declaramos el punto fijo de un funtor.  Si nos da el álgebra
-- o la coálgebra inicial, 'In' y 'out' serán isomorfismos por
-- el teorema de Lambek.
newtype Fix f = In { out :: f (Fix f) }

type Algebra f a = f a -> a
type Coalgebra f a = a -> f a

-- Usando el teorema de Lambek.
cata :: (Functor f) => Algebra f a -> Fix f -> a
cata alg = alg . fmap (cata alg) . out

ana :: (Functor f) => Coalgebra f b -> b -> Fix f
ana coalg = In . fmap (ana coalg) . coalg
```

Ejemplo 17. El funtor polinómico $1 + A \times (-)$ tiene como álgebra inicial las listas de tipo A.

```
-- Listas, monoides libres.
data ListF a f = NilF | ConsF a f deriving (Functor)
type List a = Fix (ListF a)

nil = In NilF
cons = ((In .) . ConsF)

algsum :: (Num a) => Algebra (ListF a) a
algsum NilF        = 0
algsum (ConsF a b) = a + b

sumlist :: (Num a) => List a -> a
sumlist = cata algsum
```

Example 18 (Objeto de números naturales). Consider the functor $F(X) = 1 + X$ in a category $\mathcal{C}$ with coproducts and a terminal object. Its initial algebra is called a **natural numbers object** due to the fact that, in Set, this initial algebra is precisely the set of natural numbers $\mathbb{N}$ with the successor function $\mathrm{succ}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

and the zero element given as a morphism from the terminal object, $0\colon 1 \to \mathbb{N}$.

$$\begin{tikzcd} 1+\mathbb{N} \arrow[r] \arrow[d, "\langle 0,\mathrm{succ}\rangle"'] & 1+X \arrow[d, "\langle x,f\rangle"] \\ \mathbb{N} \arrow[r, "\varphi"] & X \end{tikzcd}$$

Let X be an F-algebra given by $x\colon 1 \to X$ and $f\colon X \to X$; by induction over the natural numbers we can show that a morphism of algebras φ making that diagram commute must follow $\varphi(0) = x$ and $\varphi(\mathrm{succ}(n)) = f(\varphi(n))$. Thus, in a certain sense, initiality captures the principle of induction.

For instance, we can define addition $+\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, interpreted as a unary operation $+\colon \mathbb{N} \to \hom(\mathbb{N},\mathbb{N})$, as the unique morphism φ from the initial algebra to the algebra given by $\hom(\mathbb{N},\mathbb{N})$ with id and postcomposition with succ.

$$\begin{tikzcd} 1+\mathbb{N} \arrow[r] \arrow[d, "\langle 0,\mathrm{succ}\rangle"'] & 1+\hom(\mathbb{N},\mathbb{N}) \arrow[d, "\langle \mathrm{id},\mathrm{succ}\circ -\rangle"] \\ \mathbb{N} \arrow[r, "+"] & \hom(\mathbb{N},\mathbb{N}) \end{tikzcd}$$

This definition immediately implies the equalities $0 + m = \mathrm{id}(m) = m$ and $\mathrm{succ}(n) + m = (\mathrm{succ} \circ (n + \_))(m) = \mathrm{succ}(n + m)$.

Los adjuntos derechos preservan límites

Definición 19. Dada una categoría $\mathbf{C}$ y cualquier categoría n podemos considerar un **funtor diagonal** $\Delta_n\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}^n$ que se define constante como $\Delta(X,k) = X$ en objetos y $\Delta(f,k) = f$ en morfismos. Un **límite** es un adjunto derecho al funtor diagonal; un **colímite** es un adjunto izquierdo al funtor diagonal. [2]

El funtor diagonal tiene una propiedad interesante, es una *comultiplicación* que preserva cualquier funtor. Esto quiere decir que para cualquier $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, podemos considerar $F_{(n)}\colon \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ como el funtor que resulta de aplicar F en cada uno de los índices. Tenemos entonces $\Delta \circ F = F_{(n)} \circ \Delta$.

Teorema 20. *Los adjuntos derechos son continuos. Los adjuntos izquierdos son cocontinuos.*

[2] Los límites suelen considerarse en más generalidad, permitiendo que no formen un funtor sino que sólo se den determinados casos. Esta presentación va a ayudar a simplificar mucho la próxima demostración y no perdemos nada que nos importe especialmente ahora. Para una definición estándar de límite se puede usar [Lan78].

Proof. Sea un límite $\Delta^n \dashv \mathsf{lim}$. Si tenemos una adjunción $L \dashv R$, podemos componerlas para obtener $\Delta^n \circ L \dashv R \circ \mathsf{lim}$. Por otro lado, podemos ver que $L^{(n)} \dashv R^{(n)}$ y podemos componer la adjunción $L^{(n)} \circ \Delta^{(n)} \dashv \mathsf{lim} \circ R^{(n)}$. Pero sabemos que $\Delta^n \circ L = L^{(n)} \circ \Delta^n$ y que las adjunciones son únicas salvo isomorfismo, así que $\mathsf{lim} \circ R^{(n)} \cong R \circ \mathsf{lim}$. □

Corolario 21. *Para cualesquiera conjuntos* $A, B, C \in \mathbf{Set}$*, se tiene* $(A+B) \times C \cong A \times C + B \times C$.

References

[Awo10] Steve Awodey. *Category theory.* Oxford University Press, 2010.

[Lan78] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician.* Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1978.

[Law] F. William Lawvere. Use of Logical Operators in mathematics. *Lecture notes in Linear Algebra, 309.*

[Rie17] Emily Riehl. *Category theory in context.* Courier Dover Publications, 2017.