Monoides, monoides coloreados

Mario Román

<2019-04-14 Sun>

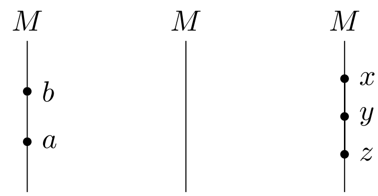
Contents

El plan será el siguiente: primero presentamos una *sintaxis*, ciertos símbolos que forman diagramas y que siguen ciertas reglas. Luego veremos que esta sintaxis toma *modelos* en objetos matemáticos con cierta estructura. ¿Cuál es la utilidad de estudiar la sintaxis? Cada vez que probemos algo sólo usando sus reglas, lo estaremos probando para todos sus modelos. ¿En qué se diferencia esto de una presentación axiomática de, digamos, un grupo? en que nuestra sintaxis viene dada, no por cadenas de caracteres como suele hacerse en lógica, ¡sino por diagramas! Vamos a ir un paso más allá, y, haciendo implícitamente uso de teoremas de coherencia y complitud, definir las nuestras estructuras de forma elemental usando diagramas. En lugar de definir diagramas, los tomamos como conceptos primitivos.

In this article I am drawing diagrams using tikz and following Marsden's [Mar14] macros for string diagrams. The general idea follows this paper, but also Vicary-Heunen-Reutter's notes for Categorical Quantum Mechanics, [HVR19].

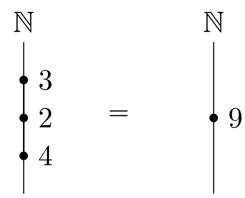
Monoides y monoides coloreados

Definición 1. Un elemento de un **monoide** es una *cuerda* con *nodos*, un diagrama en una dimensión. Los siguientes diagramas representan elementos de un monoide.



A la cuerda vacía se le llama **identidad** o *elemento neutro* del monoide. A la **concatenación** de dos cuerdas se le llama tradicionalmente *multiplicación.*

Ejemplo 2. Los números naturales con la suma forman un monoide.[1] La cuerda vacía es el cero y dos cuerdas con la misma suma se declaran iguales.

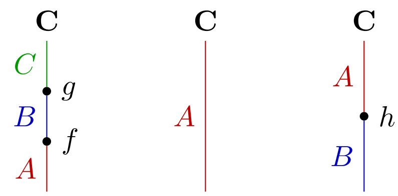


¿Cuál es la ventaja de escribir esto frente a la notación usual de un monoide? con esta notación, la asociatividad es transparente. No tenemos forma de distinguir $((3+2)+4)$ de $(3+(2+4))$ y esto es bueno, porque en un monoide no debería poder existir forma de distinguirlos. Además, cuando dibujamos la unidad como una cuerda vacía, estamos haciendo la unitalidad transparente. No tenemos forma de distinguir 9 de $0+9$.

La estructura de un monoide es muy rica, pero podemos ir más allá. En un monoide, cualesquiera dos nodos pueden componerse sobre la cuerda, pero podemos limitar esta composición dando colores a las cuerdas. Cada nodo cambiará el color de la cuerda, y sólo podremos componer dos nodos si el color de salida del primero coincide con el color de entrada del segundo.

Definición 3. Una **categoría** es un monoide coloreado. Alternativamente, un monoide es una categoría monocroma. Normalmente, a los elementos de una categoría se les llama *morfismos*, a los colores se les llama *objetos,* se les pone una etiqueta en lugar de un color, y se dice que *un monoide es una categoría con un sólo objeto.* Los siguientes son morfismos en una categoría.

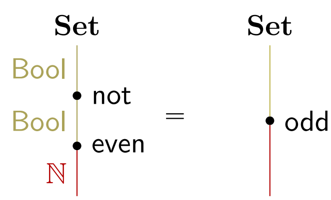
[1] Y los dibujos describen un *ábaco*.



A la concatenación se le suele llamar **composición** y a la cuerda vacía de un determinado color se le llama **identidad** sobre ese objeto. Al color de entrada de un nodo se le llama **dominio** y al color de salida se le llama **codominio**.

Ahora la composición está limitada: podemos poner g después de f porque el dominio de g y el codominio de f coinciden, pero no podemos poner h después de g, por ejemplo, porque h tiene dominio B.

Ejemplo 4. Las funciones entre conjuntos forman una categoría, que suele notarse por **Set**. Cada color es un conjunto, y entre dos conjuntos A y B podemos considerar los nodos dados por las funciones $f\colon A \to B$. Al concatenar varias funciones, lo que hacemos es componerlas. Una cadena vacía sobre un conjunto representa la función identidad sobre ese conjunto.

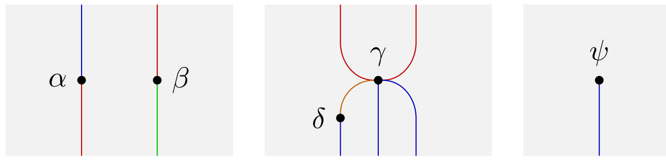


La asociatividad de la composición de funciones y la neutralidad de la función se han vuelto invisibles con esta notación.

Categorías monoidales

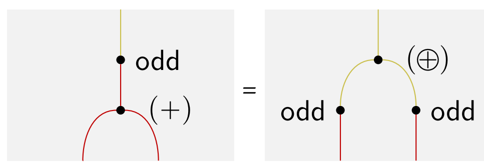
Cuando los diagramas de verdad se vuelven interesantes es cuando pasamos de una a dos dimensiones. Nuestra siguiente definición usa dos dimensiones. En uno de los ejes tenemos un monoide, en el otro tenemos una categoría.

Definición 5. Los morfismos de **categoría monoidal** vienen dados por diagramas bidimensionales de cuerdas con distintos colores. Un morfismo puede tener como entrada y salida un número cualquiera de cuerdas.



Consideramos iguales cualesquiera dos diagramas que sean isotópicos, pero aun tenemos la restricción dada por los colores: el morfismo γ, por ejemplo, necesita tomar (¡en ese orden!) una entrada naranja y dos azules. Nuestro siguiente paso será colorear las regiones del diagrama, así que quizá es una buena idea cambiar los colores de las cuerdas por etiquetas, como implícitamente estamos haciendo con los morfismos.

Ejemplo 6. Las funciones sobre conjuntos no sólo forman una categoría, sino que forman una categoría monoidal con el producto dado por el producto cartesiano. Esto nos permite además expresar funciones no necesariamente unarias en nuestros diagramas.



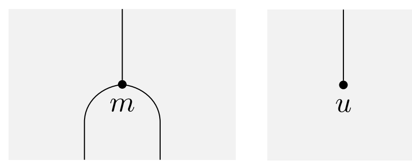
Por cierto, esta ecuación está expresando que la función que calcula si un número es impar es un homomorfismo de monoides (en su definición usual como conjuntos) del monoide de los naturales con la suma al monoide de los booleanos con la operación xor.

PROs y teorías de Lawvere

Nos hemos saltado un paso obvio. ¿Qué ocurre si tomamos dos dimensiones pero sólo usamos cuerdas de un color? El resultado **no** es una categoría monoidal con un solo objeto, sino una categoría monoidal cuyos objetos vienen dados por el monoide libre sobre un generador. Esto ocurre porque no forzamos un número arbitrario de cuerdas a ser iguales a una sóla cuerda.

Definición 7. Un **PRO**, o **categoría de (pro)ductos monoidales**, es una categoría monoidal monocroma. Alternativamente, una categoría monoidal es un PRO coloreado.

Ejemplo 8. Estas categorías pueden usarse para describir teorías algebraicas internas a nuestras teorías. ¿Qué quiere decir esto? Nosotros hemos partido de una noción primitiva de monoide y categoría, pero una vez que tenemos la categoría monoidal de conjuntos, podríamos intentar definir un monoide *en la categoría de conjuntos.* Este monoide no será un diagrama sino una operación de multiplicación (con dos entradas y una salida) y una unidad (con una salida y ninguna entrada) *dentro de la categoría.* Un monoide en una categoría monoidal viene determinado por los siguientes morfismos.



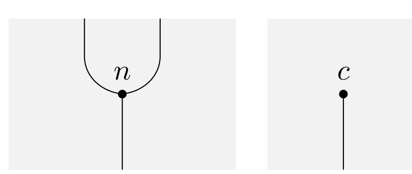
Cumpliendo los axiomas de un monoide, que son las siguientes ecuaciones. La primera se llama **unitalidad** y comprueba que la unidad es neutra respecto al producto.

La segunda se llama **asociatividad** y nos permite aplicar las multiplicaciones en cualquier orden.

Los números complejos con la multiplicación, las cadenas de caracteres con la concatenación o los naturales con la suma son ejemplos clásicos de monoide.

Dada una teoría, consideramos su teoría **dual** como aquella que resulta de invertir la dirección de los diagramas.

Definición 9. Un **comonoide** es el dual de un monoide. Esto quiere decir que tendrá una *counidad* y una *comultiplicación.*



Satisfaciendo axiomas de **counitalidad** y **coasociatividad**.

¿Por qué no solemos hablar de comonoides cuando estudiamos álgebra? Nuestra notación es siempre unidimensional, y eso hace un poco difícil hablar de operaciones con más de una salida; además de esta limitación, esencialmente existe un único comonoide en la categoría de conjuntos. El único comonoide de la categoría de conjuntos es el comonoide de **copia y borrado**, donde la multiplicación es la diagonal $A \to A \times A$ y el borrado es la única función $A \to 1$. Nunca hablamos de este comonoide, pero aparece continuamente cuando hacemos álgebra: lo que hacemos para evitar hablar de él es repetir nombres de variables, por ejemplo, la función $x \mapsto x + x$ es realmente la composición de la suma con la copia.

References

[HVR19] Chris Heunen, Jamie Vicary, and David Reutter. Categorical Quantum Mechanics: an introduction. *Department of Computer Science*, Hilary Term 2019.

[Mar14] Daniel Marsden. Category theory using string diagrams. *arXiv preprint arXiv:1401.7220*, 2014.