

Monoides, grupos, grupoides, categorías

Mario Román

1 de abril de 2019

Definition 1. Un **monoide** es una estructura A en la que (1) podemos *componer* cualesquiera dos elementos en uno nuevo con una operación $\circ: A \times A \rightarrow A$ y en la que (2) existe un elemento neutro e que no afecta al componerse con otro, $a \circ e = e \circ a = a$ para cualquier $a : A$, y (3) la composición es asociativa, siendo $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ para cualesquiera $a, b, c : A$.

Ejemplos son:

1. Los números naturales con la suma como operación y el cero como elemento neutro. $n + 0 = 0 + n = n$
2. Las cadenas de texto, con la concatenación como operación y la cadena vacía como elemento neutro. $a \circ "" = "" \circ a = a$

Definition 2. Un **grupo** es un monoide donde cada elemento $a : A$ tiene una inversa $a^{-1} : A$ tal que $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

Ejemplos son:

1. Los números enteros con la suma como operación, el cero como elemento neutro y el elemento opuesto como negación.

Definition 3. Una **categoría** es un monoide coloreado. Eso significa que no podemos componer elementos libremente, sino que cada elemento $a : A$ tiene un dominio $\text{dom}(a)$ y un codominio $\text{cod}(a)$. Sólo podemos componer $a \circ b$ si $\text{cod}(b) = \text{dom}(a)$, y la composición tendrá dominio $\text{dom}(b)$ y codominio $\text{cod}(b)$.

Ejemplos son:

1. Las funciones con la composición de funciones.
2. Las funciones lineales entre espacios vectoriales con la composición.
3. Las demostraciones de $(a \leq b)$ con la transitividad.

Definition 4. Un **grupoide** es un grupo coloreado.