Monoides coloreados y bi(monoides coloreados)

Mario Román

14 de abril de 2019

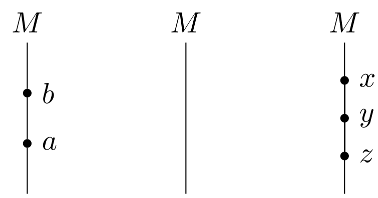
Contents

Nuestro objetivo es el siguiente: primero presentamos una *sintaxis*, ciertos símbolos que forman diagramas y que siguen ciertas reglas. Luego veremos que esta sintaxis toma *modelos* en objetos matemáticos con cierta estructura. ¿Cuál es la utilidad de estudiar la sintaxis? Cada vez que probemos algo sólo usando sus reglas, lo estaremos probando para todos sus modelos. ¿En qué se diferencia esto de una presentación axiomática de, digamos, un grupo? en que nuestra sintaxis viene dada, no por cadenas de caracteres como suele hacerse en lógica, ¡sino por diagramas! Vamos a ir un paso más allá, y, haciendo implícitamente uso de teoremas de coherencia y complitud, definir las nuestras estructuras de forma elemental usando diagramas. En lugar de definir diagramas, los tomamos como conceptos primitivos.

In this article I am drawing diagrams using tikz and following Marsden's [Mar14] macros for string diagrams. The general idea follows this paper, but also Vicary-Heunen-Reutter's notes for Categorical Quantum Mechanics, [HVR19].

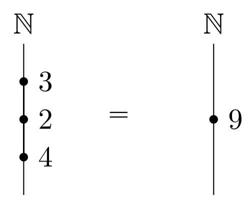
Monoides y monoides coloreados

Definición 1. Un elemento de un **monoide** es una *cuerda* con *nodos*, un diagrama en una dimensión. Los siguientes diagramas representan elementos de un monoide.



A la cuerda vacía se le llama **identidad** o *elemento neutro* del monoide. A la **concatenación** de dos cuerdas se le llama tradicionalmente *multiplicación*.

Ejemplo 2. Los números naturales con la suma forman un monoide.[1] La cuerda vacía es el cero y dos cuerdas con la misma suma se declaran iguales.



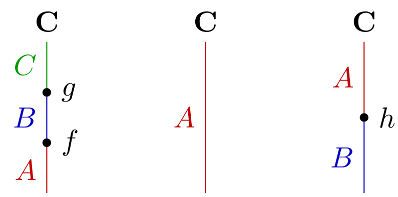
¿Cuál es la ventaja de escribir esto frente a la notación usual de un monoide? con esta notación, la asociatividad es transparente. No tenemos forma de distinguir $((3+2)+4)$ de $(3+(2+4))$ y esto es bueno, porque en un monoide no debería poder existir forma de distinguirlos. Además, cuando dibujamos la unidad como una cuerda vacía, estamos haciendo la unitalidad transparente. No tenemos forma de distinguir 9 de $0+9$.

La estructura de un monoide es muy rica, pero podemos ir más allá. En un monoide, cualesquiera dos nodos pueden componerse sobre la cuerda, pero podemos limitar esta composición dando colores a las cuerdas. Cada nodo cambiará el color de la cuerda, y sólo podremos componer dos nodos si el color de salida del primero coincide con el color de entrada del segundo.

Definición 3. Una **categoría** es un monoide coloreado. Alternativamente, un monoide es una categoría monocroma. Normalmente, a los elementos de una

[1] Y los dibujos describen un *ábaco*.

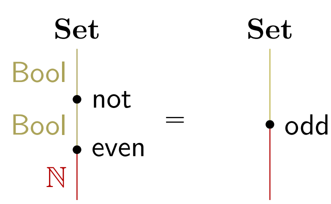
categoría se les llama *morfismos*, a los colores se les llama *objetos*, se les pone una etiqueta en lugar de un color, y se dice que *un monoide es una categoría con un sólo objeto*. Los siguientes son morfismos en una categoría.



A la concatenación se le suele llamar **composición** y a la cuerda vacía de un determinado color se le llama **identidad** sobre ese objeto. Al color de entrada de un nodo se le llama **dominio** y al color de salida se le llama **codominio**.

Ahora la composición está limitada: podemos poner g después de f porque el dominio de g y el codominio de f coinciden, pero no podemos poner h después de g, por ejemplo, porque h tiene dominio B.

Ejemplo 4. Las funciones entre conjuntos forman una categoría, que suele notarse por **Set**. Cada color es un conjunto, y entre dos conjuntos A y B podemos considerar los nodos dados por las funciones $f\colon A \to B$. Al concatenar varias funciones, lo que hacemos es componerlas. Una cadena vacía sobre un conjunto representa la función identidad sobre ese conjunto.

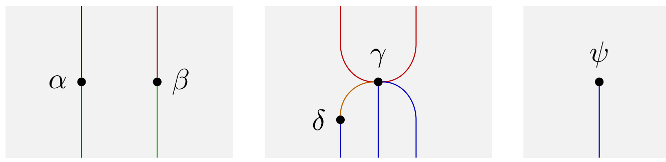


La asociatividad de la composición de funciones y la neutralidad de la función se han vuelto invisibles con esta notación.

Categorías monoidales

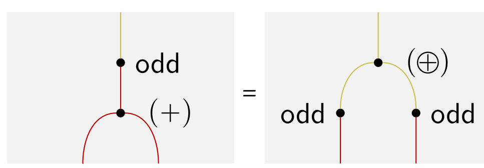
Cuando los diagramas de verdad se vuelven interesantes es cuando pasamos de una a dos dimensiones. Nuestra siguiente definición usa dos dimensiones. En uno de los ejes tenemos un monoide, en el otro tenemos una categoría.

Definición 5. Los morfismos de **categoría monoidal** vienen dados por diagramas bidimensionales de cuerdas con distintos colores. Un morfismo puede tener como entrada y salida un número cualquiera de cuerdas.



Consideramos iguales cualesquiera dos diagramas que sean isotópicos, pero aun tenemos la restricción dada por los colores: el morfismo γ, por ejemplo, necesita tomar (¡en ese orden!) una entrada naranja y dos azules. Nuestro siguiente paso será colorear las regiones del diagrama, así que quizá es una buena idea cambiar los colores de las cuerdas por etiquetas, como implícitamente estamos haciendo con los morfismos.

Ejemplo 6. Las funciones sobre conjuntos no sólo forman una categoría, sino que forman una categoría monoidal con el producto dado por el producto cartesiano. Esto nos permite además expresar funciones no necesariamente unarias en nuestros diagramas. ¡Importante!: los diagramas se suelen leer de abajo hacia arriba; pero a veces también se encuentran en la literatura de izquierda a derecha o incluso de arriba a abajo.



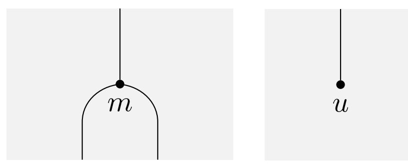
Por cierto, esta ecuación está expresando que la función que calcula si un número es impar es un homomorfismo de monoides (en su definición usual como conjuntos) del monoide de los naturales con la suma al monoide de los booleanos con la operación xor.

PROs y teorías de Lawvere

Nos hemos saltado un paso obvio. ¿Qué ocurre si tomamos dos dimensiones pero sólo usamos cuerdas de un color? El resultado **no** es una categoría monoidal con un solo objeto, sino una categoría monoidal cuyos objetos vienen dados por el monoide libre sobre un generador. Esto ocurre porque no forzamos un número arbitrario de cuerdas a ser iguales a una sóla cuerda.

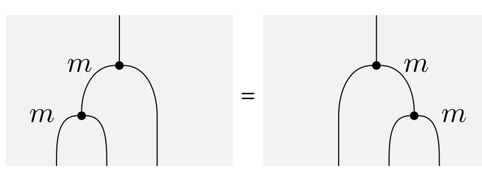
Definición 7. Un **PRO**, o **categoría de (pro)ductos monoidales**, es una categoría monoidal monocroma. Alternativamente, una categoría monoidal es un PRO coloreado.

Ejemplo 8. Estas categorías pueden usarse para describir teorías algebraicas internas a nuestras teorías. ¿Qué quiere decir esto? Nosotros hemos partido de una noción primitiva de monoide y categoría, pero una vez que tenemos la categoría monoidal de conjuntos, podríamos intentar definir un monoide *en la categoría de conjuntos.* Este monoide no será un diagrama sino una operación de multiplicación (con dos entradas y una salida) y una unidad (con una salida y ninguna entrada) *dentro de la categoría.* Un monoide en una categoría monoidal viene determinado por los siguientes morfismos.



Cumpliendo los axiomas de un monoide, que son las siguientes ecuaciones. La primera se llama **unitalidad** y comprueba que la unidad es neutra respecto al producto.

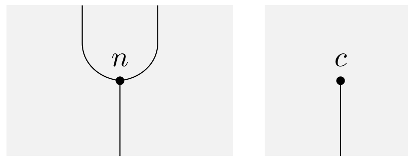
La segunda se llama **asociatividad** y nos permite aplicar las multiplicaciones en cualquier orden.



Los números complejos con la multiplicación, las cadenas de caracteres con la concatenación o los naturales con la suma son ejemplos clásicos de monoide.

Dada una teoría, consideramos su teoría **dual** como aquella que resulta de invertir la dirección de los diagramas.

Definición 9. Un **comonoide** es el dual de un monoide. Esto quiere decir que tendrá una *counidad* y una *comultiplicación*.



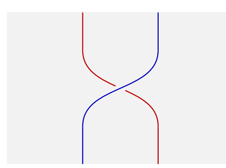
Satisfaciendo axiomas de **counitalidad** y **coasociatividad**.

¿Por qué no solemos hablar de comonoides cuando estudiamos álgebra? Nuestra notación es siempre unidimensional, y eso hace un poco difícil hablar de operaciones con más de una salida; además de esta limitación, esencialmente existe un único comonoide en la categoría de conjuntos. El único comonoide de la categoría de conjuntos es el comonoide de **copia y borrado**, donde la multiplicación es la diagonal $A \to A \times A$ y el borrado es la única función $A \to 1$. Nunca hablamos de este comonoide, pero aparece continuamente cuando hacemos álgebra: lo que hacemos para evitar hablar de él es repetir nombres de variables, por ejemplo, la función $x \mapsto x + x$ es realmente la composición de la suma con la copia.

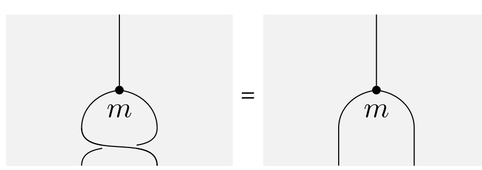
Trenzados

Otra condición que suele considerarse para monoides es la **conmutatividad**. Para ella, necesitamos un poco más de estructura en nuestra categoría monoidal.

Definición 10. Una **categoría monoidal trenzada** es aquella en la que las cuerdas pueden trenzarse. Es decir, existe un morfismo, llamado *trenzado*, que escribimos como en el siguiente diagrama.



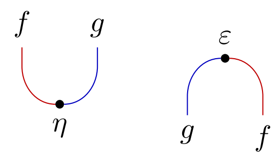
Ejemplo 11. En una categoría monoidal, un monoide es **conmutativo** si el componer con una trenza no altera su multiplicación. La **coconmutatividad** se define de forma análoga.



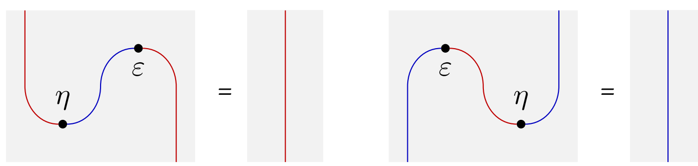
Dualidades y espacios vectoriales

Antes de dar el siguiente paso, vamos a considerar dualidades y vamos a trabajar con uno de los ejemplos más interesantes de categoría monoidal: los espacios vectoriales.

Definición 12. Una **dualidad** entre dos cuerdas $f \dashv g$ viene dada por una forma de crearlas desde la nada y una forma de fundirlas. ¡Nótese que la definición no es simétrica! Si $f \dashv g$, no necesariamente se tiene $g \dashv f$.

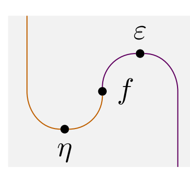


Satisfaciendo las siguientes **ecuaciones de zig-zag**.



Ejemplo 13. Consideramos la categoría mononidal de los espacios vectoriales finitos, fijada una base ortonormal.[2] Los morfismos son funciones lineales, y los espacios vectoriales en sí forman un monoide con el producto tensor de espacios vectoriales. Pero además, cada espacio vectorial es dual consigo mismo, $V \dashv V^* \cong V$, gracias al producto escalar, que es una función $\varepsilon\colon V \otimes V \to V$, y a la diagonal de la base $\eta\colon I \to V \otimes V$, que está definida por el elemento $\sum(e_i \otimes e_i)$.

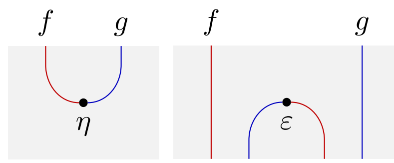
Con todo esto, la **traspuesta** de una función lineal $f\colon V \to W$ es una función $f\colon W \to V$ definida como sigue. Nótese que aquí η y ε se refieren a distintas dualidades, cada una de uno de los espacios es dual consigo mismo.



[2]Sobre los reales, por ejemplo. Pero todo lo que hagamos funciona para cualquier cuerpo en general e incluso para módulos sobre un semianillo arbitrario. Si tomamos por ejemplo el semianillo de los booleanos, obtenemos la categoría de relaciones $\mathbf{Rel}$.

Usando trenzados y moviendo el diagrama, podemos demostrar que la traspuesta de la traspuesta es de nuevo la función original.

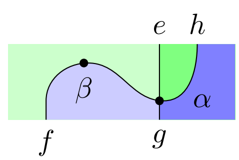
Ejemplo 14. Toda dualidad $f \dashv g$ da lugar a un monoide en el producto tensorial $f \otimes g$. Su multiplicación y su unidad son las siguientes. Los axiomas se siguen de las ecuaciones de zig-zag.



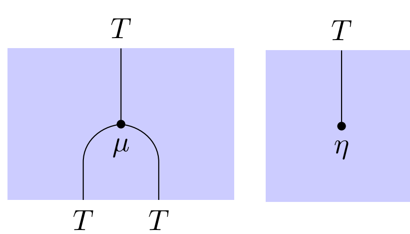
Bicategorías

El siguiente paso es colorear las regiones. Esto limitará qué cuerdas podemos colocar al lado de otras cuerdas.

Definición 15. Una **bicategoría** es una categoría monoidal coloreada en las regiones. Alternativamente, una categoría monoidal es una bicategoría monocroma.



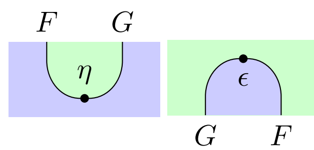
Ejemplo 16. La bicategoría **Cat** tiene regiones dadas por categorías. Una cuerda entre dos regiones es un funtor, y los funtores forman una categoría con la composición de funtores. Un nodo viene dado por una transformación natural, que convierte la composición de varios funtores en otra composición de funtores. Por ejemplo, una **mónada** resulta de dibujar un monoide en esta categoría.



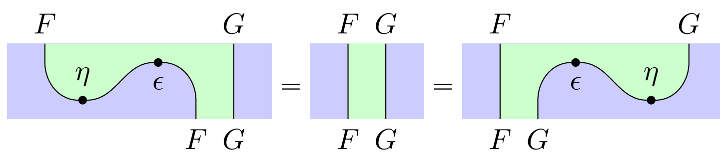
En otras palabras, una mónada viene determinada por una transformación natural llamada *multiplicación* $\mu\colon T \circ T \Rightarrow T$ y una transformación natural llamada *unidad* $\eta\colon 1 \Rightarrow T$, donde 1 es el funtor identidad. Esto son dos familias de funciones indexadas sobre los objetos de una categoría $c \in \mathbf{C}$, donde la multiplicación es $\mu_c\colon T(T(c)) \to T(c)$ y la unidad es $\eta_c\colon c \to T(c)$. Cumplirán además los axiomas de un monoide.

Ejemplo 17. Una dualidad en la bicategoría **Cat** se llama **adjunción**. Por el Ejemplo 14, sabemos entonces que toda adjunción $F \dashv G$ da lugar a una mónada $G \circ F$.

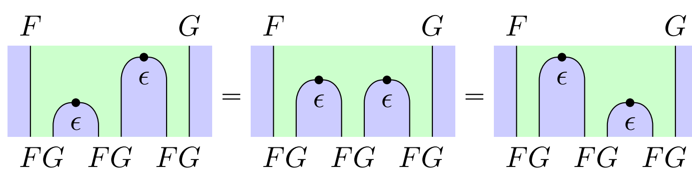
Es decir, estos diagramas de [Mar14] representan una adjunción.



La unitalidad de la mónada se demuestra gracias al zig-zag.



Y la asociatividad gracias a las isotopías.



El ejemplo común de una situación como esta lo dan el funtor que crea la mónada libre sobre un conjunto $F\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Mon}$ y el funtor de olvido $G\colon \mathbf{Mon} \to \mathbf{Set}$. La mónada $G \circ F$ se llama en programación funcional la **mónada Lista** (*List monad*).

De forma dual, podemos definir comónadas y demostrar que toda adjunción $F \dashv G$ da lugar a una comónada $F \circ G$.

Conclusión

Tenemos la siguiente tabla y nada nos impide continuar hacia más dimensiones y más colores. Calcular manipulaciones de diagramas en dimensiones arbitrarias es lo que hace el asistente homotopy.io [VHL19] de Vicary-Hu-Liss.

Estructuras	0 dimensiones	1 dimensión	2 dimensiones
Blanco y negro	Conjunto	Monoide	PRO
Cuerdas coloreadas		Categoría	Categoría monoidal
Regiones coloreadas			Bicategoría

Una estructura tricolor, por ejemplo, nos permite llegar a tricategorías y bicategorías monoidales.

References

[HVR19] Chris Heunen, Jamie Vicary, and David Reutter. Categorical Quantum Mechanics: an introduction. *Department of Computer Science*, Hilary Term 2019.

[Mar14] Daniel Marsden. Category theory using string diagrams. *arXiv preprint arXiv:1401.7220*, 2014.

[VHL19] Jamie Vicary, Nick Hu, and Jo Liss. homotopy-io/webclient: First release, March 2019.