Yoneda lemma

Mario Román

<2018-02-17 Sat 12:00>

Lema de Yoneda

Sea $G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathtt{Set}$ un funtor covariante. Fijado $A \in obj(\mathcal{C})$, tenemos una biyección entre las transformaciones naturales del funtor $Hom(A,-)$ a G y los elementos del conjunto $G(A)$:

$$y : Nat(Hom_{\mathcal{C}}(A,-),G) \longrightarrow G(A)$$

Que viene dada por $y(\tau) = \tau_A(1_A)$, la imagen de la identidad por la transformación natural.

Demostración

Dado cualquier p crearemos la única transformación natural que cumple $\eta_A(1_A) = p$. Por definición de transformación natural, sabemos que debe cumplir el siguiente diagrama conmutativo:

https://raw.githubusercontent.com/mroman42/mroman42.github.io/images/yonedaproof1.jpeg

Lo que deja determinado a cualquier $\eta_B(f)$, y por tanto a toda la función:

$$\eta_B(f) = \eta_B(f \circ id) = Gf(\eta_A(id_A)) = Gf(p)$$

Nos falta comprobar que la función así construida es de hecho una transformación natural. Es decir, que cumple el siguiente diagrama conmutativo:

https://raw.githubusercontent.com/mroman42/mroman42.github.io/images/yonedaproof2.jpeg

Y de hecho, dado cualquier elemento $f \in Hom(A,B)$ tenemos:

$$Gg \circ \eta(f) = Gg \circ Gf(p) = G(g \circ f)(p) = \eta(g \circ f)$$

Lema de Yoneda (caso contravariante)

Si aplicamos Yoneda sobre $\mathcal{C}^{op}$, dado $G : \mathcal{C} \longrightarrow$ `Set` **contravariante** y fijado $A \in obj(\mathcal{C})$; existe una biyección entre las transformaciones naturales del funtor $Hom(-, A)$ a G y los elementos del conjunto $G(A)$:

$$y : Nat(Hom_{\mathcal{C}}(-, A), G) \longrightarrow G(A)$$

Que viene de nuevo dada por $y(\tau) = \tau_A(1_A)$.

Referencias y enlaces

[1] J. Rotman, An Introduction to Homological Algebra.
[2] Bartosz Milewski's Programming Cafe. The Yoneda Lemma
[3] The Catsters. Representables and Yoneda 3