Superficies de Riemann y algunos teoremas globales de superficies en $\mathbb{R}^3$

David Moya Hinojosa

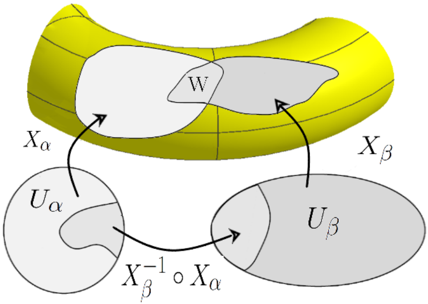
20 de junio de 2018

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Definición

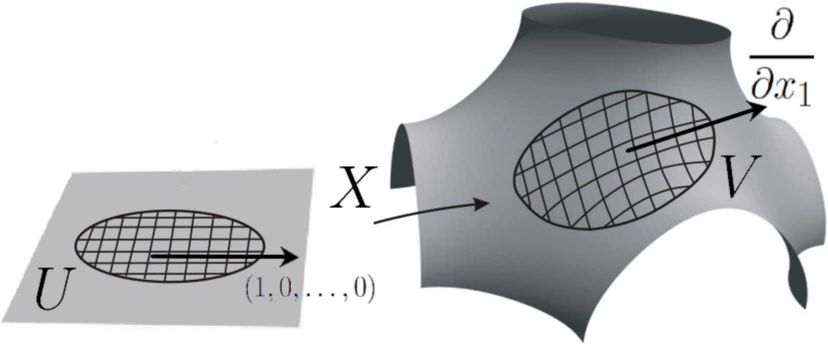
Una variedad diferenciable de dimensión n es un conjunto M dotado de una familia de aplicaciones inyectivas $X_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$, con U_α abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $\{\alpha\}$ un conjunto de índices de forma que se verifiquen:

1. $\bigcup_\alpha X_\alpha(U_\alpha) = M$.
2. Para dos índices α, β que verifiquen que $\emptyset \neq W = X_\alpha(U_\alpha) \cap X_\beta(U_\beta)$ la aplicación $X_\beta^{-1} \circ X_\alpha : X_\alpha^{-1}(W) \longrightarrow X_\beta^{-1}(W)$ es diferenciable.
3. El conjunto $\{(U_\alpha, X_\alpha)\}$ es maximal respecto a las condiciones anteriores.



- $u_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: proyección j-ésima
- X parametrización, $q = X^{-1}(p)$.
- $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ curva diferenciable, $\alpha(0) = p$
- $x_j = u_j \circ X^{-1}$
- $f \in C^\infty(M)$
- $\beta(t) = X^{-1}(\alpha(t)) = (b_1(t), \cdots, b_n(t))$

$$\alpha'(0)(f) := \frac{d}{dt} f(\alpha(t))\Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n} b_j'(0) \frac{\partial (f \circ X)}{\partial u_j}(q).$$



Variedades Riemannianas

Definición

Una métrica riemanniana en una variedad, es una correspondencia que asocia a cada punto $p \in M$ un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ sobre el espacio tangente en dicho punto de forma que las funciones $g_{ij}(q) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right\rangle_p$ sean funciones diferenciables en $U \subset \mathbb{R}^n$, con $X : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ y $q = X^{-1}(p)$.

Una variedad equipada con una métrica es a lo que se llamará **variedad riemanniana**.

Definición

Una conexión afín, a la que notaremos con ∇, en una variedad diferenciable es una aplicación

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

que denotamos como $(X, Y) \xmapsto{\nabla} \nabla_X Y$ y que cumple:

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
2. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$, donde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M), \quad f, g \in C^\infty(M)$.

Si $X \in \mathfrak{X}(M) \Rightarrow X = \sum_{j=1}^{n} f_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad f_j \in C^\infty(M), \quad 1 \leq j \leq n,.$

Cuando además se verifican:

- $X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \quad X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M).$
- $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y], \quad \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M).$

Llamaremos a ∇ la conexión de Levi-Civita.

Cuando además se verifican:

- $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$
- $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$

llamaremos a ∇ la conexión de Levi-Civita.

La curvatura R es una correspondencia que asocia a cada par de $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ la aplicación $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \quad Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Definición

Curvatura Seccional: Dado $p \in M$, un subespacio vectorial $\sigma \subset T_pM$ y $x, y \in \sigma$ definimos:

$$K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)x, y\rangle}{|x \wedge y|^2}.$$

No depende de los $x, y \in \sigma$ elegidos.

Inmersiones Isométricas

Definición

Sea $f : M \longrightarrow \overline{M}$ una inmersión diferenciable (es decir una aplicación diferenciable cuya diferencial es inyectiva), donde además se cumple $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle df_p(v_1), df_p(v_2) \rangle$ decimos entonces que es una inmersión isométrica, $v_1, v_2 \in T_pM$

De esta manera vamos a poder identificar $v \in T_pM$ con $df_p(v) \in T_p\overline{M}$ y escribir

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp$$

La métrica de $\overline{M}$ también se hereda a M con

$$\nabla_X Y = (\nabla_{\overline{X}} \overline{Y})^T,$$

$X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ con extensiones a $\overline{M}$: $\overline{X}, \overline{Y}$.

Ecuación de Gauss y Ecuación de Codazzi

Definiendo $B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$ tenemos que el operador $S_\eta : T_pM \to T_pM$, $\eta \in T_pM^\perp$ tal que

$$\langle S_\eta(x), y\rangle = \langle B(x,y), \eta\rangle, \quad x, y \in T_pM$$

es autoadjunto y juega el papel análogo al endomorfismo de Weingarten.

Teorema

Ecuación de Gauss para hipersuperficies:

$$K(e_i, e_j) - \overline{K}(e_i, e_j) = \lambda_i\lambda_j.$$

donde $\{e_1, \dots, e_n\}$ *es una base donde* S_η *diagonaliza* ($S_\eta(e_i) = \lambda_i e_i$)
Ecuación de Codazzi para hipersuperficies en $\overline{M}$ *de curvatura seccional constante:*

$$\nabla_X(S_\eta(Y)) - \nabla_Y(S_\eta(X)) = S_\eta([X,Y]).$$

Definición

Una superficie de Riemann, es un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$, dotado de una familia de aplicaciones inyectivas $X_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{C} \to S$, U_α abiertos de $\mathbb{C}$ y $\{\alpha\}$ un conjunto de índices de forma que se verifiquen:

1. $\bigcup_\alpha X_\alpha(U_\alpha) = S$
2. Para dos índices α, β que verifiquen que $\emptyset \neq W = X_\alpha(U_\alpha) \cap X_\beta(U_\beta)$ la aplicación $X_\beta^{-1} \circ X_\alpha : X_\alpha^{-1}(W) \longrightarrow X_\beta^{-1}(W)$ es holomorfa en su dominio de definición.
3. El conjunto $\{(U_\alpha, X_\alpha)\}$ es maximal respecto a las condiciones anteriores.

Definición

Dada (S, g) una superficie riemanniana, una parametrización de la misma $X : O \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ con parámetros que nombramos con (u, v) se dirá isoterma o conforme si verifica que $E = G, \quad F = 0$, donde $E = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle$, $F = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle$ y $G = \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle$.

Definición

Dada (S, g) una superficie riemanniana, una parametrización de la misma $X : O \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ con parámetros que nombramos con (u, v) se dirá isoterma o conforme si verifica que $E = G, \quad F = 0$, donde $E = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle$, $F = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle$ y $G = \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle$.

Proposición

Sea (S, g) una superficie riemanniana. Para cada $p \in S$ existe una parametrización isoterma conteniendo a p.

Proposición

Sea (S, g) *una superficie riemanniana con* $p \in S$ *y* (x, y) *parámetros isotermos asociados a una parametrización* X *de un entorno de* p*. En esta situación equivalen:*

- *Los parámetros* (u, v) *asociados a la parametrización* Y *de un entorno de* p *son isotermos, con la misma orientación que* (x, y)*.*
- *La función* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *dada por*

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

  es holomorfa.

Corolario

Toda superficie riemanniana orientable (S, g) *es una superficie de Riemann.*

Definición

Una superficie de Riemann Σ se dirá conformemente equivalente a otra superficie de Riemann S si se verifica que entre ellas se puede establecer una aplicación holomorfa y biyectiva

Definición

Una superficie de Riemann Σ se dirá conformemente equivalente a otra superficie de Riemann S si se verifica que entre ellas se puede establecer una aplicación holomorfa y biyectiva

Teorema

Sea Σ una superficie de Riemann simplemente conexa, entonces se tiene que Σ es conformemente equivalente a $\mathbb{C}$, a $\mathbb{D}$, o a $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, donde $\mathbb{D}$ denota al disco unidad y $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ a la esfera de Riemann.

$$\begin{cases} \Sigma \approx \mathbb{D} \\ \Sigma \approx \mathbb{C} \\ \Sigma \approx \mathbb{C} \cup \{\infty\} \end{cases}$$

Representación de Weierstrass

Teorema

Toda inmersión minimal $X : M \to \mathbb{R}^3$*, se puede recuperar como*

$$X = Re \int \Phi,$$

donde $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ *están definidas por*

$$\phi_1 = \frac{1}{2} f(1 - g^2), \quad \phi_2 = \frac{i}{2} f(1 + g^2), \quad \phi_3 = fg,$$

para ciertas funciones f *holomorfa y* g *meromorfa definidas sobre* M*, que verifican que si* ξ_0 *es un polo de* g *de orden* m*, entonces* ξ_0 *es un cero de* f *de orden al menos* $2m$*. El recíproco es cierto.*

Además g es la composición de la aplicación de Gauss de la superficie mínima con la proyección estereográfica.

Ejemplos

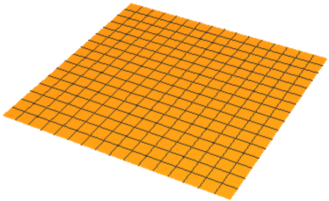
El plano. Tomemos $\mathbb{C} = M$ como dominio de definición y los datos de Weierstrass $g = 0$, $f = 1$. Tenemos que

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \quad \phi_2 = \frac{i}{2} \quad \phi_3 = 0$$

de donde deducimos que

$$X(z) = \left(\frac{Re(z)}{2}, -\frac{Im(z)}{2}, 0 \right).$$

Que es la ecuación de un plano.



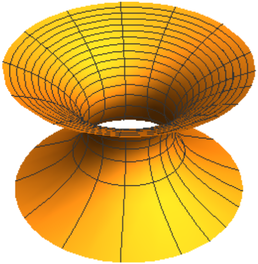
Ejemplos

La catenoide. Tomando $\mathbb{C}^* = M$ dominio de definición y los datos de Weiestrass $g(z) = z$, $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$ tenemos:

$$\phi_1 = \frac{1}{2z^2}(1 - z^2) \quad \phi_2 = \frac{i}{2z^2}(1 + z^2) \quad \phi_3 = \frac{1}{z}.$$

Conseguimos entonces

$$X(z) = \left(-\frac{Re(z)}{2}\left(1 + \frac{1}{|z|^2}\right), -\frac{Im(z)}{2}\left(1 + \frac{1}{|z|^2}\right), \frac{1}{2}\log(|z|^2) \right).$$



Teorema de Bernstein

Proposición

Una superficie S dada como grafo de una función diferenciable f, es decir, $S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \Omega\}$, con Ω dominio de $\mathbb{R}^2$ es mínima si y solo si f verifica:

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0.$$

Teorema de Bernstein

Los planos son las únicas superficies en $\mathbb{R}^3$ que son mínimas y a la vez grafos enteros para una cierta $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable.

Teorema de Hopf

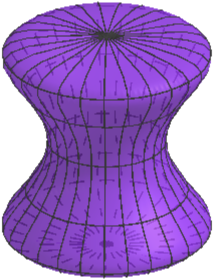
Teorema de Hopf

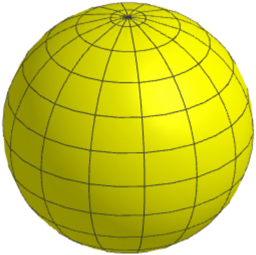
Teorema de Hopf

Sea S una esfera topológica y consideremos una inmersión de ella en $\mathbb{R}^3$, $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$, que tenga curvatura media constante. Tendremos entonces que $f(S)$ es una esfera euclídea.

Teorema de Hopf

Sea S una esfera topológica y consideremos una inmersión de ella en $\mathbb{R}^3$, $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$, que tenga curvatura media constante. Tendremos entonces que $f(S)$ es una esfera euclídea.





Teorema de Hopf

Teorema de Hopf

Sea S una esfera topológica y consideremos una inmersión de ella en $\mathbb{R}^3$, $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$, que tenga curvatura media constante. Tendremos entonces que $f(S)$ es una esfera euclídea.

Lema

Cualquier 2-forma holomorfa de la forma $\Omega = Qdz^2$ sobre la esfera de Riemann es idénticamente nula.

Teorema de Hopf

Teorema de Hopf

Sea S una esfera topológica y consideremos una inmersión de ella en $\mathbb{R}^3$, $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$, que tenga curvatura media constante. Tendremos entonces que $f(S)$ es una esfera euclídea.

Lema

Cualquier 2-forma holomorfa de la forma $\Omega = Qdz^2$ sobre la esfera de Riemann es idénticamente nula.

Lema

La diferencial de Hopf de una superficie es holomorfa si y solo si H es constante.

Teorema de Hopf

Teorema de Hopf

Sea S una esfera topológica y consideremos una inmersión de ella en $\mathbb{R}^3$, $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$, que tenga curvatura media constante. Tendremos entonces que $f(S)$ es una esfera euclídea.

Lema

Cualquier 2-forma holomorfa de la forma $\Omega = Qdz^2$ sobre la esfera de Riemann es idénticamente nula.

Lema

La diferencial de Hopf de una superficie es holomorfa si y solo si H es constante.

$$I = 2\lambda|dz|^2, \qquad II = Qdz^2 + 2r|dz|^2 + \overline{Q}d\overline{z}^2$$

Teorema de Liebmann

Teorema de Liebmann

Teorema de Liebmann

Sea S una superficie completa con curvatura de Gauss constante y positiva. Se tiene que toda inmersión isométrica $\phi : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tiene todos sus puntos umbilicales, es decir se trata de una esfera métrica.

Teorema de Liebmann

Teorema de Liebmann

Sea S una superficie completa con curvatura de Gauss constante y positiva. Se tiene que toda inmersión isométrica $\phi : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tiene todos sus puntos umbilicales, es decir se trata de una esfera métrica.

Teorema

Sea S una superficie y $\phi : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión. Tomando parámetros conformes para la segunda forma fundamental, podemos escribir la primera y segunda forma fundamental como $I = pdz^2 + 2r|dz|^2 + \overline{p}d\overline{z}^2$, $II = 2\rho|dz|^2$, y en este contexto se tiene que pdz^2 es holomorfa si y solo si la curvatura de Gauss es constante.