INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus
Pelotas

COORDENADORIA
DE MATEMÁTICA

Cálculo I

Cássio Pazinatto

Unidade I

Funções

Conjuntos Numéricos e Intervalos

Conjuntos Numéricos

- Conjunto dos números **naturais**

$$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots\} \quad \textbf{ou} \quad \mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots\}$$

Vamos assumir que $0 \in \mathbb{N}$!

- Conjunto dos números **inteiros**

$$\mathbb{Z} = \{\dots,\ -5,\ -5,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots\}$$

- Conjunto dos números **racionais**

$$\mathbb{Q} = \left\{x \middle| x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

- Conjunto dos números **reais**

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{números irracionais}\}$$

Desigualdades, Intervalos e Valor Absoluto

Desiguadades e Intervalos

- Intervalo **fechado**

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$

- Intervalo **aberto**

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

- Intervalo **aberto à esquerda** e **fechado à direita**

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$$

- Intervalo **fechado à esquerda** e **aberto à direita**

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$$

- Como intervalos são conjuntos, temos também as clássicas operações de união ($A \cup B$), interseção ($A \cap B$) e diferença ($A - B$)

Valor Absoluto

- O valor absoluto de um número real x é definido pela expressão

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

- Geometricamente, representa a distância de x à origem ($x = 0$)
- Importante reconhecer algumas desigualdades que envolvem o valor absoluto

$$|x - a| < K \Leftrightarrow a - K < x < a + K$$

$$|x - a| \leq K \Leftrightarrow a - K \leq x \leq a + K$$
$$|x - a| > K \Leftrightarrow x < a - K \text{ ou } x > a + K$$
$$|x - a| \geq K \Leftrightarrow x \geq a - K \text{ ou } x \geq a + K$$

Conceito de Função

Exemplo 1. Situação Problema

Uma companhia de abastecimento de água cobra uma taxa fixa mensal de R$ 20,00, além de R$ 5,00 por cada metro cúbico (m^3) de água consumida.

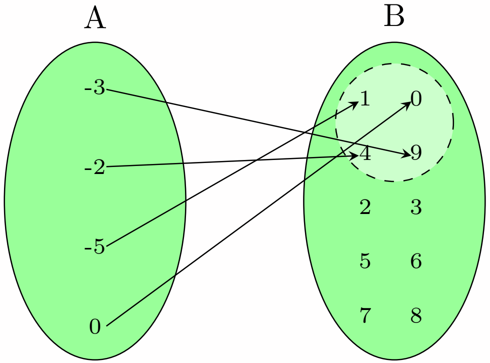
1. Determine o valor da conta mensal de água para um consumo de 4 m^3 de água no mês.
2. Determine uma relação entre o valor da conta mensal de água em e o consumo.
3. Apresente uma representação gráfica para a situação problema.

Definição 1. Função Real de Variável Real

Dados dois conjuntos $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ não vazios, uma função f de A em B é uma *relação* que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$.

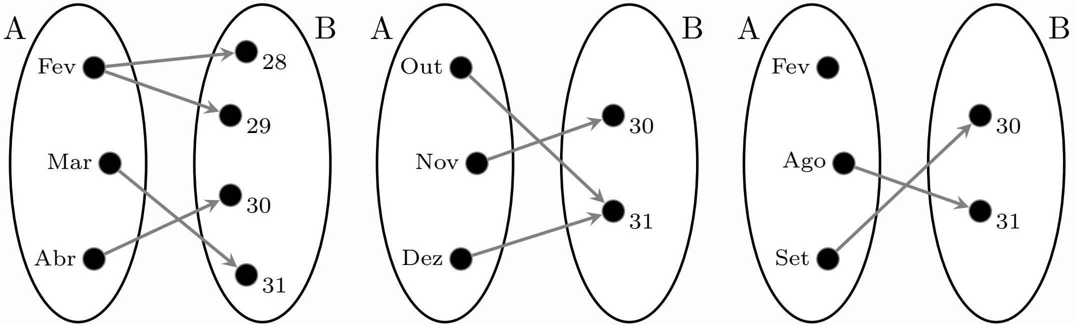
Além disso

- Lê-se:
  "*f é uma função de A em B*"
- Denota-se $f : A \to B$
- A é o domínio de f
- $x \in A$ é a variável independente
- B é o contradomínio de f
- $y \in B$ é a variável dependente, $y = f(x)$
- $Im \subseteq B$ é formado pelos elementos que possuem correspondente no domínio



Exemplo 2.

Determine qual ou quais das relações a seguir representam uma função dos meses no número de dias:



Definição 2.

Valor Numérico de uma Função Seja $f : A \to B$ uma função. O valor numérico de f em um ponto $x \in A$ é o número $y \in B$ tal que $y = f(x)$.

Observação

- Também é chamado de imagem de x por f.
- Isto é, y é a imagem obtida ao aplicar a função f em x

Exemplo 3.

Considere a função $f(x) = x^2 - 4$ definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Determine:

1. O valor da f em $x = 4$
2. A imagem do ponto $x = -6$ pela função
3. O número $f(3)$

Definição 3. Zeros de uma Função

Seja $f : A \to B$ uma função. Os zeros da f são os valores de $x \in A$ para os quais $f(x) = 0$.

Obervação

- Geometricamente, cada zero é um ponto de interseção entre o eixo Ox e o gráfico da função.

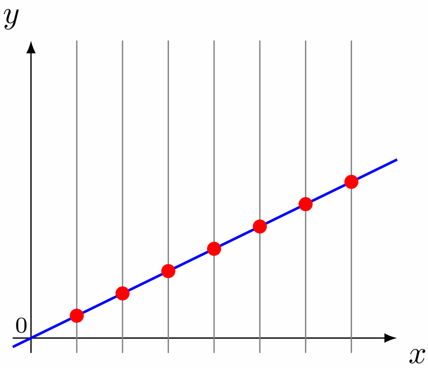
Exemplo 4.

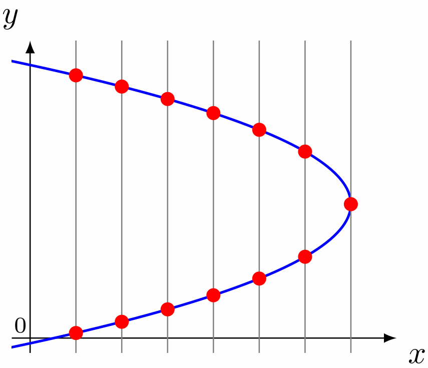
Considere a função $f(x) = x^2 - 4$ definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Determine:

1. Os valores de x tais que $f(x) = 12$
2. Os zeros dessa função

Teorema 1. Teste da Reta Vertical

Seja $f : A \to B$ uma função. Dado $x \in A$, a reta vertical que contém o ponto x deve cortar o gráfico da função uma e apenas uma vez.





Teorema 2. Domínio via Gráfico

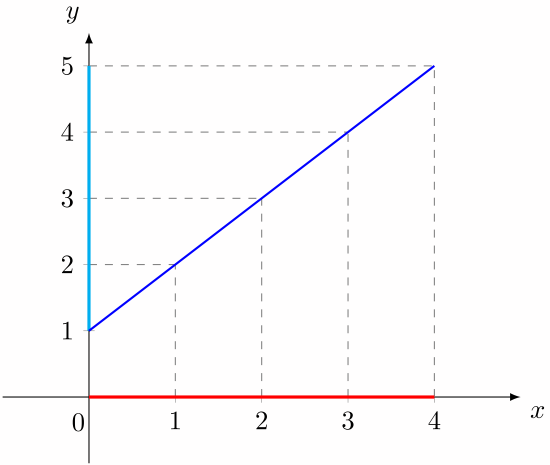
Seja $f : A \to B$ uma função. O domínio da função f é o conjunto representado pela projeção do seu gráfico sobre eixo das abscissas (eixo Ox).

Teorema 3. Imagem via Gráfico

Seja $f : A \to B$ uma função. A imagem da função f é o conjunto representado pela projeção do seu gráfico sobre eixo das ordenadas (eixo Oy).

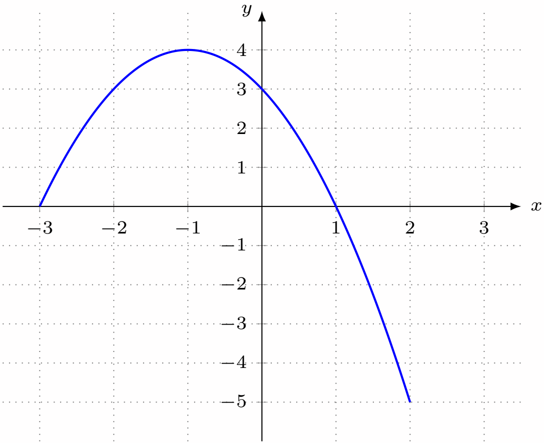
Exemplo 5.
Sobre a função f cujo gráfico é exibido ao lado, determine:

1. O domínio da função f
2. A imagem da função f



Exemplo 6.

Considere o gráfico a seguir de uma função $y = g(x)$ para fazer o que é pedido.

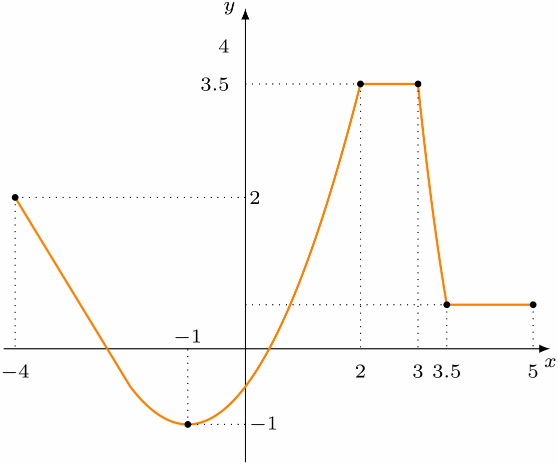


1. O domínio da função g
2. A imagem da função g
3. Quais são os valores de x tais que $g(x) = 3$?
4. Quais são os zeros dessa função?

Definição 3. Estudo da Monotonia I

Seja f uma função real, $I \subseteq \mathrm{D}(f)$ um intervalo e $x_1, x_2 \in I$. Dizemos que:

1. f é **crescente** em I se $f(x_1) \leq f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$;
2. f é **estritamente crescente** em I se $f(x_1) < f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$.



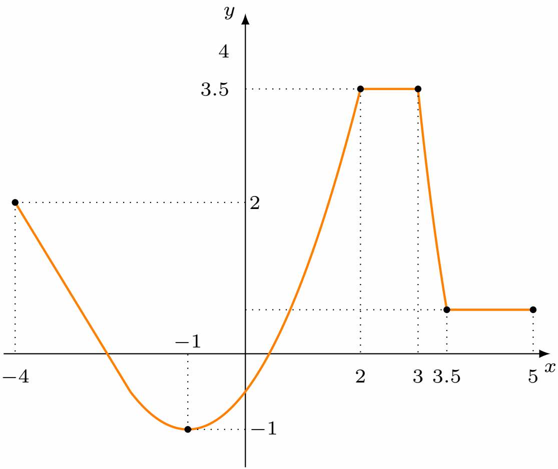
- Se f é **crescente** em I, os valores de seu gráfico **nunca decrescem** a medida que este é percorrido da esquerda para a direita em I;
- Se f é **estritamente crescente** em I, os valores de seu gráfico **sempre crescem** a medida que este é percorrido da esquerda para a direita em I.

Definição 4. Estudo da Monotonia II

Seja f uma função real, $I \subseteq \mathrm{D}(f)$ um intervalo e $x_1, x_2 \in I$. Dizemos que:

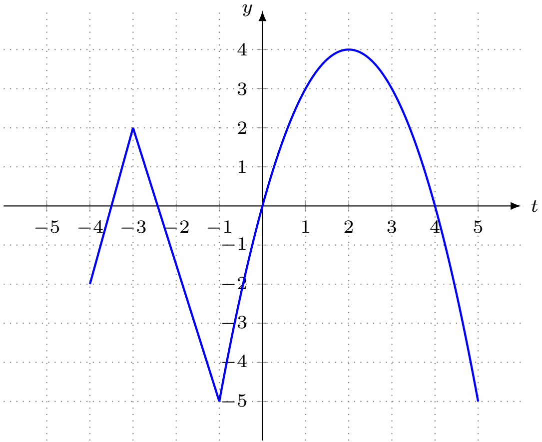
1. f é **decrescente** em I se $f(x_1) \geq f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$;
2. f é **estritamente decrescente** em I se $f(x_1) > f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$.

- Se f é **decrescente** em I, os valores de seu gráfico **nunca crescem** a medida que este é percorrido da esquerda para a direita em I;
- Se f é **estritamente decrescente** em I, os valores de seu gráfico **sempre decrescem** a medida que este é percorrido da esquerda para a direita em I.



Exemplo 7.

Considere o gráfico a seguir de uma função $y = h(t)$ para fazer o que é pedido.



1. Confirme que é o gráfico de uma função
2. O domínio da função h
3. A imagem da função h
4. $h(-2), h(2), h(3), h(-5), h(4)$
5. Quais os valores de t tais que $h(t) = 3$?
6. Os intervalos de crescimento/decrescimento?
7. Valores de t para os quais $h(t) > 0$
8. Valores de t para os quais $h(t) < 0$

Definição 5. Domínio Natural

Seja f uma função real. Chamados de **domínio natural** o conjunto máximo de valores para os quais a função é definida.

Exemplo 8.

Determine o domínio natural das funções a seguir:

1. $f(x) = x^2$
2. $g(x) = \dfrac{1}{x}$
3. $h(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$
4. $p(x) = \sqrt{x}$

Função Afim

Definição 6. Função Afim

Dados a e b números reais, chama-se de **função afim** qualquer função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + b$.

Casos especiais

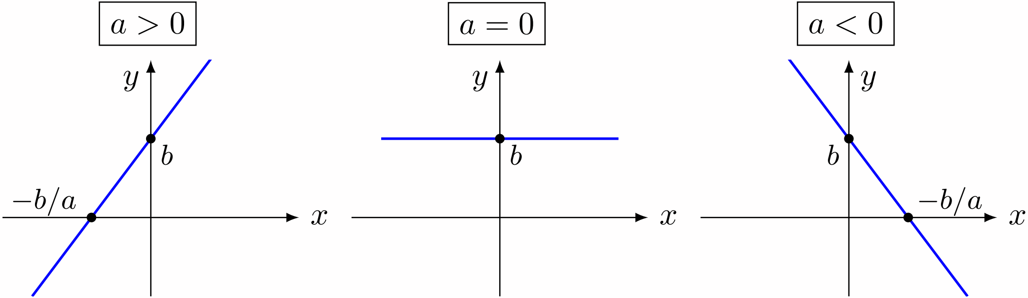
- O número a é chamado de **coeficiente angular**
- O número b é chamado de coeficiente linear ou termo independente
- Se $a = 0$, então $f(x) = b$ e temos a chamada **função constante**.
- Se $a \neq 0$, temos a função polinomial do primeiro grau
- Se $b = 0$, temos a **função linear**
- Se $a = 1$ e $b = 0$, temos a **função identidade**

Gráfico: é uma reta, basta conhecer dois pontos para conhecer todos.
Exemplo: o problema da conta de água.

Teorema 4. Monotonia da Função Afim

Seja $f(x) = ax + b$ uma função afim. Então f é:

1. monótona crescente para todo $x \in \mathbb{R}$ quando $a > 0$;
2. monótona constante para todo $x \in \mathbb{R}$ quando $a = 0$;
3. monótona decrescente para todo $x \in \mathbb{R}$ quando $a < 0$;



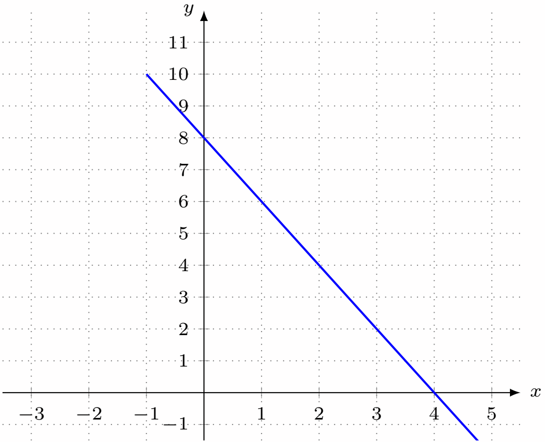
Exemplo 9.

Considere a função $f(x) = 2x - 4$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Determine:

1. $f(7)$ e $f(-4)$
2. O valor de x tal que $f(x) = 28$.
3. O(s) zero(s) da função.
4. O esboço do gráfico.
5. x tais que $f(x) > 0$
6. x tais que $f(x) < 0$

Exemplo 10.

Determine a lei da função representada no gráfico abaixo.



Função Quadrática

Definição 7. Função Quadrática

Chamamos de **função polinomial de 2º grau** ou **função quadrática** qualquer função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

- Conforme a definição, $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$, no entanto, nas aplicações, é comum considerar *domínios menores*.

Exemplo 11.

1. $y = 5x^2 + 3x - 3$
2. $f(x) = -x^2 + 7x$
3. $y = x^2 - 9$
4. $h(t) = -t^2 + 5t - 8$

Gráfico da Função Quadrática

- Considere a função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Gráfico da Função Quadrática

- Considere a função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- O gráfico é uma **parábola** com *eixo de simetria* paralelo ao eixo Oy;

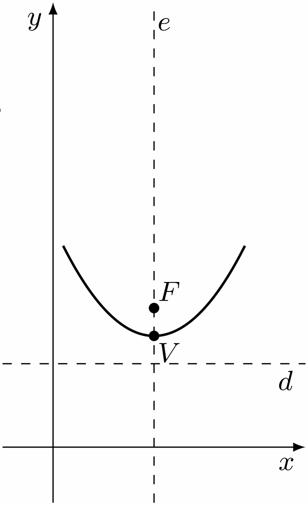


Gráfico da Função Quadrática

- Considere a função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- O gráfico é uma **parábola** com *eixo de simetria* paralelo ao eixo Oy;
- A *concavidade* da parábola é voltada para:
  - **cima** quando $a > 0$;

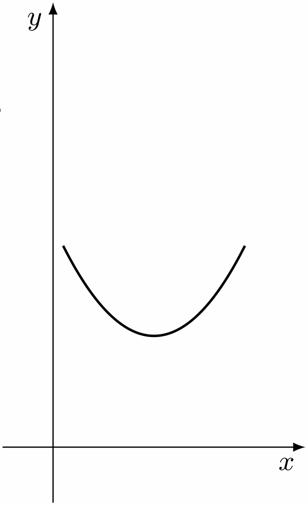


Gráfico da Função Quadrática

- Considere a função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- O gráfico é uma **parábola** com *eixo de simetria* paralelo ao eixo Oy;
- A *concavidade* da parábola é voltada para:
  - **cima** quando $a > 0$;
  - **baixo** quando $a < 0$.

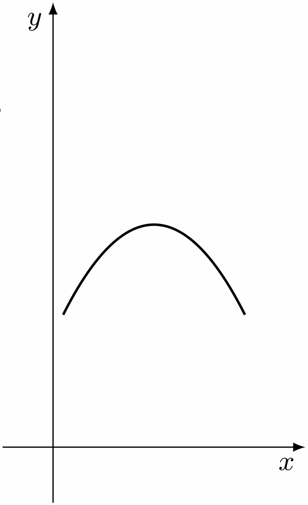


Gráfico da Função Quadrática

- Considere a função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- O gráfico é uma **parábola** com *eixo de simetria* paralelo ao eixo Oy;
- A *concavidade* da parábola é voltada para:
  - **cima** quando $a > 0$;
  - **baixo** quando $a < 0$.
- As coordenadas do *vértice* da parábola são dadas por

$$V = (x_v, y_v) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

com $\Delta = b^2 - 4ac$, o famoso discriminante;

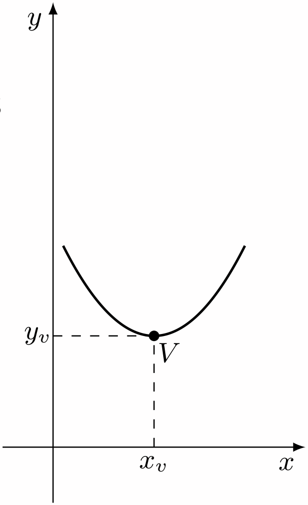


Gráfico da Função Quadrática

- Considere a função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- O gráfico é uma **parábola** com *eixo de simetria* paralelo ao eixo Oy;
- A *concavidade* da parábola é voltada para:
  - **cima** quando $a > 0$;
  - **baixo** quando $a < 0$.
- As coordenadas do *vértice* da parábola são dadas por

$$V = (x_v, y_v) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

com $\Delta = b^2 - 4ac$, o famoso discriminante;

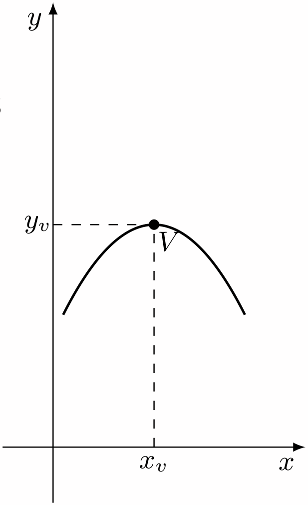


Gráfico da Função Quadrática

- Considere a função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- O gráfico é uma **parábola** com *eixo de simetria* paralelo ao eixo Oy;
- A *concavidade* da parábola é voltada para:
  - **cima** quando $a > 0$;
  - **baixo** quando $a < 0$.
- As coordenadas do *vértice* da parábola são dadas por

$$V = (x_v, y_v) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

  com $\Delta = b^2 - 4ac$, o famoso discriminante;
- O gráfico *corta* o eixo Oy no ponto $C(0, c)$;

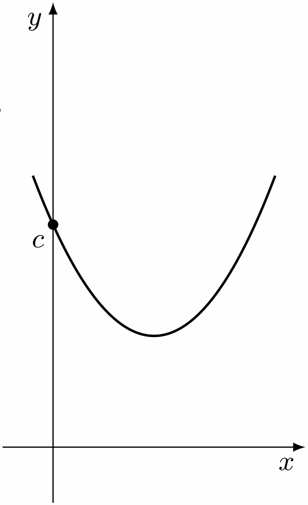


Gráfico da Função Quadrática

- Considere a função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- O gráfico é uma **parábola** com *eixo de simetria* paralelo ao eixo Oy;
- A *concavidade* da parábola é voltada para:
  - **cima** quando $a > 0$;
  - **baixo** quando $a < 0$.
- As coordenadas do *vértice* da parábola são dadas por

$$V = (x_v,\, y_v) = \left(-\frac{b}{2a},\, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

com $\Delta = b^2 - 4ac$, o famoso discriminante;
- O gráfico *corta* o eixo Oy no ponto $C(0,\, c)$;

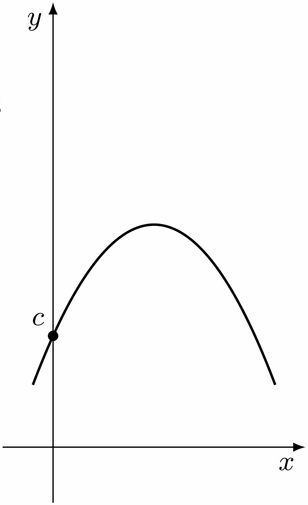


Gráfico da Função Quadrática

- Considere a função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- O gráfico é uma **parábola** com *eixo de simetria* paralelo ao eixo Oy;
- A *concavidade* da parábola é voltada para:
  - **cima** quando $a > 0$;
  - **baixo** quando $a < 0$.
- As coordenadas do *vértice* da parábola são dadas por

$$V = (x_v,\ y_v) = \left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

  com $\Delta = b^2 - 4ac$, o famoso discriminante;
- O gráfico *corta* o eixo Oy no ponto $C(0,\ c)$;
- O sinal de b indica *como o gráfico corta* o eixo Oy:
  - **crescente** quando $b > 0$;

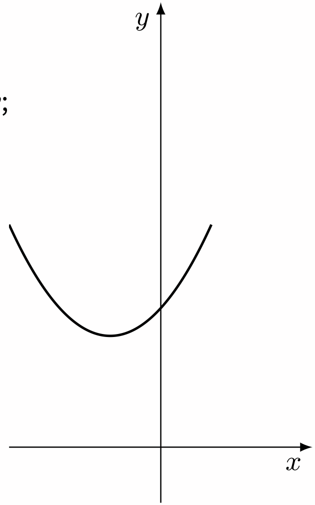


Gráfico da Função Quadrática

- Considere a função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- O gráfico é uma **parábola** com *eixo de simetria* paralelo ao eixo Oy;
- A *concavidade* da parábola é voltada para:
  - **cima** quando $a > 0$;
  - **baixo** quando $a < 0$.
- As coordenadas do *vértice* da parábola são dadas por

$$V = (x_v,\ y_v) = \left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

com $\Delta = b^2 - 4ac$, o famoso discriminante;
- O gráfico *corta* o eixo Oy no ponto $C(0,\ c)$;
- O sinal de b indica *como o gráfico corta* o eixo Oy:
  - **crescente** quando $b > 0$;

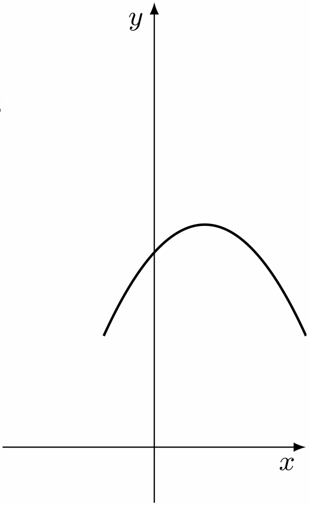


Gráfico da Função Quadrática

- Considere a função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- O gráfico é uma **parábola** com *eixo de simetria* paralelo ao eixo Oy;
- A *concavidade* da parábola é voltada para:
  - **cima** quando $a > 0$;
  - **baixo** quando $a < 0$.
- As coordenadas do *vértice* da parábola são dadas por

$$V = (x_v,\, y_v) = \left(-\frac{b}{2a},\, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

  com $\Delta = b^2 - 4ac$, o famoso discriminante;
- O gráfico *corta* o eixo Oy no ponto $C(0,\, c)$;
- O sinal de b indica *como o gráfico corta* o eixo Oy:
  - **crescente** quando $b > 0$;
  - **decrescente** quando $b < 0$;

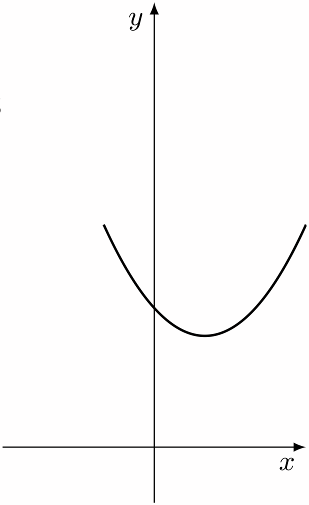


Gráfico da Função Quadrática

- Considere a função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- O gráfico é uma **parábola** com *eixo de simetria* paralelo ao eixo Oy;
- A *concavidade* da parábola é voltada para:
  - **cima** quando $a > 0$;
  - **baixo** quando $a < 0$.
- As coordenadas do *vértice* da parábola são dadas por

$$V = (x_v, y_v) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

  com $\Delta = b^2 - 4ac$, o famoso discriminante;
- O gráfico *corta* o eixo Oy no ponto $C(0, c)$;
- O sinal de b indica *como o gráfico corta* o eixo Oy:
  - **crescente** quando $b > 0$;
  - **decrescente** quando $b < 0$;

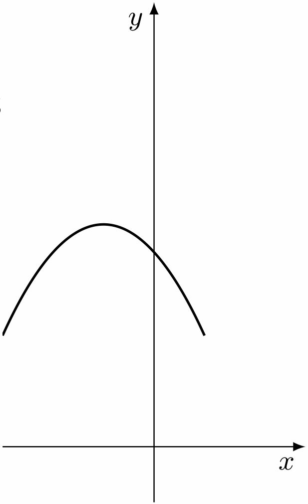


Gráfico da Função Quadrática

- Considere a função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- O gráfico é uma **parábola** com *eixo de simetria* paralelo ao eixo Oy;
- A *concavidade* da parábola é voltada para:
  - **cima** quando $a > 0$;
  - **baixo** quando $a < 0$.
- As coordenadas do *vértice* da parábola são dadas por

$$V = (x_v,\ y_v) = \left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

  com $\Delta = b^2 - 4ac$, o famoso discriminante;
- O gráfico *corta* o eixo Oy no ponto $C(0,\ c)$;
- O sinal de b indica *como o gráfico corta* o eixo Oy:
  - **crescente** quando $b > 0$;
  - **decrescente** quando $b < 0$;
  - **vértice no eixo** Oy quando $b = 0$.

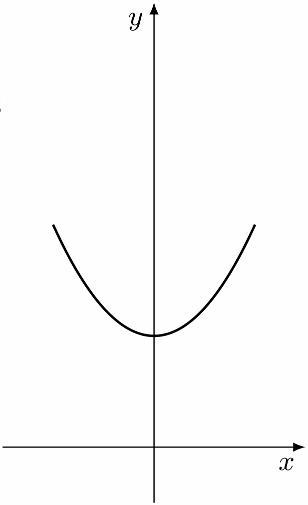


Gráfico da Função Quadrática

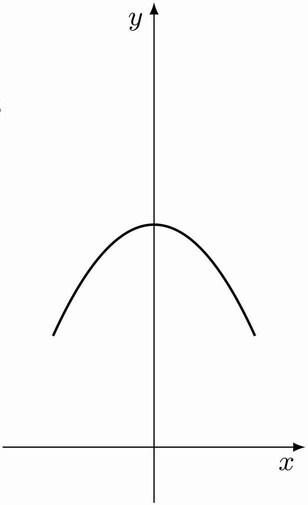
- Considere a função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- O gráfico é uma **parábola** com *eixo de simetria* paralelo ao eixo Oy;
- A *concavidade* da parábola é voltada para:
  - **cima** quando $a > 0$;
  - **baixo** quando $a < 0$.
- As coordenadas do *vértice* da parábola são dadas por

$$V = (x_v,\ y_v) = \left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

  com $\Delta = b^2 - 4ac$, o famoso discriminante;
- O gráfico *corta* o eixo Oy no ponto $C(0,\ c)$;
- O sinal de b indica *como o gráfico corta* o eixo Oy:
  - **crescente** quando $b > 0$;
  - **decrescente** quando $b < 0$;
  - **vértice no eixo Oy** quando $b = 0$.



Zeros da Função Quadrática

- Considere a função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- Os seus *zeros* podem ser determinados ao calcular:

$$f(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

- O que é feito pela aplicação da **fórmula**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$;

Zeros da Função Quadrática

- Considere a função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- Os seus *zeros* podem ser determinados ao calcular:

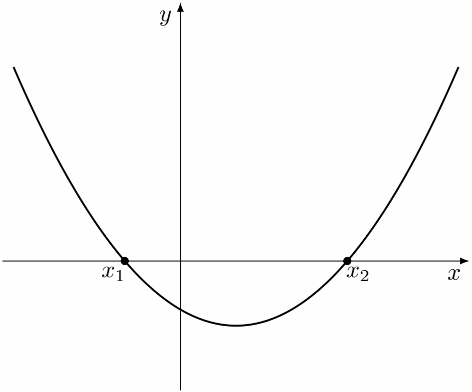
$$f(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

- O que é feito pela aplicação da **fórmula**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$;

- Existem **três casos** dependentes do sinal de Δ:
  - $\Delta > 0$ – dois zeros reais e *distintos*;



Zeros da Função Quadrática

- Considere a função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- Os seus *zeros* podem ser determinados ao calcular:

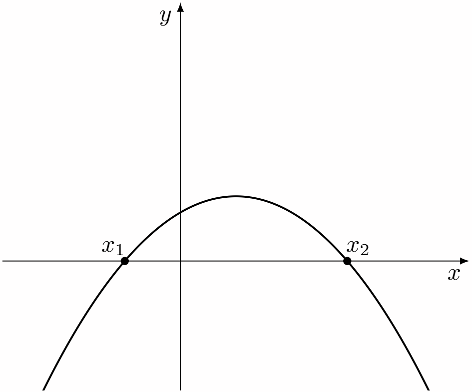
$$f(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

- O que é feito pela aplicação da **fórmula**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$;

- Existem **três casos** dependentes do sinal de Δ:
  - $\Delta > 0$ – dois zeros reais e *distintos*;



Zeros da Função Quadrática

- Considere a função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- Os seus *zeros* podem ser determinados ao calcular:

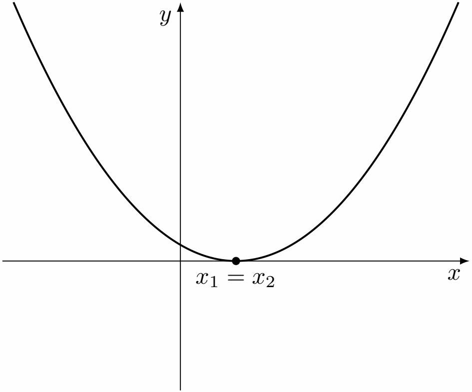
$$f(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

- O que é feito pela aplicação da **fórmula**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$;

- Existem **três casos** dependentes do sinal de Δ:
  - $\Delta > 0$ – dois zeros reais e *distintos*;
  - $\Delta = 0$ – um zero *duplo*;



Zeros da Função Quadrática

- Considere a função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- Os seus *zeros* podem ser determinados ao calcular:

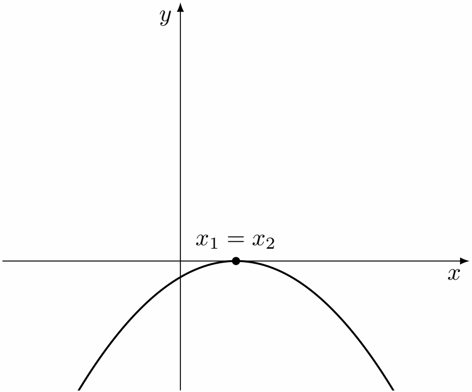
$$f(x) = 0 \qquad \iff \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

- O que é feito pela aplicação da **fórmula**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$;

- Existem **três casos** dependentes do sinal de Δ:
  - $\Delta > 0$ – dois zeros reais e *distintos*;
  - $\Delta = 0$ – um zero *duplo*;



Zeros da Função Quadrática

- Considere a função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- Os seus *zeros* podem ser determinados ao calcular:

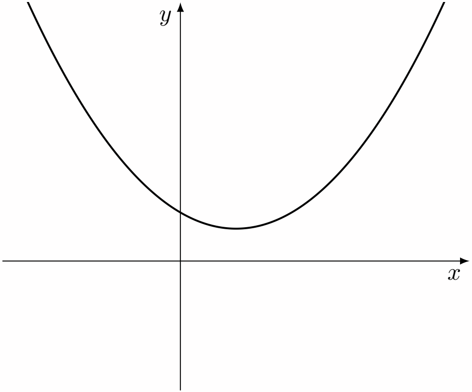
$$f(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

- O que é feito pela aplicação da **fórmula**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

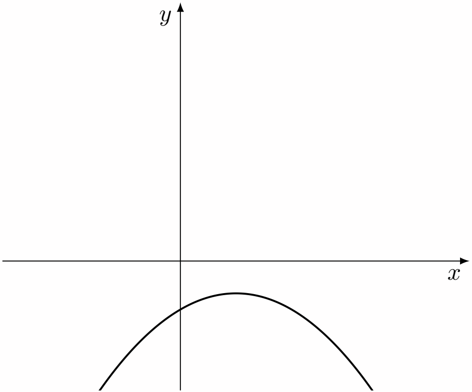
onde $\Delta = b^2 - 4ac$;

- Existem **três casos** dependentes do sinal de Δ:
  - $\Delta > 0$ – dois zeros reais e *distintos*;
  - $\Delta = 0$ – um zero *duplo*;
  - $\Delta < 0$ – nenhum zero *real*.



Zeros da Função Quadrática

- Considere a função quadrática
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
- Os seus *zeros* podem ser determinados ao calcular:
$$f(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad ax^2 + bx + c = 0$$
- O que é feito pela aplicação da **fórmula**:
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
onde $\Delta = b^2 - 4ac$;
- Existem **três casos** dependentes do sinal de Δ:
  - $\Delta > 0$ – dois zeros reais e *distintos*;
  - $\Delta = 0$ – um zero *duplo*;
  - $\Delta < 0$ – nenhum zero *real*.



Formas da Função Quadrática

- Até o momento estávamos escrevendo a forma quadrática por meio de sua **forma geral**

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- No entanto, ao analisar uma função quadrática, dependendo dos objetivos da analise, ou das informações disponíveis, é conveniente escrever a função quadrática em *outras formas*;

Formas da Função Quadrática

- Até o momento estávamos escrevendo a forma quadrática por meio de sua **forma geral**

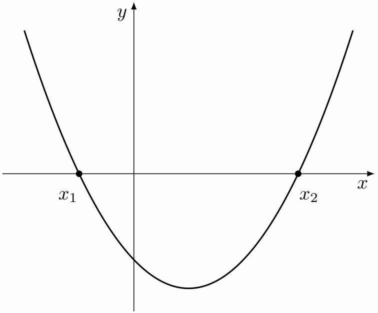
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- No entanto, ao analisar uma função quadrática, dependendo dos objetivos da analise, ou das informações disponíveis, é conveniente escrever a função quadrática em *outras formas*;

- Se conhecidos os zeros x_1 e x_2 da função quadrática, é possível escrevê-la em sua **forma fatorada**:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Expõe diretamente os zeros da função quadrática;
- Ainda é preciso conhecer ao menos um ponto adicional para que possamos determinar a.

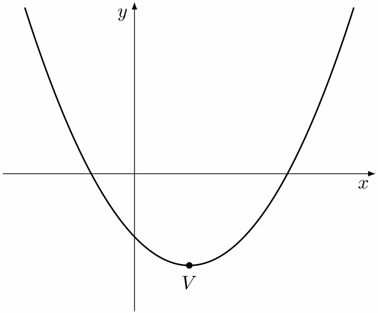


Formas da Função Quadrática

- Até o momento estávamos escrevendo a forma quadrática por meio de sua **forma geral**

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- No entanto, ao analisar uma função quadrática, dependendo dos objetivos da analise, ou das informações disponíveis, é conveniente escrever a função quadrática em *outras formas*;



- Se conhecido o vértice $V(x_v, y_v)$ do gráfico da função quadrática, é possível escrevê-la em sua **forma canônica**:

$$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$$

- Expõe diretamente o vértice da função quadrática;
- Ainda é preciso conhecer ao menos um ponto adicional para que possamos determinar a.

Funções Polinomiais

Definição 8. Função Polinomial

Chamamos de **função polinomial** qualquer função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

onde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ e $a_n \neq 0$. Dizemos que o **grau** da função polinomial é dado pelo valor de n.

Alguns casos importantes:

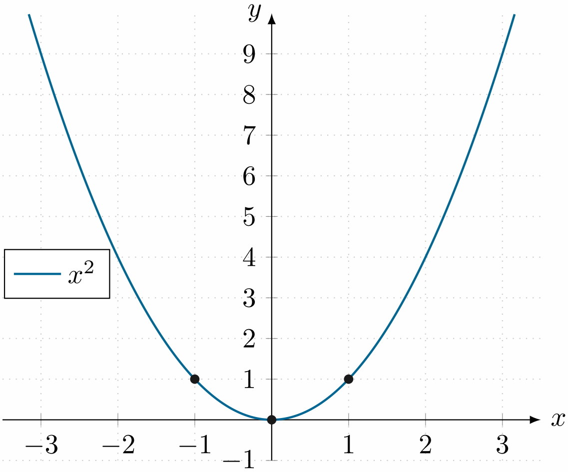
1. Conforme a definição, $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$, no entanto, nas aplicações, é comum considerar *domínios menores*;
2. Se $n = 1$, temos a função polinomial do 1º grau: $f(x) = ax + b$;
3. Se $n = 2$, temos a função polinomial do 2º grau: $f(x) = ax^2 + bx + c$;
4. Para $n > 2$, o comportamento pode ser estudado por meio do uso de *limites* e *derivadas*.

Exemplo 12.

Considere a família de funções polinomiais $f(x) = x^n$, com n par.

Observe o gráfico das funções:

1. $f(x) = x^2$



Note que:

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$ e $f(-1) = 1$;

Exemplo 12.

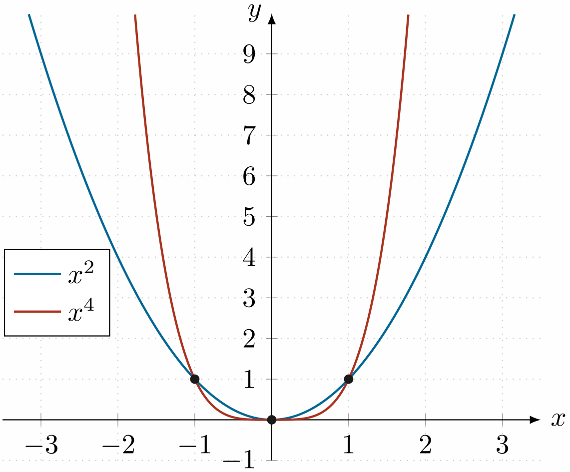
Considere a família de funções polinomiais $f(x) = x^n$, com n par.

Observe o gráfico das funções:

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = x^4$

Note que:

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$ e $f(-1) = 1$;

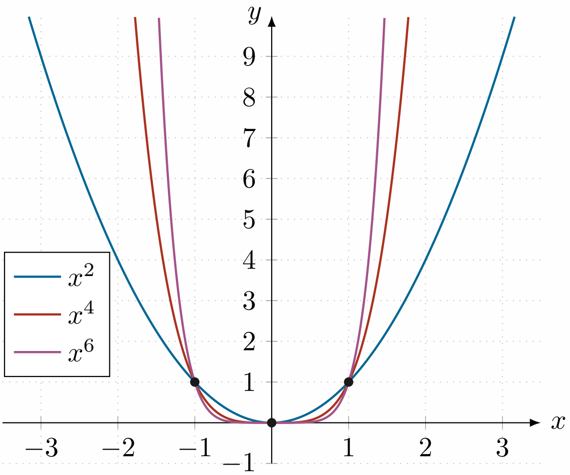


Exemplo 12.

Considere a família de funções polinomiais $f(x) = x^n$, com n par.

Observe o gráfico das funções:

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = x^4$
3. $f(x) = x^6$



Note que:

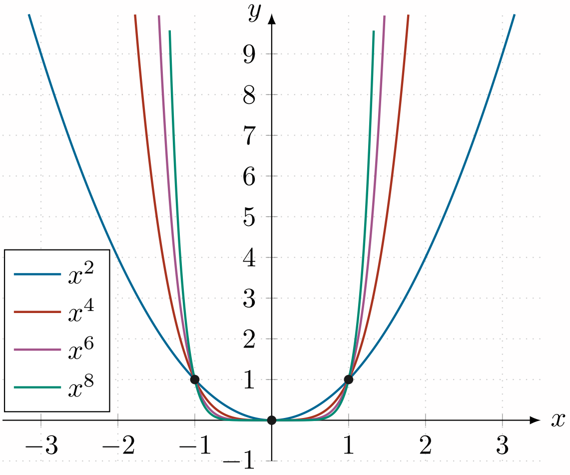
- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$ e $f(-1) = 1$;

Exemplo 12.

Considere a família de funções polinomiais $f(x) = x^n$, com n par.

Observe o gráfico das funções:

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = x^4$
3. $f(x) = x^6$
4. $f(x) = x^8$



Note que:

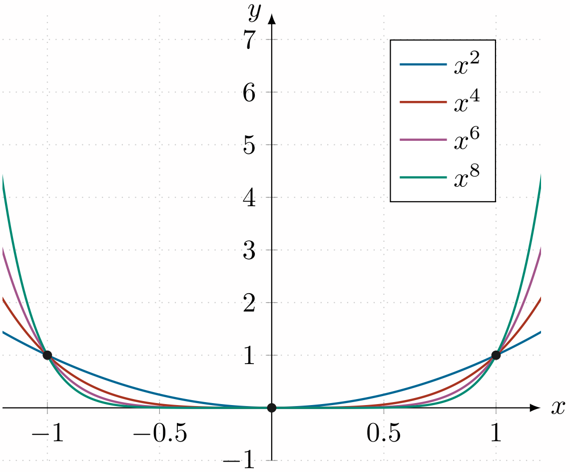
- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$ e $f(-1) = 1$;
- Se $|x| > 1$ e $p > q$, então $x^p > x^q$;
- Se $|x| < 1$ e $p > q$, então $x^p < x^q$;
- $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$;
- $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

Exemplo 12.

Considere a família de funções polinomiais $f(x) = x^n$, com n par.

Observe o gráfico das funções:

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = x^4$
3. $f(x) = x^6$
4. $f(x) = x^8$



Note que:

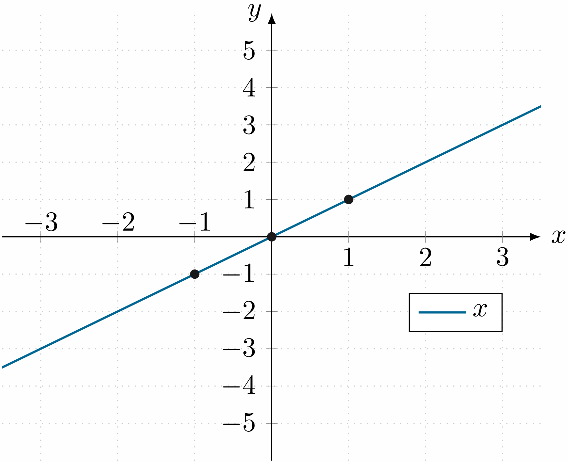
- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$ e $f(-1) = 1$;
- Se $|x| > 1$ e $p > q$, então $x^p > x^q$;
- Se $|x| < 1$ e $p > q$, então $x^p < x^q$;
- $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$;
- $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

Exemplo 13.

Considere a família de funções polinomiais $f(x) = x^n$, com n ímpar.

Observe o gráfico das funções:

1. $f(x) = x$



Note que:

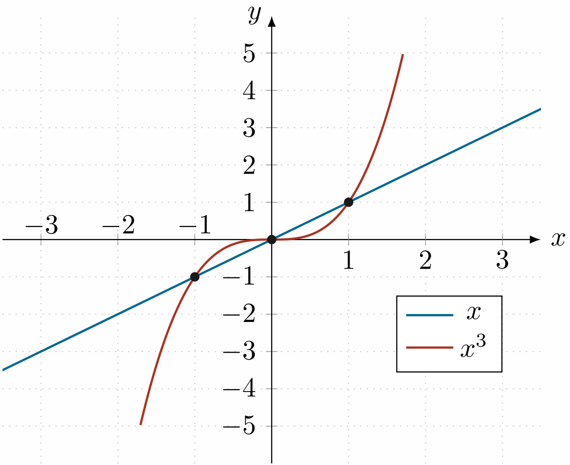
- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$ e $f(-1) = -1$;

Exemplo 13.

Considere a família de funções polinomiais $f(x) = x^n$, com n ímpar.

Observe o gráfico das funções:

1. $f(x) = x$
2. $f(x) = x^3$



Note que:

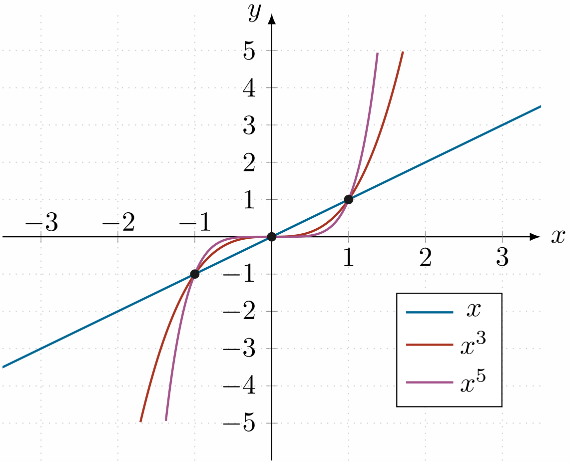
- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$ e $f(-1) = -1$;

Exemplo 13.

Considere a família de funções polinomiais $f(x) = x^n$, com n ímpar.

Observe o gráfico das funções:

1. $f(x) = x$
2. $f(x) = x^3$
3. $f(x) = x^5$



Note que:

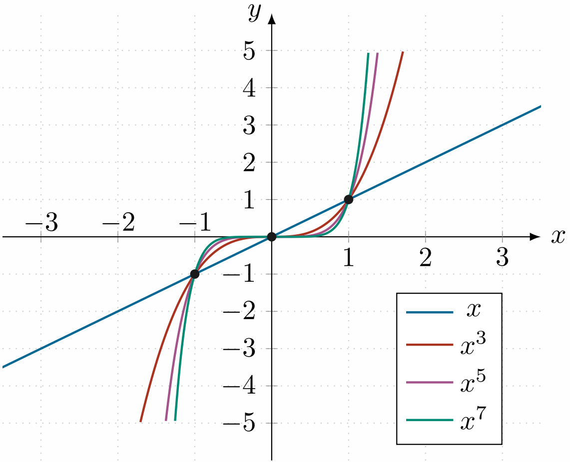
- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$ e $f(-1) = -1$;

Exemplo 13.

Considere a família de funções polinomiais $f(x) = x^n$, com n ímpar.

Observe o gráfico das funções:

1. $f(x) = x$
2. $f(x) = x^3$
3. $f(x) = x^5$
4. $f(x) = x^7$



Note que:

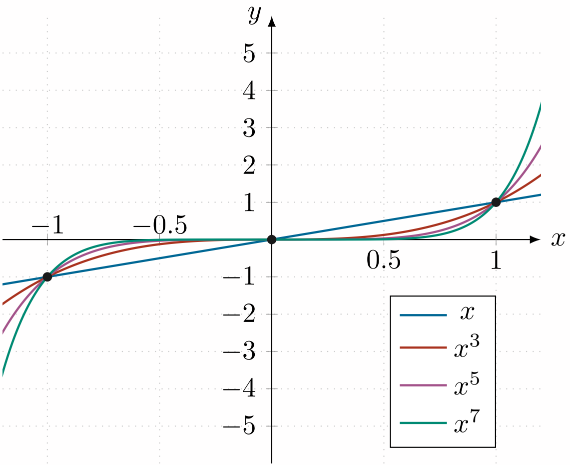
- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$ e $f(-1) = -1$;
- Se $|x| > 1$ e $p > q$, então $|x^p| > |x^q|$;
- Se $|x| < 1$ e $p > q$, então $|x^p| < |x^q|$;
- $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$;
- $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Exemplo 13.

Considere a família de funções polinomiais $f(x) = x^n$, com n ímpar.

Observe o gráfico das funções:

1. $f(x) = x$
2. $f(x) = x^3$
3. $f(x) = x^5$
4. $f(x) = x^7$



Note que:

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$ e $f(-1) = -1$;
- Se $|x| > 1$ e $p > q$, então $|x^p| > |x^q|$;
- Se $|x| < 1$ e $p > q$, então $|x^p| < |x^q|$;
- $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$;
- $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Funções Racionais

Definição 9. Função Racional

Sejam p e q funções polinomiais. Chamamos de função racional o quociente

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

definida para todo x que esteja nos domínios de p e q, exceto onde $q(x) = 0$.

Alguns casos importantes:

1. Se $\mathrm{D}(p) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{D}(q) = \mathbb{R}$, então $\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$;
2. Em geral, considerando restrições nos domínios das funções p e q, podemos assumir que $\mathrm{D}(f) = \mathrm{D}(p) \cap \mathrm{D}(q) - \{x \in \mathbb{R} : q(x) = 0\}$;
3. Quando $p(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos a família de **funções recíprocas**

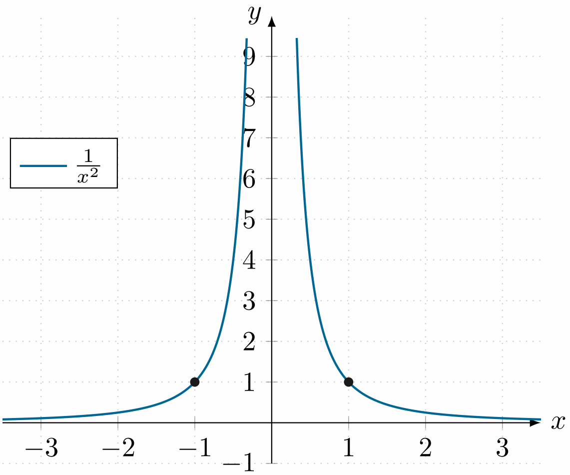
$$f(x) = \frac{1}{q(x)}$$

Exemplo 14.

Considere a família de funções racionais $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, com n par.

Observe o gráfico das funções:

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$



Note que:

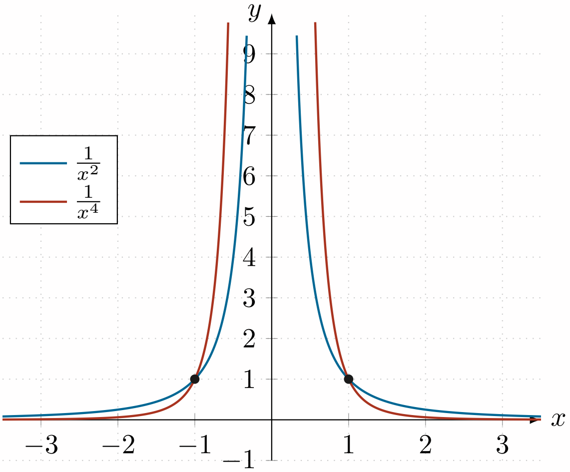
- $f(1) = 1$ e $f(-1) = 1$;

Exemplo 14.

Considere a família de funções racionais $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, com n par.

Observe o gráfico das funções:

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$



Note que:

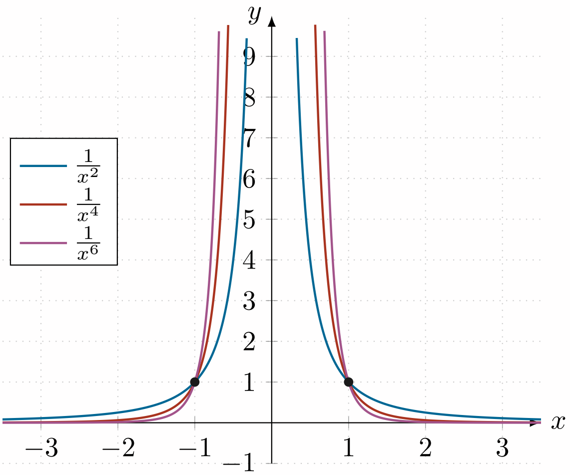
- $f(1) = 1$ e $f(-1) = 1$;

Exemplo 14.

Considere a família de funções racionais $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, com n par.

Observe o gráfico das funções:

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^6}$



Note que:

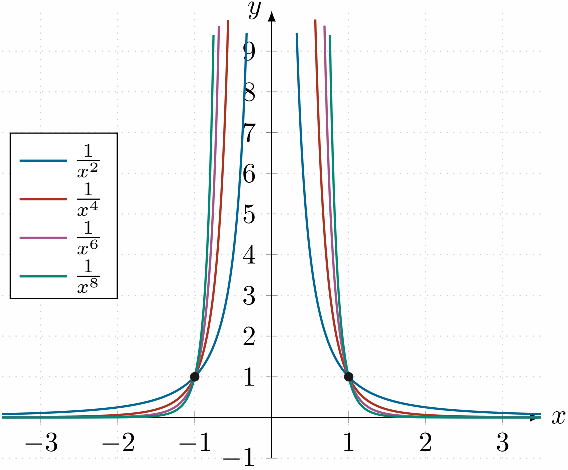
- $f(1) = 1$ e $f(-1) = 1$;

Exemplo 14.

Considere a família de funções racionais $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, com n par.

Observe o gráfico das funções:

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^6}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x^8}$



Note que:

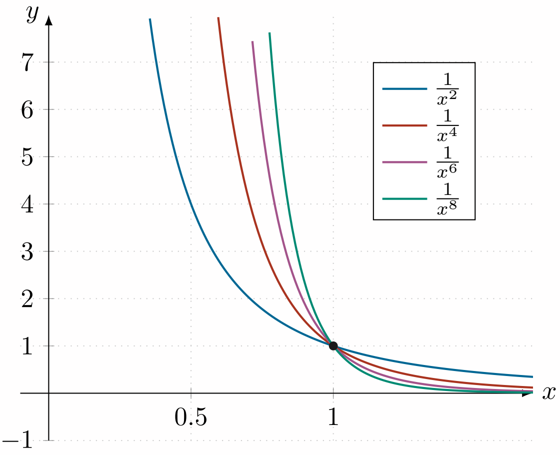
- $f(1) = 1$ e $f(-1) = 1$;
- Se $|x| > 1$ e $p > q$, então $x^p > x^q$;
- Se $|x| < 1$ e $p > q$, então $x^p < x^q$;
- $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}^*$;
- $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^*_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

Exemplo 14.

Considere a família de funções racionais $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, com n par.

Observe o gráfico das funções:

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^6}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x^8}$



Note que:

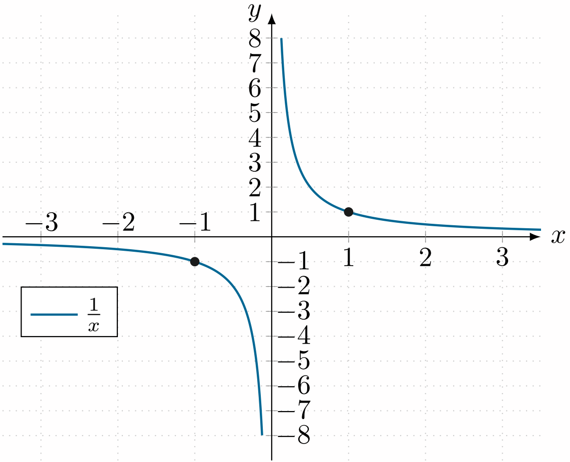
- $f(1) = 1$ e $f(-1) = 1$;
- Se $|x| > 1$ e $p > q$, então $x^p > x^q$;
- Se $|x| < 1$ e $p > q$, então $x^p < x^q$;
- $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}^*$;
- $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

Exemplo 15.

Considere a família de funções racionais $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, com n ímpar.

Observe o gráfico das funções:

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$



Note que:

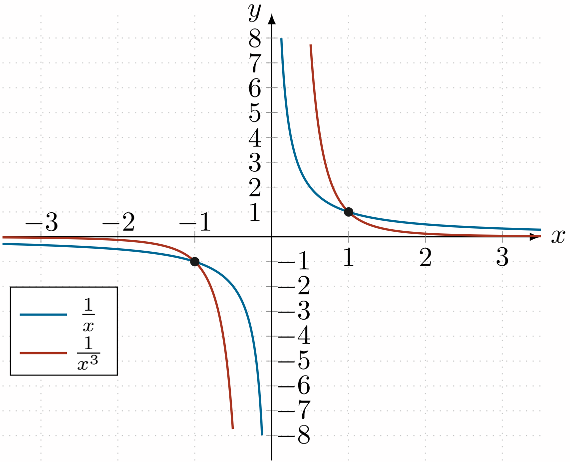
- $f(1) = 1$ e $f(-1) = 1$;

Exemplo 15.

Considere a família de funções racionais $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, com n ímpar.

Observe o gráfico das funções:

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$



Note que:

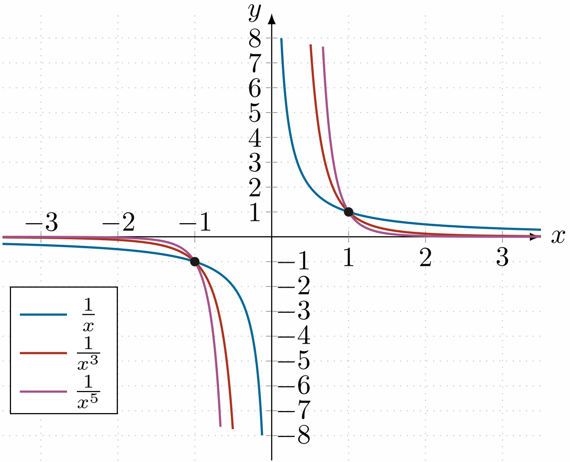
- $f(1) = 1$ e $f(-1) = 1$;

Exemplo 15.

Considere a família de funções racionais $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, com n ímpar.

Observe o gráfico das funções:

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$



Note que:

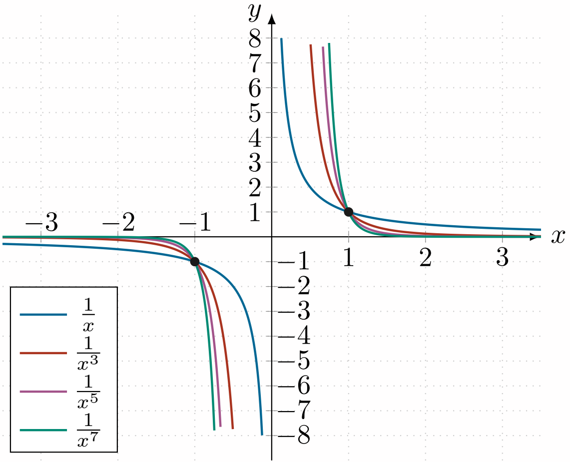
- $f(1) = 1$ e $f(-1) = 1$;

Exemplo 15.

Considere a família de funções racionais $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, com n ímpar.

Observe o gráfico das funções:

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x^7}$



Note que:

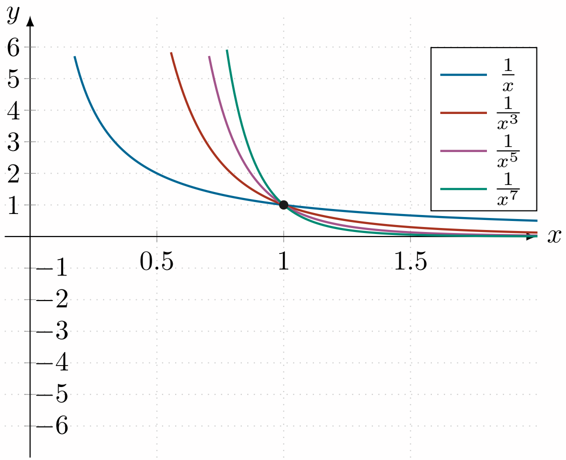
- $f(1) = 1$ e $f(-1) = 1$;
- Se $|x| > 1$ e $p > q$, então $x^p > x^q$;
- Se $|x| < 1$ e $p > q$, então $x^p < x^q$;
- $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}^*$;
- $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$.

Exemplo 15.

Considere a família de funções racionais $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, com n ímpar.

Observe o gráfico das funções:

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x^7}$



Note que:

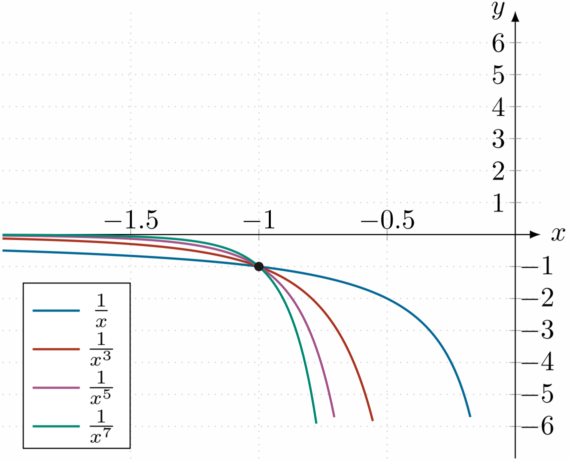
- $f(1) = 1$ e $f(-1) = 1$;
- Se $|x| > 1$ e $p > q$, então $x^p > x^q$;
- Se $|x| < 1$ e $p > q$, então $x^p < x^q$;
- $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}^*$;
- $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$.

Exemplo 15.

Considere a família de funções racionais $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, com n ímpar.

Observe o gráfico das funções:

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x^7}$



Note que:

- $f(1) = 1$ e $f(-1) = 1$;
- Se $|x| > 1$ e $p > q$, então $x^p > x^q$;
- Se $|x| < 1$ e $p > q$, então $x^p < x^q$;
- $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}^*$;
- $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \neq 0\}$.

Funções Algébricas

Definição 10. Função Algébrica

Chamamos de função algébrica toda função que possa ser expressa em termos de somas, diferenças, produtos, quocientes ou potências racionais de funções polinomiais.

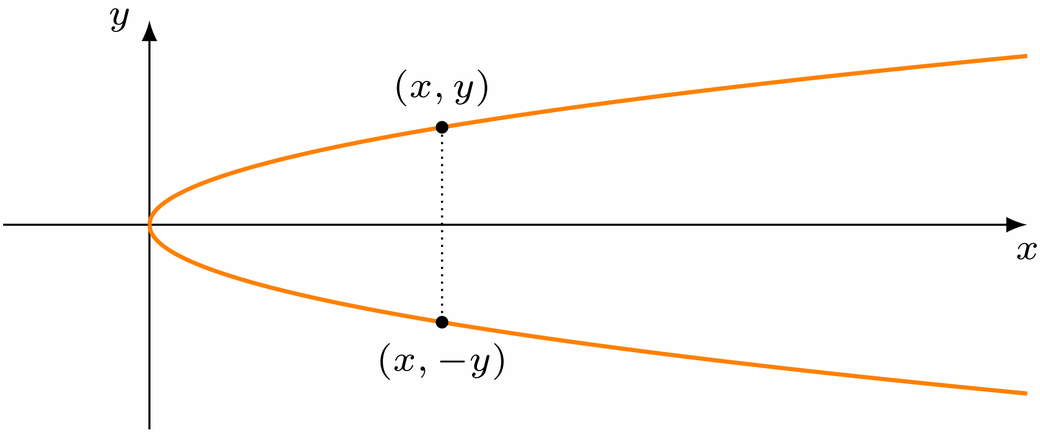
Exemplo 16. São exemplos de funções algébricas:

1. $f(x) = \sqrt{2x-2} + \dfrac{1}{x^2-9}$
2. $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

Simetrias, Funções Pares e Ímpares

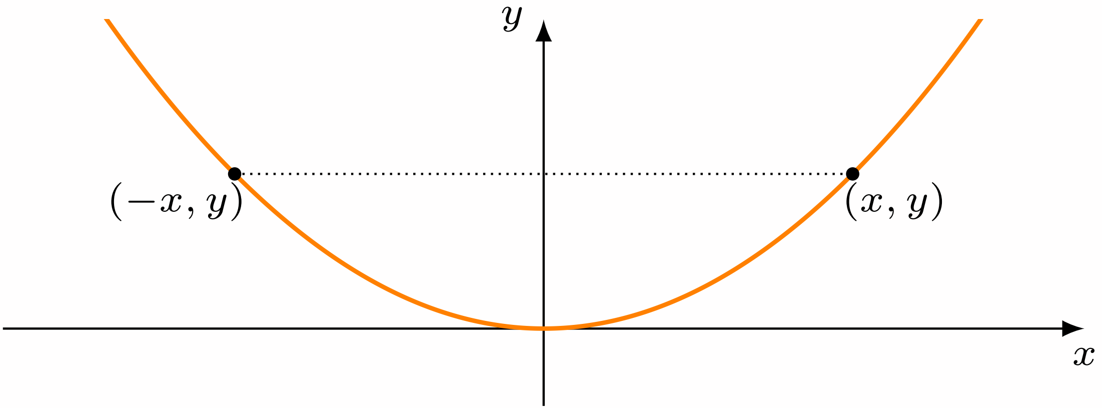
Definição 11. Simetria em Relação ao Eixo x

Uma curva plana é simétrica em relação ao eixo x se, para cada ponto $(x,\ y)$ do seu gráfico, o ponto $(x,\ -y)$ também está no gráfico.



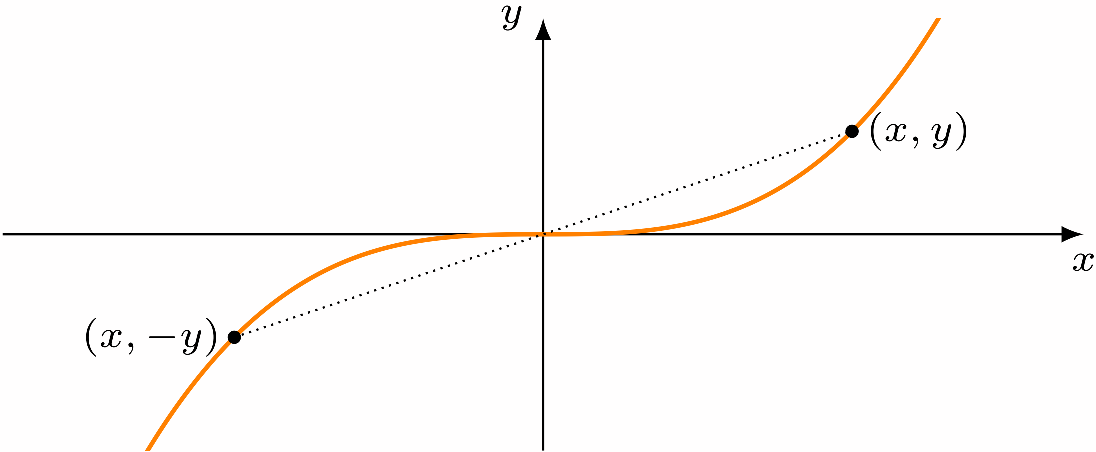
Definição 12. Simetria em Relação ao Eixo y

Uma curva plana é simétrica em relação ao eixo y se, para cada ponto $(x,\ y)$ do seu gráfico, o ponto $(-x,\ y)$ também está no gráfico.



Definição 13. Simetria em Relação à Origem

Uma curva plana é simétrica em relação à origem se, para cada ponto $(x,\ y)$ do seu gráfico, o ponto $(-x,\ -y)$ também está no gráfico.



Teorema 5. Testes de Simetria

Uma curva é simétrica em relação à origem se, para cada ponto $(x,\ y)$ do seu gráfico, o ponto $(-x,\ -y)$ também está no gráfico.

1. Uma curva plana é simétrica em relação ao eixo y se, e somente se, substituindo-se x por $-x$ em sua equação, obtém-se uma equação equivalente;
2. Uma curva plana é simétrica em relação ao eixo x se, e somente se, substituindo-se y por $-y$ em sua equação, obtém-se uma equação equivalente;
3. Uma curva plana é simétrica em relação à origem y se, e somente se, substituindo-se x por $-x$ e substituindo-se y por $-y$ em sua equação, obtém-se uma equação equivalente.

Exemplo 17.
Classifique as curvas definidas pelas funções a seguir com respeito à sua simetria.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$
2. $g(x) = x^4$

Observação.

- Não existe função cujo gráfico seja simétrico com respeito ao eixo x.

Definição 14. Função Par

Uma função f é dita **função par** se

$$f(-x) = f(x),$$

para todo $x \in \mathrm{D}(f)$.

Observação.

- O gráfico de uma função par é simétrico com respeito ao eixo x.

Exemplo 18.

1. $y = x^2, y = x^4, y = x^6, y = x^8, \ldots$
2. $y = \dfrac{1}{x^2}, y = \dfrac{1}{x^4}, y = \dfrac{1}{x^6}, y = \dfrac{1}{x^8}, \ldots$

Definição 14. Função Par

Uma função f é dita **função par** se

$$f(-x) = f(x),$$

para todo $x \in \mathrm{D}(f)$.

Observação.

- O gráfico de uma função par é simétrico com respeito ao eixo x.

Exemplo 18.

1. $y = x^2, y = x^4, y = x^6, y = x^8, \ldots$
2. $y = \frac{1}{x^2}, y = \frac{1}{x^4}, y = \frac{1}{x^6}, y = \frac{1}{x^8}, \ldots$

Definição 15. Função Ímpar

Uma função f é dita **função ímpar** se

$$f(-x) = -f(x),$$

para todo $x \in \mathrm{D}(f)$.

Observação.

- O gráfico de uma função ímpar é simétrico com respeito à origem.

Exemplo 19.

1. $y = x, y = x^3, y = x^5, y = x^7, \ldots$
2. $y = \frac{1}{x}, y = \frac{1}{x^3}, y = \frac{1}{x^5}, y = \frac{1}{x^7}, \ldots$

Funções Exponenciais

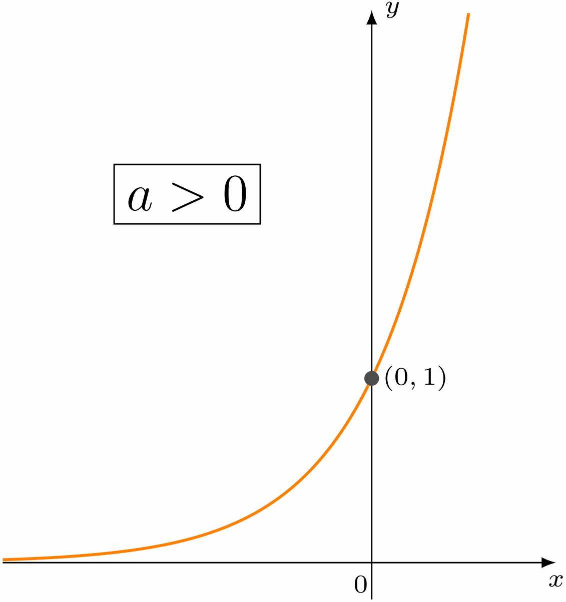
Definição 16. Função Exponencial

Seja a um número real, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Chamamos de **função exponencial** de base a a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ que associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o número real

$$f(x) = a^x.$$

Exemplo 20.

1. $y = 10^x$



Em ambos os casos, temos que:

- $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$
- $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*$

Definição 16. Função Exponencial

Seja a um número real, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Chamamos de **função exponencial** de base a a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ que associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o número real

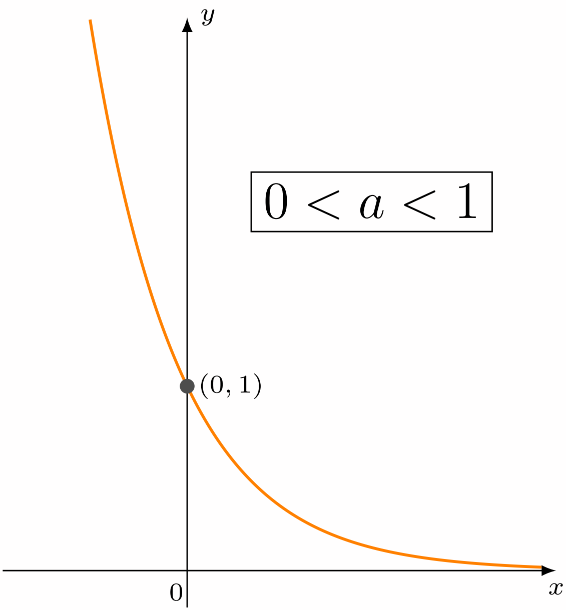
$$f(x) = a^x.$$

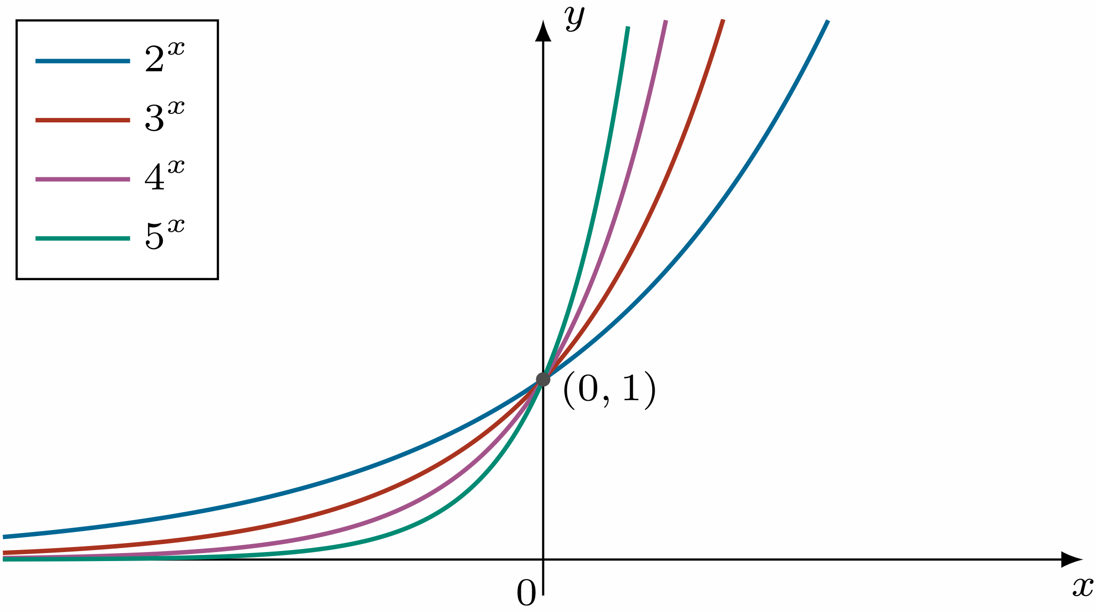
Exemplo 20.

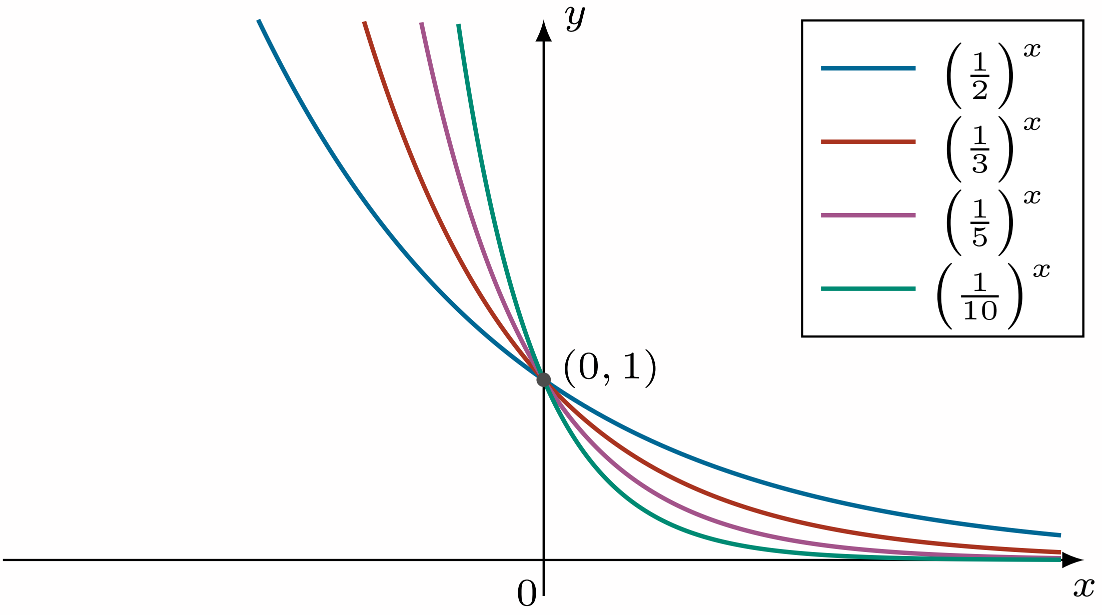
1. $y = 10^x$
2. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Em ambos os casos, temos que:

- $D(f) = \mathbb{R}$
- $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*$




2^x
3^x
4^x
5^x
y
$(0, 1)$
0
x



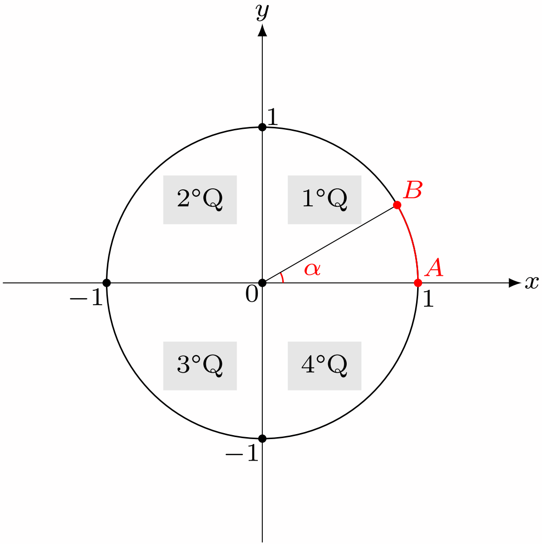
y
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$
$\left(\frac{1}{3}\right)^x$
$\left(\frac{1}{5}\right)^x$
$\left(\frac{1}{10}\right)^x$
$(0, 1)$
0
x

Funções Trigonométricas

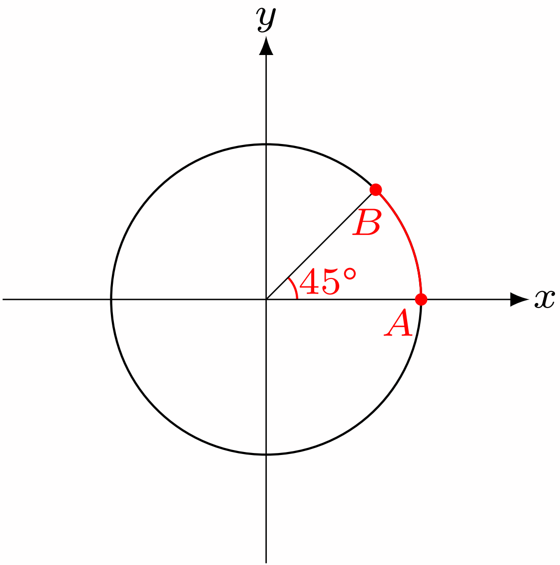
Definição 17. Circunferência Trigonométrica

Consideremos uma circunferência de raio unitário, associada a um sistema de eixos cartesianos ortogonais, para a qual valem as seguintes convenções:

- A origem do sistema coincide com o centro da circunferência;
- O ponto $A(1,0)$ é a origem de todos os arcos a serem medidos na circunferência;
- O sentido positivo de percurso é o anti-horário e o negativo é o horário;
- É tipicamente dividida em **quatro quadrantes**.



- Ao lado, temos um arco de 45° na circunferência trigonométrica:
  - origem em $A(1,0)$ – origem dos arcos;
  - extremidade no ponto B.
- É evidente que, partindo de A, é possível chegar em B através de um número arbitrário de *voltas*, tanto no sentido positivo, quanto no sentido negativo;
- De fato, **infinitos arcos correspondem a uma mesma extremidade**:
  - Tais arcos são chamados de **arcos côngruos**.
- Trabalharemos com o conceito da **menor determinação positiva** de cada arco.



Definição 18. Menor Determinação

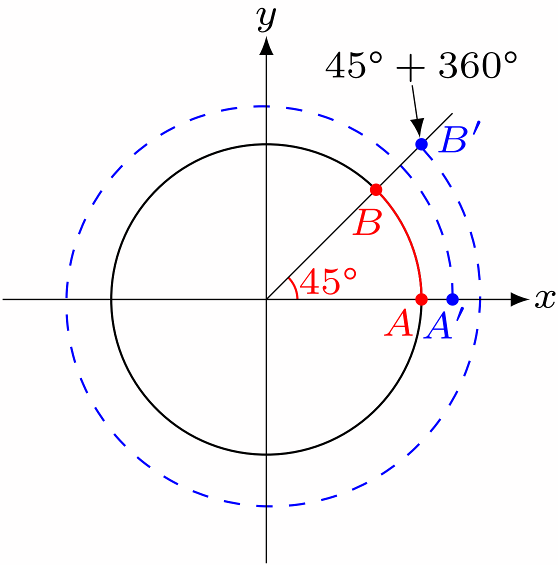
Dado um arco de medida Θ, positiva, chamamos de a **menor determinação positiva de** Θ o arco θ que é resto da divisão inteira de Θ por 360°, se medido em graus (ou 2π rad, se medido em radianos).

Em graus:

- Vale a expressão

$$\Theta = \theta + 360° \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- $\theta \in [0, 360°)$ – resto da divisão inteira de Θ por 360°;
- k é o dividendo da divisão inteira de Θ por 360° – representa o número de voltas dadas.



Definição 18. Menor Determinação

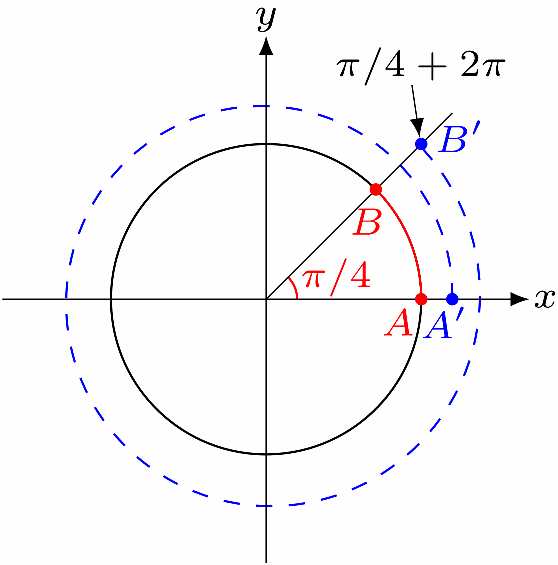
Dado um arco de medida Θ, positiva, chamamos de a **menor determinação positiva de** Θ o arco θ que é resto da divisão inteira de Θ por 360°, se medido em graus (ou 2π rad, se medido em radianos).

Em radianos:

- Vale a expressão

$$\Theta = \theta + 2\pi \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- $\theta \in [0, 2\pi)$ – resto da divisão inteira de Θ por 2π;
- k é o dividendo da divisão inteira de Θ por 2π – representa o número de voltas dadas.



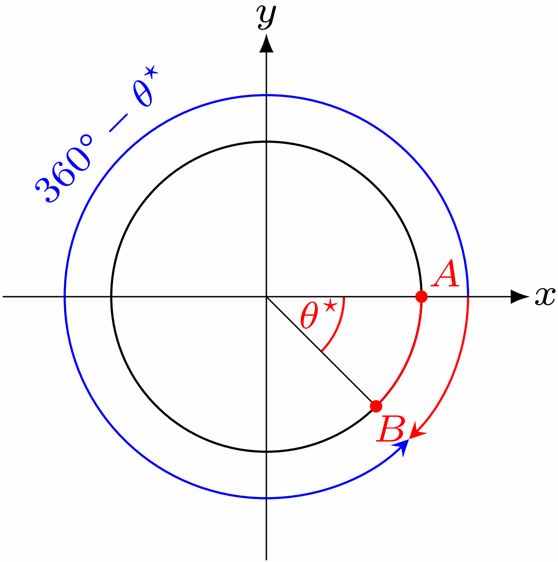
E se Θ for um arco de medida negativa?

1. Calcular a primeira determinação positiva de $|\Theta|$; chamaremos ela de $\theta^\star$;
2. A primeira determinação **negativa** de Θ será $-\theta^\star$;
3. Utilizar o complemento para obter a primeira determinação positiva:
   - Em graus:

$$\theta = 360° - \theta^\star$$

   - Em radianos:

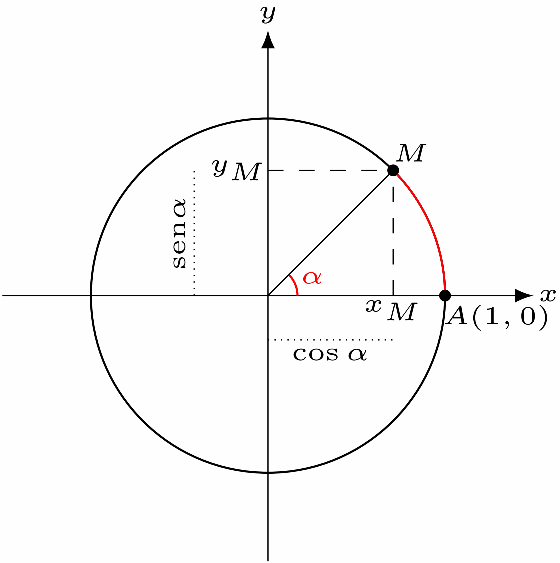
$$\theta = 2\pi - \theta^\star$$



Definição 19. Seno e Cosseno de um Arco

Seja $M(x_M, y_M)$ a extremidade de um arco de medida α rad, $\alpha \in [0, \pi/2]$, sobre a circunferência trigonométrica. Definimos:

1. $\operatorname{sen} \alpha = y_M$ (a ordenada de M)
2. $\cos \alpha = x_M$ (a abscissa de M)



Observações:

- O **seno** é a projeção da extremidade do arco sobre o eixo y;
- O **cosseno** é a projeção da extremidade do arco sobre o eixo x;
- Utilizaremos relações de simetria e a primeira determinação positiva para ampliar para $\alpha \in \mathbb{R}$

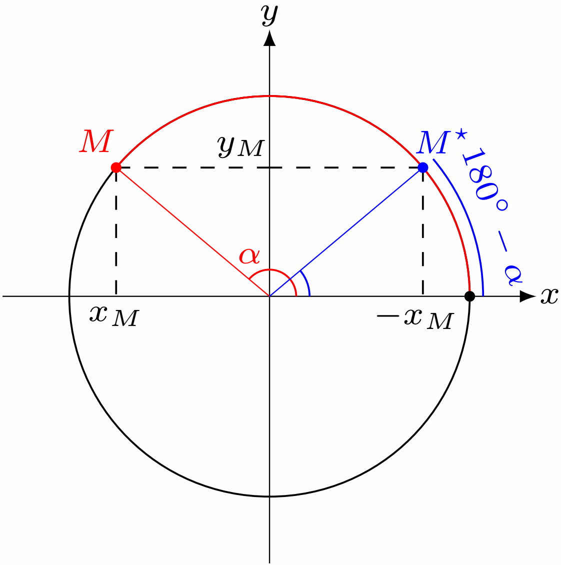
Teorema 6. Redução do 2ºQ ao 1ºQ

Seja $M(x_M,\, y_M)$ a extremidade de um arco de medida α do 2º quadrante da circunferência trigonométrica. À ela corresponderá a extremidade $M^\star(-x_M,\, y_M)$ de um arco de medida $180° - \alpha$ do 1º quadrante. Com isso, podemos concluir as relações:

1. $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(180° - \alpha)$
2. $\cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$

Observações:

- $M^\star$ é o simétrico de M com respeito ao eixo das ordenadas;
- Não decorar, é sempre mais fácil desenhar a simetria.



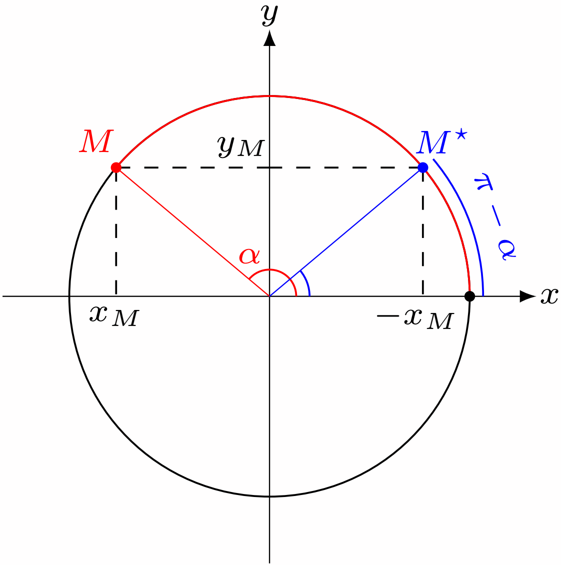
Teorema 6. Redução do 2ºQ ao 1ºQ

Seja $M(x_M,\, y_M)$ a extremidade de um arco de medida α do 2º quadrante da circunferência trigonométrica. À ela corresponderá a extremidade $M^\star(-x_M,\, y_M)$ de um arco de medida $\pi-\alpha$ do 1º quadrante. Com isso, podemos concluir as relações:

1. $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\pi-\alpha)$
2. $\cos\alpha = -\cos(\pi-\alpha)$

Observações:

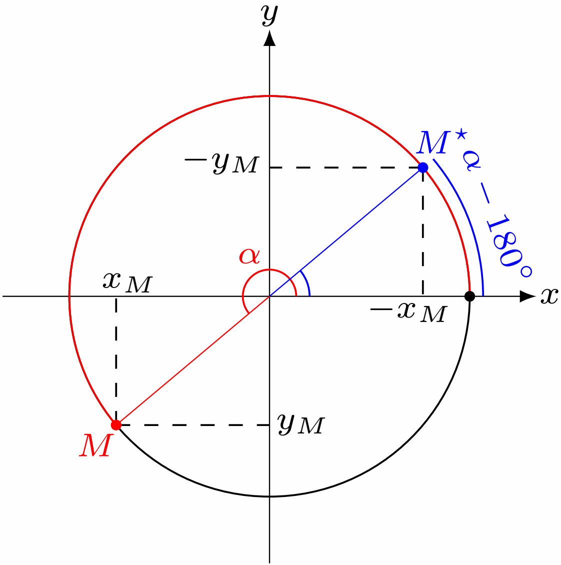
- $M^\star$ é o simétrico de M com respeito ao eixo das ordenadas;
- Não decorar, é sempre mais fácil desenhar a simetria.



Teorema 7. Redução do 3ºQ ao 1ºQ

Seja $M(x_M,\, y_M)$ a extremidade de um arco de medida α do 3º quadrante da circunferência trigonométrica. À ela corresponderá a extremidade $M^{\star}(-x_M,\, -y_M)$ de um arco de medida $\alpha - 180°$ do 1º quadrante. Com isso, podemos concluir as relações:

1. $\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(\alpha - 180°)$
2. $\cos\alpha = -\cos(\alpha - 180°)$



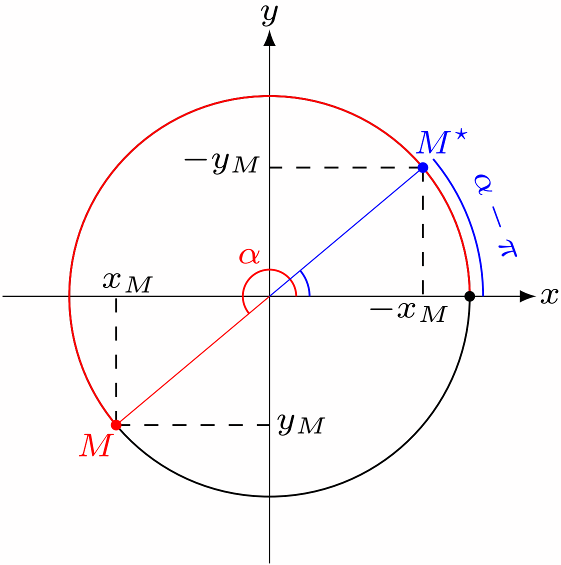
Observações:

- $M^{\star}$ é o simétrico de M com respeito à origem;
- Não decorar, é sempre mais fácil desenhar a simetria.

Teorema 7. Redução do 3°Q ao 1°Q

Seja $M(x_M,\, y_M)$ a extremidade de um arco de medida α do 3° quadrante da circunferência trigonométrica. À ela corresponderá a extremidade $M^\star(-x_M,\, -y_M)$ de um arco de medida $\alpha-\pi$ do 1° quadrante. Com isso, podemos concluir as relações:

1. $\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(\alpha-\pi)$
2. $\cos\alpha = -\cos(\alpha-\pi)$



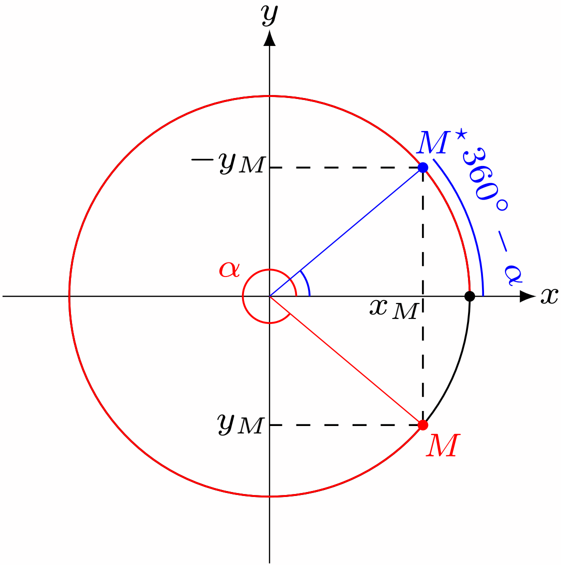
Observações:

- $M^\star$ é o simétrico de M com respeito à origem;
- Não decorar, é sempre mais fácil desenhar a simetria.

Teorema 8. Redução do 4°Q ao 1°Q

Seja $M(x_M,\, y_M)$ a extremidade de um arco de medida α do 4º quadrante da circunferência trigonométrica. À ela corresponderá a extremidade $M^\star(-x_M,\, -y_M)$ de um arco de medida $360° - \alpha$ do 1º quadrante. Com isso, podemos concluir as relações:

1. $\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(360° - \alpha)$
2. $\cos\alpha = \cos(360° - \alpha)$



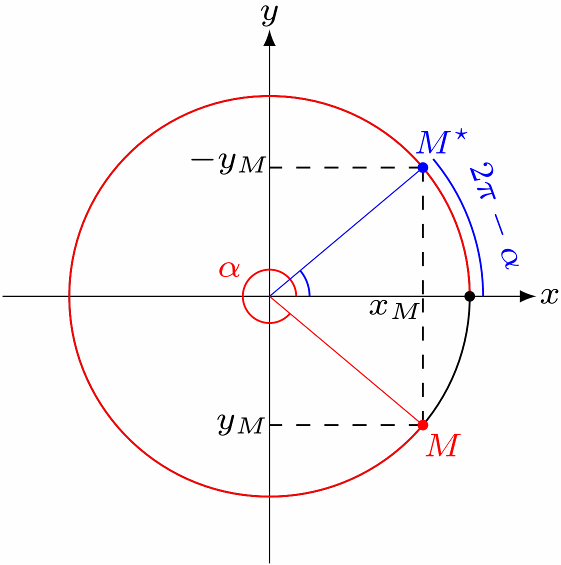
Observações:

- $M^\star$ é o simétrico de M com respeito à origem;
- Não decorar, é sempre mais fácil desenhar a simetria.

Teorema 8. Redução do 4ºQ ao 1ºQ

Seja $M(x_M,\, y_M)$ a extremidade de um arco de medida α do 4º quadrante da circunferência trigonométrica. À ela corresponderá a extremidade $M^\star(-x_M,\, -y_M)$ de um arco de medida $2\pi - \alpha$ do 1º quadrante. Com isso, podemos concluir as relações:

1. $\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(2\pi - \alpha)$
2. $\cos\alpha = \cos(2\pi - \alpha)$



Observações:

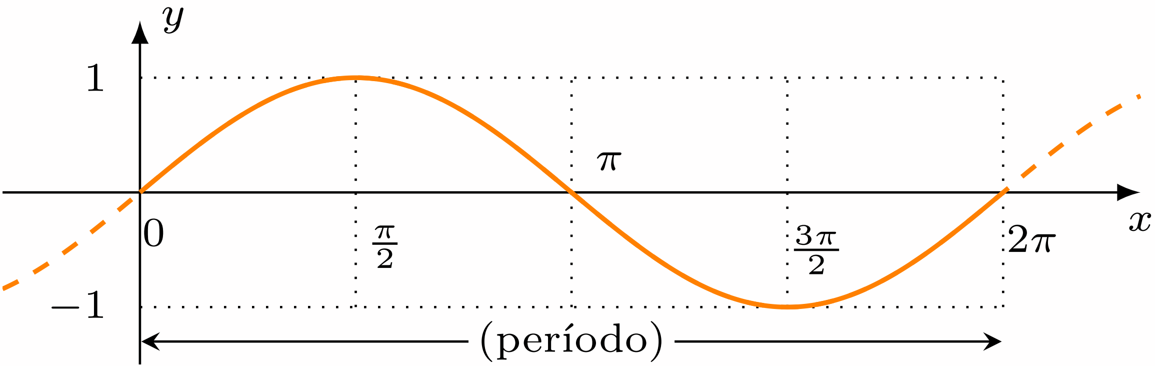
- $M^\star$ é o simétrico de M com respeito à origem;
- Não decorar, é sempre mais fácil desenhar a simetria.

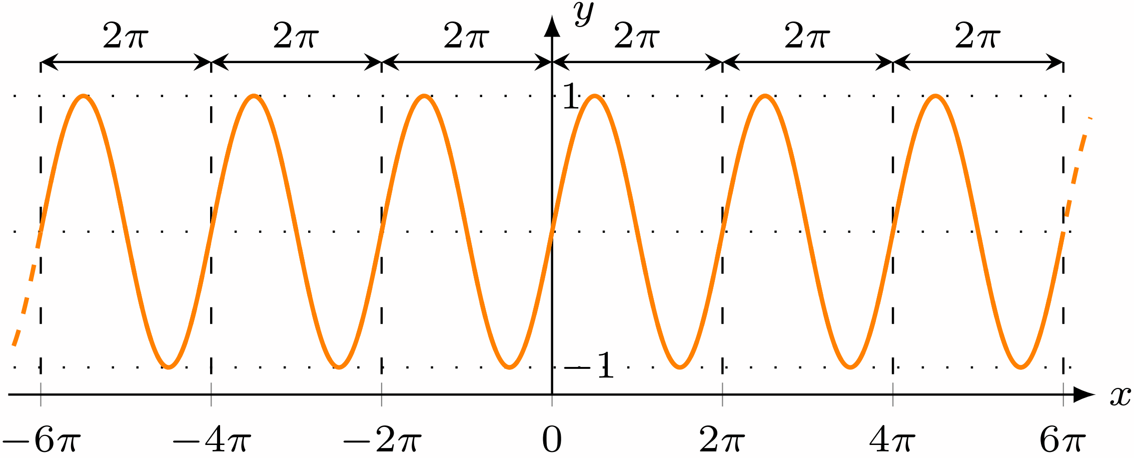
Definição 20. Função Seno

A função seno é definida como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o número real $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Temos que a função seno possui:

- Domínio: $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$
- Imagem: $\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$
- Período: $T = 2\pi$ rad



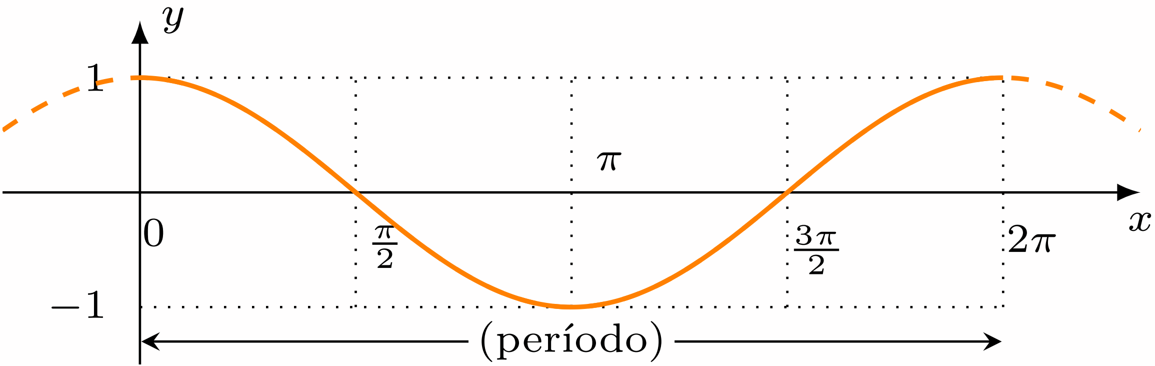

y
2π
2π
2π
2π
2π
2π
1
-1
x
-6π
-4π
-2π
0
2π
4π
6π

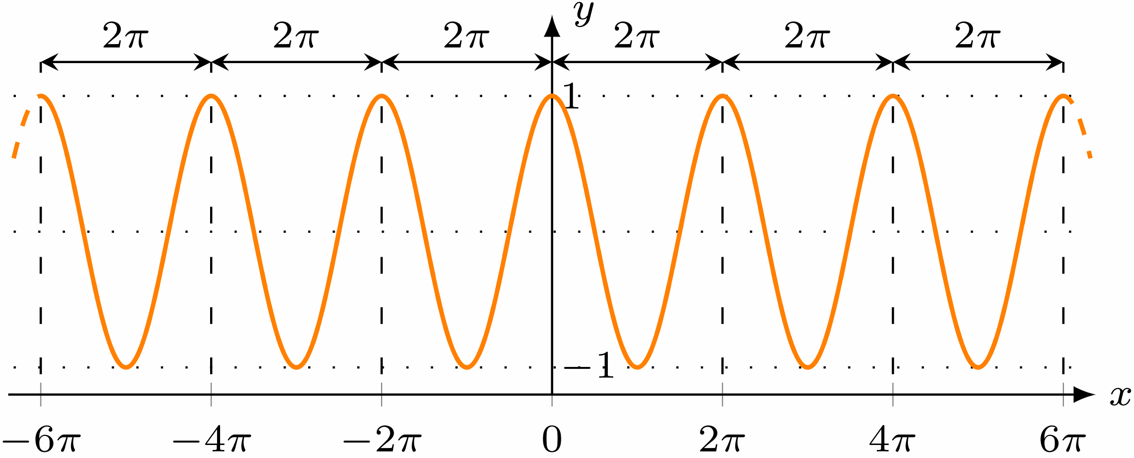
Definição 21. Função Cosseno

A função cosseno é definida como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o número real $f(x) = \cos x$.

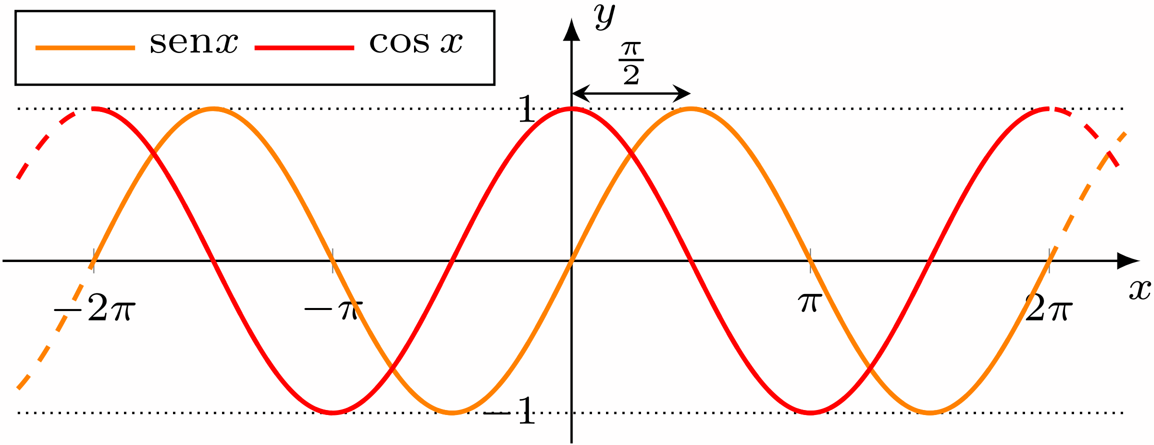
Temos que a função cosseno possui:

- Domínio: $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$
- Imagem: $\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$
- Período: $T = 2\pi$ rad





y
2π
2π
2π
2π
2π
2π
1
-1
x
-6π
-4π
-2π
0
2π
4π
6π

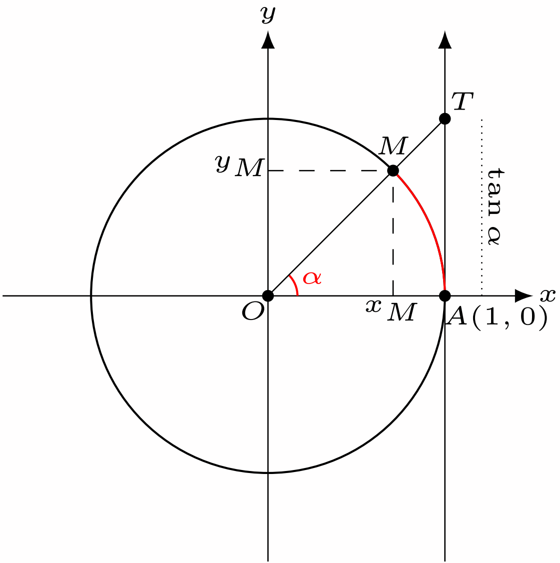


sen x
$\cos x$
y
$\frac{\pi}{2}$
1
-1
x
-2π
$-\pi$
π
2π

Definição 22. Tangente no 1°Q

Seja $M(x_M,\, y_M)$ a extremidade de um arco de medida α, $\alpha \in [0, \pi/2)$, e considere um eixo de mesma direção e mesmo sentido ao do eixo y, passando pelo ponto A. Chamamos de tangente de α a medida do segmento AT, onde T é a interseção entre o novo eixo e o segmento de reta que contém a origem e M.

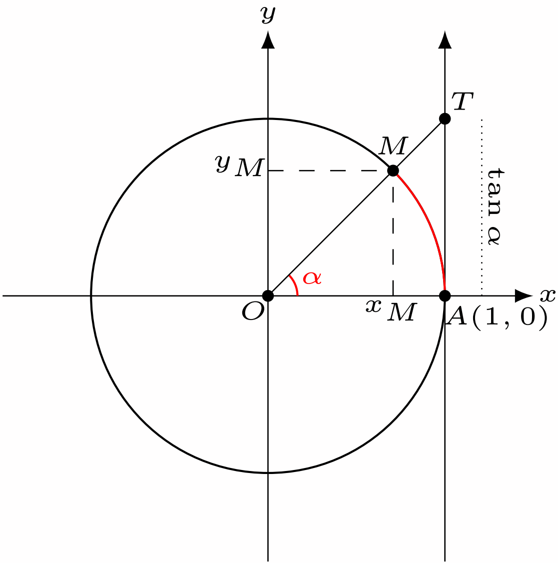
- As relações de simetria e a primeira determinação positiva serão necessárias para ampliar o conceito de tangente para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, exceto arcos côngruos à $\pi/2$ rad e à $3\pi/2$ rad.



Teorema 9. Tangente no 1°Q

Seja M a extremidade de um arco de medida α do 1° quadrante da circunferência trigonométrica. Então, vale a relação:

$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$



Teorema 9. Tangente no 1ºQ

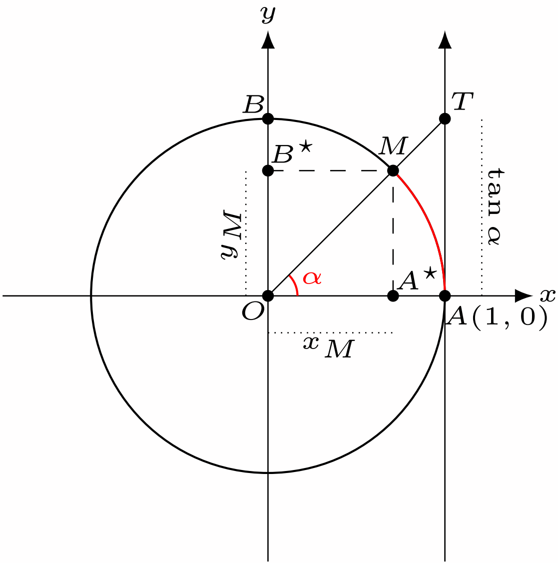
Seja M a extremidade de um arco de medida α do 1º quadrante da circunferência trigonométrica. Então, vale a relação:

$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

Demonstração

Por semelhança de triângulos, temos que $OAT \sim OA^{\star}M$, de onde decorre que:

$$\frac{\tan\alpha}{y_M} = \frac{1}{x_M} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{y_M}{x_M} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$



Teorema 10. Tangente de um Arco

Seja M a extremidade de um arco de medida α na circunferência trigonométrica. Então, vale a relação:

$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha},$$

para $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi$, em radianos, ou $\alpha \neq 90^\circ + k\cdot 180^\circ$, em graus.

Ainda, são válidas, em radianos:

1. Se $\alpha \in (\pi/2, \pi]$, então:

$$\tan\alpha = -\tan(\pi - \alpha)$$

2. Se $\alpha \in [\pi, 3\pi/2)$, então:

$$\tan\alpha = \tan(\alpha - \pi)$$

3. Se $\alpha \in (3\pi/2, 2\pi]$, então:

$$\tan\alpha = -\tan(2\pi - \alpha)$$

Ainda, são válidas, em graus:

1. Se $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ]$, então:

$$\tan\alpha = -\tan(180^\circ - \alpha)$$

2. Se $\alpha \in [180^\circ, 270^\circ)$, então:

$$\tan\alpha = \tan(\alpha - 180^\circ)$$

3. Se $\alpha \in (270^\circ, 360^\circ]$, então:

$$\tan\alpha = -\tan(360^\circ - \alpha)$$

Definição 23. Função Tangente

Seja A o conjunto definido por

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

A função tangente associa à cada $x \in A$ o número real

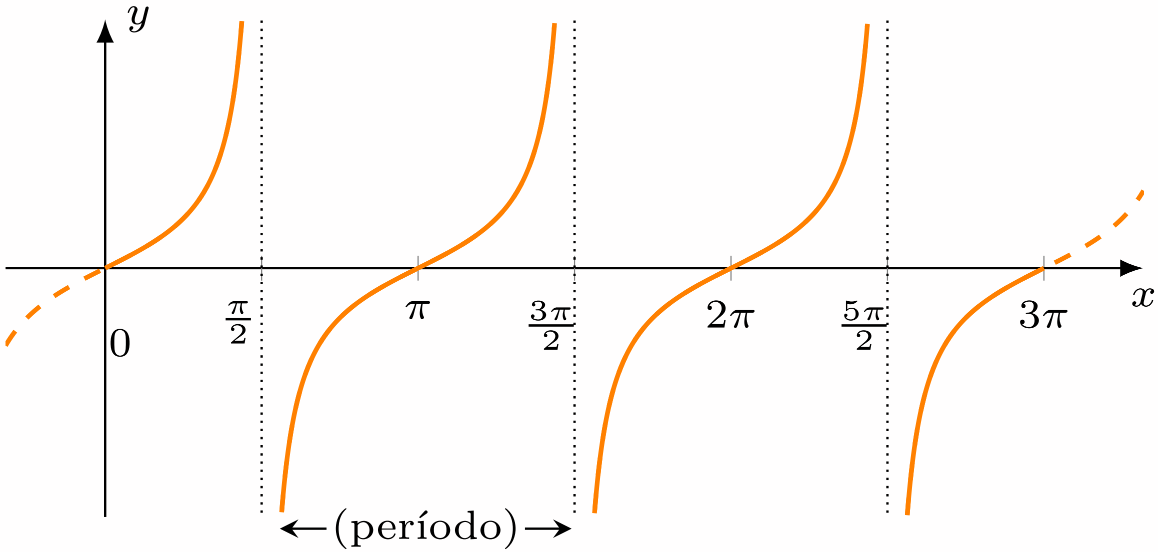
$$f(x) = \tan x.$$

Temos que a função tangente possui:

- Domínio: $\mathrm{D}(f) = A$
- Imagem: $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$
- Período: $T = \pi$ rad

Lembre que:

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

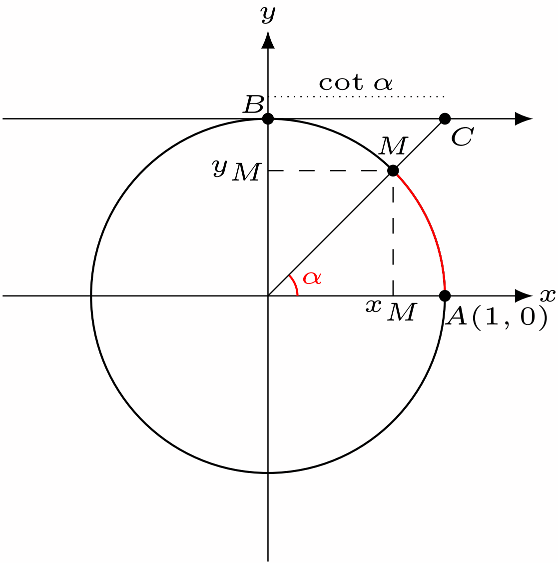


y
x
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
$\frac{5\pi}{2}$
3π
(período)

Definição 24. Cotangente no 1ºQ

Seja $M(x_M, y_M)$ a extremidade de um arco de medida α, $\alpha \in [0, \pi/2)$, e considere um eixo de mesma direção e mesmo sentido ao do eixo x, passando pelo ponto B. Chamamos de cotangente de α a medida do segmento BC, onde C é a interseção entre o novo eixo e o segmento de reta que contém a origem e M.

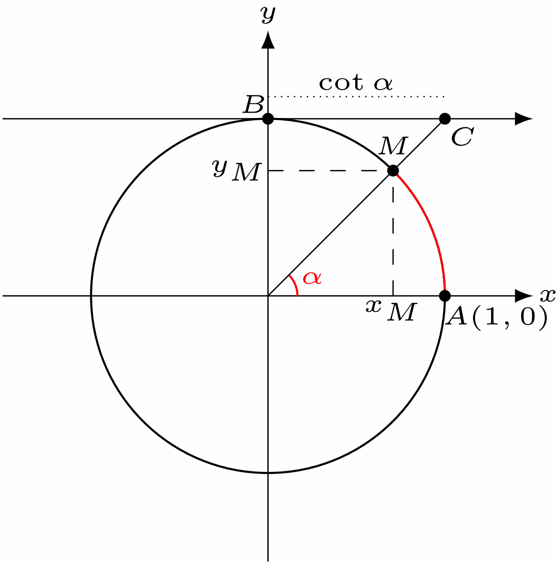
- As relações de simetria e a primeira determinação positiva serão necessárias para ampliar o conceito de cotangente para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, exceto arcos côngruos à 0 rad e à π rad.



Teorema 11. Cotangente no 1ºQ

Seja M a extremidade de um arco de medida α do 1º quadrante da circunferência trigonométrica. Então, vale a relação:

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$$



Teorema 11. Cotangente no 1ºQ

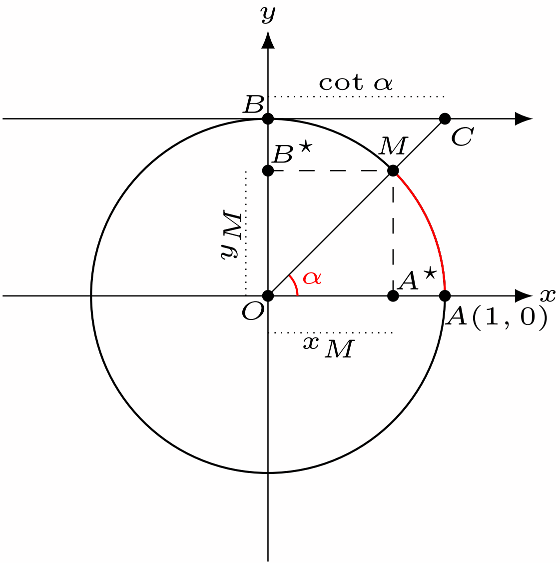
Seja M a extremidade de um arco de medida α do 1º quadrante da circunferência trigonométrica. Então, vale a relação:

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Demonstração

Por semelhança de triângulos, temos que $OBC \sim OB^\star M$, de onde decorre que:

$$\frac{\cot\alpha}{x_M} = \frac{1}{y_M} \Rightarrow \cot\alpha = \frac{x_M}{y_M} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$



Teorema 12. Cotangente de um Arco

Seja M a extremidade de um arco de medida α na circunferência trigonométrica. Então, vale a relação:

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha},$$

para $\alpha \neq k \cdot \pi$, em radianos, ou $\alpha \neq k \cdot 180°$, em graus.

Ainda, são válidas, em radianos:

1. Se $\alpha \in (\pi/2, \pi]$, então:

$$\cot\alpha = -\cot(\pi - \alpha)$$

2. Se $\alpha \in [\pi, 3\pi/2)$, então:

$$\cot\alpha = \cot(\alpha - \pi)$$

3. Se $\alpha \in (3\pi/2, 2\pi]$, então:

$$\cot\alpha = -\cot(2\pi - \alpha)$$

Ainda, são válidas, em graus:

1. Se $\alpha \in (90°, 180°]$, então:

$$\cot\alpha = -\cot(180° - \alpha)$$

2. Se $\alpha \in [180°, 270°)$, então:

$$\cot\alpha = \cot(\alpha - 180°)$$

3. Se $\alpha \in (270°, 360°]$, então:

$$\cot\alpha = -\cot(360° - \alpha)$$

Definição 25. Função Cotangente

Seja A o conjunto definido por

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \neq \pi + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

A função cotangente associa à cada $x \in A$ o número real

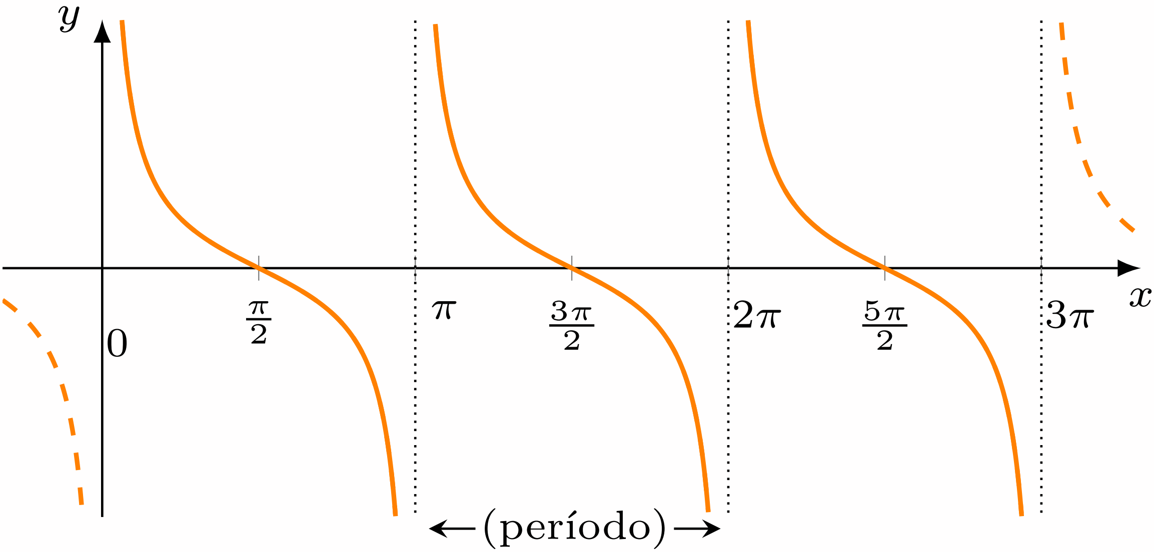
$$f(x) = \cot x.$$

Temos que a função cotangente possui:

- Domínio: $\mathrm{D}(f) = A$
- Imagem: $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$
- Período: $T = \pi$ rad

Lembre que:

$$\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

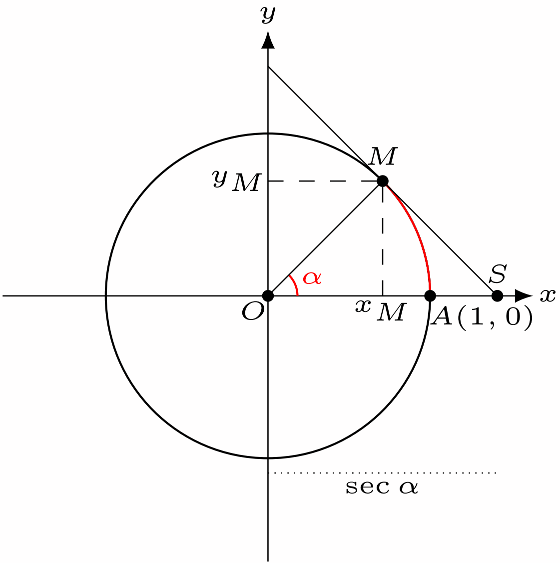


y
x
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
$\frac{5\pi}{2}$
3π
(período)

Definição 26. Secante no 1ºQ

Seja $M(x_M, y_M)$ a extremidade de um arco de medida α, $\alpha \in [0, \pi/2)$, e considere uma reta tangente à circunferência no ponto M. Chamamos de secante de α a medida do segmento OS, onde O é a origem do sistema de coordenadas e S é a interseção entre a reta e o eixo x.

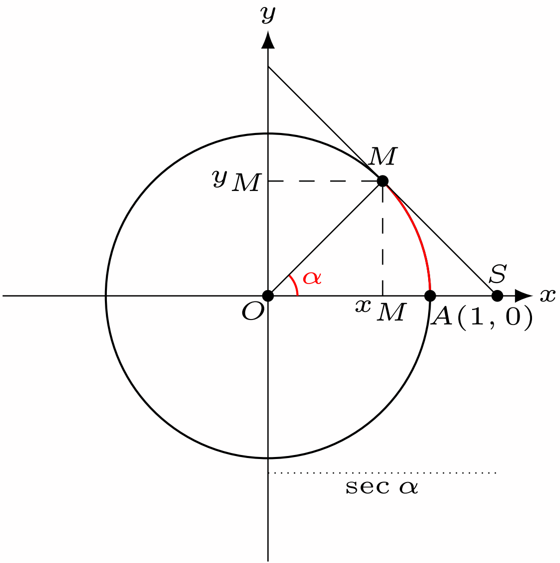
- As relações de simetria e a primeira determinação positiva serão necessárias para ampliar o conceito de secante para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, exceto arcos côngruos à $\pi/2$ rad e à $3\pi/2$ rad.



Teorema 13. Secante no 1ºQ

Seja M a extremidade de um arco de medida α do 1º quadrante da circunferência trigonométrica. Então, vale a relação:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$



Teorema 13. Secante no 1°Q

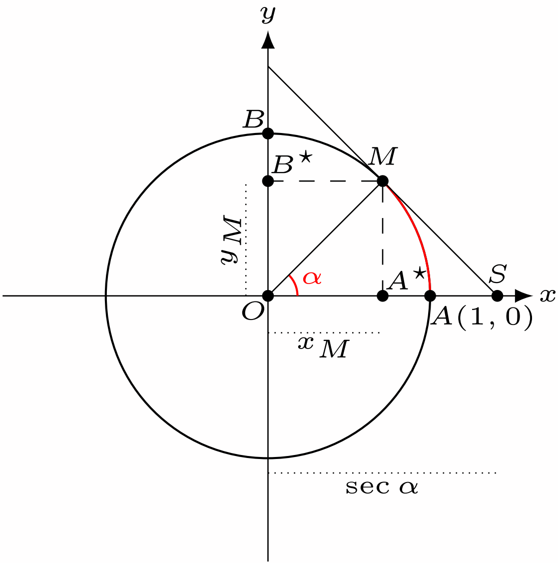
Seja M a extremidade de um arco de medida α do 1° quadrante da circunferência trigonométrica. Então, vale a relação:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

Demonstração

Por semelhança de triângulos, temos que $OSM \sim OMA^\star$, de onde decorre que:

$$\frac{\sec\alpha}{1} = \frac{1}{x_M} \Rightarrow \sec\alpha = \frac{1}{x_M} = \frac{1}{\cos\alpha}$$



Teorema 14. Secante de um Arco

Seja M a extremidade de um arco de medida α na circunferência trigonométrica. Então, vale a relação:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha},$$

para $\alpha \neq \pi/2 + k\cdot\pi$, em radianos, ou $\alpha \neq 90° + k\cdot 180°$, em graus.

Ainda, são válidas, em radianos:

1. Se $\alpha \in (\pi/2, \pi]$, então:
$$\sec\alpha = -\sec(\pi - \alpha)$$
2. Se $\alpha \in [\pi, 3\pi/2)$, então:
$$\sec\alpha = -\sec(\alpha - \pi)$$
3. Se $\alpha \in (3\pi/2, 2\pi]$, então:
$$\sec\alpha = \sec(2\pi - \alpha)$$

Ainda, são válidas, em graus:

1. Se $\alpha \in (90°, 180°]$, então:
$$\sec\alpha = -\sec(180° - \alpha)$$
2. Se $\alpha \in [180°, 270°)$, então:
$$\sec\alpha = -\sec(\alpha - 180°)$$
3. Se $\alpha \in (270°, 360°]$, então:
$$\sec\alpha = \sec(360° - \alpha)$$

Definição 27. Função Secante

Seja A o conjunto definido por

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

A função secante associa à cada $x \in A$ o número real

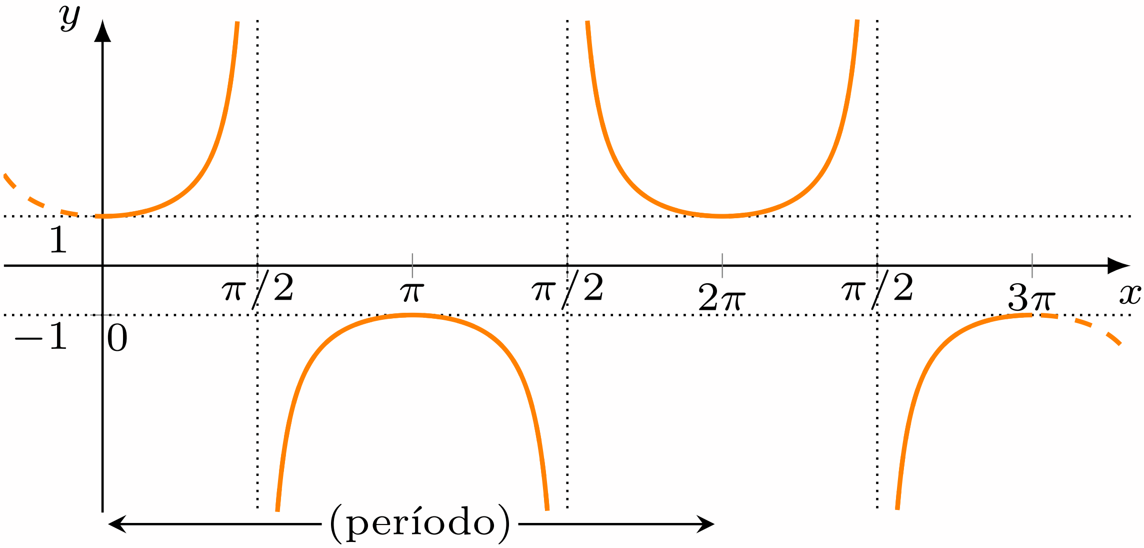
$$f(x) = \sec x.$$

Temos que a função secante possui:

- Domínio: $\mathrm{D}(f) = A$
- Imagem: $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$
- Período: $T = 2\pi$ rad

Lembre que:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

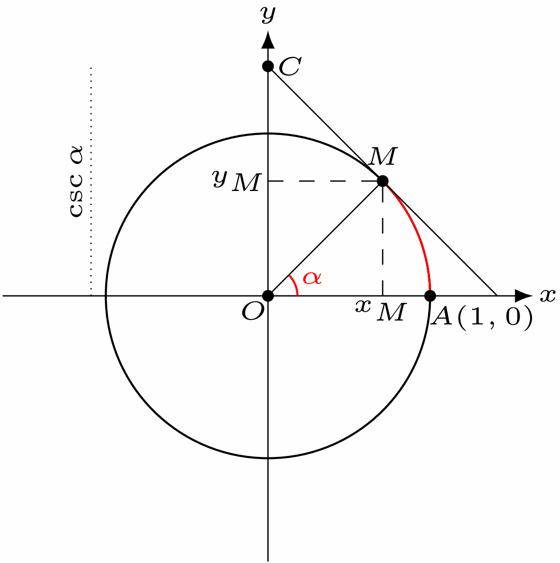


y
x
1
−1
0
π/2
π
π/2
2π
π/2
3π
(período)

Definição 28. Cossecante no 1ºQ

Seja $M(x_M, y_M)$ a extremidade de um arco de medida α, $\alpha \in [0, \pi/2)$, e considere uma reta tangente à circunferência no ponto M. Chamamos de cossecante de α a medida do segmento OC, onde O é a origem do sistema de coordenadas e C é a interseção entre a reta e o eixo y.

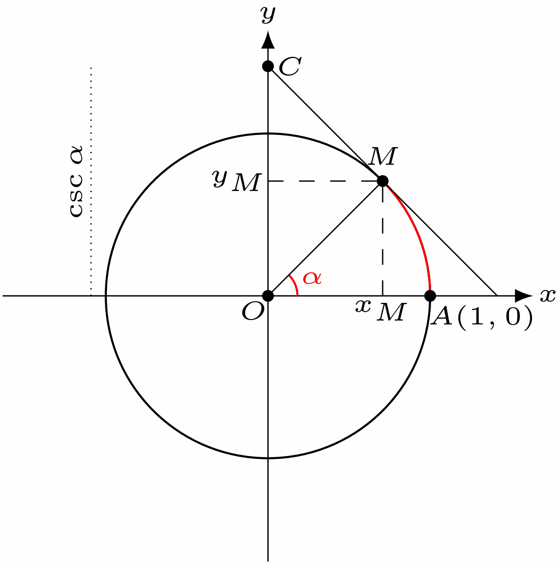
- As relações de simetria e a primeira determinação positiva serão necessárias para ampliar o conceito de cossecante para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, exceto arcos côngruos à 0 rad e à π rad.



Teorema 15. Cossecante no 1ºQ

Seja M a extremidade de um arco de medida α do 1º quadrante da circunferência trigonométrica. Então, vale a relação:

$$\csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$$



Teorema 15. Cossecante no 1ºQ

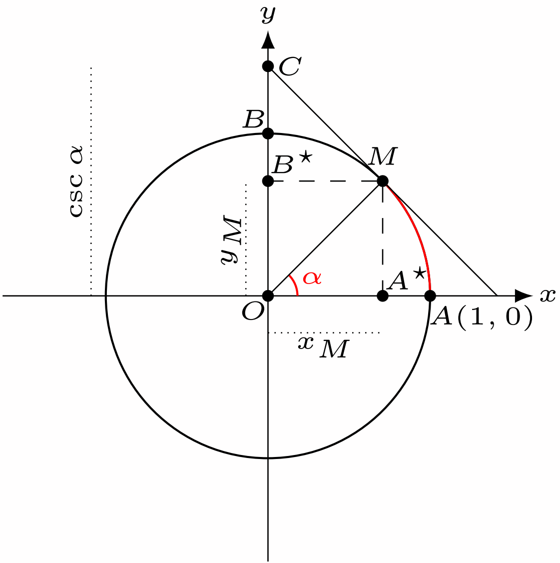
Seja M a extremidade de um arco de medida α do 1º quadrante da circunferência trigonométrica. Então, vale a relação:

$$\csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Demonstração

Por semelhança de triângulos, temos que $COM \sim OMA^{\star}$, de onde decorre que:

$$\frac{\csc\alpha}{1} = \frac{1}{y_M} \Rightarrow \csc\alpha = \frac{1}{y_M} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$$



Teorema 16. Cossecante de um Arco

Seja M a extremidade de um arco de medida α na circunferência trigonométrica. Então, vale a relação:

$$\csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha},$$

para $\alpha \neq k \cdot \pi$, em radianos, ou $\alpha \neq k \cdot 180°$, em graus.

Ainda, são válidas, em radianos:

1. Se $\alpha \in (\pi/2, \pi]$, então:

$$\sec\alpha = -\sec(\pi - \alpha)$$

2. Se $\alpha \in [\pi, 3\pi/2)$, então:

$$\sec\alpha = -\sec(\alpha - \pi)$$

3. Se $\alpha \in (3\pi/2, 2\pi]$, então:

$$\sec\alpha = \sec(2\pi - \alpha)$$

Ainda, são válidas, em graus:

1. Se $\alpha \in (90°, 180°]$, então:

$$\sec\alpha = -\sec(180° - \alpha)$$

2. Se $\alpha \in [180°, 270°)$, então:

$$\sec\alpha = -\sec(\alpha - 180°)$$

3. Se $\alpha \in (270°, 360°]$, então:

$$\sec\alpha = \sec(360° - \alpha)$$

Definição 29. Função Cossecante

Seja A o conjunto definido por

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pi + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

A função cossecante associa à cada $x \in A$ o número real

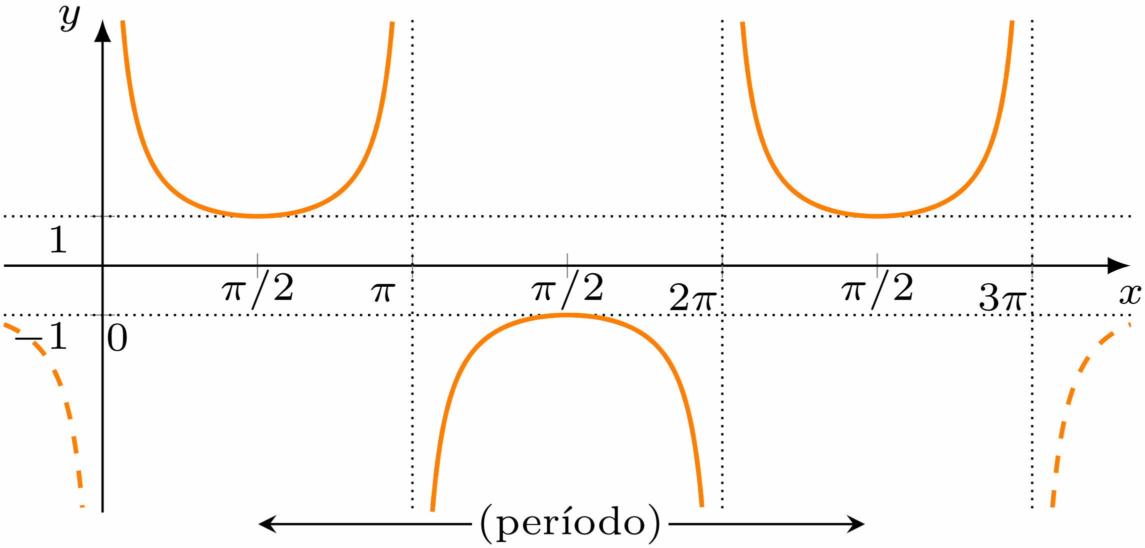
$$f(x) = \csc x.$$

Temos que a função cossecante possui:

- Domínio: $\mathrm{D}(f) = A$
- Imagem: $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$
- Período: $T = 2\pi$ rad

Lembre que:

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$



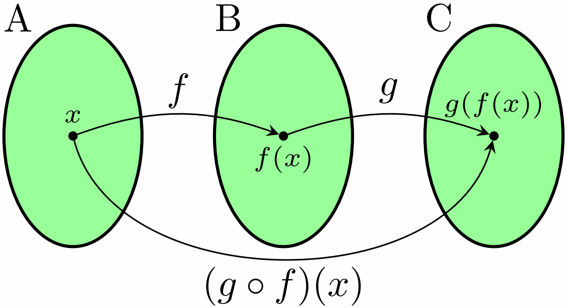
y
1
−1
0
π/2
π
π/2
2π
π/2
3π
x
(período)

Função Composta

Definição 30. Função Composta

Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções reais. Definimos a composição de g e f como a função $g \circ f : A \to C$ dada pela expressão

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$



- Lê-se: "g *composta* f" ou "g *bola* f";
- Primeiro calculamos $f(x)$; depois $g(f(x))$;
- Nos referenciamos como "função de dentro", a f, e "função de fora", a g;
- Em geral, temos que $g \circ f \neq f \circ g$;
- Definida para três ou mais funções:

$$(h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x)))$$

Exemplo 21.

Dadas as funções $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 + 1$, determine as composições a seguir, destacando os respectivos domínios.

1. $g \circ f$
2. $f \circ g$

Exemplo 22.

Expresse as funções a seguir como uma composição de funções.

1. $\tan x^5$
2. $\tan^2 x$
3. $\tan^2 x^5$
4. $(x+1)^6 = (x+1)^{2\cdot 3}$

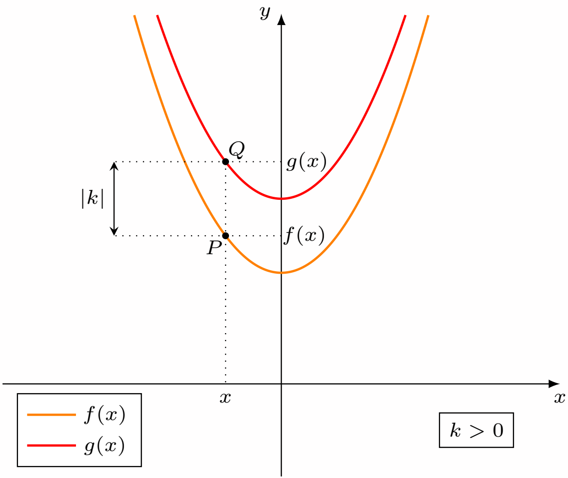
Translações, Reflexões, Alongamentos e Compressões

Definição 31. Translação Vertical

Seja f uma função real. Dado $k \in \mathbb{R}$, definimos a translação vertical de f por k unidades através da função

$$g(x) = f(x) + k.$$

- À cada ponto $P(x, f(x))$ do gráfico da f, corresponderá o ponto $Q(x, f(x)+k)$ (ou $Q(x, g(x))$) no gráfico da g;
- A distância entre os pontos P e Q sempre será de $|k|$ unidades;
- O gráfico da g com respeito ao de f:
  - *"subirá"* k unidades se $k > 0$;
- Temos que $D(g) = D(f)$ e $\mathrm{Im}(g) = \{y + k : y \in \mathrm{Im}(f)\}$.

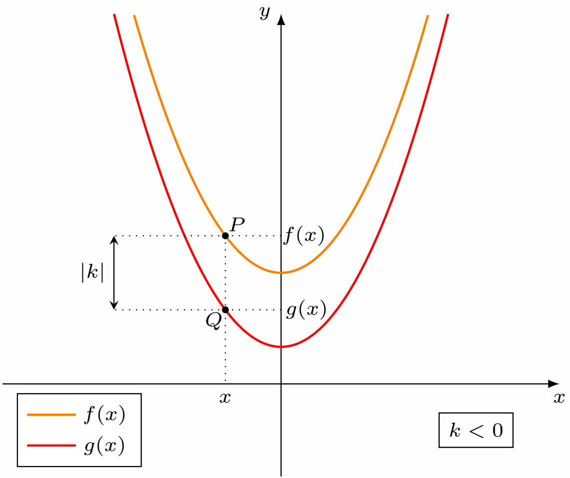


Definição 31. Translação Vertical

Seja f uma função real. Dado $k \in \mathbb{R}$, definimos a translação vertical de f por k unidades através da função

$$g(x) = f(x) + k.$$

- À cada ponto $P(x,\ f(x))$ do gráfico da f, corresponderá o ponto $Q(x, f(x) + k)$ (ou $Q(x, g(x))$) no gráfico da g;
- A distância entre os pontos P e Q sempre será de $|k|$ unidades;
- O gráfico da g com respeito ao de f:
  - *"subirá"* k unidades se $k > 0$;
  - *"descerá"* $|k|$ unidades se $k < 0$.
- Temos que $\mathrm{D}(g) = \mathrm{D}(f)$ e $\mathrm{Im}(g) = \{y + k\ :\ y \in \mathrm{Im}(f)\}$.

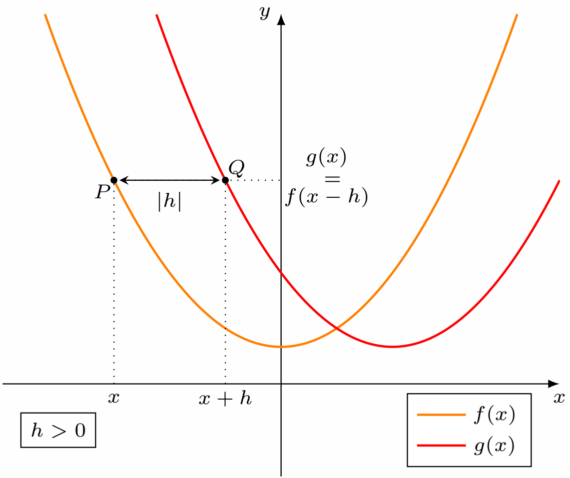


Definição 32. Translação Horizontal

Seja f uma função real. Dado $h \in \mathbb{R}$, definimos a translação horizontal de f por h unidades através da função

$$g(x) = f(x - h).$$

- À cada ponto $P(x,\ f(x))$ do gráfico da f, corresponderá o ponto $Q(x + h, g(x + h))$ (ou $Q(x + h, f(x))$) no gráfico da g;
- A distância entre os pontos P e Q sempre será de $|h|$ unidades;
- O gráfico da g com respeito ao de f:
  - *"avançará"* h unidades se $h > 0$;
- Temos que $D(g) = \{x : x - h \in D(f)\}$ e $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f)$.

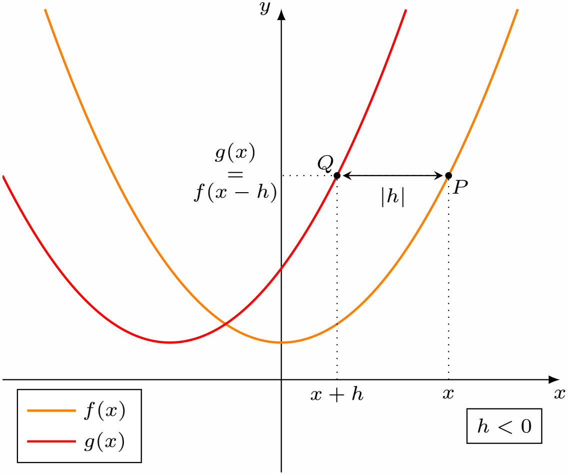


Definição 32. Translação Horizontal

Seja f uma função real. Dado $h \in \mathbb{R}$, definimos a translação horizontal de f por h unidades através da função

$$g(x) = f(x - h).$$

- À cada ponto $P(x,\ f(x))$ do gráfico da f, corresponderá o ponto $Q(x+h, g(x+h))$ (ou $Q(x+h, f(x))$) no gráfico da g;
- A distância entre os pontos P e Q sempre será de $|h|$ unidades;
- O gráfico da g com respeito ao de f:
  - *"avançará"* h unidades se $h > 0$;
  - *"retrocederá"* $|h|$ unidades se $h < 0$.
- Temos que $D(g) = \{x \ :\ x - h \in D(f)\}$ e $Im(g) = Im(f)$.

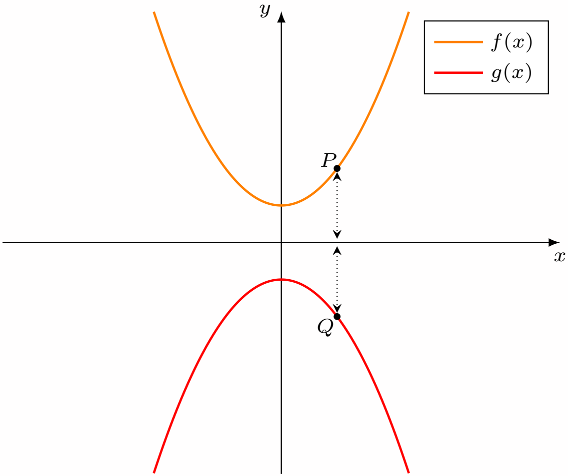


Definição 33. Reflexão em Torno de Ox

Seja f uma função real. Definimos a reflexão de f em torno do eixo x por meio da função

$$g(x) = -f(x).$$

- À cada ponto $P(x,\ f(x))$ do gráfico da f, corresponderá o ponto $Q(x, g(x))$ (ou $Q(x, -f(x))$) no gráfico da g;
- A distância entre o ponto P e o eixo x é a mesma entre o ponto Q e o eixo x;
- Os pontos P e Q são simétricos com respeito ao eixo x;
- Temos que $\mathrm{D}(g) = \mathrm{D}(f)$ e $\mathrm{Im}(g) = \{-y\ :\ y \in \mathrm{Im}(f)\}$.

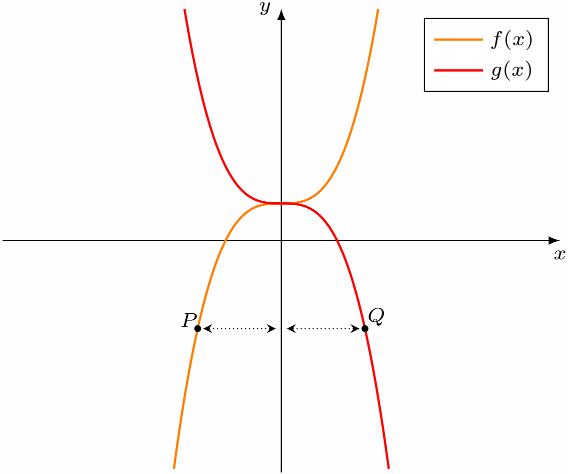


Definição 34. Reflexão em Torno de Oy

Seja f uma função real. Definimos a reflexão de f em torno do eixo x por meio da função

$$g(x) = f(-x).$$

- À cada ponto $P(x,\ f(x))$ do gráfico da f, corresponderá o ponto $Q(-x, g(-x))$ (ou $Q(-x, f(x))$) no gráfico da g;
- A distância entre o ponto P e o eixo y é a mesma entre o ponto Q e o eixo y;
- Os pontos P e Q são simétricos com respeito ao eixo y;
- Temos que $\mathrm{D}(g) = \{x\ :\ -x \in \mathrm{D}(f)\}$ e $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f)$.

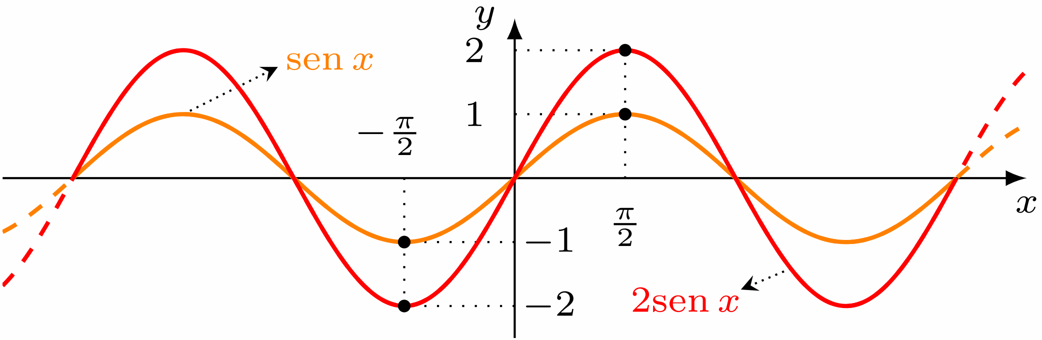


Definição 35. Alongamento Vertical

Seja f uma função real. Dado $a \in \mathbb{R}$, com $a > 1$, definimos o alongamento vertical (ou dilatação vertical) de f em por meio da função

$$g(x) = a \cdot f(x).$$

- À cada ponto $P(x, f(x))$ do gráfico da f, corresponderá o ponto $Q(x, g(x))$ (ou $Q(x, a \cdot f(x))$) no gráfico da g;
- Alonga o gráfico da f verticalmente por um fator de a;
- Temos que $\mathrm{D}(g) = \mathrm{D}(f)$ e $\mathrm{Im}(g) = \{a \cdot y : y \in \mathrm{Im}(f)\}$.

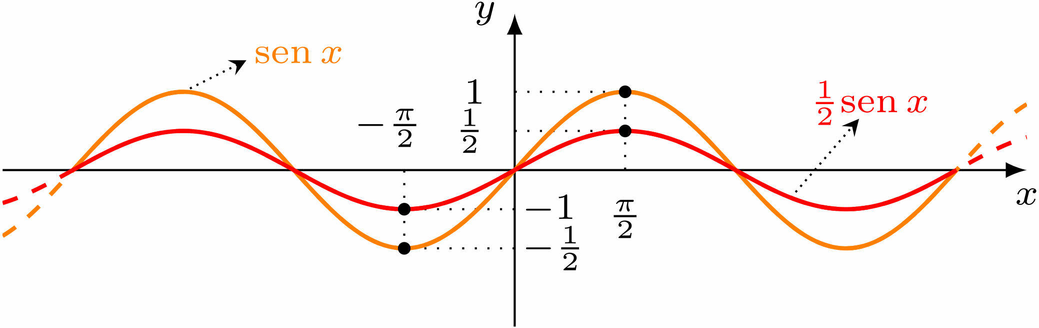


Definição 36. Compressão Vertical

Seja f uma função real. Dado $a \in \mathbb{R}$, com $0 < a < 1$, definimos a compressão vertical (ou contração vertical) de f em por meio da função

$$g(x) = a \cdot f(x).$$

- À cada ponto $P(x,\ f(x))$ do gráfico da f, corresponderá o ponto $Q(x, g(x))$ (ou $Q(x, a \cdot f(x))$) no gráfico da g;
- Comprime o gráfico da f verticalmente por um fator de a;
- Temos que $\mathrm{D}(g) = \mathrm{D}(f)$ e $\mathrm{Im}(g) = \{a \cdot y : y \in \mathrm{Im}(f)\}$.

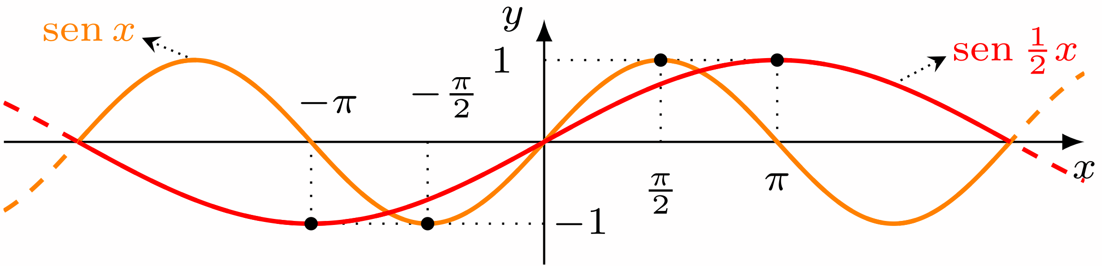


Definição 37. Alongamento Horizontal

Seja f uma função real. Dado $b \in \mathbb{R}$, com $0 < b < 1$, definimos o alongamento horizontal (ou dilatação horizontal) de f em por meio da função

$$g(x) = f(b \cdot x).$$

- À cada ponto $P(x,\ f(x))$ do gráfico da f, corresponderá o ponto $Q(x/b, g(x/b))$ (ou $Q\,(x/b\,, f(x)))$ no gráfico da g;
- Alonga o gráfico da f horizontalmente por um fator de $1/b$;
- Temos que $\mathrm{D}(g) = \{x\ :\ b \cdot x \in \mathrm{D}(f)\}$ e $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f)$.

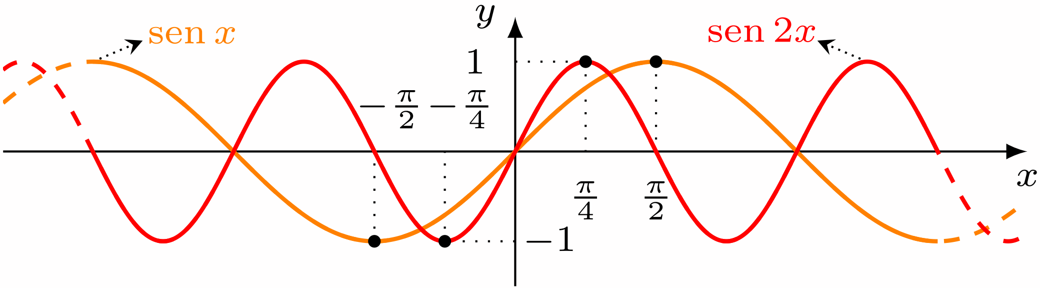


Definição 38. Compressão Horizontal

Seja f uma função real. Dado $b \in \mathbb{R}$, com $b > 1$, definimos a compressão horizontal (ou contração horizontal) de f em por meio da função

$$g(x) = f(b \cdot x).$$

- À cada ponto $P(x,\ f(x))$ do gráfico da f, corresponderá o ponto $Q(x/b, g(x/b))$ (ou $Q\,(x/b\,,\,f(x)))$ no gráfico da g;
- Alonga o gráfico da f horizontalmente por um fator de $1/b$;
- Temos que $\mathrm{D}(g) = \{x \,:\, b \cdot x \in \mathrm{D}(f)\}$ e $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f)$.



Função Definida por Partes

Definição 39. Função Definida por Várias Sentenças

Chamamos de **função definida por várias sentenças** (ou definida por partes) qualquer função definida através de múltiplas sub-funções, onde cada uma é aplicada em um sub-intervalo diferente do domínio.

Observações:

1. Uma função definida por várias sentenças é apenas uma maneira de expressar a função, não alguma característica da função em si;
2. Tipicamente definimos a função definida por várias sentenças como ao lado;
3. Os intervalos $I_1, I_2, \cdots, I_n$ devem ser disjuntos;
4. $D(f) = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n$.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in I_1, \\ f_2(x), & x \in I_2, \\ & \vdots \\ f_n(x), & x \in I_n \end{cases}$$

Exemplo 23.

Uma empresa distribuidora de água cobra mensalmente R$ 30,00 por um consumo de até 5 m^3. Caso o consumo residencial ultrapasse 5 m^3, cobra-se R$ 6,00 por cada m^3.

Exemplo 23.

Uma empresa distribuidora de água cobra mensalmente R$ 30,00 por um consumo de até 5 m^3. Caso o consumo residencial ultrapasse 5 m^3, cobra-se R$ 6,00 por cada m^3.

Determine:

1. O valor da conta para um consumo de 4,7 m^3;

Exemplo 23.

Uma empresa distribuidora de água cobra mensalmente R$ 30,00 por um consumo de até 5 m^3. Caso o consumo residencial ultrapasse 5 m^3, cobra-se R$ 6,00 por cada m^3.

Determine:

1. O valor da conta para um consumo de 4,7 m^3;
2. O valor da conta para um consumo de 8,5 m^3;

Exemplo 23.

Uma empresa distribuidora de água cobra mensalmente R$ 30,00 por um consumo de até 5 m^3. Caso o consumo residencial ultrapasse 5 m^3, cobra-se R$ 6,00 por cada m^3.

Determine:

1. O valor da conta para um consumo de 4,7 m^3;
2. O valor da conta para um consumo de 8,5 m^3;
3. Determine a lei para o valor da conta C em função do consumo x;

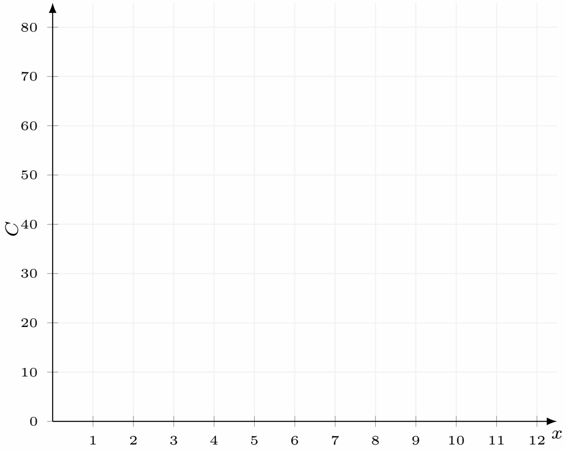
Exemplo 23.

Uma empresa distribuidora de água cobra mensalmente R$ 30,00 por um consumo de até 5 m^3. Caso o consumo residencial ultrapasse 5 m^3, cobra-se R$ 6,00 por cada m^3.

Determine:

1. O valor da conta para um consumo de 4,7 m^3;
2. O valor da conta para um consumo de 8,5 m^3;
3. Determine a lei para o valor da conta C em função do consumo x;
4. Construa o gráfico da função $C(x)$:

$$C(x) = \begin{cases} 30, & x \in [0,\ 5], \\ 6x, & x \in \,]5,\ \infty[. \end{cases}$$



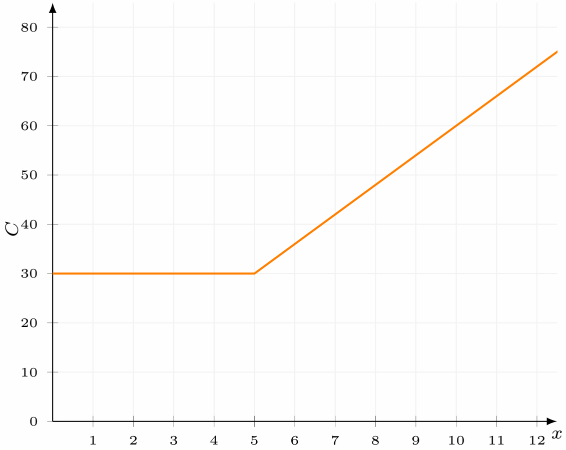
Exemplo 23.

Uma empresa distribuidora de água cobra mensalmente R$ 30,00 por um consumo de até 5 m^3. Caso o consumo residencial ultrapasse 5 m^3, cobra-se R$ 6,00 por cada m^3.

Determine:

1. O valor da conta para um consumo de 4,7 m^3;
2. O valor da conta para um consumo de 8,5 m^3;
3. Determine a lei para o valor da conta C em função do consumo x;
4. Construa o gráfico da função $C(x)$:

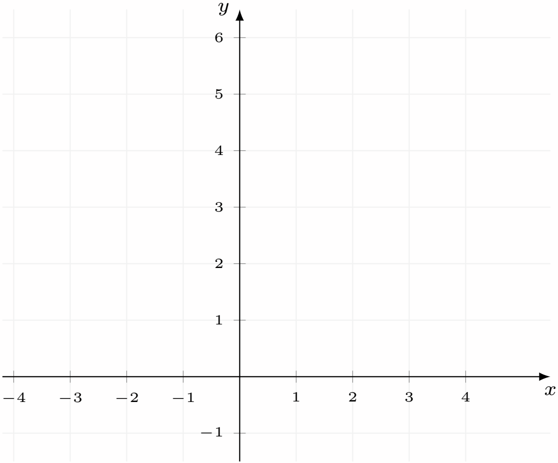
$$C(x) = \begin{cases} 30, & x \in [0,\ 5], \\ 6x, & x \in\ ]5,\ \infty[. \end{cases}$$



Exemplo 24.

Sobre a função a seguir, determine o domínio, a imagem e esboce o gráfico.

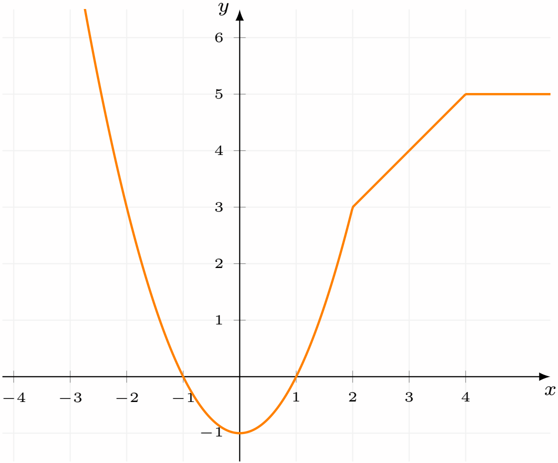
$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 2, \\ x + 1, & 2 \leq x < 4, \\ 5, & x \geq 4. \end{cases}$$



Exemplo 24.

Sobre a função a seguir, determine o domínio, a imagem e esboce o gráfico.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 2, \\ x + 1, & 2 \leq x < 4, \\ 5, & x \geq 4. \end{cases}$$



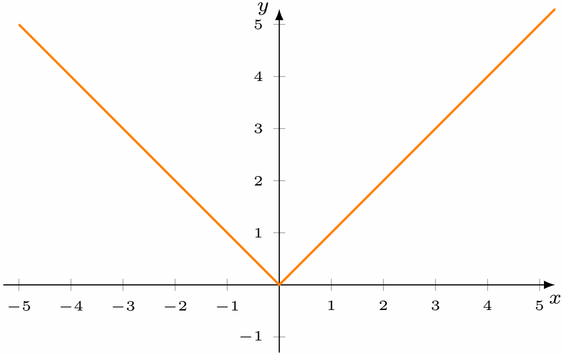
Definição 40. Função Modular

Chamamos de **função modular** a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por meio da lei

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Observações:

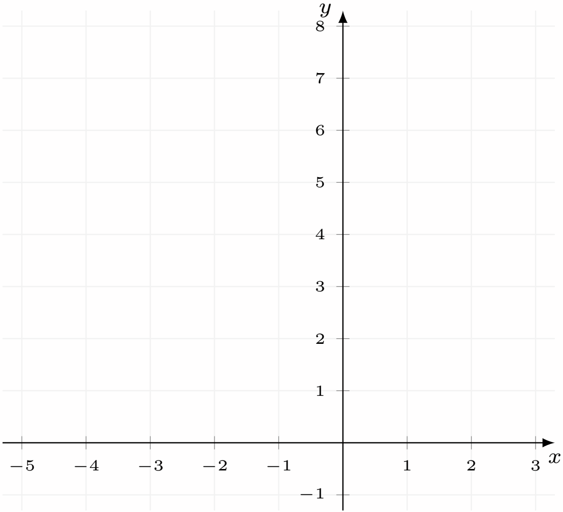
1. Também é chamada de *valor absoluto* do número x;
2. Representa a *distância* de x à origem;
3. $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+$;
4. Função par.



Exemplo 25.

Determine o gráfico das seguintes funções.

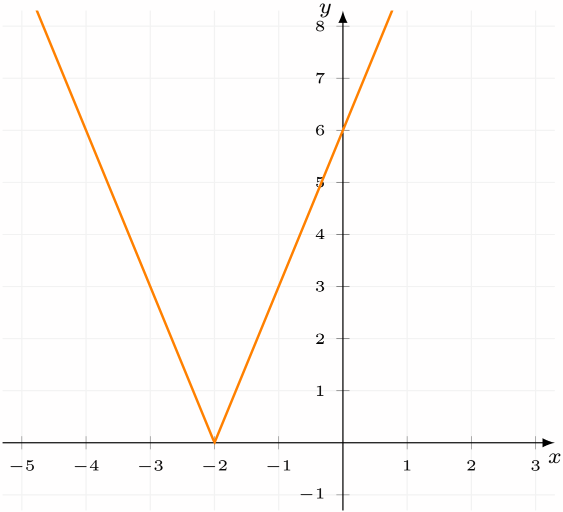
1. $f(x) = |3x + 6|$



Exemplo 25.

Determine o gráfico das seguintes funções.

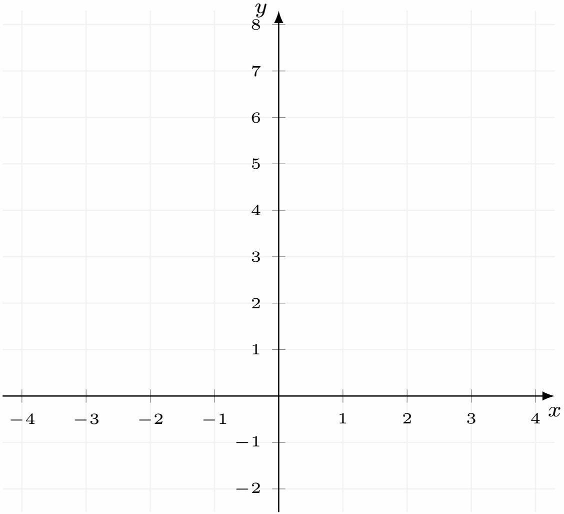
1. $f(x) = |3x + 6|$



Exemplo 25.

Determine o gráfico das seguintes funções.

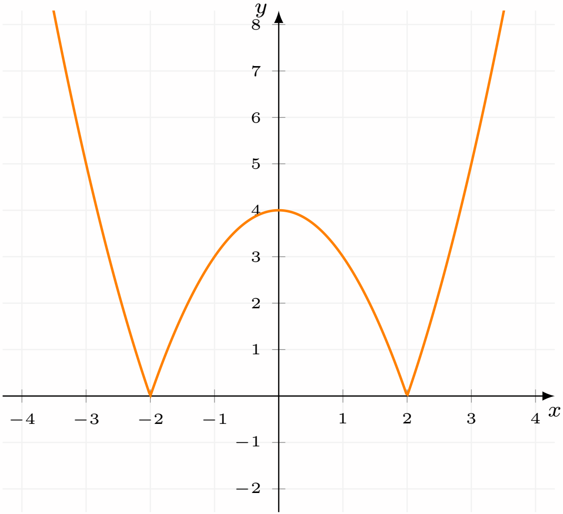
2 $f(x) = |x^2 - 4|$



Exemplo 25.

Determine o gráfico das seguintes funções.

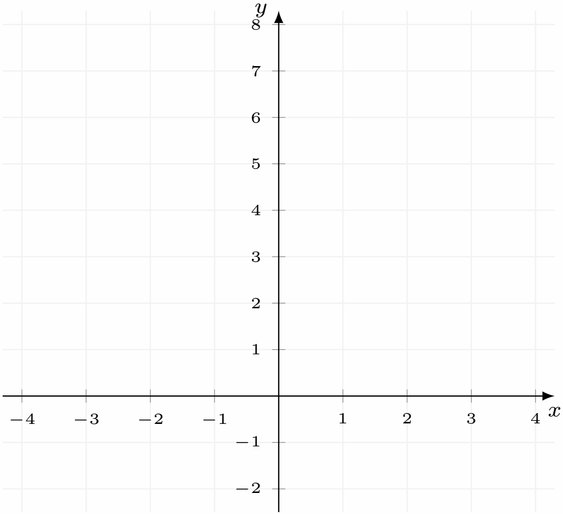
2. $f(x) = |x^2 - 4|$



Exemplo 25.

Determine o gráfico das seguintes funções.

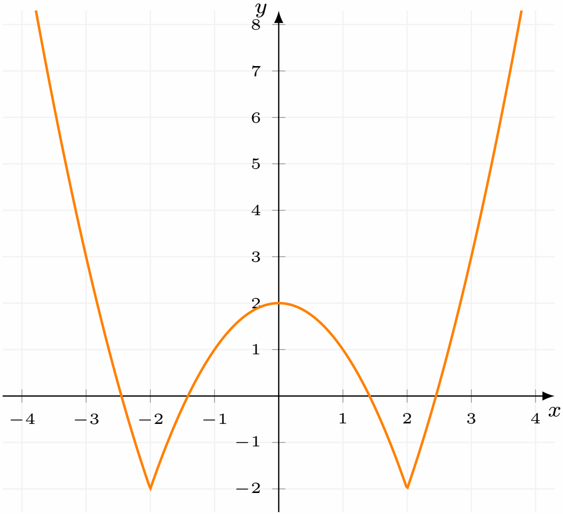
3. $f(x) = |x^2 - 4| - 2$



Exemplo 25.

Determine o gráfico das seguintes funções.

3. $f(x) = |x^2 - 4| - 2$

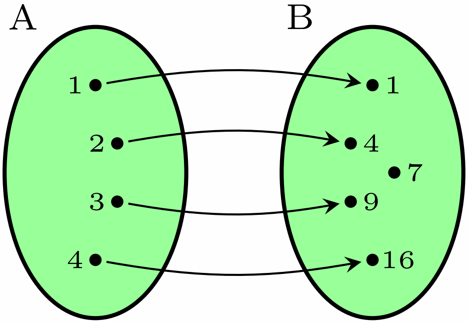


Funções Injetoras, Sobrejetoras, Bijetoras e Inversas

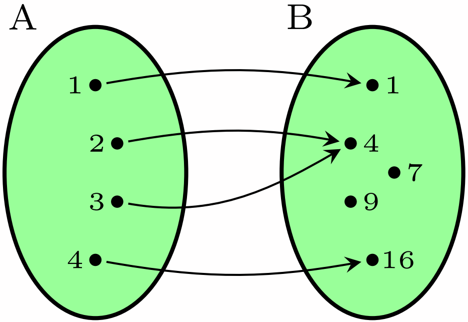
Definição 41. Função Injetora

Seja $f : A \to B$ uma função. Dizemos que f é uma **função injetora** se esta *nunca repete os seus valores*. Em outras palavras, as *imagens de elementos distintos do domínio são distintas*:

$$\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$



É uma função injetora

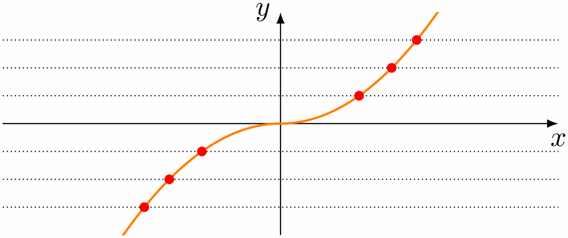


NÃO é uma função injetora

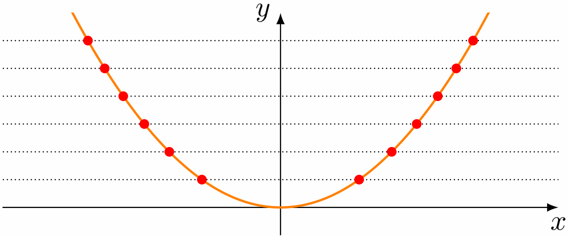
Teorema 17. Teste da Reta Horizontal

Seja $f : A \to B$ uma função real. Então, f é uma **função injetora** se, e somente se, qualquer reta horizontal interceptar o seu gráfico *no máximo* uma vez.

- Não podemos analisar analiticamente todos os valores do domínio da função para verificar se ela é ou não injetora;
- Uma reta horizontal interceptar duas vezes o gráfico da função significaria a existência de x_1 e x_2 em A, distintos, para os quais $f(x_1) = f(x_2)$;
- Dessa forma, f não poderá ser injetora se interceptada mais de uma vez por uma reta horizontal.



É uma função injetora

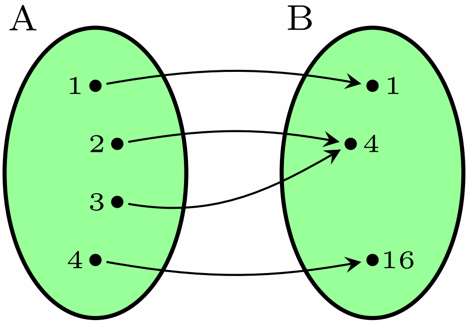


NÃO é uma função injetora

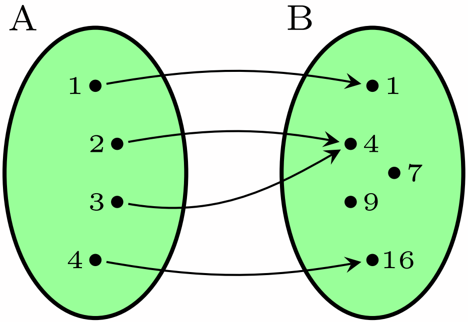
Definição 42. Função Sobrejetora

Seja $f : A \to B$ uma função. Dizemos que f é uma **função sobrejetora** se cada elemento de seu contradomínio é imagem de *ao menos um* elemento de seu domínio. Em outras palavras, para cada $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$, resultando em:

$$B = \mathrm{Im}(f)$$



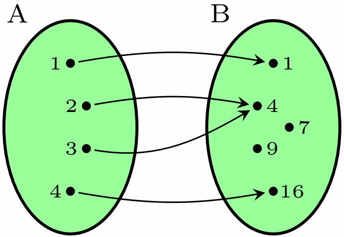
É uma função sobrejetora



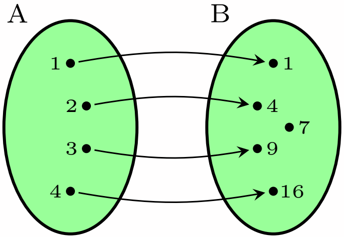
NÃO é uma função sobrejetora

Definição 43. Função Bijetora

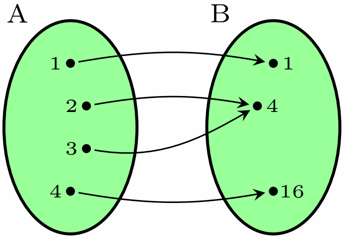
Seja $f : A \to B$ uma função. Dizemos que f é uma **função bijetora** se esta for, ao mesmo tempo, *injetora e sobrejetora*.



NÃO é uma função bijetora



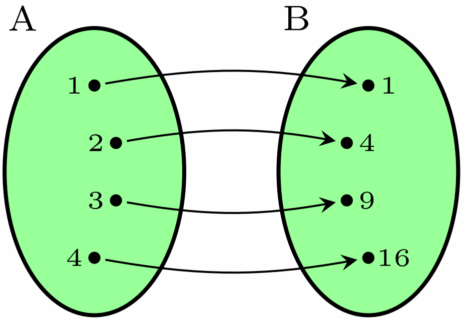
NÃO é uma função bijetora



NÃO é uma função bijetora

Definição 43. Função Bijetora

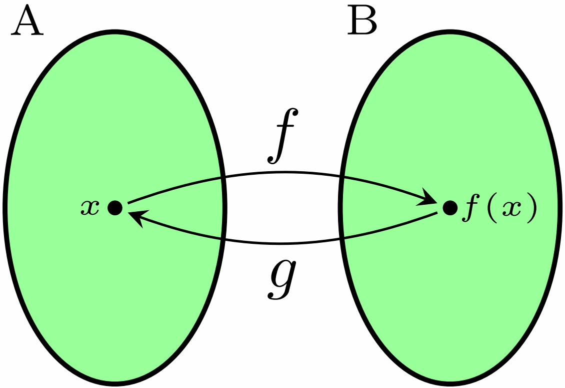
Seja $f : A \to B$ uma função. Dizemos que f é uma **função bijetora** se esta for, ao mesmo tempo, *injetora e sobrejetora*.



É uma função bijetora

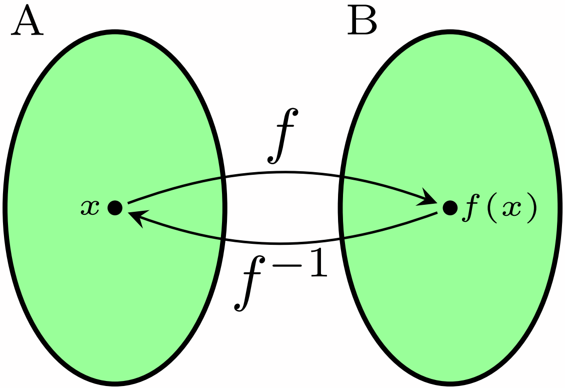
Definição 44. Função Inversa

Seja $f : A \to B$ uma função. Dizemos que f admite **inversa** se existir uma função $g : B \to A$ tal que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in A$ e $f(g(y)) = y$ para todo $y \in B$.



Definição 44. Função Inversa

Seja $f : A \to B$ uma função. Dizemos que f admite **inversa** se existir uma função $g : B \to A$ tal que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in A$ e $f(g(y)) = y$ para todo $y \in B$.

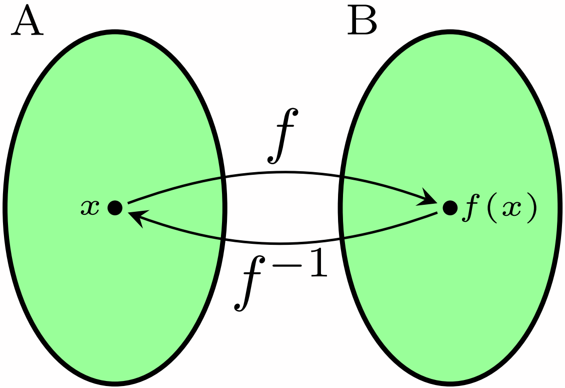


Observações:

1. A inversa, *quando existir*, é **única**. Por isso, denotamos $g = f^{-1}$;

Definição 44. Função Inversa

Seja $f : A \to B$ uma função. Dizemos que f admite **inversa** se existir uma função $g : B \to A$ tal que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in A$ e $f(g(y)) = y$ para todo $y \in B$.



Observações:

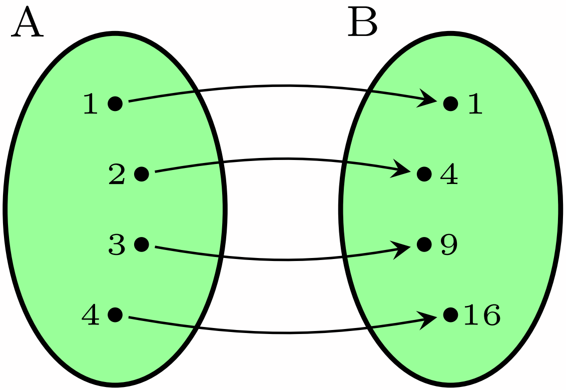
1. A inversa, *quando existir*, é **única**. Por isso, denotamos $g = f^{-1}$;
2. Ainda, podemos reescrever:
$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ e } f(f^{-1}(y)) = y$$
para cada $x \in A$ e $y \in B$;
3. Ainda, temos que:
$$\mathrm{D}(f^{-1}) = \mathrm{Cd}(f) \text{ e } \mathrm{Cd}(f^{-1}) = \mathrm{D}(f);$$
4. Não confundir f^{-1} com $\dfrac{1}{f}$.

Teorema 18. Existência da Função Inversa

Seja $f : A \to B$ uma função. Então, f **admite uma inversa** se, e somente se, f for uma função **bijetora**.

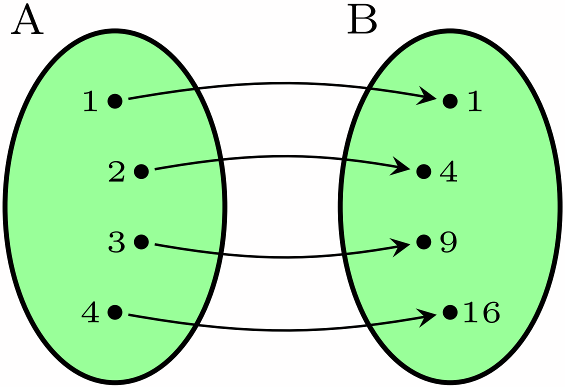
Dem.: (f invertível $\Rightarrow f$ bijetora)

- Lembre que f^{-1} é uma função de B em A;
- A condição $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo $x \in A$ implica que f deve ser uma função injetora, do contrário um elemento de B poderia possuir duas (ou mais) imagens;
- A condição $f(f^{-1}(y)) = y$ para todo $y \in B$ implica que f deve ser uma função sobrejetora, pois y é imagem de $f^{-1}(y)$ pela f.



Teorema 19. Existência da Função Inversa

Seja $f : A \to B$ uma função. Então, f **admite uma inversa** se, e somente se, f for uma função **bijetora**.



Dem.: (f invertível $\Leftarrow$ f bijetora)

- Como f é sobrejetora, dado $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$;
- Como f é injetora, não existe outro x com tal propriedade;
- Com isso, podemos definir a função f^{-1} através da lei $f^{-1}(y) = x$;
- Dessa forma, temos que:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \Leftrightarrow f(f^{-1}(y)) = y$$

Definição 45. Obtenção da Função Inversa

Dada uma função $f : A \to B$, injetora, alguns passos são úteis no processo de determinação da sua função inversa f^{-1}:

1. Escrever $y = f(x)$;
2. Substituir y por x e x por y na expressão;
3. Isolar y em função de x para obter $y = f^{-1}(x)$.

Importante:

- Nem sempre é possível realizar o **Passo 3** de maneira analítica!

Exemplo 26.

Determine, se possível, inversas para as funções a seguir:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 1;$
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x^2 + 1;$
3. $h : \mathbb{R} \to [1, +\infty), h(x) = x^2 + 1;$
4. $p : \mathbb{R}_+ \to [1, +\infty), p(x) = x^2 + 1.$

Teorema 20. Gráfico da Função Inversa

Seja $f : A \to B$ uma função bijetora. Então, o gráfico da função inversa $f^{-1} : B \to A$ é obtido pela reflexão do gráfico da função f em torno da reta $y = x$.

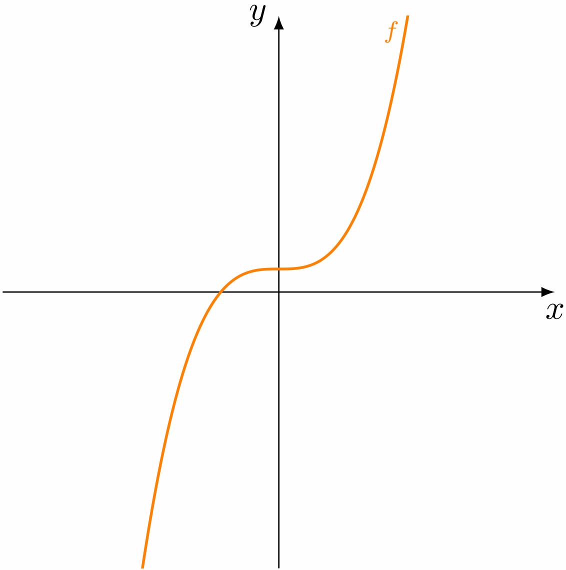
Para esboçar:

Teorema 20. Gráfico da Função Inversa

Seja $f : A \to B$ uma função bijetora. Então, o gráfico da função inversa $f^{-1} : B \to A$ é obtido pela reflexão do gráfico da função f em torno da reta $y = x$.

Para esboçar:

1. Esboçar o gráfico de $y = f(x)$;

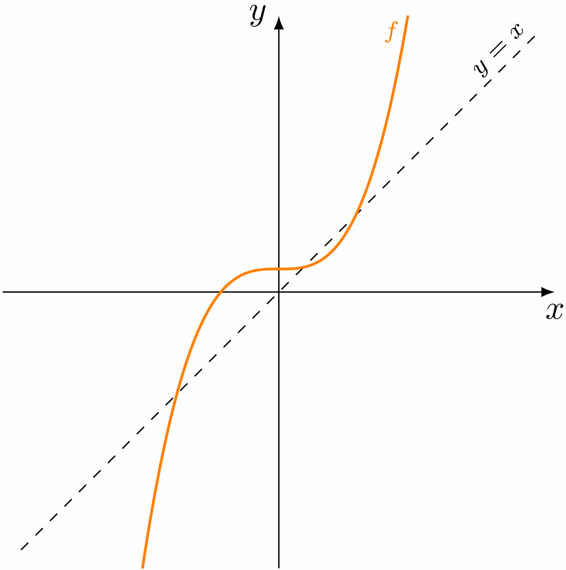


Teorema 20. Gráfico da Função Inversa

Seja $f : A \to B$ uma função bijetora. Então, o gráfico da função inversa $f^{-1} : B \to A$ é obtido pela reflexão do gráfico da função f em torno da reta $y = x$.

Para esboçar:

1. Esboçar o gráfico de $y = f(x)$;
2. Esboçar a reta $y = x$;

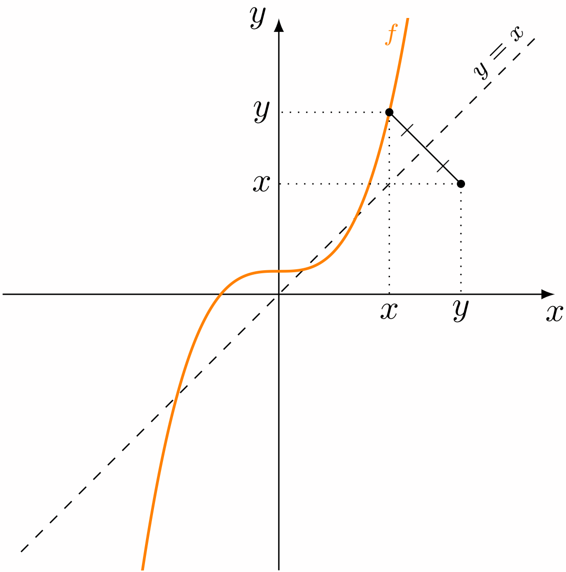


Teorema 20. Gráfico da Função Inversa

Seja $f : A \to B$ uma função bijetora. Então, o gráfico da função inversa $f^{-1} : B \to A$ é obtido pela reflexão do gráfico da função f em torno da reta $y = x$.

Para esboçar:

1. Esboçar o gráfico de $y = f(x)$;
2. Esboçar a reta $y = x$;
3. À cada ponto (x, y) do gráfico da f, determinar a sua reflexão em torno da reta $y = x$, o ponto (y, x);

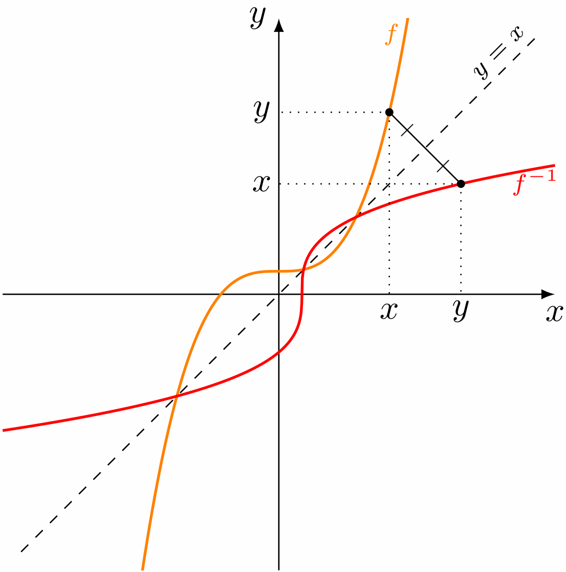


Teorema 20. Gráfico da Função Inversa

Seja $f : A \to B$ uma função bijetora. Então, o gráfico da função inversa $f^{-1} : B \to A$ é obtido pela reflexão do gráfico da função f em torno da reta $y = x$.

Para esboçar:

1. Esboçar o gráfico de $y = f(x)$;
2. Esboçar a reta $y = x$;
3. À cada ponto (x, y) do gráfico da f, determinar a sua reflexão em torno da reta $y = x$, o ponto (y, x);
4. Esboçar o gráfico da f^{-1} com base nos pontos obtidos no **Passo 3**.

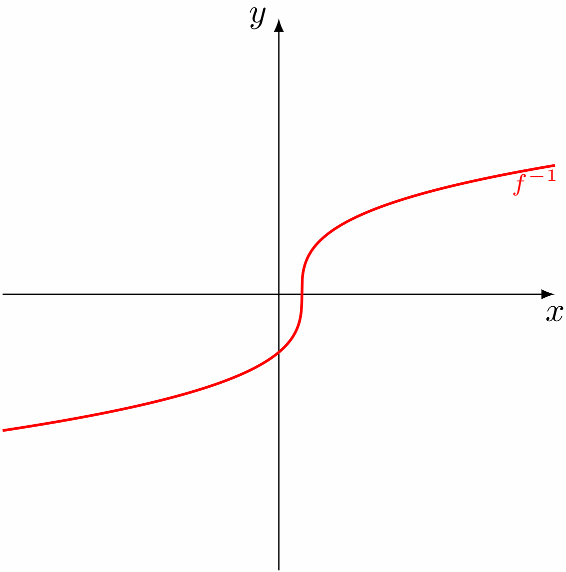


Teorema 20. Gráfico da Função Inversa

Seja $f : A \to B$ uma função bijetora. Então, o gráfico da função inversa $f^{-1} : B \to A$ é obtido pela reflexão do gráfico da função f em torno da reta $y = x$.

Para esboçar:

1. Esboçar o gráfico de $y = f(x)$;
2. Esboçar a reta $y = x$;
3. À cada ponto (x, y) do gráfico da f, determinar a sua reflexão em torno da reta $y = x$, o ponto (y, x);
4. Esboçar o gráfico da f^{-1} com base nos pontos obtidos no **Passo 3**.



Exemplo 27.

Esboce o gráfico das inversas das funções a seguir.

1. $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, onde $f(x) = x^4$;
2. $g : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+$, onde $g(x) = x^4$;
3. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, onde $h(x) = 2^x$.
4. $p : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, onde $p(x) = \operatorname{sen} x$.

Funções Logarítmicas

Definição 46. Logaritmo

Sendo a e b números reais e positivos, com $a \neq 1$. Chamamos de **logaritmo de b na base a** o expoente x ao qual se deve elevar a base a de modo que a potência a^x seja igual a b. Em outras palavras, define-se o logaritmo de b na base a por meio da relação:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b.$$

Temos que:

- a ($a > 0$ e $a \neq 1$) é a **base** do logaritmo;
- b ($b > 0$) é o **logaritmando**;
- x é o **logaritmo**.

Propriedades dos Logaritmos:

1. $\log_a 1 = 0; \log_a a = 1;$
2. $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c;$
3. $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c;$
4. $\log_a b^m = m \cdot \log_a b;$
5. $\log_c b = \dfrac{\log_a b}{\log_a c}.$

Bases especiais:

1. $\log b = \log_{10} b;$
2. $\lg 2 = \log_2 b;$
3. $\ln b = \log_b x$, com $e = 2.71828\ldots$ (**logaritmo natural**)

Exemplo 28.

Calcule os logaritmos que seguem.

1. $\log_4 16$
2. $\log \sqrt[3]{100}$
3. $\log 5$

Definição 47. Função Logarítmica

Dados um número real a (com $0 < a \neq 1$), definimos a **função logarítmica** de base a como $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dada pela lei

$$f(x) = \log_a x.$$

Casos especiais:

1. Se $a = 10$, denotamos $f(x) = \log x$;
2. Se $a = 2$, denotamos $f(x) = \lg x$;
3. Se $a = e$, denotamos $f(x) = \ln x$.

Teorema 21. Inversa da Exponencial

A função logarítmica de base a é a **inversa** da função exponencial de base a.

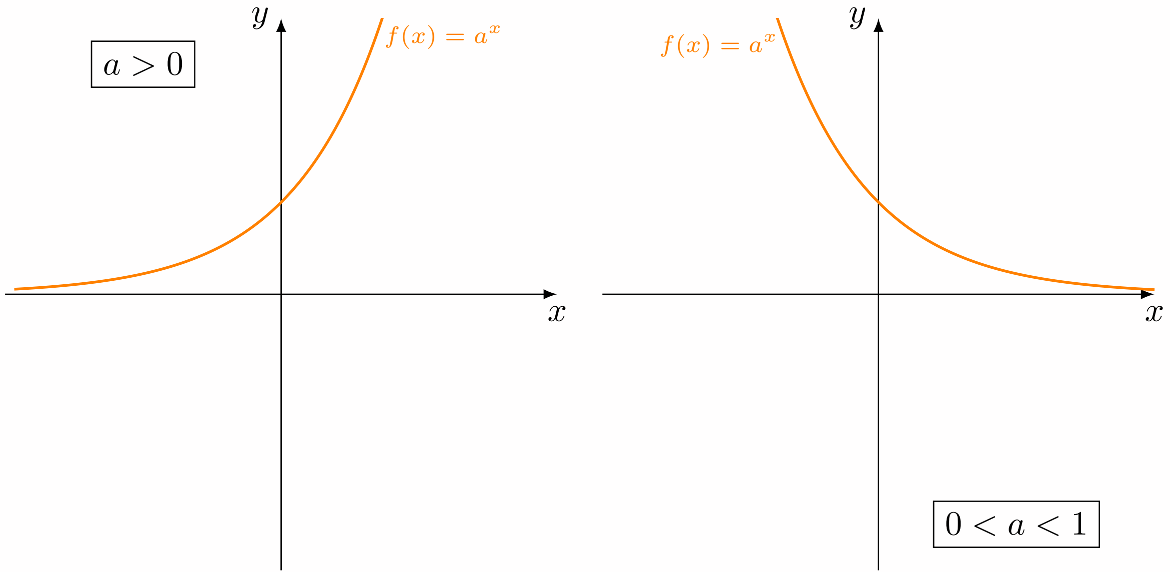
Dem.:

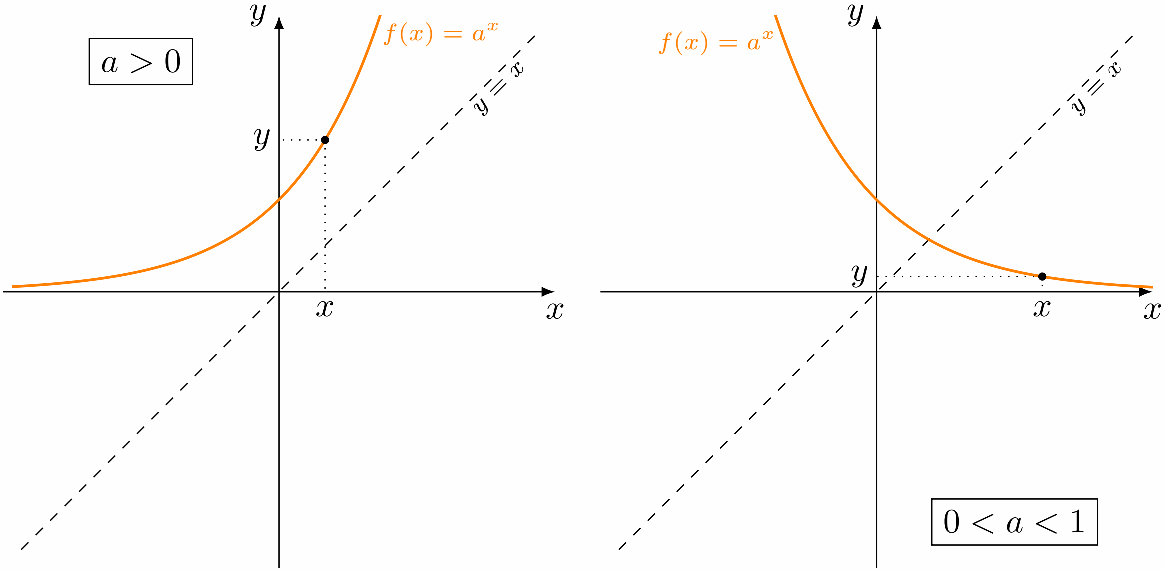
1. Seja $f(x) = a^x$ uma função exponencial;
2. Temos que f é uma função bijetora, logo admite uma inversa f^{-1};
3. Dado $x \in \mathbb{R}$, temos que

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$$

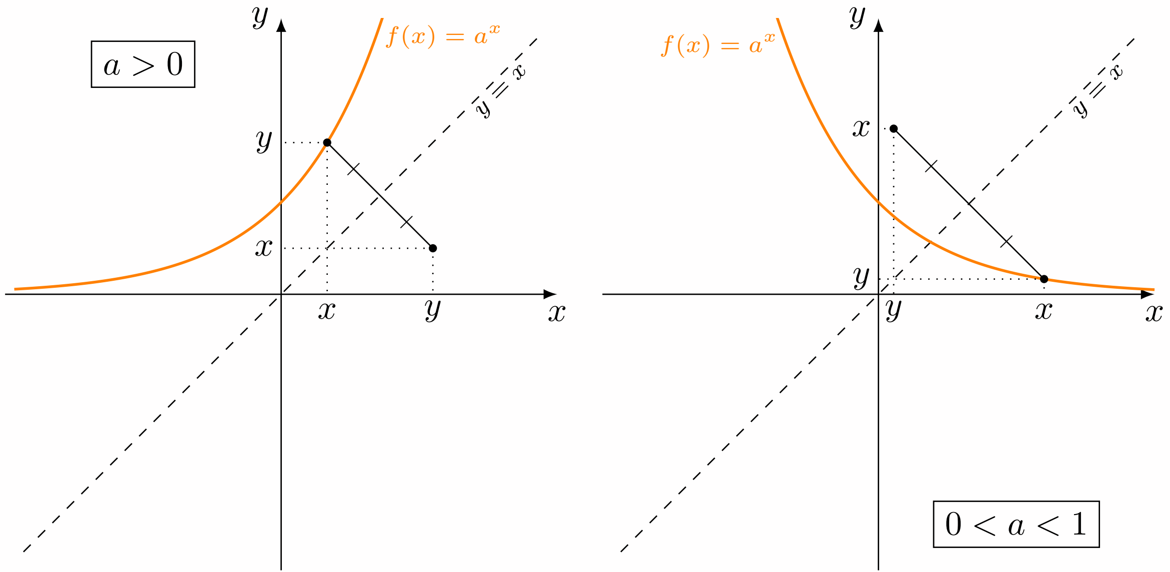
4. Logo,

$$f^{-1}(y) = \log_a y.$$

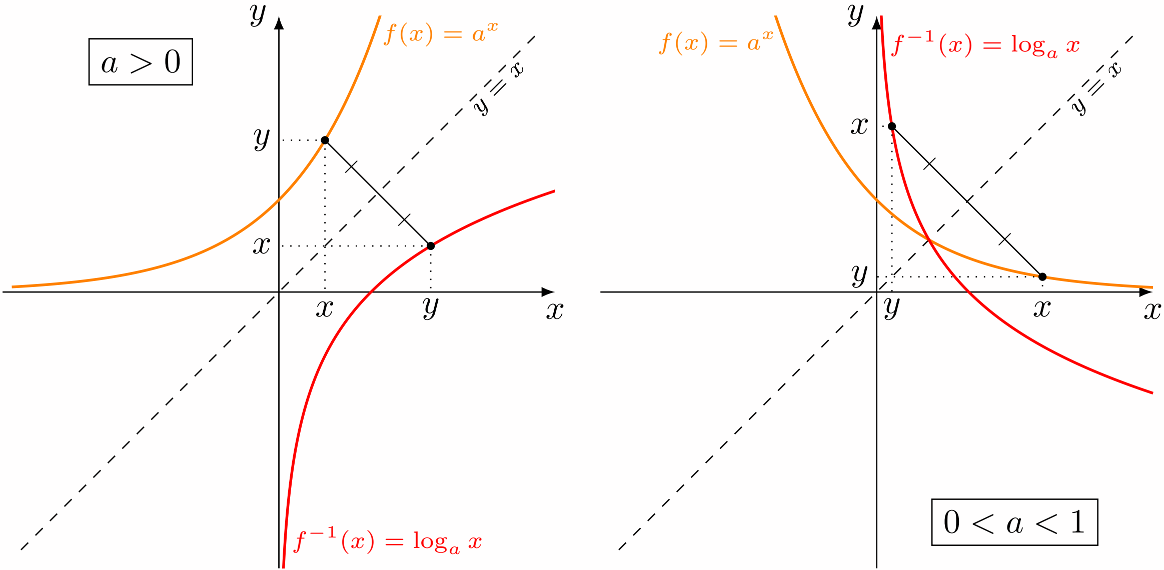

$a > 0$
y
$f(x) = a^x$
x
y
$f(x) = a^x$
x
$0 < a < 1$

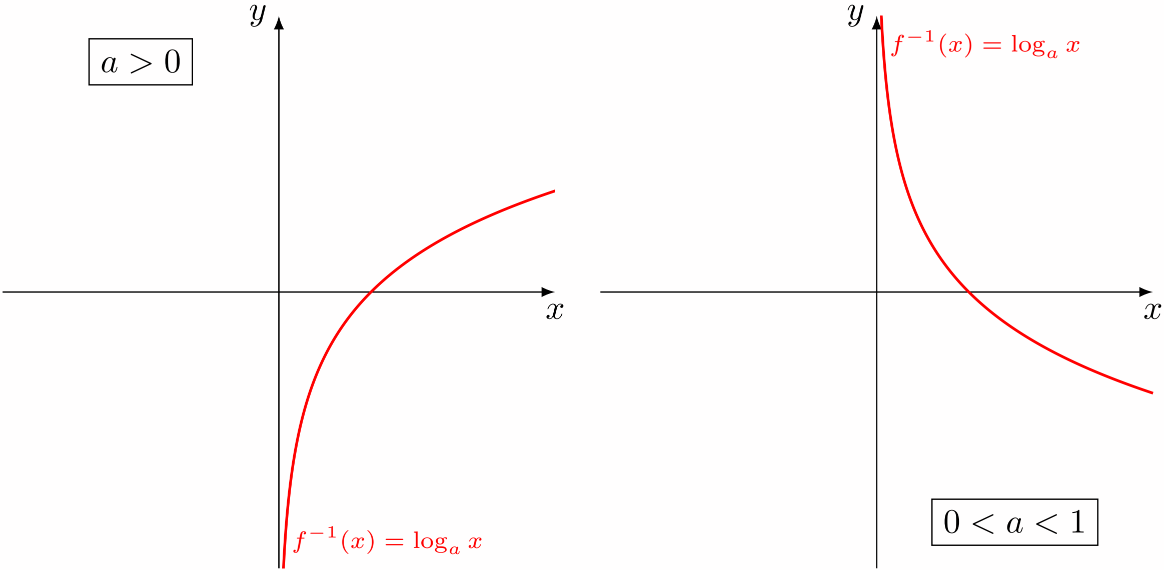


$a > 0$
$f(x) = a^x$
$y = x$
y
x
$0 < a < 1$



$a > 0$
y
$f(x) = a^x$
$y = x$
y
x
x
y
x
y
$f(x) = a^x$
$y = x$
x
y
y
x
x
$0 < a < 1$

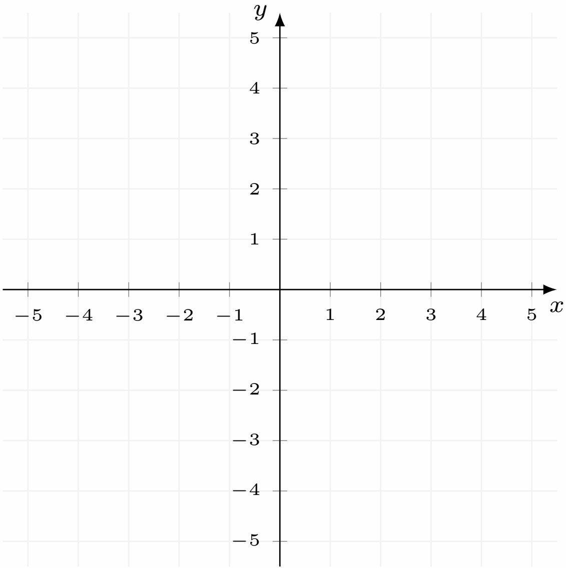

$a > 0$
y
$f(x) = a^x$
$y = x$
y
x
x
y
x
$f^{-1}(x) = \log_a x$
y
$f(x) = a^x$
$f^{-1}(x) = \log_a x$
$y = x$
x
y
y
x
x
$0 < a < 1$


$a > 0$
y
x
$f^{-1}(x) = \log_a x$
y
$f^{-1}(x) = \log_a x$
x
$0 < a < 1$

Exemplo 29.

Faça o que é pedido.

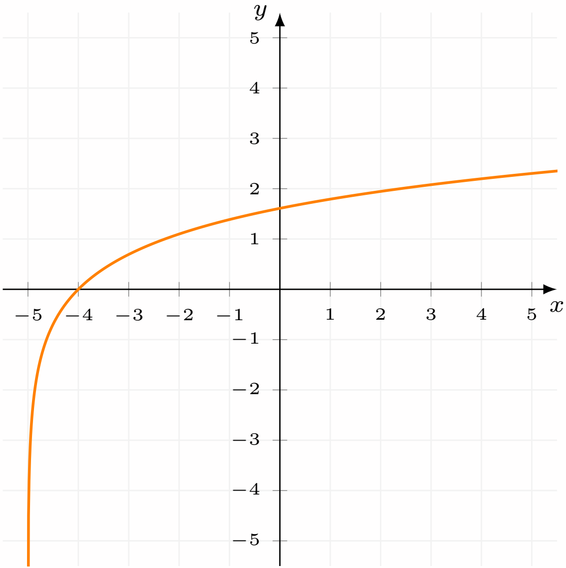
1. Determine o domínio e o gráfico da função $f(x) = \ln(x+5)$.



Exemplo 29.

Faça o que é pedido.

1. Determine o domínio e o gráfico da função $f(x) = \ln(x+5)$.



Exemplo 29.

Faça o que é pedido.

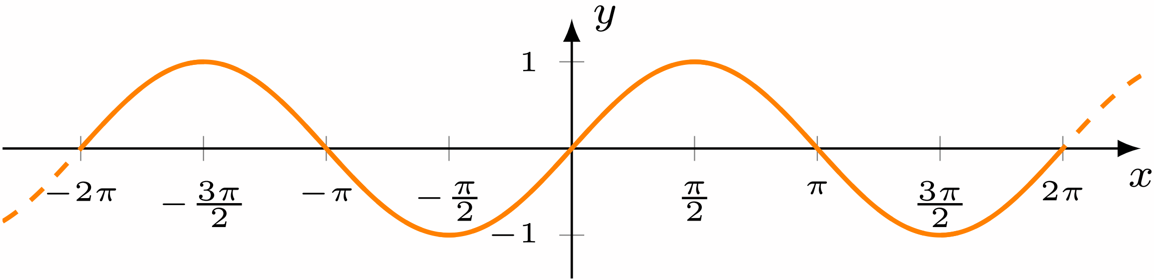
2. Determine o domínio da função $f(x) = \log_{(x-1)}(50 - 2x^2)$.

Funções Trigonométricas Inversas

Definimos anteriormente:
A função seno como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o número real $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Temos que a função seno possui:

- $D(f) = \mathbb{R}$
- $\operatorname{Im}(f) = [-1,\ 1]$
- $T = 2\pi$ rad



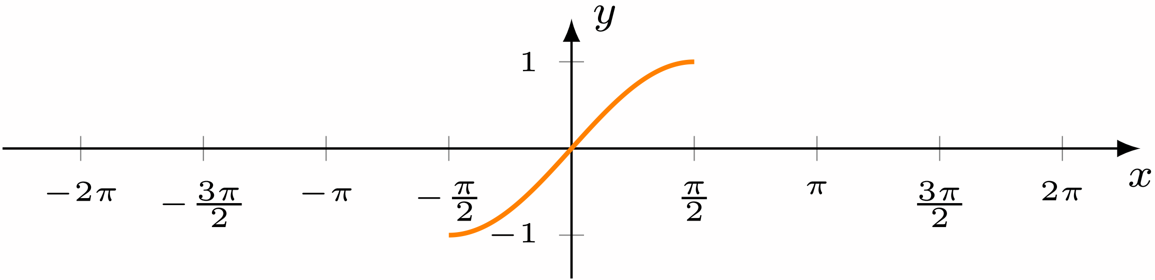
- A função seno, como definimos, **não** é injetora **nem** sobrejetora. Logo, **não** é bijetora e, portanto, **não admite** uma inversa;

Definimos anteriormente:

A função seno como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o número real $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Temos que a função seno possui:

- $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$
- $\mathrm{Im}(f) = [-1,\ 1]$
- $T = 2\pi$ rad



- A função seno, como definimos, **não** é injetora **nem** sobrejetora. Logo, **não** é bijetora e, portanto, **não admite** uma inversa;
- Se restringirmos $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, teremos uma função bijetora!

Definição 48. Função Arco Seno

Dada a função $y = \operatorname{sen} x$, com $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ e $-1 \leq y \leq 1$, definimos a função **arco seno**, denotada como

$$f(x) = \operatorname{arcsen} x,$$

como a inversa desta função seno.

Observações:

- $\mathrm{D}(f) = [-1, 1]$;
- $\mathrm{Im}(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
- A função arco seno associa cada $x \in [-1, 1]$ com *um arco* que resultaria em tal valor de seno.

Definição 48. Função Arco Seno

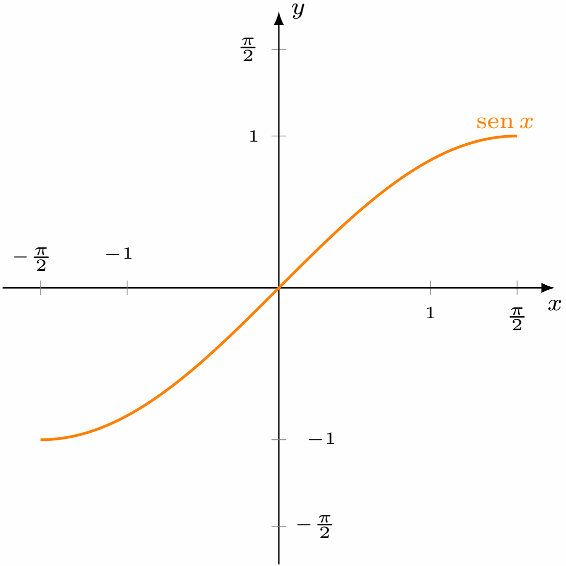
Dada a função $y = \operatorname{sen} x$, com $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ e $-1 \leq y \leq 1$, definimos a função **arco seno**, denotada como

$$f(x) = \operatorname{arcsen} x,$$

como a inversa desta função seno.

Observações:

- $D(f) = [-1, 1]$;
- $\operatorname{Im}(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
- A função arco seno associa cada $x \in [-1, 1]$ com *um arco* que resultaria em tal valor de seno.



Definição 48. Função Arco Seno

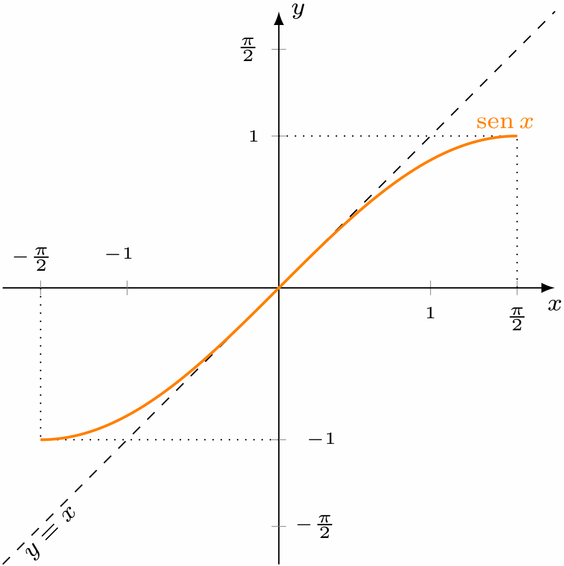
Dada a função $y = \operatorname{sen} x$, com $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ e $-1 \leq y \leq 1$, definimos a função **arco seno**, denotada como

$$f(x) = \operatorname{arcsen} x,$$

como a inversa desta função seno.

Observações:

- $\mathrm{D}(f) = [-1, 1]$;
- $\mathrm{Im}(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
- A função arco seno associa cada $x \in [-1, 1]$ com *um arco* que resultaria em tal valor de seno.



Definição 48. Função Arco Seno

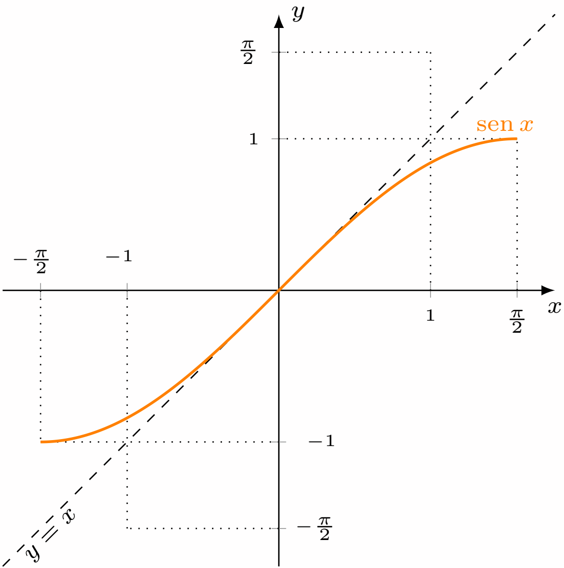
Dada a função $y = \operatorname{sen} x$, com $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ e $-1 \leq y \leq 1$, definimos a função **arco seno**, denotada como

$$f(x) = \operatorname{arcsen} x,$$

como a inversa desta função seno.

Observações:

- $\mathrm{D}(f) = [-1, 1]$;
- $\mathrm{Im}(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
- A função arco seno associa cada $x \in [-1, 1]$ com *um arco* que resultaria em tal valor de seno.

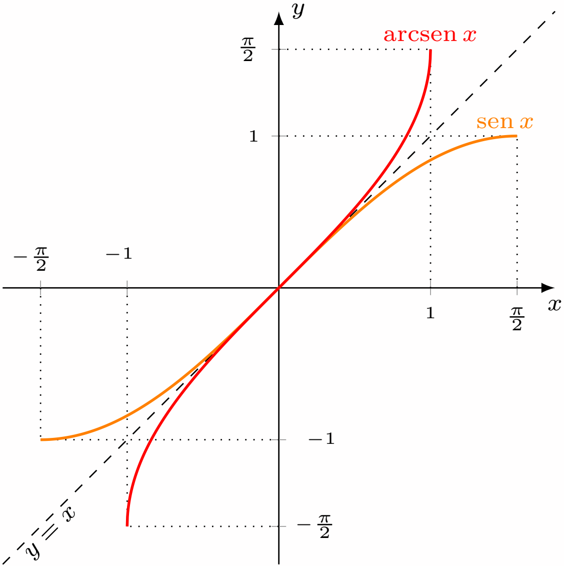


Definição 48. Função Arco Seno

Dada a função $y = \operatorname{sen} x$, com $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ e $-1 \leq y \leq 1$, definimos a função **arco seno**, denotada como

$$f(x) = \operatorname{arcsen} x,$$

como a inversa desta função seno.



Observações:

- $\mathrm{D}(f) = [-1, 1]$;
- $\mathrm{Im}(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
- A função arco seno associa cada $x \in [-1, 1]$ com *um arco* que resultaria em tal valor de seno.

Definição 48. Função Arco Seno

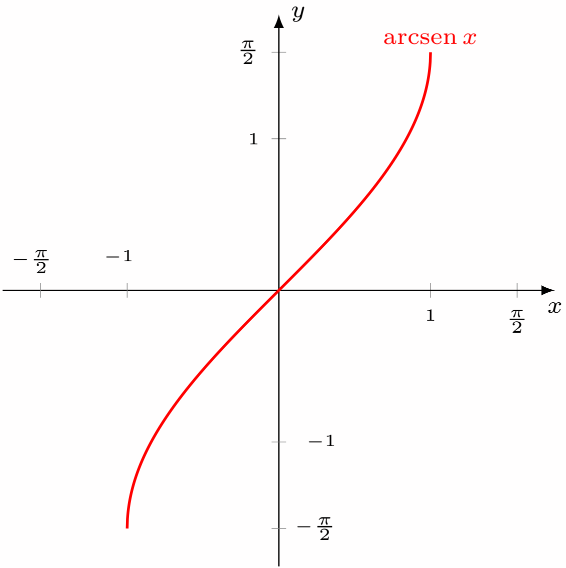
Dada a função $y = \operatorname{sen} x$, com $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ e $-1 \leq y \leq 1$, definimos a função **arco seno**, denotada como

$$f(x) = \operatorname{arcsen} x,$$

como a inversa desta função seno.

Observações:

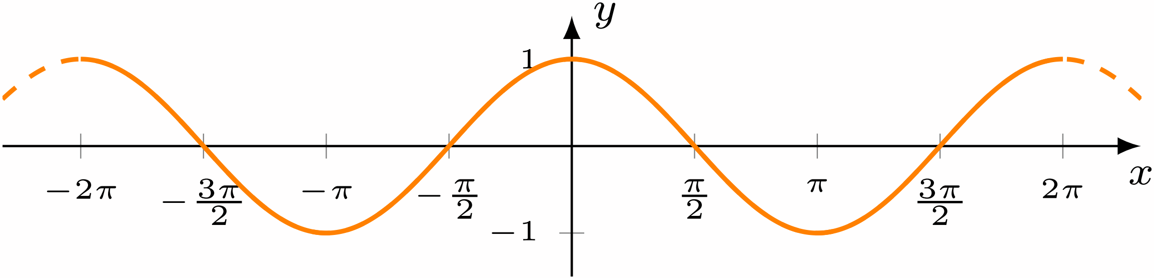
- $D(f) = [-1, 1]$;
- $\operatorname{Im}(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
- A função arco seno associa cada $x \in [-1, 1]$ com *um arco* que resultaria em tal valor de seno.



Definimos anteriormente:
A função cosseno como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o número real $f(x) = \cos x$.

Temos que a função cosseno possui:

- $D(f) = \mathbb{R}$
- $\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$
- $T = 2\pi$ rad

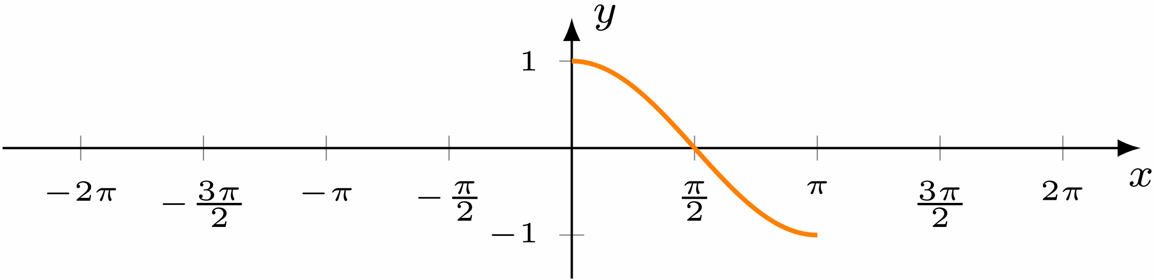


- A função cosseno, como definimos, **não** é injetora **nem** sobrejetora. Logo, **não** é bijetora e, portanto, **não admite** uma inversa;

Definimos anteriormente:
A função cosseno como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o número real $f(x) = \cos x$.

Temos que a função cosseno possui:

- $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$
- $\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$
- $T = 2\pi$ rad



- A função cosseno, como definimos, **não** é injetora **nem** sobrejetora. Logo, **não** é bijetora e, portanto, **não admite** uma inversa;
- Se restringirmos $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$, teremos uma função bijetora!

Definição 49. Função Arco Cosseno

Dada a função $y = \cos x$, com $0 \leq x \leq \pi$ e $-1 \leq y \leq 1$, definimos a função **arco cosseno**, denotada como

$$f(x) = \arccos x,$$

como a inversa desta função cosseno.

Observações:

- $D(f) = [-1, 1]$;
- $\mathrm{Im}(f) = [0, \pi]$;
- A função arco cosseno associa cada $x \in [-1, 1]$ com *um arco* que resultaria em tal valor de cosseno.

Definição 49. Função Arco Cosseno

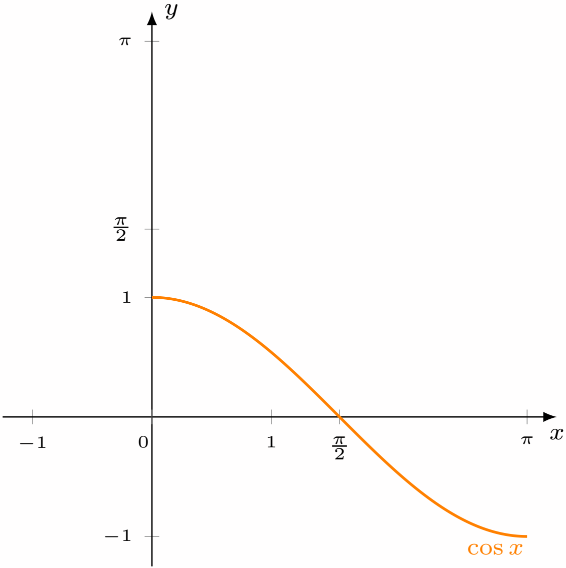
Dada a função $y = \cos x$, com $0 \leq x \leq \pi$ e $-1 \leq y \leq 1$, definimos a função **arco cosseno**, denotada como

$$f(x) = \arccos x,$$

como a inversa desta função cosseno.

Observações:

- $\mathrm{D}(f) = [-1, 1]$;
- $\mathrm{Im}(f) = [0, \pi]$;
- A função arco cosseno associa cada $x \in [-1, 1]$ com *um arco* que resultaria em tal valor de cosseno.



Definição 49. Função Arco Cosseno

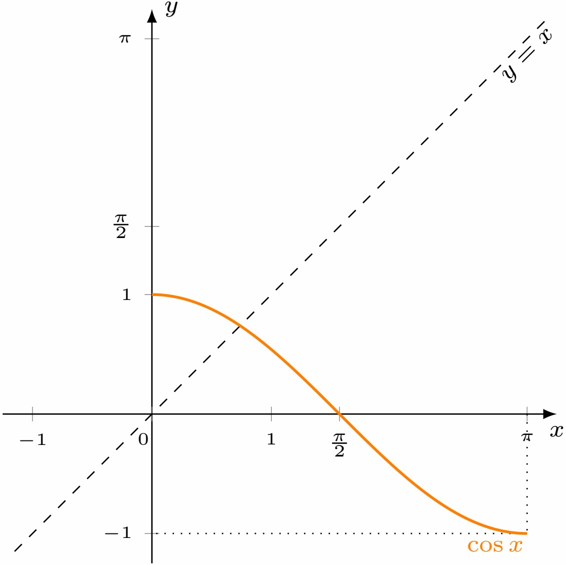
Dada a função $y = \cos x$, com $0 \leq x \leq \pi$ e $-1 \leq y \leq 1$, definimos a função **arco cosseno**, denotada como

$$f(x) = \arccos x,$$

como a inversa desta função cosseno.

Observações:

- $\mathrm{D}(f) = [-1, 1]$;
- $\mathrm{Im}(f) = [0, \pi]$;
- A função arco cosseno associa cada $x \in [-1, 1]$ com *um arco* que resultaria em tal valor de cosseno.

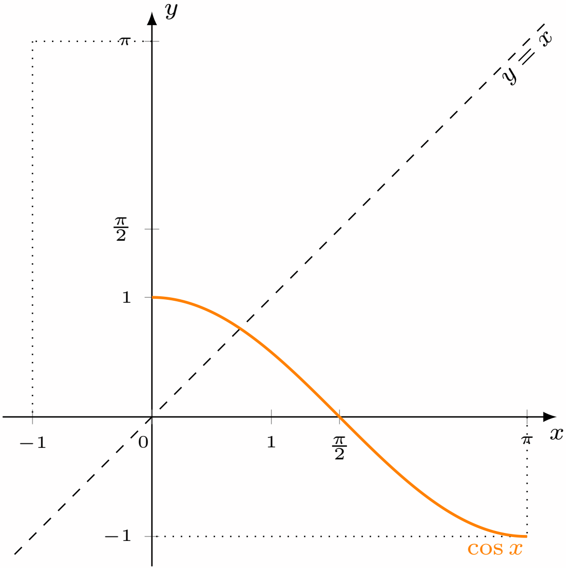


Definição 49. Função Arco Cosseno

Dada a função $y = \cos x$, com $0 \leq x \leq \pi$ e $-1 \leq y \leq 1$, definimos a função **arco cosseno**, denotada como

$$f(x) = \arccos x,$$

como a inversa desta função cosseno.



Observações:

- $\mathrm{D}(f) = [-1, 1]$;
- $\mathrm{Im}(f) = [0, \pi]$;
- A função arco cosseno associa cada $x \in [-1, 1]$ com *um arco* que resultaria em tal valor de cosseno.

Definição 49. Função Arco Cosseno

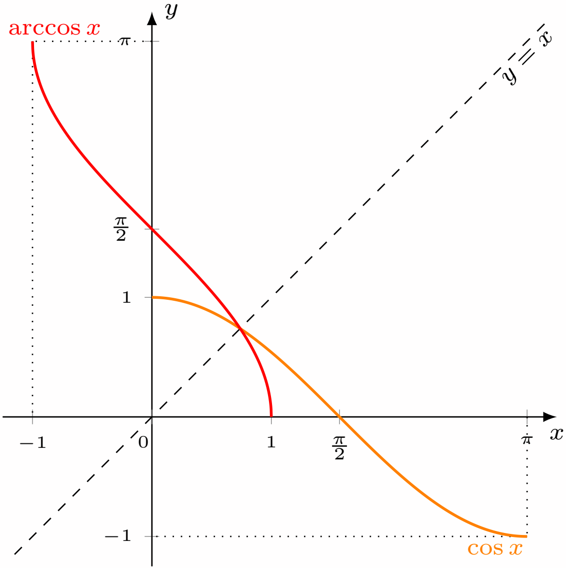
Dada a função $y = \cos x$, com $0 \leq x \leq \pi$ e $-1 \leq y \leq 1$, definimos a função **arco cosseno**, denotada como

$$f(x) = \arccos x,$$

como a inversa desta função cosseno.

Observações:

- $\mathrm{D}(f) = [-1, 1]$;
- $\mathrm{Im}(f) = [0, \pi]$;
- A função arco cosseno associa cada $x \in [-1, 1]$ com *um arco* que resultaria em tal valor de cosseno.



Definição 49. Função Arco Cosseno

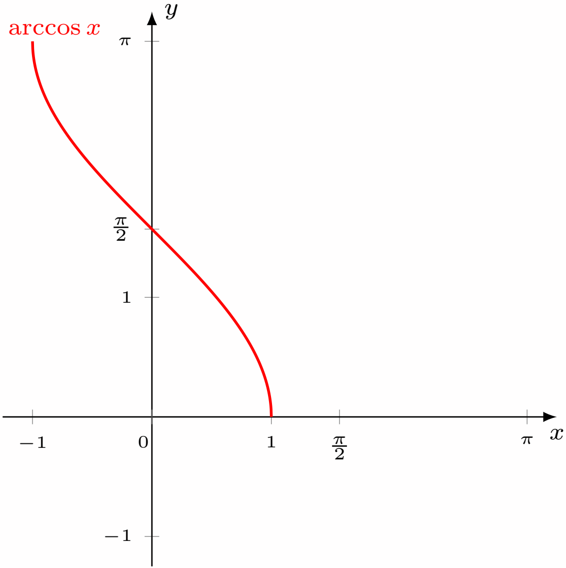
Dada a função $y = \cos x$, com $0 \leq x \leq \pi$ e $-1 \leq y \leq 1$, definimos a função **arco cosseno**, denotada como

$$f(x) = \arccos x,$$

como a inversa desta função cosseno.

Observações:

- $\mathrm{D}(f) = [-1, 1]$;
- $\mathrm{Im}(f) = [0, \pi]$;
- A função arco cosseno associa cada $x \in [-1, 1]$ com *um arco* que resultaria em tal valor de cosseno.



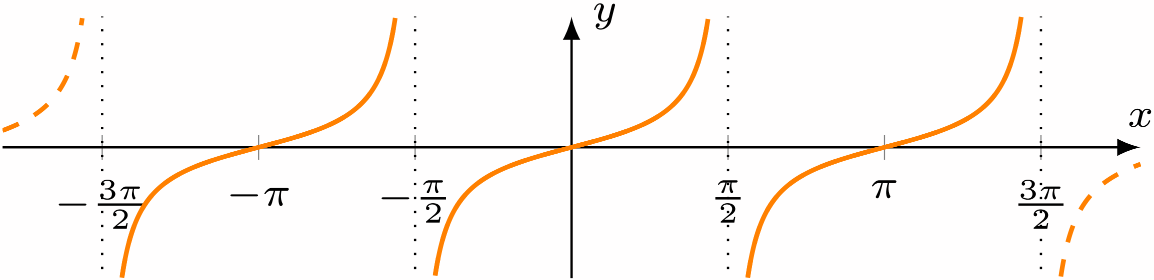
Definimos anteriormente:

A função tangente como $f : A \to \mathbb{R}$, que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o número real $f(x) = \tan x$, onde

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Temos que a função tangente possui:

- $\mathrm{D}(f) = A$
- $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$
- $T = \pi$ rad



- A função tangente, como definimos, **não** é injetora. Logo, **não** é bijetora e, portanto, **não admite** uma inversa;

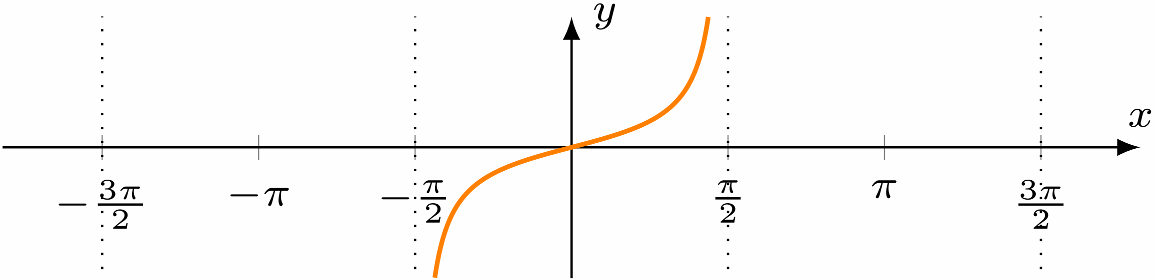
Definimos anteriormente:

A função tangente como $f : A \to \mathbb{R}$, que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o número real $f(x) = \tan x$, onde

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Temos que a função tangente possui:

- $\mathrm{D}(f) = A$
- $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$
- $T = \pi$ rad



- A função tangente, como definimos, **não** é injetora. Logo, **não** é bijetora e, portanto, **não admite** uma inversa;
- Se restringirmos $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, teremos uma função bijetora!

Definição 50. Função Arco Tangente

Dada a função $y = \tan x$, com $-\pi/2 < x < \pi/2$ e $y \in \mathbb{R}$, definimos a função **arco tangente**, denotada como

$$f(x) = \arctan x,$$

como a inversa desta função tangente.

Observações:

- $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$;
- $\mathrm{Im}(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;
- A função arco tangente associa cada $x \in \mathbb{R}$ com *um arco* que resultaria em tal valor de tangente.

Definição 50. Função Arco Tangente

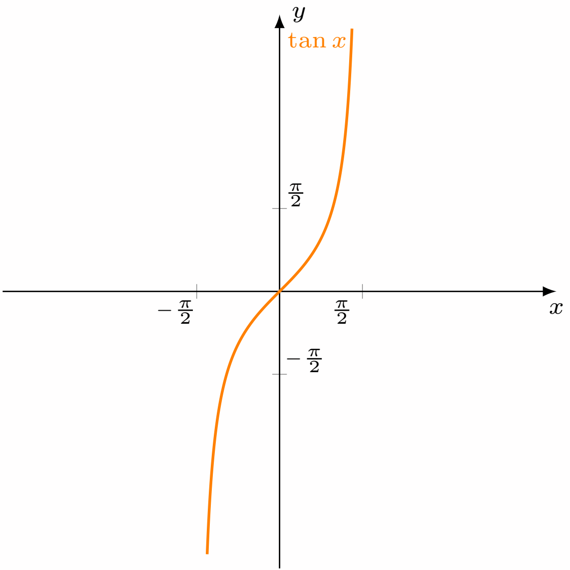
Dada a função $y = \tan x$, com $-\pi/2 < x < \pi/2$ e $y \in \mathbb{R}$, definimos a função **arco tangente**, denotada como

$$f(x) = \arctan x,$$

como a inversa desta função tangente.

Observações:

- $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$;
- $\mathrm{Im}(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;
- A função arco tangente associa cada $x \in \mathbb{R}$ com *um arco* que resultaria em tal valor de tangente.



Definição 50. Função Arco Tangente

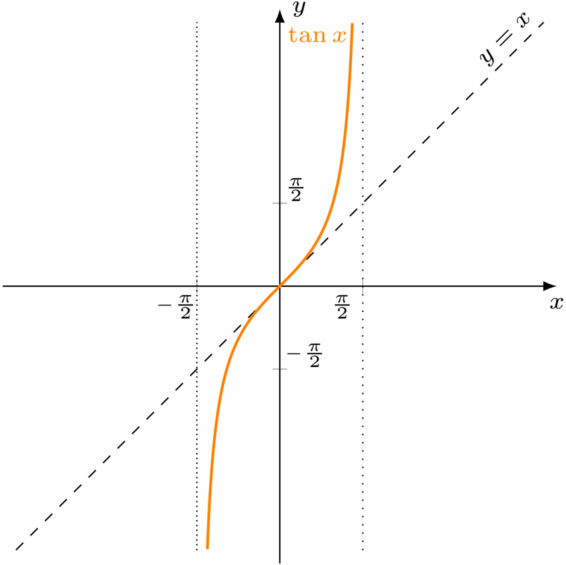
Dada a função $y = \tan x$, com $-\pi/2 < x < \pi/2$ e $y \in \mathbb{R}$, definimos a função **arco tangente**, denotada como

$$f(x) = \arctan x,$$

como a inversa desta função tangente.

Observações:

- $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$;
- $\mathrm{Im}(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;
- A função arco tangente associa cada $x \in \mathbb{R}$ com *um arco* que resultaria em tal valor de tangente.



Definição 50. Função Arco Tangente

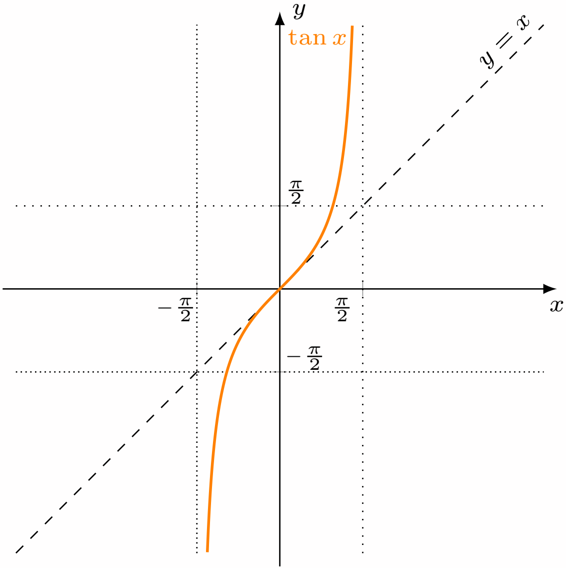
Dada a função $y = \tan x$, com $-\pi/2 < x < \pi/2$ e $y \in \mathbb{R}$, definimos a função **arco tangente**, denotada como

$$f(x) = \arctan x,$$

como a inversa desta função tangente.

Observações:

- $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$;
- $\mathrm{Im}(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;
- A função arco tangente associa cada $x \in \mathbb{R}$ com *um arco* que resultaria em tal valor de tangente.

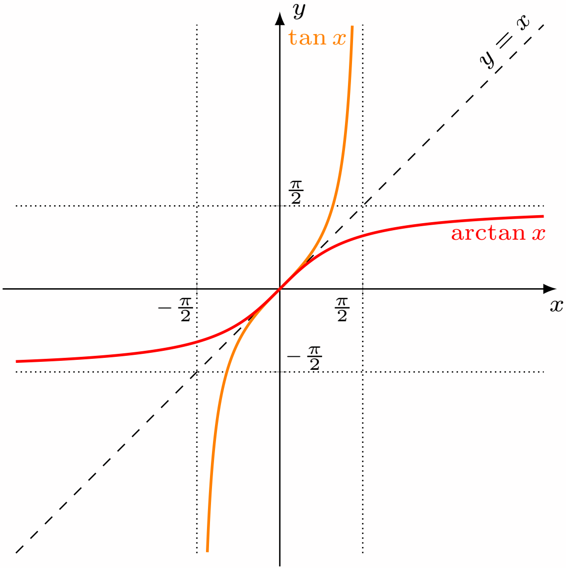


Definição 50. Função Arco Tangente

Dada a função $y = \tan x$, com $-\pi/2 < x < \pi/2$ e $y \in \mathbb{R}$, definimos a função **arco tangente**, denotada como

$$f(x) = \arctan x,$$

como a inversa desta função tangente.



Observações:

- $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$;
- $\mathrm{Im}(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;
- A função arco tangente associa cada $x \in \mathbb{R}$ com *um arco* que resultaria em tal valor de tangente.

Definição 50. Função Arco Tangente

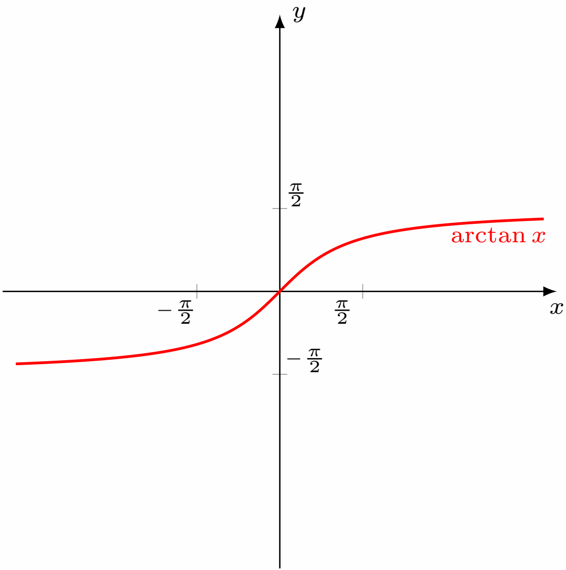
Dada a função $y = \tan x$, com $-\pi/2 < x < \pi/2$ e $y \in \mathbb{R}$, definimos a função **arco tangente**, denotada como

$$f(x) = \arctan x,$$

como a inversa desta função tangente.

Observações:

- $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$;
- $\mathrm{Im}(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;
- A função arco tangente associa cada $x \in \mathbb{R}$ com *um arco* que resultaria em tal valor de tangente.



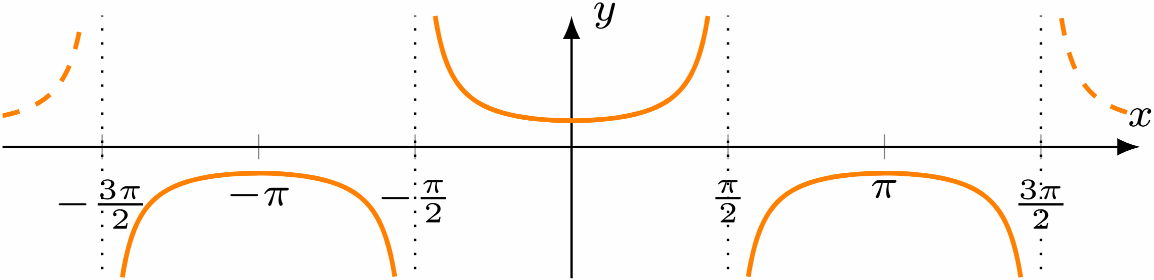
Definimos anteriormente:

A função secante como $f : A \to \mathbb{R}$, que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o número real $f(x) = \sec x$, onde

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Temos que a função secante possui:

- Domínio: $\mathrm{D}(f) = A$
- Imagem: $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
- Período: $T = 2\pi$ rad



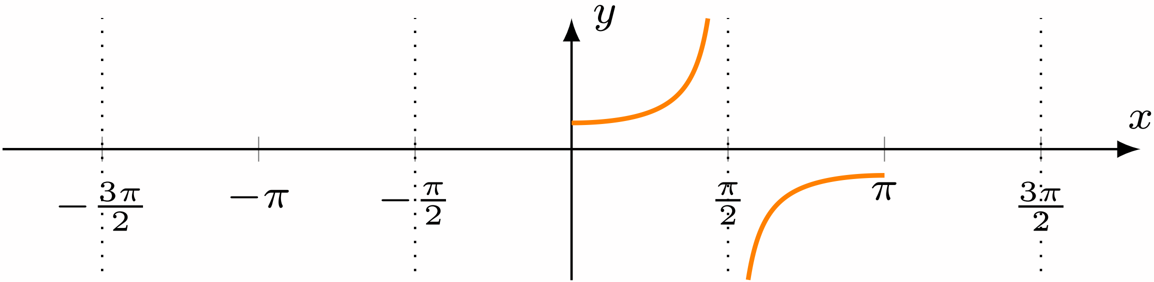
- A função secante, como definimos, **não** é injetora e **não** é sobrejetora. Logo, **não** é bijetora e, portanto, **não admite** uma inversa;

Definimos anteriormente:
A função secante como $f : A \to \mathbb{R}$, que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o número real $f(x) = \sec x$, onde

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Temos que a função secante possui:

- Domínio: $\mathrm{D}(f) = A$
- Imagem: $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
- Período: $T = 2\pi$ rad



- A função secante, como definimos, **não** é injetora e **não** é sobrejetora. Logo, **não** é bijetora e, portanto, **não admite** uma inversa;
- Se restringirmos $f : [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \to (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, teremos uma função bijetora!

Definição 51. Função Arco Secante

Dada a função $y = \sec x$, com $0 < x < \pi$, $x \neq \pi/2$, e $y \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, definimos a função **arco secante**, denotada como

$$f(x) = \operatorname{arcsec} x,$$

como a inversa desta função secante.

Observações:

- $\mathrm{D}(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$;
- $\mathrm{Im}(f) = [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$;
- A função arco secante associa cada $x \in \mathbb{R}$ com *um arco* que resultaria em tal valor de secante.

Definição 51. Função Arco Secante

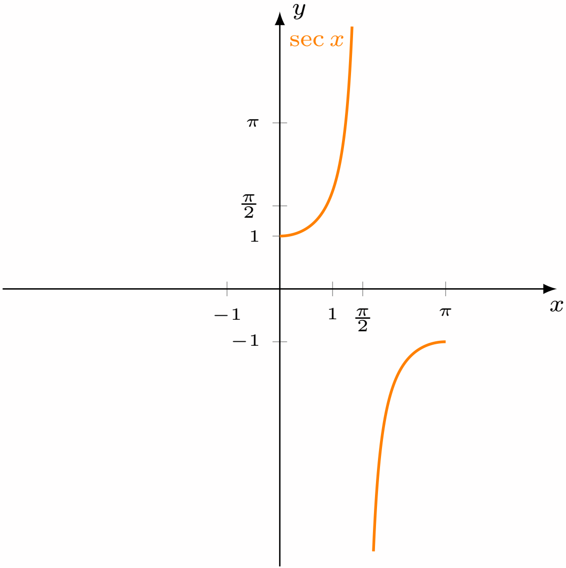
Dada a função $y = \sec x$, com $0 < x < \pi$, $x \neq \pi/2$, e $y \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, definimos a função **arco secante**, denotada como

$$f(x) = \operatorname{arcsec} x,$$

como a inversa desta função secante.

Observações:

- $\mathrm{D}(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$;
- $\mathrm{Im}(f) = [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$;
- A função arco secante associa cada $x \in \mathbb{R}$ com *um arco* que resultaria em tal valor de secante.

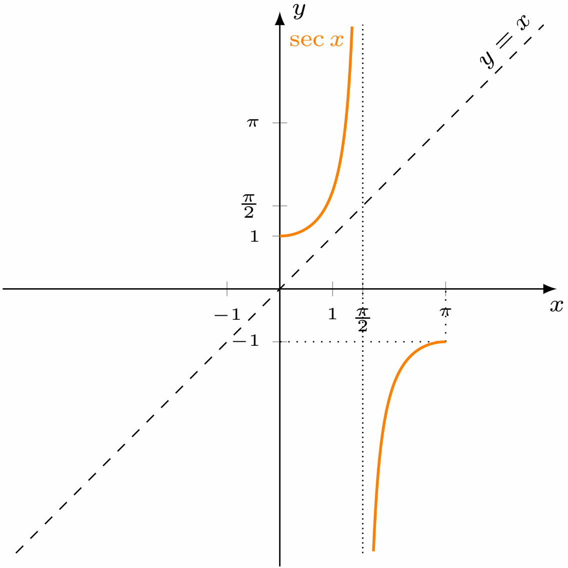


Definição 51. Função Arco Secante

Dada a função $y = \sec x$, com $0 < x < \pi$, $x \neq \pi/2$, e $y \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, definimos a função **arco secante**, denotada como

$$f(x) = \operatorname{arcsec} x,$$

como a inversa desta função secante.



Observações:

- $\mathrm{D}(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$;
- $\mathrm{Im}(f) = [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$;
- A função arco secante associa cada $x \in \mathbb{R}$ com *um arco* que resultaria em tal valor de secante.

Definição 51. Função Arco Secante

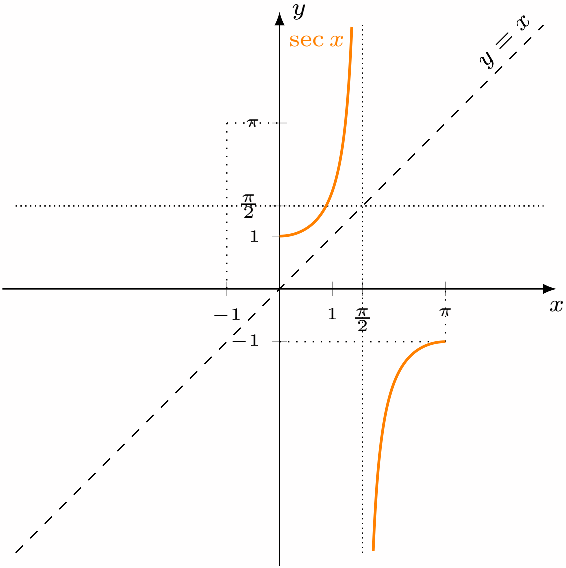
Dada a função $y = \sec x$, com $0 < x < \pi$, $x \neq \pi/2$, e $y \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, definimos a função **arco secante**, denotada como

$$f(x) = \operatorname{arcsec} x,$$

como a inversa desta função secante.

Observações:

- $\mathrm{D}(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$;
- $\mathrm{Im}(f) = [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$;
- A função arco secante associa cada $x \in \mathbb{R}$ com *um arco* que resultaria em tal valor de secante.

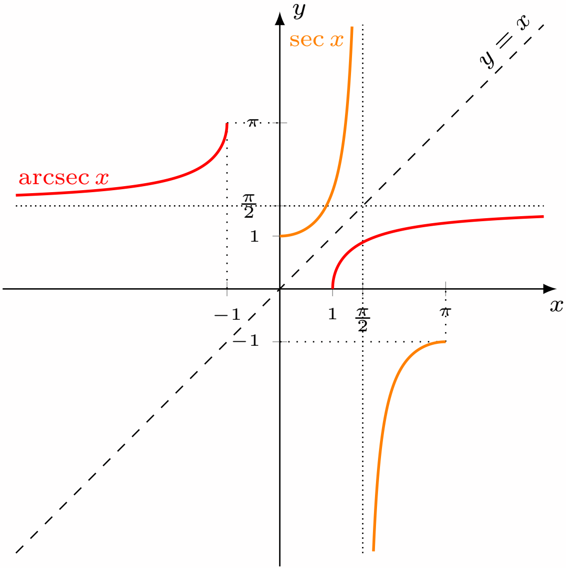


Definição 51. Função Arco Secante

Dada a função $y = \sec x$, com $0 < x < \pi$, $x \neq \pi/2$, e $y \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, definimos a função **arco secante**, denotada como

$$f(x) = \operatorname{arcsec} x,$$

como a inversa desta função secante.



Observações:

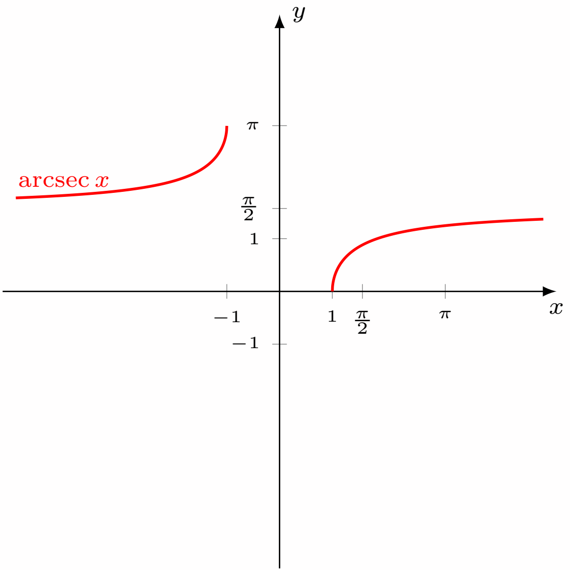
- $D(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$;
- $\operatorname{Im}(f) = [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$;
- A função arco secante associa cada $x \in \mathbb{R}$ com *um arco* que resultaria em tal valor de secante.

Definição 51. Função Arco Secante

Dada a função $y = \sec x$, com $0 < x < \pi$, $x \neq \pi/2$, e $y \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, definimos a função **arco secante**, denotada como

$$f(x) = \operatorname{arcsec} x,$$

como a inversa desta função secante.



Observações:

- $\mathrm{D}(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$;
- $\mathrm{Im}(f) = [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$;
- A função arco secante associa cada $x \in \mathbb{R}$ com *um arco* que resultaria em tal valor de secante.

Funções Hiperbólicas

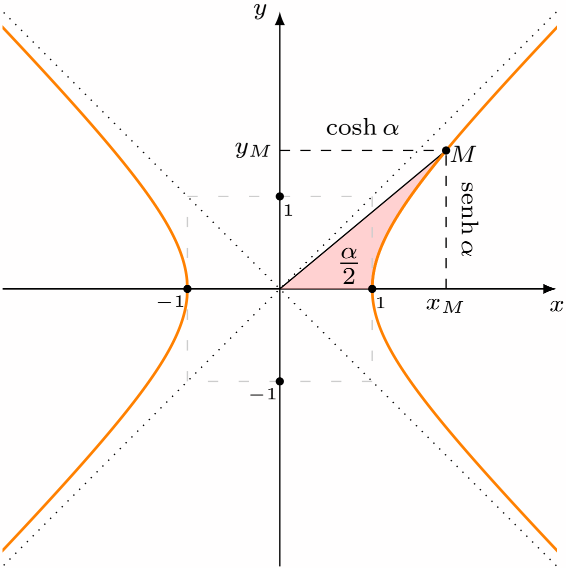
Definição 52. Funções Hiperbólicas

As relações hiperbólicas são definidas na hipérbole unitária:

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Para um setor de área $\alpha/2$, definimos:

1. $$\operatorname{senh}\alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$$
2. $$\cosh\alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}$$
3. $$\tanh\alpha = \frac{\operatorname{senh}\alpha}{\cosh\alpha} = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}$$
4. $$\coth\alpha = \frac{\cosh\alpha}{\operatorname{senh}\alpha} = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}$$
5. $$\operatorname{sech}\alpha = \frac{1}{\cosh\alpha} = \frac{2}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}$$
6. $$\operatorname{csch}\alpha = \frac{1}{\operatorname{senh}\alpha} = \frac{2}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}$$



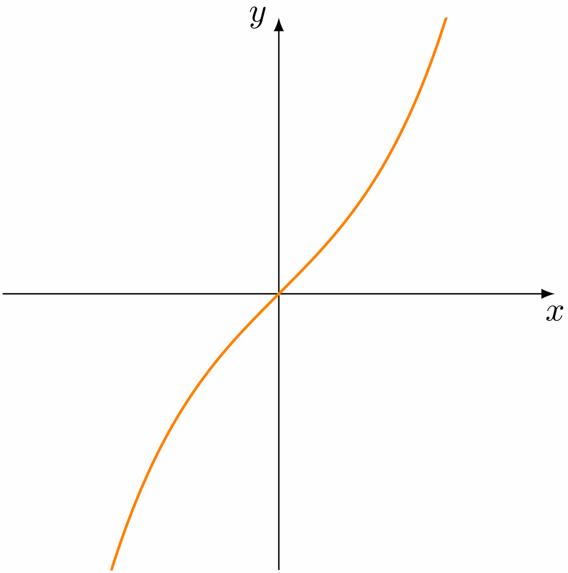
Definição 53. Seno Hiperbólico

A função seno hiperbólico é definida como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o número real

$$f(x) = \operatorname{senh} x$$

Temos que a função seno possui:

- $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$;
- $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$;
- Função ímpar;



Definição 53. Seno Hiperbólico

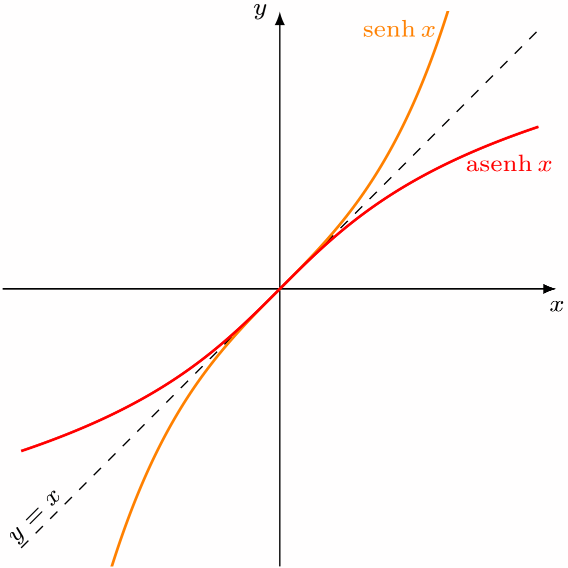
A função seno hiperbólico é definida como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o número real

$$f(x) = \operatorname{senh} x$$

Temos que a função seno possui:

- $D(f) = \mathbb{R}$;
- $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$;
- Função ímpar;
- Arco seno hiperbólico: $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f^{-1}(x) = \operatorname{asenh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$



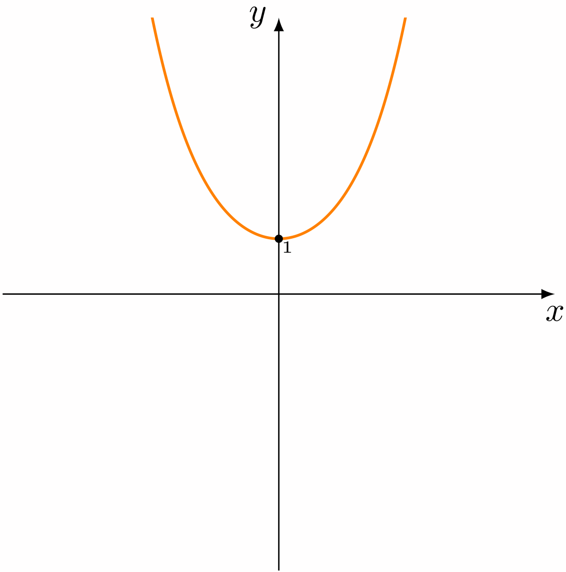
Definição 54. Cosseno Hiperbólico

A função cosseno hiperbólico é definida como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o número real

$$f(x) = \cosh x$$

Temos que a função seno possui:

- $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}, \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R};$
- Função par;



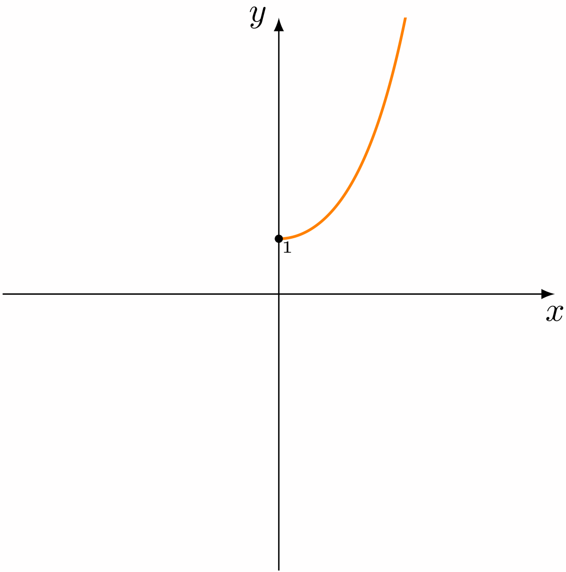
Definição 54. Cosseno Hiperbólico

A função cosseno hiperbólico é definida como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o número real

$$f(x) = \cosh x$$

Temos que a função seno possui:

- $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}, \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R};$
- Função par;
- Admite inversa apenas se restrita: $f : [0, +\infty) \to [1, +\infty);$



Definição 54. Cosseno Hiperbólico

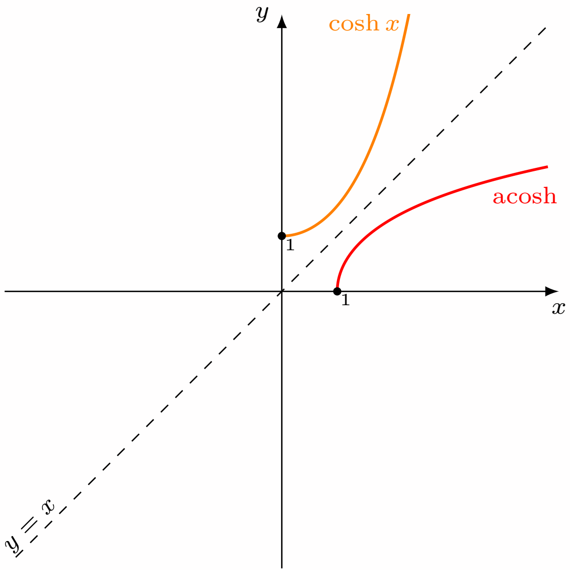
A função cosseno hiperbólico é definida como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o número real

$$f(x) = \cosh x$$

Temos que a função seno possui:

- $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}, \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$;
- Função par;
- Admite inversa apenas se restrita: $f : [0, +\infty) \to [1, +\infty)$;
- Arco cosseno hiperbólico: $f^{-1} : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$

$$f^{-1}(x) = \operatorname{acosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$



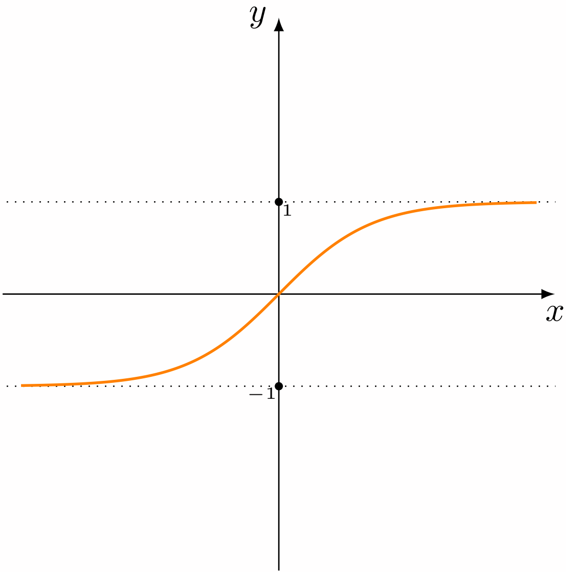
Definição 55. Tangente Hiperbólica

A função tangente hiperbólica é definida como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o número real

$$f(x) = \tanh x$$

Temos que a função seno possui:

- $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}, \mathrm{Im}(f) = (-1, 1)$;
- Função ímpar;



Definição 55. Tangente Hiperbólica

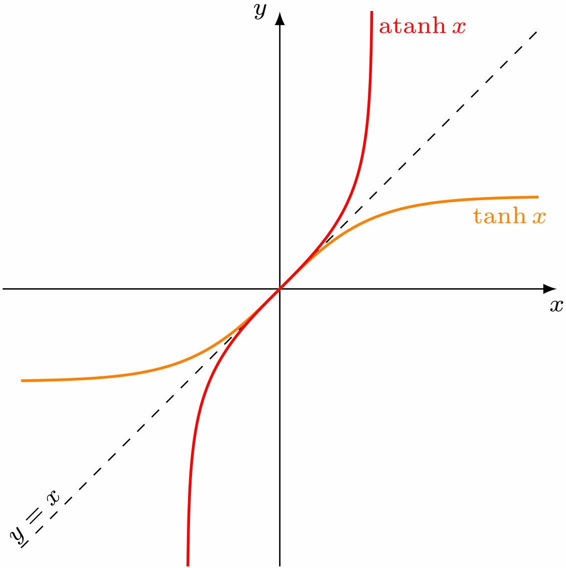
A função tangente hiperbólica é definida como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o número real

$$f(x) = \tanh x$$

Temos que a função seno possui:

- $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}, \mathrm{Im}(f) = (-1, 1)$;
- Função ímpar;
- Arco tangente hiperbólica: $f^{-1} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$

$$f^{-1}(x) = \operatorname{atanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$



Unidade II

Limites e Continuidade

Noção Intuitiva de Limite

Exemplo 30.

Estude os valores de $y = f(x) = 2x - 1$ *no entorno* de $x = 2$.

Exemplo 30.

Estude os valores de $y = f(x) = 2x - 1$ *no entorno* de $x = 2$.

- Há duas formas para nos aproximarmos de $x = 2$: pela **esquerda** (valores **menores** que 2); ou pela **direita** (valores **maiores** que 2).

Limite lateral pela Esquerda

- A medida em que $x \to 2^-$, temos que $y \to 3$
- É denotado por

$$\lim_{x \to 2^-} (2x - 1) = 3$$

Limite lateral pela Direita

- A medida em que $x \to 2^+$, temos que $y \to 3$
- É denotado por

$$\lim_{x \to 2^+} (2x - 1) = 3$$

- Quando os limites laterais são idênticos, temos que **existe** o **limite**

$$\lim_{x \to 2^-} (2x - 1) = \lim_{x \to 2^+} (2x - 1) = \lim_{x \to 2} (2x - 1) = 3$$

- Note que o limite é o próprio valor da função em $x = 2$

$$f(2) = \lim_{x \to 2} (2x - 1) = 3$$

$x \to 2^-$	
x	y
1	1
$1,5$	2
$1,9$	$2,8$
$1,99$	$2,98$
$1,999$	$2,998$
$1,9999$	$2,9998$

$x \to 2^+$	
x	y
3	5
$2,5$	4
$2,1$	$3,2$
$2,01$	$3,02$
$2,001$	$3,002$
$2,0001$	$3,0002$

Exemplo 31.

Calcular o limite solicitado.

1. $$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$$

Exemplo 31.

Calcular o limite solicitado.

1 $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$

Limite Lateral pela Esquerda

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3$$

Limite Lateral pela Direita

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3$$

- Como os limites laterais são idênticos, temos que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3$$

- Note que não é possível calcularmos $\dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ quando $x = 1$
- Em geral, não é verdade que o limite seja o próprio valor da função!

$x \to 1^-$	
x	y
0	2
$0,5$	$2,5$
$0,9$	$2,9$
$0,99$	$2,99$
$0,999$	$2,999$
$0,9999$	$2,9999$

$x \to 1^+$	
x	y
2	4
$1,4$	$3,4$
$1,1$	$3,1$
$1,01$	$3,01$
$1,001$	$3,001$
$1,0001$	$3,0001$

Exemplo 32.

Calcular o limite solicitado.

2 $\lim\limits_{x \to -3} h(x)$, para $h(x) = \begin{cases} x + 3, & \text{se } x \neq -3 \\ 4, & \text{se } x = -3 \end{cases}$

Exemplo 32.

Calcular o limite solicitado.

2. $\lim_{x \to -3} h(x)$, para $h(x) = \begin{cases} x+3, & \text{se } x \neq -3 \\ 4, & \text{se } x = -3 \end{cases}$

$x \to -3^-$	
x	y
$-3,5$	$-0,5$
$-3,3$	$-0,3$
$-3,1$	$-0,1$
$-3,01$	$-0,01$
$-3,001$	$-0,001$

$x \to -3^+$	
x	y
$-2,5$	$0,5$
$-2,8$	$0,2$
$-2,9$	$0,1$
$-2,99$	$0,01$
$-2,999$	$0,001$

Limite Lateral pela Esquerda

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = 0$$

Limite Lateral pela Direita

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = 0$$

- Como os limites laterais são idênticos, temos que

$$\lim_{x \to -3} f(x) = 0$$

- Note que $f(-3) = 4$, valor **distinto** do limite
- Em geral, não é verdade que o limite seja igual ao valor da função!

Formalização do Conceito de Limite

Definição 56. Limite

Sejam f uma função definida em $I = (a, b)$, $x_0 \in I$, com a possível exceção de que $f(x)$ não precisa estar definida em x_0. Quando existir, $L \in \mathbb{R}$ é o **limite** da f quando x tende para x_0, denotado por

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

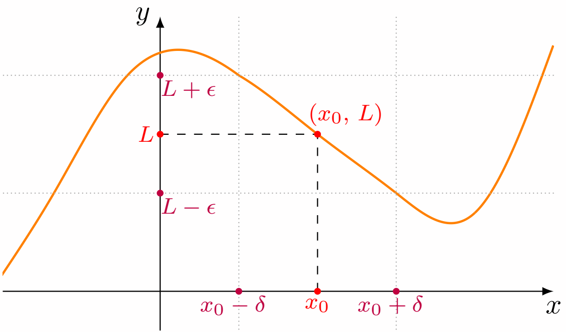
se, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon$$

- **Weierstrass:** formaliza as noções de “estar tão próximo quanto se queira” e de “estar suficientemente próximo”.
- A ideia é aproximar o valor de L *tão bem quanto se queira* a partir dos valores de $f(x)$.

Assim, para que $\lim_{x \to a} f(x) = L$, deve-se:

- Para toda escolha de $\epsilon > 0$
- Buscar algum $\delta > 0$ tal que
- Para x suficientemente próximo de a $(0 < |x - a| < \delta)$
- $f(x)$ esteja tão próximo de L quanto se queira $(|f(x) - L| < \epsilon)$

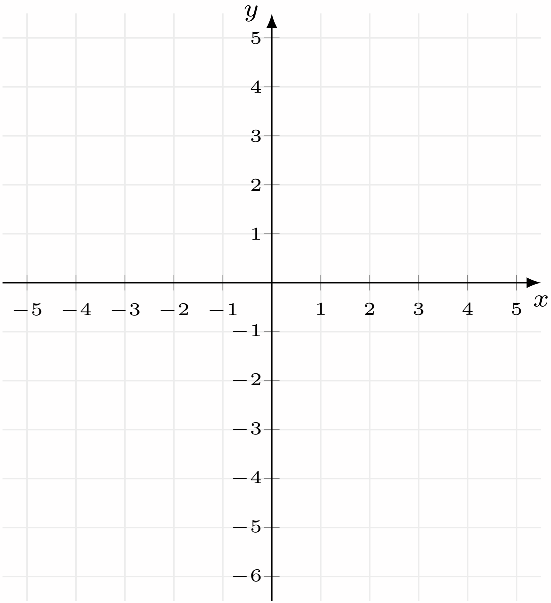


Exemplo 33.

Discuta a relação entre a existência do limite e o valor da função no ponto.

1. $f(x) = 2x - 1$

   $$\lim_{x \to 2} f(x) = 3$$

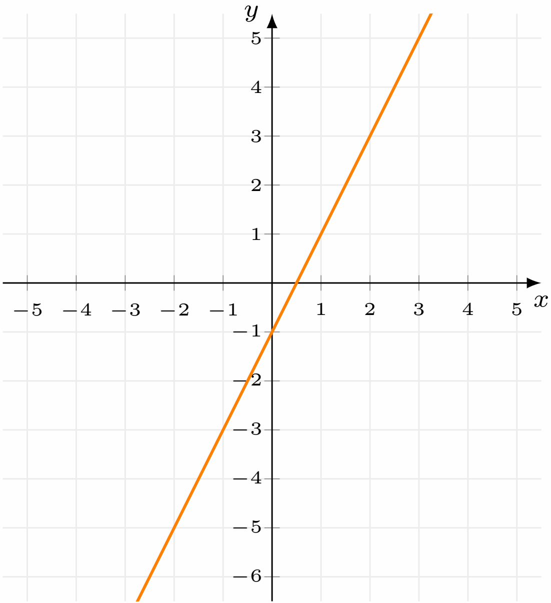


Exemplo 33.

Discuta a relação entre a existência do limite e o valor da função no ponto.

1. $f(x) = 2x - 1$

   $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$

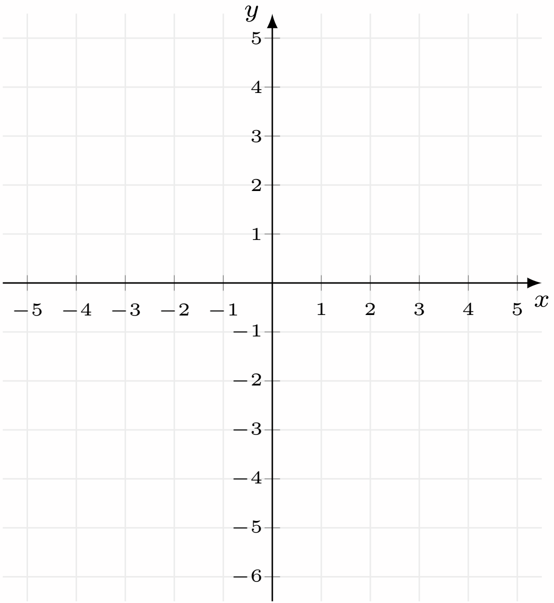


Exemplo 33.

Discuta a relação entre a existência do limite e o valor da função no ponto.

2 $$g(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$$

$$\lim_{x \to 1} g(x)$$

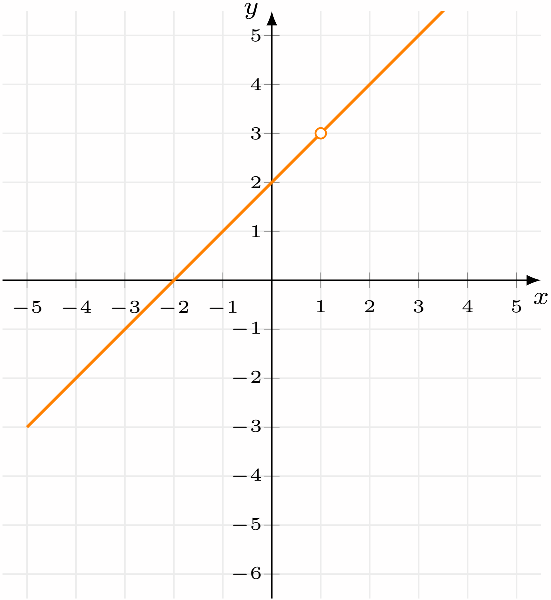


Exemplo 33.

Discuta a relação entre a existência do limite e o valor da função no ponto.

2 $$g(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$$

$$\lim_{x \to 1} g(x)$$

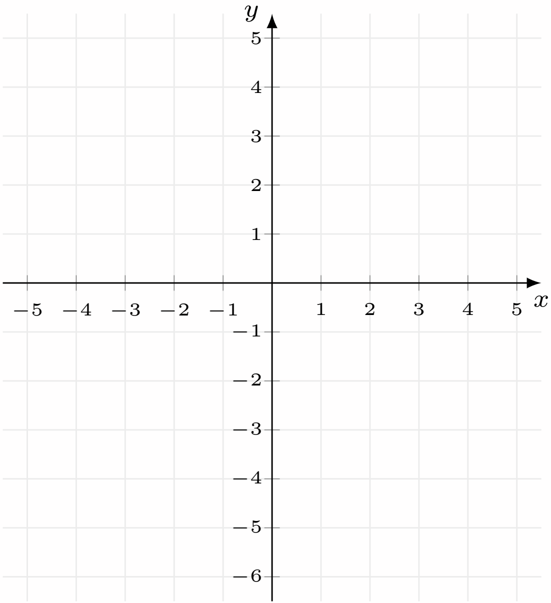


Exemplo 33.

Discuta a relação entre a existência do limite e o valor da função no ponto.

3 $$h(x) = \begin{cases} x + 3, & \text{se } x \neq -3 \\ 4, & \text{se } x = -3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -3} h(x)$$

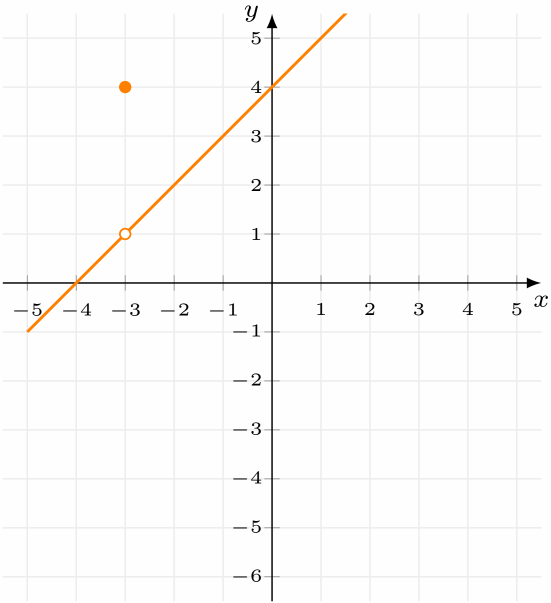


Exemplo 33.

Discuta a relação entre a existência do limite e o valor da função no ponto.

3 $h(x) = \begin{cases} x+3, & \text{se } x \neq -3 \\ 4, & \text{se } x = -3 \end{cases}$

$\lim_{x \to -3} h(x)$



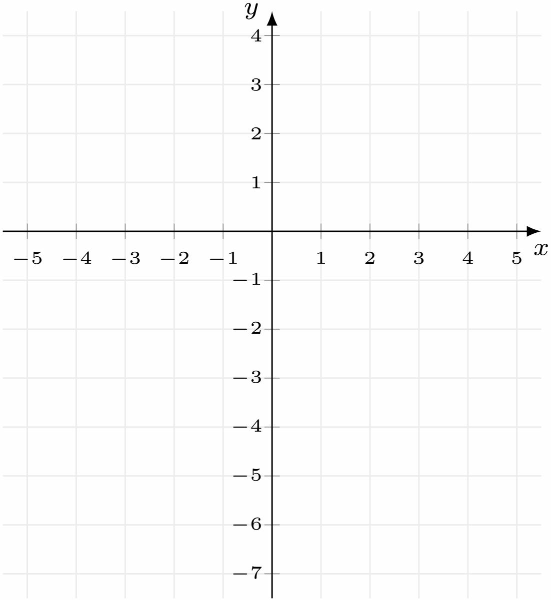
Exemplo 33.

Discuta a relação entre a existência do limite e o valor da função no ponto.

4

$$p(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{se } x < -1 \\ 2x - 5, & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -1} p(x)$$

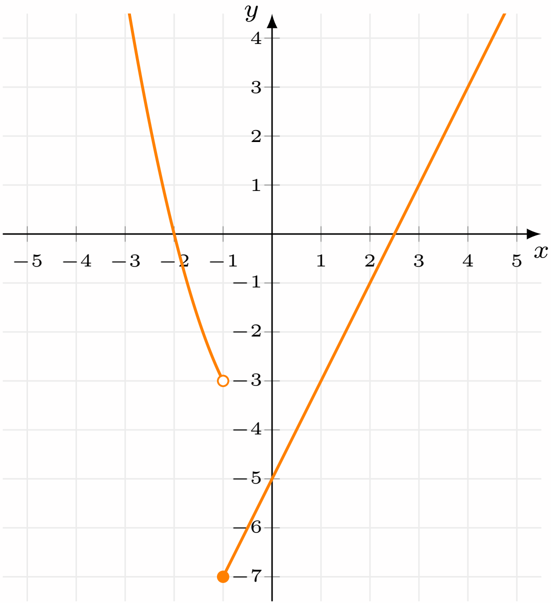


Exemplo 33.

Discuta a relação entre a existência do limite e o valor da função no ponto.

4 $$p(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{se } x < -1 \\ 2x - 5, & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -1} p(x)$$



Teorema 22. Unicidade do Limite

Seja I um intervalo aberto contendo um ponto a e f uma função definida em I exceto, talvez, em $x = a$. Se existir um número real L para o qual

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

então esse valor de L é único.

Definição 57. Limite Lateral à Direita

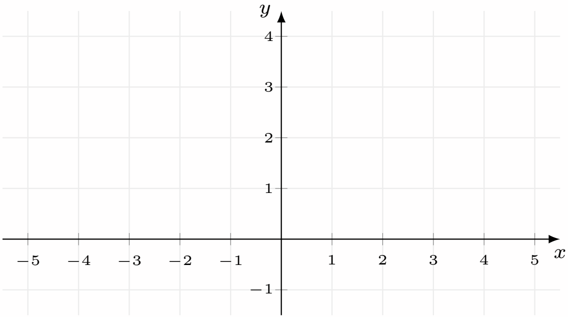
Seja f uma função definida em um intervalo aberto I contendo o ponto a, com a possível exceção de que f não precisa estar definida em a. Quando existir, um número real L é o limite pela direita da f quando x tende para a por números maiores que a, denotado por

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L,$$

se, dado qualquer número real $\epsilon > 0$, for possível encontrar um número real $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $a < x < a + \delta$.

Exemplo 34.
Calcule o limite.

$$\lim_{x \to -2^+} \sqrt{x + 2}$$



Definição 57. Limite Lateral à Direita

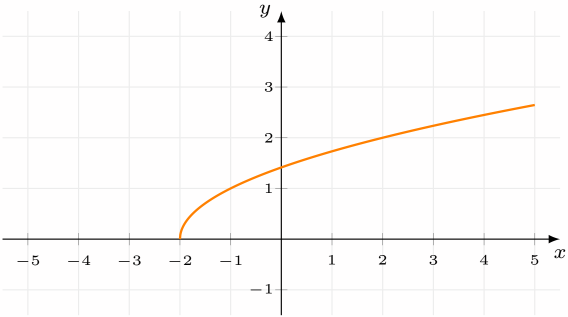
Seja f uma função definida em um intervalo aberto I contendo o ponto a, com a possível exceção de que f não precisa estar definida em a. Quando existir, um número real L é o limite pela direita da f quando x tende para a por números maiores que a, denotado por

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L,$$

se, dado qualquer número real $\epsilon > 0$, for possível encontrar um número real $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $a < x < a + \delta$.

Exemplo 34.
Calcule o limite.

$$\lim_{x \to -2^+} \sqrt{x+2}$$



Definição 58. Limite Lateral à Esquerda

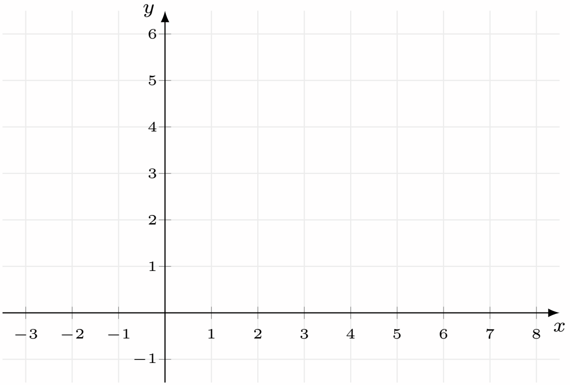
Seja f uma função definida em um intervalo aberto I contendo o ponto a, com a possível exceção de que f não precisa estar definida em a. Quando existir, um número real L é o limite pela esquerda da f quando x tende para a por números menores que a, denotado por

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L,$$

se, dado qualquer número real $\epsilon > 0$, for possível encontrar um número real $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $a - \delta < x < a$.

Exemplo 35.
Calcule o limite.

$$\lim_{x \to 2^-} f(x)$$



Definição 58. Limite Lateral à Esquerda

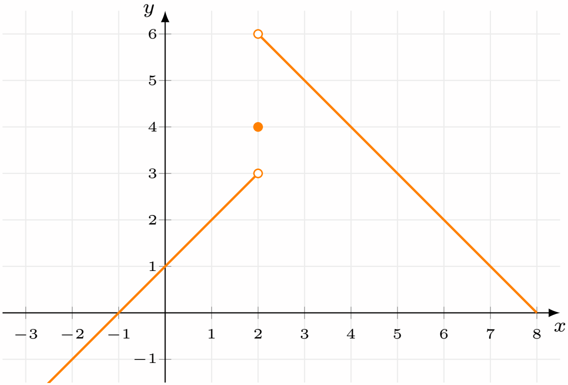
Seja f uma função definida em um intervalo aberto I contendo o ponto a, com a possível exceção de que f não precisa estar definida em a. Quando existir, um número real L é o limite pela esquerda da f quando x tende para a por números menores que a, denotado por

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L,$$

se, dado qualquer número real $\epsilon > 0$, for possível encontrar um número real $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $a - \delta < x < a$.

Exemplo 35.
Calcule o limite.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)$$



Teorema 23. Existência do Limite

Seja f uma função definida em um intervalo aberto I contendo o ponto a, com a possível exceção de que f não precisa estar definida em a. Então, existe o limite da f com x tendendo para a se, e somente se, existirem os limites laterais e estes foram idênticos.
Em outras palavras, existe um número real L tal que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se, e somente se, existirem os limites laterais e estes forem tais que

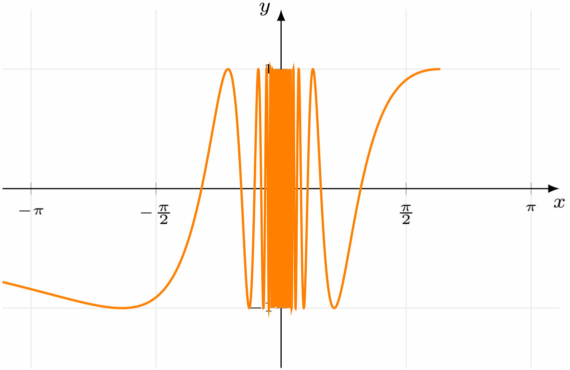
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L.$$

Exemplo 36.

Considere a função

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

para discutir o limite $\lim_{x\to 0} f(x)$.



- Ao tomar valores de x tais que

$$x = \pm\frac{1}{10^k}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots$$

- Pode-se verificar que $x \to 0$ e que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots$$

- "Conclui-se" que

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$$

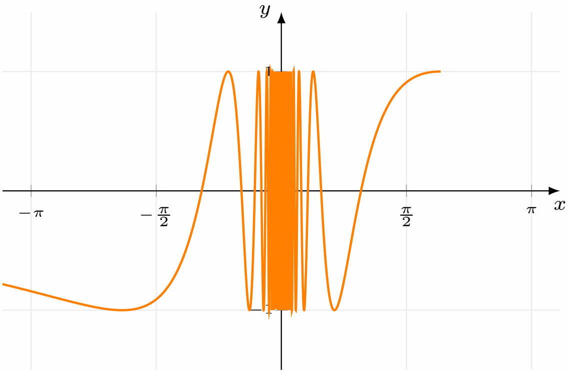
Mas...

Exemplo 36.

Considere a função

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

para discutir o limite $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.



- Ao tomar valores de x tais que

$$x = \frac{2}{1 \pm 4k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$$

- Pode-se verificar que $x \to 0$ e que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) = 1, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$$

- "Conclui-se" que

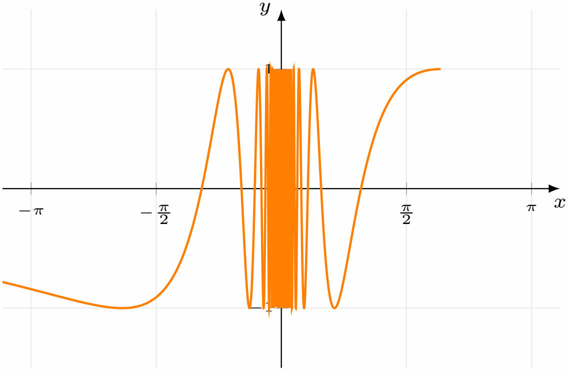
$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) = 1$$

Exemplo 37.

Considere a função

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

para discutir o limite $\lim_{x\to 0} f(x)$.



Lições aprendidas:

- Ao passo em que $x \to 0$, os valores da função oscilam, cada vez mais rapidamente, entre -1 e 1.
- Logo, não existem os limites laterais, nem o limite quando $x \to 0$.
- Foram encontrados dois candidatos para o “limite”, fato que violaria o teorema de unicidade do limite.
- Deve-se **cuidar com a simples amostragem** de valores para tentar encontrar o limite, ela pode levar a equívocos.
- Alerta para a necessidade de recursos adicionais (teoremas) para que se possa analisar adequadamente certos limites.

Exemplo 38.

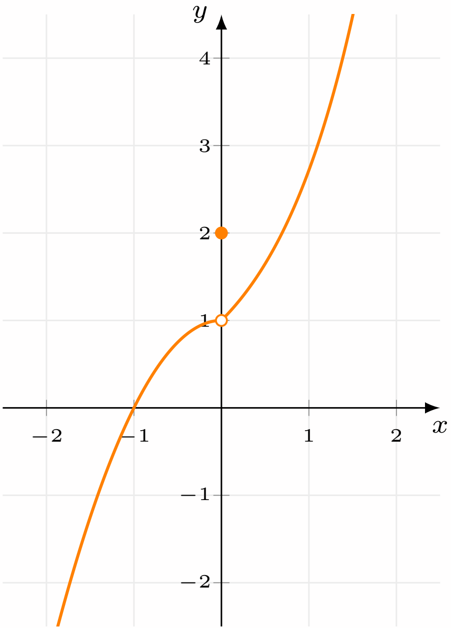
Calcule, se existir o limite $\lim_{x\to 0} f(x)$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{se } x < 0 \\ 2, & \text{se } x = 0 \\ e^x, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Exemplo 38.

Calcule, se existir o limite $\lim_{x\to 0} f(x)$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{se } x < 0 \\ 2, & \text{se } x = 0 \\ e^x, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$



Exemplo 8

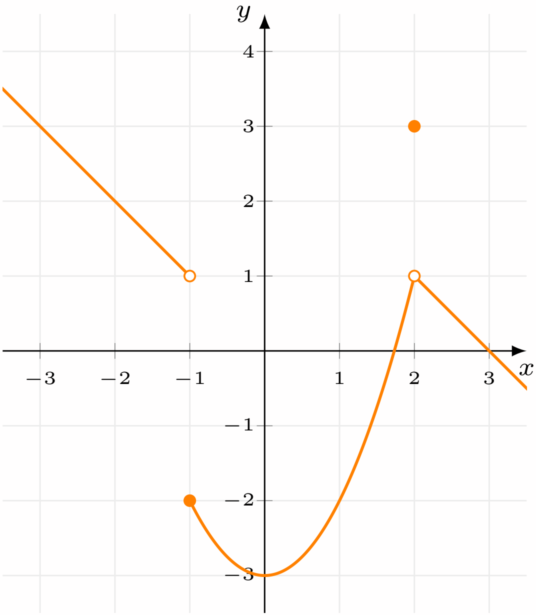
Considere a função f definida pelo gráfico a seguir. Caso existam, determine os valores solicitados.

1. $f(-2) =$ $\qquad$ $f(2) =$

2. $\lim_{x \to 2} f(x) =$

3. $\lim_{x \to 3} f(x) =$

4. $\lim_{x \to -1} f(x) =$



Propriedades Algébricas dos Limites

Teorema 24. Propriedades Algébricas dos Limites

Sejam f e g funções definidas em um intervalo aberto I contendo o ponto a, com a possível exceção de que f ou g não precisam estar definidas em a, e c e p números reais. Se $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ existirem, então são válidas as seguintes propriedades algébricas:

1. $$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

2. $$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

3. $$\lim_{x\to a}[c\cdot f(x)] = c\cdot \lim_{x\to a} f(x)$$

4. $$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]\cdot\left[\lim_{x\to a} g(x)\right]$$

4. $$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}, \text{ se } \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

5. $$\lim_{x\to a}[f(x)]^p = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^p$$

- Os mesmos resultados valem ao substituir o limite quando $x \to a$ pelos limites laterais, isto é, quando $x \to a^-$ ou $x \to a^+$.
- A demonstração dos itens 1 até 5 dependem do uso da definição (ϵ's e δ's) de limite. O item 6 pode ser demonstrado em um momento mais avançado do curso.

Teorema 25. Limite de Funções Polinomiais

Se f é uma função polinomial, então $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ para todo número real a.

Exemplo 39.

Determine os limites a seguir.

1. $$\lim_{x \to 2} (3x^2 - 5x + 2)$$

2. $$\lim_{w \to 3} (2w - 8)^5$$

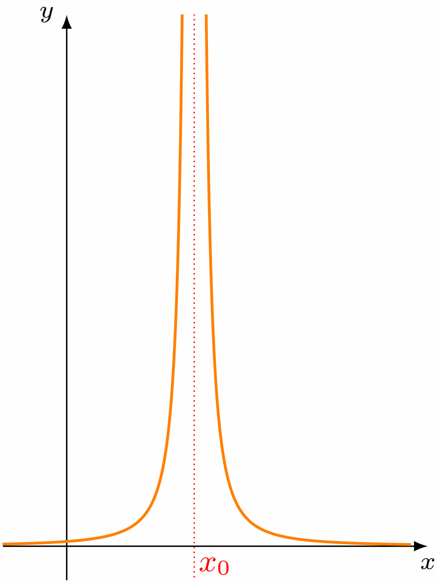
3. $$\lim_{t \to -1} \sqrt[3]{\frac{t^2 + 2t - 7}{4t + 3}}$$

Limites Infinitos

Definição 59. Limites Infinitos

Seja f uma função definida em um intervalo aberto contendo x_0, exceto, possivelmente, $x = x_0$. Dizemos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, se para qualquer $A > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que $f(x) > A$ sempre que $0 < |x - x_0| < \delta$.

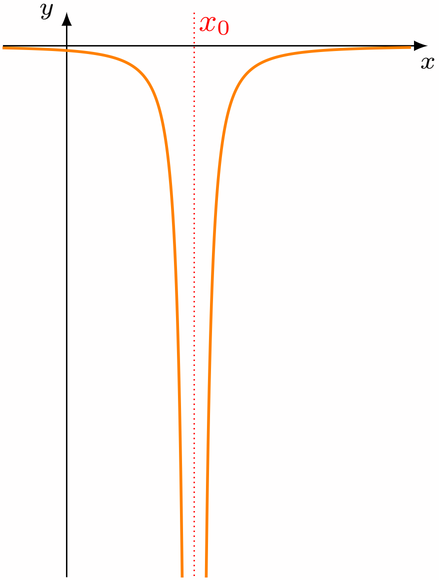
- Tem como *resultado* $+\infty$
- Dizemos que *não converge*, ou mesmo que *não existe*
- Os valores de y crescem sem *cota superior*



Definição 60. Limites Infinitos

Seja f uma função definida em um intervalo aberto contendo x_0, exceto, possivelmente, $x = x_0$. Dizemos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, se para qualquer $B < 0$, existir um $\delta > 0$ tal que $f(x) < B$ sempre que $0 < |x - x_0| < \delta$.

- Tem como *resultado* $-\infty$
- Dizemos que *não converge*, ou mesmo que *não existe*
- Os valores de y decrescem sem *cota inferior*



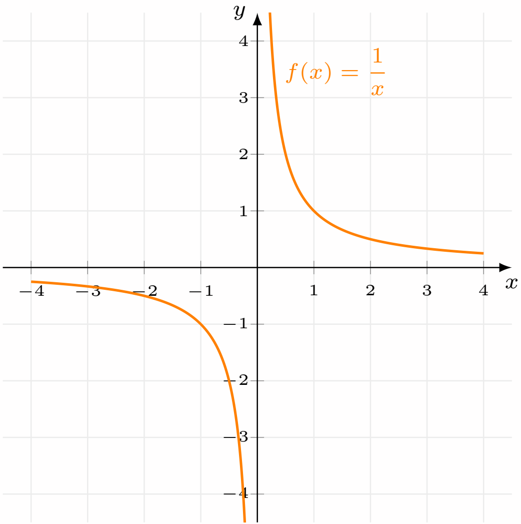
Teorema 26.

Se n é um número inteiro positivo qualquer, então

1. $$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$$
2. $$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } n \text{ é par} \\ -\infty, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Veja que

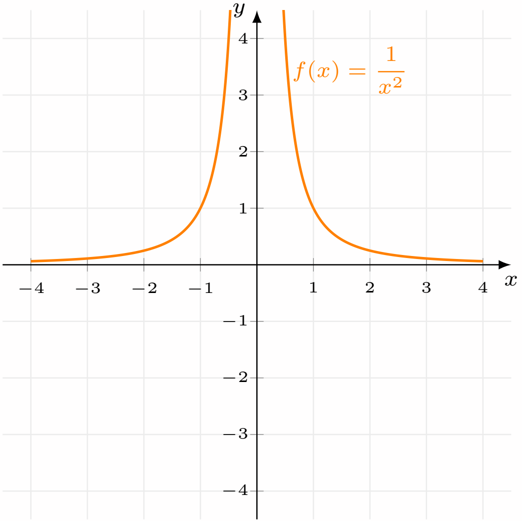
- $\dfrac{k}{0^+} = +\infty$, se $k > 0$
- $\dfrac{k}{0^-} = -\infty$, se $k > 0$



Teorema 26.

Se n é um número inteiro positivo qualquer, então

1. $$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$$
2. $$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } n \text{ é par} \\ -\infty, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$



Veja que

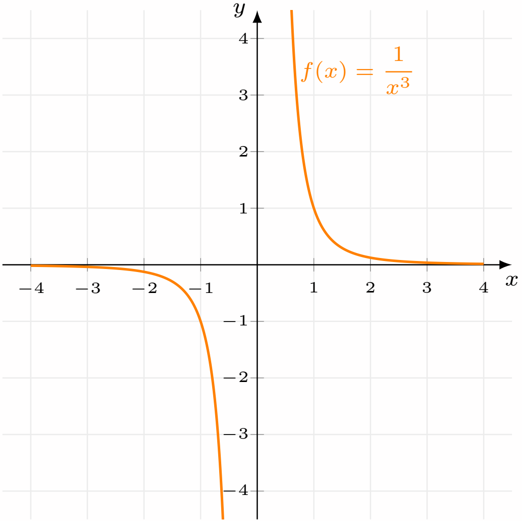
- $$\frac{k}{0^+} = +\infty, \text{ se } k > 0$$
- $$\frac{k}{0^-} = -\infty, \text{ se } k > 0$$

Teorema 26.

Se n é um número inteiro positivo qualquer, então

1. $$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

2. $$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } n \text{ é par} \\ -\infty, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$



Veja que

- $\dfrac{k}{0^+} = +\infty$, se $k > 0$
- $\dfrac{k}{0^-} = -\infty$, se $k > 0$

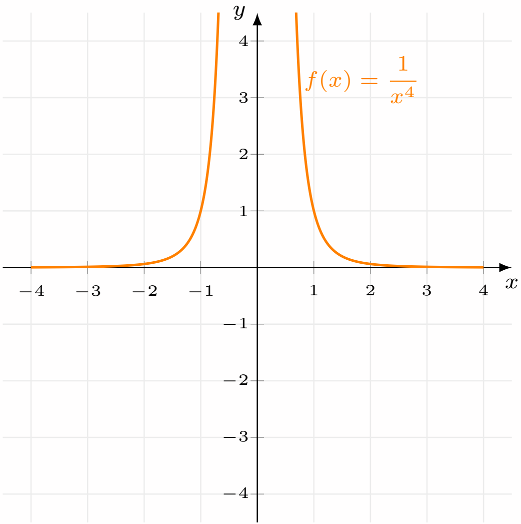
Teorema 26.

Se n é um número inteiro positivo qualquer, então

1. $$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$$
2. $$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } n \text{ é par} \\ -\infty, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Veja que

- $\dfrac{k}{0^+} = +\infty$, se $k > 0$
- $\dfrac{k}{0^-} = -\infty$, se $k > 0$



Exemplo 40.

Determine os limites a seguir.

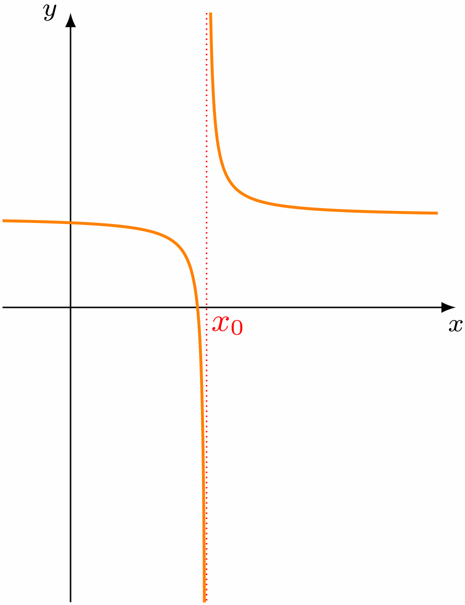
1. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{3x+2}{(x-1)^2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{1-x}{(x-2)^2}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2}{x-3}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x+1}{x^2+x-6}$

Definição 61. Assíntota Vertical

Se $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ ou se $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$, então a reta $x = x_0$ é chamada de **assíntota vertical** do gráfico da função $y = f(x)$.

Observação:

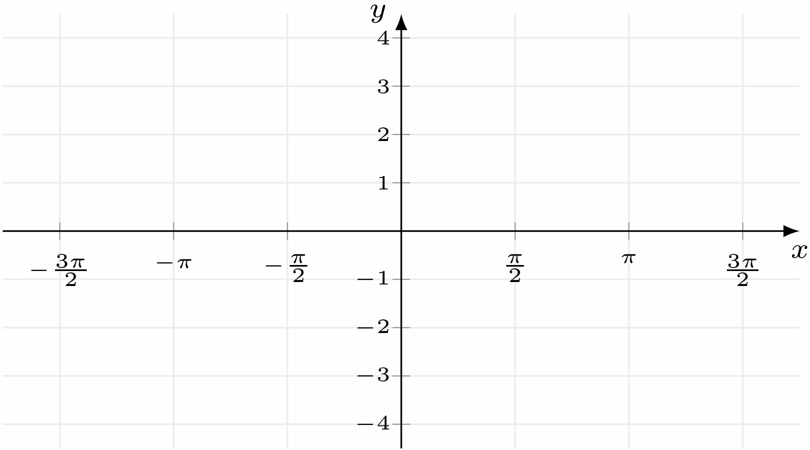
- Em outras palavas, sempre que algum dos limites laterais tender à algum dos infinitos ao passo que x tende para x_0, teremos uma assíntota vertical;
- Podemos ter múltiplas assíntotas verticais.



Exemplo 41.

Esboce os gráficos e determine as assíntotas verticais para as seguintes funções.

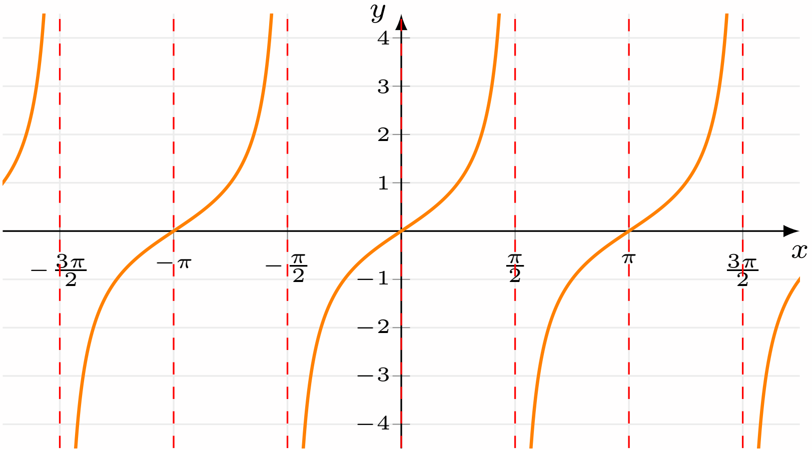
1. $f(x) = \tan x$



Exemplo 41.

Esboce os gráficos e determine as assíntotas verticais para as seguintes funções.

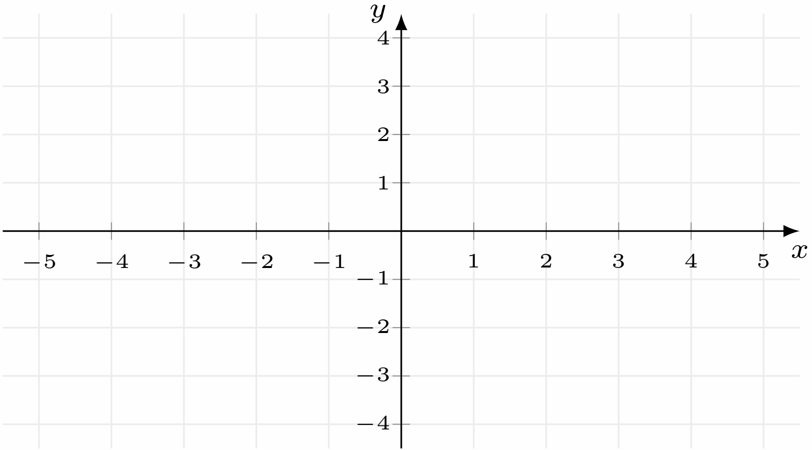
1. $f(x) = \tan x$



Exemplo 41.

Esboce os gráficos e determine as assíntotas verticais para as seguintes funções.

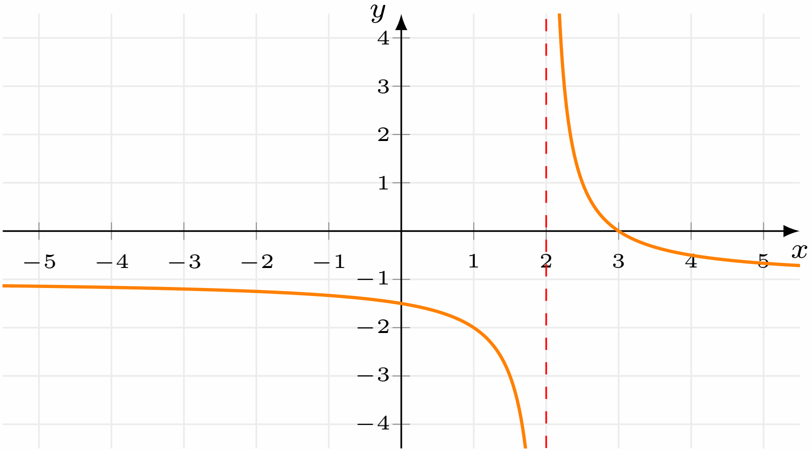
2 $f(x) = \dfrac{1}{x-2} - 1$



Exemplo 41.

Esboce os gráficos e determine as assíntotas verticais para as seguintes funções.

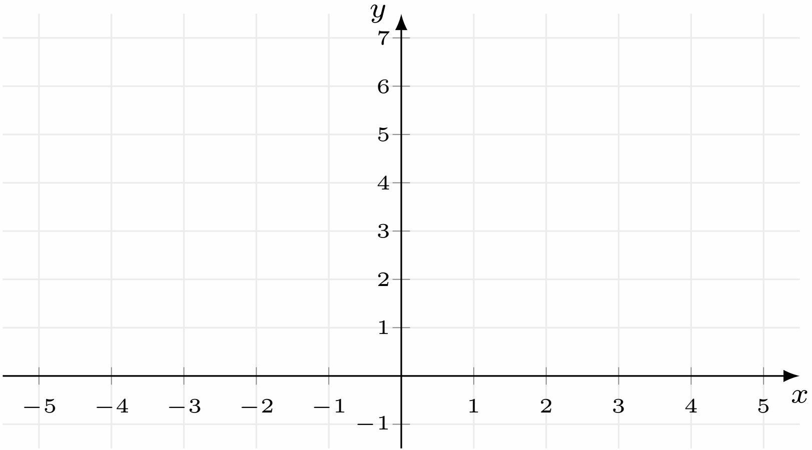
2 $f(x) = \dfrac{1}{x-2} - 1$



Exemplo 41.

Esboce os gráficos e determine as assíntotas verticais para as seguintes funções.

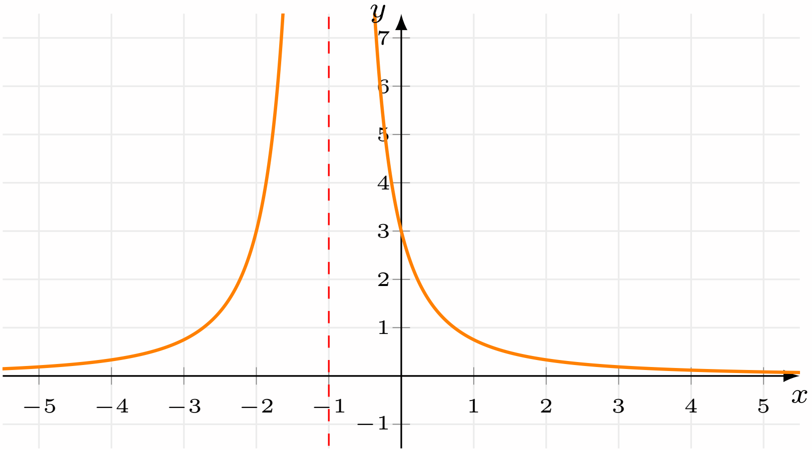
3 $f(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2}$



Exemplo 41.

Esboce os gráficos e determine as assíntotas verticais para as seguintes funções.

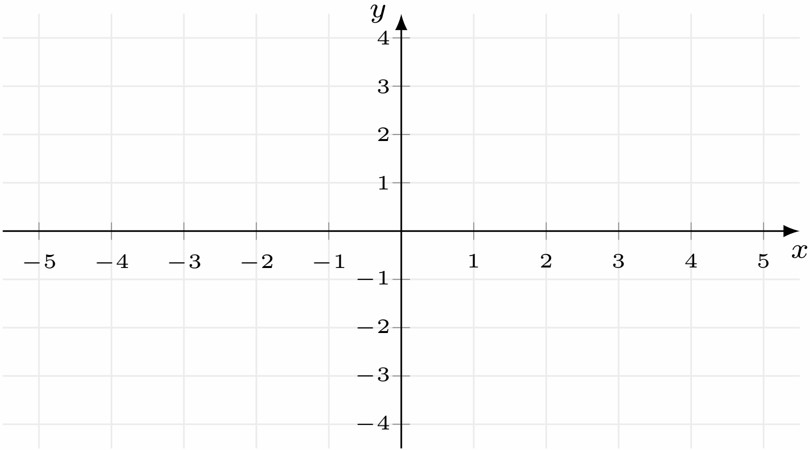
3. $f(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2}$



Exemplo 41.

Esboce os gráficos e determine as assíntotas verticais para as seguintes funções.

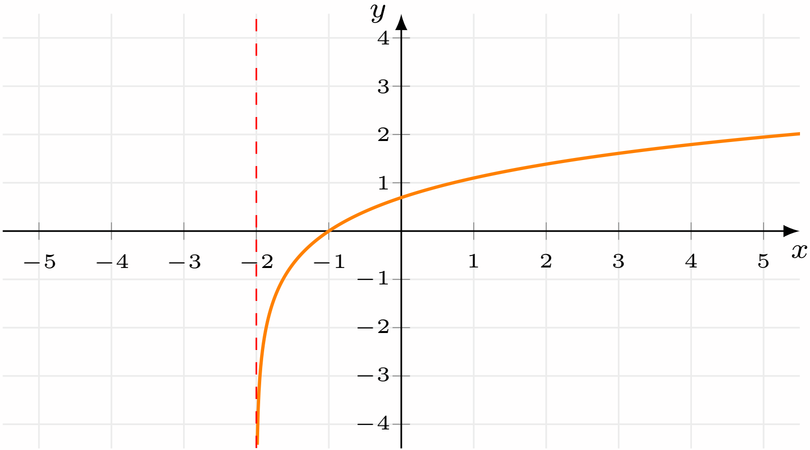
4. $f(x) = \ln(x+2)$



Exemplo 41.

Esboce os gráficos e determine as assíntotas verticais para as seguintes funções.

4. $f(x) = \ln(x+2)$



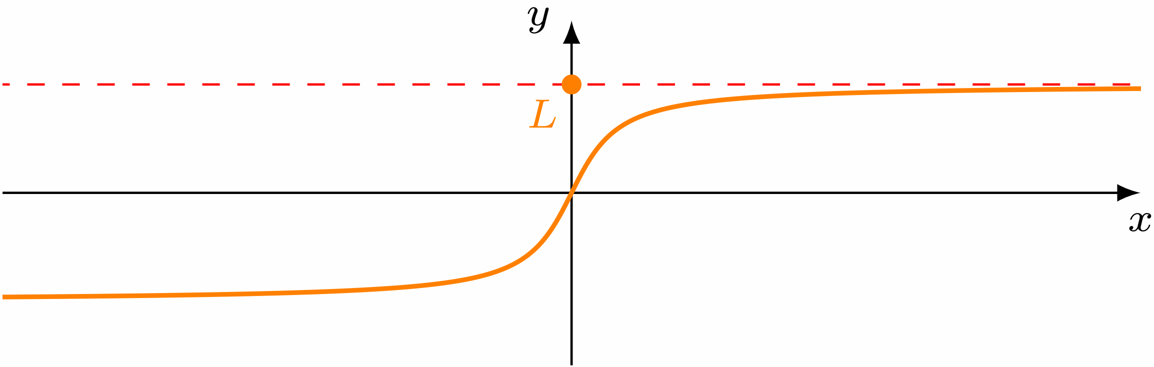
Limites nos Infinitos

Definição 62.

Seja f uma função definida em um intervalo aberto $(a, +\infty)$.Escrevemos $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ se para qualquer $\epsilon > 0$, existir um $A > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $x > A$.

Em outras palavras:

- A medida com que x cresce sem *cota superior*, os valores de y permanecem *praticamente inalterados*.

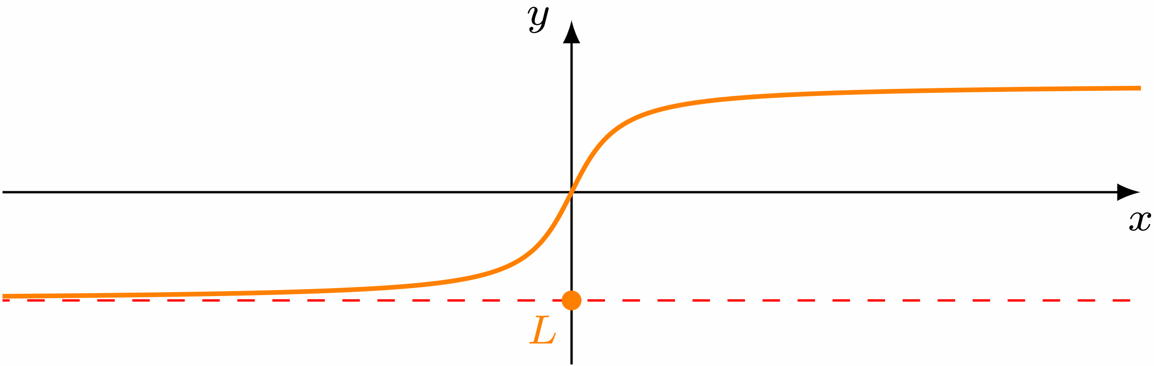


Definição 63.

Seja f uma função definida em um intervalo aberto $(-\infty, b)$. Escrevemos $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ se para qualquer $\epsilon > 0$, existir um $B < 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $x < B$.

Em outras palavras:

- A medida com que x decresce sem *cota inferior*, os valores de y permanecem *praticamente inalterados*



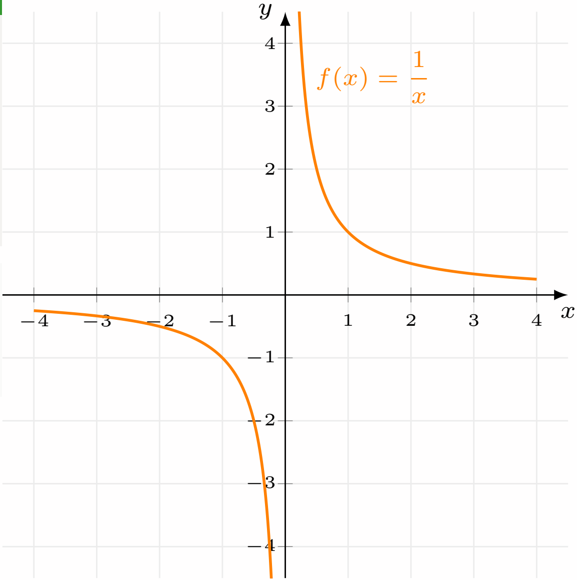
Teorema 27.

Se n é um número inteiro positivo qualquer, então

1. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$
2. $$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Veja que

- $$\frac{k}{\pm\infty} = 0$$



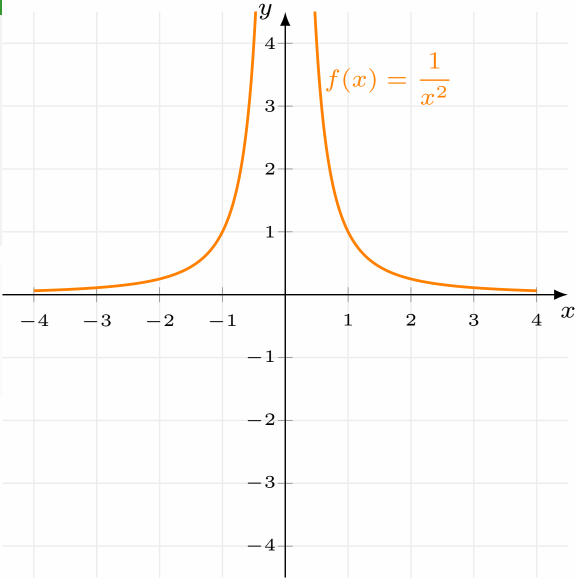
Teorema 27.

Se n é um número inteiro positivo qualquer, então

1. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$
2. $$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Veja que

- $$\frac{k}{\pm\infty} = 0$$



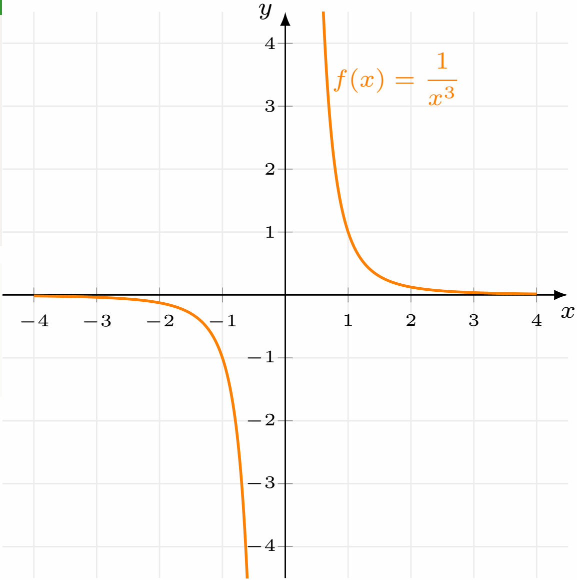
Teorema 27.

Se n é um número inteiro positivo qualquer, então

1. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$
2. $$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Veja que

- $$\frac{k}{\pm\infty} = 0$$



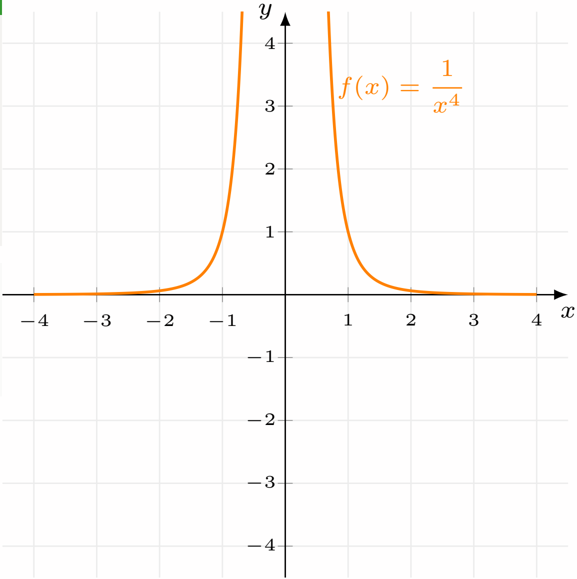
Teorema 27.

Se n é um número inteiro positivo qualquer, então

1. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$
2. $$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Veja que

- $$\frac{k}{\pm\infty} = 0$$



Exemplo 42.

Use o teorema anterior para determinar o limite a seguir.

- $$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^5 - 5x^4 + 3x}{x^2 - 3x}$$

Teorema 28.

Sejam as funções polinomiais

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

e

$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

Então, temos os limites nos infinitos da função racional

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Em outras palavras

- Os limites nos infinitos de funções racionais podem ser encontrados analisando apenas os limites da função racional obtida ao considerarmos apenas os termos dominantes do numerador e do dominador

Exemplo 43.

Use o teorema anterior para determinar o limite a seguir.

- $$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^5 - 5x^4 + 3x}{x^2 - 3x}$$

Exemplo 44.

Determine os limites a seguir.

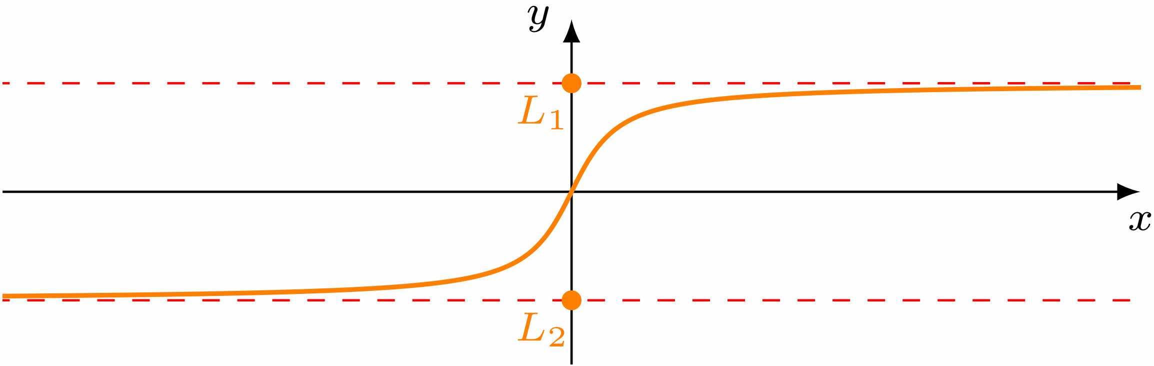
1. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{10x^2 - x + 7}{2x^2 + 9x - 3}$$

2. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{-3x + 6}{x^3 + 2x + 1}$$

3. $$\lim_{x \to +\infty} 2x^5 - 4x^3 + 1$$

Definição 64. Assíntota Horizontal

Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ ou se $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, então a reta $y = L$ é chamada de **assíntota horizontal** do gráfico da função $y = f(x)$.



Exemplo 45.

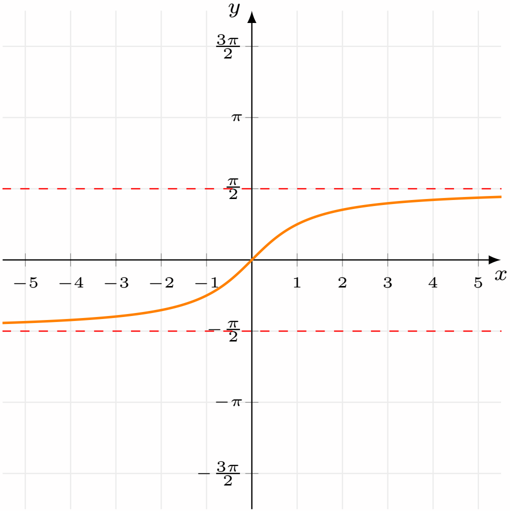
Esboce os gráficos e determine as assíntotas horizontais para as seguintes funções.

1. $f(x) = \arctan x$

Exemplo 45.

Esboce os gráficos e determine as assíntotas horizontais para as seguintes funções.

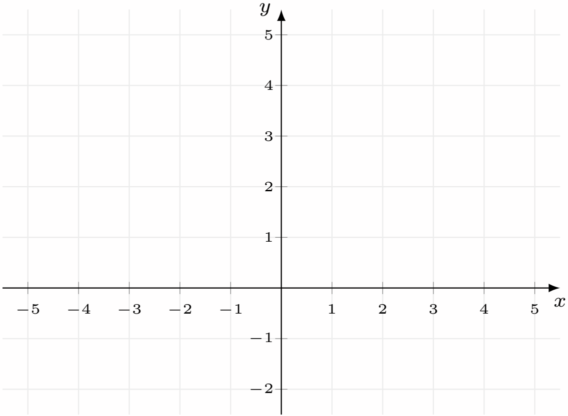
1. $f(x) = \arctan x$



Exemplo 45.

Esboce os gráficos e determine as assíntotas horizontais para as seguintes funções.

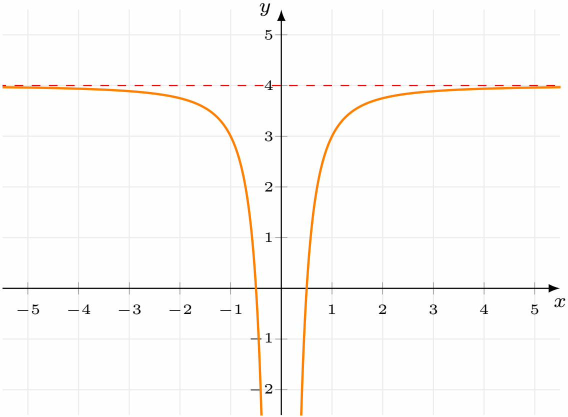
2 $f(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{x^2}$



Exemplo 45.

Esboce os gráficos e determine as assíntotas horizontais para as seguintes funções.

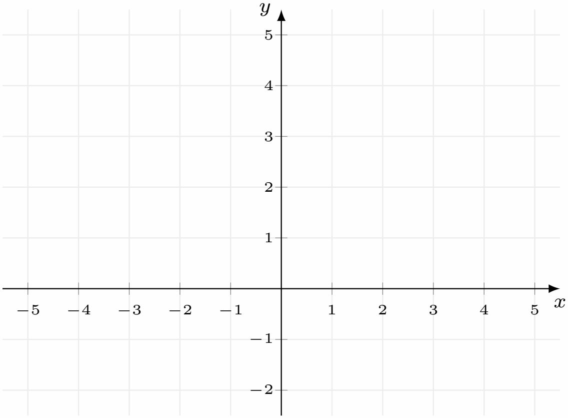
2 $f(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{x^2}$



Exemplo 45.

Esboce os gráficos e determine as assíntotas horizontais para as seguintes funções.

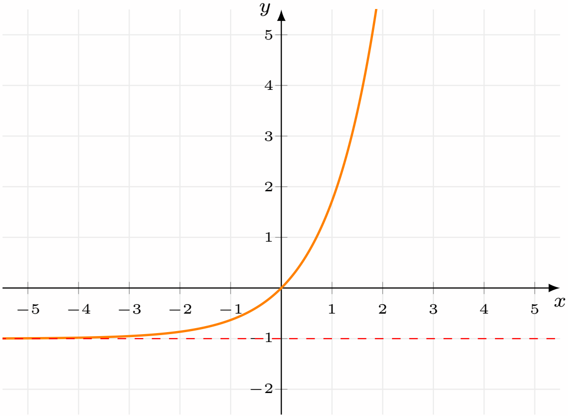
3. $f(x) = e^x - 1$



Exemplo 45.

Esboce os gráficos e determine as assíntotas horizontais para as seguintes funções.

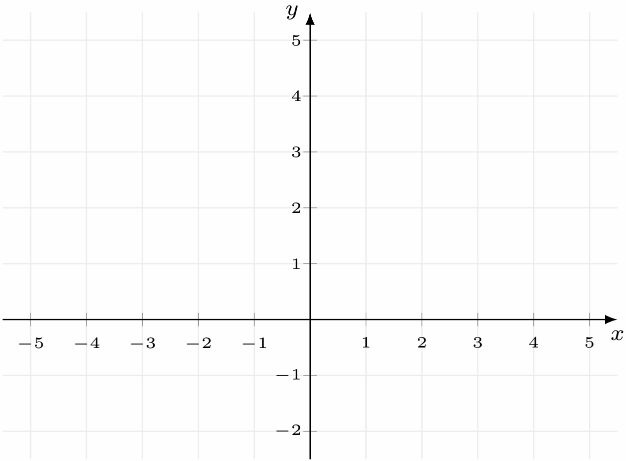
3. $f(x) = e^x - 1$



Exemplo 46.

Considere a função $f(x) = \dfrac{3x+7}{x+2}$. Calcule os limites a seguir, as suas assíntotas (horizontais e verticais) e o seu gráfico.

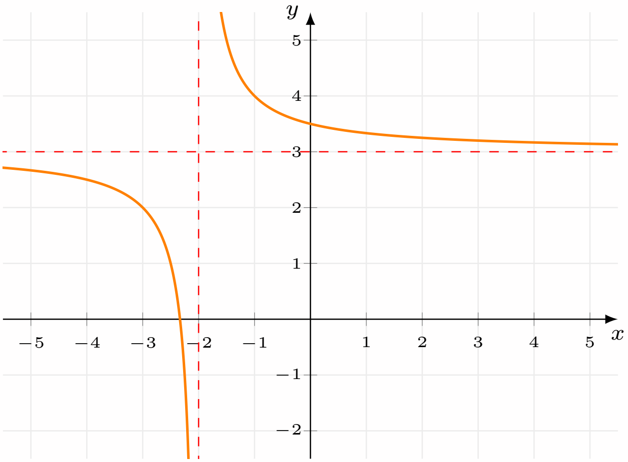
1. $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$
2. $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$
3. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
5. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$



Exemplo 46.

Considere a função $f(x) = \dfrac{3x+7}{x+2}$. Calcule os limites a seguir, as suas assíntotas (horizontais e verticais) e o seu gráfico.

1. $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 4$
2. $\lim\limits_{x \to -2} f(x) \quad \nexists$
3. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 7/2$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$
5. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$



Limites de Funções Definidas por Partes

Exemplo 47.

Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2}, & \text{se } x < -2 \\ x^2 - 5, & \text{se } -2 < x \leq 3 \\ \sqrt{x+13}, & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

para avaliar os limites solicitados.

1. $\lim_{x \to -2} f(x)$
2. $\lim_{x \to 0} f(x)$
3. $\lim_{x \to 3} f(x)$

Observação:

- Devemos ter cuidado ao utilizarmos as propriedades algébricas, visto que o comportamento da função pode mudar drasticamente nos pontos onde a lei é alterada;
- Nesse sentido, nos pontos onde trocamos de uma sentença para a outra, devemos sempre avaliar os limites laterais para determinar o limite.

Divisão de Polinômios

Teorema 29. Teorema de D'Alembert

O resto $r(x)$ da divisão de um polinômio $f(x)$ por $x - a$ é $f(a)$. Assim o polinômio f(x) é divisível por $x - a$ se, e somente se, $f(a) = 0$.

Exemplo 48.
Mostre que $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x - 12$ é divisível por $x - 3$ utilizando o teorema de D'Alembert.

Exemplo 49.

Verifique que $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x - 12$ é divisível por $x - 3$ utilizando algoritmo da divisão polinomial.

Indeterminações

Definição 65. Expressões Indeterminadas

Damos o nome de indeterminação àqueles limites que, *a priori*, não sabemos o resultado.

Exemplo 50.
São exemplos de indeterminações expressões que resultam em casos de:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$$

Exemplo 51.

Determine os limites:

1. $$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^3-8}-\frac{1}{x-2}\right)$$

2. $$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x+2}-x)$$

Exemplo 52.

Determine os limites a seguir:

1. $$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4}$$
2. $$\lim_{t \to 2} \frac{t^5 - 32}{3t - 6}$$

Exemplo 53.

Calcule os limite das funções irracionais abaixo.

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$$

2. $$\lim_{x\to 9} \frac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}$$

Teorema do Confronto

Teorema 30. Teorema do Confronto (ou Teorema do Sanduíche)

Sejam f, g e h funções que satisfazem

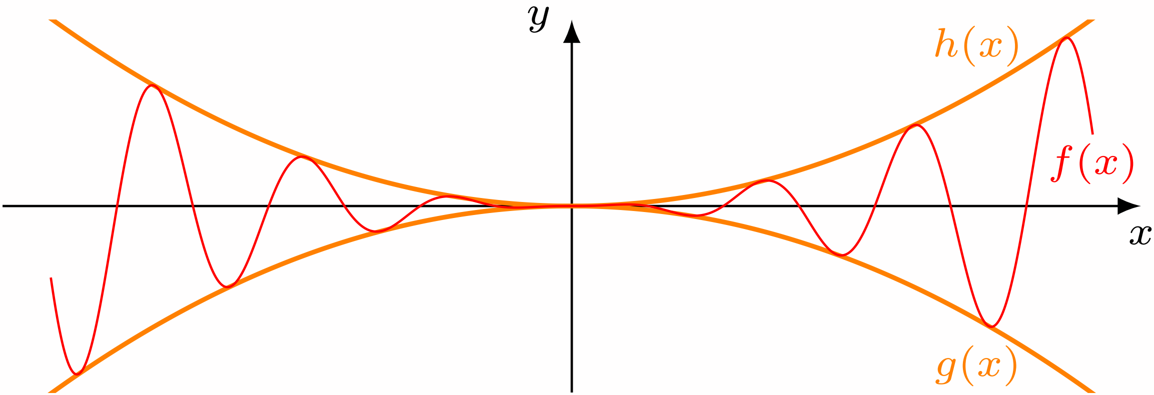
$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

para todo x em um intervalo aberto que contenha o ponto x_0, exceto possivelmente em $x = x_0$. Se g e h possuírem o mesmo limite quando x tende para x_0, isto é,

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L,$$

então f também tem esse limite quando x tende para x_0, ou seja,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$



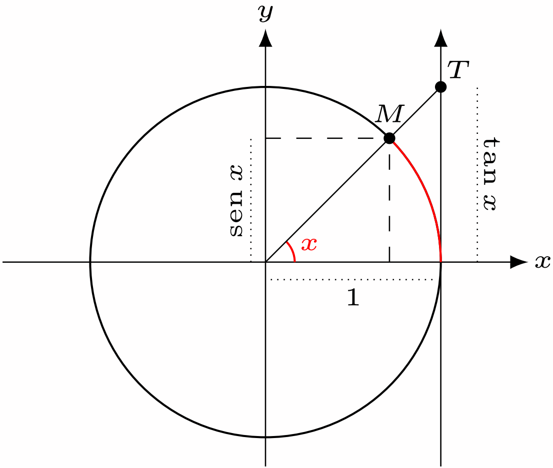
y
$h(x)$
$f(x)$
x
$g(x)$

Limites Fundamentais

Teorema 31. Limite Fundamental Trigonométrico – Seno

É válido o limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$$



- Para x no primeiro quadrante, temos as áreas:

$$\frac{\tan x \cdot 1}{2} \geq \frac{\pi \cdot 1^2 \cdot x}{2\pi} \geq \frac{\operatorname{sen} x \cdot 1}{2}$$

- Ao dividir por $\frac{2}{\operatorname{sen} x}$ e simplificar:

$$\cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1$$

- Basta aplicar o teorema do confronto quando $x \to 0$.

Exemplo 54.

Calcule os limites trigonométricos a seguir.

1. $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}$$
2. $$\lim_{x \to 4} \frac{\operatorname{sen}(8 - 2x)}{4x - 16}$$

Teorema 32. Limite Fundamental Trigonométrico – Cosseno

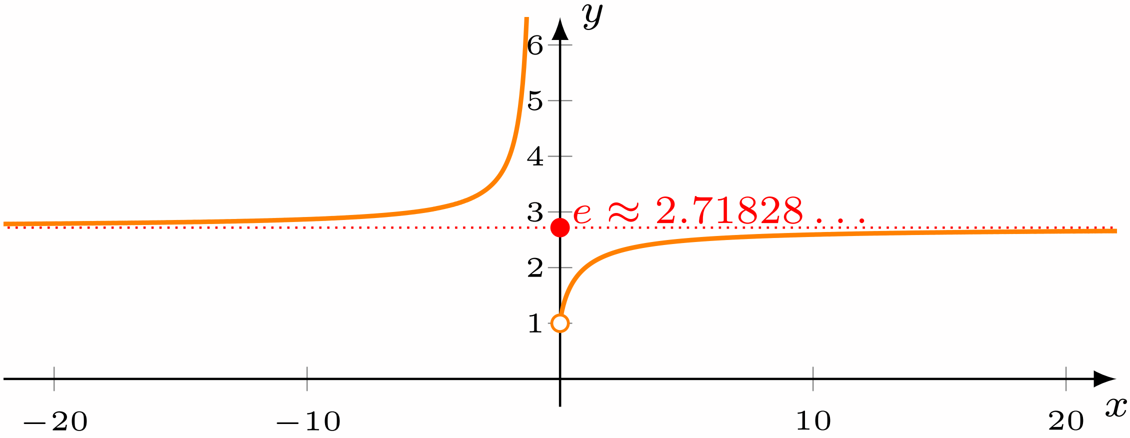
É válido o limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$$

Teorema 33. Limite Fundamental Exponencial

É válido o limite:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$



Exemplo 55.

Calcule o limite:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x}$$

Teorema 34.

Para todo $k \neq 0$, são válidos os seguintes limites:

1. $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(kx)}{kx} = 1$$
2. $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(kx)}{kx} = 0$$
3. $$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{x} = e^{k}$$
4. $$\lim_{x \to 0} (1 + kx)^{\frac{1}{x}} = e^{k}$$
5. $$\lim_{x \to 0} \frac{a^{kx} - 1}{kx} = \ln a$$

Exemplo 56.

Calcule os limites a seguir.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x-2}{x-3}\right)^x$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x}-1}{\operatorname{sen} x}$

Continuidade

Definição 66. Continuidade

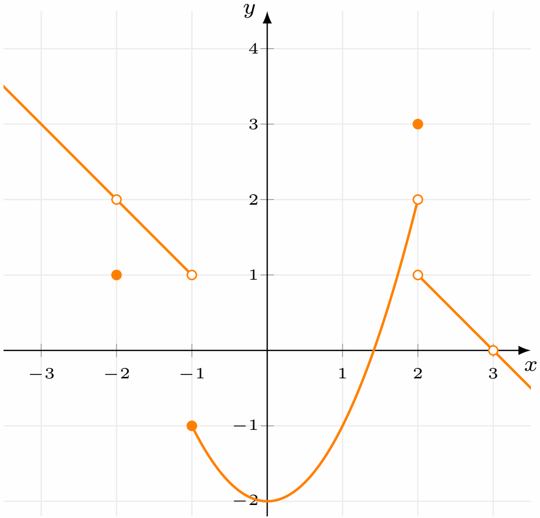
Dizemos que uma função f é **contínua** em $x = x_0$ se as seguintes condições estiverem satisfeitas:

1. Existe $f(x_0)$;
2. Existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$;
3. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Dizemos que:

- f é **contínua** em (a, b) se, e somente se, f for contínua para todo $x \in (a, b)$;
- f é **contínua** se for contínua para todo elemento x_0 de seu domínio;
- f **descontínua** em x_0 se não for contínua em x_0.

Exemplo 57.
Avalie a continuidade da função em $x = -2$, $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$ e $x = 3$.



Exemplo 58.

Verifique a continuidade da função $f(x) = x^2 - x - 2$ no ponto $x = 2$. Seria a função f contínua em qualquer x real?

Teorema 35. Continuidade das Funções Polinomiais

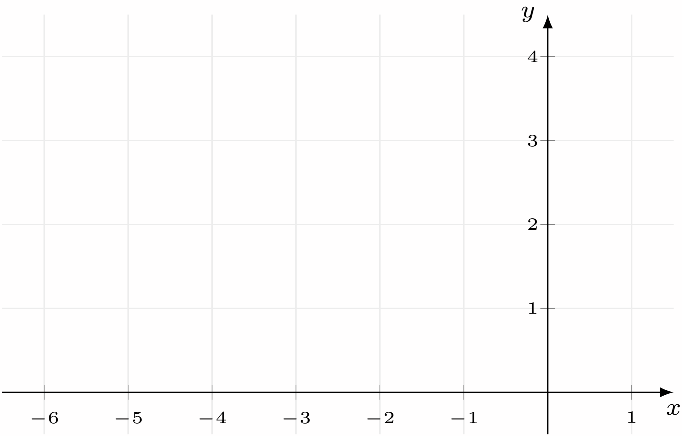
Seja f uma função polinomial. Então f é uma função contínua.

Exemplo 59.

Verifique a continuidade das funções a seguir nos pontos indicados.

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+3)^2}, & \text{se } x \neq -3 \\ 1, & \text{se } x = -3 \end{cases}$

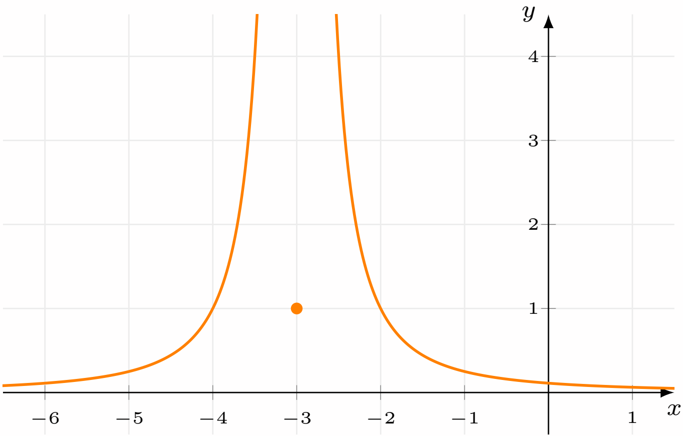
no ponto $x = -3$.



Exemplo 59.

Verifique a continuidade das funções a seguir nos pontos indicados.

1. $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+3)^2}, & \text{se } x \neq -3 \\ 1, & \text{se } x = -3 \end{cases}$$
no ponto $x = -3$.



Exemplo 59.

Verifique a continuidade das funções a seguir nos pontos indicados.

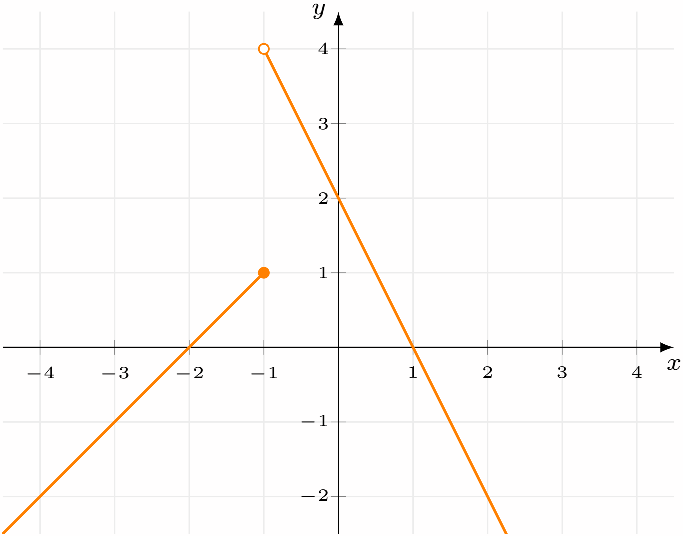
2 $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{se } x \leq -1 \\ 2-2x, & \text{se } x > -1 \end{cases}$

no ponto $x = -1$.

Exemplo 59.

Verifique a continuidade das funções a seguir nos pontos indicados.

2 $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{se } x \leq -1 \\ 2-2x, & \text{se } x > -1 \end{cases}$
no ponto $x = -1$.

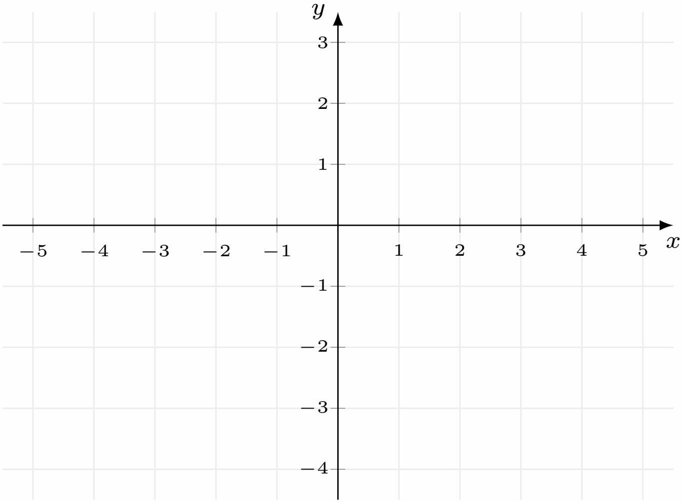


Exemplo 59.

Verifique a continuidade das funções a seguir nos pontos indicados.

3 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{se } x < 1 \\ -3, & \text{se } 1 \le x \le 3 \\ 2x - 9, & \text{se } x > 3 \end{cases}$

nos pontos $x = 1$ e $x = 3$.

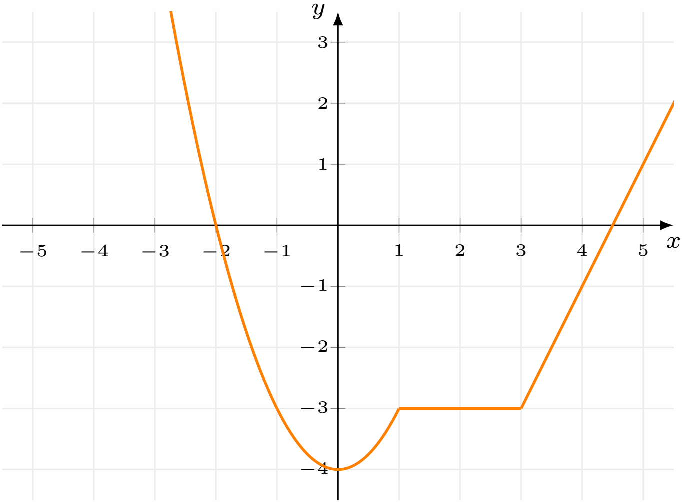


Exemplo 59.

Verifique a continuidade das funções a seguir nos pontos indicados.

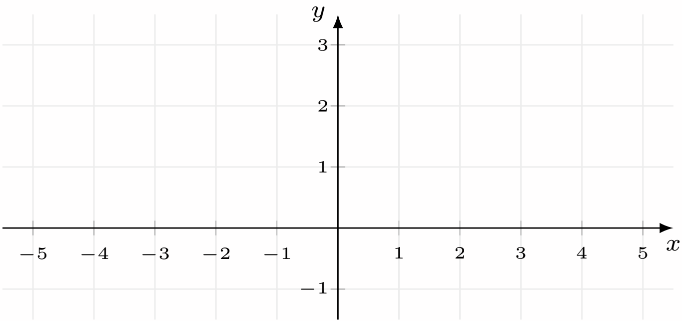
3 $$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{se } x < 1 \\ -3, & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \\ 2x - 9, & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

nos pontos $x = 1$ e $x = 3$.



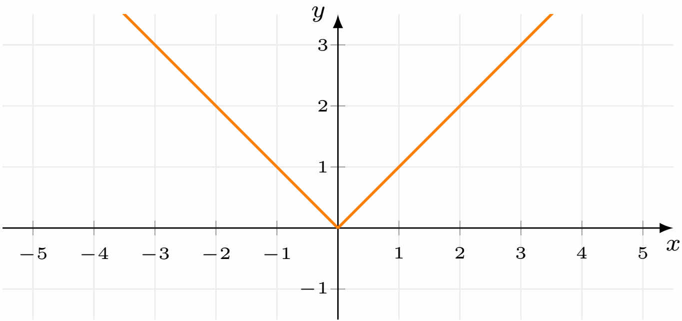
Exemplo 60.

Mostre que a função $f(x) = |x|$ é contínua para todo x real.



Exemplo 60.

Mostre que a função $f(x) = |x|$ é contínua para todo x real.



Definição 67. Continuidade à Direita

Uma função f é **contínua à direita** em x_0 se:

1. Existe $f(x_0)$;
2. Existe $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$;
3. $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Definição 68. Continuidade à Esquerda

Uma função f é **contínua à esquerda** em x_0 se:

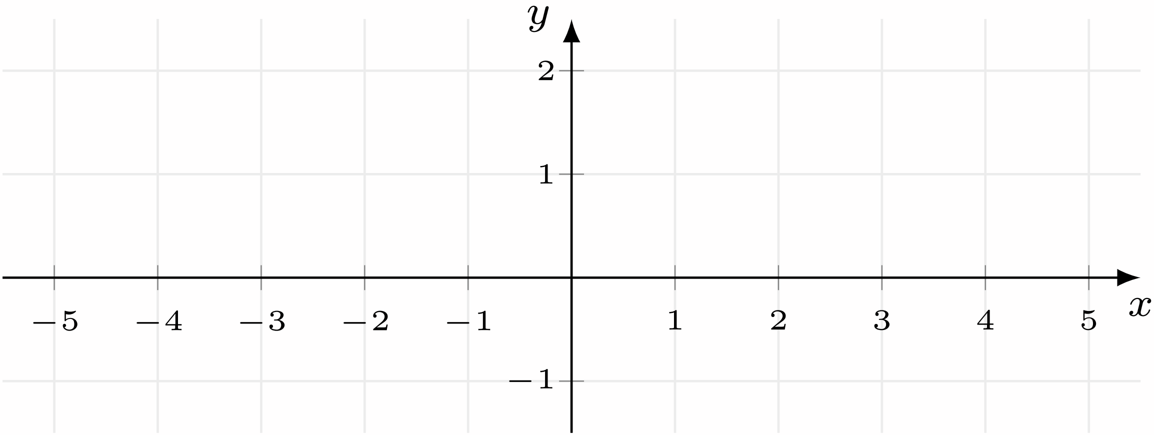
1. Existe $f(x_0)$;
2. Existe $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$;
3. $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Como consequência:

- Uma função f é contínua em x_0 se, e so mente se, for contínua à direita e à esquerda em x_0;
- Uma função f é contínua em $[a, b]$ se, e somente se, f for contínua para todo $x_0 \in (a, b)$, contínua à direita em $x = a$ e contínua à esquerda em $x = b$.

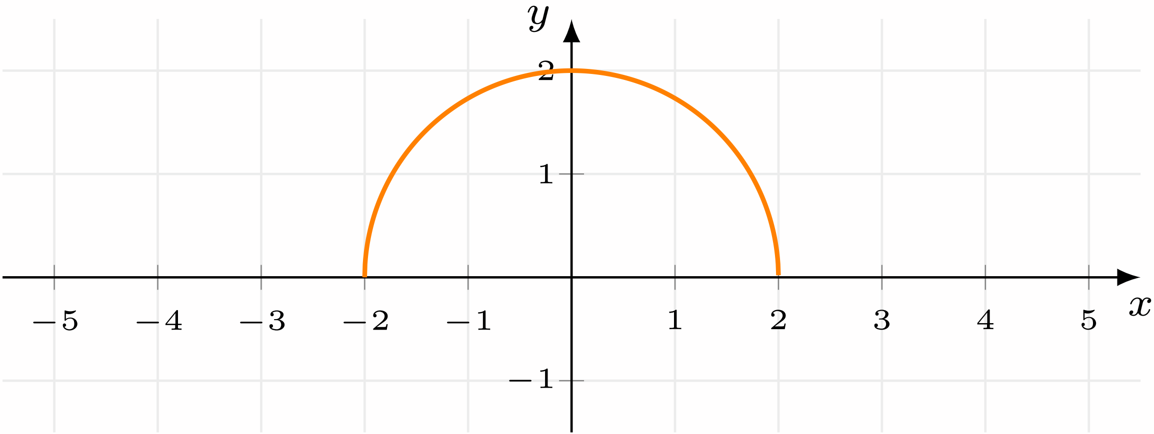
Exemplo 61.

Discuta a continuidade da função $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ no intervalo $[-2,\ 2]$.



Exemplo 61.

Discuta a continuidade da função $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ no intervalo $[-2,\ 2]$.



Teorema 36. Propriedades Algébricas das Funções Contínuas

Se as funções f e g forem contínuas em $x = x_0$, então

1. $f + g$ é contínua em x_0;
2. $f - g$ é contínua em x_0;
3. $f \cdot g$ é contínua em x_0;
4. $\dfrac{f}{g}$ é contínua em x_0 se $g(x_0) \neq 0$ e descontínua em x_0 se $g(x_0) = 0$.

Exemplo 62.

Verifique que a função $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x}{x^2 + 9}$ é contínua em todo o seu domínio.

Teorema 37. Continuidade de Funções Racionais

Seja f uma função racional. Então f é contínua em todos os pontos que não anulam o seu denominador e possui descontinuidades nos pontos que o anulam.

Teorema 38. Limite da Composição de Funções Contínuas

Se $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$ e se f for contínua em L, então vale a propriedade

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right).$$

- Essa propriedade permanece valida se o limite quando $x \to x_0$ for substituído pelos limites laterais $x \to x_0^+$ ou $x \to x_0^-$, ou mesmo se forem considerados os limites no infinito, $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.

Exemplo 63.

Avalie o $\lim_{x \to 3} |5 - x^2|$.

Teorema 39. Continuidade da Composição de Funções Contínuas

Se uma função g for contínua no ponto x_0 e outra função f for contínua no ponto $g(x_0)$, então a composição $f \circ g$ é contínua em x_0.

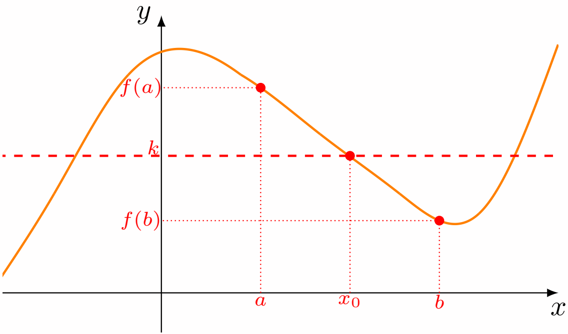
Exemplo 64.

Verifique que a função $f(x) = |5 - x^2| + \dfrac{1}{x}$ é contínua para todo x em seu domínio.

Teorema 40. Teorema do Valor Intermediário

Se f for uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e k um número entre $f(a)$ e $f(b)$, inclusive, então existe no mínimo um número x no intervalo $[a, b]$, tal que $f(x) = k$.

- Uma consequência do teorema do valor intermediário é o fato do gráfico de uma função f contínua em um intervalo $[a, b]$ não possuir quebras ou buracos;
- Reciprocamente, se o gráfico de uma função não possui quebras ou buracos no intervalo $[a, b]$, então f será uma função contínua em $[a, b]$.



Teorema 41. Continuidade das Funções Trigonométricas

Seja x_0 um número do domínio das funções trigonométricas a seguir. Então são válidos os limites

1. $\lim\limits_{x \to x_0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0;$
2. $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0;$
3. $\lim\limits_{x \to x_0} \tan x = \tan x_0;$
4. $\lim\limits_{x \to x_0} \cot x = \cot x_0;$
5. $\lim\limits_{x \to x_0} \sec x = \sec x_0;$
6. $\lim\limits_{x \to x_0} \csc x = \csc x_0.$

- Como consequência, todas as funções trigonométricas citadas no teorema são contínuas para qualquer x_0 dos seus respectivos domínios.

Teorema 42. Continuidade da Função Inversa

Seja f uma função que admite inversa f^{-1}. Então f^{-1} será contínua em cada ponto de seu domínio; ou seja, f^{-1} será contínua em cada ponto da imagem de f.

Teorema 43. Continuidade das Funções Trigonométricas Inversas

Seja x_0 um número do domínio das funções trigonométricas inversas a seguir. Então são válidos os limites

1. $\lim\limits_{x \to x_0} \operatorname{arcsen} x = \operatorname{arcsen} x_0$;
2. $\lim\limits_{x \to x_0} \arccos x = \arccos x_0$;
3. $\lim\limits_{x \to x_0} \arctan x = \arctan x_0$;

- Como consequência, todas as funções trigonométricas inversas citadas no teorema são contínuas para qualquer x_0 dos seus respectivos domínios.

Teorema 44. Continuidade das Funções Exponenciais e Logarítmicas

Seja b um número real positivo, com $b \neq 1$. Então são válidos os limites

1. $\lim_{x\to x_0} b^x = b_0^x$ para qualquer c real;
2. $\lim\limits_{x\to x_0} \log_b x = \log_b x_0$ para qualquer $x_0 > 0$.

- Como consequência, todas as funções exponenciais e logarítmicas são contínuas para qualquer x_0 dos seus respectivos domínios.

Exemplo 65.

Em quais pontos a função $f(x) = \dfrac{\arctan x + \ln x}{x^2 - 4}$ é contínua?

Exemplo 66.

Verifique que a função $f(x) = e^{x^2-1}$ é contínua para todo x real.

Definição 69. Descontinuidade Removível

Uma função f possui uma descontinuidade **removível** em x_0 se:

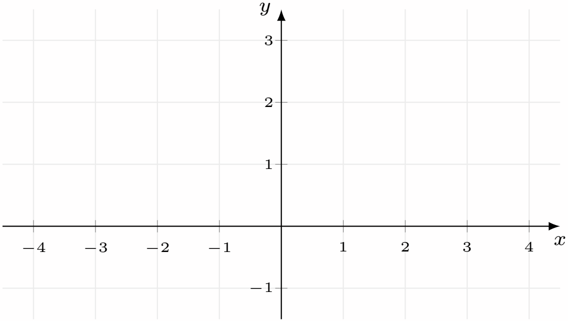
1. Existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$;
2. Ou f não está definida em x_0 ou f está definida em x_0, mas

$$f(x_0) \neq \lim_{x \to x_0} f(x)$$

- Recebem o nome pois com uma "pequena" modificação seria possível a obtenção de uma função contínua.

Exemplo 67.

A função $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ possui uma descontinuidade removível em $x = 2$.



Definição 69. Descontinuidade Removível

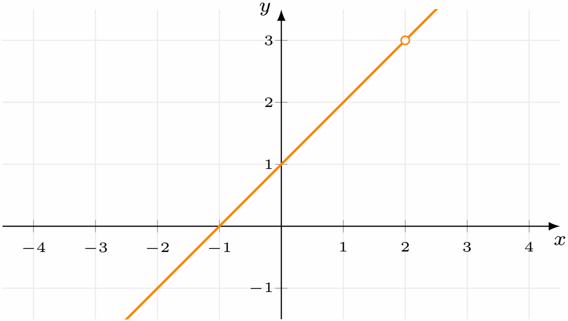
Uma função f possui uma descontinuidade **removível** em x_0 se:

1. Existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$;
2. Ou f não está definida em x_0 ou f está definida em x_0, mas
$$f(x_0) \neq \lim_{x \to x_0} f(x)$$

- Recebem o nome pois com uma "pequena" modificação seria possível a obtenção de uma função contínua.

Exemplo 67.

A função $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ possui uma descontinuidade removível em $x = 2$.



Definição 70. Descontinuidade Infinita

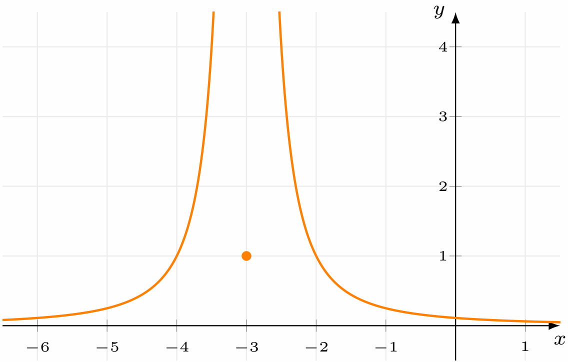
Uma função f possui uma descontinuidade **infinita** no ponto x_0 se ocorrer **ao menos uma** das seguintes situações:

1. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$;
2. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$;
3. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$;
4. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$;

- Note que a definição de descontinuidade infinita não exige que a função f esteja definida no ponto x_0.

Exemplo 68.

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+3)^2}, & \text{se } x \neq -3 \\ 1, & \text{se } x = -3 \end{cases}$ possui descontinuidade infinita em $x = -3$.



Definição 71. Descontinuidade de Salto

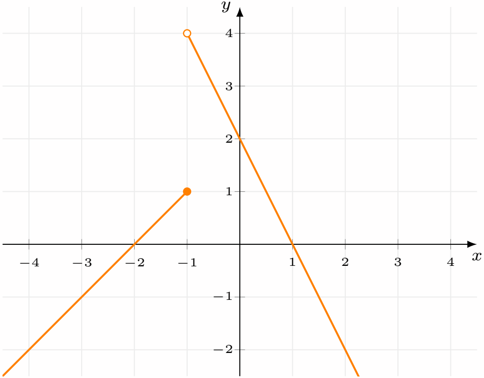
Uma função f possui uma descontinuidade de **salto** no ponto x_0 se:

1. Existem $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$;
2. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$;

- Assim como no caso da descontinuidade infinita, na descontinuidade de salto não é exigido que a função f esteja definida em x_0.

Exemplo 69.

$f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{se } x \leq -1 \\ 2-2x, & \text{se } x > -1 \end{cases}$ possui descontinuidade de salto em $x = -1$.



Exemplo 70.

Dada a função $f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{se } x \leq -1 \\ x^2 + a, & \text{se } x > -1 \end{cases}$, determine um valor de a para que a função seja contínua em $x = -1$.

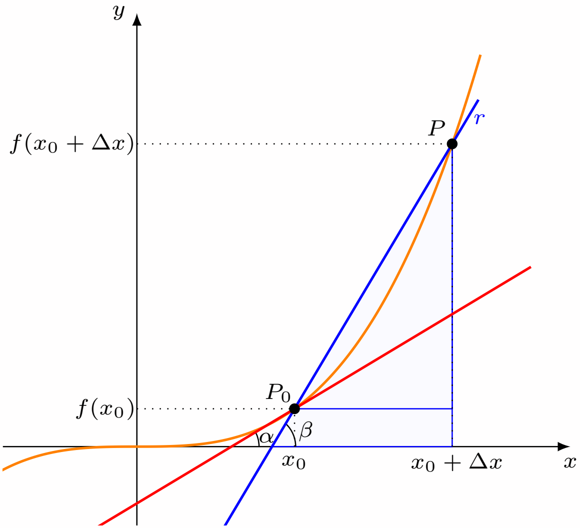
Unidade III

Derivadas

Derivada em Um Ponto

- Considere $y = f(x)$, $x_0 \in D(f)$ e $\Delta x \in \mathbb{R}$
- E a **reta secante** r ao gráfico da f em $P_0(x_0,\ f(x_0))$ e $P(x_0 + \Delta x,\ f(x_0 + \Delta x))$
- Com isso, temos
  - → Δx: *incremento* na variável x
  - → $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$
  - → $\tan \beta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
- Observe a **reta tangente** t ao gráfico da f no ponto P_0
- Ao passo que $\Delta x \to 0$, temos que $P \to P_0$, $r \to t$, $\beta \to \alpha$ e, por fim,

$$\tan \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



Definição 72. Derivada

Seja f uma função definida em um intervalo aberto I contendo x_0. A **derivada** da função f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é o número real

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

desde que o limite exista.

- Caso o limite exista, dizemos que f é derivável (ou diferenciável) em x_0;
- Nesse caso, temos que

$$f'(x_0) = \tan \alpha,$$

onde α é a **inclinação da reta tangente** ao gráfico da f no ponto $(x_0, f(x_0))$

- Definições alternativas

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- Notações alternativas
  - → Lagrange: $f'(x_0), y'(x_0)$
  - → Leibniz: $\frac{dy}{dx}(x_0), \frac{df}{dx}(x_0)$
  - → Newton: $\dot{x}(t_0) = \frac{dx}{dt}(t_0)$

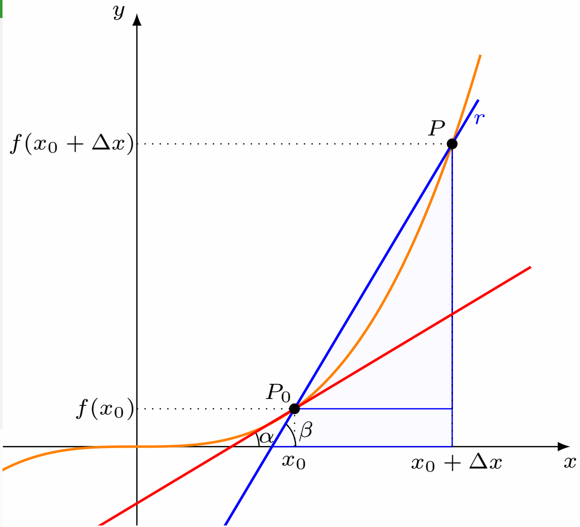
Teorema 45. Inclinação da Reta Tangente

Seja f uma função definida em um intervalo aberto I contendo x_0 para a qual a derivada

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

exista. Então, a inclinação m da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de coordenadas $(x_0,\ f(x_0))$ é dada por

$$m = f'(x_0).$$



E a reta tangente é dada por:

$$y = y_0 + m \cdot (x - x_0)$$

Exemplo 71.

Determine o valor da derivada de

$$f(x) = x^2 - 4$$

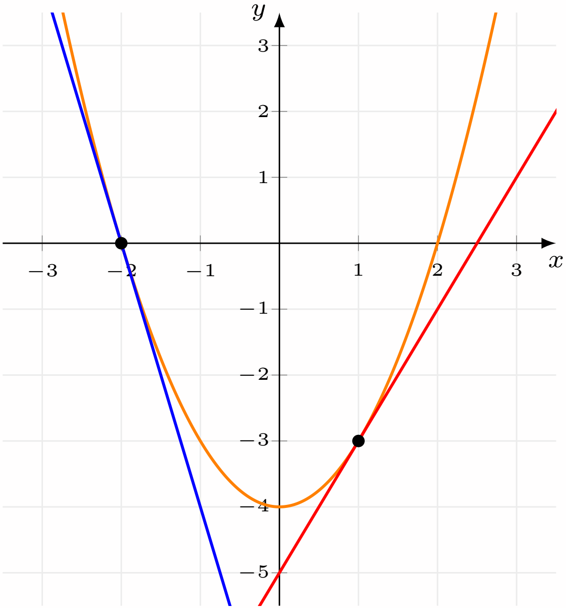
nos pontos $x_0 = 1$ e $x_1 = -2$. Faça a representação das retas tangentes ao gráfico nos pontos dados.

Exemplo 71.

Determine o valor da derivada de

$$f(x) = x^2 - 4$$

nos pontos $x_0 = 1$ e $x_1 = -2$. Faça a representação das retas tangentes ao gráfico nos pontos dados.

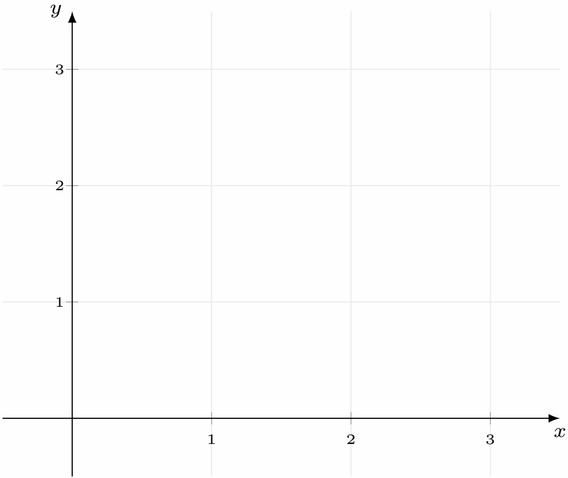


Exemplo 72.

Encontre uma equação para a reta tangente à curva de equação

$$y = \frac{2}{x}$$

no ponto de coordenadas $(2, 1)$. Esboce a curva e a reta tangente.

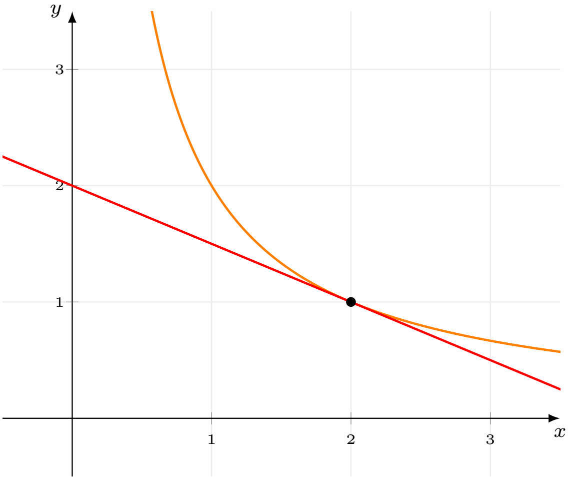


Exemplo 72.

Encontre uma equação para a reta tangente à curva de equação

$$y = \frac{2}{x}$$

no ponto de coordenadas $(2, 1)$. Esboce a curva e a reta tangente.

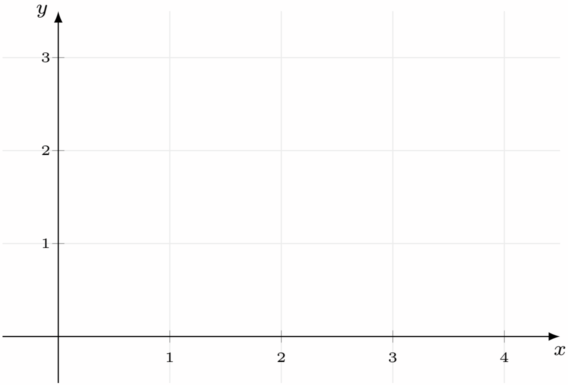


Exemplo 73.

Encontre as inclinações das retas tangentes à curva

$$y = \sqrt{x}$$

em $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$. Esboce a curva e as retas tangentes.

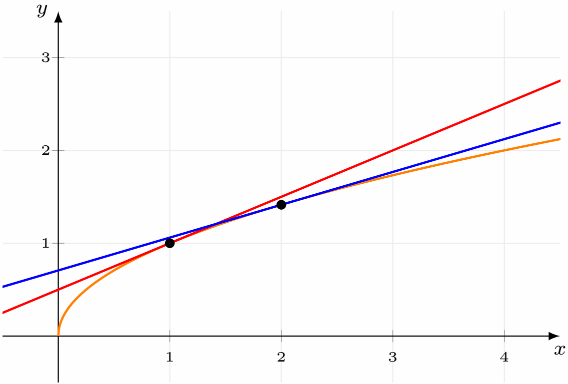


Exemplo 73.

Encontre as inclinações das retas tangentes à curva

$$y = \sqrt{x}$$

em $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$. Esboce a curva e as retas tangentes.



Derivada de Uma Função

Definição 73. Derivada de uma Função

Seja f uma função definida em um intervalo aberto I. Definimos a derivada de f como a função f' que associa a cada x de I o número

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

desde que o limite exista.

Observações:

- Diz-se que a função f' é a derivada da função f;
- O domínio da f' é o conjunto de todos os $x \in I$ para os quais o limite existe;
- Se $D(f') = I$, então diz-se que f é derivável em I.

- Além disso, $f'(x)$ representa o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da f em qualquer ponto $(x,\ f(x))$ de seu domínio
  → Temos, com isso, uma reta tangente para cada ponto do domínio.
- A vantagem da função derivada $f'(x)$ frente a derivada no ponto $f'(x_0)$ é a habilidade obtenção da derivada da f em qualquer ponto em que seja possível calculá-la

Exemplo 74.

Usando a definição, determine a derivada das funções ao lado.

1. $g(x) = x^2 - 4x + 3$
2. $h(x) = 2^x - 3x$

Primeiras Regras de Derivação

Constante

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ a função constante definida por $f(x) = k$, com $k \in \mathbb{R}$. Então,

$$f'(x) = 0$$

para todo $x \in I$.

Exemplo 75.
Calcule a derivada da função $f(x) = 5$.

Teorema 47. Derivada das Potências de x

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

para todo x.

Exemplo 76.

Determine as derivadas das funções a seguir.

1. $f(x) = x^3$
2. $y = x^7$

Teorema 48. Derivada das Funções Exponenciais

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = a^x$, onde $a > 0$ e $a \neq 1$. Então,

$$f'(x) = \ln a \cdot a^x$$

para todo $x \in I$.

Exemplo 77.
Determine as derivadas das funções a seguir.

1. $f(x) = e^x$
2. $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Propriedades Algébricas das Derivadas

Teorema 49. Derivadas da Soma, da Diferença e do Produto por Escalar

Sejam u e v funções deriváveis em x_0 e a um número real. Então, são válidas as propriedades a seguir:

1. Se $f(x) = a \cdot u(x)$, então a derivada de f em x_0 é

$$f'(x_0) = a \cdot u'(x_0)$$

2. Se $f(x) = u(x) + v(x)$, então a derivada de f em x_0 é

$$f'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0)$$

3. Se $f(x) = u(x) - v(x)$, então a derivada de f em x_0 é

$$f'(x_0) = u'(x_0) - v'(x_0)$$

Exemplo 78.

Determine as derivadas das funções a seguir.

1. $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 7x - 5$
2. $g(x) = 3 \cdot 4^x - 5x^2$
3. $h(x) = x(2x-1)^2$

Exemplo 79. Derivada do Produto

Vamos considerar as funções $f(x) = -2x$ e $g(x) = x^4$. Qual é a derivada da função produto $h(x) = f(x) \cdot g(x)$?

Teorema 50. Derivada do Produto de Funções

Sejam u e v funções deriváveis em um dado ponto x_0. Então, a função produto $u \cdot v$ também é derivável em x_0 e a sua derivada é dada pela expressão

$$\frac{d}{dx}\left[u(x_0)v(x_0)\right] = u(x_0)\frac{d}{dx}\left[v(x_0)\right] + v(x_0)\frac{d}{dx}\left[u(x_0)\right]$$

Exemplo 80.

Calcule a derivada da funções a seguir.

1. $f(x) = (x+1)(2x^3 - 4)$
2. $g(x) = -2x \cdot 3^x$
3. $h(x) = e^x(x-1)(x+1)$

Teorema 50. Derivada do Produto de Funções

Sejam u e v funções deriváveis em um dado ponto x_0. Então, a função produto $u \cdot v$ também é derivável em x_0 e a sua derivada é dada pela expressão

$$\frac{d}{dx}\left[u(x_0)v(x_0)\right] = u(x_0)\frac{d}{dx}\left[v(x_0)\right] + v(x_0)\frac{d}{dx}\left[u(x_0)\right]$$

Exemplo 80.

Calcule a derivada da funções a seguir.

1. $f(x) = (x+1)(2x^3 - 4)$
2. $g(x) = -2x \cdot 3^x$
3. $h(x) = e^x(x-1)(x+1)$

Observação:

- A regra da cadeia pode ser ampliada para o produto de três, quatro, ..., n funções.

Teorema 51. Derivada do Quociente de Funções

Sejam u e v funções deriváveis em x_0. Então, a função quociente $\dfrac{u}{v}$ é derivável em x_0 e a sua derivada em x_0 é dada por pela expressão

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{u(x_0)}{v(x_0)}\right] = \frac{v(x_0)\frac{d}{dx}\left[u(x_0)\right] - u(x_0)\frac{d}{dx}\left[v(x_0)\right]}{\left[v(x_0)\right]^2},$$

desde que $v(x_0) \neq 0$.

Exemplo 81.
Calcule a derivada da função a seguir.

1. $f(x) = \dfrac{4x+2}{x^2+1}$.
2. $f(x) = \dfrac{x \cdot 2^x}{e^x}$.

Teorema 52. Derivada das Potências de x

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{Z}$. Então,

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}.$$

Exemplo 82.

Determine as derivadas das funções a seguir.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
2. $y = -\dfrac{4}{x^5}$

Continuidade das Funções Deriváveis

Teorema 53. Toda Função Derivável é Contínua

Seja f uma função derivável em x_0. Então, f é contínua em x_0.

Teorema 53. Toda Função Derivável é Contínua

Seja f uma função derivável em x_0. Então, f é contínua em x_0.

Algumas observações sobre este teorema

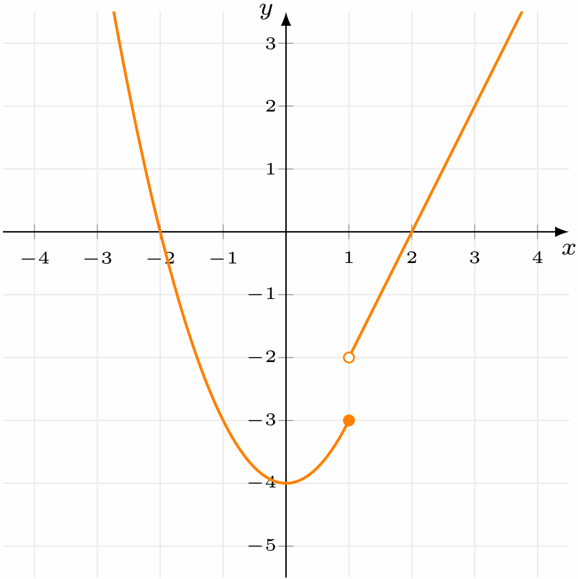
- **Corolário:** Se f não é contínua em x_0, então ela não é derivável em x_0;
- Veremos que uma função **nunca** é diferenciável:
  - → Nos pontos de descontinuidade;
  - → Nos pontos em que o seu gráfico possui uma quina (curva não suave);
  - → Nos pontos em que a reta tangente é vertical.

Exemplo 83.

A função definida pela lei

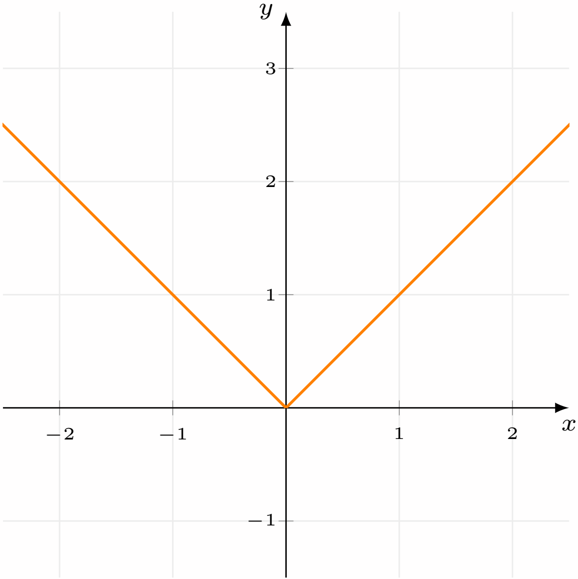
$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{se } x \le 1 \\ 2x - 4, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

não é derivável em $x = 1$.



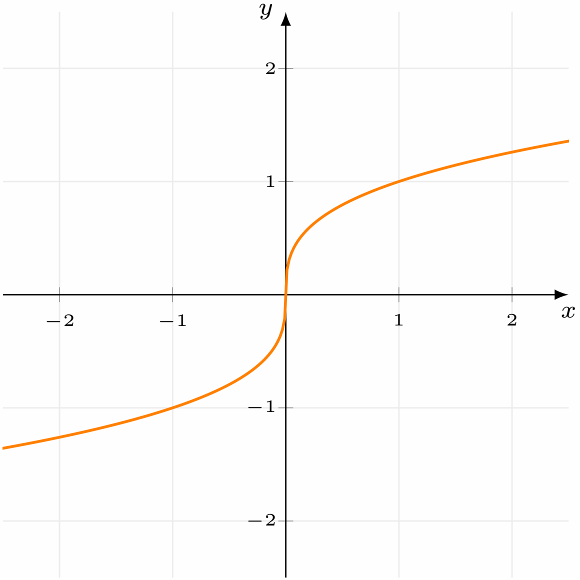
Exemplo 84.

A função $f(x) = |x|$ é contínua em $x = 0$, mas não é derivável nesse ponto.



Exemplo 85.

A função $g(x) = \sqrt[3]{x}$ é contínua em $x = 0$, mas não é derivável nesse ponto.



Derivadas das Funções Trigonométricas

Teorema 54. Derivada da Função Seno

Se $f(x) = \operatorname{sen} x$, então

$$f'(x) = \cos x$$

Exemplo 86.

Calcular a derivada das funções a seguir.

1. $f(x) = -2 \operatorname{sen} x$
2. $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{\operatorname{sen} x}$

Teorema 55. Derivada da Função Cosseno

Se $f(x) = \cos x$, então

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x$$

Exemplo 87.

Calcule $\dfrac{df}{dx}$ quando $f(x) = \cos x \operatorname{sen} x$.

Teorema 56. Derivada da Função Tangente

Se $f(x) = \tan x$, então
$$f'(x) = \sec^2 x$$

Exemplo 88.
Calcule $\dfrac{df}{dx}$ quando $f(x) = 2x^2 \tan x$.

Exemplo 89.
Determine as derivadas das funções a seguir:

1. $f(x) = \cot x$
2. $f(x) = \sec x$
3. $f(x) = \csc x$

Teorema 57. Derivada da Função Cotangente

Se $f(x) = \cot x$, então

$$f'(x) = -\csc^2 x$$

Teorema 58. Derivada da Função Secante

Se $f(x) = \sec x$, então

$$f'(x) = \sec x \cdot \tan x$$

Teorema 59. Derivada da Função Cossecante

Se $f(x) = \csc x$, então

$$f'(x) = -\csc x \cdot \cot x$$

Teorema 60. Derivada da Função Seno Hiperbólico

Se $f(x) = \operatorname{senh} x$, então

$$f'(x) = \cosh x$$

Exemplo 90.

Calcular a derivada da função

$$f(x) = \operatorname{sen} x \operatorname{senh} x$$

Teorema 61. Derivada da Função Cosseno Hiperbólico

Se $f(x) = \cosh x$, então
$$f'(x) = \operatorname{senh} x$$

Exemplo 91.

Calcular a derivada das funções a seguir:

1. $f(x) = \tanh x$
2. $f(x) = \coth x$
3. $f(x) = \operatorname{sech} x$
4. $f(x) = \operatorname{csch} x$

Teorema 62. Derivada da Função Tangente Hiperbólica

Se $f(x) = \tanh x$, então $f'(x) = \operatorname{sech}^2 x$.

Teorema 63. Derivada da Função Cotangente Hiperbólica

Se $f(x) = \coth x$, então $f'(x) = -\operatorname{csch}^2 x$.

Teorema 64. Derivada da Função Secante Hiperbólica

Se $f(x) = \operatorname{sech} x$, então $f'(x) = -\operatorname{sech} x \cdot \tanh x$.

Teorema 65. Derivada da Função Cossecante Hiperbólica

Se $f(x) = \operatorname{csch} x$, então $f'(x) = -\operatorname{csch} x \cdot \coth x$.

Regra da Cadeia

Exemplo 92.

Determine as derivadas das funções a seguir.

1. $f(x) = (4x^2 + 1)^3$
2. $g(x) = \operatorname{sen} 2x$

Teorema 66. Regra da Cadeia

Se uma função g for derivável em x_0 e outra função f for derivável em $g(x_0)$, então a função composta $f \circ g$ é derivável em x_0 e a sua derivada é dada pela expressão

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

Observações:

1. Lembre que $(f \circ g)(x_0) = f(g(x_0))$;
2. É comum escrevermos $u = g(x_0)$ e $y = f(g(x_0)) = f(u)$, de onde temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

expressão que pode ser lembrada pelas regras de produto de frações.

Exemplo 93.
Determine as derivadas das funções a seguir.

1. $f(x) = (4x^2 + 1)^3$
2. $g(x) = \operatorname{sen} 2x$
3. $h(x) = \cos^2 x$
4. $x(t) = e^{\cos t}$

Exemplo 94.

Determine as derivadas das funções a seguir.

1. $f(x) = \operatorname{sen}(\cos x)$
2. $F(t) = \tan(3t^2 + 2t)$
3. $g(x) = (3x - 3)^4 \cdot (x^2 - 6x + 8)^3$
4. $y = \dfrac{3x^2 + 8x - 4}{\cos(4x^2 - 1)}$

Derivação Implícita

- Até agora temos trabalhado com funções **explicitamente** definidas;
- Ou seja, funções da forma

$$y = f(x),$$

  a qual estabelece explicitamente a variável dependente y em termos dos valores atribuídos à f pela variável independente x. Em outras palavras, a variável y **não** aparece sozinha em um dos lados da equação;
- No entanto, algumas funções são definidas através de equações que não deixam exposta a relação entre as variáveis x e y, situações nais quais a variável dependente y não se encontra sozinha em um dos lados da equação.

Definição 74. Função Implícita

Dizemos que uma dada equação em x e y define a função f **implicitamente** se o gráfico de $y = f(x)$ coincidir com alguma porção do gráfico da equação.

Exemplo 95.
Temos que a função

$$y = \frac{x-1}{x+1}$$

define y explicitamente em termos de x.

Exemplo 96.
Temos que a equação

$$yx + y + 1 = x$$

define y implicitamente em termos de x.

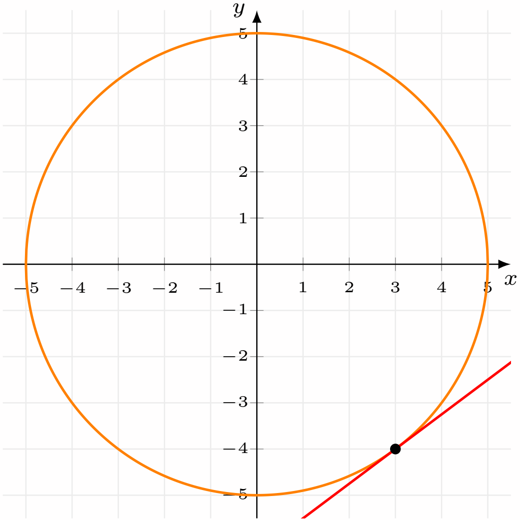
- Temos no exemplo que
$$yx + y + 1 = x$$
define implicitamente y em função de x.
- Uma pergunta *natural* seria: qual é a derivada de $y(x)$?
- Dado que
$$y = \frac{x-1}{x+1},$$
podemos usar a regra do quociente para obter a derivada desejada;
- De fato, temos que
$$y' = \frac{(x+1)\cdot 1 - (x-1)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$
- Podemos, contudo, obter o mesmo resultado sem determinar y explicitamente em função de x;
- Para isso, vamos derivar os dois lados da equação que define y
$$\frac{d}{dx}[yx + y + 1] = \frac{d}{dx}[x]$$
- Pelas propriedades algébricas das derivadas, temos
$$\frac{d}{dx}[yx] + \frac{d}{dx}[y] + \frac{d}{dx}[1] = \frac{d}{dx}[x]$$
- **Supondo** que $y = f(x)$, temos que
$$y\frac{d}{dx}[x] + x\frac{d}{dx}[y] + 0 = 1$$
- De onde podemos obter
$$y + xy' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1-y}{x+1}$$
- Temos que a derivada obtida é definida **implicitamente**!

Exemplo 97.

Determine a reta tangente à circunferência

$$x^2 + y^2 = 25$$

no ponto $P(3,\ -4)$.



Teorema 67. Derivada das Potências de x

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x^r$, com $r \in \mathbb{Q}$. Então,

$$f'(x) = r \cdot x^{r-1}.$$

Exemplo 98.

Determine as derivadas das funções a seguir.

1. $y = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$
2. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$

Derivadas das Funções Logarítmicas e Trigonométricas Inversas

Teorema 68. Derivada das Funções Logarítmicas

Dada a função logarítmica $f(x) = \log_a x$, temos que

$$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

para todo $x > 0$.

Exemplo 99.

Determine as derivadas das funções a seguir.

1. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$
2. $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Teorema 69. Derivada do Arco Seno

Dada a função arco seno $f(x) = \operatorname{asen} x$, temos que

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

para todo x no intervalo $(-1,\ 1)$.

Exemplo 100.
Determine as derivadas das funções a seguir.

1. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$
2. $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus
Pelotas

COORDENADORIA
DE MATEMÁTICA

Cálculo I

Cássio Pazinatto