

ВАРИАНТ ЗАДАНИЯ И ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

Вар. 14 (250410)

1. Определить количество нечетных чисел, двоичная запись которых имеет 13 цифр, из которых 9 единиц. Ответ записать в виде числа сочетаний.
2. Сколько существует решений уравнения $x_1 + x_2 + \dots + x_{90} = 115$ в целых числах, где $x_i \geq -3$?
3. Сколько существует 7-значных чисел в 11-ичной системе счисления, у которых все цифры разные?
4. Все слова длины 6 в алфавите $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ упорядочены в лексикографическом порядке. Каким по счету идет слово bacddb?
5. Среди 70 целых чисел, 21 кратно 4, 29 кратно 11, 2 кратно 16, 2 кратно 44, 1 кратно 176. Определить, сколько среди них не кратно 11 или кратно 4.
6. Все перестановки 7 чисел (1;2;3;4;5;6;7) упорядочены в лексикографическом порядке. Найти перестановку с номером 2431.
7. Рассмотрим все 7-значные наборы в 4-ичной системе счисления. Пусть A — это множество тех наборов, у которых сумма первых четырех цифр равна сумме оставшихся. И пусть B — это множество тех наборов, у которых сумма цифр фиксирована и равна N .
 - Докажите, что можно подобрать N , так чтобы количество наборов A было равно количеству наборов B . Чему равно N ?
 - Вычислите количество наборов A .
8. Из урны, в которой 8 синих шаров и 7 голубых, наудачу выбирают 2. Какова вероятность того, что среди них хотя бы один голубой?

№	Ответ
1	C_{11}^7
2	C_{474}^{89}
3	$10 \cdot \frac{10!}{4!}$
4	8336
5	51
6	4325176
7	а) $N = 6$ или 12; б) $C_{11}^5 - 6C_8^5$
8	$\frac{11}{15}$

Выполнил: Радионов Роман, 0362

1. Число нечётное, следовательно первой и последней цифрой будут единицы. Между ними остаётся 11 цифр и 7 единиц.

Следовательно ответ: C_{11}^7 .

2. $x_i \geq -3$

$$y_i = x_i + 4, y_i \geq 1$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_{90} = 115 + 4 \cdot 90 = 475$$

Ответ: C_{474}^{89}

3. $10 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 10 \cdot \frac{10!}{4!}$

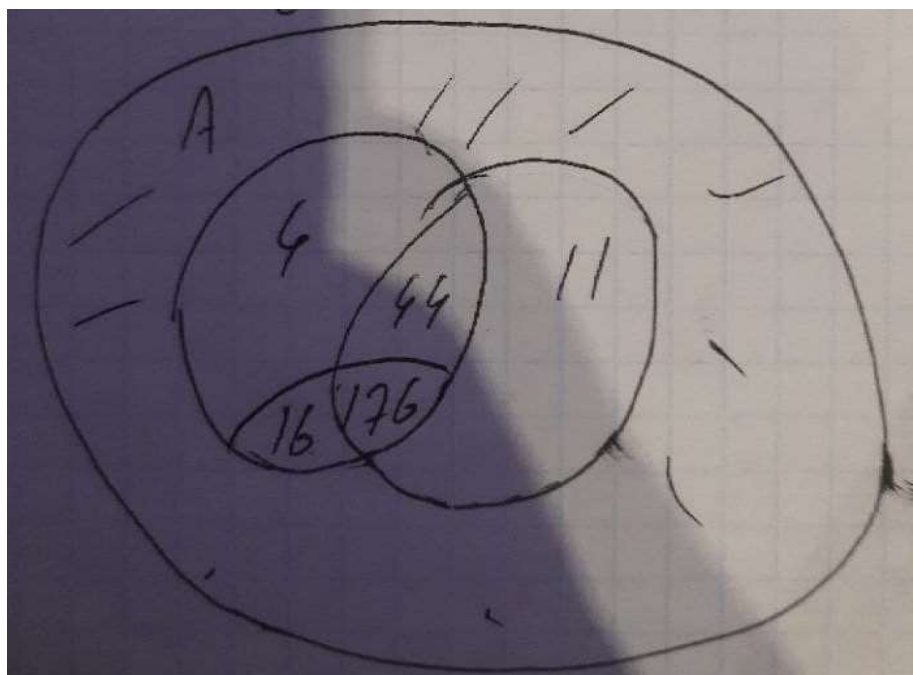
4. $a = 0, b = 1, c = 2, d = 3, e = 4, f = 5$

$$bacddb = 102331_6 \rightarrow x_{10}$$

$$102331_6 = 1 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6^3 + 1 \cdot 6^5 = 1 + 18 + 108 + 432 + 7776 = 8335_{10}$$

Ответ: 8336.

5. $\{A\} = 70, \{4\} = 21, \{11\} = 29, \{16\} = 2, \{44\} = 2, \{176\} = 1$



$$\overline{\{11\}} \text{ или } \{4\} = (\{A\} - \{4\}) + \{44\} = 70 - 21 + 2 = 51.$$

Ответ: 51.

6. $2431 = 1215 \cdot 2 + 1$

$$1215 = 405 \cdot 3 + 0$$

$$405 = 101 \cdot 4 + 1$$

$$101 = 20 * 5 + 1$$

$$20 = 3 * 6 + 2$$

$$3 = 0 * 7 + 3$$

$$(321101)!$$

3	7654321	4
2	765321	3
1	76521	2
1	7651	5
0	761	1
1	76	7
0	6	6

Ответ: 4325176

7. $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_i \in [0; 3]$

а) $N - ?$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_5 + x_6$$

$$1) a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3 - a_5 + 3 - a_6$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 6$$

$$2) 3 - a_1 + 3 - a_2 + 3 - a_3 + 3 - a_4 = a_5 + a_6$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 12$$

$$N = 6 \text{ или } 12$$

$$б) a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 6, a \in [0; 3]$$

Способ 1:

$$C_{6+6-1}^{6-1} = C_{11}^5 - \text{кол-во всех решений.}$$

Вычитаем кол-во тех наборов, в которых есть слагаемые, больше 3:

$$a'_1 = a_1 - 3$$

$$a'_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 6 - 3 = 3$$

$$C_{3+6-1}^{6-1} = C_8^5$$

$$\text{Ответ: } C_{11}^5 - 6 \cdot C_8^5.$$

Способ 2:

$$(1 + x + x^2 + x^3)^6$$

$$S = 1 + x + x^2 + x^3$$

$$xS = x + x^2 + x^3 + x^4$$

$$S = \frac{1-x^4}{1-x}$$

$$f = (1 - x^4)^6(1 + x + \dots + x^n + \dots)^6$$

$$(1 - x^4)^6 = 1 - 6x^4 + \dots$$

$$(1 + x + \dots + x^n + \dots)^6 = C_{11}^5 x^6 + C_8^5 x^3 + \dots$$

$$(1 - 6x^4)(\dots + C_{11}^5 x^6 + C_8^5 x^3 + \dots) = (C_{11}^5 - 6C_8^5)x^6$$

$$\text{Ответ: а) } N = 6 \text{ или } 12; \text{ б) } C_{11}^5 - 6C_8^5$$

$$8. \quad 1 - \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{14} = 1 - \frac{4}{15} = \frac{11}{15}$$

$$\text{Ответ: } \frac{11}{15}.$$