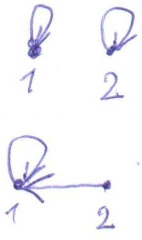
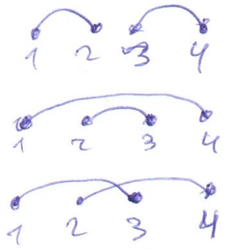
Кормаков Георгий, 617 группа. Д/З 2

Задача 1 Покажем по индукции, что вер-ть равна $\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{p}\prod\limits_{i=1}^{2n}(\mathrm{indeg}(v_i^{(j)}))!}{\#\{LCD \text{ на } 4n \text{ вершинах}\}}$,

где сумма берётся по всем „псевдо-LCD", получаемым разворачиванием графа с рисунка до $2n$ вершин (аналог G_1^{2n}) ($p = 2\cdot(4)^{n-1}$ — объяснено ниже)

Для начала, знаменатель $= \dfrac{(4n)!}{2^{2n}\cdot(2n)!}$

$n=1$:  Данный граф можно развернуть 2-мя способами:  Из этих „псевдо-LCD" можно получить 3 LCD на $2\cdot2\cdot1$ вершинах: 

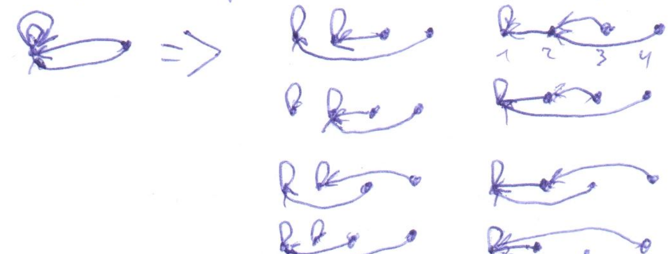
Поскольку мы знаем, что алгоритм получения G_2^n из LCD эквивалентен основному способу, то вер-ть того, что G_2^1 будет равен данному графу, равна $\dfrac{\#\{LCD, \text{ соотв. граф}\}}{\#\{LCD \text{ на } 4\cdot1 \text{ вершинах}\}}$

Данное число $= \dfrac{3}{\frac{4!}{2^2\cdot2!}} = \dfrac{3}{3} = 1$. По предлагаемой формуле, числитель равен сумме по двум „псевдо-LCD": $1!\cdot1! + 2!\cdot0! = 1+2 = 3 \Rightarrow$ утв. верно для $n=1$

$\exists$ утв. верно для $n=k-1$, $k>2$

Добавим 1 вершину в граф: 

На примере $k=3$ видно, что для каждой „псевдо-LCD" $\exists$ 4 варианта добавления дуг:



При этом, при переходе к LCD на $4\cdot n = 4\cdot2$ вершинах, для каждой „псевдо-вершины" существует $(\mathrm{indeg}(v_i))!$ вариантов LCD, приводящих к одинаковым „псевдо-LCD"

Т.о., для 8 „псевдо-LCD" будет $2!2! + 3! + 2!2! + 3! + 2!2! + 3! + 3! + 4! = 60$ LCD

В 2-х случаях входящие степени вершин (последних двух в „псевдо-LCD") увеличились на 1 (для $\forall$ из двух пред. псевдо-LCD)

В 2-х оставшихся одна из вершин увеличила вх. степень на 2, а другая осталась с такой же

$\exists$ p — число „псевдо-LCD", тогда по каждой из них вычисление числителя даёт число ($p=2\cdot(4)^{n-1}$) LCD, которые получены перестановками левых концов $\mathrm{indeg}(v_i)$ рёбер

(строгого индуктивного док-ва не получилось, однако корректность формулы обоснована)

Если рассмотреть задачу с противоположной стороны — оценки вер-ти появления графа с рисунка в модели G_m^n, то

граф имеет вер-ть 1 (как сумма вер-тей графа ($1/3$) и ($2/3$))

при добавлении рёбер в , суммарная вер-ть для случаев 1, 2 равна:

$\frac{4}{5}$ при добавлении первого ребра: , затем $\frac{5}{7}$ для .

При последующем добавлении двух рёбер вер-ти равны $\frac{2}{2k-1}$ и $\frac{3}{2(k+1)-1} = \frac{3}{2k+1}$ $\forall k \geq 5$

Кормаков Сергей, 817 группа

(продолжение задачи 1):

Тогда итоговая вер-ть равна $1\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\prod_{k=5}^{2n}\left(\frac{2}{2k-1}\cdot\frac{3}{2k+1}\right) =$

(при $n \le 1$ вер-ть $=1$; $n=2$ вер-ть $=\frac{4}{7}$)

$= \frac{24}{7}\cdot\prod_{k=5}^{2n}\frac{1}{4k^2-1}$

Задача 2 По условию задачи, 1) генерируются случайно $2n$ точек в $[0,1]$

2) НЕ случайно задан порядок их соединения $\xi_{2i-1} \leftrightarrow \xi_{2i}$

В LCD же, наоборот, даны $2n$ точек и случайно соединяются рёбра.

Покажем, что LCD не эквивалентны описанной процедуре:

1) При генерации точек равномерно на $[0,1]$ возможен случай совпадения их в ~~од~~ нескольких значениях. Однако это событие меры 0, поэтому не учитывается далее.

2) оценим вер-ть получения произвольной диаграммы описываемым методом:

Вер-ть получения $\forall$ LCD $= \frac{1}{l_n}$, где $l_n = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$

Разберёмся, откуда получено l_n. Для упрощения рассуждений, упорядочим $2n$ точек LCD так, чтобы рёбра образовывали след. порядок: . (Да, это нарушает процедуру получения графа, но хотим показать, откуда l_n)

Способов случайно расположить $2n$ точек на прямой ~~в таком порядке~~ $= (2n)!$

Однако в этом случае происходит учёт ~~пар~~ комбинаций без приведённого порядка. А именно, нам не важно расположение (порядок) пар внутри ребра. сл-но, $\frac{(2n)!}{2^n}$. И не важно расположение самих рёбер $\Rightarrow \frac{(2n)!}{2^n n!}$

В описанной схеме проделаем аналогичные рассуждения.

Вариантов всего всё ещё $(2n)!$, порядок пар внутри рёбер всё ещё не важен $\left(\frac{(2n)!}{2^n}\right)$

НО расположение самих рёбер фиксировано и не носит случайного хар-ра.

В результате, вер-ть появления произвольной диаграммы описанным методом не равна $\frac{1}{l_n} \Rightarrow$ модель не совпадает с LCD.

Юрмаков Георгий 674 гр.

Задача 3 | Утв. Для $\forall$ уницикл. графа ср. число его копий в $G_m^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

$\boxed{\Delta}$ Из лекции известно, что при $m \geq 1$ для фиксир. графа H

$$\mathbb{E}\left[\#(H, G_m^n)\right] = \Theta\left(n^{\#(d_i=0)} \sqrt{n}^{\#(d_i=1)} (\ln n)^{\#(d_i=2)}\right)$$

В учебнике „Модели случ. графов" Райгородского термин уницикл. граф. определяется как граф C_l с l вершинами и l рёбрами

Для этого определения $\#(d_i=2)=l$, $\#(d_i=0)=\#(d_i=1)=0$

Следовательно $\hat{C}_1(\ln n)^l \leq \mathbb{E}\left[\#(C_l, G_m^n)\right] \leq \hat{C}_2 (\ln n)^l$, где $\hat{C}_1, \hat{C}_2 = const$ $\forall l \geq 3$

$\hat{C}_1(\ln n)^l \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, $\hat{C}_2(\ln n)^l \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

$\Downarrow$

$\xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ ч. т. д.

Также существует определение, в котором есть несколько вершин других степеней (меньших).
В этом определении $\mathbb{E}\left[\#(C_l, G_m^n)\right] = \Theta\left(n^{m_0} \cdot (\sqrt{n})^{m_1} \cdot (\ln n)^{l-m_0-m_1}\right)$.
Что также приводит ~~к~~ к требуемому утверждению.
Отмечу, что хоть и теорема из лекции доказывалась Рябченко и Самосватом для другой, но схожей с G_m^n моделью, асимптотика остаётся верной

Задача 4 | Модель ассортативна, если $d_{nn}(d) \sim d^{\delta}$, $\delta > 0$

число вершин степени $d = \frac{1}{d} \sum_{d_1} X_n(d_1, d) = |\{i : \deg i = d\}|$

$$X_n(d_1,d_2) = \sum_{i:\deg i = d_1} \sum_{j:\deg j = d_2} [(i,j)\in E_n] = \sum_{i:\deg i=d_1} \sum_{j:(i,j)\in E_n} [\deg j = d_2]$$

$$d_{nn}(d) = \frac{1}{d} \frac{1}{|\{i:\deg i = d\}|} \underbrace{\sum_{i:\deg i = d} \sum_{j:(i,j)\in E} \deg j}_{= \sum_{i} \sum_{j} \sum_{d_2} d_2 [\deg j = d_2] = \sum_{d_2} d_2 X_n(d,d_2)} =$$

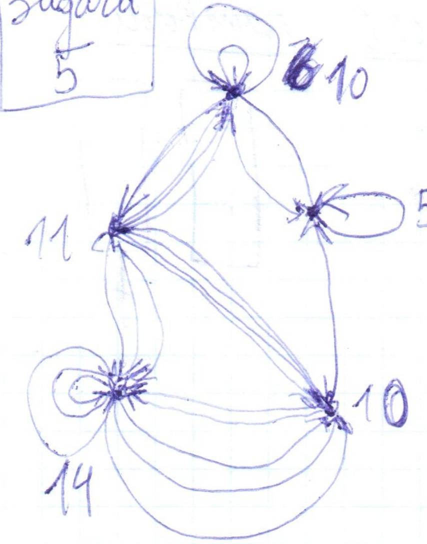
$$= \frac{1}{d} \frac{1}{\frac{1}{d}\sum_{d_2} X_n(d,d_2)} \cdot \sum_{d_2} d_2 X_n(d,d_2) =$$

$$= \frac{\sum_{d_2} d_2 X_n(d,d_2)}{\sum_{d_2} X_n(d,d_2)} \underset{\substack{n\to\infty \\ \text{(теор. Гречникова)}}}{\overset{w.p.}{\sim}} \frac{n \sum_{d_2} d_2 \cdot \cancel{C(a,m)} \cdot \frac{(d+d_2)^{1-a}}{\cancel{d^2} d_2^2}}{n \cdot \sum_{d_2} \cancel{C(a,m)} \frac{(d+d_2)^{1-a}}{\cancel{d^2} d_2^2}} = \frac{\sum_{d_2} \frac{1}{d_2}(d+d_2)^{1-a}}{\sum_{d_2} (d+d_2)^{1-a}}$$

Из асимптотики последнего выражения, при $(d_2 = d)$ и $1-a<0$ выр-е будет вести себя, как d^{δ}, $\delta > 0$. При $1-a>0 \Rightarrow d^{\delta}, \delta<0 \Rightarrow$ | ассорт. при $a>1$, дисассорт. при $a<1$

осн. знам.

Задача 5



$X(5,5) = 2$

$X(5,10) = 3$

$X(10,10) = 4$

$X(10,11) = 8$

$X(10,14) = 5$

$X(11,14) = 3$

$X(14,14) = 6$

Кормаков Георгий

617 группа

Задача 6

Для доказательства корректности требуется выполнение $\sum_i P(n+1 \to i) = 1$

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\text{indeg}\, i + m}{2mn + m} = \frac{1}{m(2n+1)} \sum_{i=0}^{n} (\text{indeg}\, i + m) = \frac{1}{m(2n+1)} \left(\sum_{i=0}^{n} \text{indeg}\, i + m(n+1) \right) =$$

$= \{$ Сумма вх. степеней в описанной модели $= nm$, т.к. $\forall$ ребро имеет вес m, или, что эквивалентно, проводится m рёбер (вход. вес $= m$) $\} =$

$$= \frac{mn + m(n+1)}{m(2n+1)} = \frac{m(2n+1)}{m(2n+1)} = 1$$

След-но, модель корректна.

Определим $P(d_v^{n+1} = d_v^n + 1 \mid G_m^n) = \frac{\text{indeg}\, v + m}{2mn + m} \ominus$

Т.к. в описании модели сказано, что данная вер-ть пропорциональна весам существующих вершин, то PA условие выглядит как $P(d_v^{n+1} = d_v^n + 1 \mid G_m^n) = A \frac{d_v^n}{n} + B \frac{1}{n} + \underline{O}\left(\frac{(d_v^n)^2}{n^2}\right)$

где d_v^n — indeg v в G_m^n, т.е. вес

$$\ominus \frac{1}{2m} \frac{d_v^n}{n} + \frac{1}{2} \frac{1}{n} + \underline{O}\left(\frac{(d_v^n)^2}{n^2}\right) \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2m};\ B = \frac{1}{2}}$$

Задача 9 2) Необходимо найти предел $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}|\{v^{(t)} : \deg v^{(t)} = 2\}|}{t+2}$

$\exists\ \xi_n^k$ – степень вершины, добавленной на итерации n, в итерации k после добавления

$P\{\xi_n^0 = 2\} = 1$, т.к. сразу после добавления степень равна 2

$$P\{\xi_n^1 = 2\} = \frac{2(n+1)\cancel{+1}-2}{2(n+1)+1} = \frac{2n+1}{2n+3}$$

$$P\{\xi_n^2 = 2\} = \frac{2n+1}{\cancel{2n+3}} \cdot \frac{\cancel{2n+3}}{2n+5} = \frac{2n+1}{2n+5}$$

$$P\{\xi_n^k = 2\} = \frac{2n+1}{2(n+k)+1}$$

Тогда $\mathbb{E}|\{v^{(t)} : \deg v^{(t)} = 2\}| = \mathbb{E}\sum\limits_{k=1}^{t} [\xi_{t-k}^k = 2] = \sum\limits_{k=1}^{t} P\{\xi_t^k = 2\} = \sum\limits_{k=1}^{t} \frac{2(t-k)+1}{2t+1} =$

$$= \frac{1}{2t+1}\left(2\sum_{k=1}^{t}(t-k) + t\right) = \frac{1}{2t+1}\left(2\frac{t(t-1)}{2} + t\right) = \frac{t^2 - t + t}{2t+1} = \frac{t^2}{2t+1}$$

Следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}|\{v^{(t)} : \deg v^{(t)} = 2\}|}{t+2} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{t^2}{(2t+1)(t+2)} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{t^2}{2t^2+5t+2} = \frac{1}{2}$

ч.т.д.