Во всех задачах будет единое обозначение:

- $G_n = (V_n, E_n)$ – элемент последовательности графов
- Индекс n отвечает за элемент последовательности
- $|V_n| = N_n$ – число вершин в графе G_n, $D_n = \frac{|E_n|}{L_{max}}$ – характеристика плотности графа G_n.
- $\mathbb{P}_n(d) = \frac{|\{v \in V_n \colon \deg v = d\}|}{N_n}$ – распределение степеней вершин в графе G_n $\left(\sum\limits_{k=0}^{N_n-1} \mathbb{P}_n(k) = 1, \quad \mathbb{P}_n(d) \in [0,1] \ \ \forall d = \overline{0, N_n - 1}\right)$.
- Степени вершин подчиняются степенному закону (обозначим как $\mathbb{P}_n \in \mathcal{P}$), если $\exists \gamma > 0, \ c \equiv const : \ \ \mathbb{P}_n(d) \sim \frac{c}{d^\gamma}$

Задача 1. Графы без степенного закона

Условие: 1. Приведите пример последовательности плотных (неразреженных) графов, степени вершин которых не подчиняются степенному закону.

2. Приведите пример последовательности разреженных графов, степени вершин которых не подчиняются степенному закону

Примеры:

1. Графы для условия 1 должны удовлетворять условиям: $D_n \approx 1, \ \ \mathbb{P}_n \notin \mathcal{P}$.

   a) Возьмём последовательность $\{G_n\} = \{K_n\}$, состоящую из *полных неориентированных графов* с числом вершин n (тогда $D_n = 1$). Каждый из графов имеет вырожденное распределение степеней вершин в точке $\deg v = N_n - 1$: $\mathbb{P}_n(N_n - 1) = 1$, где N_n – число вершин в полном графе G_n (т.е. $\mathbb{P}_n \notin \mathcal{P}$).

   b) Аналогично, для ориентированных графов

2. Графы для условия 2 должны удовлетворять условиям: $D_n \ll 1, \ \ \mathbb{P}_n \notin \mathcal{P}$.

   a) Возьмём последовательность $\{G_n\}$, состоящую из неориентированных графов с числом вершин n без рёбер, $D_n = 0$ и $\mathbb{P}_n(0) = 1$ (т.е. $\mathbb{P}_n \notin \mathcal{P}$).

   Однако это сильно вырожденный случай, можно предложить ещё вариант: Возьмём последовательность $\{G_n\}$, состоящую из неориентированных графов с числом вершин n с выбранным случайно одним ребром (тогда $D_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$). Каждый из графов имеет распределение степеней вершин $\mathbb{P}_n(0) = \frac{n-2}{n}, \ \ \mathbb{P}_n(1) = \frac{2}{n}$ (т.е. $\mathbb{P}_n \notin \mathcal{P}$, нет требуемой константы).

b) Аналогично, для ориентированных графов (только в $\mathbb{P}_n(1) = \frac{1}{n}$)

Задача 2. Неор. графы со степенным законом

Условие: Приведите пример последовательности неориентированных графов (кратные рёбра и петли разрешаются), степени вершин которых подчиняются какому-нибудь степенному закону. Обязательно доказательство степенного закона

Допустим, мы хотим распределение, близкое к $\frac{c}{d^2}$. Прологарифмируем: $\log(\mathbb{P}_n(d)) = \log(c) - 2\log(d)$

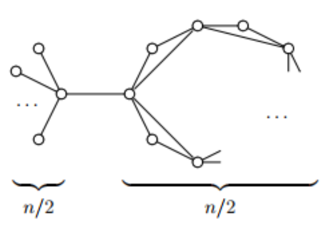
Задача 3. Неуязвимые к атакам на хабы связные графы

Условие: Приведите пример последовательности связных графов, которые не уязвимы к атакам на хабы.

Пример: Последовательность полных графов на n вершинах не уязвима к атакам на хабы, т.к. при удалении $\lfloor c|V_n| \rfloor$, $c \in (0, 1)$ упорядоченных по степеням вершин (одинаковым степеням) останутся вершины, соединённые со всеми.

Задача 4. О локальном кластерном коэффициенте

Условие: Рассмотрим при растущих значениях n, кратных четырём, последовательность графов следующего вида:



Покажите, что при $n \to +\infty$ средний локальный кластерный коэффициент такого графа можно ограничить снизу положительной константой, а глобальный кластерный коэффициент стремится к 0.

Рассуждения:

Для начала, рассмотрим значения локального кластерного коэффициента C_v для вершин в приведённом графе.

Для вершин в левой группе $C_{v_{left}} = \frac{1}{1} = 1$, поскольку они соединены только с центральной вершиной группы. Центральная вершина - $C_{v_{center}} = \frac{0}{n/2 \cdot (n/2-1)/2} = 0$, поскольку имеет $n/2$ соседей, которые не соединены между собой ни одним ребром.

Для вершин в правой группе: будем нумеровать относительно центральной вершины по часовой стрелке с 1. Тогда для вершин на нечётных позициях $C_{v_{right\_odd}} = \frac{1}{2/2} = 1$, т.к. имеют двух соседей, которые соединены возможным ребром.

На чётных позициях $C_{v_{right\_even}} = \frac{2}{4 \cdot 3/2} = \frac{1}{3}$, т.к. они имеют 4 соседа, среди которых есть только два ребра.

Центральная правая вершина имеет $C_{v_{right\_center}} = \frac{2}{5 \cdot 4/2} = \frac{1}{5}$, т.к. имеет 5 соседей, но только два ребра среди них.

Посчитаем итоговый *средний локальный к.к.* $C(G_n) = \frac{1}{|V_n|} \sum\limits_{v \in V_n} C_v$. В левой группе – $n/2 - 1$ вершина с $C_{v_{left}} = 1$ и центральная с $C_{v_{center}} = 0$. В правой: $n/4$ на нечётных позициях с $C_{v_{right\_odd}} = 1$, $n/4 - 1$ на чётных позициях с $C_{v_{right\_even}} = \frac{1}{3}$ и центральная с $C_{v_{right\_center}} = \frac{1}{5}$.

Итого:

$$\begin{aligned}
&C(G_n) = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdot 1 + 0 + \frac{n}{4}\cdot 1 + \left(\frac{n}{4}-1\right)\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right] = \\
&= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{5n} = \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} - \frac{1}{n} - \frac{1}{3n} + \frac{1}{5n} = \frac{10}{12} - \frac{1}{n}\frac{17}{15} = \frac{5}{6} - \frac{17}{15}\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{5}{6}
\end{aligned} \tag{1}$$

Аналогично, *глобальный к.к.* $T(G_n) = \frac{\sum\limits_{v \in V_n} C^2_{n_v} C_v}{\sum\limits_{v \in V_n} C^2_{n_v}}$

$$\begin{aligned}
&T(G_n) = \frac{1\cdot\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdot 1 + 0 + 1\cdot\frac{n}{4}\cdot 1 + 6\cdot\left(\frac{n}{4}-1\right)\cdot\frac{1}{3} + 10\cdot\frac{1}{5}}{1\cdot\left(\frac{n}{2}-1\right) + 0 + 1\cdot\frac{n}{4} + 6\cdot\left(\frac{n}{4}-1\right) + 10} = \\
&= \frac{\left(\frac{n}{2}-1\right) + \frac{n}{4} + 2\cdot\left(\frac{n}{4}-1\right) + 2}{\left(\frac{n}{2}-1\right) + \frac{n}{4} + 6\cdot\left(\frac{n}{4}-1\right) + 10} = \frac{(2n-4) + n + 2\cdot(n-4) + 8}{(2n-4) + n + 6\cdot(n-4) + 40} = \\
&= \frac{2n-4+n+2n-8+8}{2n-4+n+6n-24+40} = \frac{5n-4}{9n+12} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{5}{9}
\end{aligned} \tag{2}$$

Что-то не получилось с прямой формулой. Воспользуемся формулой $T(G_n) = \frac{3\#(K_3, G_n)}{\#(P_2, G_n)}$. Количество пар равно (подсчёт слева направо) $\frac{n}{2} - 1 + 1 + \frac{n}{2} - 1 + \frac{n}{4}$ (последние два слагаемых - число рёбер в цепи по кругу и число рёбер через 1 элемент). Количество треугольников равно числу рёбер, идущих через 1 вершину,$\frac{n}{4}$. Тогда $T(G_n) = \frac{3\frac{n}{4}}{\frac{n}{2}-1+1+\frac{n}{2}-1+\frac{n}{4}} = \frac{3n}{5n-4}$. Снова неудача.

Задача 5. Клика 6 в модели Эрдёша-Реньи

Условие: Докажите, что при вероятности ребра p такой, что $pn^{\frac{2}{5}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ в случайном графе $G(n,p)$ в модели Эрдёша-Реньи асимптотически почти наверное нет клик на 6 вершинах, а при вероятности ребра такой, что $pn^{\frac{2}{5}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ в $G(n,p)$ асимптотически почти наверное есть клика на 6 вершинах.

Доказательство: Введём случайную величину $\xi_6 = \{$число клик на шести вершинах в графе$\}$.

Начнём с *доказательства первого факта*. Для этого оценим сверху вероятность того, что случайная величина ξ_6 примет значение не меньше 1. Оценку сверху даёт выбор подмножеств на 6 вершинах из n и проведение с вероятностью p рёбер до клики на них. Фактически, по аналогии с треугольниками, мы ограничили сверху мат. ожиданием случайной величины ξ_6.

$$\mathbb{P}\{\xi_6 \geq 1\} \leq \mathbb{E}[\xi_6] \leq C_n^6 p^{6\cdot 5/2} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot(n-5)}{720}p^{15} = O(n^6p^{15}) = O((n^{\frac{2}{5}}p)^{15}) \tag{3}$$

Таким образом, при соблюдении условия $pn^{\frac{2}{5}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ получаем устремление к 0 вероятности появления клики на 6 вершинах.

Для доказательства *второго факта* ограничим данную вероятность с другой стороны, воспользовавшись неравенством Чебышёва.

$$\mathbb{P}\{\xi_6 \geq 1\} = 1 - \mathbb{P}\{\xi_6 \leq 0\} = 1 - \mathbb{P}\{-\xi_6 \geq 0\} = 1 - \mathbb{P}\{\mathbb{E}[\xi_6] - \xi_6 \geq \mathbb{E}[\xi_6]\} \geq$$
$$\geq 1 - \mathbb{P}\{|\mathbb{E}[\xi_6] - \xi_6| \geq \mathbb{E}[\xi_6]\} \geq 1 - \frac{\mathbb{D}[\xi_6]}{\mathbb{E}[\xi_6]^2}$$

Найдём $\mathbb{E}[\xi_6^2]$ для дисперсии $\mathbb{D}[\xi_6] = \mathbb{E}[\xi_6^2] - \mathbb{E}[\xi_6]^2$.

$$\mathbb{E}[\xi_6^2] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{C_n^6}[\text{п/м 6-ти вершин с индексом j образует клику}]\right)^2\right] =$$

$$= \mathbb{E}[\xi_6] + \sum_{i=1}^{C_n^6}\sum_{j\neq i}\mathbb{E}[\text{п/м i образует } K_6][\text{п/м j образует } K_6] =$$

$\{$Перебор по пересечениям двух множеств 6 точек, как на лекции, даёт схожее выражение$\}$ =

$$= C_n^6 p^{15} + \sum_{j=1}^{5} C_n^6 C_{n-6}^j (p^{C_n^6 - C_j^2})^2$$

То есть,

$$\frac{\mathbb{D}[\xi_6]}{\mathbb{E}[\xi_6]^2} = \frac{\mathbb{E}[\xi_6^2]}{\mathbb{E}[\xi_6]^2} - 1 = \frac{C_n^6 p^{15} + \sum\limits_{j=1}^{5} C_n^6 C_{n-6}^j (p^{C_n^6 - C_j^2})^2}{(C_n^6 p^{15})^2} - 1$$

Выражение в числителе по асимптотике при $pn^{\frac{2}{5}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ схоже по поведению со знаменателем, поэтому

$$\frac{\mathbb{D}[\xi_6]}{\mathbb{E}[\xi_6]^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow \mathbb{P}\{\xi_6 \geq 1\} \sim 1$$

Задача 6. Цикл в компоненте связности в модели Эрдёша-Реньи

Условие: Докажите, что при $p = \frac{c}{n}$, где $c < 1$, в случайном графе $G(n,p)$ в модели Эрдёша-Реньи асимптотически почти наверное каждая компонента связности содержит не более одного цикла.