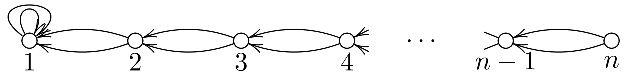
Домашнее задание 2

Задача 1. (3 балла). Найдите вероятность того, что случайный граф G_2^n Боллобаша–Риордана совпадет с графом на рисунке:

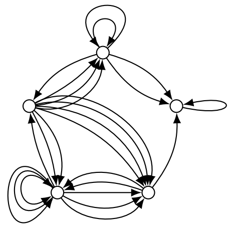


Задача 2. (3 балла). Рассмотрим отрезок $[0, 1]$ и случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_{2n}$ – независимые и равномерно распределённые на этом отрезке. Соединим дугами пары точек ξ_{2i-1}, ξ_{2i}. Получится случайная диаграмма, похожая на случайную хордовую диаграмму. Верно ли, что на самом деле построенная модель эквивалентна модели случайной хордовой диаграммы?

Задача 3. (1 балл). С помощью теорем из лекций докажите, что для любого унициклического графа среднее число его копий в случайном графе Боллобаша-Риордана G_m^n стремится к бесконечности при $n \to \infty$.

Задача 4. (2 балла). Будет ли модель Бакли–Остгуса ассортативной при каких-нибудь значениях параметра a? дисассортативной? Ответ необходимо обосновать.

Задача 5. (1 балл). Найдите все ненулевые значения величины $X_n(d_1, d_2)$ для графа на рисунке:



Задача 6. (2 балла). Рассмотрим следующую модель случайного графа. В каждый момент времени добавляем одну вершину и m ребер. Начинаем с вершины 0 без ребер, но с весом, равным m. Вершина 1 ставит m ссылок на 0. Вес вершины 0 становится $2m$, вес вершины 1 становится m. Дальнейшие вершины ставят m ссылок независимо, каждую с вероятностью, пропорциональной весам существующих вершин:

$$P(n+1 \to i) = \frac{\operatorname{indeg} i + m}{2mn + m}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Докажите, что модель определена корректно, и укажите, при каких значениях A, B эта модель укладывается в PA-класс.

Задача 7. (4 балла). Напишите код для генерации графа $H_{a,n}^m$ в модели Бакли–Остгуса на любом языке программирования. Сгенерируйте граф в этой модели на $n = 5000$ вершинах при $m = 2$ и $a = 0.27$. Постройте на одном графике в обычных и логарифмических координатах распределение степеней вершин в полученном графе и теоретическую оценку этого распределения из соответствующей теоремы из лекций.

Оптимизируйте реализацию случайной генерации графа $H_{a,n}^m$ таким образом, чтобы при $n = 10000$, $a = 0.27$ и $m = 5$ граф генерировался за разумное время (не более минуты).

Задача 8. (3 балла). В файле `graph.txt` находится граф, построенный в соответствии с моделью Боллобаша–Боргса–Риордана–Чайес со следующими значениями параметров модели: $\alpha = \beta = 0.5$, $\gamma = \delta_{out} = 0$. Значение δ_{in} неизвестно. Порядок ребер и номера вершин в файле соответствуют порядку, в котором они реально появлялись. Первое число в строчке — это начало ребра, второе — конец. Начальный граф — треугольник `[(0, 1), (1, 2), (2, 0)]`. Постройте зависимость логарифма вероятности данного графа при данных значениях параметров (правдоподобия графа) от δ_{in} и найдите оптимальное значение, при котором появление такого графа наиболее правдоподобно.

Задача 9. (6 баллов). Рассмотрим следующую модель генерации неориентированных графов. Граф $G^{(0)}$ состоит из двух вершин, соединенных ребром. Для всех t, $t \geqslant 1$, граф $G^{(t)}$ получается из графа $G^{(t-1)}$ добавлением новой вершины, соединенной с обоими концами случайного ребра, выбранного равновероятно из множества всех ребер. Таким образом, граф $G^{(1)}$ — это треугольник, граф $G^{(2)}$ состоит из 4 вершин и 5 ребер и т. д.

- Установите эмпирически, чему равна доля вершин степени 2 в графе $G^{(t)}$ в пределе при $t \to \infty$.
- Найдите теоретическое значение этого предела и докажите, что он именно такой.
- Докажите математически, что распределение степеней вершин в таком графе подчиняется степенному закону.