Soluções: Lista Prova 1

Questão 1 (Fabricação)

Como exemplo vamos definir $n_1 = 5$, $n_2 = 6$, $n_3 = 8$, $n_4 = 9$, $n_5 = 2$, $n_6 = 4$, $n_7 = 0$, $n_8 = 8$. Com isso o modelo do problema é

$$
\begin{array}{rll}
\textbf{maximiza} & 10x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 7x_4 & \\
\textbf{sujeito a} & x_1 \leq 70, & \\
& x_2 \leq 60, & \\
& x_3 \leq 40, & \\
& x_4 \leq 20, & \\
& 5x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 9x_4 \leq 80, & \\
& 2x_1 + 4x_2 + 8x_4 \leq 20, & \\
& 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 8x_4 \leq 120, & \\
& 7x_1 + 3x_2 + 7x_4 \leq 160, & \\
& x_j \geq 0, & j \in [4].
\end{array}
$$

Questão 2 (Eleições)

Sejam os tópicos $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ e $R = \{c, s, i\}$ as regiões. Temos um valor v_{tr} para cada tópico $t \in T$ e cada região $r \in R$ dado pela tabela. Seja ainda V_r o número de votos necessários em cada região ($V_c = 250000$, $V_s = 150000$, $V_i = 50000$). As variáveis de decisão é o valor investido x_t (em R\$ 1000) para cada tópico $t \in T$. Com isso obtemos

$$
\begin{array}{rll}
\textbf{minimiza} & \sum_{t \in T} x_t & \\
\textbf{sujeito a} & \sum_{t \in T} x_t v_{tr} \geq V_r, & \forall r \in R, \\
& x_t \geq 0, & \forall t \in T.
\end{array}
$$

Questão 3 (Formulação Matemática)

Seja l, n, b e f a quantidade (em gramas) de línguas de cotovia, narizes de lontras, baços de ocelote, e fígados de carriças, respectivamente. No formulaçao seja $n_7 = 5$ e $n_8 = 9$.

$$\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & 31l + 41n + 59b + 26f \\
\textbf{sujeito a} \quad & l \leq 200, \\
& n \leq 500, \\
& b \leq 350, \\
& f \leq 100, \\
& b \leq 2f, \\
& b \geq 1.5f, \\
& 3l + 7n + 7b + 2f \geq 3(l + n + b + f), \\
& 3l + 7n + 7b + 2f \leq 5(l + n + b + f), \\
& l, n, b, f \geq 0.
\end{aligned}$$

Questão 4 (Solução de sistemas lineares)

Na resposta seja, exemplariamente, $10n_7 + n_8 = 15$.

a) Qual o sistema em forma normal?

$$\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 15, \\
& x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 12, \\
& 2x_1 + x_3 \leq 8, \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

b) Precisa-se aplicar a fase I? Por quê? Caso sim, qual a solução ótima do sistema auxiliar e seu valor? Caso não, o que podemos concluir?
Não, porque não existem coeficientes negativos nos lados diretos e portanto a base que consiste em todas variáveis de folga e viável.

c) Explique brevemente a regra de Bland.
A regra de Bland define que deve-se escolher entre todos candidatos para a variável entrante ou sainte sempre aquela de menor índice (ou a primeira, em qualquer ordem).

d) Precisa-se aplicar a fase II? Por quê? Caso sim, qual a solução ótima do sistema original e seu valor? Caso não, o que podemos concluir?

Sim, porque temos uma base viável, e o sistema ainda não é ótimo.
Dicionário inicial:

$$\begin{array}{rrrrr} z = & 0 & +x_1 & +2x_2 & +2x_3 \\ \hline x_4 = & 15 & -5x_1 & -2x_2 & -3x_3 \\ x_5 = & 12 & -x_1 & -4x_2 & -2x_3 \\ x_6 = & 8 & -2x_1 & & -x_3 \end{array}$$

Após o pivô x_1 com x_4:

$$\begin{array}{rrrrr} z = & 3 & -1/5x_4 & +8/5x_2 & +7/5x_3 \\ \hline x_1 = & 3 & -1/5x_4 & -2/5x_2 & -3/5x_3 \\ x_5 = & 9 & +1/5x_4 & -18/5x_2 & -7/5x_3 \\ x_6 = & 2 & +2/5x_4 & +4/5x_2 & +1/5x_3 \end{array}$$

Após o pivô x_2 com x_5:

$$\begin{array}{rrrrr} z = & 7 & -1/9x_4 & -4/9x_5 & +7/9x_3 \\ \hline x_1 = & 2 & -2/9x_4 & +1/9x_5 & -4/9x_3 \\ x_2 = & 5/2 & +1/18x_4 & -5/18x_5 & -7/18x_3 \\ x_6 = & 4 & +4/9x_4 & -2/9x_5 & -1/9x_3 \end{array}$$

Após o pivô x_3 com x_1 o dicionário é ótimo:

$$\begin{array}{rrrrr} z = & 21/2 & -1/2x_4 & -1/4x_5 & -7/4x_1 \\ \hline x_3 = & 9/2 & -1/2x_4 & +1/4x_5 & -9/4x_1 \\ x_2 = & 3/4 & +1/4x_4 & -3/8x_5 & +7/8x_1 \\ x_6 = & 7/2 & +1/2x_4 & -1/4x_5 & +1/4x_1 \end{array}$$

A solução ótima do sistema original é $x_1 = 0$, $x_2 = 3/4$, $x_3 = 9/2$ com valor $21/2$.

Questão 5 (Solução de sistemas lineares)

Na resposta seja, exemplariamente, $n_6 = 2$.

(a) A forma normal é

$$\begin{aligned} \textbf{maximiza} \quad & 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \textbf{sujeito a} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 \le 2, \\ & -3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \le -8, \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{aligned}$$

(b) Fase I é necessária, porque a solução básica não é viável.

Introduzindo x_0:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
z = & 0 & & & & -x_0 \\
z = & 0 & +3x_1 & +2x_2 & +3x_3 & \\
\hline
x_4 = & 2 & -2x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_0 \\
x_5 = & -8 & +3x_1 & +4x_2 & +2x_3 & +x_0
\end{array}
$$

Pivô x_5–x_0:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
z = & -8 & +3x_1 & +4x_2 & +2x_3 & -x_5 \\
z = & 0 & +3x_1 & +2x_2 & +3x_3 & \\
\hline
x_4 = & 10 & -5x_1 & -5x_2 & -3x_3 & +x_5 \\
x_0 = & 8 & -3x_1 & -4x_2 & -2x_3 & +x_5
\end{array}
$$

Pivô x_0–x_2:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
z = & 0 & & -x_0 & & \\
z = & 4 & +3/2x_1 & -1/2x_0 & +2x_3 & +1/2x_5 \\
\hline
x_4 = & 0 & -5/4x_1 & +5/4x_0 & -1/2x_3 & -1/4x_5 \\
x_2 = & 2 & -3/4x_1 & -1/4x_0 & -1/2x_3 & +1/4x_5
\end{array}
$$

Este dicionário é ótimo, com solução $x_2 = 2$ (sendo o resto 0) e valor 0.

(c) Sim, porque a solução ótima da fase I foi 0. Continuando pivotando:

Deleção x_0:

$$
\begin{array}{rrrrr}
z = & 4 & +3/2x_1 & +2x_3 & +1/2x_5 \\
\hline
x_4 = & 0 & -5/4x_1 & -1/2x_3 & -1/4x_5 \\
x_2 = & 2 & -3/4x_1 & -1/2x_3 & +1/4x_5
\end{array}
$$

Pivô x_4–x_3

$$
\begin{array}{rrrrr}
z = & 4 & -7/2x_1 & -4x_4 & -1/2x_5 \\
\hline
x_3 = & 0 & -5/2x_1 & -2x_4 & -1/2x_5 \\
x_2 = & 2 & +1/2x_1 & +1x_4 & +1/2x_5
\end{array}
$$

Este dicionário é ótimo, com solução $x_2 = 2$ (sendo o resto 0) e valor 4.