

- Cada questão contribui 0.2 pontos para Prova 2. **Prazo de entrega fixo:** antes da prova.
- As questões são individualizadas e se referem aos números do cartão  $n_1, n_2, \dots, n_8$  (com dígitos 1 na esquerda para completar 8 dígitos, caso necessário). Exemplo: para cartão 93350 temos  $n_1 = 1, n_2 = 1, n_3 = 1, n_4 = 9, n_5 = 3, n_6 = 3, n_7 = 5, n_8 = 0$ .

## Exercícios Prova 2

### Questão 1 (Formulação Matemática)

Formula o problema da mochila com  $n$  itens de valor  $v_i$  e peso  $p_i$ ,  $i \in [n]$  e peso máximo  $P$  junto com as três restrições adicionais **n5**, **n6**, **n7**. (Caso para  $S = \{\mathbf{n5}, \mathbf{n6}, \mathbf{n7}\}$  temos  $|S| < 3$  resolve  $S \cup [i]$  usando o menor  $i$  tal que  $|S \cup [i]| = 3$ .)

- 0) Caso algum item com índice ímpar é selecionado, nenhum item com índice par pode ser selecionado.
- 1) Temos que selecionar pelo menos um item primo (i.e cujo índice é um número primo).
- 2) Podemos levar qualquer quantidade de itens primos, mas pagamos uma penalidade  $p$  constante para cada par diferente na mochila (i.e. caso tem  $k$  itens primos selecionados a penalidade é  $p\binom{k}{2}$ ).
- 3) Temos uma partição  $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$  dos itens (i.e. para todo  $i, j$  temos  $P_i \cap P_j = \emptyset$  e  $\bigcup_{i \in [k]} P_i = [n]$ ). De cada parte  $P_i$ ,  $i \in [k]$  podemos selecionar no máximo um item.
- 4) Nenhum item selecionado pode ter mais que a metade do valor de todos itens selecionados.
- 5) Dos itens no conjunto  $C \subseteq [n]$  podemos selecionar no máximo um item, mas caso um item em  $C$  é selecionado, temos que selecionar o item  $c \notin C$  também.
- 6) Dado dois conjuntos  $A, B \subseteq [n]$ , podemos levar qualquer número de itens em  $A$ , mas neste caso nenhum em  $B \setminus A$ , e *vice versa*.
- 7) Dado dois conjuntos  $A, B \subseteq [n]$ , podemos levar ou todos em  $A$  ou todos em  $B$ .
- 8) Cada item ainda tem um volume  $v_i$  e o volume máximo é  $V$ .
- 9) Caso algum item com índice par é selecionado, nenhum item com índice ímpar pode ser selecionado.

### Questão 2 (Formulação Matemática)

Formula o problema cujas possíveis soluções são árvores geradores de um grafo não-direcionado  $G = (V, A)$  junto com a função objetivo  $\mathbf{n}_4 \bmod 3$  e as restrições adicionais  $\mathbf{n}_5 \bmod 4$  e  $\mathbf{n}_9 \bmod 4$  (caso  $\mathbf{n}_5 = \mathbf{n}_9$  usar  $\mathbf{n}_5 \bmod 4$  e  $\mathbf{n}_5 + 1 \bmod 4$ ).

Funções objetivo:

- 0) Com pesos  $p_a$ ,  $a \in A$ , maximizando peso total.
- 1) Maximizando o número de folhas.
- 2) Minimizando a soma dos graus.

Restrições adicionais:

- 0) A árvore tem que ter pelo menos  $k$  folhas.
- 1) A árvore tem que ter pelo menos  $k$  vértices de grau mínimo  $d$ .
- 2) A árvore pode ter no máximo  $k$  vértices internos (i.e. vértices que não são folhas).
- 3) A árvore é binária (i.e. cada vértice possui grau no máximo 3).

### Questão 3 (Análise de Sensibilidade)

Resolve

$$\begin{array}{ll}\text{maximiza} & x_1 - \mathbf{n}_5 x_2 + \mathbf{n}_6 x_3 \\ \text{sujeito a} & 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4, \\ & 4x_1 - 3x_2 \leq 2, \\ & -3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0.\end{array}$$

usando o método Simplex. Determine os intervalos em que o dicionário final mantém-se ótimo para cada coeficiente da função objetivo e para cada lado direito. Para cada intervalo expressa a novo valor da função objetivo em função do parâmetro  $t$  da variação.

### Questão 4 (Análise de Sensibilidade)

A solução do sistema

$$\begin{array}{ll}\text{maximiza} & 6x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 9x_4 \\ \text{sujeito a} & 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 5, \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 3, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.\end{array}$$

partindo do dicionário inicial com variáveis de folga  $x_5$  e  $x_6$

$$\begin{array}{rcccc} z = & 0 & +6x_1 & +8x_2 & +5x_3 & +9x_4 \\ x_5 = & 5 & -2x_1 & -1x_2 & -1x_3 & -3x_4 \\ x_6 = & 3 & -1x_1 & -3x_2 & -1x_3 & -2x_4 \end{array}$$

é

$$\begin{array}{rcccc} z = & 17 & -1x_5 & -2x_4 & -5x_2 & -4x_6 \\ x_1 = & 2 & -1x_5 & -1x_4 & +2x_2 & +1x_6 \\ x_3 = & 1 & +1x_5 & -1x_4 & -5x_2 & -2x_6 \end{array}$$

Reponde a questão  $\mathbf{n_6}$  mod 6:

- 0) Em qual intervalo o coeficiente 6 da variável  $x_1$  pode variar, de modo que a solução básica ainda seja ótima?
- 1) Em qual intervalo o coeficiente 8 da variável  $x_2$  pode variar, de modo que a solução básica ainda seja ótima?
- 2) Em qual intervalo o coeficiente 5 da variável  $x_3$  pode variar, de modo que a solução básica ainda seja ótima?
- 3) Em qual intervalo o coeficiente 9 da variável  $x_4$  pode variar, de modo que a solução básica ainda seja ótima?
- 4) Em qual intervalo o lado direito 5 da primeira restrição pode variar, de modo que a solução básica ainda seja ótima?
- 5) Em qual intervalo o lado direito 3 da primeira restrição pode variar, de modo que a solução básica ainda seja ótima?

Adicionalmente informa a variação da função objetivo no intervalo identificado.

### Questão 5 (Método Simplex dual)

Para cada dicionário abaixo, identifique se ele é dualmente viável, dualmente ótimo, e caso aplicável, o que seria o próximo pivô usando a regra de Dantzig. O pivô não precisa ser executado. Justifique a resposta brevemente.

a)

$$\begin{array}{rcccc} z = & 3 & +x_1 & +4\mathbf{n_4}x_2 & +x_3 \\ x_4 = & \mathbf{n_5} & -9x_1 & +2x_2 & -6x_3 \\ x_5 = & 5 & -3x_1 & +5x_2 & +8x_3 \\ x_6 = & 9 & -3x_1 & -2x_2 & -3x_3 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcccc} z = & 2 & -x_1 & -7x_2 & -\mathbf{n_6}x_3 \\ x_4 = & -8 & +2x_1 & +8x_2 & +x_3 \\ x_5 = & \mathbf{n_7} & -2x_1 & -8x_2 & +4x_3 \\ x_6 = & 5 & +9x_1 & & -5x_3 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rcccc} z = & -4 & -\mathbf{n}_8 x_1 & -2x_2 & +3x_3 \\ \hline x_4 = & 5 & -3x_1 & +6x_2 & \\ x_5 = & -2 & +8x_1 & -7x_2 & +4x_3 \\ x_6 = & -\mathbf{n}_4 & -x_1 & +3x_2 & +5x_3 \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{rcccc} z = & -2 & -x_1 & -\mathbf{n}_5 x_2 & -6x_3 \\ \hline x_4 = & \mathbf{n}_6 & -4x_1 & +9x_2 & -7x_3 \\ x_5 = & 7 & +3x_1 & +5x_2 & -7x_3 \\ x_6 = & 2 & +4x_1 & -7x_2 & \end{array}$$