Exercícios: Dualidade a Análise de Sensibilidade

Questão 1 (Análise de Sensibilidade)

Para cada um dos seguintes pares de sistemas lineares e dicionários ótimos, decide se a solução mantem-se ótimo sobre um incremento unitário de cada coeficiente na função objetivo e de cada lado direito no sistema original. Observe que os sistemas não são em forma normal.

$$\begin{aligned} \textbf{maximiza}\quad & -5x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\ \textbf{sujeito a}\quad & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4, \\ & 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 10, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rrrrr} z = & -22/3 & -x_4 & -1/3x_5 & -1/3x_3 \\ \hline x_1 = & 2/3 & +x_4 & -1/3x_5 & -1/3x_3 \\ x_2 = & 2 & -2x_4 & +x_5 & -x_3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \textbf{maximiza}\quad & x_1 - x_2 \\ \textbf{sujeito a}\quad & -2x_1 + 3x_2 \leq 3, \\ & x_1 \leq 3, \\ & -x_1 + 2x_2 \geq -1, \\ & x_1 + x_2 \geq 1, \\ & 2x_1 - x_2 \leq 4, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rrrr} z = & 5/3 & -1/3x_7 & -1/3x_5 \\ \hline x_1 = & 7/3 & -2/3x_7 & +1/3x_5 \\ x_2 = & 2/3 & -1/3x_7 & +2/3x_5 \\ x_4 = & 2/3 & +2/3x_7 & -1/3x_5 \\ x_6 = & 2 & -x_7 & +x_5 \\ x_3 = & 17/3 & -1/3x_7 & -4/3x_5 \end{array}$$

Questão 2 (Análise de Sensibilidade)

A tarefa de otimizar a produção de uma empresa gerou o problema linear

$$\begin{aligned} \textbf{maximiza}\quad & 4x_1 + 3x_2 \\ \textbf{sujeito a}\quad & x_1 + x_2 + x_3 = 229, \\ & 3x_1 - x_2 + x_4 = 111, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

O dicionário ótimo é

$$\begin{array}{rrrr} z = & 772 & -1/4x_4 & -13/4x_3 \\ \hline x_2 = & 144 & +1/4x_4 & -3/4x_3 \\ x_1 = & 85 & -1/4x_4 & -1/4x_3 \end{array}$$

A gerência decide alterar os preços 4 e 3 dos produtos x_1 e x_2 proporcionalmente na razão $3:2$. Em quais limites esse alteração mantem a solução ótima?

Questão 3 (Análise de sensibilidade)

O programa linear

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 4x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \leq 30, \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 15, \\
& x_1 + 3x_3 + 3x_4 \leq 27, \\
& x_2 + 2x_4 \leq 20, \\
& x_1 + 3x_3 \geq 20, \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.
\end{aligned}
$$

possui a solução ótima

$$
\begin{array}{rcccccc}
z = & 22 & -3/5w_1 & -3/5x_2 & -8/5w_2 & -2x_5 & -w_5 \\
\hline
x_1 = & 9 & -1/5w_1 & -6/5x_2 & -1/5w_2 & & \\
x_4 = & 7/3 & +2/15w_1 & -1/5x_2 & -13/15w_2 & -x_5 & -1/3w_5 \\
w_3 = & 0 & -2/5w_1 & +3/5x_2 & +13/5w_2 & +3x_5 & \\
w_4 = & 46/3 & -4/15w_1 & -3/5x_2 & +26/15w_2 & +2x_5 & +2/3w_5 \\
x_3 = & 11/3 & +1/15w_1 & +2/5x_2 & +1/15w_2 & & +1/3w_5
\end{array}
$$

a) Substituindo a função objetivo do programa linear por

$$z(t) = 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + (1+t)x_4 - x_5,$$

para quais valores de t a solução atual continua sendo ótima? Qual a função $z(t)$ para estes valores (é esperado uma fórmula fechada)?

b) Substituindo a segunda restrição por

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 15 + t,$$

para quais valores de t a solução atual continua sendo ótima? Qual o valor da função $z(t)$ para estes valores (é esperado uma fórmula fechada)?

c) Supõe que vamos adicionar a restrição

$$-2x_2 - 4x_4 \geq -10$$

ao modelo. Reescreva a restrição adequadamente e adicione-a ao dicionário. A solução atual, com essa restrição a mais continua sendo ótima? Qual método poderia ser aplicado para obter a nova solução ótima, se a solução atual não fosse mais ótima? (E caso não é mais ótima: qual seria o primeiro pivô usando essa método (não é necessário executar)?)

Questão 4 (Método Simplex)

Considere o programa linear

$$\begin{aligned}
\textbf{maximiza}\quad & -5x_1 - 2x_2 - 4x_3\\
\textbf{sujeito a}\quad & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4,\\
& 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 10,\\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

a) Determine o sistema dual.

b) Resolve o sistema usando o método Simplex dual.

c) Qual a solução ótima do sistema primal? Qual o valor correspondente da função objetivo?

d) Qual a solução ótima do sistema dual? Qual o valor correspondente da função objetivo?

Questão 5 (Dualidade)

Qual o dual dos seguintes problemas?

a) O sistema

$$\begin{aligned}
\textbf{minimiza}\quad & 4a + 5b + 6c\\
\textbf{sujeito a}\quad & a + b \geq 11,\\
& a - b \leq 5,\\
& c - a - b = 0,\\
& 7a \geq 35 - 12b,\\
& a, b, c \in \mathbb{R}_+.
\end{aligned}$$

b) A formulação do problema da mochila de capacidade c com um conjunto de itens I, cada item $i \in I$ com valor p_i e peso w_i é

$$\begin{aligned}
\textbf{maximiza}\quad & \sum_{i \in I} p_i x_i\\
\textbf{sujeito a}\quad & \sum_{i \in I} w_i x_i \leq c,\\
& x_i \in \mathbb{B}, & \forall i \in I.
\end{aligned}$$

c) A formulação do problema do fluxo s-t-máximo num grafo direcionado $G = (V, A)$ com vértice origem $s \in V$, vértice destino $t \in V$ e capacidades u_a para $a \in A$:

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & f \\
\textbf{sujeito a} \quad & \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji} - \sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} = \begin{cases} -f, & \text{caso } i = s, \\ f, & \text{caso } i = t, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} && \forall i \in V, \\
& x_a \leq u_a, && \forall a \in A, \\
& x_a \in \mathbb{R}_+, && \forall a \in A.
\end{aligned}
$$