Exercícios: Programação Linear

Questão 1 (Programas lineares)

Correto. Prova. Ida: Seja x^* uma solução viável de $\max\{c^t x \mid Ax \leq b\}$. Então x^* com $x_0 = 0$ é viável em $\min\{x_0 \mid Ax - ex_0 \leq b\}$, porque $Ax - ex_0 = Ax \leq b$. Volta: Seja x^* e $x_0 = 0$ uma solução viável em $\min\{x_0 \mid Ax - ex_0 \leq b\}$. Então $Ax^* \leq b$, e x^* é viável em $\max\{c^t x \mid Ax \leq b\}$.

Questão 2 (Produtos caninos)

Sejam $f \in \mathbb{R}$ e $h \in \mathbb{R}$ o número de pacotes de Frisky Pup e Husky Hound produzidos, respectivamente. Com isso podemos formular

$$\begin{aligned} \textbf{maximiza} \quad & 1.6f + 1.4h \\ \textbf{sujeito a} \quad & f + 2h \leq 240000, \\ & 1.5f + h \leq 180000, \\ & f \leq 110000, \\ & f, h \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Questão 3 (Soluções)

Não, porque o valor de $4x_1 + 6x_2 + 10x_3$ sempre é par, para x_1, x_2, x_3 números inteiros arbitrários.

Questão 4 (Formulação Matemática)

Sejam a e b as toneladas produzidas de fertilizante tipo A e B, respectivamente. Uma formulação é

$$\begin{aligned} \textbf{maximiza} \quad & 15a + 10b \\ \textbf{sujeito a} \quad & 2a + b \leq 1500, \\ & a + b \leq 1200, \\ & a \leq 500, \\ & a, b \geq 0.. \end{aligned}$$

Questão 5 (Método Simplex)

Correto. Prova. Caso o sistema antes do pivô foi

$$\begin{array}{rcl} z = & \ldots & +c_e x_e \\ \hline \ldots & & \\ x_s = & \ldots & -a_{se} x_e \end{array}$$

com variável entrante x_e e sainte x_s, e com $c_e > 0$ e $a_{se} > 0$ teremos depois um sistema

$$\begin{array}{rl} z = & \ldots \quad -c_e/a_{se}x_s \\ \hline \ldots & \\ x_e = & \ldots \end{array}$$

em que x_s possui coeficiente negativo $-c_e/a_{se}$.

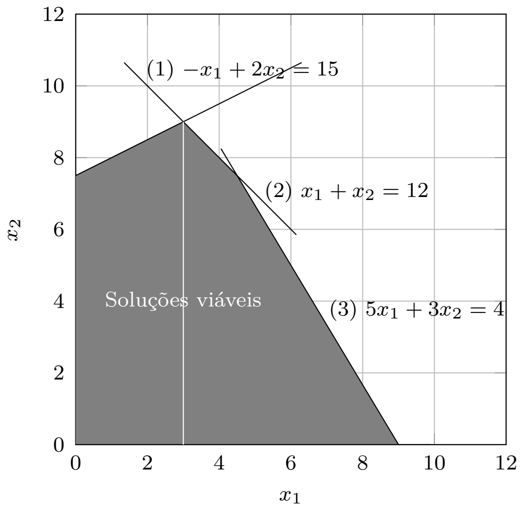
Questão 6 (Mineração)

Sejam x_a e x_b o tempo em dias de operação da jazida A e B. Temos

$$\begin{aligned} \textbf{minimiza} \quad & 900x_a + 720x_b \\ \textbf{sujeito a} \quad & 6x_a + 2x_b \geq 12, \\ & 2x_a + 2x_b \geq 8, \\ & 4x_a + 12x_b \geq 24, \\ & x_a \leq 7, \\ & x_b \leq 7, \\ & x_a, x_b \geq 0. \end{aligned}$$

Questão 7 (Resolução gráfica)

A solução gráfica é

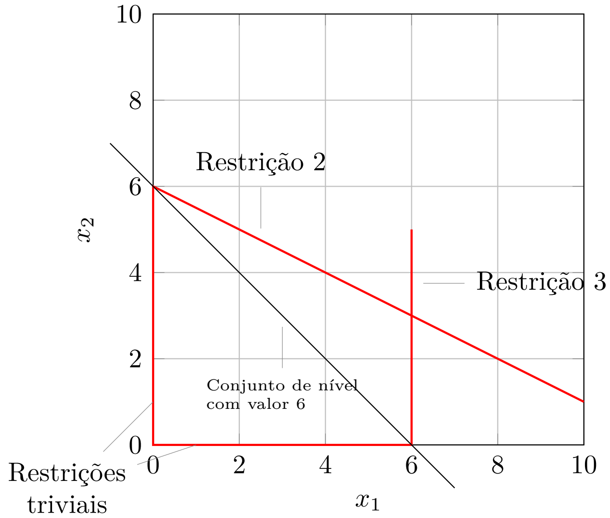


A solução ótima é $(x_1, x_2) = (3, 9)$ com valor 210.

Questão 8 (Solução de sistemas lineares)

$$\begin{aligned} \textbf{maximiza} \quad & x_1 + x_2 && (1) \\ \textbf{sujeito a} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 12 && (2) \\ & x_1 \leq 6 && (3) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(a) Gráfico



(b) A região é limitada. O sistema possui um número infinito de soluções, 4 soluções básicas e uma solução ótima.

(c) A solução ótima é $x_1 = 6$, $x_2 = 3$ com valor 9.

Questão 9 (Método Simplex)

a)

$$\begin{aligned} \textbf{maximiza} \quad & -x_1 - x_2 \\ \textbf{sujeito a} \quad & -x_1 + x_2 \leq 3/2 \\ & -x_1 - x_2 \leq -3/2 \\ & 1/2x_1 - 2x_2 \leq -2 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

b) Sim, porque o sistema inicial é infactível. Temos o sistema auxiliar

$$
\begin{array}{rrrrr}
z = & 0 & & & -x_0 \\
z = & 0 & -x_1 & -x_2 & \\
\hline
x_3 = & 3/2 & +x_1 & -x_2 & +x_0 \\
x_4 = & -3/2 & +x_1 & +x_2 & +x_0 \\
x_5 = & -2 & -1/2x_1 & +2x_2 & +x_0
\end{array}
$$

e depois do pseudo-pivô x_5–x_0 temos

$$
\begin{array}{rrrrr}
z = & -2 & -1/2x_1 & +2x_2 & -x_5 \\
z = & 0 & -x_1 & -x_2 & \\
\hline
x_3 = & 7/2 & +3/2x_1 & -3x_2 & +x_5 \\
x_4 = & 1/2 & +3/2x_1 & -x_2 & +x_5 \\
x_0 = & 2 & +1/2x_1 & -2x_2 & +x_5
\end{array}
$$

O pivô x_4–x_2 produz

$$
\begin{array}{rrrrr}
z = & -1 & +5/2x_1 & -2x_4 & +x_5 \\
z = & -1/2 & -5/2x_1 & +x_4 & -x_5 \\
\hline
x_3 = & 2 & -3x_1 & +3x_4 & -2x_5 \\
x_2 = & 1/2 & +3/2x_1 & -x_4 & +x_5 \\
x_0 = & 1 & -5/2x_1 & +2x_4 & -x_5
\end{array}
$$

O pivô x_0–x_1 produz

$$
\begin{array}{rrrrr}
z = & 0 & -x_0 & & \\
z = & -3/2 & +x_0 & -x_4 & \\
\hline
x_3 = & 4/5 & +6/5x_0 & +3/5x_4 & -4/5x_5 \\
x_2 = & 11/10 & -3/5x_0 & +1/5x_4 & +2/5x_5 \\
x_1 = & 2/5 & -2/5x_0 & +4/5x_4 & -2/5x_5
\end{array}
$$

Como o valor ótimo do sistema auxiliar é 0, encontramos uma solução fáctivel do sistema original, e temos que aplicar a fase II.

c) O dicionário inicial da fase II sem a variável x_0 é

$$
\begin{array}{rrrr}
z = & -3/2 & -x_4 & \\
\hline
x_3 = & 4/5 & +3/5x_4 & -4/5x_5 \\
x_2 = & 11/10 & +1/5x_4 & +2/5x_5 \\
x_1 = & 2/5 & +4/5x_4 & -2/5x_5
\end{array}
$$

O dicionário é ótimo porque e fáctivel e não possui mais coeficientes positivos na função objetivo.

$$\begin{array}{rcccc}
z = & -3/2 & -x_4 & \\
\hline
x_3 = & 4/5 & +3/5x_4 & -4/5x_5 \\
x_2 = & 11/10 & +1/5x_4 & +2/5x_5 \\
x_1 = & 2/5 & +4/5x_4 & -2/5x_5
\end{array}$$

Questão 10 (Método Simplex)

O sistema em forma padrão é

$$\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & -5x_1 - 3x_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & -x_1 - x_2 \le -15, \\
& x_1 + 12x_2 \le 60, \\
& x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}$$

e o dual correspondente

$$\begin{aligned}
\textbf{minimiza} \quad & -15y_1 + 60y_2 \\
\textbf{sujeito a} \quad & -y_1 + y_2 \ge -5, \\
& -y_1 + 12y_2 \ge -3, \\
& y_1, y_2 \ge 0.
\end{aligned}$$

O dual em forma padrão é

$$\begin{aligned}
-\ \textbf{maximiza} \quad & 15y_1 - 60y_2, \\
\textbf{sujeito a} \quad & y_1 - y_2 \le 5, \\
& y_1 - 12y_2 \le 3, \\
& y_1, y_2 \ge 0.
\end{aligned}$$

Vamos resolver o sistema dual com o método Simplex normal e regra do maior coeficiente. O dicionário inicial é

$$\begin{array}{rccc}
z = & 0 & +15y_1 & -60y_2 \\
\hline
y_3a = & 5 & -1y_1 & +1y_2 \\
y_4 = & 3 & -1y_1 & +12y_2
\end{array}$$

após o pivô y_1–y_4 obtemos

$$\begin{array}{rccc}
z = & 45 & -15y_4 & +120y_2 \\
\hline
y_3 = & 2 & +1y_4 & -11y_2 \\
y_1 = & 3 & -1y_4 & +12y_2
\end{array}$$

após o pivô y_2–y_3 obtemos o sistema ótimo

$$\begin{array}{rcccc}
z = & 735/11 & -45/11y_4 & -120/11y_3 \\ \hline
y_2 = & 2/11 & +1/11y_4 & -1/11y_3 \\
y_1 = & 57/11 & +1/11y_4 & -12/11y_3
\end{array}$$

Portanto o valor da solução ótimo do sistema inicial (primal e dual) é $-735/11$. A solução ótimo do dual é $y_1 = 57/11$, $y_2 = 2/11$ e do primal $x_1 = 120/11$ e $x_2 = 45/11$ (coeficientes negativos da função objetivo).

Questão 11 (Solução de sistemas lineares)

a) A forma normal é

$$\begin{aligned}
\textbf{maximiza}\quad & -3x_1 - 2x_2 \\
\textbf{sujeito a}\quad & -2x_1 - x_2 \leq -10, \\
& -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\
& -x_1 - x_2 \leq -6, \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

b) Sim, porque existem lados direitos negativos. A solução do sistema auxiliar é

$$\begin{array}{rccc}
z = & 0 & -3x_1 & -2x_2 \\ \hline
x_3 = & -10 & +2x_1 & +x_2 \\
x_4 = & 6 & +3x_1 & -2x_2 \\
x_5 = & -6 & +x_1 & +x_2
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc}
z = & 0 & & & -x_0 \\
z = & 0 & -3x_1 & -2x_2 & \\ \hline
x_3 = & -10 & +2x_1 & +x_2 & +x_0 \\
x_4 = & 6 & +3x_1 & -2x_2 & +x_0 \\
x_5 = & -6 & +x_1 & +x_2 & +x_0
\end{array}$$

Pseudo-pivô x_0–x_3:

$$\begin{array}{rcccc}
z = & -10 & +2x_1 & +x_2 & -x_3 \\
z = & 0 & -3x_1 & -2x_2 & \\ \hline
x_0 = & 10 & -2x_1 & -x_2 & +x_3 \\
x_4 = & 16 & +x_1 & -3x_2 & +x_3 \\
x_5 = & 4 & -x_1 & & +x_3
\end{array}$$

Pivô x_1–x_5:

$$\begin{array}{rrrrr}
z = & -2 & -2x_5 & +x_2 & +x_3 \\
z = & -12 & +3x_5 & -2x_2 & -3x_3 \\
\hline
x_0 = & 2 & +2x_5 & -x_2 & -x_3 \\
x_4 = & 20 & -x_5 & -3x_2 & +2x_3 \\
x_1 = & 4 & -x_5 & & +x_3
\end{array}$$

Pivô x_2–x_0:

$$\begin{array}{rrrrr}
z = & 0 & & -x_0 & \\
z = & -16 & -x_5 & +2x_0 & -x_3 \\
\hline
x_2 = & 2 & +2x_5 & -x_0 & -x_3 \\
x_4 = & 14 & -7x_5 & +3x_0 & +5x_3 \\
x_1 = & 4 & -x_5 & & +x_3
\end{array}$$

A solução ótima do sistema auxiliar é $x_1 = 4$, $x_2 = 2$ e $x_4 = 14$ com valor 0.

c) Não, porque o sistema obtido no final da fase I já é ótimo. A solução ótima é a mesma do sistema auxiliar com valor -16 (valor 16 no sistema original).

Questão 12 (Solução de sistemas lineares)

(a) Forma normal

$$\begin{array}{rl}
\textbf{maximiza} & 2x_1 + 13x_2 - 3x_3 \\
\textbf{sujeito a} & 2x_1 + x_2 \le 20, \\
& -x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10, \\
& 3x_1 - 2x_2 - x_3 \le -2, \\
& 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le -8, \\
& -4x_1 - 2x_2 + 2x_3 \le 8, \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0.
\end{array}$$

(b) Precisamos aplicar a fase I, porque temos limites negativas, e a solução básica inicial não é viável. O dicionário inicial com variáveis de folga x_4 até x_8 é

$$\begin{array}{rrrrrr}
z = & & -x_0 & & & \\
\hline
x_4 = & 20 & +x_0 & -2x_1 & -x_2 & \\
x_5 = & 10 & +x_0 & +x_1 & -2x_2 & -x_3 \\
x_6 = & -2 & +x_0 & -3x_1 & +2x_2 & +x_3 \\
x_7 = & -8 & +x_0 & -4x_1 & -2x_2 & +2x_3 \\
x_8 = & 8 & +x_0 & +4x_1 & +2x_2 & -2x_3
\end{array}$$

Pivô x_0–x_8:

$$\begin{array}{rrrrrr}
z = & -8 & -x_7 & -4x_1 & -2x_2 & +2x_3 \\
\hline
x_4 = & 28 & +x_7 & +2x_1 & +x_2 & -2x_3 \\
x_5 = & 18 & +x_7 & +5x_1 & & -3x_3 \\
x_6 = & 6 & +x_7 & +x_1 & +4x_2 & -x_3 \\
x_0 = & 8 & +x_7 & +4x_1 & +2x_2 & -2x_3 \\
x_8 = & 16 & +x_7 & +8x_1 & +4x_2 & -4x_3
\end{array}$$

Pivô x_3–x_0:

$$\begin{array}{rrrrrr}
z = & 0 & & & & -x_0 \\
\hline
x_4 = & 20 & & -2x_1 & -x_2 & +x_0 \\
x_5 = & 6 & -1/2x_7 & -x_1 & -3x_2 & +3/2x_0 \\
x_6 = & 2 & +1/2x_7 & -x_1 & +3x_2 & +1/2x_0 \\
x_3 = & 4 & +1/2x_7 & +2x_1 & +x_2 & -1/2x_0 \\
x_8 = & 0 & -x_7 & & & +2x_0
\end{array}$$

A solução ótimo do sistema auxiliar é $x_1 = x_2 = 0$ e $x_3 = 4$ com valor 0.

(c) Podemos aplicar a fase II, porque obtemos uma base viável na fase I, i.e. o sistema possui ao menos uma solução. O dicionário com a função objetivo original é

$$\begin{array}{rrrrr}
z = & -12 & -4x_1 & +10x_2 & -3/2x_7 \\
\hline
x_4 = & 20 & -2x_1 & -x_2 & \\
x_5 = & 6 & -x_1 & -3x_2 & -1/2x_7 \\
x_6 = & 2 & -x_1 & +3x_2 & +1/2x_7 \\
x_3 = & 4 & +2x_1 & +x_2 & +1/2x_7 \\
x_8 = & 0 & & & -x_7
\end{array}$$

Pivô x_2–x_5

$$\begin{array}{rrrrr}
z = & 8 & -22/3x_1 & -10/3x_5 & -19/6x_7 \\
\hline
x_4 = & 18 & -5/3x_1 & +1/3x_5 & +1/6x_7 \\
x_2 = & 2 & -1/3x_1 & -1/3x_5 & -1/6x_7 \\
x_6 = & 8 & -2x_1 & -x_5 & \\
x_3 = & 6 & +5/3x_1 & -1/3x_5 & +1/3x_7 \\
x_8 = & 0 & & & -x_7
\end{array}$$

A solução ótima do sistema original é $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 6$ com valor 8.

Questão 13 (Método Simplex)

a) O método lexicográfico introduz a perturbação simbólica ϵ_i na i-ésima restrição. Para determinar a variável sainte, compara-se os constantes e perturbações lexicograficamente, para determinar o menor limite. O método garante que a variável sainte é determinado univocamente, e que o método Simplex sempre termina.

b) O sistema já está em forma normal.

c) Não, porque temos uma solução inicial básica viável.

d) Sim, porque o sistema inicial não é ótimo. O dicionário inicial é

$$\begin{array}{rrrrrrr} z = & 0 & & & +5x_1 & +2x_2 & +3x_3 \\ \hline x_4 = & 0 & +\epsilon_1 & & -x_1 & -2x_2 & -x_3 \\ x_5 = & 0 & & +\epsilon_2 & -3x_1 & -2x_2 & +x_3 \end{array}$$

e o pivô x_1–x_4 produz o dicionário ótimo

$$\begin{array}{rrcrrr} z = & 0 & & -5x_4 & -8x_2 & -2x_3 \\ \hline x_1 = & 0 & \epsilon_1 & -x_4 & -2x_2 & -x_3 \\ x_5 = & 0 & -3\epsilon_1 + \epsilon_2 & +3x_4 & +4x_2 & +4x_3 \end{array}.$$

O solução ótimo é $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ com valor 0.

Questão 14 (Método Simplex)

O sistema em forma normal não possui solução básica viável, logo temos que aplicar a fase I. O dicionário inicial do sistema auxiliar é

$$\begin{array}{rrrrr} & & & & \downarrow \\ & z = & & & -x_0 \\ \hline \leftarrow & w_1 = -2 & +x_1 & +x_2 & +x_0 \\ & w_2 = -2 & -3x_1 & -x_2 & +x_0 \\ & w_3 = & +2x_1 & -x_2 & +x_0 \end{array}$$

O dicionário após o pivô x_0–w_1 é

$$\begin{array}{rrrrr} & & \downarrow & & \\ & z = -2 & +x_1 & +x_2 & -w_1 \\ \hline & x_0 = 2 & -x_1 & -x_2 & +w_1 \\ \leftarrow & w_2 = 0 & -4x_1 & -2x_2 & +w_1 \\ & w_3 = 2 & +x_1 & -2x_2 & +w_1 \end{array}$$

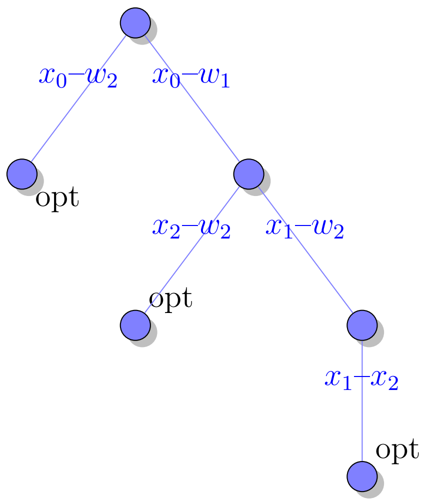
O dicionário após o pivô x_1–w_2 é

$$\begin{array}{rcccc}
 & & & \downarrow & \\
 & z = -2 & -1/4w_2 & +1/2x_2 & -3/4w_1 \\
\hline
 & x_0 = 2 & +1/4w_2 & -1/2x_2 & +3/4w_1 \\
\leftarrow & x_1 = 0 & -1/4w_2 & -1/2x_2 & +1/4w_1 \\
 & w_3 = 2 & -1/4w_2 & -5/2x_2 & +5/4w_1
\end{array}$$

O dicionário após o pivô x_2–x_1 é

$$\begin{array}{rccc}
z = -2 & -1/2w_2 & -x_1 & -1/2w_1 \\
\hline
x_0 = 2 & +1/2w_2 & +x_1 & +1/2w_1 \\
x_2 = 0 & -1/2w_2 & -2x_1 & +1/2w_1 \\
w_3 = 2 & +w_2 & +5x_1 &
\end{array}$$

Como o valor $x_0 > 0$ o sistema é infactível.
(A solução acima de fato é o pior caso. Aqui é a árvore de possíveis pivôs.



)

Questão 15 (Método Simplex)

a) x_1–x_2, x_1–x_5, x_1–x_3, x_4–x_5, x_6–x_2, x_6–x_5.

b) x_6–x_2, ou x_6–x_5.

c) x_1–x_2.

d) x_6–x_2.

Questão 16 (Sistema linear parameterizado)

O sistema é ilimitado para $t \leq 0$, têm exatamente uma solução ótima para $t \in]0, \infty] \setminus \{1\}$ e um número infinito de soluções ótimas para $t = 1$. O caso que o sistema não tem soluções não ocorre.

Uma possibilidade de ver isso: O dicionário inicial

$$\begin{array}{rrrr} z = & 0 & +x_1 & +x_2 \\ \hline x_3 = & 1 & -tx_1 & -x_2 \end{array}$$

não tem limite superior para o pivô x_1–x_3 caso $t \leq 0$. Caso $t \geq 0$ o pivô x_1–x_3 resulta em

$$\begin{array}{rrrr} z = & 1/t & -1/tx_3 & +(1-1/t)x_2 \\ \hline x_1 = & 1/t & -1/tx_3 & -1/tx_2 \end{array}$$

que é o sistema ótimo para $0 < t \leq 1$ (todos coeficientes negativos). Caso contrário, o pivô x_2–x_3 resulta em

$$\begin{array}{rrrr} z = & 1 & +(1-t)x_1 & -x_3 \\ \hline x_2 = & 1 & -tx_1 & -x_3 \end{array}$$

que é o sistema ótimo para $t > 1$. Caso $t = 1$ a função objetivo e a restrição são co-lineares, e portanto existe um número infinito de soluções ótimas.

Outra possibilidade é a análise gráfica: