Soluções: Formulação de IPs

Questão 1 (Investimentos)

Sejam $x_i \in \mathbb{B}$, $i \in P = [7]$ variáveis booleanas, que determinem em quais projetos a empresa vai investir. Seja l_i o lucro do projeto i.

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{maximiza} & \sum_{i \in P} l_i x_i & \\
\textbf{sujeito a} & \sum_{i \in P} x_i \le 6, & \text{Não investir em todos projetos} \\
 & \sum_{i \in P} x_i \ge 1, & \text{Investir em ao menos um projeto} \\
 & x_1 \le 1 - x_3, & \text{Projeto 1 somente se não projeto 3} \\
 & x_4 \le x_2, & \text{Projeto 4 somente se projeto 2} \\
 & x_1 = x_5, & \text{Ambos 1 e 5 ou nenhum} \\
 & x_i \in \mathbb{B}, \qquad \forall i \in P. &
\end{array}
$$

Questão 2 (Formulação de Programas Inteiros)

Cobertura por arcos

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimiza} & \sum_{e \in E} c_e x_e & \\
\textbf{sujeito a} & \sum_{u \in N(v)} x_{uv} \ge 1, & \forall v \in V, \\
 & x_e \in \mathbb{B}. &
\end{array}
$$

Conjunto dominante de arcos

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{maximiza} & \sum_{e \in E} c_e x_e & \\
\textbf{sujeito a} & \sum_{\substack{e' \in E \\ e \cap e' \neq \emptyset}} x_{e'} \ge 1, & \forall e \in E, \\
 & x_e \in \mathbb{B}. &
\end{array}
$$

Coloração de grafos Seja $n = |V|$; uma coloração nunca precisa mais que n cores.

$$
\begin{aligned}
\textbf{minimiza} \quad & \sum_{j \in [n]} c_j \\
\textbf{sujeito a} \quad & \sum_{j \in [n]} x_{vj} = 1, && \forall v \in V, && (1) \\
& x_{ui} + x_{vi} \leq 1, && \forall \{u, v\} \in E, i \in [n], && (2) \\
& nc_j \geq \sum_{v \in V} x_{vj}, && \forall j \in [n], && (3) \\
& x_{vi}, c_j \in \mathbb{B}.
\end{aligned}
$$

- Restrição (1) garante que todo vértice recebe exatamente uma cor.
- Restrição (2) garante que vértices adjacentes recebem cores diferentes.
- Restrição (3) garante que $c_j = 1$ caso cor j for usada.

Clique mínimo ponderado

$$
\begin{aligned}
\textbf{minimiza} \quad & \sum_{v \in V} c_v x_v \\
\textbf{sujeito a} \quad & x_u + x_v \leq 1, && \forall \{u, v\} \notin E, && (4) \\
& x_v \in \mathbb{B}.
\end{aligned}
$$

Restrição 4 garante que não existe um par de vértices selecionados que não são vizinhos.

Subgrafo cúbico x_e indica a seleção da aresta $e \in E$, e y_v indica se o vértice $v \in V$ ele possui grau 0 (caso contrário grau 3).

$$
\begin{aligned}
\textbf{minimiza} \quad & \sum_{e \in E} x_e \\
\textbf{sujeito a} \quad & \sum_{e \in N(v)} x_e = 3y_v, && \forall v \in V, \\
& x_e \in \mathbb{B}, && \forall e \in E, \\
& y_v \in \mathbb{B}, && \forall v \in V.
\end{aligned}
$$

Questão 3 (Formulação Matemática)

Seja $x_{ijk} \in \mathbb{B}$ um indicador que na casa da linha i e coluna j temos o número k, $i, j, k \in [5]$. Ainda vamos introduzir uma variável auxiliar $y_{ij} \in \mathbb{Z}$ para o valor na célula (i, j). Com isso temos

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & y_{11} \\
\textbf{sujeito a} \quad & y_{ij} = \sum_{k\in[5]} k x_{ijk}, && \forall i,j \in [5], \\
& \sum_{k\in[5]} x_{ijk} = 1, && \forall i,j \in [5], && \text{Único número em cada casa} \\
& \sum_{j\in[5]} x_{ijk} = 1, && \forall i,k \in [5], && \text{Digito } k \text{ uma vez na linha } i \\
& \sum_{i\in[5]} x_{ijk} = 1, && \forall j,k \in [5], && \text{Digito } k \text{ uma vez na coluna } j \\
& y_{11} \geq y_{12} + 1, && && \text{Relação entre (1,1) e (1,2)} \\
& y_{13} \geq y_{14} + 1, && && \text{Relação entre (1,3) e (1,4)} \\
& y_{33} \leq y_{34} - 1, && && \text{Relação entre (3,3) e (3,4)} \\
& y_{51} \leq y_{52} - 1, && && \text{Relação entre (5,1) e (5,2)} \\
& y_{54} \leq y_{55} - 1, && && \text{Relação entre (5,4) e (5,5)} \\
& x_{ijk} \in \mathbb{B}, y_{ij} \in \mathbb{Z}, && \forall i,j,k \in [5]
\end{aligned}
$$