- Cada questão contribui 0.2 pontos para Prova 2. **Prazo de entrega fixo**: 21 de maio.
- As questões são individualizadas e se referem aos números do cartão $n_1, n_2, \dots, n_8$ (com dígitos 1 na esquerda para completar 8 dígitos, caso necessário). Exemplo: para cartão 93350 temos $n_1 = 1, n_2 = 1, n_3 = 1, n_4 = 9, n_5 = 3, n_6 = 3, n_7 = 5, n_8 = 0$.

Exercícios Prova 2

Questão 1 (Formulação Matemática)

Formula o problema da mochila com n itens de valor v_i e peso p_i, $i \in [n]$ e peso máximo P junto com as três restrições adicionas $\mathbf{n_5}$, $\mathbf{n_6}$, $\mathbf{n_7}$. (Caso para $S = \{\mathbf{n_5}, \mathbf{n_6}, \mathbf{n_7}\}$ temos $|S| < 3$ resolve $S \cup [i]$ usando o menor i tal que $|S \cup [i]| = 3$.)

0) Caso algum item com índice impar é selecionado, nenhum item com índice par pode ser selecionado.
1) Temos que selecionar pelo menos um item primo (i.e cujo índice é um número primo).
2) Podemos levar qualquer quantidade de itens primos, mas pagamos uma penalidade p constante para cada par diferente na mochila (i.e. caso tem k itens primos selecionados a penalidade é $p\binom{k}{2}$).
3) Temos uma partição $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$ dos itens (i.e. para todo i, j temos $P_i \cap P_j = \emptyset$ e $\bigcup_{i\in[k]} P_i = [n]$). De cada parte P_i, $i \in [k]$ podemos selecionar no máximo um item.
4) Nenhum item selecionado pode ter mais que a metade do valor de todos itens selecionados.
5) Dos itens no conjunto $C \subseteq [n]$ podemos selecionar no máximo um item, mas caso um item em C é selecionado, temos que selecionar o item $c \notin C$ também.
6) Dado dois conjuntos $A, B \subseteq [n]$, podemos levar qualquer número de itens em A, mas neste caso nenhum em $B \setminus A$, e *vice versa*.
7) Dado dois conjuntos $A, B \subseteq [n]$, podemos levar ou todos em A ou todos em B.
8) Cada item ainda tem um volume v_i e o volume máximo é V.
9) Caso algum item com índice par é selecionado, nenhum item com índice ímpar pode ser selecionado.

Questão 2 (Formulação Matemática)

Formula o problema cujas possíveis soluções são árvores geradores de um grafo não-direcionado $G = (V, A)$ junto com a função objetivo $\mathbf{n_4} \mod 3$ e as restrições adicionais $\mathbf{n_5} \mod 4$ e $\mathbf{n_9} \mod 4$ (caso $\mathbf{n_5} = \mathbf{n_9}$ usar $\mathbf{n_5} \mod 4$ e $\mathbf{n_5} + 1 \mod 4$).
Funções objetivo:

0) Com pesos p_a, $a \in A$, maximizando peso total.

1) Maximizando o número de folhas.

2) Minimizando a soma dos graus.

Restrições adicionais:

0) A árvore tem que ter pelo menos k folhas.

1) A árvore tem que ter pelo menos k vértices de grau mínimo d.

2) A árvore pode ter no máximo k vértices internos (i.e. vértices que não são folhas).

3) A árvore é binária (i.e. cada vértice possui grau no máximo 3).

Questão 3 (Análise de Sensibilidade)

Resolve

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & x_1 - \mathbf{n_5} x_2 + \mathbf{n_6} x_3 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4, \\
& 4x_1 - 3x_2 \leq 2, \\
& -3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3, \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

usando o método Simplex. Determine os intervalos em que o dicionário final mantem-se ótimo para cada coeficiente da função objetivo e para cada lado direito. Para cada intervalo expressa a novo valor da função objetivo em função do parâmetro t da variação.

Questão 4 (Análise de Sensibilidade)

A solução do sistema

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & 6x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 9x_4 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 5, \\
& x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 3, \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.
\end{aligned}
$$

partindo do dicinário inicial com variáveis de folga x_5 e x_6

$$
\begin{array}{rrrrrr}
z = & 0 & +6x_1 & +8x_2 & +5x_3 & +9x_4 \\
\hline
x_5 = & 5 & -2x_1 & -1x_2 & -1x_3 & -3x_4 \\
x_6 = & 3 & -1x_1 & -3x_2 & -1x_3 & -2x_4
\end{array}
$$

é

$$
\begin{array}{rrrrrr}
z = & 17 & -1x_5 & -2x_4 & -5x_2 & -4x_6 \\
\hline
x_1 = & 2 & -1x_5 & -1x_4 & +2x_2 & +1x_6 \\
x_3 = & 1 & +1x_5 & -1x_4 & -5x_2 & -2x_6
\end{array}
$$

Reponde a questão $\mathbf{n_6} \mod 6$:

0) Em qual intervalo o coeficiente 6 da variável x_1 pode variar, de modo que a solução básica ainda seja ótima?

1) Em qual intervalo o coeficiente 8 da variável x_2 pode variar, de modo que a solução básica ainda seja ótima?

2) Em qual intervalo o coeficiente 5 da variável x_3 pode variar, de modo que a solução básica ainda seja ótima?

3) Em qual intervalo o coeficiente 9 da variável x_4 pode variar, de modo que a solução básica ainda seja ótima?

4) Em qual intervalo o lado direito 5 da primeira restrição pode variar, de modo que a solução básica ainda seja ótima?

5) Em qual intervalo o lado direito 3 da primeira restrição pode variar, de modo que a solução básica ainda seja ótima?

Adicionalmente informa a variação da função objetivo no intervalo identificado.

Questão 5 (Método Simplex dual)

Para cada dicionário abaixo, identifique se ele é dualmente viável, dualmente ótimo, e caso aplicável, o que seria a próximo pivô usando a regra de Dantzig. O pivô não precisa ser executado. Justifique a resposta brevemente.

a)

$$
\begin{array}{rrrrr}
z = & 3 & +x_1 & +4\mathbf{n_4}x_2 & +x_3 \\
\hline
x_4 = & \mathbf{n_5} & -9x_1 & +2x_2 & -6x_3 \\
x_5 = & 5 & -3x_1 & +5x_2 & +8x_3 \\
x_6 = & 9 & -3x_1 & -2x_2 & -3x_3
\end{array}
$$

b)

$$
\begin{array}{rrrrr}
z = & 2 & -x_1 & -7x_2 & -\mathbf{n_6}x_3 \\
\hline
x_4 = & -8 & +2x_1 & +8x_2 & +x_3 \\
x_5 = & \mathbf{n_7} & -2x_1 & -8x_2 & +4x_3 \\
x_6 = & 5 & +9x_1 & & -5x_3
\end{array}
$$

c)

$$
\begin{array}{rrrrr}
z = & -4 & -\mathbf{n_8}x_1 & -2x_2 & +3x_3 \\
\hline
x_4 = & 5 & -3x_1 & +6x_2 & \\
x_5 = & -2 & +8x_1 & -7x_2 & +4x_3 \\
x_6 = & -\mathbf{n_4} & -x_1 & +3x_2 & +5x_3
\end{array}
$$

d)

$$
\begin{array}{rrrrr}
z = & -2 & -x_1 & -\mathbf{n_5}x_2 & -6x_3 \\
\hline
x_4 = & \mathbf{n_6} & -4x_1 & +9x_2 & -7x_3 \\
x_5 = & 7 & +3x_1 & +5x_2 & -7x_3 \\
x_6 = & 2 & +4x_1 & -7x_2 &
\end{array}
$$