Soluções Prova 1

Questão 1 (Método Simplex, 3pt)

a) A forma normal é

$$\begin{aligned} \textbf{maximiza}\quad & 4x_1 + x_2 + 4x_3 \\ \textbf{sujeito a}\quad & -4x_1 - 2x_2 \le -19, \\ & 2x_2 \le 9, \\ & 12x_1 + 2x_2 \le 57, \\ & -x_1 - x_2 \le -6, \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{aligned}$$

b) Temos o sistema auxiliar

$$\begin{array}{rccccc} z = & 0 & & & & -x_0 \\ z = & 0 & +4x_1 & +x_2 & +4x_3 & \\ \hline w_1 = & -19 & +4x_1 & +2x_2 & & +x_0 \\ w_2 = & 9 & & -2x_2 & & +x_0 \\ w_3 = & 57 & -12x_1 & -2x_2 & & +x_0 \\ w_4 = & -6 & +x_1 & +x_2 & & +x_0 \end{array}$$

e depois do pseudo-pivô w_1–x_0 temos

$$\begin{array}{rccccc} z = & -19 & +4x_1 & +2x_2 & & -w_1 \\ z = & 0 & +4x_1 & +x_2 & +4x_3 & \\ \hline x_0 = & 19 & -4x_1 & -2x_2 & & +w_1 \\ w_2 = & 28 & -4x_1 & -4x_2 & & +w_1 \\ w_3 = & 76 & -16x_1 & -4x_2 & & +w_1 \\ w_4 = & 13 & -3x_1 & -x_2 & & +w_1 \end{array}$$

O pivô w_4–x_1 produz

$$\begin{array}{rccccc} z = & -5/3 & -4/3w_4 & +2/3x_2 & & +1/3w_1 \\ z = & 52/3 & -4/3w_4 & -1/3x_2 & +4x_3 & +4/3w_1 \\ \hline x_0 = & 5/3 & +4/3w_4 & -2/3x_2 & & -1/3w_1 \\ w_2 = & 32/3 & +4/3w_4 & -8/3x_2 & & -1/3w_1 \\ w_3 = & 20/3 & +16/3w_4 & +4/3x_2 & & -13/3w_1 \\ x_1 = & 13/3 & -1/3w_4 & -1/3x_2 & & +1/3w_1 \end{array}$$

O pivô x_0–x_2 produz

$$
\begin{array}{rcccccc}
z = & 0 & & -x_0 & & \\
z = & 33/2 & -2w_4 & +1/2x_0 & +4x_3 & +3/2w_1 \\
\hline
x_2 = & 5/2 & +2w_4 & -3/2x_0 & & -1/2w_1 \\
w_2 = & 4 & -4w_4 & +4x_0 & & +w_1 \\
w_3 = & 10 & +8w_4 & -2x_0 & & -5w_1 \\
x_1 = & 7/2 & -w_4 & +1/2x_0 & & +1/2w_1
\end{array}
$$

Como o valor ótimo do sistema auxiliar é 0, encontramos uma solução fáctivel do sistema original, e temos que aplicar a fase II.

c) O dicionário inicial da fase II sem a variável x_0 é

$$
\begin{array}{rccccc}
z = & 33/2 & -2w_4 & +4x_3 & +3/2w_1 \\
\hline
x_2 = & 5/2 & +2w_4 & & -1/2w_1 \\
w_2 = & 4 & -4w_4 & & +w_1 \\
w_3 = & 10 & +8w_4 & & -5w_1 \\
x_1 = & 7/2 & -w_4 & & +1/2w_1
\end{array}
$$

Como o aumento da variável 2 é ilimitado, o sistema é ilimitado e não possui solução ótima.

Questão 2 (Formulação Matemática, 2.5pt)

Seja $x_{ij} \geq 0$ a quantidade do tanque i usado para atender o pedido j, e define vetores $x_i = (x_{i1} \ldots x_{i4})^t$, $x^j = (x_{1j} \ldots x_{3j})^t$. Temos que satisfazer os pedidos

$$\sum_{i \in [3]} x_{i1} = 2000, \tag{1}$$
$$\sum_{i \in [3]} x_{i2} = 1500, \tag{2}$$
$$\sum_{i \in [3]} x_{i3} = 2500, \tag{3}$$
$$\sum_{i \in [3]} x_{i4} = 3000, \tag{4}$$

com os seus desempenhos

$$c^t x_1/2000 \geq 7, \tag{5}$$
$$c^t x_2/1500 \leq 7.8, \tag{6}$$
$$7.2 \leq c^t x_3/2500 \leq 7.6, \tag{7}$$
$$c^t x_4/3000 = 7.4. \tag{8}$$

onde $c = (6.8\ 7.4\ 8.1)^t$ são os desempenhos dos três óleos. Para a função objetivo podemos definir as capacidades $b = (4000\ 3000\ 5000)^t$ e variáveis auxiliares $r = (r_1\ r_2\ r_3)^t \geq 0$ que representam o resto em cada tanque, definido por

$$r = b - \sum_{j \in [4]} x^j. \tag{9}$$

Logo com preços de venda $v = (15\ 17\ 20)^t$ temos a função objetivo

$$\textbf{maximiza} \quad v^t r \tag{10}$$

Questão 3 (4 Não Blands, 2pt)

1. É válida, porque é equivalente com a regra de Bland, que funciona para qualquer ordem fixa.
2. Não é válida, porque pode levar a ciclos infinitos (porém, pelo aleatoriedade, se o número de pivos chegar ao infinito, a probabilidade de término se aproxima de 1).
3. Não é válida, porque um pivô degenerado via regra de Bland, pode ser desfeito aplicando a regra de "Blonde", então o mesmo argumento do item b) se aplica.
4. Não é válida, porque ignora as regras de seleção de candidatos que cada regra de pivoteamento tem que respeitar.

Questão 4 (Formulação Matemática, 2.5pt)

Sejam x_A, x_P, e x_S a área destinada ao arrendamento, pecuária, e plantio de soja (em alqueires). Podemos formular

$$\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & 300x_A + 400x_P + 500x_S \\
\textbf{sujeito a} \quad & 100x_P + 200x_S \leq 14.000, \\
& 100.000x_P + 200.000x_S \leq 12.750.000, \\
& x_A + x_P + x_S \leq 100, \\
& x_A, x_P, x_S \geq 0.
\end{aligned}$$