Soluções: Dualidade e Análise de Sensibilidade

Questão 1 (Análise de Sensibilidade)

Primeiro sistema, modificação função objetivo O sistema mantem-se primalmente viáivel, porque a solução ótima básica é $x_B^* = B^{-1}b$. A condição de otimalidade é $y_N^* + \Delta y_N \geq 0$ (o sistema fica dualmente viável). Do dicionário final obtemos

$$(B^{-1}N)^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1/3 & -1 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Incrementando cada coeficiente na função objetivo temos

Δc_B^t		Δc_N^t			$\Delta y_N^t = ((B^{-1}N)^t \Delta c_B - \Delta c_N)^t$			$(y_N + \Delta y_N)^t$		
1	0	0	0	0	-1	$1/3$	$1/3$	0	$2/3$	$2/3$
0	1	0	0	0	2	-1	1	3	$-2/3$	$4/3$
0	0	0	0	1	0	0	-1	1	$1/3$	$-2/3$

e portanto a condição de otimalidade é satisfeita para o incremento do primeiro coeficiente, mas não do segundo ou terceiro.

Primeiro sistema, modificação lados direitos O sistema mantem-se dualmente viável, porque a solução ótima dual é $y_N^* = (B^{-1}N)^t c_B - c_N$. A condição de otimalidade é $x_B^* + \Delta x_B \geq 0$ (o sistema fica primalmente viável). Do dicionário final obtemos

$$B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}; \qquad \text{e com isso } B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1/3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(Observe que multiplicamos as colunas com -1 para obter as colunas do sistema normalizado.)

Incrementando os coeficientes dos lados direitos (um cada vez) temos

Δb^t		$\Delta x_B^t = (B^{-1}\Delta b)^t$		$(x_B^* + \Delta x_B)^t$	
-1	0	1	-2	$5/3$	0
0	-1	$-1/3$	1	$1/3$	3

(Novamente multiplicamos os incrementos Δb por -1 para obter um incremento no sistema original.) Para os dois incrementos o sistema mantem-se ótimo.

Segundo sistema, modificação função objetivo

Aplicaremos o mesmo processo do primeiro sistema.

$$(B^{-1}N)^t = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -2/3 & 1 & 1/3 \\ -1/3 & -2/3 & 1/3 & -1 & 4/3 \end{pmatrix}.$$

Incrementando cada coeficiente na função objetivo temos

Δc_B^t					Δc_N^t		$\Delta y_N^t = ((B^{-1}N)^t \Delta c_B - \Delta c_N)^t$		$(y_N + \Delta y_N)^t$	
1	0	0	0	0	0	0	2/3	1/3	1	2/3
0	1	0	0	0	0	0	1/3	−2/3	2/3	−1/3

Logo, o sistema mantem-se ótimo para o incremento do coeficiente de x_1 mas não de x_2.

Segundo sistema, modificação lados direitos

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B^{-1} = 1/3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Observe a multiplicação das linhas que correspondem com desigualdades de tipo "$\geq$" por -1 para variáveis originais.) Incrementando os coeficientes dos lados direitos (um cada vez) temos

Δb^t					$\Delta x_B^t = (B^{-1}\Delta b)^t$					$(x_B^* + \Delta x_B)^t$				
1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	7/3	2/3	2/3	2	20/3
0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	7/3	2/3	5/3	2	17/3
0	0	−1	0	0	1/3	2/3	−1/3	1	−4/3	8/3	4/3	1/3	3	13/3
0	0	0	−1	0	0	0	0	−1	0	7/3	2/3	2/3	1	17/3
0	0	0	0	1	2/3	1/3	−2/3	1	1/3	3	1	0	3	6

(Observe a multiplicação dos incrementos por -1 para desigualdades tipo "$\geq$".) Logo o sistema mantem-se ótimo para todos incrementos.

Questão 2 (Análise de Sensibilidade)

Temos

$$y_N^* = 1/4 \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \end{pmatrix} \qquad B^{-1}N = 1/4 \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Com $\Delta c = (\Delta c_B^t \Delta c_N^t)^t$ com $\Delta c_B = (23)^t$ e $\Delta c_N = (00)^t$ (observe a ordem das variáveis), obtemos

$$\begin{aligned} \Delta y_N^* &= (B^{-1}N)^t \Delta c_B - \Delta c_N \\ &= (B^{-1}N)^t \Delta c_B \\ &= 1/4 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1/4 \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A condição para manter o sistema viável é

$$\begin{aligned} & y_N^* + t\Delta y_N^* \geq 0 \\ \iff \quad & 1/4\begin{pmatrix} 1 \\ 13 \end{pmatrix} + 1/4t\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} \geq 0 \\ \iff \quad & \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} \geq 0 \end{aligned}$$

que é equivalente com

$$\begin{aligned} t &\geq -1 \\ t &\geq -13/9 \end{aligned}$$

i.e. $t \in [-1, \infty]$.

Questão 3 (Análise de sensibilidade)

a) Temos $\Delta c_B = (0\ 1\ 0\ 0\ 0)^t$, $\Delta c_N = 0$ e $y_N = 1/5(3\ 3\ 8\ 10\ 5)^t$. Logo, variação da solução dual é

$$\begin{aligned} \Delta y_N &= (B^{-1}N)^t \Delta c_B - \Delta c_N \\ &= (B^{-1}N)^t \Delta c_B \\ &= 1/15 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 13 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e nos temos a condição

$$\begin{aligned} & \hat{y}_N = y_N + t\Delta y_N \geq 0 \\ \iff & \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 24 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 13 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix} \geq 0 \\ \iff & t \leq 9/2 \\ & t \geq \max\{-3, -24/13, -2, -3\} = -24/13. \end{aligned}$$

Obtemos

$$z(t) = z + t\Delta z = 22 + 7/3\, t$$

onde

$$\Delta z = \Delta c_B^t(B^{-1}b) = 7/3.$$

b) Temos $\Delta b = (0\,1\,0\,0\,0)^t$. A variação da solução primal é

$$\Delta x_B = B^{-1}\Delta b = 1/15 \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ -13 \\ -26 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(i.e. a coluna correspondendo com w_2) e nos temos a condição

$$\begin{aligned} & \hat{x}_B = x_B + t\Delta x_B \geq 0 \\ \iff & \begin{pmatrix} 9\cdot 15 \\ 35 \\ 0 \\ 46\cdot 5 \\ 11\cdot 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ -13 \\ -26 \\ -1 \end{pmatrix} \geq 0 \\ \iff & t \geq \max\{-45, -35/13\} = -35/13, \\ & t \leq \min\{0, \ldots\} = 0. \end{aligned}$$

(Nota que não é necessário calcular todos limites no segundo caso, porque já temos um limite de 0.) Para função objetivo obtemos

$$z(t) = z + t\Delta z = 22 + 8/5\,t$$

onde

$$\Delta z = c_B^t \Delta x_B = (3\,1\,0\,0\ \ -2)\,1/15 \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ -13 \\ -26 \\ -1 \end{pmatrix} = 8/5.$$

c) A restrição pode ser re-escrita de forma

$$\begin{aligned} & 2x_2 + 4x_4 \leq 10 \\ \Rightarrow & 2x_2 + 4x_4 + w_6 = 10 \\ \Rightarrow & 2x_2 + 4(7/3 + 2/15w_1 - 1/5x_2 - 13/15w_2 - x_5 - 1/3w_5) = 10 \\ \Rightarrow & w_6 = 2/3 - 8/15w_1 - 6/5x_2 + 52/15w_2 + 4x_5 + 4/3w_5 \end{aligned}$$

Podemos ver que a solução se mantém factível, então nenhuma re-otimização é necessário. (Caso contrário podemos aplicar o método Simplex dual para re-otimizar.)

Questão 4 (Método Simplex)

Observe que o sistema dado não é em forma padrão. O sistema dual é

$$\begin{aligned}
\textbf{minimiza}\quad & -4y_1 - 10y_2\\
\textbf{sujeito a}\quad & 3y_1 + 6y_2 \le 5,\\
& y_1 + 3y_2 \le 2,\\
& 2y_1 + 5y_2 \le 4,\\
& y_1, y_2, y_3 \ge 0.
\end{aligned}$$

O dicionário inicial é dualmente, mas não primalmente viável. Vamos aplicar o método Simplex dual com a regra do maior coeficiente

$$\begin{array}{rrrrr}
z = & 0 & -5x_1 & -2x_2 & -4x_3\\
\hline
x_4 = & -4 & +3x_1 & +x_2 & +2x_3\\
x_5 = & -10 & +6x_1 & +3x_2 & +5x_3
\end{array}$$

O primeiro pivô x_5–x_2 resulta em

$$\begin{array}{rrrrr}
z = & -20/3 & -x_1 & -2/3x_5 & -2/3x_3\\
\hline
x_4 = & -2/3 & +x_1 & +1/3x_5 & +1/3x_3\\
x_2 = & 10/3 & -2x_1 & +1/3x_5 & -5/3x_3
\end{array}$$

e o segundo pivô x_4–x_1 resulta em

$$\begin{array}{rrrrr}
z = & -22/3 & -x_4 & -1/3x_5 & -1/3x_3\\
\hline
x_1 = & 2/3 & +x_4 & -1/3x_5 & -1/3x_3\\
x_2 = & 2 & -2x_4 & +x_5 & -x_3
\end{array}$$

Portanto, a solução do sistema primal é $(2/3, 2, 0, 0, 0)$ com valor ótimo $-22/3$ e a solução do sistema dual é $(1, 1/3)$ (coeficientes negativas das variáveis de folga no função objetivo).

Alternativa 1 Como o sistema inicial não é viável, podemos adivinhar a solução $x_3 = 2$ e re-escrever com base x_3, x_5 (pivotando x_3–x_4) para obter

$$\begin{array}{rrrrr}
z = & -8 & +x_1 & & -2x_4\\
\hline
x_1 = & 2 & -3/2x_1 & -1/2x_2 & +1/2x_4\\
x_2 = & 0 & -3/2x_1 & +1/2x_2 & +5/2x_4
\end{array}$$

e depois o dois pivots x_1–x_5 e x_2–x_3 obter a solução ótima.

Alternativa 2 Podemos aplicar o método de duas fases, começando com o sistema auxiliar

$$\begin{array}{rrrrrr}
z = & -x_0 & & & & \\
\hline
x_4 = & -4 & +3x_1 & +x_2 & +2x_3 & +x_0 \\
x_5 = & -10 & +6x_1 & +3x_2 & +5x_3 & +x_0
\end{array}$$

que com os pivots x_0–x_5 e x_1-x_0 leva a solução ótima 0 (sistema viável) e nova base x_4, x_1. Continuando com a função objetivo original

$$\begin{array}{lllll}
z & = -50/6 & +1/2x_2 & +1/6x_3 & -5/6x_5 \\
\hline
x_4 & = 1 & -1/2x_2 & -1/2x_3 & +3/2x_5 \\
x_1 & = 10/6 & -1/2x_2 & -5/6x_3 & +1/6x_5
\end{array}$$

o pivot x_2–x_4 leva ao sistema ótimo.

Questão 5 (Dualidade)

a) Com variáveis duais $y_1, \ldots, y_4$ para as quatro restrições obtemos o dual

$$\begin{array}{rl}
\textbf{maximiza} & 11y_1 + 5y_2 + 35y_4 \\
\textbf{sujeito a} & y_1 + y_2 - y_3 + 7y_4 \le 4, \\
& y_1 - y_2 - y_3 + 12y_4 \le 5, \\
& y_3 \le 6, \\
& y_1 \ge 0, y_2 \le 0, y_3 \lesseqgtr 0, y_4 \ge 0.
\end{array}$$

b) Para formar o dual temos que relaxar o sistema, introduzindo restrições adicionais $x_i \le 1$ e restrições triviais $x_i \ge 0$ para todo $i \in I$. Seja z a variável dual da primeira restrição, e y_i para $i \in I$ as variáveis duais das restrições $x_i \le 1$. Com isso o dual é

$$\begin{array}{rll}
\textbf{minimiza} & cz + \sum_{i \in I} y_i & \\
\textbf{sujeito a} & w_i z + y_i \ge p_i, & \forall i \in I, \\
& y_i \ge 0, z \lesseqgtr 0. &
\end{array}$$

c) Seja y_i para $v \in V$ as variáveis duais das restrições de conservação de fluxo, e z_a para $a \in A$ as variáveis duais das limitantes superiores.

$$
\begin{aligned}
\textbf{minimiza} \quad & \sum_{a\in A} u_a z_a \\
\textbf{sujeito a} \quad & -y_u + y_v + z_a \geq 0, && \forall a=(u,v)\in A, \\
& y_s - y_t \geq 1, \\
& y_i \lesseqgtr 0, && \forall v \in V, \\
& z_a \geq 0, && \forall a \in A.
\end{aligned}
$$