Exercícios: Programação Linear

Questão 1 (Programas lineares)

Prove ou mostre um contra-exemplo.
O problema $\max\{c^t x \mid Ax \leq b\}$ possui uma solução viável sse $\min\{x_0 \mid Ax - ex_0 \leq b\}$ possui uma solução viável com $x_0 = 0$. Observação: e é um vetor com todos compentes igual 1 da mesma dimensão que b.

Questão 2 (Produtos caninos)

A companhia de produtos caninos oferece duas comidas para cachorro: Frisky Pup e Husky Hound, que são feitas de uma mistura de cereais e carne. Um pacote de Frisky Pup requer 1 quilo de cereal e 1.5 quilo de carne, e é vendido por $7. Um pacote de Husky Hound usa 2 quilos de cereal e 1 quilo de carne, e é vendido por $6. O cereal bruto custa $1 por quilo e a carne bruta, $2 por quilo. Há também o custo de $1.40 para empacotar o Frisky Pup e $0.60 para o Husky Hound. Um total de 240000 quilos de cereal e 180000 quilos de carne estão disponíveis a cada mês. O único gargalo de produção está no fato de a fábrica poder empacotar apenas 110000 pacotes de Frisky Pup por mês. Desnecessário dizer, a gerência gostaria de maximizar o lucro.
Formule o problema como um programa linear em duas variáveis.

Questão 3 (Soluções)

Dado

$$\begin{aligned}
\textbf{maximiza} \quad & 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 \\
\textbf{sujeito a} \quad & 3x_1 - x_2 + 7x_3 \leq 10, \\
& 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 15, \\
& 4x_1 + 6x_2 + 10x_3 = 11, \\
& x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{B},
\end{aligned}$$

decide se há uma solução viável sem resolver o problema. Justifique.

Questão 4 (Formulação Matemática)

Um produtor de fertilizante usa três recursos naturais para produzir dois tipos de fertilizante: um tipo possui uma alta percentagem de fosfato (A) outro baixa (B). A seguinte tabela mostra os recursos naturais necessárias para produzir uma unidade de A ou B, os toneladas disponíveis de cada recurso natural por mês e o lucro na venda de cada unidade de A e B. Formula um programa linear que maximiza o lucro.

Recurso natural	Recurso por unidade fertilizante [t] A	B	Recurso disponível por mês [t]
R1	2	1	1500
R2	1	1	1200
R3	1	0	500
Lucro por unidade [R$]	15	10	

Questão 5 (Método Simplex)

Prove ou mostre um contra-exemplo.
Se x é a variável sainte em um pivô, x não pode ser variável entrante no pivô seguinte.

Questão 6 (Mineração)

Uma empresa mineradora possui duas jazidas que produzem minérios de três classes: superior, médio e inferior. Durante um dia de operação, a primeira jazida produz 6 toneladas de minério de classe superior, 2 de classe média e 4 de classe inferior. Enquanto a segunda jazida produz diariamente 2 toneladas de minério de classe superior, 2 de classe média e 12 de classe inferior. O custo de diário de operação das jazidas é de UM 900,00 para a primeira e UM 720,00 para a segunda. A empresa de mineração possui uma fábrica de beneficiamento com capacidade para 12 toneladas da classe superior, 8 da média e 24 da inferior por semana. Quantos dias por semana deve operar cada jazida para preencher, da maneira mais econômica, a capacidade total da fábrica de beneficiamento? (As jazidas podem operar parte de um dia).

Questão 7 (Resolução gráfica)

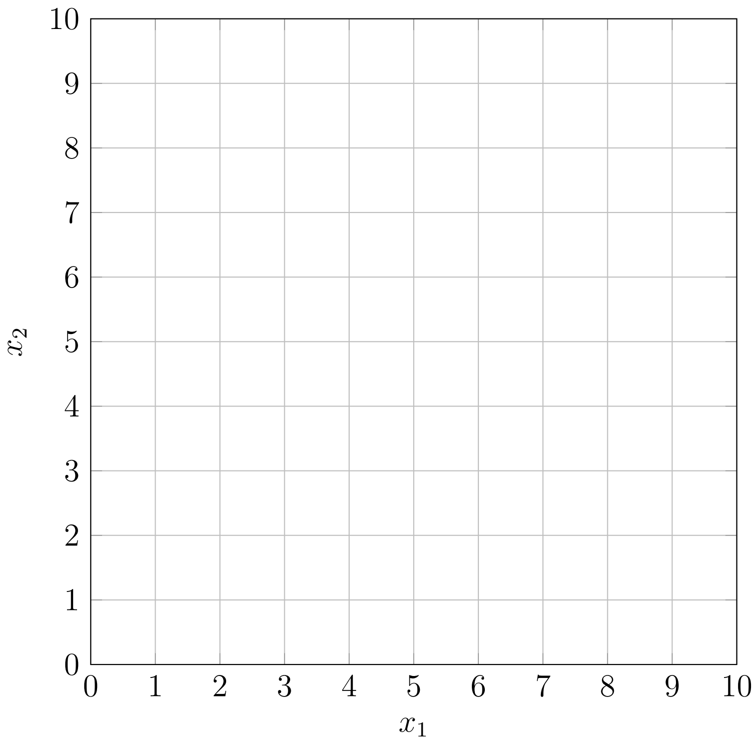
Resolver graficamente.

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza}\quad & 10x_1 + 20x_2 \\
\textbf{sujeito a}\quad & -x_1 + 2x_2 \le 15, \\
& x_1 + x_2 \le 12, \\
& 5x_1 + 3x_2 \le 45, \\
& x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Questão 8 (Solução de sistemas lineares)

Resolve gráficamente.

$$
\begin{aligned}
\textbf{maximiza}\quad & x_1 + x_2 \\
\textbf{sujeito a}\quad & x_1 + 2x_2 \le 12, \\
& x_1 \le 6, \\
& x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$



(a) Identifique todas restrições e ao menos um conjunto de nível no gráfico.

(b) A região das soluções viáveis é limitada ou ilimitada? Quantas soluções possui o sistema? Quantas soluções básicas possui o sistema? Quantas soluções ótimas?

(c) Caso existe uma solução ótima, qual é e qual é o seu valor?

Questão 9 (Método Simplex)

Resolve

$$\begin{aligned} \textbf{minimiza} \quad & x_1 + x_2 \\ \textbf{sujeito a} \quad & -x_1 + x_2 \leq 3/2, \\ & x_1 + x_2 \geq 3/2, \\ & -1/2x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ & x_1, x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

usando o método Simplex com a regra de Dantzig. (Não execute mais que 3 pivôs no total.)

a) Qual o sistema em forma normal?

b) Precisa-se aplicar a fase I? Por quê? Caso sim, qual a solução ótima do sistema auxiliar e seu valor? Caso não, o que podemos concluir?

c) Precisa-se aplicar a fase II? Por quê? Caso sim, qual a solução ótima do sistema original e seu valor? Caso não, o que podemos concluir?

Questão 10 (Método Simplex)

Considere o programa linear

$$\begin{aligned}\textbf{maximiza} \quad & -5x_1 - 3x_2\\ \textbf{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 \geq 15,\\ & x_1 + 12x_2 \leq 60,\\ & x_1, x_2 \geq 0.\end{aligned}$$

(a) Qual o sistema dual correspondente?

(b) Resolva o sistema usando o método Simplex (escolhe uma variante adequada e documenta a escolha).

(c) Qual a solução ótima do sistema primal? Qual o valor correspondente da função objetivo?

(d) Qual a solução ótima do sistema dual? Qual o valor correspondente da função objetivo?

Questão 11 (Solução de sistemas lineares)

Resolve usando o método Simplex.

$$\begin{aligned}\textbf{minimiza} \quad & 3x_1 + 2x_2\\ \textbf{sujeito a} \quad & 2x_1 + x_2 \geq 10,\\ & -3x_1 + 2x_2 \leq 6,\\ & x_1 + x_2 \geq 6,\\ & x_1, x_2 \geq 0.\end{aligned}$$

a) Qual o sistema em forma normal?

b) Precisa-se aplicar a fase I? Por quê? Caso sim, qual a solução ótima do sistema auxiliar e seu valor? Caso não, o que podemos concluir?

c) Precisa-se aplicar a fase II? Por quê? Caso sim, qual a solução ótima do sistema original e seu valor? Caso não, o que podemos concluir?

Questão 12 (Solução de sistemas lineares)

Resolve usando o método Simplex *usando a regra de Dantzig.*

$$\begin{aligned}
\textbf{maximiza}\quad & 2x_1 + 13x_2 - 3x_3 \\
\textbf{sujeito a}\quad & 2x_1 + x_2 \leq 20, \\
& -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10, \\
& -3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2, \\
& 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -8, \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

(a) Qual o sistema em forma normal?

(b) Precisa-se aplicar a fase I? Por quê? Caso sim, qual a solução ótima do sistema auxiliar e seu valor? Caso não, o que podemos concluir?

(c) Precisa-se aplicar a fase II? Por quê? Caso sim, qual a solução ótima do sistema original e seu valor? Caso não, o que podemos concluir?

Questão 13 (Método Simplex)

Resolve usando o método Simplex *usando o método lexicográfico.* Usa perturbação ϵ_i na restrição i e supõe que $0 \ll \epsilon_1 \ll \epsilon_2 \ll \cdots \ll$ constantes.

$$\begin{aligned}
\textbf{maximiza}\quad & 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\
\textbf{sujeito a}\quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 0, \\
& 3x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 0, \\
& x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}_+.
\end{aligned}$$

a) Explique brevemente o método lexicográfico.

b) Qual o sistema em forma normal?

c) Precisa-se aplicar a fase I? Por quê? Caso sim, qual a solução ótima do sistema auxiliar e seu valor? Caso não, o que podemos concluir?

d) Precisa-se aplicar a fase II? Por quê? Caso sim, qual a solução ótima do sistema original e seu valor? Caso não, o que podemos concluir?

Questão 14 (Método Simplex)

Considere o sistema

$$\begin{aligned}
\textbf{maximiza}\quad & -x_1 + x_2\\
\textbf{sujeito a}\quad & x_1 + x_2 \geq 2,\\
& 3x_1 + x_2 \leq -2,\\
& -2x_1 + x_2 \leq 0,\\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Resolva o sistema acima usando o algoritmo simplex. Explique brevemente suas conclusões. Caso houver solução ótima, indique claramente o valor da função objetivo e das variáveis da solução ótima.
(Observe que nenhuma regra de pivotamento é especificada. Você pode escolher qualquer uma. Não faça mais de 3 pivôs.)

Questão 15 (Método Simplex)

Para o dicionário abaixo

a) informa todos pivôs válidos possíveis,

b) indique qual deles seria escolhido pela regra de Dantzig,

c) qual deles seria escolhido pela regra de Bland, e

d) qual deles seria escolhido pela combinação da regra de Dantzig com o método lexicográfico.

Nos items a), b) e c) ignora os valores ϵ. Para regra de Bland, supõe que as variáveis são ordenadas pelo índice $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, para o método lexicográfico supõe que $0 \ll \epsilon_1 \ll \epsilon_2 \ll \cdots \ll$ constantes.

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
z = & 10 & & & & +x_1 & +2x_4 & +3x_6\\
\hline
x_2 = & 3 & +2\epsilon_1 & +7\epsilon_2 & +3\epsilon_3 & -15x_1 & -4x_4 & -x_6\\
x_5 = & 1 & +4\epsilon_1 & +\epsilon_2 & +2\epsilon_3 & -5x_1 & -9x_4 & -1/3x_6\\
x_3 = & 6 & +5\epsilon_1 & +8\epsilon_2 & +2\epsilon_3 & -30x_1 & -3x_4 & -x_6
\end{array}$$

Questão 16 (Sistema linear parameterizado)

Considere o programa linear

$$\begin{aligned}
\textbf{maximiza}\quad & x_1 + x_2\\
\textbf{sujeito a}\quad & tx_1 + x_2 \leq 1,\\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

com parametro $t \in \mathbb{R}$. Determine para qual valores de t o sistema

a) possui exatamente uma solução ótima,

b) possui um número infinito de soluções ótimas,

c) é ilimitado, ou

d) não possui solução.

Justifique a resposta.