IFT-3655 : Modèles Stochastiques
Mathias La Rochelle

DEVOIR 5

1. *(10 points)* Pour chacun des deux exemples de chaînes à 3 états à la page 65 de mes diapos, écrivez la matrice $\boldsymbol{P}$, puis calculer $\boldsymbol{\pi}$ et la matrice $\boldsymbol{Q}$. On veut des valeurs numériques.

En supposant que l'on part de 0, calculez la probabilité du chemin $0 \to 1 \to 2 \to 1 \to 0$ à l'endroit et à l'envers (à reculons) dans chacun des deux cas. Vérifiez que ces probabilités sont en accord avec le théorème de la page 73 des diapos.

Pour la **première chaîne**, la matrice de transition $\boldsymbol{P}_1$ est

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.50 & 0.50 & 0 \\ 0.75 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.33\overline{3} & 0.66\overline{6} \end{pmatrix} \tag{1}$$

et les équations d'équilibre avec $\boldsymbol{\pi P} = \boldsymbol{\pi}$ sont

$$\pi_0 = \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{3}{4}\pi_1 \tag{2}$$
$$\pi_1 = \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{3}\pi_2 \tag{3}$$
$$\pi_2 = \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_2 \tag{4}$$

d'où on a

$$\pi_0 = \frac{3}{2}\pi_1, \;\; \pi_2 = \frac{3}{4}\pi_1$$

et avec $\boldsymbol{\pi}\mathbf{1}^t = 1$, on a

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$$
$$\frac{3}{2}\pi_1 + \pi_1 + \frac{3}{4}\pi_1 = 1$$
$$\pi_1 = \frac{4}{13} \approx 0.3077 \tag{5}$$

puis,

$$\pi_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{13} = \frac{6}{13} \approx 0.4615 \tag{6}$$
$$\pi_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{13} = \frac{3}{13} \approx 0.2308 \tag{7}$$

Notre vecteur stationnaire pour la chaîne 1 est $\boldsymbol{\pi}_1 = (0.4615 \; 0.3077 \; 0.2308)$.

Pour calculer la matrice de transition $\boldsymbol{Q}_1$ de la chaîne à reculons, nous utilisons la condition $Q_{i,j} = (P_{j,i} \cdot \pi_j)/\pi_i$.

- $Q_{0,0} = \dfrac{1/2 \cdot 6/13}{6/13} = 0.50$
- $Q_{0,1} = \dfrac{3/4 \cdot 4/13}{6/13} = 0.50$
- $Q_{0,2} = \dfrac{0 \cdot 3/13}{6/13} = 0$
- $Q_{1,0} = \dfrac{1/2 \cdot 6/13}{4/13} = 0.75$
- $Q_{1,1} = \dfrac{0 \cdot 4/13}{4/13} = 0$
- $Q_{1,2} = \dfrac{1/3 \cdot 3/13}{4/13} = 0.25$
- $Q_{2,0} = \dfrac{0 \cdot 6/13}{3/13} = 0$
- $Q_{2,1} = \dfrac{1/4 \cdot 4/13}{3/13} = 0.33\overline{3}$
- $Q_{2,2} = \dfrac{2/3 \cdot 3/13}{3/13} = 0.66\overline{6}$

La matrice de transition inverse $\boldsymbol{Q}_1$ est

$$\boldsymbol{Q}_1 = \begin{pmatrix} 0.50 & 0.50 & 0 \\ 0.75 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.33\overline{3} & 0.66\overline{6} \end{pmatrix} \tag{8}$$

Pour la **deuxième chaîne**, la matrice de transition $\boldsymbol{P}_2$ est

$$\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 & 4/5 \\ 4/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 4/5 & 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

et les équations d'équilibre avec $\boldsymbol{\pi P} = \boldsymbol{\pi}$ sont

$$\pi_0 = \frac{4}{5}\pi_1 \tag{10}$$
$$\pi_1 = \frac{1}{5}\pi_0 + \frac{1}{5}\pi_1 + \frac{4}{5}\pi_2 \tag{11}$$
$$\pi_2 = \frac{4}{5}\pi_0 + \frac{1}{5}\pi_2 \tag{12}$$

d'où on a

$$\pi_2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5}\pi_1 + \frac{1}{5}\pi_2 \rightarrow \pi_2 = \frac{4}{5}\pi_1$$

et avec $\boldsymbol{\pi 1}^t = 1$, on a

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$$
$$\frac{4}{5}\pi_1 + \pi_1 + \frac{4}{5}\pi_1 = 1$$
$$\pi_1 = \frac{5}{13} \approx 0.3846 \tag{13}$$

puis,

$$\pi_0 = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{4}{13} \approx 0.3077 \tag{14}$$
$$\pi_2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{4}{13} \approx 0.3077 \tag{15}$$

Notre vecteur stationnaire pour la chaîne 2 est $\boldsymbol{\pi}_2 = (0.3077\ 0.3846\ 0.3077)$.

Pour calculer la matrice de transition $\boldsymbol{Q}_2$ de la chaîne à reculons, nous utilisons la même condition qu'avec la chaîne 1.

- $Q_{0,0} = \dfrac{0 \cdot 4/13}{4/13} = 0$
- $Q_{0,1} = \dfrac{4/5 \cdot 5/13}{4/13} = 1$
- $Q_{0,2} = \dfrac{0 \cdot 4/13}{4/13} = 0$
- $Q_{1,0} = \dfrac{1/5 \cdot 4/13}{5/13} = 0.16$

- $Q_{1,1} = \dfrac{1/5 \cdot 5/13}{5/13} = 0.20$

- $Q_{1,2} = \dfrac{4/5 \cdot 4/13}{5/13} = 0.64$

- $Q_{2,0} = \dfrac{4/5 \cdot 4/13}{4/13} = 0.80$

- $Q_{2,1} = \dfrac{0 \cdot 5/13}{4/13} = 0$

- $Q_{2,2} = \dfrac{1/5 \cdot 4/13}{4/13} = 0.20$

La matrice de transition inverse $\boldsymbol{Q}_2$ est

$$\boldsymbol{Q}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.16 & 0.20 & 0.64 \\ 0.80 & 0 & 0.20 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Pour calculer la probabilité du chemin $0 \to 1 \to 2 \to 1 \to 0$, nous utilisons P à l'endroit et Q à reculons.

Pour la **première chaîne**, on a à l'endroit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 1, X_4 = 0 \mid X_0 = 0] &= \mathbb{P}[X_1 = 1 \mid X_0 = 0] \cdot \mathbb{P}[X_2 = 2 \mid X_1 = 1] \cdot \mathbb{P}[X_3 = 1 \mid X_2 = 2] \cdot \mathbb{P}[X_4 = 0 \mid X_3 = 1] \\ &= P_{1_{0,1}} \cdot P_{1_{1,2}} \cdot P_{1_{2,1}} \cdot P_{1_{1,0}} \\ &= 0.5 \cdot 0.25 \cdot 0.33\overline{3} \cdot 0.75 \\ &= 0.03125 \end{aligned}$$

et à reculons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 1, X_4 = 0 \mid X_0 = 0] &= Q_{1_{0,1}} \cdot Q_{1_{1,2}} \cdot Q_{1_{2,1}} \cdot Q_{1_{1,0}} \\ &= 0.5 \cdot 0.25 \cdot 0.33\overline{3} \cdot 0.75 \\ &= 0.03125 \end{aligned}$$

Pour la **deuxième chaîne**, on a à l'endroit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 1, X_4 = 0 \mid X_0 = 0] &= \mathbb{P}[X_1 = 1 \mid X_0 = 0] \cdot \mathbb{P}[X_2 = 2 \mid X_1 = 1] \cdot \mathbb{P}[X_3 = 1 \mid X_2 = 2] \cdot \mathbb{P}[X_4 = 0 \mid X_3 = 1] \\ &= P_{2_{0,1}} \cdot P_{2_{1,2}} \cdot P_{2_{2,1}} \cdot P_{2_{1,0}} \\ &= 0.20 \cdot 0 \cdot 0.8 \cdot 0.8 \\ &= 0\end{aligned}$$

et à reculons

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 1, X_4 = 0 \mid X_0 = 0] &= Q_{2_{0,1}} \cdot Q_{2_{1,2}} \cdot Q_{2_{2,1}} \cdot Q_{2_{1,0}} \\ &= 1 \cdot 0.64 \cdot 0 \cdot 0.16 \\ &= 0\end{aligned}$$

Pour la première chaîne, on remarque que la probabilité à l'endroit est égale la probabilité à l'envers. Donc la chaîne est réversible. Pour la deuxième, il ne faut pas se référer aux probabilités calculées car une valeur nulle n'est pas représentatif de ce qui se passe. Sachant que nous avons certaines transitions qui ont valeurs de 0, regardons si leur transition inverse est de 0 également, i.e. $P_{i,j} = 0$ et $P_{j,i} = 0$. On a $P_{2_{2,0}} = 0$ mais $P_{2_{0,2}} = 0.8$ alors la chaîne n'est pas réversible.

Petit supplément pour la première chaîne : la diagonale de 0 supporte bien le fait que la chaîne est réversible. C'est trivial.

2. *(8 points)* Écrivez une preuve pour le théorème de la page 69 des diapos. (Ma solution fait 5 lignes.)

Supposons que $\boldsymbol{\pi}$ soit un vecteur de probabilités stationnaires tel que $\sum_i \pi_i = 1$ et que pour toute paire d'états (i, j), on ait l'égalité

$$\pi_i P_{i,j} = \pi_j Q_{j,i} \tag{17}$$

Par définition de la stationnarité, on a

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{i,j} \tag{18}$$

et de même avec la chaîne inverse, on a

$$\pi_i = \sum_j \pi_j Q_{j,i} \tag{19}$$

En utilisant (18) (marche aussi avec (19)) et notre hypothèse posée plutôt, on retrouve

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{i,j} = \sum_i \pi_j Q_{j,i} = \pi_j \sum_i Q_{j,i}$$

et sachant que la somme des probabilités de transitions dans une matrice stochastique est de 1, i.e. $\sum_i Q_{j,i} = 1$, on a

$$\pi_j = \pi_j \sum_i Q_{j,i} = \pi_j$$

Ceci démontre que les probabilités du vecteur stationnaire restent inchangées pour la chaîne inverse.

3. *(18 points)* On place n processeurs dans une liste ordonnée. Lorsqu'une tâche arrive, le premier processeur dans la liste essaie de l'accomplir. S'il ne réussit pas, le second processeur essaie. S'il ne réussit pas, le processeur suivant essaie, et ainsi de suite. Dès qu'un processeur réussit, ou encore comme suit : si un processeur autre que le premier dans la liste réussit la tâche, on échange ce processeur avec celui qui le précède dans la liste. Ensuite une nouvelle tâche arrive et on si aucun processeur ne réussit, la tâche quitte le système, puis on réordonne les processeurs recommence. Supposons que les processeurs sont numérotés de 1 à n et que le processeur j réussit avec probabilité p_j chaque fois qu'il essaie une tâche.

(a) Définissez une chaîne de Markov qui représente l'évolution de ce modèle. Il faut définir l'espace d'états, dire quelles sont les transitions possibles, et trouver leurs probabilités en fonction des p_j. Pour chaque transition possible, donnez aussi la probabilité de la transition inverse.

Chaque état de notre système est caractérisé par un vecteur $\boldsymbol{\sigma}_k$ qui est la k-ième configuration, i.e. $\boldsymbol{\sigma}_k = (\sigma_{k,1}, \sigma_{k,2}, ..., \sigma_{k,n})$ où $\sigma_{k,i}$ est le i-ième processeur dans la configuration k. Par exemple, la configuration initiale serait dénotée comme $\boldsymbol{\sigma}_0 = (\sigma_{0,1}, ..., \sigma_{0,n})$. Le nombre de configurations possibles est le nombre de permutations des n processeurs soit $n!$.

Dans ce système, une transition a lieu lorsqu'un processeur réussit. Alors disons nous avons le processeur $\sigma_{k,i}$ dans la position i de la configuration k. S'il réussit, alors il prendra la position du processeur $\sigma_{k,i-1}$ et donc cela signifie qu'on changera de configuration (état). Une deuxième type de transition est possible. Si aucun processeur de la configuration k réussit ou que le premier processeur de la configuration qui reçoit la tâche réussit, alors aucune permutation entre un processeur et un autre se fera et donc on restera dans l'état courrant.

Décrivons désormais les probabilités de la matrice de transition $\boldsymbol{P}$. Il faut comprendre que la réussite d'un processeur à la position i dépend de l'échec des processeurs qui le précèdent. Donc disons pour quelconque configuration k, le processeur 1 a $p_{\sigma_{k,1}}$ de réussir puis, $p_{\sigma_{k,2}}$ demande que le processeur 1 échoue avec probabilité $1 - p_{\sigma_{k,1}}$ puis, $p_{\sigma_{k,3}}$ demande que le processeur 1 et 2 échoue avec $1 - p_{\sigma_{k,1}}$ et $1 - p_{\sigma_{k,2}}$ et ainsi de suite.

Donc, la probabilité de changer de configuration est

$$P_{\boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\sigma}_j} = p_{\sigma_{i,t}} \cdot \prod_{m=1}^{t-1} (1 - p_{\sigma_{i,m}})$$

Quant à elle, la probabilité de rester dans la même configuration est

$$P_{\boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\sigma}_i} = p_{\sigma_{i,1}} + \prod_{m=1}^{n} (1 - p_{\sigma_{i,m}})$$

où $\boldsymbol{\sigma}_i = (\sigma_{i,1}, ..., \sigma_{i,t-1}, \sigma_{i,t}, ..., \sigma_{i,n})$ et $\boldsymbol{\sigma}_j = (\sigma_{j,1}, ..., \sigma_{j,t}, \sigma_{j,t-1}, ..., \sigma_{j,n})$.

Pour la probabilité de la transition inverse d'un état à un autre, il faut que celui qui a été promu, à l'étape d'avant, échoue à l'étape qui suit et que celui qui avait échoué avant réussit maintenant. En d'autres mots :

$$P_{\boldsymbol{\sigma}_j, \boldsymbol{\sigma}_i} = (1 - p_{\sigma_{j,t}}) \cdot p_{\sigma_{j,t-1}} \cdot \prod_{m=1}^{t-2} (1 - p_{\sigma_{j,m}})$$

(b) Montrez que cette chaîne de Markov est réversible et trouvez une formule pour les probabilités d'équilibre. Suggestion : Trouvez un vecteur $\boldsymbol{\pi}$ qui est réversible pour la chaîne.

Quand on bouge un processeur $\sigma_{i,k}$ vers la gauche, on lui donne une position plus favorable dans la file d'attente des processeurs donc qu'il aura plus de chances d'être choisies lors du traitement de la prochaine tâche. Cette tendance est quantifiée par $q_{\sigma_{i,t}}/p_{\sigma_{i,t}}$. Inversement, quand on le bouge vers la droite, on lui donne une position qui lui sera moins favorable et donc $p_{\sigma_{j,t-1}}/q_{\sigma_{j,t-1}}$.

Si la chaîne est réversible, alors elle satisfait l'équation

$$\begin{aligned}
\pi_{\boldsymbol{\sigma}_i} P_{\boldsymbol{\sigma}_i,\boldsymbol{\sigma}_j} &= \pi_{\boldsymbol{\sigma}_j} P_{\boldsymbol{\sigma}_j,\boldsymbol{\sigma}_i} && (20)\\
\pi_{\boldsymbol{\sigma}_i} &= \pi_{\boldsymbol{\sigma}_j} \frac{P_{\boldsymbol{\sigma}_j,\boldsymbol{\sigma}_i}}{P_{\boldsymbol{\sigma}_i,\boldsymbol{\sigma}_j}}\\
\pi_{\boldsymbol{\sigma}_i} &= \pi_{\boldsymbol{\sigma}_j} \frac{(1-p_{\sigma_{j,t}}) \cdot p_{\sigma_{j,t-1}} \cdot \prod_{m=1}^{t-2}(1-p_{\sigma_{j,m}})}{p_{\sigma_{i,t}} \cdot \prod_{m=1}^{t-1}\left(1-p_{\sigma_{i,m}}\right)}\\
\pi_{\boldsymbol{\sigma}_i} &= \pi_{\boldsymbol{\sigma}_j} \frac{(1-p_{\sigma_{j,t}}) \cdot p_{\sigma_{j,t-1}} \cdot \prod_{m=1}^{t-2}(1-p_{\sigma_{j,m}})}{p_{\sigma_{i,t}} \cdot (1-p_{\sigma_{i,t-1}}) \cdot \prod_{m=1}^{t-2}\left(1-p_{\sigma_{i,m}}\right)}\\
\pi_{\boldsymbol{\sigma}_i} &= \pi_{\boldsymbol{\sigma}_j} \frac{q_{\sigma_{j,t}} \cdot p_{\sigma_{j,t-1}}}{p_{\sigma_{j,t}} \cdot q_{\sigma_{j,t-1}}} && (21)
\end{aligned}$$

Petit exemple avec $n = 3$. Disons que nous sommes dans la configuration $\boldsymbol{\sigma}_i = (\sigma_{i,2}, \sigma_{i,3}, \sigma_{i,1})$ et que nous voulons nous rendre à $\boldsymbol{\sigma}_0$. Il va donc falloir que le premier processeur bouge deux fois vers la gauche et que les processeurs 2 et 3 bougent une fois vers la droite, i.e. $(\sigma_{i,2}, \sigma_{i,3}, \sigma_{i,1}) \to (\sigma_{j,2}, \sigma_{j,3}, \sigma_{j,1}) \to (\sigma_{k,2}, \sigma_{k,3}, \sigma_{k,1})$. Donc on va avoir la multiplication $(q_{\sigma_{i,1}}/p_{\sigma_{i,1}})^2 \cdot p_{\sigma_{j,2}}/q_{\sigma_{j,2}} \cdot p_{\sigma_{k,3}}/q_{\sigma_{k,3}}$ et on termine avec $\boldsymbol{\sigma}_0 = (\sigma_{0,1}, \sigma_{0,2}, \sigma_{0,3})$. Notre processeur $\sigma_{i,1}$ est parti de la position 3 et devait se rendre à la position 1 donc il a du faire $|1 - \sigma_{i,1}|$ déplacement vers la droite.

Ceci peut être généraliser tel qu'un processeur $\sigma_{i,t}$ doit bouger $|t - \sigma_{i,t}|$ fois avant d'arriver à la position t. La distribution stationnaire est satisfaite par

$$\pi_{\boldsymbol{\sigma}_i} = \prod_{t=1}^{n} \left(\frac{q_{\sigma_{i,t}}}{p_{\sigma_{i,t}}}\right)^{t-\sigma_{i,t}} \qquad (22)$$

et donc notre chaîne est réversible.

(c) Quelle est la permutation qui aura la plus grande probabilité à l'état d'équilibre ? Prouvez-le en utilisant la formule trouvée en (b).

Au final, la permutation qui aura la plus grande probabilité à l'état d'équilibre sera la configuration des processeurs classés en ordre décroissant (donc $\sigma_{i,1}$ à la plus grande probabilité) des n processeurs dans le vecteur des probabilités $\mathcal{P}$. On peut représenter cet état stationnaire comme

$$\pi_{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\sigma_{\max(\mathcal{P})}, \sigma_{\max(\mathcal{P}\setminus\sigma_{\max(\mathcal{P})})}, \ldots, \sigma_{\min(\mathcal{P})}\right)$$

À noter qu'on laisse tomber le numéro de la configuration en indice puisqu'on parle d'une configuration spécifique. Donc σ_t dans $\pi_{\boldsymbol{\sigma}}$ est le t-ième meilleur processeur.

Comme discuter plus tôt, quand le rapport $q_{\sigma_t}/p_{\sigma_t}$ devient plus petit, i.e. $q_{\sigma_t}/p_{\sigma_t} \ll 1$, c'est qu'il devient plus difficile d'avancer dans la file. Cela signifie que le processeur à la position t est plus avancé que celui à la position m pour $m > t$.

4. *(14 points)* Soit $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ une graphe connexe non orienté ayant un nombre fini de sommets. un k-coloriage du graphe est un vecteur qui donne une couleur à chaque sommet du graphe, en utilisant au plus k couleurs. Pour un graphe de d sommets, il y a k^d possibilités. Un k-coloriage est dit *admissible* s'il n'y a pas deux sommets adjacents qui ont la même couleur. Pour un graphe quelconque, trouver le plus petit k pour lequel il existe un k-coloriage admissible, ou calculer le nombre de k-coloriages admissibles, ou encore générer au hasard un k-coloriage selon la loi uniforme sur l'ensemble $\mathcal{C}$ de tous les coloriages admissibles, sont des problèmes connus comme très difficiles.

Pour générer des k-coloriages approximativement selon la loi uniforme sur $\mathcal{C}$, pour un k fixé, on peut penser à utiliser MCMC. L'idée est de construire une chaîne de Markov dont l'état est un élément de $\mathcal{C}$ et les probabilités d'états stationnaires correspondent à la loi uniforme sur l'ensemble $\mathcal{C}$. On a vu en classe (diapo 89) comment faire cela via l'échantillonage de Gibbs, en ré-échantillonnant la couleur d'un seul sommet à chaque étape.

(a) Si k est trop petit, il se peut qu'il n'existe pas de k-coloriage admissible, ou bien encore qu'il en existe, mais que la chaîne construite via Gibbs ne soit pas irréductible sur $\mathcal{C}$, de sorte qu'on ne puisse pas atteindre tous les k-coloriages admissibles à partir d'un k-coloriage initial. Pour voir cela, considérez un graphe en triangle (3 sommets et 3 arêtes). Expliquez ce qui se passe avec l'échantillonage de Gibbs si $k = 2$, puis si $k = 3$, puis si $k = 4$.

Si Δ est le degré maximum d'un sommet du graphe, on peut prouver que si $k \geq \Delta + 2$, alors la chaîne construite par Gibbs est irréductible sur $\mathcal{C}$, et donc la loi stationnaire est uniforme sur $\mathcal{C}$. Par contre l'inverse n'est peut-être pas toujours vrai.

Posons les bases de la méthode d'échantillonage de Gibbs. Nous savons qu'une chaîne construite à partir de cette méthode est irréductible si et seulement si tous les états admissibles de celle-ci peuvent atteindre n'importe quel état sur $\mathcal{C}$, i.e. l'ensemble qui contient toutes les configurations admissibles.

Processus général :

1. On choisit une configuration initiale aléatoirement. Dans notre cas, disons tous les sommets de $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$, où $|\mathcal{V}(\mathcal{G}|$ est le nombre de sommets, sont blancs.

2. Pour chaque sommet $v \in \mathcal{V}$ de la configuration, on efface sa couleur et on la remplace en ré-échantillonnant cette couleur conditionnellement aux couleurs des sommets adjacents dans le graphe.

Les trois différents cas :

Cas 1

Dans le cas où $k = 2$, la chaîne de Markov construite par échantillonnage de Gibbs ne sera pas irréductible sur l'ensemble des 2-coloriages admissibles du triangle. Il n'existe aucun 2-coloriage admissible pour un triangle. Quel que soit le choix de couleurs pour deux sommets adjacents, le troisième sommet sera toujours adjacent à deux sommets de couleurs différentes. Si nous commençons avec une configuration initiale (par exemple, tous les sommets blancs), et que nous essayons d'appliquer l'échantillonnage de Gibbs, on a :

1. Le premier sommet choisi pourra changer de couleur (par exemple, devenir noir).

2. Le deuxième sommet choisi devra rester blanc pour maintenir l'admissibilité.

3. Le troisième sommet sera bloqué, car quelle que soit sa couleur, il sera adjacent à un sommet de la même couleur.

En conséquence, pour $k = 2$, la chaîne n'est pas irréductible et ne peut pas explorer l'espace des coloriages admissibles, car cet espace est vide pour un triangle avec seulement deux couleurs disponibles.

Cas 2

Dans le cas où $k = 3$, la chaîne de Markov construite par échantillonnage de Gibbs sera irréductible sur l'ensemble des 3-coloriages admissibles du triangle.

- Il existe des 3-coloriages admissibles du triangle (en attribuant une couleur différente à chaque sommet).
- À partir de n'importe quel 3-coloriage admissible, on peut atteindre tous les autres en ré-échantillonnant successivement la couleur de chaque sommet.
- À chaque étape, le sommet considéré aura toujours au moins une couleur disponible différente de ses deux voisins.
- Ainsi, on peut passer d'un 3-coloriage admissible à n'importe quel autre en un nombre fini d'étapes.

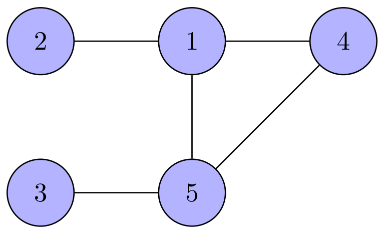
Cas 3

Dans le cas où $k = 4$, la chaîne sera également irréductible sur l'ensemble des 4-coloriages admissibles, pour les mêmes raisons que dans le cas $k = 3$.

- Il y aura plus de flexibilité dans le choix des couleurs à chaque étape, puisqu'on dispose d'une couleur supplémentaire.
- Tous les 3-coloriages admissibles sont également des 4-coloriages admissibles.
- On pourra donc atteindre encore plus de configurations différentes.

Dans les deux cas ($k = 3$ et $k = 4$), la chaîne est irréductible et permet d'explorer efficacement l'espace des coloriages admissibles, contrairement au cas $k = 2$ où la chaîne était bloquée.

(b) Considérons le petit graphe ci-bas, repris de mes diapos. Pour $k = 3$, combien y a-t-il d'éléments dans $\mathcal{C}$ pour ce graphe ? Est-ce que Gibbs donne une chaîne irréductible sur $\mathcal{C}$? Mêmes questions pour $k = 4$ et pour $k = 5$.



Pour trouver le nombre d'éléments dans $\mathcal{C}$, soit le nombre de configurations admissibles, on utilise un algorithme glouton qui cherche parmi toutes les configurations possibles, soit $k^{|\mathcal{V}(\mathcal{G})|}$, les configurations qui respectent la règle qu'un sommet ne peut avoir la même couleur que ses voisins.

```python
from itertools import product

G = {1: [2], 2: [3, 4], 3: [4], 4: [5], 5: []} # on pourrait faire G = {1: [2], 2: [1, 3, 4], 3: [2, 4], 4: [2, 3, 5], 5: [4]}
                                               # mais ça prendrait plus de temps parce qu'on visiterait un sommet adjacent déjà visité
                                               # dans depth_first_search()

def generate_configs(k: int, G: dict) -> list:
    colors = [i for i in range(1, k + 1)] # on crée une séquence de couleurs (pour k = 3 on a [1,2,3], pour k = 4 on a [1,2,3,4], etc)
    return list(product(colors, repeat=len(G))) # on génère toutes les permutations distingables
                                                # source : https://www.hackerrank.com/challenges/itertools-product/problem

def depth_first_search(config: tuple, G: dict) -> int:
    for i in range(len(config)):
        for v in G[i + 1]: # on regarde les sommets adjacents au sommet courant
            if config[v - 1] == config[i]: # si son sommet adjacent a la même couleur que lui, alors configuration non valide
                return 0
    return 1

ks = [3, 4, 5] # pour k = 3, puis k = 4, puis k = 5
for k in ks:
    nb_configs = generate_configs(k, G)
    if len(nb_configs) == (k ** len(G)): # vérification qu'on a bien tous les configurations possibles
        nb_valid_config = 0
        for config in nb_configs:
            nb_valid_config += depth_first_search(config, G)
        print(f"Nombre de configurations admissibles pour un {k}-coloriage dans G : {nb_valid_config} sur {len(nb_configs)} configurations.")
```

output

```
Nombre de configurations admissibles pour un 3-coloriage dans G : 24 sur 243 configurations.
Nombre de configurations admissibles pour un 4-coloriage dans G : 216 sur 1024 configurations.
Nombre de configurations admissibles pour un 5-coloriage dans G : 960 sur 3125 configurations.
```

En supposant que l'information donné à la question précédente est vraie, soit que si $k \geq \Delta + 2$ où Δ est le degré maximum parmi les sommets de $\mathcal{G}$, la chaîne construite par Gibbs est irréductible sur $\mathcal{C}$, alors quand $k = 3$, Gibbs ne donne pas une chaîne irréductible sur $\mathcal{C}$ car $k \ngeq \Delta + 2$ avec $\Delta = 3$. Même chose avec $k = 4$. Pour $k = 5$, on a bien une chaîne irréductible selon cette inégalité.

Pour aller un peu plus loin pour $k = 3$ puis $k = 4$, dessinons ces configurations initiales :

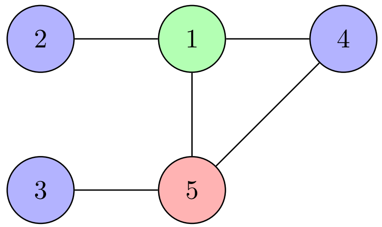


Figure 1: Pour $k = 3$

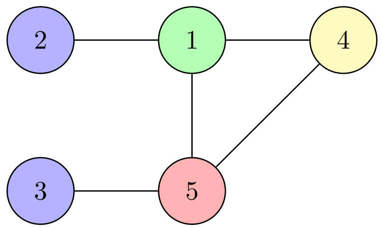


Figure 2: Pour $k = 4$

Dans la figure 1, ni le sommet 1, ni le sommet 5 peuvent voir leur couleur changer sans que cela entre en conflit avec la couleur des sommets qui leur sont adjacents. Puis, dans la figure 2, c'est le même cas avec le sommet 1 ; il peut ne prendre ni bleu, ni jaune, ni rouge. On conclut qu'à partir de ces sommets, il n'est jamais possible de se rendre à une autre configuration ce qui ne rejoint pas le concept d'irréductibilité.