DEVOIR 4

Mathias La Rochelle

Le jeudi 10 octobre 2024

Problème 1

Énoncé. L'état d'un processus de fabrication change chaque jour selon une chaîne de Markov à deux états, 0 et 1, avec les probabilités de transition suivantes :

$$P_{0,0} = 0.4, \quad P_{0,1} = 0.6, \quad P_{1,0} = 0.2, \quad P_{1,1} = 0.8$$

Chaque jour, un test est fait sur le processus et si la chaîne est dans l'état i, le test retourne "bon" avec probabilité p_i et "mauvais" avec probabilité $q_i = 1-p_i$, pour $i = 0, 1$. Vos réponses seront des expressions qui dépendent de p_0 et p_1. On peut noter X_n l'état de la chaîne au jour n, puis poser $Y_n = 1$ si le test retourn "bon" au jour n, et $Y_n = 2$ sinon. *Le vrai état du processus n'est pas observé, seulement Y_n est observé.*

Partie A

Énoncé. Si le processus est dans l'état 0 un jour donné, quelle est la probabilité que le test retourne "bon" le lendemain ?

La probabilité que le test retourne "bon" le lendemain sachant que le processus est à l'état 0 au jour donné signifie qu'on cherche $Y_n = 1$ quand $n = 1$ soit

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[Y_1 = 1 \mid X_0 = 0] &= \mathbb{P}[Y_1 = 1 \mid X_1 = 0,\, X_0 = 0] \cdot \mathbb{P}[X_1 = 0,\, X_0 = 0] \\
&\quad + \mathbb{P}[Y_1 = 1 \mid X_1 = 1,\, X_0 = 0] \cdot \mathbb{P}[X_1 = 1,\, X_0 = 0] \\
&= p_0 \cdot 0.4 + p_1 \cdot 0.6 \\
&= 0.4p_0 + 0.6p_1
\end{aligned}$$

La probabilité que le test retourne "bon" à ce jour-là est de $0.4p_0 + 0.6p_1$.

Partie B

Énoncé. Si le processus est dans l'état 0 le lundi, quelle est la probabilité que le test retourne "bon" le vendredi suivant ?

La probabilité que le test retourne "bon" le vendredi suivant sachant que le processus est à l'état 0 le lundi signifie qu'on cherche $Y_n = 1$ quand $n = 4$ soit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[Y_4 = 1 \mid X_0 = 0] &= \mathbb{P}[Y_4 = 1 \mid X_4 = 0] \cdot \mathbb{P}[X_4 = 0 \mid X_0 = 0] \\ &\quad + \mathbb{P}[Y_4 = 1 \mid X_4 = 1] \cdot \mathbb{P}[X_4 = 1 \mid X_0 = 0] \qquad (1)\end{aligned}$$

Pour pouvoir trouver de se rendre de l'état 0 à l'état i en $n = 4$ étapes, nous allons utiliser l'équation de Chapman-Kolmogorov.

$$P_{i,j}^{(n)} = \mathbb{P}[X_n = j \mid X_0 = i]$$

On a les deux probabilités suivantes

$$\begin{aligned}P_{0,0}^4 &= \mathbb{P}[X_4 = 0 \mid X_0 = 0] \\ P_{0,1}^4 &= \mathbb{P}[X_4 = 1 \mid X_0 = 0]\end{aligned}$$

qui seront calculées à partir de la matrice $\boldsymbol{P}^4$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}^4 &= \boldsymbol{P}^2 \times \boldsymbol{P}^2 \\ &= (\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{P}) \times \boldsymbol{P}^2 \\ &= \left(\begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}\right) \times \boldsymbol{P}^2 \\ &= \begin{pmatrix} 0.28 & 0.72 \\ 0.24 & 0.76 \end{pmatrix} \times \boldsymbol{P}^2 \\ &= \begin{pmatrix} 0.28 & 0.72 \\ 0.24 & 0.76 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.28 & 0.72 \\ 0.24 & 0.76 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.2512 & 0.7488 \\ 0.2496 & 0.7504 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On substitue les probabilités de cette matrice à notre équation (1) :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}[Y_4 = 1 \mid X_0 = 0] &= p_0 \cdot 0.2512 + p_1 \cdot 0.7488 \\ &= 0.2512p_0 + 0.7488p_1\end{aligned}$$

La probabilité que le test retourne "bon" à ce jour-là est de $0.2512p_0 + 0.7488p_1$.

Partie C

Énoncé. Quelle est la proportion des jours où le test retourne "bon" à long terme ?

Pour trouver cette proportion à long terme, il faut d'abord trouver les probabilités des états stationnaires à long terme. On résoud les équations d'équilibre $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi P}$ et $\boldsymbol{\pi 1}^t = 1$:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= 0.4\pi_0 + 0.2\pi_1 && (2) \\ \pi_1 &= 0.6\pi_0 + 0.8\pi_1 && (3) \\ 1 &= \pi_0 + \pi_1 && (4) \end{aligned}$$

Avec (2) et (4) on a

$$\begin{aligned} \pi_0 &= 0.4\pi_0 + 0.2(1 - \pi_0) \\ 0.6\pi_0 &= 0.2 - 0.2\pi_0 \\ 0.8\pi_0 &= 0.2 \end{aligned}$$

qui donne

$$\pi_0 = \frac{1}{4},\ \pi_1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

En conclusion, la proportion des jours où le test retourne "bon" à long terme dépend de p_0 et de p_1 et est donnée par l'équation ci-dessous.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\text{Le test retourne "bon" à long terme}] &= \pi_0 p_0 + \pi_1 p_1 \\ &= 0.25p_0 + 0.75p_1 \end{aligned}$$

Partie D

Énoncé. Est-ce que $\{Y_n,\, n \geq 0\}$ est une chaîne de Markov ? Si oui, donnez sa matrice de probabilités de transition; sinon expliquez pourquoi.

Clarification : Y_n est l'état du test au jour n, c'est-à-dire qu'au n-ième jour, le test peut soit être "bon" ou 'mauvais".

Dépendance de Y_{n+1} :
Le résultat du test Y_{n+1} dépend de l'état du processus X_{n+1} et des probabilités associées à cet état (p_0 ou p_1). Cependant, le passage de X_n à X_{n+1} est une chaîne de Markov, mais Y_{n+1} ne dépend pas directement de Y_n. Y_n est plutôt une observation indirecte qui dépend de l'état "caché" X_n.

Puisque Y_{n+1} dépend de l'état caché X_{n+1} et non directement de Y_n, la séquence $\{Y_n,\, n \geq 0\}$ ne satisfait pas la propriété markovienne. Elle ne constitue donc pas une chaîne de Markov par elle-même. Les transitions dans $\{Y_n\}$ sont influencées par les états cachés X_n ce qui, au final, empêche $\{Y_n\}$ d'être une chaîne de Markov indépendante.

Problème 2

Énoncé. Voir mes diapos, pages 52-53.

Partie A

Énoncé. Dans l'exemple de la marche aléatoire sur $\{0, 1, ..., N\}$, quand les états 0 et N sont absorbants et les p_i peuvent dépendre de i, dérivez une formule pour P_1 et une formule pour chaque P_i en fonction de P_1.

Toute probabilité P_i représente la probabilité de se rendre à P_N en partant de l'état i. De soit, si on tombe dans l'état 0, on ne peut aller vers l'état N donc, $P_0 = 0$. Inversement, si on tombe dans l'état N, alors on est sûr d'y rester donc, $P_N = 1$. Ces cas spéciaux proviennent du fait que ces deux états sont absorbants.

Le graphe de la chaîne de Markov qui décrit ce problème est

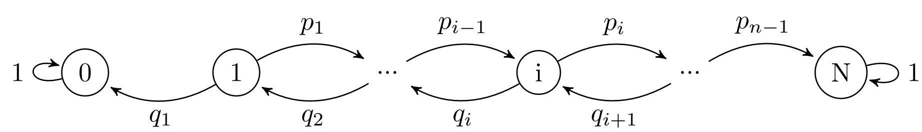

Figure 1: Marche aléatoire sur $\{0, 1, ..., N\}$

On en dérive la formule suivante :

$$P_i = p_i \cdot P_{i+1} + q_i \cdot P_{i-1}, \text{ où } 0 < i < N$$

qui peut être réecrite comme

$$\begin{aligned} p_i \cdot P_i + q_i \cdot P_i &= p_i \cdot P_{i+1} + q_i \cdot P_{i-1}, \text{ parce que } p_i + q_i = 1 \\ p \cdot P_i - p_i \cdot P_{i+1} &= q_i \cdot P_{i-1} - q_i \cdot P_i \\ P_i - P_{i+1} &= \frac{q_i}{p_i}\left(P_{i-1} - P_i\right) \end{aligned} \tag{5}$$

On peut désormais utiliser l'équation (5) pour trouver les P_i, $i \in \{2, 3, ..., N-1\}$ en fonction de P_1. Avec $i = 1$, on a

$$\begin{aligned} P_1 - P_2 &= \frac{q_1}{p_1}\left(P_0 - P_1\right) \\ P_1 - P_2 &= \frac{q_1}{p_1}\left(-P_1\right), \text{ étant donné que } P_0 = 0 \\ P_2 &= P_1\left(1 + \frac{q_1}{p_1}\right) \end{aligned}$$

Subséquemment, avec $i = 2$ on a

$$P_2 - P_3 = \frac{q_2}{p_2}(P_1 - P_2) = \frac{q_2}{p_2}\left(P_1 - P_1\left(1 + \frac{q_1}{p_1}\right)\right) = -P_1\frac{q_2 \cdot q_1}{p_2 \cdot p_1}$$

Puis, avec $i = 3$ on a

$$P_3 - P_4 = \frac{q_3}{p_3}(P_2 - P_3) = -P_1\frac{q_3 \cdot q_2 \cdot q_1}{p_3 \cdot p_2 \cdot p_1}$$

En suivant cette suite récurrente, on retrouve la formule pour les P_i :

$$P_i - P_{i+1} = -P_1 \cdot \prod_{j=1}^{i} \frac{q_j}{p_j} \tag{6}$$

Pour simplifier l'équation et trouver celle de P_1, on somme les différences :

$$\sum_{m=1}^{N-1}(P_m - P_{m+1}) = (P_1 - P_2) + (P_2 - P_3) + \cdots + (P_{N-1} - P_N) = P_1 - P_N$$

$$\begin{aligned}
P_1 - P_N &= \sum_{m=1}^{N-1}\left(-P_1 \cdot \prod_{j=1}^{m}\frac{q_j}{p_j}\right) \\
P_1 &= 1 + \sum_{m=1}^{N-1}\left(-P_1 \cdot \prod_{j=1}^{m}\frac{q_j}{p_j}\right), \text{ avec } P_N = 1 \quad ^* \\
-1 &= \sum_{m=1}^{N-1}\left(\prod_{j=1}^{m}\frac{q_j}{p_j}\right) - \frac{1}{P_1} \\
\frac{1}{P_1} &= 1 + \sum_{m=1}^{N-1}\left(\prod_{j=1}^{m}\frac{q_j}{p_j}\right) \\
P_1 &= \left[1 + \sum_{m=1}^{N-1}\left(\prod_{j=1}^{m}\frac{q_j}{p_j}\right)\right]^{-1} && (7)
\end{aligned}$$

Figure 2: * : parce que une fois dans l'état N, on est assuré d'y rester

On peut faire le même processus pour les P_i :

$$\sum_{m=1}^{i-1}(P_m - P_{m+1}) = (P_1 - P_2) + (P_2 - P_3) + \cdots + (P_{i-1} - P_i) = P_1 - P_i$$

Puis,

$$
\begin{aligned}
P_1 - P_i &= \sum_{m=1}^{i-1} \left(-P_1 \cdot \prod_{j=1}^{m} \frac{q_j}{p_j} \right) \\
P_i &= P_1 - \sum_{m=1}^{i-1} \left(-P_1 \cdot \prod_{j=1}^{m} \frac{q_j}{p_j} \right) \\
P_i &= P_1 \left(1 + \sum_{m=1}^{i-1} \left(\prod_{j=1}^{m} \frac{q_j}{p_j} \right) \right) \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Les équations (7) et (8) sont les formules respectives des probabilités de se finir dans l'état absorbant N en débutant par l'état 1 et l'état i.

Partie B

Énoncé. Si $N = 5$ et $p_i = (N - i)/N$ pour $0 < i < N$, calculez les valeurs des P_i.

Déterminons tout d'abord les p_i, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$:

$$p_1 = \frac{5-1}{5} = \frac{4}{5}, \text{ avec } i = 1 \tag{9}$$

$$p_2 = \frac{5-2}{5} = \frac{3}{5}, \text{ avec } i = 2 \tag{10}$$

$$p_3 = \frac{5-3}{5} = \frac{2}{5}, \text{ avec } i = 3 \tag{11}$$

$$p_4 = \frac{5-4}{5} = \frac{1}{5}, \text{ avec } i = 4 \tag{12}$$

qui nous permettent de calculer les P_i suivants en Python

```python
N = 5
probabilites = [(N - i) / N for i in range(1, N)]

somme_int = 0
for m in range(1, N): # s'arrête à N - 1
    produit_int = 1
    for j in range(1, m + 1): # s'arrête à m
        produit_int *= (1 - probabilites[j - 1]) / probabilites[j - 1]

    somme_int += produit_int

P_1 = 1 / (1 + somme_int)
print("La probabilité de se rendre à l'état N en débutant de l'état 1 est de "
      + (round(P_1, 3) * 100) + "%.")

for i in range(2, N):
    somme_int = 0
    for m in range(1, i): # s'arrête à i - 1
        produit_int = 1
        for j in range(1, m + 1):
            produit_int *= (1 - probabilites[j - 1]) / probabilites[j - 1]

        somme_int += produit_int

    P_i = P_1 * (1 + somme_int)
    print("La probabilité de se rendre à l'état N en débutant de l'état " + i
          + " est de " + (round(P_i, 3) * 100) + "%.")
```

output

```
La probabilité de se rendre à l'état N en débutant de l'état 1 est de 37.5%.
La probabilité de se rendre à l'état N en débutant de l'état 2 est de 46.9%.
La probabilité de se rendre à l'état N en débutant de l'état 3 est de 53.1%.
La probabilité de se rendre à l'état N en débutant de l'état 4 est de 62.5%.
```

Problème 3

Énoncé. Soit a et b deux entiers positifs et considérons une chaîne de Markov $\{\mathbf{X}_n,\, n \geq 0\}$ dont l'espace d'états est $\{(x, y) : x \in \{0, ..., a-1\},\, y \in \{0, ..., b-1\}\}$, et les probabilités de transition sont définies comme suit. Si $\mathbf{X}_n = (x, y)$, alors $\mathbf{X}_{n+1} = ((x+1) \bmod a, y)$ ou $\mathbf{X}_{n+1} = (x, (y+1) \bmod b)$ chacun avec probabilité 1/2.

Partie A

Énoncé. Montrez que cette chaîne est irréductible.

Pour montrer que la chaîne de Markov décrite est irréductible, nous devons prouver que tout état dans l'espace d'états $\{(x, y) : x \in \{0, \ldots, a-1\},\, y \in \{0, \ldots, b-1\}\}$ peut être atteint à partir de n'importe quel autre état, en un certain nombre d'étapes.

Les états de cette chaîne sont de la forme (x, y), où x varie de 0 à $a-1$ et y de 0 à $b-1$. Les transitions possibles sont :

- De (x, y) à $((x+1) \bmod a, y)$ avec probabilité 1/2
- De (x, y) à $(x, (y+1) \bmod b)$ avec probabilité 1/2

Ces transitions signifient qu'à chaque étape, soit la première composante x est incrémentée de 1 mod a, soit la deuxième composante y est incrémentée de 1 mod b et ce, avec probabilité égale.

Désormais, supposons que nous partions d'un état (x, y) et que nous souhaitions atteindre un autre état (x', y').

- Pour la première composante x, en appliquant la transition $x \to (x+1) \bmod a$ de façon répétée, nous pouvons passer à n'importe quelle autre valeur de x en au plus a étapes, car le compteur x se comporte comme une roue cyclique avec a positions.
- De manière similaire, pour la deuxième composante y, en appliquant la transition $y \to (y+1) \mod b$, nous pouvons atteindre n'importe quelle autre valeur de y en au plus b étapes, puisque y se comporte comme une roue cyclique avec b positions.

Ainsi, il est toujours possible de trouver un chemin dans l'espace d'états de (x, y) à (x', y') en combinant ces transitions. Cela implique qu'il existe un nombre fini d'étapes pour aller de n'importe quel état à n'importe quel autre.

Finalement, étant donné que tous les états communiquent entre eux, cela signifie que tous les états appartiennent à la même classe de communication. Cette classe est

$$C = \{(x, y) : x \in \{0, \dots, a-1\},\, y \in \{0, \dots, b-1\}\}$$

Donc, la chaîne de Markov est irréductible.

Partie B

Énoncé. Montrez qu'elle est apériodique si et seulement si $\text{pgcd}(a, b) = 1$.

Une chaîne de Markov est dite apériodique si tous les états accessibles sont apériodiques. Un état i est apériodique si et seulement si sa période $d(i) = 1$.

Les transitions dans cette chaîne suivent deux cycles indépendants : un cycle de longueur a pour la composante x, et un cycle de longueur b pour la composante y. Quand $\text{pgcd}(a, b) = 1$, cela signifie qu'il n'existe pas de synchronisation stricte entre les cycles des deux composantes. Inversement, lorsque $\text{pgcd}(a, b) > 1$, les deux cycles a et b partagent un diviseur commun qui crée une synchronisation des transitions. Ainsi, les états de la chaîne se répètent périodiquement à des intervalles fixes.

Exemple 1

Dans le cas où $a = 1$ et $b = 2$, on a l'espace d'états $\{\{x, y\} : x = 0,\ y \in \{0, 1\}\}$ et $\text{pgcd}(a, b) = 1$. Les transitions entre les états de l'étape n à $n + 1$ sont :

- $(x_n = 0,\, y_n = 0) \to (x_{n+1} = 1 \bmod 1,\, y_{n+1} = 0) = (x_{n+1} = 0,\, y_{n+1} = 0)$
- $(x_n = 0,\, y_n = 0) \to (x_{n+1} = 0,\, y_{n+1} = 1 \bmod 2) = (x_{n+1} = 0,\, y_{n+1} = 1)$
- $(x_n = 0,\, y_n = 1) \to (x_{n+1} = 1 \bmod 1,\, y_{n+1} = 1) = (x_{n+1} = 0,\, y_{n+1} = 1)$
- $(x_n = 0,\, y_n = 1) \to (x_{n+1} = 0,\, y_{n+1} = 2 \bmod 2) = (x_{n+1} = 0,\, y_{n+1} = 0)$

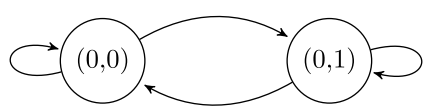

Figure 3: Diagramme des transitions entre les états (sans les probabilités)

On remarque qu'un cycle dans cette chaîne n'a pas besoin de suivre une certaine période fixe : chaque état est accessible à partir de lui-même en une étape (boucle), ou bien par alternance entre deux états $(0, 0)$ et $(0, 1)$. Comme la période des transitions entre ces états est 1, cela montre que la chaîne est apériodique.

Exemple 2

Dans le cas où $a = b = 2$, on a l'espace d'états $\{\{x, y\} : x \in \{0, 1\},\ y \in \{0, 1\}\}$ et $\text{pgcd}(a, b) = 2$. Les transitions entre les états de l'étape n à $n + 1$ sont :

- $(x_n = 0,\, y_n = 0) \to (x_{n+1} = 1 \bmod 2,\, y_{n+1} = 0) = (x_{n+1} = 1,\, y_{n+1} = 0)$
- $(x_n = 0,\, y_n = 0) \to (x_{n+1} = 0,\, y_{n+1} = 1 \bmod 2) = (x_{n+1} = 0,\, y_{n+1} = 1)$

- $(x_n = 1, \, y_n = 0) \to (x_{n+1} = 2 \bmod 2, \, y_{n+1} = 0) = (x_{n+1} = 0, \, y_{n+1} = 0)$
- $(x_n = 1, \, y_n = 0) \to (x_{n+1} = 1, \, y_{n+1} = 2 \bmod 2) = (x_{n+1} = 1, \, y_{n+1} = 1)$
- $(x_n = 0, \, y_n = 1) \to (x_{n+1} = 1, \, y_{n+1} = 1)$ par symétrie
- $(x_n = 0, \, y_n = 1) \to (x_{n+1} = 0, \, y_{n+1} = 0)$ par symétrie
- $(x_n = 1, \, y_n = 1) \to (x_{n+1} = 0, \, y_{n+1} = 1)$ par symétrie
- $(x_n = 1, \, y_n = 1) \to (x_{n+1} = 1, \, y_{n+1} = 0)$ par symétrie

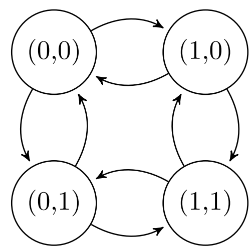

Figure 4: Diagramme des transitions entre les états (sans les probabilités)

Les transitions possibles entre les états (x, y) permettent une alternance systématique entre les quatre états. Chaque état est atteint après un nombre d'étapes fixe, ce qui caractérise une chaîne périodique. Ils forment un cycle, et en raison du fait que les périodes pour chaque composante sont égales à 2, la chaîne est périodique avec une période $d(i) = 2$. Chaque état (x, y) peut retourner à lui-même ou aux autres états après un nombre d'étapes multiple de 2, ce qui rend cette chaîne non apériodique.

On conclut qu'une chaîne de Markov irréductible est apériodique si et seulement si $\text{pgcd}(a, b) = 1$. Dans ce cas, les cycles des deux composantes x et y ne se synchronisent pas, et chaque état peut être atteint à des étapes non multiples d'une période fixe. Lorsque $\text{pgcd}(a, b) > 1$, les deux cycles se synchronisent, entraînant une périodicité commune à tous les états, rendant la chaîne périodique.

Problème 4

Énoncé. On considère une suite de polygones convexes définis comme suit. À l'étape n, on a un polygone de $X_n + 3$ côtés, pour $X_n \geq 0$. Par exemple, pour un triangle on a $X_n = 0$ et pour un hexagone on a $X_n = 3$. On choisit au hasard (uniformément) deux des $X_n + 3$ côtés (faces) de ce polygone et on rejoint les points milieux de ces deux faces par un segment de droite. Cela divise le polygone courant en deux polygones convexes plus petits, P_1 et P_2. On suppose que le polygone initial n'a pas deux faces successives parfaitement alignées. Puisque c'est seulement le nombre de faces qui compte, on peut se faire une image de la situation en supposant que le polygone est régulier, à chaque étape. On choisit un des deux polygones P_1 ou P_2 au hasard, avec probabilité $1/2$ chacun. et c'est le prochain polygone, dont le nombre de faces est $X_{n+1} + 3$.

Par exemple, si on a un pentagone et qu'on choisit deux faces adjacents, il sera divisé en un triangle et un hexagone. Si on choisit deux faces non adjacentes, les deux sous-polygones obtenus auront 4 et 5 faces. Suggestion : faites-vous un dessin, énumérez tous les choix possibles, et calculez la probabilité de chaque choix.

Partie A

Énoncé. Montrez que $\{X_n,\, n \geq 0\}$ est une chaîne de Markov irréductible. Dites quel est son espace d'états et trouvez la matrice des probabilités de transition.

L'espace d'états de la chaîne de Markov $\{X_n,\, n \geq 0\}$ est l'ensemble des nombres naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Chaque état $X_n = i$ représente le nombre de côtés supplémentaires par rapport au triangle initial, autrement dit, l'état i correspond à un polygone ayant $i + 3$ côtés. Par exemple :

- $X_n = 0$ correspond à un polygone à 3 côtés (un triangle),
- $X_n = 1$ correspond à un polygone à 4 côtés (un quadrilatère),
- $X_n = 2$ correspond à un polygone à 5 côtés (un pentagone), et ainsi de suite.

On a donc l'espace d'états E de la chaîne de Markov suivante :

$$E = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Pour la suite des choses, afin de mieux comprendre notre chaîne de Markov, nous écrivons le processus Y_n comme étant le nombre de côtés que possède un polygone à l'étape n soit $Y_n = X_n + 3$.

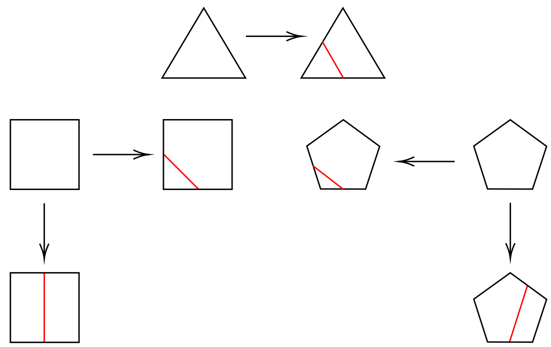

Figure 5: Différentes manières de découper les polygones $Y_n = 3, 4, 5$

Un triangle peut donner un triangle ou un quadrilatère avec probabilité

$$\mathbb{P}[Y_{n+1} = 3 \mid Y_n = 3] = \mathbb{P}[Y_{n+1} = 4 \mid Y_n = 3] = \frac{1}{2}$$

De même, un quadrilatère peut donner un triangle, un quadrilatère ou un pentagone avec probabilité

$$\mathbb{P}[Y_{n+1} = 3 \mid Y_n = 4] = \mathbb{P}[Y_{n+1} = 4 \mid Y_n = 4] = \mathbb{P}[Y_{n+1} = 5 \mid Y_n = 4] = \frac{1}{3}$$

Par suite logique, on remarque que la probabilité dépend de l'état dans lequel nous sommes (donc dépend du nombre de côtés du polygone actuel) :

$$p_{i,j} = \mathbb{P}[X_{n+1} = j \mid X_n = i] = \frac{1}{i+2}$$

Grâce à cette formule, on peut déduire à quoi va ressembler notre matrice de transitions. À chaque fois que le polygone i choisit augmente d'un côté de plus que son polygone antécédent, il peut atteindre le dernier polygone et tous ceux qui l'ont antécéder avec probabilité $1/(i+2)$.

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p_{1,0} & p_{1,1} & p_{1,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,0} & p_{n,1} & p_{n,2} & p_{n,3} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{i+2} & \frac{1}{i+2} & \frac{1}{i+2} & \frac{1}{i+2} & \frac{1}{i+2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{n+2} \end{pmatrix}$$

Notre chaîne de Markov $\{X_n, n \geq 0\}$ est donc irréductible parce qu'on peut partir de n'importe quel état et se rendre à tout autre état (polygone) en $j - i$ étapes lorsqu'on part de i et on se rend à j (avec $i < j$) et en 1 étape si on part de j et on se rend à i (encore où $i < j$).

Partie B

Énoncé. Montrez que les probabilités d'état stationnaire de cette chaîne sont données par l'équation étonnamment élégante suivante : $\pi_i = 1/(i! \cdot e)$ pour $i \geq 0$, où $e = 2.71828...$ est la constante d'Euler.

Pour notre chaîne de Markov irréductible positive, les états stationnaires π_i forment les équations d'équilibre

$$\pi_j = \sum_{i \in \mathbb{N}} \pi_i \cdot p_{i,j},\ \forall j \in \mathbb{N} \tag{13}$$

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \pi_i = 1 \tag{14}$$

On peut donc retrouver l'équation de π_0 et ceux de π_j avec

$$\pi_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\pi_i}{i+2} \text{ et } \pi_j = \sum_{i=j-1}^{\infty} \frac{\pi_i}{i+2}$$

Donc pour $j = 1$ on retrouve

$$\pi_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\pi_i}{i+2} = \frac{\pi_0}{2} + \pi_2$$

Nous remarquons également que

$$\pi_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\pi_i}{i+2} = \pi_1$$

Nous allons maintenant examiner le cas $j = 2$:

$$\pi_2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\pi_i}{i+2} = \frac{\pi_1}{3} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\pi_i}{i+2} = \frac{\pi_1}{3} + \pi_3$$

Ensuite, pour $j = 3$ nous avons :

$$\pi_3 = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\pi_i}{i+2} = \frac{\pi_2}{4} + \sum_{i=3}^{\infty} \frac{\pi_i}{i+2} = \frac{\pi_2}{4} + \pi_4$$

À partir de ces relations, nous pouvons exprimer les états stationnaires π_i en fonction de π_0 :

$$\begin{aligned}
\pi_2 &= \pi_1 - \frac{\pi_0}{2} = \pi_0 - \frac{\pi_0}{2} = \frac{\pi_0}{2} \\
\pi_3 &= \pi_2 - \frac{\pi_1}{3} = \frac{\pi_0}{2} - \frac{\pi_0}{3} = \frac{\pi_0}{6} \\
\pi_4 &= \pi_3 - \frac{\pi_2}{4} = \frac{\pi_0}{6} - \frac{\pi_0}{8} = \frac{\pi_0}{24}
\end{aligned}$$

Nous constatons ainsi une séquence logique où la probabilité stationnaire dépend de l'état considéré. Nous obtenons donc pour l'état stationnaire j :

$$\pi_j = \frac{\pi_0}{j!} \tag{15}$$

Pour démontrer que cette équation est valide $\forall\, j$, nous allons démontrer qu'elle est vraie pour $j+1$ en utilisant l'équation (13) utilisée plutôt pour trouver π_1, π_2, *etc* :

$$\begin{aligned}
\pi_j &= \frac{\pi_{j-1}}{j+1} + \pi_{j+1} \\
\pi_{j+1} &= \pi_j - \frac{\pi_{j-1}}{j+1} \\
&= \frac{\pi_0}{j!} - \frac{\pi_0}{(j-1)! \cdot (j+1)} \\
&= \frac{\pi_0}{(j-1)!} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} \right) \\
&= \frac{\pi_0}{(j-1)!} \left(\frac{(j+1)-j}{j(j+1)} \right) \\
&= \frac{\pi_0}{(j+1) \cdot (j) \cdot (j-1)!} = \frac{\pi_0}{(j+1)!} \qquad (16)
\end{aligned}$$

Nous avons démontré que pour tout état j, les probabilités stationnaires peuvent s'exprimer sous la forme $\pi_j = \frac{\pi_0}{j!}$. Pour déterminer π_0, nous n'avons qu'à sommer sur les π_j :

$$\sum_{\forall j} \pi_j = \pi_0 \cdot \sum_{\forall j} \frac{1}{j!}$$

On remarque qu'on a une série de Taylor de $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ où $x = 1$ dans le côté droit de l'égalité. Donc,

$$\sum_{\forall j} \pi_j = \pi_0 \cdot e$$

Nous avons démontré à la partie A que notre chaîne de Markov est irréductible. Cela signifie qu'il est possible de passer d'un état j à un autre état $j+1$ ou $j-1$, ce qui garantit une connexion entre tous les états de la chaîne ($j-1 \leftrightarrow j \leftrightarrow j+1$). Le temps moyen de retour à l'état i est donc fini pour tous les états, ce qui renforce l'affirmation que la chaîne est récurrente positive. Nous savons également que lorsque la chaîne est récurrente positive, la somme des probabilités limites est égale à 1 :

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{i,j}^{(n)} \tag{17}$$

$$\sum_{\forall j} \pi_j = \sum_{\forall j} \lim_{n\to\infty} P_{i,j}^{(n)} = 1$$

Donc nous avons

$$\sum_{\forall j} \pi_j = 1 = \pi_0 \cdot e \to \pi_0 = \frac{1}{e}$$

La formule finale d'un état stationnaire j est caractérisée par

$$\pi_j = \frac{\pi_0}{j!} = \frac{1}{j! \cdot e}, \forall\, j \tag{18}$$