IFT-3655: Modèles Stochastiques **Automne 2024**

Prof. Pierre L'Ecuyer

DEVOIR 9

Devoir à remettre le *lundi 9 décembre 2024, avant 10h30*.

Les devoirs doivent être faits individuellement: un devoir par étudiant. Il est très important de bien expliquer tout ce que vous faites. Dans la correction, on accordera beaucoup d'importance à la clarté des explications. Attention au plagiat: il n'est pas permis de copier et/ou modifier des solutions venant de quelqu'un d'autre, ou prises sur Internet ou dans des livres. Rendez votre devoir dans Studium sous forme d'un fichier .pdf.

---

1. *(16 points)*

Le nombre d'erreurs typographiques dans un texte suit une loi de Poisson de moyenne λ. Deux relecteurs lisent le texte, indépendamment l'un de l'autre. Supposons que chaque erreur est détectée par le relecteur i avec probabilité p_i, pour $i = 1, 2$. Posons:

X_1 = le nombre d'erreurs trouvées par le relecteur 1 mais pas par le relecteur 2.
X_2 = le nombre d'erreurs trouvées par le relecteur 2 mais pas par le relecteur 1.
X_3 = le nombre d'erreurs trouvées par les deux relecteurs.
X_4 = le nombre d'erreurs trouvées par aucun relecteur.

(a) Trouver une formule pour la loi de probabilité conjointe de X_1, X_2, X_3, X_4. (Voir chapitre sur les probabilités pour la définition.)

(b) Montrez que

$$\frac{\mathbb{E}[X_1]}{\mathbb{E}[X_3]} = \frac{1-p_2}{p_2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathbb{E}[X_2]}{\mathbb{E}[X_3]} = \frac{1-p_1}{p_1}.$$

Supposons maintenant que λ, p_1, et p_2 sont tous inconnus.

(c) En utilisant X_k comme estimateur de $\lambda_k = \mathbb{E}[X_k]$, pour $k = 1, 2, 3$, trouvez des estimateurs pour p_1, p_2, et λ.

(d) Notez que dans ce contexte, X_1, X_2, X_3 peuvent être observés, mais pas X_4. Utilisez les estimateurs trouvés en (c) pour obtenir un estimateur de X_4.

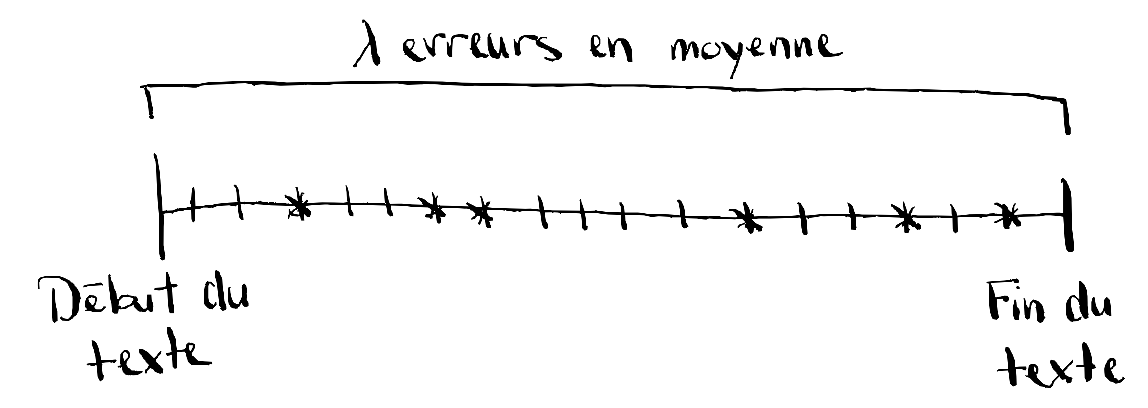
2. *(16 points)*

On a deux machines semblables, dont l'une est utilisée comme machine de rechange lorsque l'autre est en panne. On n'utilise jamais les deux en même temps. La machine utilisée fonctionne pour une durée exponentielle de taux λ, puis tombe en panne. Elle est alors remplacée par l'autre machine si cette dernière fonctionne, et s'en va à la réparation. Dans le centre de réparation, il y a un seul réparateur, qui peut réparer une seule machine à la fois, et la durée de réparation est exponentielle de taux μ. Lorsque la réparation est terminée, la machine réparée retourne en mode d'utilisation. Si les deux machines étaient en panne, la

Numéro #1

(a) Étant donné que la loi de Poisson est une loi en temps discret, on cherche la fonction de masse conjointe.

Ici, les 4 v.a. dépendent chacune de l'une à l'autre. Le nombre d'erreurs non-trouvé par les 2 relecteurs dépend du nombre d'erreurs trouvés par les 2 relecteurs.



Posons X une v.a. qui représente le nombre total d'erreurs.

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \quad \text{où} \quad X \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

Une erreur peut tomber dans l'une de ces quatres catégories:

1. trouvée par L1 et pas par L2
2. trouvée par L2 et pas par L1
3. trouvée par L1 et L2
4. trouvée par ni L1 ni L2

Cela se traduit à

1. $P_1 = p_1 q_2$ 2. $P_2 = p_2 q_1$

3. $P_3 = p_1 p_2$ 4. $P_4 = q_1 q_2$

où $q_i = 1 - p_i$.

Tous les évènements X_i dépendent de X.

Donc,

$$p(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{x=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3, X_4 = x_4 \mid X = x) \cdot \mathbb{P}(X = x)$$

Comme site plus haut, les erreurs peuvent tomber dans 1 des 4 catégories. Le conditionnement à X permet de généraliser le tout à la loi de probabilité multinomiale.

Donc,

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3, X_4 = x_4 \mid X = x) = \frac{x!}{x_1!\, x_2!\, x_3!\, x_4!} P_1^{x_1} P_2^{x_2} P_3^{x_3} P_4^{x_4}$$

et

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

Finalement,

$$\boxed{p(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x_1!\, x_2!\, x_3!\, x_4!} \cdot (p_1 q_2)^{x_1} (p_2 q_1)^{x_2} (p_1 p_2)^{x_3} (q_1 q_2)^{x_4} \right)}$$

(b) La moyenne d'un évènement X_i se traduit par la probabilité que cet évènement se produit fois le taux d'erreurs.

$\mathbb{E}[X_i] = \lambda P_i$ soit

1. $\mathbb{E}[X_1] = \lambda p_1 q_2$ 2. $\mathbb{E}[X_2] = \lambda p_2 q_1$

3. $\mathbb{E}[X_3] = \lambda p_1 p_2$ 4. $\mathbb{E}[X_4] = \lambda q_1 q_2$

Pour la question, on a

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}[X_1]}{\mathbb{E}[X_3]} &= \frac{\lambda p_1 q_2}{\lambda p_1 p_2} = \frac{q_2}{p_2} = \frac{1 - p_2}{p_2} \\ \frac{\mathbb{E}[X_2]}{\mathbb{E}[X_3]} &= \frac{\lambda p_2 q_1}{\lambda p_1 p_2} = \frac{q_1}{p_1} = \frac{1 - p_1}{p_1} \end{aligned}}$$

(c) Réécrivons les équations pour λ_k:

(1) $\mathbb{E}[X_1] = \lambda_1 = \lambda p_1 q_2$

(2) $\mathbb{E}[X_2] = \lambda_2 = \lambda p_2 q_1$

(3) $\mathbb{E}[X_3] = \lambda_3 = \lambda p_1 p_2$

Avec (3), on a $\lambda p_1 = \frac{\lambda_3}{p_2}$ et on combine avec (1) :

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_3}{p_2} q_2$$

$$\lambda_1 = \lambda_3 \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right)$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + 1 = \frac{1}{p_2}$$

$$\vdots$$

$$\boxed{p_2 = \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_3}}$$

Similairement, avec (3) et (2) :

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_3}{p_1} q_1$$

$$\vdots$$

$$\boxed{p_1 = \frac{\lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3}}$$

Et finalement, pour λ :

$$\lambda_3 = \lambda p_1 p_2$$

$$\lambda_3 = \lambda \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_3} \right) \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3} \right)$$

$$\vdots$$

$$\boxed{\lambda = \frac{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)}{\lambda_3}}$$

(d) $\mathbb{E}[X_4] = \lambda q_1 q_2 = \frac{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)}{\lambda_3} (1 - p_1)(1 - p_2)$

$$\vdots$$

$$= \frac{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)}{\lambda_3} \cdot \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)}$$

$$\boxed{\mathbb{E}[X_4] = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_3}}$$

réparation de la seconde machine démarre et la machine réparée devient celle utilisée, sinon elle devient la machine de rechange. Au départ, aucune des deux machines n'est en panne.

(a) Soit T le temps où les deux machines sont en panne pour la première fois. Trouvez des expressions pour $\mathbb{E}[T]$ et $\mathrm{Var}[T]$. Vous pouvez utiliser ce qu'on a vu en classe ou ce qui est fait dans le livre, mais donnez la référence et simplifiez les preuves pour les adapter au problème particulier considéré ici.

(b) Quelle est la proportion du temps où au moins une machine fonctionne, à long terme?

3. *(18 points)*

Supposons qu'il y a n machines et un seul réparateur. Lorsque la machine i tombe en panne, la quantité de travail requise (la durée de réparation normale pour un réparateur qui ne fait rien d'autre) est exponentielle de taux μ_i. Lorsque $k \geq 1$ machines sont en panne, le réparateur divise ses efforts également entre ces k machines, de sorte que si la machine i est en panne, elle est réparée à un taux μ_i/k. S'il y a $r = n - k$ machines qui fonctionnent, incluant la machine i, alors celle-ci tombe en panne au taux λ_i/r.

(a) Définissez une CTMC qui correspond à ce modèle. Vous devez spécifier l'espace d'états et les taux de transition $q_{i,j}$ entre toutes les paires d'états (i, j).

(b) Écrivez les équations qui donnent les conditions de reversibilité par rapport au temps. Trouvez ensuite les probabilités limites (la loi stationnaire) et montrez que le processus (la CTMC) est réversible.

Numéro #2

(a)

$\boxed{M_1}$ $\boxed{M_2}$ Quand M_i est en panne, M_j la remplace. $i,j = 1,2 ; i \neq j$

Le problème peut être généraliser comme :

- État 0 : aucune machine en panne
- État 1 : une machine en panne
- État 2 : deux machines en panne

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "\lambda_0"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu_1"] \arrow[r, bend left, "\lambda_1"] & 2 \arrow[l, bend left, "\mu_2"] \end{tikzcd}$$

où $\lambda_i = \lambda$ pour $i = 0,1$ et $\mu_i = \mu$ pour $i = 1,2$

Soit T_i le temps requis pour atteindre l'état $i+1$. On veut l'espérance du temps pris pour que les deux machines soient en panne. Cela se traduit à le temps espéré pour aller à l'état 2 en partant de l'état 0 (initial car les deux machines commencent neuves).

Ref : p. 19 CMTC (du prof.)

$$\begin{cases} \mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[T_2] = \mathbb{E}[T_0] + \mathbb{E}[T_1] \\ \mathbb{E}[T_0] = \dfrac{1}{\lambda}, \quad \mathbb{E}[T_1] = \dfrac{1 + \mu \mathbb{E}[T_0]}{\lambda} = \dfrac{\lambda + \mu}{\lambda^2} \end{cases}$$

$$\boxed{\mathbb{E}[T] = \frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda + \mu}{\lambda^2} = \frac{2\lambda + \mu}{\lambda^2}}$$

Pareil pour la variance $\mathbb{V}[T]$. On utilise l'équation à la p. 384 de Ross.

$$\mathbb{V}[T] = \mathbb{V}[T_2] = \mathbb{V}[T_0] + \mathbb{V}[T_1]$$

$$\mathbb{V}[T_0] = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \mathbb{V}[T_1] = \frac{1}{\lambda(\lambda+\mu)} + \frac{\mu}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda^2} + \frac{\mu}{\mu+\lambda}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda+\mu}{\lambda^2}\right)^2$$

$$\mathbb{V}[T] = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda(\lambda+\mu)} + \frac{\mu}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda^2} + \frac{\mu}{\mu+\lambda}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda+\mu}{\lambda^2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda+\mu}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda^2}\left(1 + \frac{\lambda+\mu}{\lambda}\right)^2\right)$$

$$\boxed{\mathbb{V}[T] = \frac{1}{\lambda^2}\left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda(\lambda+\mu)}\left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\left(1 + \frac{\lambda+\mu}{\lambda}\right)^2\right)}$$

(b) On a à peu prêt le même problème qu'à la p. 13 de CMTC sauf que nous, il y a trois états et non deux.

Le vecteur de probabilités limites est

$$p = (P_0 \ P_1 \ P_2)$$

et la matrice du générateur infinitésimal est

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

La proportion du temps où au moins une machine fonctionne est la probabilité d'être dans P_1 et celle d'être dans P_0.

Donc résoudrons les équations d'équilibre $pA = 0$ et $p1^t = 1$:

1. $-\lambda P_0 + \mu P_1 = 0$
2. $\lambda P_0 - P_1(\lambda+\mu) + \mu P_2 = 0$
3. $\lambda P_1 - \mu P_2 = 0$
4. $P_0 + P_1 + P_2 = 1$

① $P_0 = \dfrac{\mu}{\lambda} P_1$ ③ $P_2 = \dfrac{\lambda}{\mu} P_0$

④ $\dfrac{\mu}{\lambda} P_1 + P_1 + \dfrac{\lambda}{\mu} P_0 = 1$

$$\frac{\mu^2}{\lambda\mu} P_1 + \frac{\lambda\mu}{\lambda\mu} P_1 + \frac{\lambda^2}{\mu^2} = 1$$

$$P_1 = \frac{\lambda\mu}{\mu^2 + \lambda\mu + \lambda^2}$$

① $P_0 = \dfrac{\mu^2}{\mu^2 + \lambda\mu + \lambda^2}$

Donc la proportion est

$$\boxed{P_0 + P_1 = \frac{\mu(\lambda+\mu)}{\mu^2 + \lambda\mu + \lambda^2}}$$

Numéro #3

(a) Posons σ_j, une configuration des machines qui peut être représentée comme un vecteur :

$$\sigma_j = (m_1, m_2, \dots, m_n)$$

où $\forall i, 1 \le i \le n, m_i = \{0,1\}$. L'espace d'états représentant notre système peut s'écrire comme :

$$\boxed{E = \{\sigma_j \mid j \in \mathbb{N}^+, 1 \le j \le 2^n\}}$$

Puis, les taux de transitions $q_{i,j}$ peut être généralisés dans notre cas comme

$$\boxed{q_{\sigma_K,\sigma_\ell} = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } m_i : 0 \to 1 \\ \frac{\mu_i}{K} & \text{si } m_i : 1 \to 0 \\ 0 & \text{si } \|\sigma_K - \sigma_\ell\|_1 \neq 1 \end{cases}}$$

où $K = f(\sigma_j) \ge 1$ avec $f(\sigma_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{m_i = 1\}$.

La notation $m_i \in \{0,1\}$ signifie qu'une machine peut être soit en panne (1) soit fonctionnelle (0). Aussi, la fonction $f(\sigma)$ permet de calculer le nombre de machine en panne pour une certaine config.

(b) L'équation pour que la CMTC soit réversible est

$$P_{\sigma_\ell} q_{\sigma_\ell,\sigma_j} = P_{\sigma_j} q_{\sigma_j,\sigma_\ell}$$

$$\frac{\mu_i}{f(\sigma_\ell)} P_{\sigma_\ell} = P_{\sigma_j} \lambda_i$$

$$P_{\sigma_\ell} = P_{\sigma_j} \frac{f(\sigma_\ell)\lambda_i}{\mu_i}$$

Récursivement,

$$P_{\sigma_\ell} = P_{\sigma_p} f(\sigma_\ell)! \cdot \prod_{i'}^{f(\sigma_\ell)} \frac{\lambda_{i'}}{\mu_{i'}}, \quad i' \in \{i \mid m_i = 1, m_i \in \sigma_\ell\}$$

où σ_p est la configuration avec 0 machine en panne.

à chaque fois le nombre de machine $f(\sigma)$ diminue de 1

Puis, pour trouver P_{σ_p}, on l'isole en sommant sur tous les états possibles.

$$\sum_{\ell=1}^{2^n} P_{\sigma_\ell} = \sum_{\ell=1}^{2^n} P_{\sigma_p} f(\sigma_\ell)! \cdot \prod_{i'}^{K} \frac{\lambda_{i'}}{\mu_{i'}}$$

$$1 = P_{\sigma_p} \left(\sum_{\ell=1}^{2^n} f(\sigma_\ell)!\right) \prod_{i'}^{K} \frac{\lambda_{i'}}{\mu_{i'}}$$

$$P_{\sigma_p} = \frac{1}{\left(\sum_{\ell=1}^{2^n} f(\sigma_\ell)!\right)\left(\prod_{i'}^{K} \frac{\lambda_{i'}}{\mu_{i'}}\right)}$$

Donc, en simplifiant, on obtient pour P_{σ_ℓ} :

$$\boxed{P_{\sigma_\ell} = \frac{f(\sigma_\ell)!}{\sum_{t=1}^{2^n} f(\sigma_t)!}}$$

Cette équation satisfait les conditions de réversibilité par rapport au temps décrient plus tôt. La CMTC est réversible.