IFT-3655: Modèles Stochastiques **Automne 2024**

Prof. Pierre L'Ecuyer

DEVOIR 3

Devoir à remettre le *lundi 7 octobre 2024, avant 10h30*.

Les devoirs doivent être faits individuellement: un devoir par étudiant. Rendez votre devoir dans Studium sous forme d'un fichier .pdf. Il est très important de **bien expliquer** tout ce que vous faites. Dans la correction, on accordera davantage d'importance à la clarté des explications qu'à la réponse comme telle. Attention au plagiat: il est interdit de copier et/ou modifier des solutions venant de quelqu'un d'autre, ou prises sur Internet ou dans des livres.

---

1. *(10 points)* (a) Montrer par induction que si $0 < p < 1$,

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix},$$

et $r = 2p - 1$, alors

$$\boldsymbol{P}^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+r^n & 1-r^n \\ 1-r^n & 1+r^n \end{pmatrix}.$$

(b) Si une chaîne ayant cette matrice de transition débute dans l'état $X_0 = 0$, quelle est la probabilité qu'elle soit dans l'état 0 après n étapes? Cette probabilité converge vers 1/2 à quelle vitesse? En d'autres mot, quel est l'ordre de complexité de $|\mathbb{P}[X_n = 0] - 1/2]|$?

2. *(8 points)* Pour une marche aléatoire sur les entiers comme à la page 19 de mes diapos, l'état X_n à l'étape n sera $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ où les Y_i sont i.i.d. $\mathbb{P}[Y_i = 1] = p$ et $\mathbb{P}[Y_i = -1] = 1-p$. Utilisez la loi forte des grands nombres pour montrer que si $p > 1/2$, alors $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i \to \infty$ avec probabilité 1 lorsque $n \to \infty$. Idem pour $p < 1/2$. Cela donne une autre façon de montrer que la chaîne est nécessairement transitoire quand $p \neq 1/2$.

3. *(10 points)* Une matrice de transition $\boldsymbol{P}$ est dite *doublement stochastique* si la somme des éléments sur chaque colonne est aussi égale à 1. Pour une telle matrice, on a donc

$$\sum_i P_{i,j} = 1 \text{ pour tout } j \text{ et } \qquad \sum_j P_{i,j} = 1 \text{ pour tout } i.$$

Soit une chaîne irréductible à $M+1$ états $\{0, 1, \ldots, M\}$ et matrice de probabilités de transition $\boldsymbol{P}$. Montrez que si $\boldsymbol{P}$ est doublement stochastique, alors $\pi_i = 1/(M+1)$ pour tout i.

4. *(10 points)* On lance un dé plusieurs fois successivement, et soit Y_n la somme des valeurs des n premiers tirs. On vous demande de trouver

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[Y_n \text{ est un multiple de } 13].$$

Pour cela, on peut définir une chaîne dont l'état à l'étape n est $X_n = Y_n \bmod 13$, puis trouver les probabilités limites π_i pour cette chaîne. Suggestion: pensez à exploiter le résultat de la question précédente.

5. *(12 points)* Birgit part de chez elle (au Kenya) chaque matin pour faire son entraînement de course pour le marathon. Elle sort par la porte de devant avec probabilité $1/2$ et par derrière avec probabilité $1/2$. Elle choisit au hasard une paire de souliers qui se trouve près de la porte d'où elle sort s'il y en a, et elle part nu-pieds s'il n'y a pas de souliers près de cette porte. Au retour, elle choisit aussi chaque porte avec probabilité $1/2$ et laisse ses souliers près de cette porte. Si elle possède k paires de souliers au total, quelle est la proportion des jours où elle va courir nu-pieds, à long terme?

Suggestion: modélisez cette situation par une chaîne de Markov et trouvez les probabilités limites. Qui sait, vous allez peut-être pouvoir encore exploiter le résultat de la question 3.