ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

ВВЕДЕНИЕ

В общем виде задачу эффективного управления в любой сфере деятельности можно определить как достижение наилучших, с точки зрения целей данной организации, результатов при использовании доступных ресурсов и в условиях тех или иных ограничений, которые налагает внешняя среда. Для решения этой задачи целесообразно использование математического аппарата ориентированного на решение задач оптимизации (на максимум или минимум).

Методы анализа моделей линейного программирования не только позволяют получить оптимальное решение, но и дают информацию о том, как может изменяться это решение при изменении параметров модели. Именно эта информация, позволяющая получить ответы на вопросы типа «что, если…», представляет особую ценность для лица, принимающего решение.

Проблема анализа оптимального решения задач линейного программирования (нахождение оптимального плана) с целью принятия адекватного управленческого решения имеет важное практическое значение. Не менее важно знать, как можно изменить те или иные параметры системы (считавшиеся неизменными в ходе решения задачи линейного программирования), чтобы улучшить решение, получить еще большую прибыль, уменьшить издержки или усовершенствовать стратегию управления организацией.

Данная лабораторная работа ориентирована на получение компетенции УК-2 «Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений» и овладение навыками использования цифровых средств для решения поставленной задачи.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1. Определение цели решения задачи, т.е. чего хотим добиться, решая данную задачу.
2. Определение параметров модели, т.е. заранее известных фиксированных факторов, на значение которых исследователь не влияет.
3. Формирование управляющих переменных, значения которых являются решением задачи и при изменении которых можно достичь поставленной цели.
4. Определение области допустимых решений, т.е. ограничений, которым должны удовлетворять управляющие переменные.
5. Выявление неизвестных факторов, т.е. величин, которые могут изменяться случайным или неопределенным образом.
6. Выражение цели через управляющие переменные, параметры и неизвестные факторы, т.е. формирование целевой функции, называемой также критерием эффективности или критерием оптимальности задачи.

Экономико-математическое моделирование сводится к построению математической модели. При построении математической модели можно выделить следующие основные этапы:

Линейное программирование – это набор математических методов и приемов решения задачи оптимального распределения имеющихся ограниченных ресурсов для достижения определенной цели (максимума прибыли или минимума издержек). Такого рода задачи связаны с планированием закупок, перевозок, инвестиций, замены оборудования и т.д.

Если критерий эффективности Z (целевая функция) представляет собой линейную функцию, а функции в системе ограничений также линейны, то такая задача является задачей линейного программирования.

Общей задачей линейной оптимизации называют задачу

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \max(\min)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i, i = 1, 2, \ldots, m_1$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i, i = (m_1 + 1), \ldots, m_2$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \ge b_i, i = m_2, \ldots, m$$

$$x_j \ge 0, j = 1, 2, \ldots, n_1$$

$$x_j \text{ - произвольного знака, } j=(n_1+1), \ldots, n$$

Т.е. целевая функция задается на максимум или на минимум, ограничения имеют форму равенств или неравенств типа « ≤ » или « ≥ », на некоторые переменные наложено требование неотрицательности. Набор значений переменных задачи $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих системе ограничений, называется допустимым планом (допустимым решением) задачи линейной оптимизации. Совокупность допустимых планов образует множество допустимых планов. Допустимый план, доставляющий целевой функции экстремальное значение, называется оптимальным планом и обозначается $(x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_n)$.

Значение целевой функции на оптимальном плане называется оптимальным значением и обозначается $f^* = f(x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_n)$. Решение задачи линейной оптимизации состоит в отыскании оптимального плана и оптимального значения.

ЗАДАЧА об оптимальном плане выпуска продукции.

ТРЕБУЕТСЯ:

1. Изучить контрольный пример.
2. Построить модель в табличном процессоре MS EXEL.
3. Включить описание хода работ в отчет.

ДАНО:

Для изготовления различных изделий «А», «В» и «С» предприятие использует три различных вида сырья. Нормы расхода сырья на производство одного изделия каждого вида, цена одного изделия А, В и С, а также общее количество сырья каждого вида, которое может быть использовано предприятием, приведены в таблице.

Таблица 1 - Исходные данные для производства одного изделия

Вид сырья	Нормы затрат сырья на одно изделие (кг)			Общее количество сырья (кг)
	А	В	С	
Сырье №1	18	15	12	360
Сырье №2	6	4	8	192
Сырье №3	5	3	3	180
Цена одного изделия	9	10	16	

Изделия А, В и С могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), но производство ограничено наличием на предприятии сырья каждого вида.

ТРЕБУЕТСЯ:

Составить план производства изделий (определить количество подлежащих выпуску изделий каждого вида) при котором общая стоимость всей произведенной предприятием продукции является максимальной.

ХОД РЕШЕНИЯ

Пример построения модели линейного программирования

Переменные решения: *X1, X2, X3* – количество изделий вида *A*, *B* и *C* соответственно.

Целевая функция: *Z = 9*X1+10*X2+16*X3* - общая стоимость всей произведенной предприятием продукции.

Ограничения:

18**X1+15*X2+12*X3* ≤ 360 - по Сырью №1,

6**X1+4*X2+8*X3* ≤ 192 - по Сырью №2,

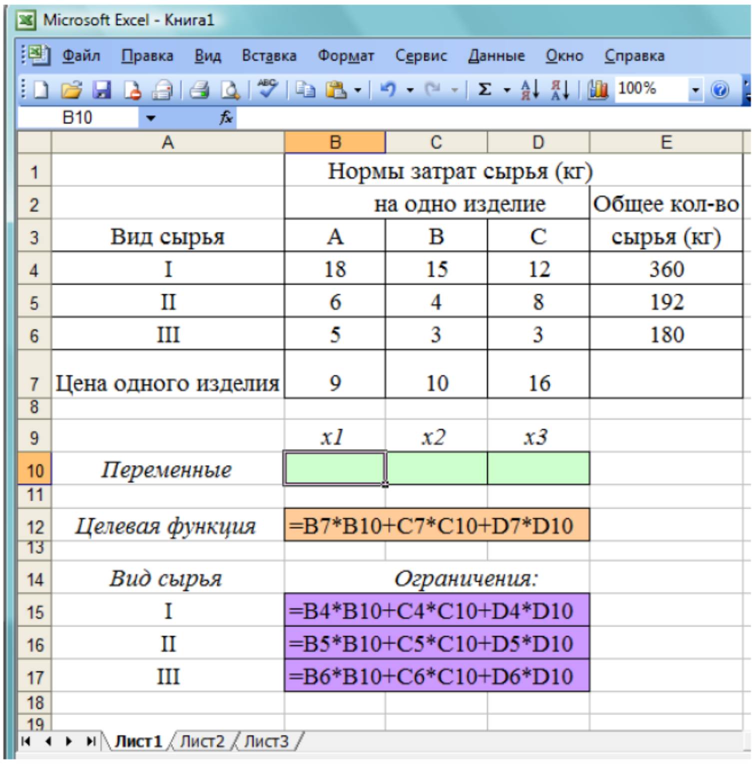
5**X1+3*X2+3*X3* ≤ 180 - по Сырью №3,

X1, X2, X3 ≥ 0 - неотрицательность переменных.

ИЗЛОЖЕНИЕ ЧИСЛЕННОЙ МЕТОДИКИ РЕШЕНИЯ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ТАБЛИЧНОМ ПРОЦЕССОРЕ EXEL.

При организации данных задачи линейного программирования (ЛП-задачи) на листе MS Excel (рисунок 1) следует отвести отдельные ячейки для параметров, переменных, целевой функции и левых частей ограничений (если в правых частях ограничений находятся только параметры).

Ячейки для переменных можно оставить пустыми или ввести в них любые допустимые значения переменных, а в ячейки для целевой функции и ограничений ввести формулы, отражающие их функциональную зависимость от переменных и параметров, используя правила, принятые в MS Excel.



	A	B	C	D	E
1		Нормы затрат сырья (кг)			
2		на одно изделие			Общее кол-во
3	Вид сырья	A	B	C	сырья (кг)
4	I	18	15	12	360
5	II	6	4	8	192
6	III	5	3	3	180
7	Цена одного изделия	9	10	16	
8					
9		*x1*	*x2*	*x3*	
10	*Переменные*				
11					
12	*Целевая функция*	=B7*B10+C7*C10+D7*D10			
13					
14	*Вид сырья*	*Ограничения:*			
15	I	=B4*B10+C4*C10+D4*D10			
16	II	=B5*B10+C5*C10+D5*D10			
17	III	=B6*B10+C6*C10+D6*D10			
18					
19					

Рисунок 1 - Организация данных ЛП-задачи на листе MS Excel.

Ячейки B10:D10 предназначены для искомых значений переменных.

В ячейку B12 введена формула целевой функции Z=9*X1+10*X2+16*X3, представляющая собой прибыль от продажи *X1* изделий *A*; *X2* изделий *B* и *X3* изделий *C.*
В ячейки B15:B17 введены формулы, отражающие расход ресурсов при изготовлении *X1* изделий *A*; *X2* изделий *B* и *X3* изделий *C*.

Для решения задачи воспользуйтесь надстройкой MS Excel «Поиск решения». Раскройте пункт меню «Сервис», выберите команду «Поиск решения». Если в меню «Сервис» отсутствует команда «Поиск решения», загрузите эту надстройку. Выберите команду «Сервис»/«Надстройки» и активизируйте надстройку «Поиск решения».
Появится диалоговое окно «Поиск решения» (рисунок 2).

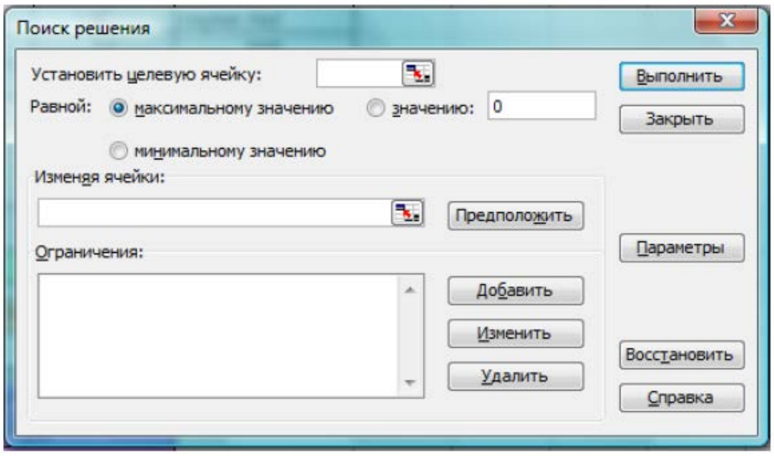


Рисунок 2 - Диалоговое окно «Поиск решения».

В нем есть три основные параметра:

• установить целевую ячейку;
• изменяя ячейки (т.е. ячейки, значения в которых будут изменяться для того, чтобы оптимизировать результат целевой ячейки. К изменяемым ячейкам предъявляются два основных требования: они не должны содержать формулы и их изменение должно влиять на результаты в целевой ячейке);
• ограничения (правила, которыми «Поиск решения» будет руководствоваться для нахождения оптимального решения).

Сначала заполните поле «Установить целевую ячейку» - B12. Затем установите переключатель «Равной максимальному значению», поскольку в данной задаче целевая функция стремится к максимуму. Наконец, определите данные поля «Изменяя ячейки», выделив ячейки B10:D10.

Добавьте ограничения: щелкните кнопку «Добавить». Появится диалоговое окно «Добавление ограничения» (рисунок 3).

Введите ограничения на неотрицательность переменных: щелкните по полю «Ссылка на ячейку», а затем отметьте ячейки B10:D10, выберите знак ограничения (в данном случае >=), щелкните по правому полю «Ограничение» и введите в него значение 0.

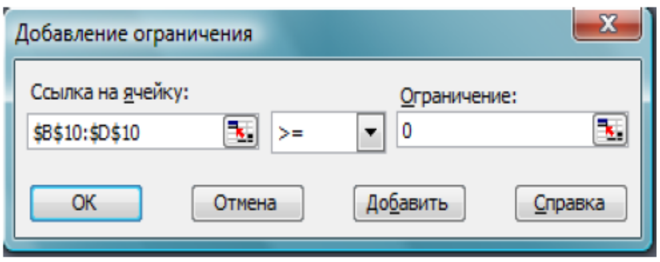


Рисунок 3 - Диалоговое окно «Добавление ограничения»

Вновь щелкните по кнопке «Добавить», затем в поле «Ссылка на ячейку» и отметьте ячейку $B$15. Выберите знак ограничения, щелкните по правому полю «Ограничение» и отметьте в нем ячейку $E$4, содержащую ограничение на ресурс.
Введите также ограничения на количество используемого сырья:
$B$15<=$E$4,
$B$16<=$E$5,
$B$17<=$E$6.

Указав в окне «Поиск решения» целевую ячейку и ячейки, в которых содержатся изменяемые значения переменных, введя ссылки на ячейки, содержащие левые и правые части ограничений, выбрав знак < > или =, стоящий между этими частями, можно с помощью «Поиска решения» найти оптимальные значения переменных, обеспечивающие максимум (или минимум) целевой функции при заданных ограничениях (рисунок 4).

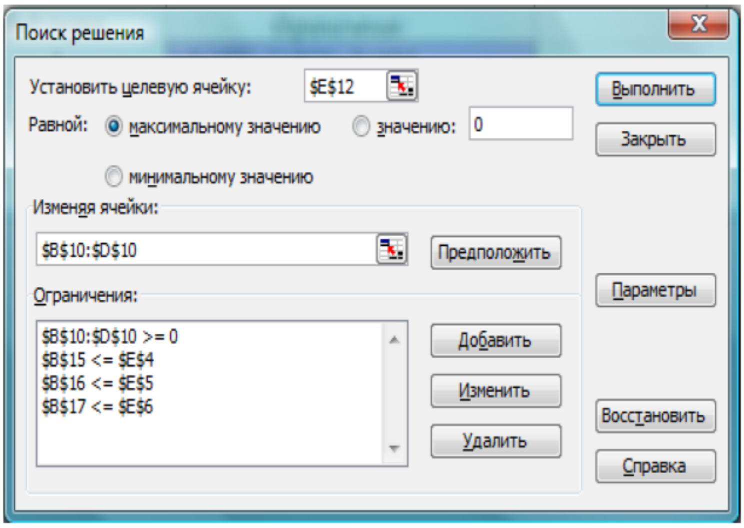


Рисунок 4 - Диалоговое окно «Поиск решения»: оптимальные значения переменных, обеспечивающие максимум (или минимум) целевой функции при заданных ограничениях.

Кнопка «Параметры» позволяет настроить параметры модели (рисунок 5).

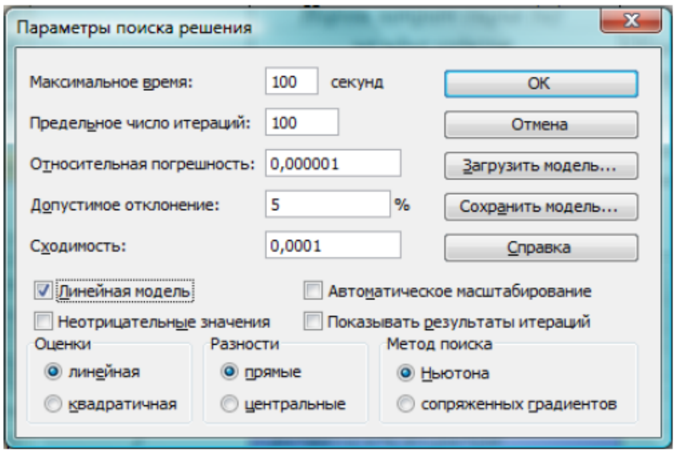


Рисунок 5 – Диалоговое окно «Параметры поиска решения».

Нужно помнить, что при решении задач линейного программирования, в «Параметрах» «Поиска решения» необходимо поставить флажок «Линейная модель».
Теперь для процедуры «Поиска решения» готовы все исходные данные.

Чтобы начать процесс решения задачи, щелкните на кнопке «Выполнить». В строке состояния будет отражаться ход решения задачи. Через некоторое время на экране появится диалоговое окно «Результаты поиска решения» (рисунок 6), в котором вы можете выбрать одну из следующих возможностей:

- сохранить найденное решение;
- восстановить исходные значения в изменяемых ячейках;
- создать несколько видов процедуры поиска.

Установите переключатель «Сохранить найденное решение» и щелкните на кнопку «ОК».

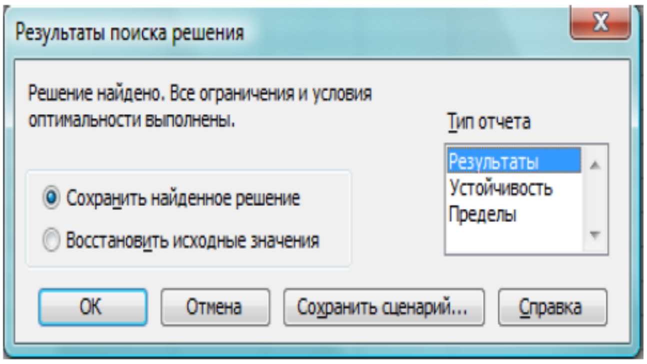


Рисунок 6 - Диалоговое окно «Результаты поиска решения».

В итоге получите требуемое решение - план производства изделий, при котором общая стоимость всей произведенной предприятием продукции является максимальной. В ячейках B10:D10 найдены значения переменных x1 = 0, x2 = 8, x3 = 20 в ячейке B12 значение целевой функции F = 400 (рисунок 7).

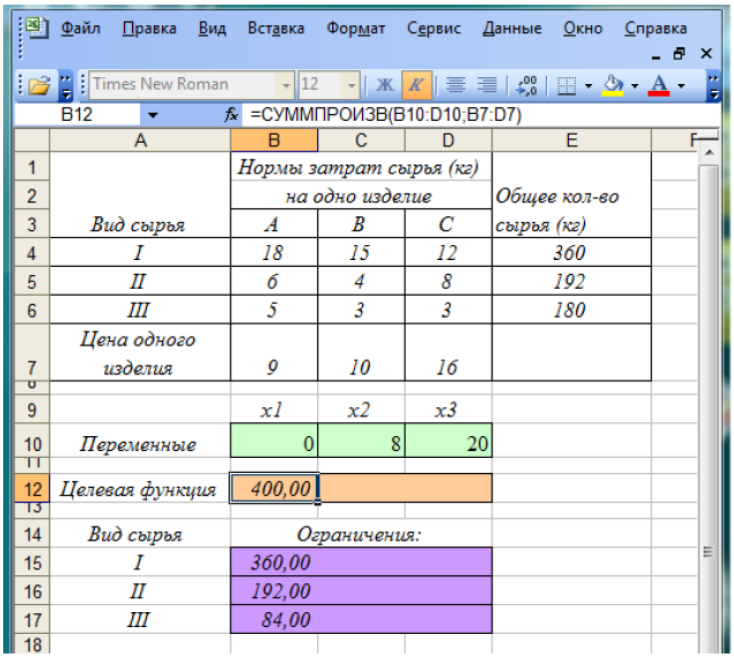


Рисунок 7 - Значение целевой функции.

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

На базе созданной модели решить контрольную задачу в соответствии с Вариантом.

<u>Исходные данные:</u>

Для изготовления различных изделий «А», «В» и «С» предприятие использует три различных вида сырья. Нормы расхода сырья на производство одного изделия каждого вида, цена одного изделия А, В и С, а также общее количество сырья каждого вида, которое может быть использовано предприятием.

Наименование данных	Обозначение в таблице Вариантов
Нормы затрат сырья №1 на одно изделие «А»	$НЗ^{А}_{1}$
Нормы затрат сырья №2 на одно изделие «А»	$НЗ^{А}_{2}$
Нормы затрат сырья №3 на одно изделие «А»	$НЗ^{А}_{3}$
Нормы затрат сырья №1 на одно изделие «В»	$НЗ^{В}_{1}$
Нормы затрат сырья №2 на одно изделие «В»	$НЗ^{В}_{2}$
Нормы затрат сырья №3 на одно изделие «В»	$НЗ^{В}_{3}$
Нормы затрат сырья №1 на одно изделие «С»	$НЗ^{С}_{1}$
Нормы затрат сырья №2 на одно изделие «С»	$НЗ^{С}_{2}$
Нормы затрат сырья №3 на одно изделие «С»	$НЗ^{С}_{3}$
Общее количество сырья №1 в наличии	$КС_1$
Общее количество сырья №2 в наличии	$КС_2$
Общее количество сырья №3 в наличии	$КС_3$
Цена одного изделия «А»	$Ц^{А}$
Цена одного изделия «В»	$Ц^{В}$
Цена одного изделия «С»	$Ц^{С}$

ТРЕБУЕТСЯ:

1. Составить план производства изделий (определить количество подлежащих выпуску изделий каждого вида) при котором общая стоимость всей произведенной предприятием продукции является максимальной.
2. Определить общую стоимость изготовленной по найденному плану продукции.
3. Определить количество оставшегося сырья каждого вида для принятия решения о закупке новой партии сырья.
4. Привести проверку правильности нахождения остатков сырья каждого вида, путем расчета с использованием полученных значений (методом подстановки).
5. Составить комментарии к каждому шагу выполнения работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ.

Таблица вариантов контрольных заданий.

Таблица вариантов контрольных заданий

ФИО	$НЗ^{A}_{1}$	$НЗ^{A}_{2}$	$НЗ^{A}_{3}$	$НЗ^{B}_{1}$	$НЗ^{B}_{2}$	$НЗ^{B}_{3}$	$НЗ^{C}_{1}$	$НЗ^{C}_{2}$	$НЗ^{c}_{3}$	$КС_{1}$	$КС_{2}$	$КС_{3}$	$Ц^{A}$	$Ц^{B}$	$Ц^{C}$	Вар. №
Архипов Ростислав Васильевич	18	15	12	6	4	8	5	3	3	360	192	180	9	10	16	1.
Афанасьев Максим Валерьевич	18	15	12	6	4	8	5	3	3	360	192	180	9	9	9	2.
Балакшина Алина Сергеевна	18	15	12	6	4	8	5	3	3	360	192	180	9	9	17	3.
Воронин Игорь Николаевич	18	15	12	6	4	8	5	3	3	360	192	180	10	9	18	4.
Герасименко Яна Александровна	18	15	12	6	4	8	5	3	3	360	192	180	10	20	9	5.
Горбунова Анастасия Николаевна	18	15	12	6	4	8	5	3	3	360	192	180	10	25	10	6.
Иконникова Диана Робертовна	18	15	12	6	4	8	5	3	3	360	192	180	10	30	10	7.
Климов Владислав Николаевич	18	15	12	6	4	8	5	3	3	360	192	180	30	30	30	8.
Крылова Ксения Борисовна	18	15	12	6	4	8	5	3	3	300	192	180	9	10	16	9.
Лапшин Андрей Евгеньевич	18	15	12	6	4	8	5	3	3	300	292	180	16	10	9	10.
Милюков Александр Васильевич	8	7	6	15	4	3	8	7	6	800	400	300	16	12	10	11.
Муллахметов Рафаэль Ринатович	8	7	6	15	4	3	12	10	5	400	282	180	16	12	10	12.
Нафидина Наталия Сергеевна	8	7	6	6	7	8	23	13	1	800	400	400	16	12	10	13.
Панина Марина Сергеевна	22	16	8	15	4	3	12	10	5	400	282	180	16	12	10	14.
Соколов Алексей Владимирович	18	15	12	6	4	8	5	3	3	200	192	180	9	10	16	15.
Субботин Владимир Дмитриевич	18	15	12	6	4	8	5	3	3	150	192	180	9	10	16	16.
Ширяев Андрей Сергеевич	20	15	12	16	4	8	5	3	3	400	292	180	16	10	9	17.
Шулепов Александр Андреевич	18	15	12	6	4	8	5	3	3	100	192	180	16	10	9	18.
Юнонин Александр Юрьевич	8	7	6	15	4	3	8	7	6	400	282	180	16	12	10	19.