Güz 2014

BSM 445 Kuyruk Teorisi

Örnek Vize Soruları

Önergeler:

- Bu dokümanın amacı vizede karşınıza çıkabilecek soru tiplerine kendinizi hazırlamanızdır. Fakat dersin öğretim üyesi soru tiplerini değiştirme hakkına sahiptir.
- Sınavda hesap makinesi getirmeniz faydanıza olacaktır.
- Sınavda toplam 4 soru sorulacaktır. Aşağıda bu 4 soruda sorulacak 4 ana konu başlığı için örnekler verilmiştir.
- Sınavda bu örneklerin sonunda size sunulan 2 ek sunulacaktır.
  - EK-1 sınav sırasında farklı rastgele değişkenler için sınavda kullanmanızı gerektirebilecek pmf, pdf ve cdf formülleri verilmektedir.
  - EK-2'de ise , derste gösterdiğimiz kuyruk modelleri için formüller yer almaktadır.

Sorular:

1. Soru derste gösterdiğimiz Hızlı Quiz doğru-yanlış ve boşluk doldurma sorularına benzer kısa sorulardan oluşacaktır. Bu soru 10 puan değerinde olacaktır. Sunumlarda örnekleri olduğu için bu dokümanda tekrar bir verilmemiştir.

2. Soru ilk haftalarda işlenen genel itibari ile Olasılık-Hatırlatma konularından olacaktır. Fakat daha sonra kuyruk modellemelerinde kullandığımız dağılımlar ile de alakadardır. 25 puan.

Örnek 2-) Bir otobüs durağına varan yolcuları gözlemlemeye başladınız ve 1 saatte durağa ortalama 30 yolcunun geldiğini gördünüz. Bu yolculardan 20'si kampüs yolcusu ve 10'u çarşı yolcusu. Bu durumda aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Durağa yolcuların varış hızı nedir, kampus yolcularının varış hızı nedir, çarşı yolcularının varış hızı nedir (yolcu/dakika cinsinden)?

b) Durağa bir yolcu vardıktan sonra diğer bir yolcu varıncaya kadar geçen süreyi hangi dağılımla gösterebiliriz? Bu dağılıma göre;

- **i.** Bu sürenin beklentisi ve varyansı nedir? (2 dk ve 4 dk^2)
- **ii.** Bu sürenin 4 dakika olması olasılığı nedir? (0,06766)

c) Belirli bir zaman aralığında durağa gelen yolcu sayısı hangi dağılımla ifade edilebilir? Buna göre;

- **i.** 15 dakika içinde durağa 20 yolcu gelme olasılığı nedir? ($7{,}21 \times 10^{-5}$)
- **ii.** 10 dakika içinde durağa 5 kampüs yolcusu ve 10 çarşı yolcusu gelme olasılığı nedir? ($1{,}053 \times 10^{-6}$)

3. Soru Kuyruk modelleri ile ilgili olacaktır. 30 puan

Örnek 3-) Bir acil durum operatörünün önüne işler G/G/1 kuyruk modeli ile gelmektedir. 10 dakikalık gözlem boyunca operatöre ekranına 30 adet iş geldiği ve operatörün herhangi bir işi 10 sn.'de bitirdiği gözlemlenmiştir. Her bir iş sistemde ortalama 1 dakika kalmaktadır. Bu durumda;

(a) Sistem kararlı mıdır? Operatör ekranında ortalama kaç iş görecektir (operatörün servis sağladığı işin de hala ekranda göründüğünü varsayın)?Sistemde bekleyen kaç iş vardır? (ortalama iş sayısı 3, bekleyen iş sayısı 2,5)
(b) Eğer varışlar arası zaman üssel olduğu verilmişse (M/G/1), 5 dakika içerisinde sisteme 10 adet iş gelmesi olasılığı nedir? (0,0486) Eğer servis zamanı da üssel olarak dağıtılmışsa (M/M/1);
i) Sistemde kararlı durumda 5 adet iş olması olasılığı nedir? (1/32)
ii) Tepki süresinin 40 sn.den fazla olma ihtimali nedir? (0,864)
(c) Operatörün supervizörü sistemde bekleyen iş sayısı 10 veya daha fazla olduğu zaman operatörden ortalama servis zamanını yarıya düşürmesini istemektedir. Bu durumda sistemin doğum-ölüm sürecini çiziniz ve kararlı durumda sistemde 5 adet iş olması olasılığını hesaplayınız. (0,015635)

4. Soru da Kuyruk modelleri ile ilgili olacaktır. 35 puan.

Örnek 4-) Bir önceki sorudaki sistemi (b) şıkkında olduğu gibi yine M/M/1 olarak düşünelim. Sistem yöneticileri 1 operatörün yeterli olmadığını düşünerek sisteme yine aynı hızda servis sağlayan k adet daha operatör eklemişlerdir. Bu durumda;
(a) Sistemde kararlı durumda 5 adet iş olması olasılığı nedir? (cevap diğer parametreler cinsinden olacaktır)
(b) Kuyruklama ihtimalinin $\frac{100(k\rho+\rho)^k}{k!(k+1)}P_0$ değerinden küçük olması için k en az kaç olmalıdır? (5'den büyük olmalıdır)
(c) k = 3 ise, sistemin ortalama tepki süresi nedir? (10,01)
(d) k = 3 ise sistemde bekleyen iş sayısının ortalaması nedir? ($5,15 \times 10^{-4}$)
(e) k = 4 için sistemde bekleyen iş sayısı 5 olduğunda sisteme diğer operatörlerle aynı hızda çalışan yedek bir operatör dahil oluyor ve bekleyen iş sayısı 5'den aşağı düştüğünde yedek operatör sistemden ayrılıyor. Bu durumda sistemin doğum-ölüm sürecini çiziniz ve kararlı durumda sistemde 11 adet iş olması olasılığını P_0 cinsinden hesaplayınız. ($5,6517 \times 10^{-7} P_0$)

EK-1: Formüller

Rastgele Değişken	pmf veya pdf	cdf	Beklenti	Varyans
Binomial	$p_X(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$	-	np	$np(1-p)$
Poisson	$p_X(i) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$	-	λ	λ
Geometrik	$p_X(i) = p(1-p)^{i-1}$	-	$1/p$	$(1-p)/p^2$
Negatif Binomial	$p_X(i) = \binom{i-1}{r-1} p^r (1-p)^{i-r}$	-	$pr/(1-p)$	$pr/(1-p)^2$
Uniform (Tekdüze)	$f(x) = \begin{cases} 1/(\beta-\alpha) & \alpha \le x \le \beta \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & x \in [\alpha,\beta) \\ 1 & x \ge \beta \end{cases}$	$(\alpha+\beta)/2$	$\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$
Normal (Gaussian)	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$	$\mathrm{F(x)} = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} + erf\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$	μ	σ^2
Üssel (Exponential)	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \ge 0 \\ 0 & \mathrm{x<0} \end{cases}$	$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$

EK-2: Kuyruk Formülleri

Genel Doğum-Ölüm Süreçleri

$$p_n = \frac{\lambda_0\lambda_1.....\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2....\mu_n} p_0 \quad n = 1,2,.....,\infty$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\prod_{j=0}^{n-1}\frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}}}$$

M/M/1 Formülleri

$$p_0 = 1-\rho \qquad U = 1 - p_0 = \rho$$

$$p_n = (1-\rho)\rho^n \qquad E[n] = \frac{\rho}{1-\rho} \qquad Var(n) = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

$$P\{n_q = k\} = \begin{cases} 1-\rho^2 & k = 0 \\ (1-\rho)\rho^{k+1} & k > 0 \end{cases} \qquad E[n_q] = \rho^2/(1-\rho) \qquad Var(n_q) = \rho^2(1+\rho-\rho^2)/(1-\rho)^2$$

$$F(r) = 1 - e^{-r\mu(1-\rho)} \qquad E[r] = \frac{1}{\mu(1-\rho)} \qquad Var(r) = \frac{1}{\mu^2(1-\rho)^2} \qquad P\{\text{kuyruklama}\} = \rho$$

$$F(w) = 1 - e^{-w\mu(1-\rho)} \qquad E[w] = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} \qquad Var(w) = \frac{(2-\rho)\rho}{\mu^2(1-\rho)^2}$$

Sistemde n yada daha fazla iş olma olasılığı: ρ^n

M/M/m Formülleri

$$\rho = \lambda/(m\mu) \qquad U = \rho \qquad p_0 = \left[1 + \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)} + \sum_{n=1}^{m-1}\frac{(m\rho)^n}{n!}\right]^{-1}$$

$$p_n = \begin{cases} \frac{(m\rho)^n}{n!} p_0 & n < m \\ \frac{\rho^n m^m}{m!} p_0 & n \geq m \end{cases} \qquad P_Q = p_0 \frac{(m\rho)^m}{m!}\frac{1}{1-\rho}$$

$$E[r] = P_Q \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} + \frac{1}{\mu}$$