MATEMATIKA

Nama : Muhammad Rafi Rizaldi

NRP : 3123600001

Kelas : 1 D4 IT A

Dosen Pengampu : Ira Prasetyaningrum S. Si, M.T.

Sumber :

1. Judul : Matriks Persamaan Linier dan Pemrograman Linier

   Pengarang : Dr. Ruminta

   No : 512.943

2. Judul : Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada ilmu komputer

   Pengarang : Drs. Jong Jek Siang, M Sc

   No : 511.2

Soal :

1. Tentukan penyelesaian persamaan berikut :

   $x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$

   $-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1$

   $3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10$

   Solusi :

   $x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$

   $-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1$

   $3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{b_2 + b_1,\ b_3 - 3b_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -10 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ -14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & -10 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\ 9\\ -14\end{bmatrix} \xrightarrow{b_2\,(-1)} \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -5\\ 0 & -10 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\ -9\\ -14\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -5\\ 0 & -10 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\ -9\\ -14\end{bmatrix} \xrightarrow{b_1\,-b_2,\ b_3 + 10b_1} \begin{bmatrix}1 & 0 & 7\\ 0 & -1 & -5\\ 0 & 0 & 52\end{bmatrix}\begin{bmatrix}17\\ -9\\ 104\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -5\\ 0 & -10 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\ -9\\ -14\end{bmatrix} \xrightarrow{b_1\,-b_2,\ b_3 + 10b_1} \begin{bmatrix}1 & 0 & 7\\ 0 & 1 & -5\\ 0 & 0 & 52\end{bmatrix}\begin{bmatrix}17\\ -9\\ 104\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 7\\ 0 & 1 & -5\\ 0 & 0 & 52\end{bmatrix}\begin{bmatrix}17\\ -9\\ 104\end{bmatrix} \xrightarrow{b_3\,(\frac{1}{52})} \begin{bmatrix}1 & 0 & 7\\ 0 & 1 & -5\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}17\\ -9\\ 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 7\\ 0 & 1 & -5\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}17\\ -9\\ 2\end{bmatrix} \xrightarrow{b_1 - 7b_3,\ b_2 + 5b_3} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$$

Dari matriks tersebut diperoleh :

$x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$

2. Contoh 11.12

Misalkan X dan Y adalah himpunan-himpunan dan fungsi f: X→Y adalah bijektif. Buktikan bahwa f': Y→X juga merupakan fungsi bijektif.

Penyelesaian:

Untuk membuktikan bahwa f^{-1} adalah fungsi bijektif, haruslah dibuktikan Bahwa f^{-1} injektif sekaligus surjektif.

- Harus dibuktikan f^{-1} injektif, yaitu $(\forall y_1, y_2 \in Y)\ f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) \rightarrow y1 = y2$

Ambil sembarang $y_1, y_2 \in Y$ dengan sifat $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$

Misalkan x1 = f'(y) dan x2 = f'(y2).

Menurut definisi invers fungsi,

$f^{-1}(y_1) = x_1$ berarti bahwa $f(x) = y_1$

$f^{-1}(y_2) = x_2$ berarti bahwa $f(x)=y2$

Karena $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$, berarti bahwa $x_1 = x_2$

f merupakan suatu fungsi, maka haruslah $f(x_1) = f(x_2)$(syarat suatu fungsi $f: X \rightarrow Y$ adalah kawan dari setiap $x \in X$ tunggal).

$f(x_1) = f(x_2)$ berarti $y_1 = y_2$ (karena $y_1 = f(x_1)$ dan $y_2 = f(x_2)$).

Dari $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$ dapat diturunkan $y_1 = y_2$ yang berarti bahwa f injektif.

- Harus dibuktikan f^{-1} surjektif, yaitu $(\forall\ x \in X)(\exists y \in Y)\ f^{-1}(y) = x$

Ambil sembarang $x \in X$.

Karena f diketahui merupakan fungsi, maka f(x) ada (sebutlah y). Jadi $f(x) = y$.

Menurut definisi invers fungsi, $f^{-1} = x \leftrightarrow f(x) = y$

Karena $f(x) = y$ maka menurut definisi haruslah $f^{-1}(y) = x$

Jadi untuk sembarang $x \in X$ ada $y \in Y$ dengan sifat $f^{-1}(y) = x$,

ini berarti f^{-1} surjektif

- dikarenakan f^{-1} injektif dan surjektif, maka f^{-1} bijektif.

3. Misalkan f dan g adalah fungsi pada himpunan bilangan bulat Z yang didefiniskan dengan rumus $f(n) = n + 1$ dan $g(n) = n^2\ \forall n \in Z$
   Hitunglah (gof)(n) dan f(f(n))
   Apakah (gof) = (fog)
   Penyelesaian :
   $f(n) = n+1$; $g(n) = n^2$

   a. $(gof)(n) = g((f(n)) = g(n+1) = (n+1)^2$

      $(fof)(n) = f(f(n)) = f(n + 1) = (n+1)+1 = n+2$

   b. $(fog)(n) = f(g(n)) = f(n^2) = n^2+1$

      Tampak bahwa $(fog)(n) \neq (gof)(n)$ sehingga $fog \neq gof$

4. Manakah di antara relasi yang digambarkan dalam gambar 11.2 berikut ini

yang merupakan fungsi dari X = {a, b, c} ke Y = {1, 2, 3, 4} ?

Penyelesaian :

Untuk menentukan apakah sautu relasi yang ditunjukkan dengan diagram panah merupakan suatu fungsi, haruslah dicek 2 hal :

1. Setiap elemen x ∈ X mempunyai garis keluar dari x
2. Garis yang keluar dari setiap elemen x ∈ X haruslah tunggal (tidak boleh lebih dari satu)

a. Bukan fungsi karena ada b ∈ X yang tidak mempunyai kawan di Y (tidak ada garis yang keluar dari b ∈ X. Jadi, tidak memenuhi syarat (1)).

b. Bukan fungsi karena c ∈ X mempunyai lebih dari satu kawan di Y (ada 2 garis yang keluar dari c ∈ X. Jadi, tidak memenuhi syarat(2))

c. Merupakan fungsi karena ada satu garis yang keluar dari setiap elemen x ∈ X. perhatikan bahwa f(a) = f(b) = 2. Meskipun ada anggota Y mempunyai lebih dari satu kawan di X, hal ini tidak memengaruhi

5. Tentukan penyelesaian persamaan lnier simultan homogen beikut

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$

$2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1$

$3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0$

Solusi :

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$

$2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1$

$3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{b_2 - 2b_1,\ b_3 - 3b_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & 3 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ -17 \\ -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{b_2\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} \\ 0 & 3 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ \frac{-17}{2} \\ -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{b_3 - 3b_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ \frac{-17}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{b_3\,(-2)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ \frac{-17}{2} \\ 3 \end{bmatrix}$$

Hasil operasi eliminasi Gauss matriks ekstensi A_{3x4} tersebut, diperoleh x, pada baris terakhir matriks tersebut :

$x_3 = 3$

Dari baris ke -2 matriks hasil eliminasi Gauss diperoleh x_2 :

$x_2 - \frac{-7}{2}x_3 = \frac{-17}{2} \rightarrow x_2 = \frac{-17}{2} + \frac{7}{2}x_3 \rightarrow x_2 = \frac{-17}{2} + \frac{7}{2}(3) = \frac{4}{2} = 2$

Jadi $x_2 = 2$

Dari baris ke-1 matriks hasil eliminasi Gauss diperoleh x_1 :

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \rightarrow x_1 = 9 - x_2 - 2x_3 \rightarrow x_1 \; 9 - 2 - 2(3) = 1$

Jadi $x_1 = 1$

Jadi himpunan penyelesaian persamaa tersebut adalah {(1, 2 ,3)}