



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
«Дальневосточный федеральный университет»  
(ДВФУ)

---

---

**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ  
ТЕХНОЛОГИЙ**

**Департамент математического и компьютерного  
моделирования**

**ОТЧЕТ  
к лабораторной работе № 3**

по дисциплине «Математическое и компьютерное моделирование  
(Mathematical and Computer Modeling)»

Направление подготовки  
**01.03.02 «Прикладная математика и информатика»**

Выполнила студентка  
группы Б9119-01.03.02

Пахомова Д.Е.

(ФИО)

\_\_\_\_\_ (подпись)

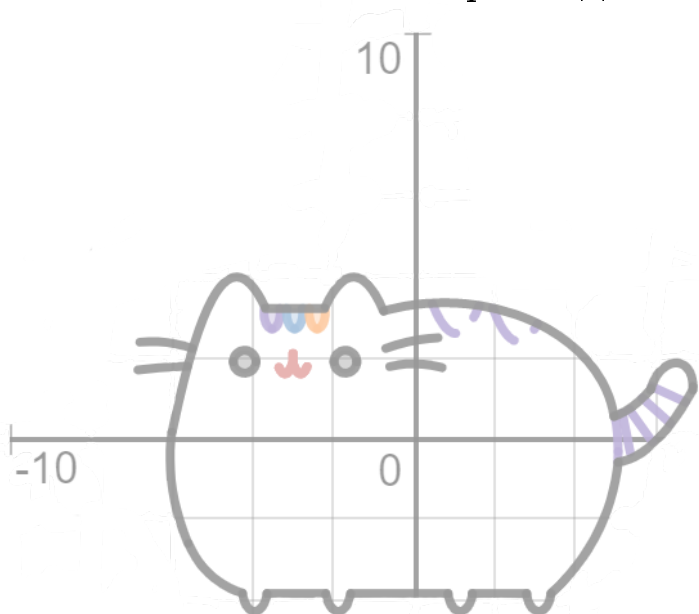
Проверил д.ф.-м.н.

Пермяков М.С.

(ФИО)

\_\_\_\_\_ (подпись)

« 17 » января 20 22 г.



г. Владивосток  
2022

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>Задание 1: Математический маятник без учета трения</b>	<b>3</b>
1.1 Формулировка задачи . . . . .	3
1.3 Постановка физической модели . . . . .	3
1.2 Постановка математической модели процесса . . . . .	3
<b>Задание 2: Математический маятник с учетом трения</b>	<b>6</b>
2.1 Формулировка задачи . . . . .	6
2.2 Постановка физической модели . . . . .	6
2.3 Постановка математической модели процесса . . . . .	7
<b>Заключение</b>	<b>11</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ</b>	<b>12</b>

# Введение

В данной лабораторной работе требуется рассмотреть математическую модель маятника.

## Задание 1: Математический маятник без учета трения

### 1.1 Формулировка задачи

Имеется математический маятник - шар, подвешенный на нити. Размерами шара, растяжением и массой нити пренебречь. Трением пренебречь.

### 1.3 Постановка физической модели

Для решения задачи используем следующие параметры:

Момент силы:  $M[\text{Н} \cdot \text{м}]$ ;

Момент инерции тела:  $I[\text{м}^2 \cdot \text{кг}]$ ;

Угол отклонения от положения равновесия:  $\alpha[\text{градусы}]$ ;

Длина нити:  $l[\text{м}]$ ;

Время:  $t[\text{с}]$ ;

Масса маятника:  $m[\text{кг}]$ ;

Гравитационная постоянная:  $g \approx 9,8 \left[ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2} \right]$ ;

Круговая частота:  $\omega \left[ \frac{\text{рад}}{\text{с}} \right]$ .

### 1.2 Постановка математической модели процесса

Для построения математической модели рассмотрим:

1. Формулу момента силы:

$$M = -mgl \cdot \sin \alpha;$$

2. Формулу момента инерции:

$$I = ml^2;$$

3. Формулу колебаний маятника:

$$\alpha''(t) = \frac{M}{I} \rightarrow \alpha''(t) = \frac{-g \cdot \sin \alpha}{l};$$

4. Формулу круговой частоты:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}};$$

Запишем уравнение (3) через формулу круговой частоты:

$$\alpha''(t) + \omega^2 \sin \alpha = 0;$$

Учтем, что при малых колебаниях  $\sin \alpha \approx \alpha$ :

$$\alpha''(t) + \omega^2 \alpha = 0; \quad (5)$$

Тогда математическая модель будет представлять собой задачу Коши для уравнения (5) с начальными условиями:

$$\begin{cases} \alpha(0) = \alpha_0, \\ \alpha'(0) = \alpha'_0. \end{cases}$$

;

Приведем к системе ОДУ:

$$\begin{cases} \alpha''(t) = -\omega^2 \alpha, \\ \alpha(0) = \alpha_0, \\ \alpha'(0) = \alpha'_0. \end{cases}$$

С помощью библиотеки `matplotlib` языка Python построим графики угла отклонения и траекторию хода для маятника. Решение системы ОДУ производим при помощи метода `odeint` из библиотеки `scipy.integrate` языка Python. Метод вычислений, используемый в методе `odeint` - LSODA, разновидность алгоритма Адамса-Бешфорта.

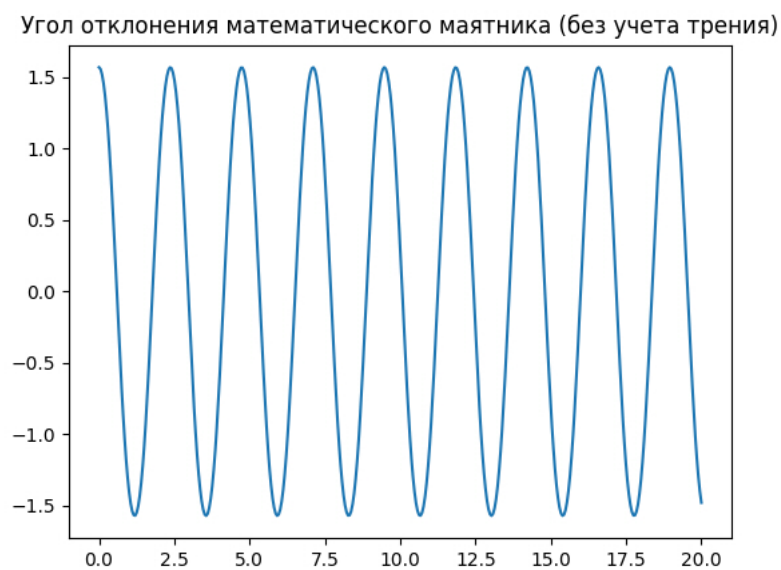


Рис. 1: Задание 1.

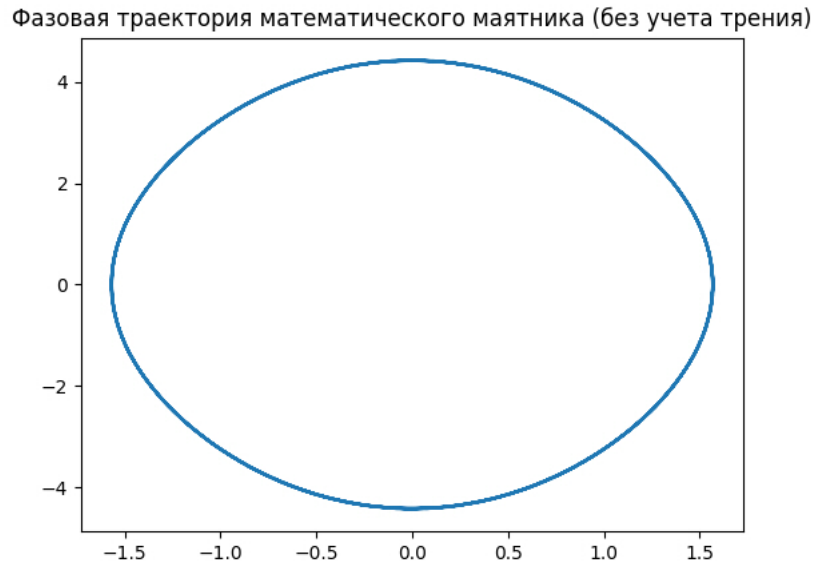


Рис. 2: Задание 1.

Видно, что если не учитывать трение маятника о воздух, угол отклонения будет постоянным, а траектория, описываемая шаром, является эллипсом.

## Задание 2: Математический маятник с учетом трения

### 2.1 Формулировка задачи

Имеется математический маятник - шар, подвешенный на нити. Раз-  
мерами шара, растяжением и массой нити пренебречь.

### 2.2 Постановка физической модели

Для решения задачи используем следующие параметры:

Момент силы:  $M[\text{Н} \cdot \text{м}]$ ;

Момент инерции тела:  $I[\text{м}^2 \cdot \text{кг}]$ ;

Угол отклонения от положения равновесия:  $\alpha[\text{градусы}]$ ;

Длина нити:  $l[\text{м}]$ ;

Время:  $t[\text{с}]$ ;

Масса маятника:  $m[\text{кг}]$ ;

Гравитационная постоянная:  $g \approx 9,8 \left[ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2} \right]$ ;

Коэффициент трения:  $k = 0,4$ ;

Круговая частота:  $\omega \left[ \frac{\text{рад}}{\text{с}} \right]$ .

## 2.3 Постановка математической модели процесса

1. Формулу момента силы:

$$M = -mgl \cdot \sin \alpha;$$

2. Формулу момента инерции:

$$I = ml^2;$$

3. Формулу колебаний маятника:

$$\alpha''(t) = \frac{M}{I};$$

4. Формулу круговой частоты:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}};$$

Запишем уравнение (3) через формулу круговой частоты, добавив множитель трения:

$$\alpha''(t) + k \cdot \alpha'(t) + \omega^2 \sin \alpha = 0;$$

Учтем, что при малых колебаниях  $\sin \alpha \approx \alpha$ :

$$\alpha''(t) + k \cdot \alpha'(t) + \omega^2 \alpha = 0; \quad (5)$$

Тогда математическая модель будет представлять собой задачу Коши для уравнения (5) с начальными условиями:

$$\begin{cases} \alpha(0) = \alpha_0, \\ \alpha'(0) = \alpha'_0. \end{cases}$$

;

Перейдем к системе ОДУ:

$$\begin{cases} \alpha''(t) = -k \cdot \alpha'(t) - \omega^2 \alpha, \\ \alpha(0) = \alpha_0, \\ \alpha'(0) = \alpha'_0. \end{cases}$$

.

Решение системы ОДУ произведем с помощью метода `odeint` из библиотеки `scipy.integrate` языка Python. Метод вычислений, используемый в методе `odeint` - LSODA, разновидность алгоритма Адамса-Бешфорта. С помощью библиотеки `matplotlib` языка Python построим графики угла отклонения и фазовой траектории для математического маятника.



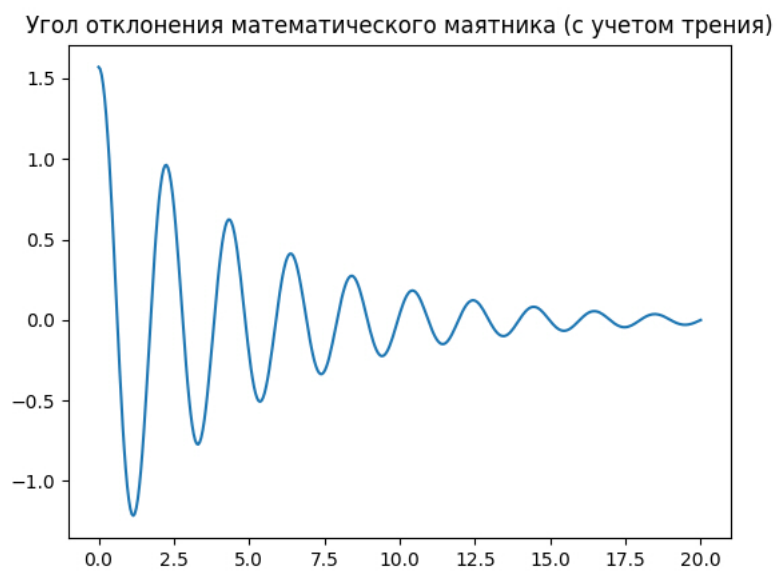


Рис. 3: Задание 2.

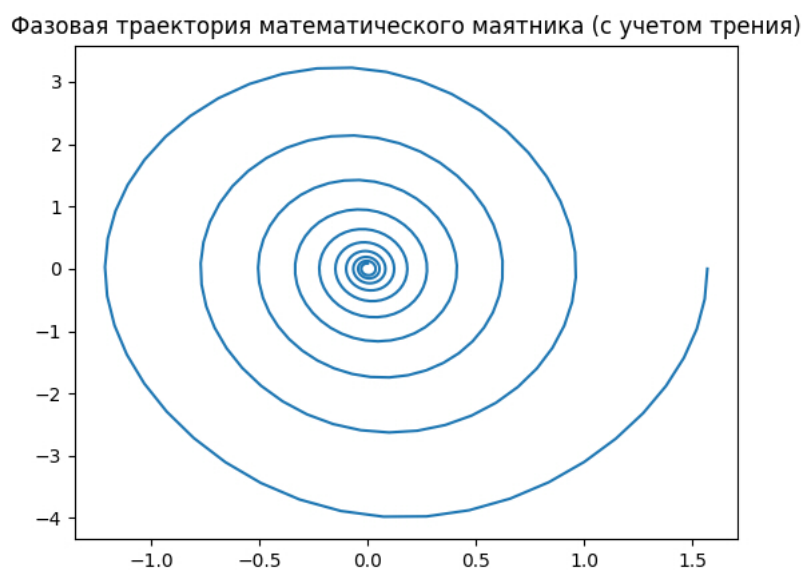


Рис. 4: Задание 2.

Видно, что если учитывать трение маятника о воздух, угол отклонения будет уменьшаться, а траектория движения окажется спиралью.

## Заключение

В данной лабораторной работе мною были решены и оформлены в среде компьютерной верстки «TeX» поставленные задачи: построены математическая и компьютерная модели математического маятника с учетом трения о воздух и без него, проанализированы процессы и сам объект.

# ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Код для решения дифференциального уравнения и построения графиков к задаче 1:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math
from scipy.integrate import odeint

g = 9.8
k = 0.4
L = 1
omega = g / L
initial = [math.pi / 2, 0]
t = np.linspace(0, 20, 400)
f2 = lambda x, t: [x[1], - omega * np.sin(x[0])]
[y21, y22] = odeint(f2, initial, t).T

plt.plot(t, y21)
plt.show()

plt.plot(y21, y22)
plt.show()
```

2. Код для решения дифференциального уравнения и построения графиков к задаче 2:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math
from scipy.integrate import odeint

g = 9.8
k = 0.4
L = 1
omega = g / L
initial = [math.pi / 2, 0]
t = np.linspace(0, 20, 400)
f1 = lambda x, t: [x[1], -k * x[1] - omega * np.sin(x[0])]
[y11, y12] = odeint(f1, initial, t).T

plt.grid(True)
plt.plot(t, y11)
plt.show()

plt.plot(y11, y12)
plt.show()
```