

Roll No.

D-3605**B. Sc. (Part I) EXAMINATION, 2020**

(Old Course)

MATHEMATICS

Paper Third

(Vector Analysis and Geometry)

Time : Three Hours]

[Maximum Marks : 50

नोट : इस प्रश्नपत्र में पाँच इकाइयाँ हैं। प्रत्येक इकाई में तीन भाग हैं। प्रत्येक इकाई से दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

This paper has five Units. Each Unit has three parts. Solve any two parts from each Unit. All questions carry equal marks.

इकाई—1**(UNIT—1)**

1. (अ) यदि :

$$\vec{r} = \vec{a} \cos \omega t + \vec{b} \sin \omega t$$

हो, तो दिखाइये कि :

$$(i) \quad \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \omega (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$(ii) \quad \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\omega^2 \vec{r}$$

जहाँ \vec{a} और \vec{b} अचर सदिश हैं और ω अचर अदिश हैं।

If :

$$\vec{r} = \vec{a} \cos \omega t + \vec{b} \sin \omega t$$

then show that :

$$(i) \quad \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \omega (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$(ii) \quad \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\omega^2 \vec{r}$$

where \vec{a} and \vec{b} are constant vectors and ω is constant scalar.

(ब) एक कण वक्र :

$$x = 3t^2$$

$$y = t^2 - 2t$$

$$z = t^3$$

पर गतिमान है, तो इसका वेग और त्वरण, समय $t = 1$ पर ज्ञात कीजिए।

A particle is moving in a curve :

$$x = 3t^2$$

$$y = t^2 - 2t$$

$$z = t^3$$

then find its value of velocity and acceleration at $t = 1$.

[3]

D-3605

(स) सिद्ध कीजिए कि :

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} r^m) = m(m+1)r^{m-2}$$

Prove that :

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} r^m) = m(m+1)r^{m-2}$$

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) यदि :

$$\vec{a} = 2ti - 3j + 2tk$$

$$\vec{b} = i - 2j + 3k$$

और $\vec{c} = 3i + tj + 3k$

तब $\int_0^2 \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) dt$ का मान ज्ञात कीजिए।

If :

$$\vec{a} = 2ti - 3j + 2tk$$

$$\vec{b} = i - 2j + 3k$$

and $\vec{c} = 3i + tj + 3k$

then evaluate :

$$\int_0^2 \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) dt$$

(A-81) P. T. O.

[4]

D-3605

(ब) सिद्ध कीजिए कि :

$$\iint_S [(x^3 - yz)i - 2x^2yj + 2k] \cdot \hat{n} dS = \frac{a^5}{3}$$

जहाँ S समतल :

$$x = 0,$$

$$x = a,$$

$$y = 0,$$

$$y = a,$$

$$z = 0,$$

$$z = a$$

के द्वारा घिरे घन का पृष्ठ दर्शाता है।

Prove that :

$$\iint_S [(x^3 - yz)i - 2x^2yj + 2k] \cdot \hat{n} dS = \frac{a^5}{3}$$

where S is the surface of a cube bounded by the planes :

$$x = 0,$$

$$x = a,$$

$$y = 0,$$

$$y = a,$$

$$z = 0,$$

$$z = a.$$

(स) समतल में स्टोक्स प्रमेय के द्वारा निम्नलिखित का मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_C [(y - \sin x) dx + \cos x dy]$$

जहाँ C उस त्रिभुज की परिसीमा है, जो रेखाओं $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ तथा $\pi y = 2x$ के द्वारा परिबद्ध है।

(A-81)

Using Stokes theorem on plane, evaluate the following :

$$\int_C [(y - \sin x) dx + \cos x dy]$$

where C is the boundary of a triangle bounded by the straight lines $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ and $\pi y = 2x$.

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए कि दो वृत्त एक-दूसरे का लम्बवत् प्रतिच्छेद करते हैं।

Find the condition that two circles intersect orthogonally to each other.

- (ब) सिद्ध कीजिए कि किसी शांकव के लम्बरूप नाभिगत जीवाओं के व्युत्क्रमों का योग अचर होता है।

Prove that the sum of reciprocals of perpendicular focal chords of a conic is constant.

- (स) उन शांकवों का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो कि दीर्घवृत्त

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ से संनाभि हैं।}$$

Find the equation of all conics which are confocal to the ellipse :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) सिद्ध कीजिए कि समतल :

$$2x - 2y + z + 12 = 0$$

गोले :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0$$

को स्पर्श करता है। स्पर्श बिन्दु भी ज्ञात कीजिए।

Prove that the plane :

$$2x - 2y + z + 12 = 0$$

touches the sphere :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0$$

Find the point of contact.

- (ब) सिद्ध कीजिए कि समीकरण :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

एक शंकु प्रदर्शित करता है, यदि :

$$\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = d.$$

Prove that the equation :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

represents a cone, if :

$$\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = d.$$

- (स) उस बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी जनक रेखा :

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

के समानांतर हैं तथा वक्र $x^2 + y^2 = 16$, $z = 0$ इसका आधार वक्र है।

[7]

D-3605

Find the equation of a cylinder whose generating lines are parallel to the line :

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

and whose guiding curve is a curve given by :

$$x^2 + y^2 = 16, z = 0$$

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) वह प्रतिबंध ज्ञात कीजिए जब समतल :

$$lx + my + nz = p$$

दीर्घवृत्तज :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

को स्पर्श करता है और स्पर्श बिन्दु भी ज्ञात कीजिए।

Find the condition that the plane :

$$lx + my + nz = p$$

touches the ellipsoid :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

and hence find also the point of contact.

- (ब) अतिपरवलयज :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

के बिन्दु $(a \cos \alpha, b \sin \alpha, 0)$ से जाने वाले जनकों के समीकरण ज्ञात कीजिए।

(A-81) P. T. O.

[8]

D-3605

Find the equation of generators of the hyperboloid :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

passing through the point $(a \cos \alpha, b \sin \alpha, 0)$.

- (स) समीकरण :

$$x^2 + 8y^2 + z^2 - 9yz + 14zx - 16xy - 6x$$

$$-y + 4z - 2 = 0$$

से निरूपित पृष्ठ के बिन्दु $(1, 2, 3)$ पर स्पर्श तल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of tangent plane of the surface represented by the equation :

$$x^2 + 8y^2 + z^2 - 9yz + 14zx - 16xy - 6x$$

$$-y + 4z - 2 = 0$$

at the point $(1, 2, 3)$.

D-3605

1,400

(A-81)