G-3688

B.Sc. (Part-III) Examination, 2023

(Old/New Course)

MATHEMATICS

Paper - I

(Analysis)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 50

नोट : प्रत्येक प्रश्न से कोई दो भाग हल करें। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Attempt any two parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई–I / UNIT-I

Q. 1. (अ) मान लो कि $\sum c_n$ अभिसरण करती है। यदि $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \ (-1<x<1)$ तब सिद्ध कीजिए कि :

$$\lim_{x\to1} f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

Suppose the series $\sum c_n$ convergent. If $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \ (-1<x<1)$ then prove that :

$$\lim_{x\to1} f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n .$$

(ब) श्वार्ज का प्रमेय लीखिए और सिद्ध कीजिए।

State and prove Schwarz's theorem.

(स) फलन $f(x) = x^2, -\pi < x < \pi$ तथा $f(x + 2\pi) = f(x)$, की फूरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए। अतः निगमन कीजिये कि :

$$\frac{\pi^2}{12}=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}\cdots\cdots\cdots$$

Find the Fourier series of the function $f(x) = x^2, -\pi < x < \pi$ and $f(x + 2\pi) = f(x)$. Hence deduce that :

$$\frac{\pi^2}{12}=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}\cdots\cdots\cdots$$

इकाई–II / UNIT-II

Q. 2. (अ) मान लो $f : [a, b] \to R$, [a, b] पर परिबद्ध फलन है। तब सिद्ध कीजिए कि f, R-समाकलनीय है यदि और केवल यदि प्रत्येक $\varepsilon > 0$ के लिये [a, b] के एक विभाजन P का आस्तित्व इस प्रकार है कि :

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$$

Let $f : [a, b] \to R$ be a bounded function on [a, b]. Then prove that $f \in R[ab]$, if and only if, for every $\varepsilon > 0$ there exist a partition P of [a, b] such that :

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$$

(ब) बीटा फलन $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$ के अभिसरण के लिये व्याख्या कीजिये।

Discuss the convergence of Beta function :

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

(स) यदि $|\alpha| < 1$, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_0^\pi \frac{\log(1+\alpha\cos x)}{\cos x}dx = \pi\sin^{-1}\alpha$$

If $|\alpha| < 1$, then prove that :

$$\int_0^\pi \frac{\log(1+\alpha\cos x)}{\cos x}dx = \pi\sin^{-1}\alpha$$

इकाई–III / UNIT-III

Q. 3. (अ) सिद्ध कीजिए कि दो समिश्र संख्याओं का योग का मापांक सदैव उसके मापांकों के योग से छोटा या बराबर होता है। इसकी ज्यामितीय व्याख्या भी दीजिये।

Prove that the modulus of the sum of two complex number is always less than or equal to sum of their moduli. Also give its geometrical interpretation.

(ब) यदि $u+v = \dfrac{2\sin 2x}{e^{2y} - e^{-2y} - 2\cos 2x}$ तथा f(z) = u + iv, z = x + iy का एक विश्लेषिक फलन है, तब f(z) को z के पदों में व्यक्त कीजिये।

https://www.prsunotes.com

If $u+v = \dfrac{2\sin 2x}{e^{2y} - e^{-2y} - 2\cos 2x}$ and $f(z) = u + iv$, is an analytic function of $z = x + iy$, then find $f(z)$ in terms of z.

(स) उन सभी द्विरैखिक रूपान्तरणों को ज्ञात कीजिये जो अर्द्ध समतल $I(z) \geq 0$ को इकाई वृत्तीय चक्रिका $|w| \leq 1$ में आच्छादक प्रतिचित्रित करता है।

Find all the bilinear transformations which maps the half plane $I(z) \geq 0$ onto the unit circular disc $|w| \leq 1$.

इकाई–IV / UNIT-IV

Q. 4. (अ) मान लो (X, d) कोई दूरीक समष्टि है तथा मान लो M एक धनात्मक संख्या है, तब सिद्ध कीजिए कि X के लिये एक दूरीक d^* इस प्रकार विद्यमान है कि दूरीक समष्टि (X, d^*), $\delta(X) \leq M$ सहित परिबद्ध है।

Let (X, d) be any metric space and let M be a positive number, then prove that there exists a metric d^* for X such that the metric space (X, d^*) is bounded with $\delta(X) \leq M$.

(ब) मान लो (X, d) एक पूर्ण दूरीक समष्टि है तथा मान लो f, X से स्वयं में एक संकुचन प्रतिचित्रण है, अर्थात्

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha\, d(xy)$$

सभी $x, y \in X$ के लिये जहाँ $0 < \alpha < 1$, तब सिद्ध कीजिए कि X में प्रतिचित्रण f का एक अद्वितीय स्थिर बिन्दु का अस्तित्व होता है।

Let (X, d) be a complete metric space and let f be a contraction mapping from X into itself; that is

$d(f(x), f(y)) \leq \alpha\, d(xy)$

for all $x, y \in X$ where $0 < \alpha < 1$. Then prove that there exist a unique fixed point of the mapping f in X.

(स) R में आर्किमिडीज गुणधर्म का कथन लिखिये एवं सिद्ध कीजिये।

State and prove Archimedean property in R.

इकाई–V / UNIT-V

Q. 5. (अ) सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक गणनीय सघन दूरीक समष्टि द्वितीय गणनीय होता है।

Prove that every countably dense metric space is second countable.

(ब) मान लो (X, d) तथा (Y, ρ) दो दूरीक समष्टियां हैं और $f : X \to Y$ एक फलन है। तब सिद्ध कीजिए कि f सतत् है यदि और केवल यदि $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, X के प्रत्येक उपसमुच्चय A के लिये।

Let (X, d) and (Y, ρ) be two metric spaces and $f : X \to Y$ be a function. Then prove that f is continuous if and only if $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, for every subset A of X.

(स) सिद्ध कीजिये कि किसी संहत दूरीक समष्टि का एक संवृत उपसमुच्चय सहित होता है।

Prove that a closed subset of a compact metric space is compact.