

Roll No. ....

**E-3768(S)**

**B. Sc. (Part III) Suppl. EXAMINATION, 2021**

**MATHEMATICS**

**Paper First**

**(Analysis)**

*Time : Three Hours ]*

*[ Maximum Marks : 50*

नोट : प्रत्येक इकाई से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Attempt any *two* parts of each question. All questions carry equal marks.

इकाई—1

**(UNIT—1)**

1. (अ) श्रेणी :

$$1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{4\sqrt{4}} + \dots$$

की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए।

Test the convergence of the series :

$$1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{4\sqrt{4}} + \dots$$

**P. T. O.**

(ब) यदि :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x, y \neq 0, 0 \\ 0, & x, y = 0, 0 \end{cases}$$

दिखाइये कि  $f_x(0, 0)$  और  $f_y(0, 0)$  का अस्तित्व है परन्तु फलन  $(0, 0)$  पर संतत नहीं है।

If :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x, y \neq 0, 0 \\ 0, & x, y = 0, 0 \end{cases}$$

show that both  $f_x(0, 0)$  and  $f_y(0, 0)$  exist but the function is not continuous at  $(0, 0)$ .

(स) अंतराल  $[0, 2]$  में फलन  $f(x) = x$  की अर्द्ध अंतराल कोज्या श्रेणी ज्ञात कीजिए।

Express  $f(x) = x$  as a half range cosine series in the range  $(0, 2)$ .

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) माना कि  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  अंतराल  $[a, b]$  में परिबद्ध फलन है। तब  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  यदि और केवल यदि प्रत्येक  $\varepsilon > 0$  के लिए  $[a, b]$  का एक विभाजन  $P$  इस प्रकार अस्तित्व रखता है कि :

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$$

Let  $f : a, b \rightarrow \mathbb{R}$  be a bounded function on  $[a, b]$ .

Then  $f \in \mathbb{R} \ a, b$  if and only if, for every  $\varepsilon > 0$ , there exists a partition  $P$  of  $[a, b]$  such that :

$$U \ P, f - L \ P, f < \varepsilon$$

(ब) समाकल :

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x \log x^{\mu+1}} \quad \int_a^\infty \frac{dx}{x \log x^{\mu+1}}$$

की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए, जहाँ  $a > 1$  ।

Test the convergence of the integral :

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x \log x^{\mu+1}}$$

where  $a > 1$ .

(स) दिखाइये कि :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \log \left( \frac{b^2 + m^2}{a^2 + m^2} \right)$$

जहाँ  $a, b > 0$  ।

Show that :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \log \left( \frac{b^2 + m^2}{a^2 + m^2} \right)$$

where  $a, b > 0$ .

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) सिद्ध कीजिए कि फलन :

$$u = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$$

लाप्लास समीकरण को संतुष्ट करता है और साथ ही विश्लेषणात्मक फलन  $u + iv$  को ज्ञात कीजिए ।

Prove that the function :

$$u = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$$

satisfies Laplace's equation and determine corresponding analytic function  $u + iv$ .

- (ब) द्विरैखीय रूपांतरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं  $z_1 = 2, z_2 = i, z_3 = -2$  को बिन्दुओं  $w_1 = 1, w_2 = i$  और  $w_3 = -1$  पर रूपांतरित करता है।

Find the bilinear transformation which maps the points  $z_1 = 2, z_2 = i, z_3 = -2$  into the points  $w_1 = 1, w_2 = i$  and  $w_3 = -1$ .

- (स) दिखाइये कि रूपांतरण :

$$w = \frac{2z + 3}{z - 4}$$

वृत्त  $x^2 + y^2 - 4x = 0$  को सरल रेखा  $4u + 3 = 0$  पर रूपांतरित करता है।

Show that the transformation :

$$w = \frac{2z + 3}{z - 4}$$

maps the circle  $x^2 + y^2 - 4x = 0$  onto the straight line  $4u + 3 = 0$ .

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) एक दूरीक समष्टि में विवृत समुच्चयों के परिमित संग्रह का उभयनिष्ठ विवृत समुच्चय होता है।

In a metric space the intersection of a finite number of open sets is open.

- (ब) बनाव स्थिर बिन्दु प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Banach fixed point theorem.

- (स) सिद्ध कीजिए कि परिमेय संख्याओं का समुच्चय पूर्णतः क्रमित नहीं होता है।

Prove that the set of rational numbers is not order complete.

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) माना कि  $X, d$  और  $Y, \rho$  दो दूरीक समुच्चय हैं और  $f : X \rightarrow Y$  एक संतत फलन है। तब सिद्ध कीजिए कि  $f^{-1} G$ ,  $X$  में विवृत होगा यदि  $G$ ,  $Y$  में विवृत समुच्चय है।

Let  $(X, d)$  and  $(Y, \rho)$  be two metric spaces and  $f : X \rightarrow Y$  be a continuous function. Then prove that  $f^{-1} G$  will be open in  $X$  whenever  $G$  is open set in  $Y$ .

- (ब) सिद्ध कीजिए कि एक सघन दूरीक समष्टि का एक संवृत उपसमुच्चय सघन होता है।

Prove that a closed subset of a compact metric space is compact.

- (स) सिद्ध कीजिए कि संबद्ध समुच्चय का संतत प्रतिचित्रण संबद्ध होता है।

Prove that continuous image of connected set is connected.