Printed Pages – 7

G-3689

B.Sc. (Part-III) Examination, 2023

(Old/New Course)

MATHEMATICS

Paper - II

(Abstract Algebra)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 50

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न से कोई दो भाग हल कीजिये। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : All questions are compulsory. Attempt any two parts of each question. All questions carry equal marks.

इकाई–I / UNIT-I

Q. 1. (अ) क्या $f : R \rightarrow R$, $f(x) = x^2$ एक तुल्यकारिता है ?

Is $f : R \rightarrow R$, $f(x) = x^2$ an isomorphism ?

(ब) माना कि a समूह G का कोई नियत अवयव है। सिद्ध कीजिए कि फलन $f_a : G \rightarrow G$ जो कि $f_a(x) = \vec{a}xa$ $\forall x \in G$ द्वारा परिभाषित है, एक समूह स्वाकारिता है।

Suppose a is a fixed element of group G. Then prove that the function $f_a : G \rightarrow G$ defined by $f_a(x) = \vec{a}xa$ $\forall x \in G$ is a group automorphism.

(स) सिलो का प्रथम प्रमेय लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove the first Sylow's theorem.

इकाई–II / UNIT-II

Q. 2. (अ) वलय को परिभाषित कीजिए तथा दर्शाइए कि एक क्रमविनिमेय वलय का प्रत्येक समाकारी प्रतिबिंब एक क्रमविनिमेय वलय होता है।

https://www.prsunotes.com

Define ring. Show that every homomorphic image of a commutative ring is a commutative ring.

(ब) आइसन्स्टाइन निकष विधि से दर्शाइए कि बहुपद

$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

परिमेयों के क्षेत्र पर अखण्डनीय है।

Use Eisenstein criterion method, prove that the following polynomial is irreducible over the field of rational numbers :

$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

(स) विभाग वलय को परिभाषित कीजिए। सिद्ध कीजिए कि पूर्णांकों का वलय एक मुख्य गुणजावली वलय होता है।

Define Quotient ring. Prove that ring of integers is principal ideal ring.

इकाई–III / UNIT-III

Q. 3. (अ) सदिश समष्टि को परिभाषित कीजिए। दिखाइए कि :

$W_1 + W_2 = [W_1 \cup W_2]$

जहाँ W_1 और W_2, V(F) की दो उपसमष्टियाँ है।

Define vector space. Show that :

$W_1 + W_2 = [W_1 \cup W_2]$

where W_1 and W_2 are two subspaces of V(F).

(ब) सिद्ध कीजिए कि सदिशों (2, 3, 1), (–1, 4, –2) एवं (1, 18, –4) का समुच्चय $V_3(R)$ में रैखिकतः स्वतंत्र है।

Prove that the set of vectors (2, 3, 1), (–1, 4, –2) and (1, 18, –4) is linearly independent in $V_3(R)$.

(स) यदि W किसी परिमित विमीय सदिश समष्टि V(F) का एक उपसमष्टि हो, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\dim \frac{V}{W} = \dim V - \dim W$$

If W is a subspace of a finite dimensional vector space V(F), then prove that :

$$\dim \frac{V}{W} = \dim V - \dim W$$

इकाई–IV / UNIT-IV

Q. 4. (अ) यदि R^3 पर एक संकारक T, जो $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, -x_1 - x_2 - 4x_3, 2x_1 - x_3)$ से परिभाषित है, तब क्रमिक आधार B = {(1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1)} के सापेक्ष T का आव्यूह ज्ञात कीजिए।

If T is a linear operator on R^3 defined by $(x_1 + x_2 + x_3, -x_1 - x_2 - 4x_3, 2x_1 - x_3)$, then find the matrix of T with respect to the ordered basis B = {(1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1)}.

(ब) दर्शाइए कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ विकर्णीय है।

Show that the matrix $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ is diagonalizable.

(स) निम्नलिखित समघात को वास्तविक विहित समघात में समानयन कीजिए और जाति तथा चिन्हिका हस्ताक्षर ज्ञात कीजिए :

$$q = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + zx$$

Change the following form into real canonical form and find rank and signature :

$$q = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + zx$$

इकाई–V / UNIT-V

Q. 5. (अ) क्या $(\alpha,\beta) = a_1\bar{b}2 + a_2,\ \alpha = (a_1, a_2),\ \beta = (b_1, b_2)$ एक आन्तर गुणन है ?

Is $(\alpha,\beta) = a_1\bar{b}2 + a_2,\ \alpha = (a_1, a_2),\ \beta = (b_1, b_2)$ an inner product ?

(ब) ग्राम-श्मिट प्रक्रम का प्रयोग करके $S = \{1, x, x^2\}$ को एक प्रसामान्य लांबिक आधार में रूपांतरित कीजिए :

$$(p,q) = \int_0^1 p(x) \cdot q(x)\, dx$$

Change $S = \{1, x, x^2\}$ into normalised orthogonal form by Gram-Schmidt process :

$$(p,q) = \int_0^1 p(x) \cdot q(x)\, dx$$

(स) सिद्ध कीजिए कि आन्तर गुणन समष्टि V में शून्येतर सदिशों का कोई लाम्बिक समुच्चय रैखिकतः स्वतंत्र होता है।

Show that a set of non-zero orthogonal vectors of an inner product space V is always linearly independent.