

Roll No.

E-3769(S)

B. Sc. (Part III) Suppl. EXAMINATION, 2021

MATHEMATICS

Paper Second

(Abstract Algebra)

Time : Three Hours]

[Maximum Marks : 50

नोट : प्रत्येक प्रश्न से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Answer any *two* parts of each question. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) यदि $o\ G = p^n$, जहाँ p एक अभाज्य संख्या है, तब सिद्ध कीजिए कि G का केन्द्र $Z\ G \neq e$ ।

If $o\ G = p^n$, where p is a prime number, then prove that centre of G , $Z\ G \neq e$.

- (ब) परिमित आबेली समूह के लिए कौशी प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Cauchy's theorem for finite abelian group.

P. T. O.

- (स) मान लो G कोटि 108 का एक समूह है। दिखाइए कि कोटि 27 या 9 के एक प्रसामान्य उपसमूह का अस्तित्व होता है।

Let G be a group of order 108. Then show that there exists a normal subgroup of order 27 or 9.

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) वलयों के समाकारिता पर मूल प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove fundamental theorem of rings homomorphism.

- (ब) अखण्डनीयता के लिए आइंस्टीन निष्कर्ष का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove the Eienstein criterion for irreducibility.

- (स) सिद्ध कीजिए कि समाकारिता की अष्टि एक उपमाड्यूल होती है।

Prove that kernel of homomorphism is a submodule.

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) दिखाइये कि सदिश समष्टि V_2 c में सदिश a_1, a_2 तथा b_1, b_2 एकघाततः परतंत्र हैं यदि और केवल यदि $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ ।

Show that vectors a_1, a_2 and b_1, b_2 in vector space V_2 c are linearly dependent if and only if $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$.

- (ब) विस्तार प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove extension theorem.

- (स) यदि W_1 तथा W_2 परिमित विमीय सदिश समष्टि V F की दो उपसमष्टियाँ हैं, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\dim W_1 + W_2 = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_2 \cap W_2$$

If W_1 and W_2 be two subspaces of finite dimensional vector space V F , then prove that :

$$\dim W_1 + W_2 = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_2 \cap W_2$$

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) मान लो $T: V_2 \mathbb{R} \rightarrow V_2 \mathbb{R}$ निम्नानुसार परिभाषित है :

$$T a_1, b_1 = b_1, a_1$$

दर्शाइये कि T एक तुल्याकारिता है।

Let $T: V_2 \mathbb{R} \rightarrow V_2 \mathbb{R}$ be defined by

$T a_1, b_1 = b_1, a_1$. Then show that T is isomorphism.

- (ब) दिखाइए कि समान क्षेत्र पर परिभाषित दो परिमित विमीय सदिश समष्टियाँ तुल्याकारी होती हैं यदि और केवल यदि उनकी विमा समान हैं।

Show that two finite dimensional vector spaces defined on same field are isomorphic if and only if their dimensions are equal.

- (स) सिद्ध कीजिए कि किसी ऐकिक आव्यूह के आइगेन मान इकाई मापांक के होते हैं।

Prove that eigen value of unitary matrix is of unit modulus.

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) श्वार्ज-असमिका का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Schwarz's inequality.

- (ब) यदि एक आन्तर गुणन समष्टि में $\| \alpha + \beta \| = \| \alpha \| + \| \beta \|$ हेतु दो समष्टियाँ α और β हों तो सिद्ध कीजिए कि सदिश α और β रैखिकतः परतंत्र हैं परन्तु विलोम सदैव सत्य नहीं होता है।

If in an inner product space $\| \alpha + \beta \| = \| \alpha \| + \| \beta \|$, then prove that α and β are linearly dependent but converse need not be true.

- (स) ग्राम-श्मिट लांबिकता प्रक्रम का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Gram-Schmidt orthogonalization process.