Ćwiczenia 6: Algorytmy zachłanne

Zadanie 1. (problem stacji benzynowych) Pewien podróżnik chce przebyć trasę z punktu A do punktu B. Niestety jego samochód spala dokładnie jeden litr paliwa na jeden kilometr trasy (można powiedzieć, że jedzie czołgiem... znaczenie punktów A i B w ramach obecnej sytuacji geopolitycznej wybierzcie sobie sami). W baku mieści się dokładnie D litrów paliwa. Trasa z A do B to prosta, na której znajdują się stacje benzynowe. Mamy dwa różne zadania (rozwiązywane osobno):

(1) wyznaczyć trasę, na której tankujemy minimalną liczbę razy.

(2) wyznaczyć trasę, której koszt jest minimalny (wówczas znamy jeszcze dla każdej stacji cenę za litr paliwa, nie musimy zawsze tankować do pełna).

(3) Bonus: j.w., ale jeśli na stacji tankujemy, to musimy zatankować do pełna.

Zadanie 2. (wybór zadań z terminami) Mamy dany zbiór zadań $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$. Każde zadanie t_i dodatkowo posiada: (a) termin wykonania $d(t_i)$ (liczba naturalna) oraz (b) zysk $g(t_i)$ za wykonanie w terminie (liczba naturalna). Wykonanie każdego zadania trwa jednostkę czasu. Jeśli zadanie t_i zostanie wykonane przed przekroczeniem swojego terminu $d(t_i)$, to dostajemy za nie nagrodę $g(t_i)$ (pierwsze wybrane zadanie jest wykonywane w chwili 0, drugie wybrane zadanie w chwili 1, trzecie w chwili 2, itd.).

Proszę podać algorytm, który znajduje podzbiór zadań, które można wykonać w terminie i który prowadzi do maksymalnego zysku. Proszę uzasadnić poprawność algorytmu.

Zadanie 3. (ładowanie przyczepy) Mamy przyczepę o pojemności K kilogramów oraz zbiór ładunków o wagach $w_1, \ldots, w_n$. Waga każdego z ładunków jest potęgą dwójki (czyli, na przykład, dla siedmiu ładunków wagi mogą wynosić 2, 2, 4, 8, 1, 8, 16, a pojemność przyczepy $K = 27$). Proszę podać algorytm zachłanny (i uzasadnić jego poprawność), który wybiera ładunki tak, że przyczepa jest możliwie maksymalnie zapełniona (ale bez przekraczania pojemności) i jednocześnie użyliśmy możliwie jak najmniej ładunków. (Ale jeśli da się np. załadować przyczepę do pełna uzywając 100 ładunków, albo zaladować do pojemności $K - 1$ używając jednego ładunku, to lepsze jest to pierwsze rozwiązanie).

Zadanie 4. (pokrycie przedziałami jednostkowymi) Dany jest zbiór punktów $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ na prostej. Proszę podać algorytm, który znajduje minimalną liczbę przedziałów jednostkowych domkniętych, potrzebnych do pokrycia wszystkich punktów z X. (Przykład: Jeśli $X = \{0.25, 0.5, 1.6\}$ to potrzeba dwóch przedziałów, np. $[0.2, 1.2]$ oraz $[1.4, 2.4]$).

Zadanie 5. (wieże) Grupa m dzieci bawi się w układanie możliwie jak największej wieży. Każde dziecko ma klocki różnej wysokości. Pierwsze dziecko ma klocki o wysokościach $w^1_1, \ldots, w^1_{n_1}$, drugie dziecko klocki o wyskościach $w^2_1, \ldots, w^2_{n_2}$, itd. Dzieci właśnie poszły zjeść deser zanim ułożą swoje wieże, ale jedno dziecko zostało. Ma teraz jedyną okazję, żeby podebrać kilka klocków innym dzieciom tak, żeby jego wieża była najwyższa. Proszę podać możliwie najszybszy algorytm rozwiązujący ten problem, który zabiera minimalną ilość klocków. (Proszę zwrócić uwagę, że liczby w^i_j mogą być bardzo duże.)

Zadanie 6. (suma odległości) Dana jest posortowana tablica A zawierająca n liczb i celem jest wyznaczenie liczby x takiej, że wartość $\sum_{i=0}^{n-1} |A[i] - x|$ jest minimalna. Proszę zaproponować algorytm, uzasadnić jego poprawność oraz ocenić złożoność obliczeniową.