

## Ćwiczenia 10: Najkrótsze ścieżki w grafach ważonych i MST

[osoby mające najwyżej 2 plusy] **Zadanie 1. (Dijkstra)** Proszę zaimplementować algorytm Dijkstry dla reprezentacji macierzowej grafu.

[osoby mające najwyżej 2 plusy] **Zadanie 2. (Bellman-Ford)** Proszę zaimplementować algorytm Bellman'a-Ford'a dla reprezentacji macierzowej grafu.

[osoby niemające plusów] **Zadanie 3. (Wypisywanie najkrótszej ścieżki)** Proszę zaimplementować funkcję, która na podstawie drzewa najkrótszych ścieżek (informacje w polach `parent`) wypisuje najkrótszą ścieżkę ze źródła do danego wierzchołka.

**Zadanie 4. (najkrótsze ścieżki w DAGu)** Jak znaleźć najkrótsze ścieżki z wierzchołka  $s$  do wszystkich innych w acyklicznym grafie skierowanym? (Krawędzie są ważne.)

**Zadanie 5. (iloczynny)** Mamy dany graf  $G = (V, E)$  z wagami  $w: E \rightarrow \mathbb{N} - \{0\}$  (dodatnie liczby naturalne). Chcemy znaleźć ścieżkę z wierzchołka  $u$  do  $v$  tak, by iloczyn wag był minimalny. Proszę zaproponować algorytm.

**Zadanie 6. (problem przewodnika turystycznego)** Przewodnik chce przewieźć grupę turystów z miasta  $A$  do miasta  $B$ . Po drodze jest jednak wiele innych miast i między różnymi miastami jeżdżą autobusy o różnej pojemności. Mamy daną listę trójek postaci  $(x, y, c)$ , gdzie  $x$  i  $y$  to miasta między którymi bezpośrednio jeździ autobus o pojemności  $c$  pasażerów. Proszę zaproponować algorytm, który znajduje trasę z  $A$  do  $B$ , po której może przejechać możliwie jak największa grupa turystów bez rozdzielania się.

**Zadanie 7. (dwóch kierowców)** Dana jest mapa kraju w postaci grafu  $G = (V, E)$ , gdzie wierzchołki to miasta a krawędzie to drogi łączące miasta. Dla każdej drogi znana jest jej długość (wyrażona w kilometrach jako liczba naturalna). Alicja i Bob prowadzą (na zmianę) autobus z miasta  $x \in V$  do miasta  $y \in V$ , zamieniając się za kierownicą w każdym kolejnym mieście. Alicja wybiera trasę oraz decyduje, kto prowadzi pierwszy. Proszę zaproponować algorytm, który wskazuje taką trasę (oraz osobę, która ma prowadzić pierwszą), żeby Alicja przejechała jak najmniej kilometrów. Algorytm powinien być jak najszybszy (ale przede wszystkim poprawny).

**Zadanie 8. (malejące krawędzie)** Dany jest graf  $G = (V, E)$ , gdzie każda krawędź ma wagę ze zbioru  $\{1, \dots, |E|\}$  (wagi krawędzi są parami różne). Proszę zaproponować algorytm, który dla danych wierzchołków  $x$  i  $y$  oblicza ścieżkę o najmniejszej sumie wag, która prowadzi z  $x$  do  $y$  po krawędziach o malejących wagach (jeśli ścieżki nie ma to zwracamy  $\infty$ ).

**Zadanie 9. (cykl o minimalnej wadze)** Jak znaleźć cykl o minimalnej wadze w grafie skierowanym z dodatnimi wagami? Zakładamy reprezentację macierzową.

**Zadanie 10. (MST)** Proszę zaimplementować algorytm Kruskala.

**Zadanie 11. (problem stacji benzynowych na grafie)** Pewien podróżnik chce przebyć trasę z punktu  $A$  do punktu  $B$ . Niestety jego samochód spala dokładnie jeden litr paliwa na jeden kilometr trasy. W baku mieści się dokładnie  $D$  litrów paliwa. Trasa jest reprezentowana jako graf, gdzie wierzchołki to miasta a krawędzie to łączące je drogi. Każda krawędź ma długość w kilometrach (przedstawioną jako liczba naturalna). W każdym wierzchołku jest stacja benzynowa, z daną ceną za litr paliwa. Proszę podać algorytm znajdujący trasę z punktu  $A$  do punktu  $B$  o najmniejszym koszcie. Proszę uzasadnić poprawność algorytmu.