ANIMACIÓN POR ORDENADOR

Tema 4

La animación como cambio.
Fotogramas clave. Intercalado.
Funciones de movimiento. Orientación.

CONTENIDO

INTERPRETACION DEL MOVIMIENTO: CURVAS DE MOVIMIENTO

DEFINICIÓN DEL MOVIMIENTO

El movimiento es un cambio de posición respecto del tiempo medido por un cierto observador.

POSICIÓN

DEFINICIÓN DEL MOVIMIENTO

El movimiento es un cambio de posición respecto del tiempo medido por un cierto observador.

POSICIÓN

TIEMPO

DEFINICIÓN DEL MOVIMIENTO

El movimiento es un cambio de posición respecto del tiempo medido por un cierto observador.

POSICIÓN

SISTEMA DE REFERENCIA

TIEMPO

La descripción y estudio del movimiento de un cuerpo exige determinar su posición en el espacio en función del tiempo respecto a un cierto sistema de referencia.

CARACTERÍSTICA DEL MOVIMIENTO (A nivel físico)

Trayectoria : es el lugar geométrico de las posiciones sucesivas por las que pasa un cuerpo en su movimiento.

CARACTERÍSTICA DEL MOVIMIENTO (A nivel físico)

Trayectoria : es el lugar geométrico de las posiciones sucesivas por las que pasa un cuerpo en su movimiento.

Posición y Desplazamiento : la distancia *d* que hay entre un punto inicial y el final de su trayectoria; está representado por la longitud de la línea recta que une el punto inicial con el punto final.

CARACTERÍSTICA DEL MOVIMIENTO (A nivel físico)

Trayectoria : es el lugar geométrico de las posiciones sucesivas por las que pasa un cuerpo en su movimiento.

Posición y Desplazamiento : la distancia *d* que hay entre un punto inicial y el final de su trayectoria; está representado por la longitud de la línea recta que une el punto inicial con el punto final.

Rapidez : la relación entre la distancia recorrida y el tiempo empleado en recorrerla.

CARACTERÍSTICA DEL MOVIMIENTO (A nivel físico)

Trayectoria : es el lugar geométrico de las posiciones sucesivas por las que pasa un cuerpo en su movimiento.

Posición y Desplazamiento : la distancia *d* que hay entre un punto inicial y el final de su trayectoria; está representado por la longitud de la línea recta que une el punto inicial con el punto final.

Rapidez : la relación entre la distancia recorrida y el tiempo empleado en recorrerla.

Velocidad : la velocidad es la rapidez en una dirección determinada.

CARACTERÍSTICA DEL MOVIMIENTO (A nivel físico)

Trayectoria : es el lugar geométrico de las posiciones sucesivas por las que pasa un cuerpo en su movimiento.

Posición y Desplazamiento : la distancia *d* que hay entre un punto inicial y el final de su trayectoria; está representado por la longitud de la línea recta que une el punto inicial con el punto final.

Rapidez : la relación entre la distancia recorrida y el tiempo empleado en recorrerla.

Velocidad : la velocidad es la rapidez en una dirección determinada.

Aceleración : magnitud vectorial que se aplica tanto a los aumentos como a las disminuciones de rapidez en una unidad de tiempo.

CARACTERÍSTICA DEL MOVIMIENTO (A nivel físico)

Trayectoria : es el lugar geométrico de las posiciones sucesivas por las que pasa un cuerpo en su movimiento.

Posición y Desplazamiento : la distancia *d* que hay entre un punto inicial y el final de su trayectoria; está representado por la longitud de la línea recta que une el punto inicial con el punto final.

Rapidez : la relación entre la distancia recorrida y el tiempo empleado en recorrerla.

Velocidad : la velocidad es la rapidez en una dirección determinada.

Aceleración : magnitud vectorial que se aplica tanto a los aumentos como a las disminuciones de rapidez en una unidad de tiempo.

Fuerza : fuerza es todo agente capaz de modificar la cantidad de movimiento o la forma de los cuerpos materiales.

CARACTERÍSTICA DEL MOVIMIENTO (A nivel físico)

Trayectoria : es el lugar geométrico de las posiciones sucesivas por las que pasa un cuerpo en su movimiento.

Posición y Desplazamiento : la distancia *d* que hay entre un punto inicial y el final de su trayectoria; está representado por la longitud de la línea recta que une el punto inicial con el punto final.

Rapidez : la relación entre la distancia recorrida y el tiempo empleado en recorrerla.

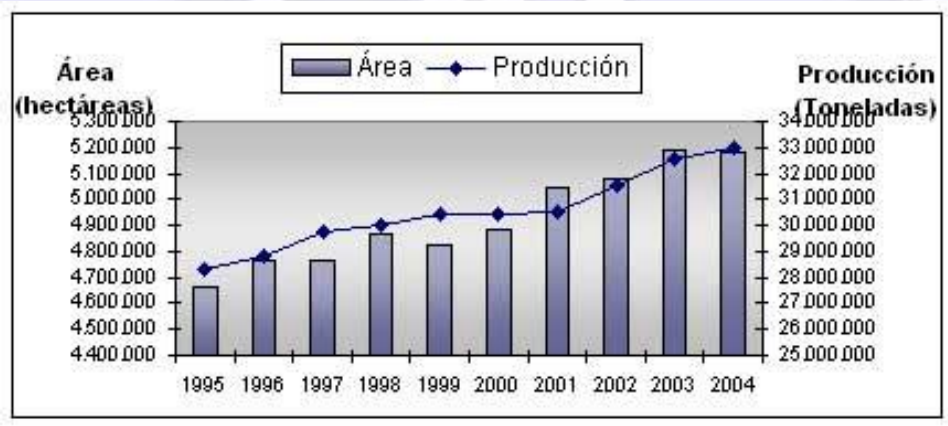
Velocidad : la velocidad es la rapidez en una dirección determinada.

Aceleración : magnitud vectorial que se aplica tanto a los aumentos como a las disminuciones de rapidez en una unidad de tiempo.

Fuerza : fuerza es todo agente capaz de modificar la cantidad de movimiento o la forma de los cuerpos materiales.

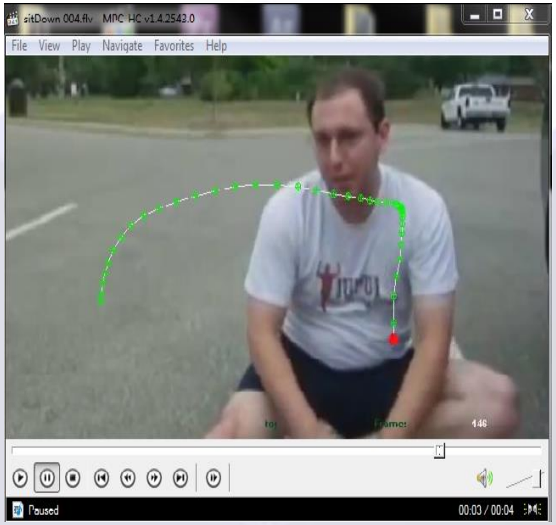
Energía : capacidad para realizar un trabajo, se manifiesta en los cambios físicos, por ejemplo, al elevar un objeto, transportarlo (movimiento), deformarlo o calentarlo.

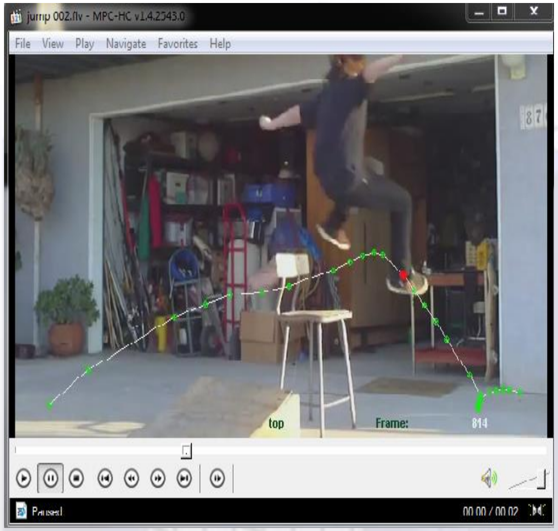
QUÉ SON LAS CURVAS!

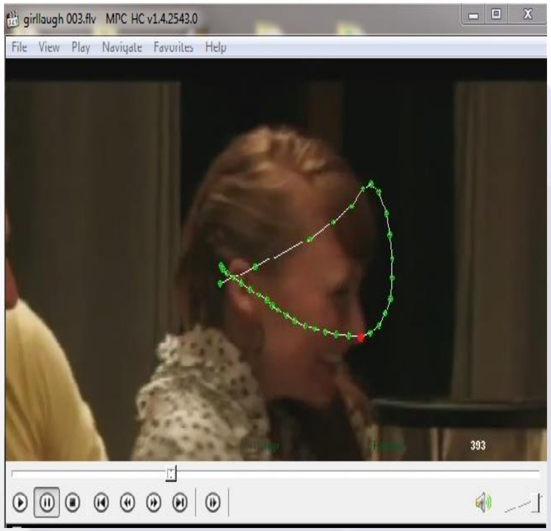


Valores en el tiempo

TRAYECTORIA!







CUIDADO!

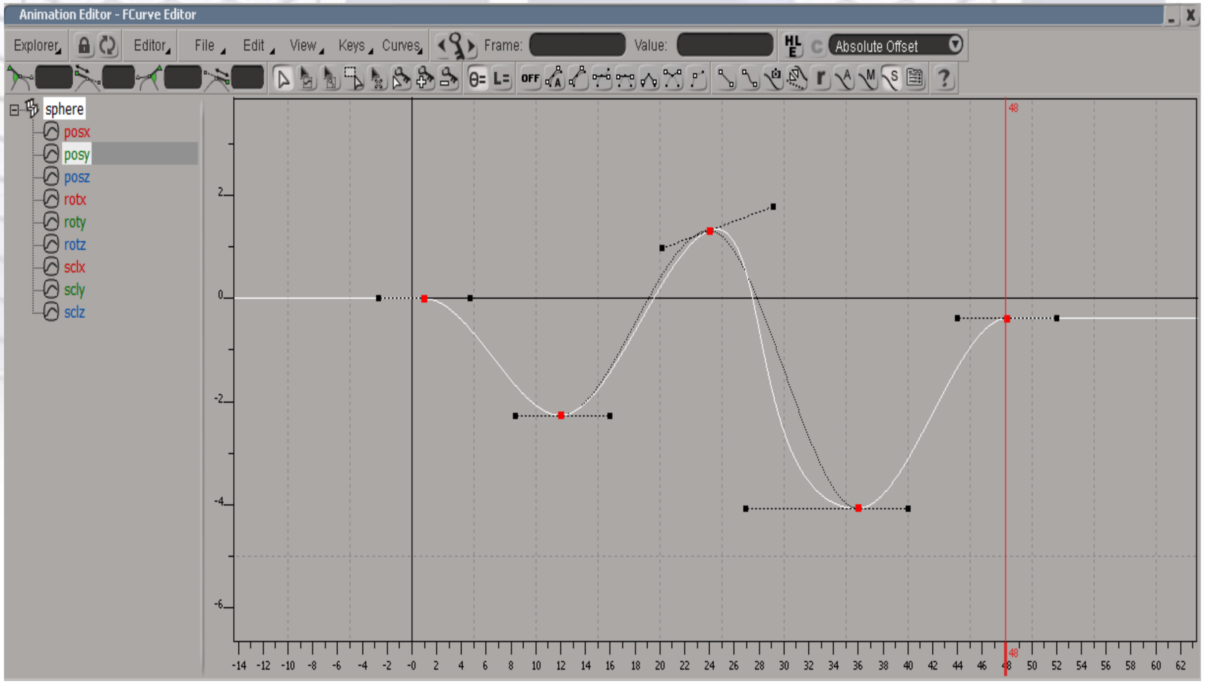
Un error común al iniciarse en la animación es confundir la trayectoria con las curvas de animación!!

EDITOR DE CURVAS

Es la herramienta básica con la que podremos controlar las interpolaciones entre keys. Fundamental para tener el control del timing y del spacing.

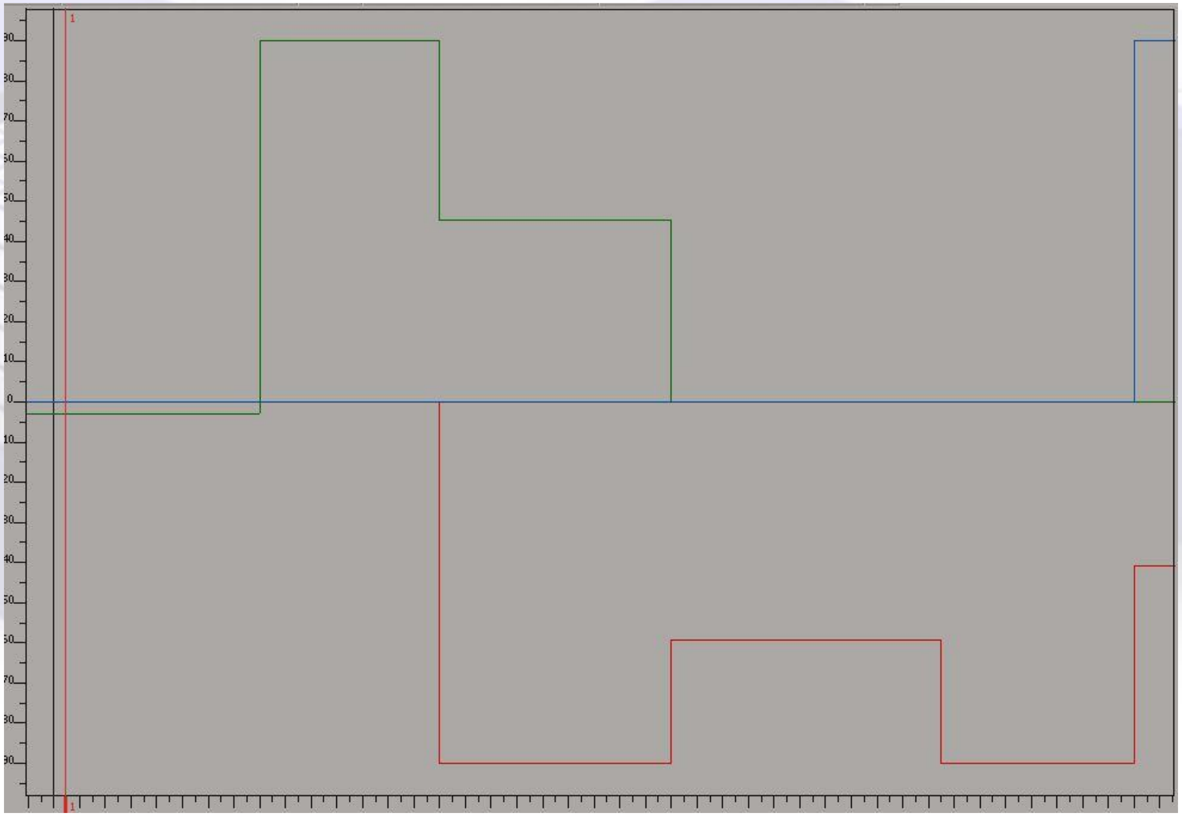
- Tipos de curvas según sus tangentes:
  STEPPED
  LINEAL
  SPLINE

- Control de la interpolación y de las tangentes:
  Slow in / Slow out
  Anticipation / Overshooting



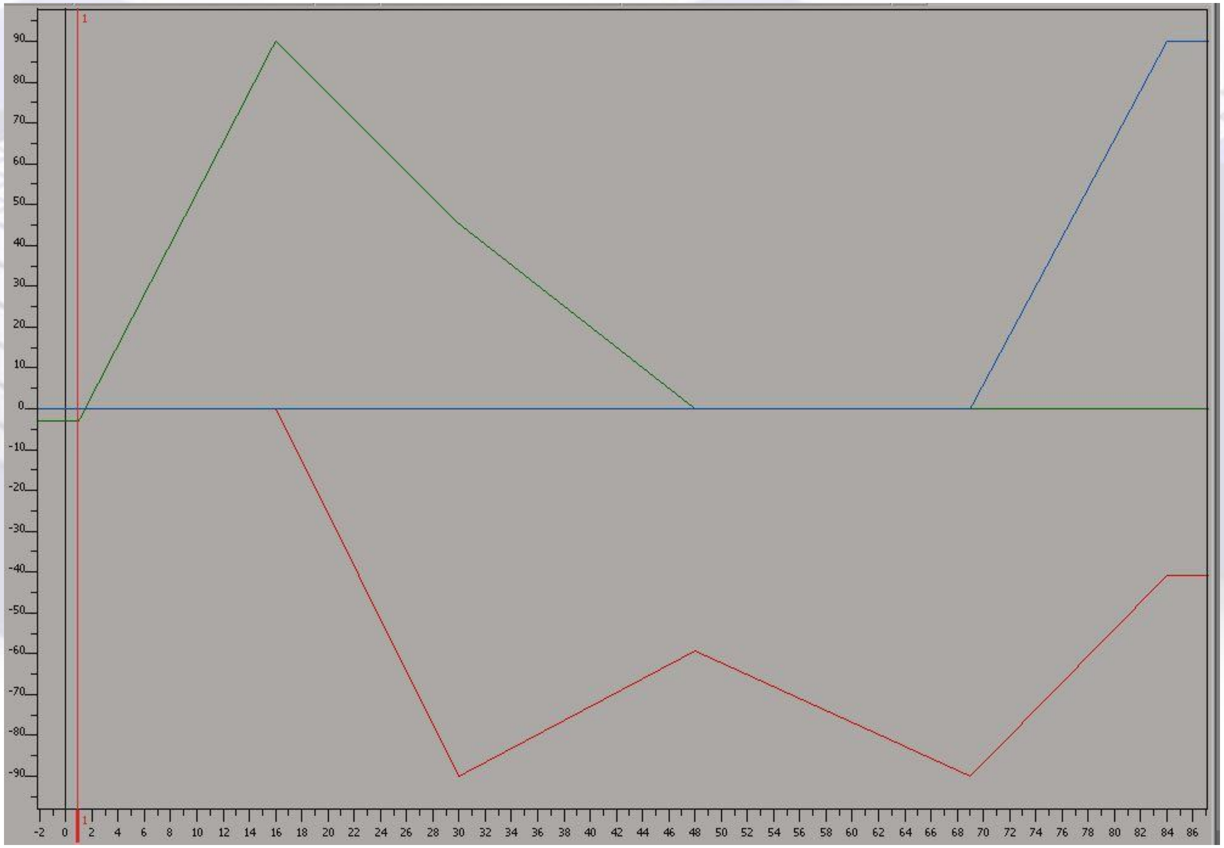
EDITOR DE CURVAS

- Tipos de curvas según sus tangentes : STEPPED o CONSTANT



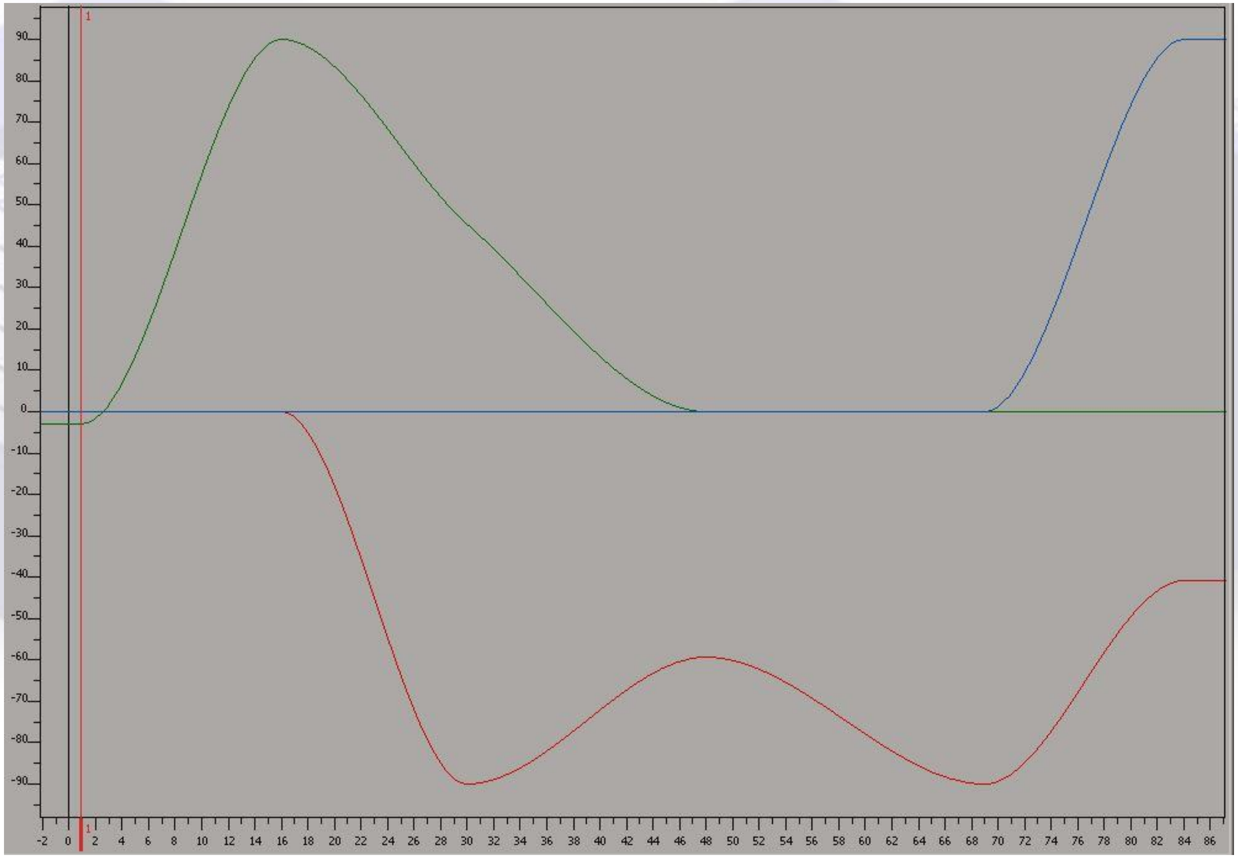
EDITOR DE CURVAS

- Tipos de curvas según sus tangentes : LINEAL



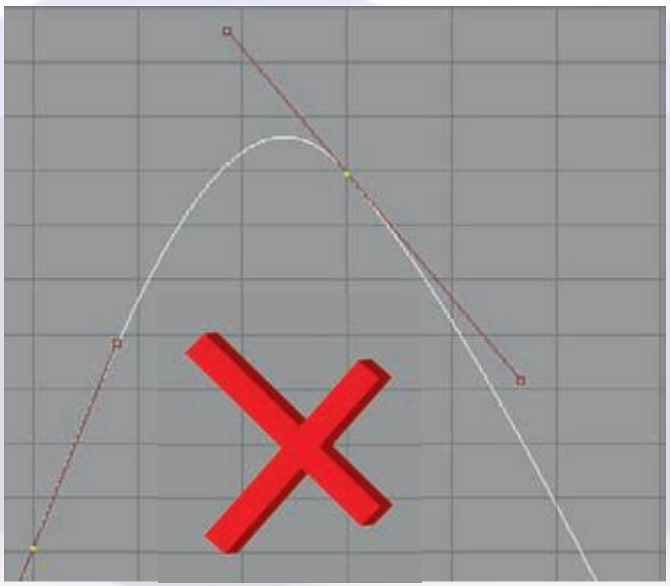
EDITOR DE CURVAS

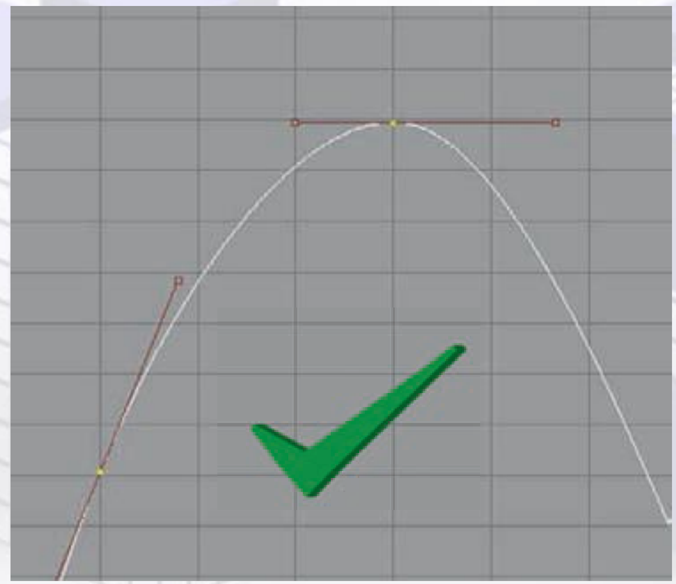
- Tipos de curvas según sus tangentes : SPLINE



TENED LIMPIAS LAS CURVAS !!!

Son los extremos los que tienen que tener la clave como punto de control.

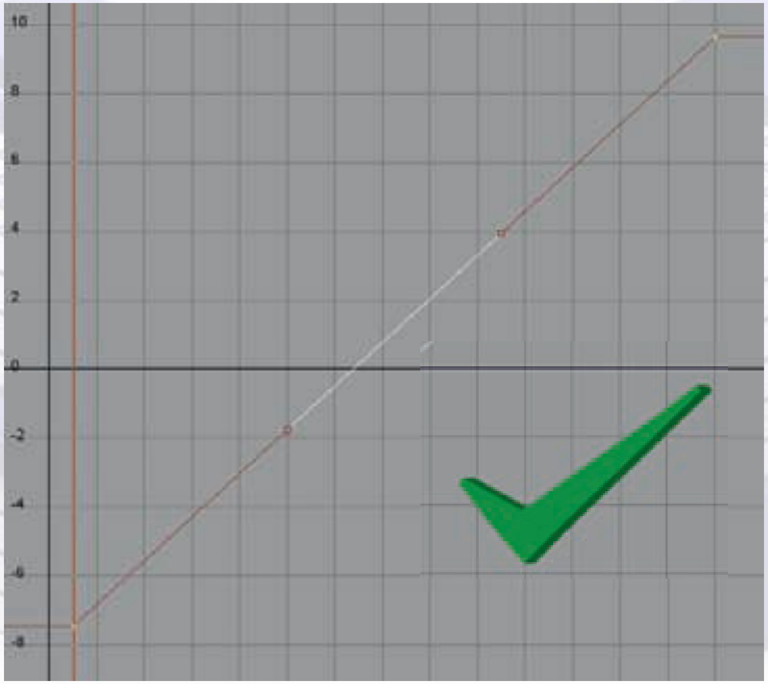




Si no, vais a tener *overshooting* o anticipaciones no deseadas.

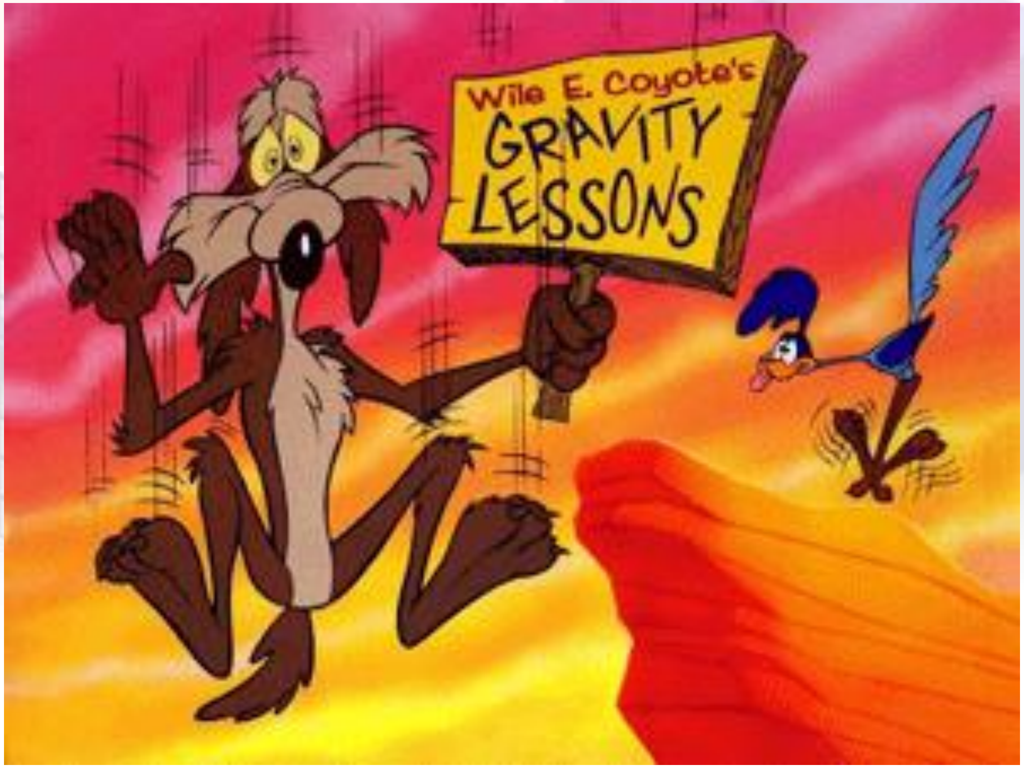
TENED LIMPIAS LAS CURVAS !!!

No pongáis demasiadas claves.



Esto generará ruidos y será más dificil de editar

LEYES DE NEWTON



PRIMERA LEY DE NEWTON O LEY DE INERCIA

Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo a no ser que sea obligado a cambiar su estado por fuerzas impresas sobre él.

SEGUNDA LEY DE NEWTON O LEY DE FUERZA

El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime.

TERCERA LEY DE NEWTON O LEY DE ACCIÓN Y REACCIÓN

Con toda acción ocurre siempre una reacción igual y contraria: quiere decir que las acciones mutuas de dos cuerpos siempre son iguales y dirigidas en sentido opuesto.

TIMING VS SPACING

El *Timing* es el tiempo entre 2 *keys poses*

VS

El *Spacing* es el desplazamiento entre 2 *key poses*

PROS Y CONTRAS DE ANIMAR CON TANGENTES O CON KEYS

PROS DE ANIMAR CON TANGENTES O CON KEYS

TANGENTES

- Mantiene las curvas más limpias y con menos claves
- Permite dar formas a las curvas de manera más comoda
- Permite escalar las curvas con más precisión
- Permite hacer ajuste de spacing más sutiles
- Permite romper tangentes con menos keys

KEYS

- Los valores son exactos y no afectados por las keys adyacentes
- Control total de cualquier forma de curva
- Visibilidad del editor de curvas
- Fácil de uso, no es complejo
- Fácil de editar por otros animadores

CONTRAS DE ANIMAR CON TANGENTES O CON KEYS

TANGENTES

- Ajustes de keys adyacentes puede modificar el spacing
- Algunas formas de curvas no son posible sin keys
- Si se ponen pocas claves, la animación tiende a ser *floaty*
- Más dificil de editar para otros animadores
- Menos control sobre las áreas de separación grandes

KEYS

- Las curvas pueden convertirse muy densas y más complicadas de cambiar
- El escalado puede ser menos preciso
- Más control significa más Keys

ORIENTACIÓN. CUATERNIOS (QUATERNIONS)

ORIENTACIÓN

Vamos a definir "*orientación*" en el sentido de la configuración de rotación instantánea de un objeto.

Piense en ello como el equivalente 'rotacional' de la posición

REPRESENTANDO POSICIONES

Las coordenadas cartesianas *(x, y, z)* son un medio fácil y natural de representar una posición en el espacio 3D

Hay muchas otras alternativas, como la notación *polar (r, θ, φ)* y se puede inventar otras distintas

REPESENTANDO ORIENTACIONES

¿Existe una forma sencilla de representar una orientación 3D, al igual que las coordenadas cartesianas para posición? La respuesta es no.

Hay varias opciones populares:

- ángulos de Euler
- vectores de rotación (eje / ángulo)
- matrices 3x3
- Cuaternios (Quaternions)
- y otras más …

TEOREMA DE EULER

Teorema de Euler: Cualquiera dos sistemas de coordenadas ortonormal independientes pueden relacionarse mediante una secuencia de rotaciones (no más de tres) sobre los ejes de coordenadas, donde no hay dos rotaciones sucesivas en el mismo eje.

Leonard Euler (1707-1783)

ÁNGULOS DE EULER

Esto significa que podemos representar una *orientación* con 3 números

Una secuencia de rotaciones alrededor de los ejes principales se denomina *secuencia de ángulos de Euler*

Suponiendo que nos limitamos a 3 rotaciones, sin que haya dos sucesivas sobre el mismo eje, podríamos usar cualquiera de las siguientes 12 secuencias:

XYZ	XZY	XYX	XZX
YXZ	YZX	YXY	YZY
ZXY	ZYX	ZXZ	ZYZ

ÁNGULOS DE EULER

Esto nos da 12 maneras redundantes para almacenar una orientación mediante ángulos de Euler

Diferentes industrias utilizan diferentes convenciones para el manejo de los ángulos de Euler (o no siguen este convenio)

ÁNGULOS DE EULER EN FORMA MATRICIAL

Para construir una matriz a partir de un conjunto de ángulos de Euler, basta con multiplicar una secuencia de matrices de rotación:

$$\mathbf{R}_x \cdot \mathbf{R}_y \cdot \mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_x & s_x \\ 0 & -s_x & c_x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_y & 0 & -s_y \\ 0 & 1 & 0 \\ s_y & 0 & c_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_z & s_z & 0 \\ -s_z & c_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_y c_z & c_y s_z & -s_y \\ s_x s_y c_z - c_x s_z & s_x s_y s_z + c_x c_z & s_x c_y \\ c_x s_y c_z + s_x s_z & c_x s_y s_z - s_x c_z & c_x c_y \end{bmatrix}$$

ORDEN EN LOS ÁNGULOS DE EULER

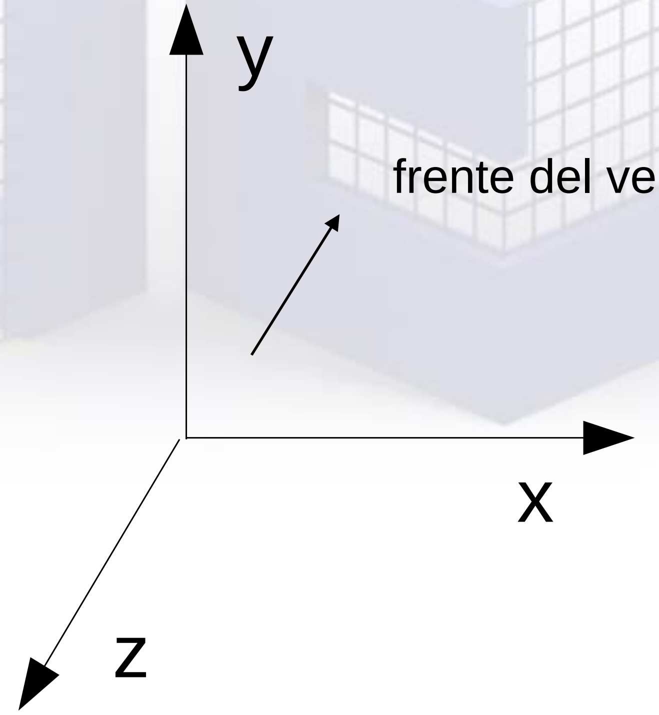
- Como la multiplicación de matrices no es conmutativa, el orden de las operaciones es importante
- Las rotaciones se suponen relativas a los ejes del mundo global, en lugar de locales para el objeto
- Uno puede pensar en ellas como locales al objeto si el orden de la secuencia se invierte

USANDO LOS ÁNGULOS DE EULER

- Para usar los ángulos de Euler, debemos escoger cuál de las 12 representaciones queremos usar
- Puede haber algunas diferencias prácticas entre ellos y la mejor secuencia puede depender de qué es exactamente lo que se está tratando de conseguir

EJEMPLO: ORIENTACIÓN DE UN VEHÍCULO

- En general, para vehículos, es más conveniente rotar en *z (roll)*, *x (pitch)* y después en *y (yaw)*
- En situaciones donde hay un plano de tierra, los ángulos de Euler son una representación intuitiva

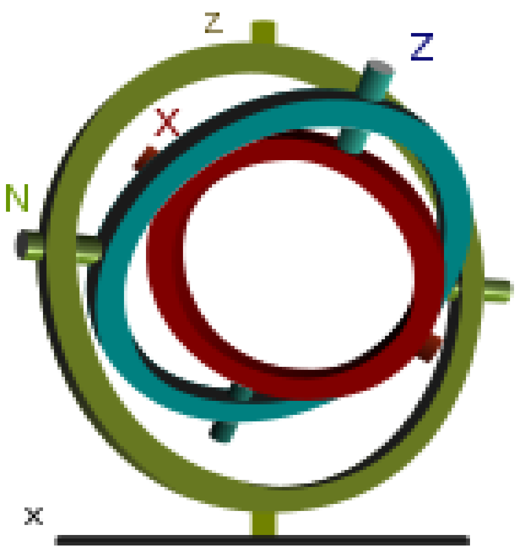


GIMBAL LOCK

- Un problema potencial que podemos sufrir al definir orientaciones es lo que se conoce como *‘bloqueo de ejes' (Gimbal Lock)*
- Esto ocurre cuando 2 ejes se alinean, lo que nos hace perder temporalmente algún grado de libertad.
- El problema está relacionado con las singularidades de la ‘longitud’ en los polos norte y sur de una esfera.

GIMBAL LOCK

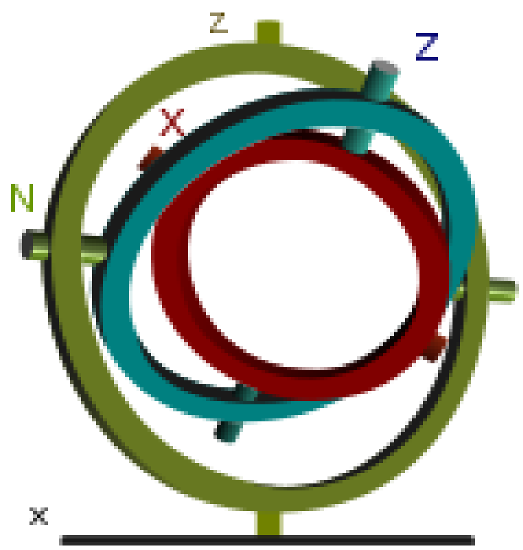
Ejes de ROTACIÓN de Euler



GIMBAL LOCK!!

GIMBAL LOCK

Ejes de ROTACIÓN de Euler



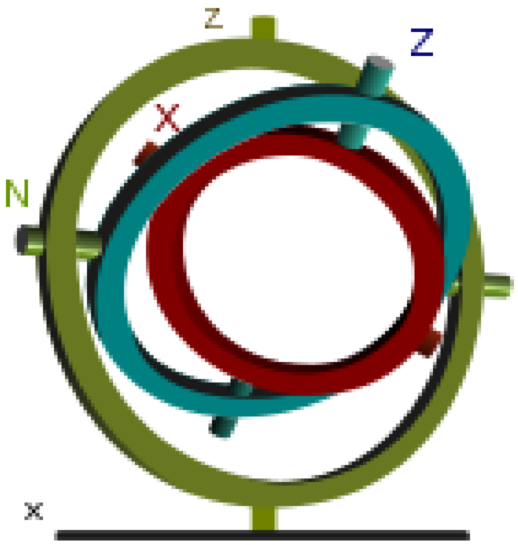
GIMBAL LOCK!!

Cómo resolverlo?

- Hacer rotaciones continuas

GIMBAL LOCK

Ejes de ROTACIÓN de Euler



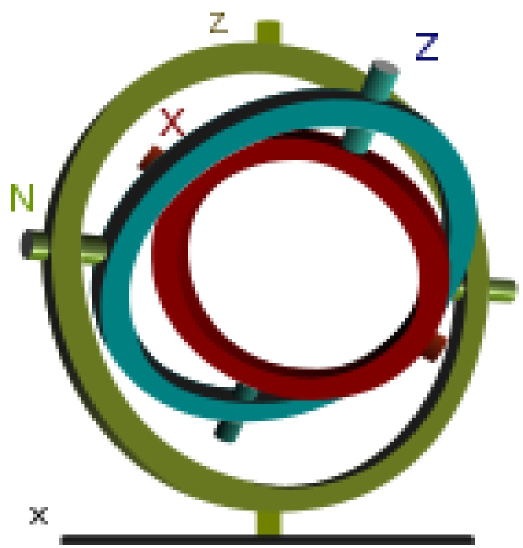
GIMBAL LOCK!!

Cómo resolverlo?

- Hacer rotaciones continuas
- Trabajando a clave por *frame*

GIMBAL LOCK

Ejes de ROTACIÓN de Euler



GIMBAL LOCK!!

Cómo resolverlo?

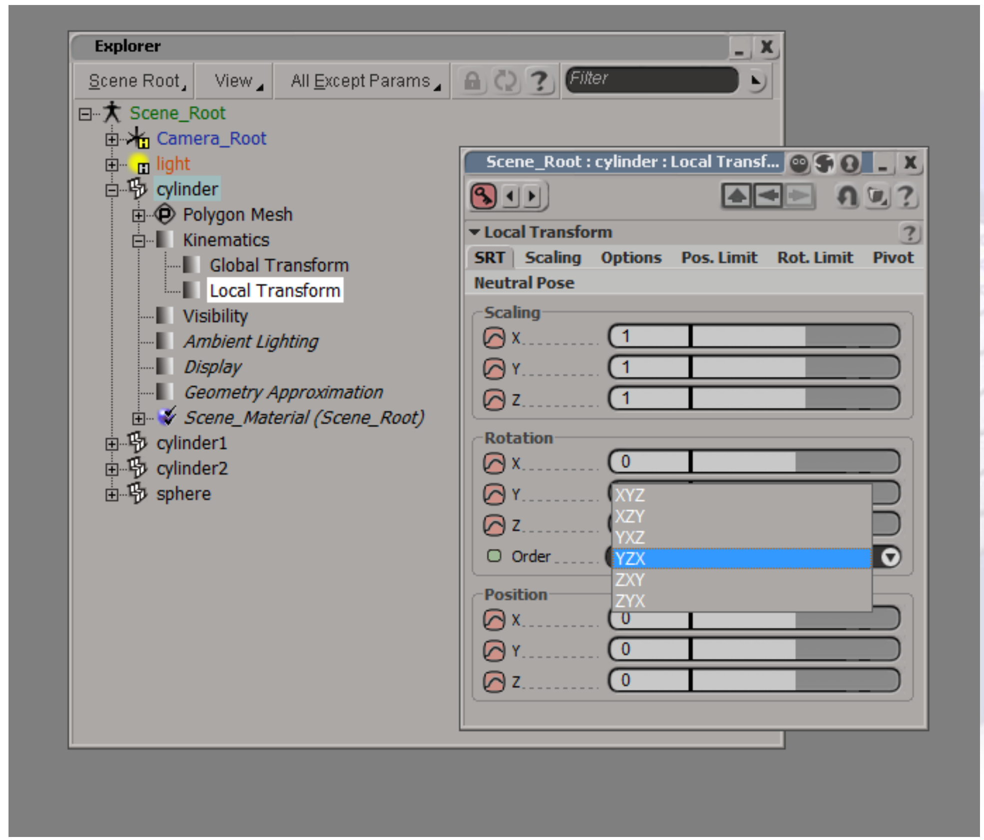
- Hacer rotaciones continuas
- Trabajando a clave por *frame*
- Cambiando los ejes

XZY -> XYZ

CAMBIO DE EJES

Cuando tenemos por ejemplo el orden XYZ significa que :

X es hijo de
    Y que es hijo de
        Z.



INTERPOLANDO ÁNGULOS DE EULER

Uno puede simplemente interpolar entre los tres valores de rotación de forma independiente

Esto dará lugar a la interpolación siguiendo un camino diferente dependiendo de cuál de los 12 esquemas se use

Esto puede o ser un problema, dependiendo de su situación. La interpolación cerca de los "polos" puede ser problemático

Nota: cuando interpolemos ángulos, recuerde revisar el cruce de los límites 180 / -180 grados

ÁNGULOS DE EULER

- Los ángulos de Euler se utilizan en una gran cantidad de aplicaciones, pero requieren algunas decisiones bastante arbitrarias
- No se interpolan de manera consistente (pero esto no siempre es malo)
- Pueden sufrir de bloqueo de ejes y sus problemas relacionados
- No existe una manera sencilla para concatenar las rotaciones
- La conversión a/desde una matriz requiere varias operaciones de trigonometría
- Son compactos (requieren sólo 3 valores)

VECTORES DE ROTACIÓN Y EJE/ÁNGULO

- El teorema de Euler también muestra que dos orientaciones pueden estar relacionados por una sola rotación alrededor de un eje (no necesariamente un eje principal)
- Esto significa que podemos representar una orientación arbitraria como una rotación alrededor de un eje normalizado por un determinado ángulo (4 números: eje / ángulo)
- Alternativamente, se puede escalar el eje por el ángulo y compactarlo así en un solo vector 3D (vector de rotación)

EJE/ÁNGULO EN FORMA MATRICIAL

Para generar una matriz como una rotación θ alrededor de un eje normalizado arbitrario *a*:

$$\begin{bmatrix} a_x^2 + c_\theta(1-a_x^2) & a_x a_y(1-c_\theta)+a_z s_\theta & a_x a_z(1-c_\theta)-a_y s_\theta \\ a_x a_y(1-c_\theta)-a_z s_\theta & a_y^2 + c_\theta(1-a_y^2) & a_y a_z(1-c_\theta)+a_x s_\theta \\ a_x a_z(1-c_\theta)+a_y s_\theta & a_y a_z(1-c_\theta)-a_x s_\theta & a_z^2 + c_\theta(1-a_z^2) \end{bmatrix}$$

VECTORES DE ROTACIÓN

Para convertir un vector de rotación escalado a una matriz, habría que extraer la magnitud del vector y luego girar alrededor del eje normalizado

Normalmente, el formato de vector de rotación es más útil para la representación de las velocidades angulares y las aceleraciones angulares, en lugar de posición angular (orientación)

REPRESENTACIÓN DE EJE/ÁNGULO

Almacenar una orientación como un eje y un ángulo utiliza 4 valores, pero el teorema de Euler dice que sólo necesitamos 3 números para representar una orientación

Matemáticamente, esto significa que estamos utilizando 4 grados de libertad para representar un valor de 3 grados de libertad

Esto implica que, posiblemente, hay información adicional o redundantes en el formato de eje/ángulo

La redundancia viene en la magnitud del vector de eje. La magnitud no lleva ninguna información, por lo que es redundante. Para eliminar la redundancia, elegimos normalizar el eje, lo cual limita el grado de libertad adicional extra

REPRESENTACIÓN MATRICIAL

Podemos utilizar una matriz 3x3 para representar una orientación

Esto significa que tenemos 9 valores en lugar de 3, y por tanto, tenemos 6 grados de libertad adicionales

NOTA: No utilizamos matrices 4x4, ya que esas son útiles principalmente porque nos dan la capacidad de combinar traslaciones. En este momento no nos preocupamos de las traslaciones, así que sólo usamos matrices 3x3.

REPRESENTACIÓN MATRICIAL

Esos 6 grados de libertad extra se manifiestan como 3 escalas (x, y, z) y 3 ejes (XY, XZ y YZ)

Si suponemos que la matriz representa una transformación rígida (ortonormal), entonces podemos restringir los 6 DOFs extra

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 1$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

REPRESENTACIÓN MATRICIAL

Las matrices son por lo general la forma más eficaz computacionalmente para aplicar rotaciones a datos geométricos, y por lo tanto la mayoría de las representaciones de orientación necesitan en última instancia, que se convertirá en una matriz

¿Por qué entonces, no deberíamos simplemente siempre utilizar matrices?

- cuestiones numéricas
- cuestiones de almacenamiento
- problemas de interacción de usuario
- problemas de interpolación

CUATERNIOS (QUATERNIONS)

Los *cuaterniones/cuaternios* son un concepto matemático interesante con una profunda relación con los fundamentos de álgebra y teoría de números, inventado por W.R.Hamilton en 1843

En la práctica, son más útiles para nosotros como un medio para representar orientaciones

Un cuaternio tiene 4 componentes

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}$$

CUATERNIOS (QUATERNIONS): ESPACIO IMAGINARIO

Los cuaternios son una extensión de los números complejos

De los 4 componentes, uno es un número escalar ‘real’, y los otros 3 forman un vector en el espacio imaginario *ijk*

$$\mathbf{q} = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$i = jk = -kj$$

$$j = ki = -ik$$

$$k = ij = -ji$$

CUATERNIOS (QUATERNIONS): ESCALAR/VECTOR

Alguna veces, los cuaternios los podemos escribir como una combinación de un escalar **s** y un vector **v**

$$\mathbf{q} = \left\langle s, \mathbf{v} \right\rangle$$

donde

$$s = q_0$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}$$

CUATERNIOS (QUATERNIONS) UNITARIOS

Para mayor comodidad, utilizaremos sólo cuaterniones de longitud unidad, ya que será suficiente para nuestros propósitos y hacen las cosas un poco más fáciles

$$|\mathbf{q}| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} = 1$$

Estos corresponden al conjunto de los vectores que forman la "superficie" de un hiperesfera 4D de radio 1

La "superficie" es en realidad un volumen 3D en el espacio 4D, pero a veces puede ser visualizado como una extensión para el concepto de una superficie 2D sobre una esfera 3D

CUATERNIOS (QUATERNIONS) COMO ROTACIONES

Un cuaternio puede representar una rotación de un ángulo $\boldsymbol{\theta}$ alrededor de un eje normalizado **a**:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & a_x \sin\frac{\theta}{2} & a_y \sin\frac{\theta}{2} & a_z \sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

o

$$\mathbf{q} = \left\langle \cos\frac{\theta}{2}, \mathbf{a}\sin\frac{\theta}{2} \right\rangle$$

Si **a** es un vector normalizado, entonces **q** también lo será

CUATERNIOS (QUATERNIONS) COMO ROTACIONES

$$|\mathbf{q}| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

$$= \sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2} + a_x^2 \sin^2\frac{\theta}{2} + a_y^2 \sin^2\frac{\theta}{2} + a_z^2 \sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\left(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2\right)}$$

$$= \sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}|\mathbf{a}|^2} = \sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \sqrt{1} = 1$$

CUATERNIOS (QUATERNIONS) A MATRICES

Podemos convertir un cuaternio a forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1-2q_2^2-2q_3^2 & 2q_1q_2+2q_0q_3 & 2q_1q_3-2q_0q_2 \\ 2q_1q_2-2q_0q_3 & 1-2q_1^2-2q_3^2 & 2q_2q_3+2q_0q_1 \\ 2q_1q_3+2q_0q_2 & 2q_2q_3-2q_0q_1 & 1-2q_1^2-2q_2^2 \end{bmatrix}$$

ESFERAS

Pensemos en una persona de pie en la superficie de una esfera grande (como un planeta)

Desde el punto de vista de la persona, puede moverse en torno a dos ejes ortogonales: *delante/detrás* e *izquierda/derecha*

No hay percepción de polos fijos o longitudes/latitudes, porque no importa en qué dirección se encuentre, siempre tiene dos formas ortogonales para moverse

Desde su punto de vista, podría estar moviéndose en un plano 2D infinito, sin embargo, si va demasiado lejos en una dirección, volverá al punto de partida!

HIPERESFERAS

- Ahora extendamos este concepto a moverse en la hiperesfera de cuaterniones unitarios
- La persona tiene tres direcciones ortogonales para moverse
- No importa cómo esté orientada en este espacio, siempre puede ir a alguna combinación de adelante/atrás, izquierda/derecha y arriba/abajo
- Si va demasiado lejos en alguna dirección, volverá al punto de partida

HIPERESFERAS

- Ahora consideremos que la ubicación de una persona en esta hiperesfera representa una orientación
- Cualquier desplazamiento incremental a lo largo de uno de los ejes ortogonales en el espacio curvado corresponde a una rotación incremental a lo largo de un eje en el espacio real (las distancias a lo largo de la hiperesfera corresponden a ángulos en el espacio 3D)
- Moverse en alguna dirección arbitraria corresponde a girar alrededor de algún eje arbitrario
- Si se mueve demasiado lejos en una dirección, se vuelve al punto de partida (que corresponde a la rotación de 360 grados alrededor de uno de los ejes)

HIPERESFERAS

Una distancia de ***x*** a lo largo de la superficie de la hiperesfera corresponde a una rotación ***2x***

Esto significa que si nos movemos a lo largo de un arco de 90 grados en la hiperesfera corresponde a la rotación de 180 grados

Viajando 180 grados corresponde a una rotación de 360 grados, consiguiendo de este modo de vuelta al punto de partida

Esto implica que ***q*** y ***-q*** corresponden a la misma orientación

HIPERESFERAS

- Qué sucedería si esto no fuese así, y si un movimiento de 180 grados a lo largo de la hiperesfera correspondiera a una rotación de 180 grados
- Esto quiere decir que hay exactamente una orientación que es de 180 opuesta a una orientación de referencia
- Pero en realidad, hay un conjunto continuo de posibles orientaciones que está a una distancia 180 de una referencia

HIPERESFERAS

Considera también qué pasa si gira un libro 180 en torno a x, 180 en torno a y, a continuación, 180 en torno a z

Se termina por volver al punto de partida

Esto corresponde a viajar a lo largo de un triángulo en la hiperesfera donde cada borde es un arco de 90 grados, ortogonal a cada otro borde

PRODUCTO ESCALAR DE CUATERNIOS

El producto escalar de dos cuaterniones funciona en la misma forma que el producto escalar de dos vectores:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = p_0 q_0 + p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 = |\mathbf{p}||\mathbf{q}|\cos\varphi$$

El ángulo entre dos cuaterniones en el espacio 4D es la mitad del ángulo que tendría que girar de una orientación a la otra en el espacio 3D

MULTIPLICACIÓN DE CUATERNIOS

Podemos realizar la multiplicación de cuaterniones si les expandirnos en su forma de números complejos

$$\mathbf{q} = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$$

Si **q** representa una rotación y **q'** representa una rotación, entonces **qq'** representa **q** rotado por **q'**

Esto sigue reglas similares a la multiplicación de matrioces (p.e., no es conmutativo)

$$\mathbf{qq}' = (q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3)(q_0' + iq_1' + jq_2' + kq_3')$$
$$= \langle ss' - \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}', s\mathbf{v}' + s'\mathbf{v} + \mathbf{v}\times\mathbf{v} \rangle$$

MULTIPLICACIÓN DE CUATERNIOS

- Dos cuaternios unitarios multiplicados entre sí dará lugar a otro cuaternio unitario
- Esto corresponde a la misma propiedad de los números complejos
- Recuerda que la multiplicación por números complejos puede ser vista como una rotación en el plano complejo
- Cuaternios extienden las rotaciones planas de los números complejos a las rotaciones en 3D en el espacio

INTERPOLACIÓN DE CUATERNIOS

Interpolación lineal entre dos puntos **a** y **b**

$$\mathrm{Lerp}(t,\mathbf{a},\mathbf{b}) = (1-t)\mathbf{a} + (t)\mathbf{b}$$

donde t varía de 0 a 1

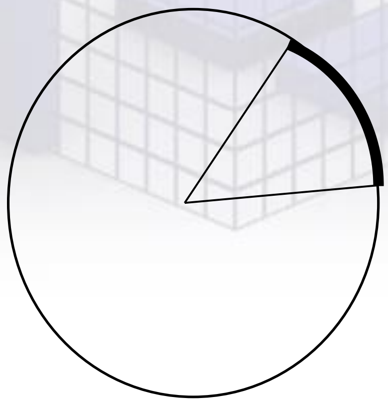
La operación *Lerp* puede ser expresada como un promedio ponderado

También podríamos escribirla en forma de mezcla aditiva:

$$\mathrm{Lerp}(t,\mathbf{a},\mathbf{b}) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b}-\mathbf{a})$$

INTERPOLACIÓN LINEAL ESFÉRICA

- Si queremos interpolar entre dos puntos en una esfera (o hiperesfera), nosotros no sólo queremos interpolación lineal entre ellos
- En su lugar, vamos a movernos a través de la superficie de la esfera, siguiendo un "gran arco"



INTERPOLACIÓN LINEAL ESFÉRICA

Se define la interpolación lineal esférica de dos vectores unitarios en un espacio N dimensional como:

$$Slerp(t,\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{\sin\left(\left(1-t\right)\theta\right)}{\sin\,\theta}\mathbf{a} + \frac{\sin\left(t\theta\right)}{\sin\,\theta}\mathbf{b}$$

$$where: \theta = \cos^{-1}\left(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\right)$$

INTERPOLACIÓN DE CUATERNIOS

Recuerde que hay dos vectores redundantes en un espacio cuaternión para cada orientación única en el espacio 3D

Cuál es la diferencia entre:

*Slerp(t,**a**,**b**)* *y* *Slerp(t,-**a**,**b**)*

Uno de ellos viajarán a menos de 90 grados, mientras que el otro va a viajar más de 90 grados en toda la esfera

Esto corresponde a la rotación por la "vía corta" o por la “vía larga”

Por lo general, queremos tomar el camino más corto, por lo que negamos uno de ellos si su producto escalar es <0

CURVAS DE BÉZIER EN EL ESPACIO DE CUATERNIOS

Podemos construir curvas de Bézier en la hiperesfera 4D siguiendo exactamente el mismo procedimiento utilizando *Slerp* en lugar de *Lerp*

Es una buena idea para voltear cuaterniones cuando sea necesario la entrada con el fin de hacer que se vaya por el "camino corto"

Hay otros algoritmos de interpolación, más sofisticados que se pueden aplicar a una hiperesfera

EXPLICANDO LOS CUATERNIOS EN 3DSMAX

En 3ds Max las rotaciones generalmente se dan mediante cuaterniones.

Aunque en 3d es posible definir una dirección por sólo dos números (como coordenadas esféricas; valores de longitud / latitud), y la orientación de un objeto en el espacio 3D con solo 3 números (como rotaciones Euler X, Y, Z), en lo que respecta a la animación se necesitan más números. Los 3 valores de rotación no son suficientes, ya que puede presentar problemas como el bloqueo de ejes.

En resumen, necesitamos 4 valores para definir la animación (interpolación) de orientaciones para que durante la animación del objeto rote de una manera natural y gire de una orientación a otra utilizando el camino más corto posible.

EXPLICANDO LOS CUATERNIOS EN 3DSMAX

Podemos ver un cuaternión como un eje de rotación (que se define como un vector 3D) y la cantidad de rotación alrededor de este eje. En realidad, el último valor no es el ángulo en sí, sino el *coseno* de la mitad del ángulo: *cos (theta / 2).*

Los ejes de rotación, definidos por los 3 primeros valores *(x, y, z),* se escalan por el seno de la mitad del ángulo de rotación.

Así los valores de cuaternión Q son:

$$Quat\ q = \{x,y,z,w\} = \{v_x*sin(T/2),\ v_y*sin(T/2),\ v_z*sin(T/2),\ cos(T/2)\}$$

EXPLICANDO LOS CUATERNIOS EN 3DSMAX

El cuaternio {0 0 0 1} es el cuaternio unidad, donde w =1 significa que el ángulo es cero (sin rotación). Puesto que el *sin(0) = 0*, entonces los tres primeros valores son 0.

Aunque los cuaternios parecen ser bastante complejos a primera vista, van a hacer nuestra tarea más fácil, ya que por ejemplo, para hacer girar una pelota a la vez que se desplaza por una trayectoria, lo que tenemos que hacer es girarla alrededor del eje que es perpendicular al movimiento (como una rueda). Pero a medida que la pelota cambia de dirección el eje de rotación se deben cambiar en consecuencia, y eso con los cuaternios es muy simple.

REFERENCIAS SOBRE CUATERNIOS

- “Animating Rotation with Quaternion Curves”, Ken Shoemake, SIGGRAPH 1985
- “Quaternions and Rotation Sequences”, Kuipers