Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

# Prídavná informácia a zložitosť nedeterministických konečných automatov

Diplomová práca

2017
Bc. Šimon Sádovský

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

# Prídavná informácia a zložitosť nedeterministických konečných automatov

Diplomová práca

| | |
|---|---|
| Študijný program: | Informatika |
| Študijný odbor: | 2508 Informatika |
| Školiace pracovisko: | Katedra informatiky |
| Školiteľ: | prof. RNDr. Branislav Rovan, PhD. |

Bratislava, 2017
Bc. Šimon Sádovský

35818858

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Bc. Šimon Sádovský
**Študijný program:** informatika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
**Študijný odbor:** informatika
**Typ záverečnej práce:** diplomová
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský
**Sekundárny jazyk:** anglický

**Názov:** Prídavná informácia a zložitosť nedeterministických konečných automatov
*Supplementary Information and Complexity of Nondeterministic Finite Automata*

**Cieľ:** Preskúmať užitočnosť prídavnej informácie o vstupnom slove pre zníženie zložiosti nedeterminstických konečných automatov pre akceptáciu jazykov. Práca nadväzuje napredchádzajúce diplomové práce, v ktorých sa skúmal tento problém pre deterministické automaty.

**Vedúci:** prof. RNDr. Branislav Rovan, PhD.
**Katedra:** FMFI.KI - Katedra informatiky
**Vedúci katedry:** prof. RNDr. Martin Škoviera, PhD.

**Spôsob sprístupnenia elektronickej verzie práce:**
bez obmedzenia

**Dátum zadania:** 16.12.2015

**Dátum schválenia:** 16.12.2015

prof. RNDr. Rastislav Kráľovič, PhD.
garant študijného programu

.......................................... ..........................................

študent vedúci práce

**Poďakovanie:**

# Abstrakt

V práci skúmame vplyv prídavnej informácie na zložitosť riešenia problému. Ako výpočtový model sme zvolili nedeterministické konečné automaty a mierou zložitosti je počet stavov. Formalizáciou nášho problému je rozklad nedeterministického konečného automatu na dvojicu nedeterministických konečných automatov takých, že jazyk pôvodného automatu je prienikom jazykov týchto dvoch automatov. Navyše očakávame, že oba tieto automaty budú jednoduchšie ako pôvodný automat. V práci dokazujeme rozložiteľnosť respektíve nerozložiteľnosť konkrétnych regulárnych jazykov. Dokazujeme uzáverové a iné vlastnosti tried nedeterministicky rozložiteľných a nedeterministicky nerozložiteľných regulárnych jazykov. Charakterizujeme vzhľadom na rozložiteľnosť triedu jazykov, ktoré sú tvorené práve jedným slovom. Skúmame jazyky, ktorých minimálny nedeterministický automat je tvorený práve jedným cyklom. Ukazujeme rozdiel medzi nedeterministickou a deterministickou rozložiteľnosťou regulárnych jazykov.



**Kľúčové slová:** nedeterministický konečný automat, rozklad nedeterministického konečného automatu, nedeterministická rozložiteľnosť, prídavná informácia, popisná zložitosť

# Abstract

Abstract in the English language (translation of the abstract in the Slovak language).

**Keywords:**

# Obsah

# Zoznam obrázkov

# Úvod

Tu bude úvod. Zatiaľ je toto betaverzia diplomovky pre potreby komisie na ŠVK. Práca nijak neprešla pravopisnou korektúrou a niektoré formulácie sú ešte dosť neohrabané, no jednoducho je to na nečisto.

# Kapitola 1

# Definície, potrebné výsledky, motivácia výskumu,

V tejto kapitole sa pozrieme na motiváciu, ktorá nás viedla k nášmu výskumu a na základe nej zavedieme základné pojmy potrebné v našej práci.

## 1.1 Nedeterministický konečný automat

Nedeterministický konečný automat je dobre známy model, avšak existuje viac jeho ekvivalentných definícii, preto uvádzame tú, ktorú budeme používať v našom texte.

**Definícia 1.1.1.** ***Nedeterministický konečný automat*** *je pätica* $(K, \Sigma, \delta, q_0, F)$*, kde:*

1. $K$ *je konečná množina stavov*
2. $\Sigma$ *je konečná vstupná abeceda*
3. $q_0 \in K$ *je počiatočný stav*
4. $F \subseteq K$ *je množina akceptačných stavov*
5. $\delta : K \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to 2^K$ *je prechodová funkcia*

**Poznámka 1.1.1.** *Nedeterministický konečný automat sa skrátene označuje NKA.*

**Poznámka 1.1.2.** *Ak v texte hovoríme o nejakom automate* $A$*, štandardne berieme, že* $A = (K_A, \Sigma_A, \delta_A, q_{0A}, F_A)$ *a teda ak hovoríme o množine* $K_A$*, myslíme tým množinu stavov automatu* $A$*. Analogicky to platí aj pre* $\Sigma_A, \delta_A, q_{0A}, F_A$*. Pokial je z kontextu jasné, o ktorý automat sa jedná, dolný index* $A$ *vynechávame a píšeme skrátene* $K, \Sigma, \delta, q_0, F$*.*

**Definícia 1.1.2.** ***Konfigurácia*** *nedeterministického konečného automatu $A$ je dvojica $(q, w) \in K \times \Sigma^*$, kde $q$ je stav, v ktorom sa automat nachádza a $w$ je ešte nedočítaná časť slova.*

**Definícia 1.1.3.** ***Krok výpočtu*** *nedeterministického konečného automatu $A$ je relácia $\vdash_A$ na konfiguráciách definovaná $(q, aw) \vdash_A (p, w) \Leftrightarrow p \in \delta(q, a)$, $q, p \in K, w \in \Sigma^*, a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$. Reflexívno-tranzitívny uzáver relácie $\vdash_A$ označujeme $\vdash_A^*$. Ak je z kontextu jasné, o ktorý konečný automat sa jedná, index $A$ vynechávame a píšeme iba $\vdash$.*

**Definícia 1.1.4.** ***Jazyk*** *akceptovaný (definovaný) nedeterministickým konečným automatom $A$ je jazyk $L(A) = \{w \in \Sigma^* | \exists q_F \in F : (q_0, w) \vdash^* (q_F, \varepsilon)\}$.*

**Definícia 1.1.5.** ***Stavovou zložitosťou*** *nedeterministického konečného automatu $A$ (označujeme $\#_S(A)$) rozumieme počet jeho stavov, t.j. $\#_S(A) = |K|$.*

**Definícia 1.1.6.** ***Nedeterministickú stavovú zložitosť*** *jazyka $L \in \mathscr{R}$ (označujeme $nsc(L)$ - z anglického nondeterministic state complexity) definujeme $nsc(L) = min\{\#_S(A) | L(A) = L\}$.*

**Definícia 1.1.7.** *Nech $L \in \mathscr{R}$.* ***Minimálnym nedeterministickým konečným automatom pre jazyk L*** *rozumieme ľubovolný nedeterministický konečný automat $A$ taký, že $\#_S(A) = nsc(L)$.*

**Označenie 1.1.1.** *Dĺžku slova $w$ označujeme $|w|$.*

## 1.2 Motivácie a definícia problému

Pred tým ako zadefinujeme skúmaný problém formálne, pozrime sa na motiváciu, ktorá nás k definícii viedla. Našou motiváciou je otázka užitočnosti prídavnej informácie pri akceptovaní jazyka. Volne povedané, ak automatu našepkám, že vstup, ktorý ide rozpoznávať patrí do nejakého poradného jazyka, viem tým zabezpečiť, že na rozpoznávanie pôvodného jazyka stačí automat menšej zložitosti? Uveďme jeden príklad. Uvažujme, že chceme rozpoznávať jazyk $\{w \in \{a\}^* \mid |w| \equiv 0 \ (mod\ 6)\}$ a chceme ho rozpoznávať deterministickým konečným automatom. Lahko vidno, že minimálny NKA pre tento jazyk má 6 stavov. Čo ak však automatu našepkám, že dĺžka vstupu je delitelná tromi? Vtedy nám stačí vziať NKA s dvomi stavmi.

Druhou úvahou, ktorá vedie k velmi podobnému problému je, či viem rozložiť automat rozpoznávajúci jazyk na dva, ktoré sú nejakým spôsobom jednoduchšie ako pôvodný automat, pričom prienik jazykov ktoré rozpoznávajú jednotlivé jednoduchšie automaty je pôvodný jazyk. Lahko vidno, že jazyk rozpoznávaný jedným z týchto dvoch automatov plní funkciu poradného jazyka.

Spomeňme ešte, že pod slovom automat teraz myslíme akýkolvek výpočtový model, nie nutne iba deterministický konečný automat, prípadne nedeterministický konečný automat. V našej práci však budeme tento problém skúmať výlučne pre nedeterministické konečné automaty. V minulosti bol tento problém už skúmaný na našej fakulte pre deterministické konečné automaty v práci [Gaži, 2006] a pre deterministické zásobníkové automaty v práci [Labath, 2010].

Uvedené úvahy nás teda vedú k nasledovnej definícii.

**Definícia 1.2.1.** *Nech $A$ je nedeterministický konečný automat. Potom dva nedeterministické konečné automaty $A_1, A_2$ také, že $L(A) = L(A_1) \cap L(A_2)$ nazveme* ***rozklad automatu*** *$A$. Ak navyše platí $\#_S(A_1) < \#_S(A)$ a $\#_S(A_2) < \#_S(A)$, nazývame tento rozklad* ***netriviálny****. Ak existuje netriviálny rozklad automatu $A$, tak automat $A$ nazývame* ***rozložitelný****.*

**Definícia 1.2.2.** *Nech $L \in \mathscr{R}$ a $A$ je nejaký minimálny NKA pre jazyk $L$.* ***Jazyk*** *$L$ nazývame* ***nedeterministicky rozložitelný*** *práve vtedy, keď je automat $A$ rozložitelný.*

*Dôkaz.* Podľa správnosti treba ukázať, že vlastnosť jazyka **byť nedeterministicky rozložitelný** je podľa definície 1.2.2 dobre zadefinovaná, teda nezávisí od výberu minimálneho automatu pre jazyk. Uvažujme teda ľubovolný jazyk $L \in \mathscr{R}$. Ak existuje pre daný jazyk unikátny minimálny NKA, tak niet čo dokazovať. Uvažujme teda, že pre jazyk $L$ existuje viacero minimálnych NKA. Nech $A_1^{min}$ a $A_2^{min}$ sú rôzne minimálne NKA pre jazyk $L$. Dokážeme, že automat $A_1^{min}$ je rozložiteľný práve vtedy, keď je rozložiteľný automat $A_2^{min}$. Nech teda existuje netriviálny rozklad automatu $A_1^{min}$. Teda existujú NKA $B_1$ a $B_2$ také, že $L(B_1) \cap L(B_2) = L(A_1^{min}) = L$ a $\#_S(B_1) < \#_S(A_1^{min})$, $\#_S(B_2) < \#_S(A_1^{min})$. Nakoľko $A_1^{min}$ a $A_2^{min}$ sú oba minimálne automaty pre jazyk $L$, tak platí $\#_S(A_1^{min}) = \#_S(A_2^{min})$ a $L(A_1^{min}) = L(A_2^{min}) = L$. Teda platí $\#_S(B_1) < \#_S(A_2^{min})$, $\#_S(B_2) < \#_S(A_2^{min})$ a taktiež $L(B_1) \cap L(B_2) = L(A_2^{min}) = L$, teda $B_1$ a $B_2$ tvoria zároveň netriviálny rozklad automatu $A_2^{min}$. Daná úvaha sa dá úplne analogicky spraviť aj opačným smerom a dokázať, že ak je rozložiteľný automat $A_2^{min}$, tak potom je rozložiteľný aj automat $A_1^{min}$. Týmto sme ukázali, že daná vlastnosť jazyka je dobre definovaná. □

**Poznámka 1.2.1.** *V našej práci budeme takmer vždy hovoriť o nedeterministickej rozložitelnosti jazyka, preto budeme písať skrátene o rozložitelnosti jazyka. Plný výraz nedeterministická rozložitelnosť jazyka budeme používať iba v prípadoch, ked bude treba zvýrazniť, že ide práve o nedeterministickú rozložitelnosť a nie deterministickú.*

Lahko vidno, že rozklad NKA $A$ existuje vždy a tvorí ho samotný automat $A$ a NKA pre jazyk $\Sigma_A^*$. Samozrejme tento rozklad nie je netriviálny a rovnako nie je ani ničím zaujímavý. Preto nás bude v prípade automatov zaujímať, za akých podmienok existuje ich netriviálny rozklad. Pri jazykoch nás prirodzene bude zaujímať, či sú rozložitelné.

**Lema 1.2.1** (o bezepsilonových NKA)**.** *Nech $A$ je NKA. Potom platia nasledovné tvrdenia.*

1. *existuje NKA $A'$ taký, že $L(A') = L(A)$, $\#_S(A) = \#_S(A')$ a automat $A'$ neobsahuje prechody na $\varepsilon$*

2. *ak je $A$ rozložiteľný, potom existuje netriviálny rozklad automatu $A$ na NKA $A_1^\varepsilon, A_2^\varepsilon$ taký, že $A_1^\varepsilon$ a $A_2^\varepsilon$ neobsahujú prechody na $\varepsilon$*

*Dôkaz.* Tvrdenie 1 vyplýva priamo zo štandardnej konštrukcie odepsilonovaného NKA k ľubovoľnému NKA.

Dokážeme tvrdenie 2. Automat $A$ rozložiteľný, to znamená, že existuje netriviálny rozklad automatu $A$ na automaty $A_1$ a $A_2$, čo znamená, že $L(A) = L(A_1) \cap L(A_2), \#_S(A_1) < \#_S(A), \#_S(A_2) < \#_S(A)$. Podľa 1 však existujú automaty $A_1'$ a $A_2'$ také, že $L(A_1') = L(A_1)$, $\#_S(A_1) = \#_S(A_1')$ a $L(A_2') = L(A_2)$, $\#_S(A_2) = \#_S(A_2')$ pričom navyše automaty $A_1'$ a $A_2'$ neobsahujú prechody na $\varepsilon$. To však znamená, že $L(A) = L(A_1') \cap L(A_2'), \#_S(A_1') < \#_S(A), \#_S(A_2') < \#_S(A)$, teda $A_1'$ a $A_2'$ tvoria taktiež netriviálny rozklad automatu $A$. Teda stačí položiť $A_1^\varepsilon = A_1', A_2^\varepsilon = A_2'$. □

**Poznámka 1.2.2.** *Zmysel Lemy 1.2.1 je v zjednodušení dôkazov niektorých tvrdení v našej práci, kde potrebujeme predpokladať existenciu rozkladu netriviálneho rozkladu nejakého automatu a následne dokázať niečo o výpočtoch NKA ktoré tvoria tento rozklad. Vďaka tejto Leme môžeme predpokladať, že dané výpočty v každom kroku spracujú nejaký znak zo vstupu, čo robí dôkazy prehľadnejšími.*

## 1.3 Techniky určovania dolnej hranice počtu stavov NKA

Na skúmanie otázky rozložiteľnosti jazyka musíme mať nástroje, pomocou ktorých vieme k jazykom hladať ich minimálne automaty. V nasledujúcej časti uvedieme techniky, pomocou ktorých budeme schopný určovať dolné hranice pre počet stavov nedeterministického konečného automatu pre daný jazyk. Pre deterministické konečné automaty máme k dispozícii `Myhill-Nerodovú vetu`, ktorá vždy dokáže určiť tesnú spodnú hranicu pre počet stavov potrebných pre deterministický konečný automat rozpoznávajúci daný jazyk. Pri nedeterministických konečných automatoch je situácia horšia. Takúto silnú techniku nemáme k dispozícii. Avšak máme k dispozícii techniky, ktoré nám poskytujú aspoň nejaké, nie nutne tesné, dolné hranice pre počet stavov potrebných pre nedeterministický konečný automat rozpoznávajúci daný jazyk. Uvádzame dve techniky - Techniku oblbovacích množín (z anglického Fooling set technique) a techniku rozšírených oblbovacích množín (z anglického Extended fooling set technique) z [Palioudakis, 2012] a [Glaister and Shallit, 1996].

**Definícia 1.3.1** (Oblbovacia množina)**.** *Nech $L$ je jazyk, $n \in \mathbb{N}$. Nech $P = \{(x_i, y_i) | 1 \leq i \leq n\}$ taká, že:*

*(a)* $x_i y_i \in L$ *pre* $1 \leq i \leq n$

*(b)* $x_i y_j \notin L$ *pre* $1 \leq i, j \leq n$ *a* $i \neq j$

*Potom množinu $P$ nazývame* ***oblbovacia množina pre jazyk*** *$L$.*

**Veta 1.3.1** (Technika oblbovacích množín)**.** *Nech $L$ je regulárny jazyk a existuje oblbovacia množina $P$ pre jazyk $L$. Potom každý NKA akceptujúci $P$ má aspoň $|P|$ stavov (t.j. $nsc(L) \geq |P|$).*

*Dôkaz.* Aby sme nahliadli, čo je za touto technikou, uvedieme aj dôkaz. Označme $|P| = n$ a postupujme sporom. Nech platia predpoklady tvrdenia a nech existuje NKA A ktorý má menej stavov ako $n$. Pozrime sa na výpočty automatu $A$ na slovách $x_i y_i$ pre $1 \leq i \leq n$. Podľa definície množiny $P$ musí platiť $(q_{0_A}, x_i y_i) \vdash^* (p_i, y_i) \vdash^* (q_{i_F}, \varepsilon)$ kde $p_i \in K_A$ a $q_{i_F} \in F_A$. Pozrime sa teraz pozornejšie na stavy $p_i$. Nakolko platí, že automat A má menej stavov ako je $n$, musí platiť, že existujú také $k \neq l$, že $p_k = p_l$. Potom však platí, že $(q_{0_A}, x_k y_l) \vdash^* (p_l, y_l) \vdash^* (q_{i_F}, \varepsilon)$. Potom však $x_k y_l \in L$ čo je spor s definíciou množiny P. Teda A má aspoň n stavov. □

Drobnou úpravou tejto vety dostaneme silnejšie tvrdenie.

**Definícia 1.3.2** (Rozšírená oblbovacia množina)**.** *Nech $L$ je jazyk. Nech $n \in \mathbb{N}$. Nech $P = \{(x_i, y_i) | 1 \leq i \leq n\}$ taká, že:*

*(a)* $x_i y_i \in L$ *pre* $1 \leq i \leq n$

*(b)* $x_i y_j \notin L$ *alebo* $x_j y_i \notin L$ *pre* $1 \leq i, j \leq n$ *a* $i \neq j$

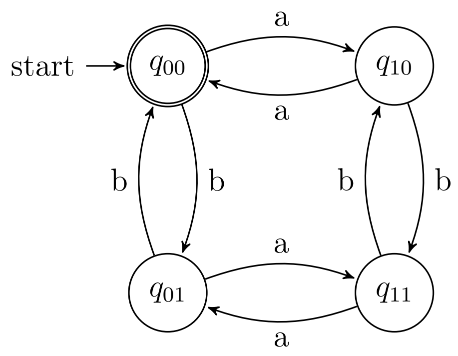
*Potom množinu $P$ nazývame* ***rozšírená oblbovacia množina pre jazyk*** *$L$.*

**Veta 1.3.2** (Technika rozšírených oblbovacích množín)**.** *Nech $L$ je regulárny jazyk a existuje rozšírená oblbovacia množina $P$ pre jazyk $L$. Potom každý NKA akceptujúci $P$ má aspoň $|P|$ stavov (t.j. $nsc(L) \geq |P|$).*

Dôkaz je takmer identický ako dôkaz pre 1.3.1 a je triviálne ho rozšíriť tak, aby dokazoval toto tvrdenie, preto ho neuvádzame. Takisto je lahko vidno, že ak je množina oblbovacou množinou pre jazyk $L$, je aj rozšírenou oblbovacou množinou pre $L$.

Prirodzená otázka, ktorá sa ponúka, je: „Ako nájsť čo najväčšiu (rozšírenú) oblbovaciu množinu pre daný jazyk $L$? “. Algoritmus, pomocou ktorého by sa táto množina dala skonštruovať známy nie je, avšak v [Glaister and Shallit, 1996] autori ponúkajú nasledujúcu heuristiku, ktorá, ako sa zdá, často zafunguje velmi dobre. Najprv skonštruujme NKA rozpoznávajúci jazyk $L$. Nech pre každý stav $q$ tohto automatu je $x_q$ najkratšie slovo také, že platí $(q_0, x_q) \vdash^* (q, \varepsilon)$ a nech $w_q$ je najkratšie slovo také, že platí $(q, w_q) \vdash^* (q_F, \varepsilon)$, kde $q_F$ je akceptačný stav. Potom zvol P ako nejakú vhodnú podmnožinu $\{(x_q, w_q) | q \in K\}$.

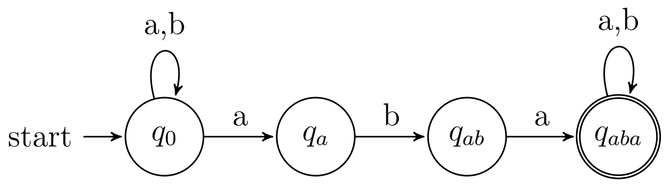
**Príklad 1.3.1.** Uvažujme jazyk $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \equiv 0\ (mod\ 2) \wedge \#_b(w) \equiv 0\ (mod\ 2)\}$. NKA akceptujúci jazyk $L$ uvádzame pomocou diagramu.




Obr. 1.1: NKA akceptujúci jazyk $L$

Teraz použijúc techniky uvedené v predošlom dokážeme, že tento NKA je mnimálnym NKA pre jazyk $L$. Uvažujme množinu dvojíc slov $F = \{(\varepsilon, \varepsilon), (a, a), (ab, ab), (b, b)\}$. Množina $F$ je podla definície 1.3.1 oblbovacou množinou pre jazyk $L$. Nakolko $|F| = 4$, tak podla vety 1.3.1 platí $nsc(L) \geq 4$. Kedže sa nám podarilo zostrojiť NKA akceptujúci $L$, ktorý má práve 4 stavy, tak tento NKA je minimálnym automatom pre jazyk $L$, t.j. $nsc(L) = 4$.

**Príklad 1.3.2.** Uvažujme jazyk $L = \{w_1 abaw_2 \mid w_1, w_2 \in \{a, b\}^*\}$. NKA akceptujúci jazyk $L$ uvádzame pomocou diagramu.




Obr. 1.2: NKA akceptujúci jazyk $L$

Použijúc techniky uvedené v predošlom dokážeme, že tento NKA je mnimálnym NKA pre jazyk $L$. Uvažujme množinu dvojíc slov $F = \{(\varepsilon, aba), (a, ba), (ab, a), (aba, \varepsilon)\}$. Množina $F$ je podla definície 1.3.2 rozšírenou oblbovacou množinou pre jazyk $L$. Nakolko $|F| = 4$, tak podla vety 1.3.2 platí $nsc(L) \geq 4$. Kedže sa nám podarilo zostrojiť NKA akceptujúci $L$, ktorý má práve 4 stavy, tak tento NKA je minimálnym automatom pre jazyk $L$, t.j. $nsc(L) = 4$. Ešte spomeňme, že pri dokazovaní minimality pomocou techniky oblbovacích množín (nie rozšírených) by sme neuspeli, nakolko najväčšia možná oblbovacia množina pre jazyk $L$ obsahuje 2 prvky.

# Kapitola 2

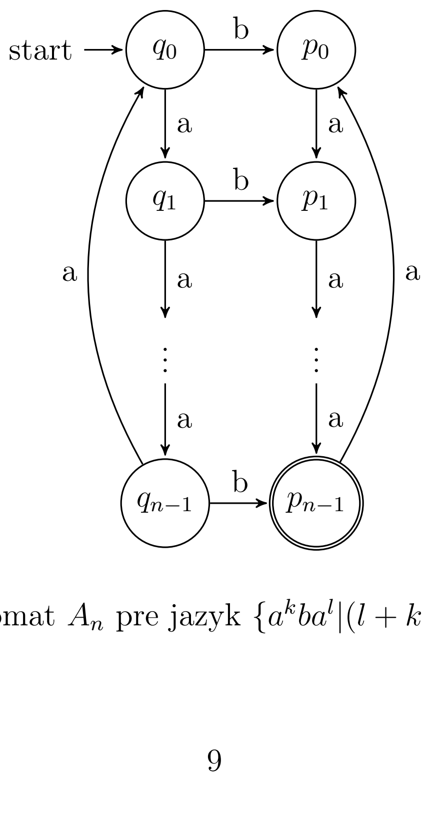
# Rozložitelné a nerozložitelné jazyky

V tejto kapitole sa venujeme skúmaniu konkrétnych typov jazykov vzhladom na ich rozložitelnosť. Cieľom kapitoly je poskytnúť základný vhľad do problematiky a takisto vybudovať repertoár jazykov, ktoré budeme používať v ďalšom texte pri dôkazoch tvrdení.

## 2.1 Rozložitelné jazyky

**Veta 2.1.1.** *Nech pre každé* $n \geq 2$ *je* $L_n = \{a^k ba^l | (l+k) \equiv 0(mod\ n)\}$. *Potom je jazyk* $L_n$ *rozložitelný.*

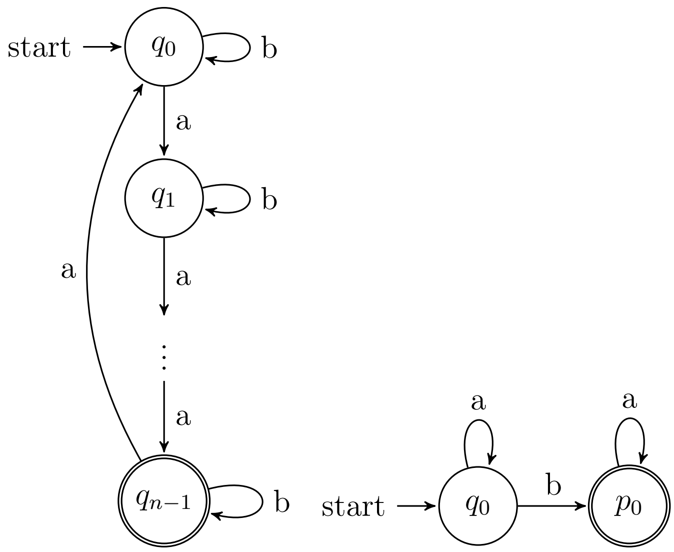
*Dôkaz.* Uvažujme $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Aby sme dokázali, že jazyk je regulárny a teda má význam uvažovať o jeho rozklade, zostrojme NKA $A_n$ taký, že $L(A_n) = L_n$. Hladaný NKA uvádzame pomocou diagramu.




Obr. 2.1: automat $A_n$ pre jazyk $\{a^k ba^l | (l+k) \equiv 0(mod\ n)\}$

Uvažujme množinu dvojíc slov $F_n = \{(a^l, ba^{n-l}), (a^l b, a^{n-l}) \mid 0 \leq l \leq n-1\}$. Podla definície 1.3.2 je množina $F_n$ rozšírenou oblbovacou množinou. $|F_n| = 2n$, teda podla Vety 1.3.2 $nsc(L_n) \geq 2n$. Kedže $L(A_n) = L_n$ a $\#_S(A_n) = n+2$, tak $nsc(L_n) = 2n$ a automat $A_n$ je minimálny NKA pre jazyk $L_n$.

Teraz zostrojme netriviálny rozklad automatu $A_n$. Hladané NKA $A_n^1$ a $A_n^2$ uvádzame pomocou ich diagramov.

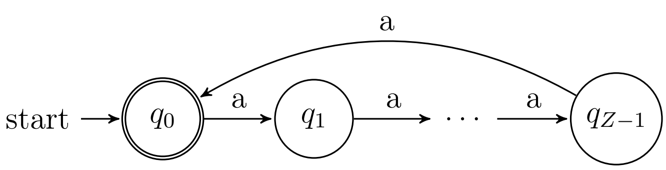



Obr. 2.2: rozklad automatu $A_n$

Lahko vidno, že uvedené NKA pre $n \geq 2$ tvoria netriviálny rozklad automatu $A_n$, teda že platí $\#_S(A_n^1) < 2n$, $\#_S(A_n^2) < 2n$, $L(A_n^1) \cap L(A_n^2) = L(A_n)$. □

**Veta 2.1.2.** *Nech pre* $Z \in \mathbb{N}, Z > 0$ *je* $L_Z = \{a^{kZ} \mid k \in \mathbb{N}\}$. *Potom ak* $Z$ *nie je mocninou prvočísla, tak jazyk* $L_Z$ *je rozložiteľný.*

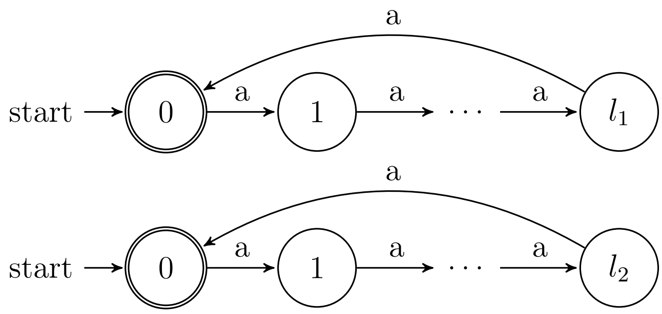
*Dôkaz.* Podla prepokladu vety uvažujme $Z \in \mathbb{N}, Z > 0$, $Z$ nie je mocninou prvočísla. Najprv ukážeme, že $nsc(L_Z) = Z$. Zostrojme NKA $A_Z$ taký, že $L(A_Z) = L_Z$. Automat uvádzame pomocou diagramu.




Obr. 2.3: automat $A_Z$

Uvažujme množinu dvojíc slov $F_Z = \{(a^i, a^{Z-i}) \mid 0 \leq i \leq Z-1\}$. Podla definície 1.3.1 je množina $F_Z$ oblbovacou množinou pre jazyk $L_Z$. Nakolko $|F_Z| = Z$, tak podľa Vety 1.3.1 $nsc(L_Z) \geq Z$. Nakoľko $L(A_Z) = L_Z$ a $\#_S(A_Z) = Z$, tak platí $nsc(L_Z) = Z$. Intuitívne je jasné, že automat „počíta zvyšok po delení $Z$“.

Teraz nájdeme netriviálny rozklad automatu $A_Z$. Nech $p_1^{m_1}p_2^{m_2}...p_r^{m_r}$ je prvočíselný rozklad čísla $Z$. Podla predpokladov vety platí, že $r \geq 2$. Najprv načrtneme intuitívny pohlad vyplývajúci z vlastností zložených čísel a potom túto intuíciu sformalizujeme. Automaty v rozklade budú počítať zvyšok po delení $p_1^{m_1}$ a zvyšok po delení $p_2^{m_2}...p_r^{m_r}$ a budú akceptovať, ak nimi počítaný zvyšok vyjde 0. Ak oba zvyšky vyjdú 0, tak dostaneme slovo, v ktorom počet písmen $a$ je delitelný $p_1^{m_1}$ a zároveň je delitelný $p_2^{m_2}...p_r^{m_r}$. Nakoľko $p_1, p_2, ..., p_r$ sú navzájom rôzne prvočísla, tak potom počet písmen $a$ v zmienenom slove je delitelný $Z = p_1^{m_1}p_2^{m_2}...p_r^{m_r}$. Teraz uveďme hladané automaty, ktoré tvoria rozklad automatu $A_Z$. Automaty uvádzame pomocou diagramov. Pre prehladnosť diagramov zaveďme označenie $l_1 = p_1^{m_1}$ a $l_2 = p_2^{m_2}...p_r^{m_r}$




Obr. 2.4: rozklad automatu $A_Z$ na automaty $A_1^Z$(hore) a $A_2^Z$(dole)

Automaty v rozklade označme $A_1^Z$ a $A_2^Z$ a formálne dokážme, že $L(A_1^Z) \cap L(A_2^Z) = L(A_Z)$.

$\subseteq$ : Nech $w \in L(A_1^Z) \cap L(A_2^Z)$. Z konštrukcie automatov $A_1$ a $A_2$ vyplýva, že slovo $w$ obsahuje iba znaky $a$ a jeho dĺžka je delitelná $p_1^{m_1}$ a zároveň je delitelná $p_2^{m_2}...p_r^{m_r}$. Z toho vyplýva, že $\exists t \in \mathbb{N} : w = a^{tp_1^{m_1}p_2^{m_2}...p_r^{m_r}}$. A teda $w \in L(A_Z)$.

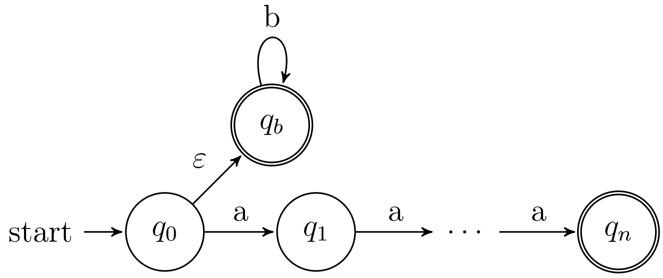
$\supseteq$ : Nech $w \in L(A_Z)$. Teda $\exists t \in \mathbb{N} : w = a^{tp_1^{m_1}p_2^{m_2}...p_r^{m_r}}$. Nakolko $L(A_1^Z) = \{a^{kp_1^{m_1}} | k \in \mathbb{N}\}$, tak $w \in L(A_1^Z)$. Nakolko $L(A_2^Z) = \{a^{kp_2^{m_2}...p_r^{m_r}} | k \in \mathbb{N}\}$, tak $w \in L(A_2^Z)$. Z toho $w \in L(A_1^Z) \cap L(A_2^Z)$.

Nakolko $\#_S(A_1^Z) < \#_S(A_Z)$ a $\#_S(A_2^Z) < \#_S(A_Z)$, tento rozklad je netriviálny, čím je tvrdenie dokázané.

□

**Veta 2.1.3.** *Nech pre $n \geq 2$ je $L_n = \{a^n\} \cup \{b\}^*$. Potom je jazyk $L_n$ rozložitelný.*

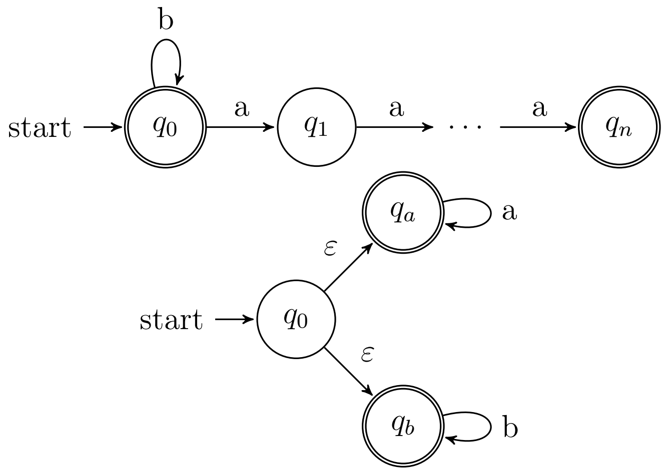
*Dôkaz.* Podla prepokladu uvažujme $n \geq 2$. Najprv dokážeme, že $nsc(L_n) = n + 2$. Najprv zostrojme NKA $A_n$ akceptujúci jazyk $L_n$. Automat $A_n$ uvádzame pomocou diagramu.




Obr. 2.5: automat $A_n$ pre jazyk $\{a^n\} \cup \{b\}^*$

Uvažujme množinu dvojíc slov $F_n = \{(b, b)\} \cup \{(a^i, a^{n-1}) | 0 \leq i \leq n\}$. Táto množina je podľa definície 1.3.2 rozšírenou oblbovacou množinou pre jazyk $L_n$. Kedže $|F_n| = n+2$, tak podľa Vety 1.3.2 $nsc(L_n) \geq n+2$. Nakoľko automat $L(A_n)$ a $\#_S(A_n) = n+2$, tak $nsc(L_n) = n + 2$ a automat $A_n$ je minimálny NKA pre jazyk $L_n$.

Teraz zostrojíme netriviálny rozklad automatu $A_n$, čím skompletizujeme dôkaz. Rozklad uvádzame pomocou diagramu.

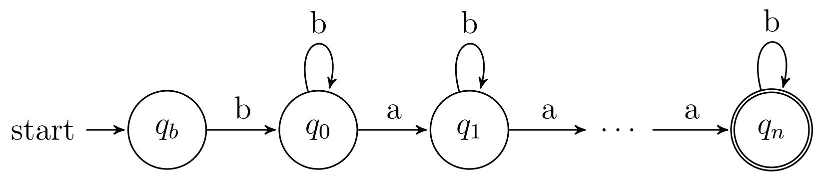



Obr. 2.6: netriviálny rozklad automatu $A_n$ z Obr. 2.5 na automaty $A_1^n$(hore) a $A_2^n$(dole)

$L(A_1^n) = \{b^k, b^k a^n | k \in \mathbb{N}\}$, $L(A_2^n) = \{a\}^* \cup \{b\}^*$. Teda $L(A_1^n) \cap L(A_2^n) = L(A_n)$. Nakolko $\#_S(A_1^n) < \#_S(A_n)$ a $\#_S(A_2^n) < \#_S(A_n)$, automaty $A_1^n$ a $A_2^n$ tvoria netriviálny rozklad automatu $A_n$. □

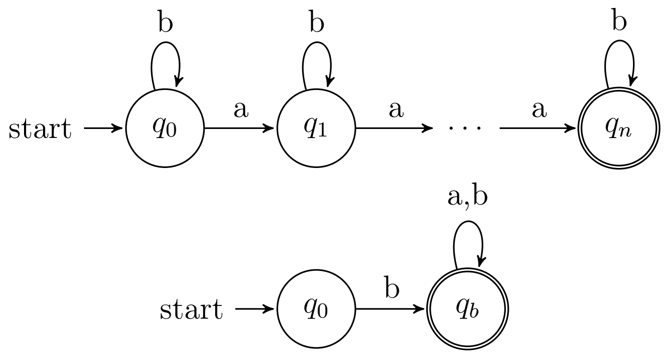
**Veta 2.1.4.** *Nech pre* $n \geq 1$ *je* $L_n = \{b\}.\{w \in \{a, b\}^* | \#_a(w) = n\}$. *Potom je jazyk* $L_n$ *rozložiteľný.*

*Dôkaz.* Uvažujme $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Ukážeme, že $nsc(L_n) = n+2$. Najprv zostrojíme NKA $A_n$ pre jazyk $L_n$. Automat uvádzame pomocou diagramu.




Obr. 2.7: automat $A_n$ pre jazyk $\{b\}.\{w \in \{a,b\}^* | \#_a(w) = n\}$

Uvažujme množinu dvojíc slov $F_n = \{(\varepsilon, ba^n)\} \cup \{(ba^k, a^{n-k} | 0 \leq k \leq n)\}$. Množina $F_n$ je podla definície 1.3.2 rozšírenou oblbovacou množinou pre jazyk $L_n$. Nakolko $|F_n| = n + 2$, tak podľa Vety 1.3.2 $nsc(L_n) \geq n + 2$. Nakolko $L(A_n) = L_n$ a $\#_S(A) = n + 2$, tak $nsc(L_n) = n + 2$ a automat $A_n$ je minimálnym NKA pre jazyk $L_n$. Teraz zostrojíme netriviálny rozklad automatu $A_n$. Rozklad uvádzame pomocou diagramu.




Obr. 2.8: netriviálny rozklad automatu $A_n$ pre jazyk $\{b\}.\{w \in \{a,b\}^* | \#_a(w) = n\}$ na automaty $A_1^n$(hore) a $A_2^n$(dole)

$L(A_1^n) = \{w \in \{a,b\}^* | \#_a(w) = n\}$, $L(A_2^n) = \{b\}.\{a,b\}^*$. Teda $L(A_1^n) \cap L(A_2^n) = L(A_n)$. Nakolko $\#_S(A_1^n) < \#_S(A_n)$ a $\#_S(A_2^n) < \#_S(A_n)$, tak automaty $A_1^n$ a $A_2^n$ tvoria netriviálny rozklad automatu $A_n$. $\square$

**Veta 2.1.5.** *Nech pre* $n, m \geq 2, 0 \leq z_n < n, 0 \leq z_m < m$ *je* $L[n, m, z_n, z_m] = \{w \in \{a,b\}^* | \#_a(w) \equiv z_n (mod\ n),\ \#_b(w) \equiv z_m (mod\ m)\}$. *Potom je jazyk* $L[n, m, z_n, z_m]$ *rozložiteľný.*

*Dôkaz.* Uvažujme $n, m \geq 2$. Najprv ukážeme, že $nsc(L[n, m, z_n, z_m]) = nm$. Definujme NKA $A[n, m, z_n, z_m] = (K, \{a, b\}, \delta, q[0,0], \{q[z_n, z_m]\})$, kde $K = \{q[i,j] \mid 0 \leq i < n,\ 0 \leq j < m\}$ a prechodová funkcia $\delta$ je pre $0 \leq i < n,\ 0 \leq j < m$ definovaná nasledovne: $\delta(q[i,j], a) = \{q[(i+1)\ mod\ n, j]\}$, $\delta(q[i,j], b) = \{q[i, (j+1)\ mod\ m]\}$. Dá sa lahko nahliadnuť, že $L(A[n, m, z_n, z_m]) = L[n, m, z_n, z_m]$. Teraz uvažujme množinu dvojíc slov $S = \{(a^l b^k, a^{z_n+n-l} b^{z_m+m-k}) \mid 0 \leq l < n,\ 0 \leq k < m\}$. Množina $S$ je podla definície 1.3.1 oblbovacou množinou pre jazyk $L[n, m, z_n, z_m]$. Kedže $|S| = nm$, tak podľa Vety 1.3.1 platí $nsc(L[n, m, z_n, z_m]) \geq nm$. Nakoľko $L(A[n, m, z_n, z_m]) =$

$L[n,m,z_n,z_m]$ a $\#_S(A[n,m,z_n,z_m]) = nm$, tak $nsc(L[n,m,z_n,z_m]) = nm$ a automat $A[n,m,z_n,z_m]$ je minimálnym NKA pre jazyk $L[n,m,z_n,z_m]$.

Teraz zostrojíme netriviálny rozklad automatu $A[n,m,z_n,z_m]$, čím skompletizujeme dôkaz. Uvažujme NKA definované nasledovne:

1. $A[n,z_n] = (K[n,z_n], \{a,b\}, \delta[n,z_n], q[0], \{q[z_n]\})$ kde $K[n,z_n] = \{q[i] | 0 \leq i < n\}$ a prechodová funkcia $\delta[n,z_n]$ je pre $0 \leq i < n$ definovaná nasledovne: $\delta[n,z_n](q[i],a) = \{q[(i+1)\ mod\ n]\}$, $\delta[n,z_n](q[i],b) = \{q[i]\}$.

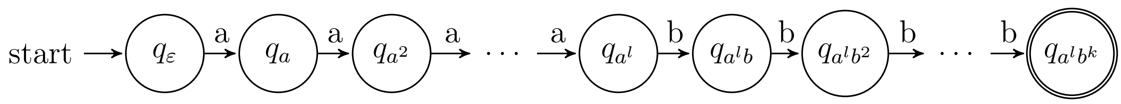
2. $A[m,z_m] = (K[m,z_m], \{a,b\}, \delta[m,z_m], q[0], \{q[z_m]\})$ kde $K[m,z_m] = \{q[i] | 0 \leq i < m\}$ a prechodová funkcia $\delta[m,z_m]$ je pre $0 \leq i < m$ definovaná nasledovne: $\delta[m,z_m](q_i,b) = \{q[(i+1)\ mod\ m]\}$, $\delta[m,z_m](q_i,a) = \{q[i]\}$.

Ľahko vidno, že $L(A[n,z_n]) = \{w \in \{a,b\}^* | \#_a(w) \equiv z_n (mod\ n)\}$, $L(A[m,z_m]) = \{w \in \{a,b\}^* | \#_b(w) \equiv z_m (mod\ m)\}$, teda $L(A[n,z_n]) \cap L(A[m,z_m]) = L(A[n,m,z_n,z_m])$. Nakoľko navyše $\#_S(A[n,z_n]) < \#_S(A[n,m,z_n,z_m])$ a $\#_S(A[m,z_m]) < \#_S(A[n,m,z_n,z_m])$, tak automaty $A[n,z_n]$ a $A[m,z_m]$ tvoria netriviálny rozklad automatu $A[n,m,z_n,z_m]$.

$\square$

**Veta 2.1.6.** *Nech pre $l,k \geq 1$ je $L_{l,k} = \{a^l b^k\}$. Potom je jazyk $L_{l,k}$ rozložiteľný.*

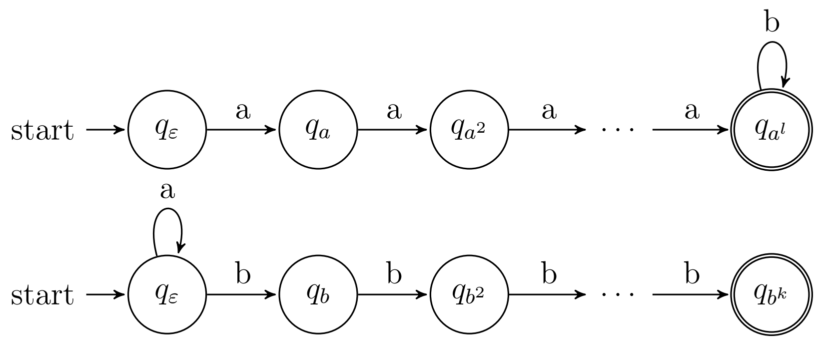
*Dôkaz.* Uvažujme $l,k \geq 1$. Ukážeme, že $nsc(L_{l,k}) = l+k+1$. Najprv zostrojíme NKA $A_{l,k}$ pre jazyk $L_{l,k}$. Automat uvádzame pomocou diagramu.




Obr. 2.9: automat $A_{l,k}$ pre jazyk $\{a^l b^k\}$

Teraz uvažujmne množinu dvojíc slov $F = \{(a^i, a^{l-i}b^k), (a^l b^j, b^{k-j}) | 0 \leq i \leq l,\ 1 \leq j \leq k\}$. Množina $F$ je podľa definície 1.3.1 oblbovacou množinou pre jazyk $L_{l,k}$. Keďže $|F| = l+k+1$, tak podľa Vety 1.3.1 platí $nsc(L_{l,k}) \geq l+k+1$. Nakoľko $L(A_{l,k}) = L_{l,k}$ a $\#_S(A_{l,k}) = l+k+1$, tak $nsc(L_{l,k}) = l+k+1$ a automat $A_{l,k}$ je minimálnym NKA pre jazyk $L_{l,k}$.

Teraz zostrojíme netriviálny rozklad automatu $A_{l,k}$. Hladané automaty $A_l$ a $A_k$ uvádzame pomocou diagramov.




Obr. 2.10: rozklad automat $A_{l,k}$ na automaty $A_l$(hore) a $A_k$(dole)

Ľahko vidno, že $L(A_l) = \{a^l b^i | i \in \mathbb{N}\}$ a $L(A_k) = \{a^i b^k | i \in \mathbb{N}\}$. Teda $L(A_l) \cap L(A_k) = L(A_{l,k})$. Navyše $\#_S(A_l) < \#_S(A_{l,k})$ a $\#_S(A_k) < \#_S(A_{l,k})$, teda automaty $A_l$ a $A_k$ tvoria netriviálny rozklad automatu $A_{l,k}$.

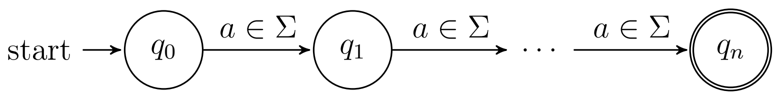
□

**Dôsledok 2.1.1.** *Existuje konečný jazyk, ktorý je rozložiteľný.*

## 2.2 Nerozložiteľné jazyky

**Veta 2.2.1.** *Pre lubovolnú abecedu $\Sigma$ a každé $n \in \mathbb{N}$ je jazyk $\Sigma^n$ nerozložiteľný.*

*Dôkaz.* Uvažujeme $n \in \mathbb{N}$. Najprv ukážeme, že $nsc(\Sigma^n) = n + 1$. Najprv zostrojme NKA $A_{\Sigma^n}$ taký, že $L(A_{\Sigma^n}) = \Sigma^n$. Automat uvádzame pomocou diagramu.




Obr. 2.11: automat $A_{\Sigma^n}$

Vezmime ľubovolné $a \in \Sigma$ a uvažujme množinu $F = \{(a^i, a^{n-i}) \mid 0 \leq i \leq n\}$. Množina $F$ je podľa definície 1.3.1 oblbovacou množinou pre jazyk $\Sigma^n$, teda podľa Vety 1.3.1 platí $nsc(\Sigma^n) \geq n + 1$. Nakoľko sme zostrojili NKA akceptujúci jazyk $\Sigma^n$, ktorý má práve $n+1$ stavov, tak $nsc(\Sigma^n) = n+1$ a NKA $A_{\Sigma^n}$ je minimálnym automatom pre jazyk $\Sigma^n$.

Pre $n = 0$ a $n = 1$ vyplýva platnosť tvrdenia z Vety 3.2.1. Pre $n \geq 2$ postupujme sporom. Nech je jazyk $\Sigma^n$ rozložiteľný, teda existuje netriviálny rozklad automatu $A_{\Sigma^n}$. To znamená, že existujú NKA $A_1^{\Sigma^n}$ a $A_2^{\Sigma^n}$ také, že $L(A_1^{\Sigma^n}) \cap L(A_2^{\Sigma^n}) = \Sigma^n$ a $\#_S(A_1^{\Sigma^n}) < n+1$, $\#_S(A_2^{\Sigma^n}) < n+1$. Navyše vďaka Leme 1.2.1 môžeme predpokladať, že automaty $A_1^{\Sigma^n}$ a $A_2^{\Sigma^n}$ neobsahujú prechody na $\varepsilon$.

Vezmime ľubovoľné $a \in \Sigma$ a uvažujme výpočet automatu $A_1^{\Sigma^n}$ na slove $a^n$. Podľa predcházajúceho automat $A_1^{\Sigma^n}$ slovo $a^n$ akceptuje. Výpočet vyzerá nasledovne: $(p_0, a^n) \vdash$

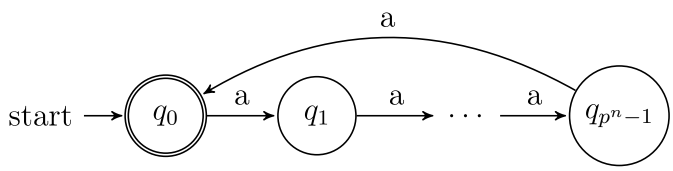
$(p_1, a^{n-1}) \vdash \ldots \vdash (p_{n-1}, a) \vdash (p_n, \varepsilon)$ kde $p_0 = q_0$, $A_1^{\Sigma^n}$, $p_n \in F_{A_1^{\Sigma^n}}$ a pre $1 \leq i < n$ $p_i \in K_{A_1^{\Sigma^n}}$. Nakoľko $\#_S(A_1^{\Sigma^n}) < n+1$, tak $\exists i, j \in \mathbb{N} : 0 \leq i \leq, ni \neq j, p_i = p_j$ (vo výpočte sa nejaký stav zopadkuje). Z toho vyplýva, že v akceptovanom slove môžem nejakú jeho časť pumpovať, t.j. $\exists r_1 \in \mathbb{N}, 1 \leq r_1 \leq n\ \forall k \in \mathbb{N} : a^{n+kr_1} \in L(A_1^{\Sigma^n})$.

Analogicky, uvažujúc výpočet automatu $A_2^{\Sigma^n}$ na slove $a^n$, platí $\exists r_2 \in \mathbb{N}, 1 \leq r_2 \leq n\ \forall k \in \mathbb{N} : a^{n+kr_2} \in L(A_2^{\Sigma^n})$.

Teraz uvažujme slovo $a^{n+r_1 r_2}$. Podľa predchádzajúceho platí $a^{n+r_1 r_2} \in L(A_1^{\Sigma^n}) \cap L(A_2^{\Sigma^n})$. Avšak $a^{n+r_1 r_2} \notin \Sigma^n$ čo je v spore s tým, že automaty $A_1^{\Sigma^n}$ a $A_2^{\Sigma^n}$ tvoria netriviálny rozklad automatu $A_{\Sigma^n}$. □

**Veta 2.2.2.** *Pre $n \geq 1$ a $p$ je prvočíslo definujeme $L_{p^n} = \{a^{kp^n} | k \in \mathbb{N}\}$. Potom je jazyk $L_{p^n}$ nerozložiteľný.*

*Dôkaz.* Najprv ukážeme, že $nsc(L_{p^n}) = p^n$. Zostrojme NKA $A_{p^n}$ taký, že $L(A_{p^n}) = L_{p^n}$. Automat uvádzame pomocou diagramu.




Obr. 2.12: automat $A_{p^n}$

Uvažujme množinu dvojíc slov $F = \{(a^l, a^{p^n-l}) \mid 0 \leq l \leq p^n - 1\}$. Množina $F$ je podľa definície 1.3.1 oblbovacou množinou pre jazyk $L_{p^n}$. Nakoľko $|F| = p^n$, tak podľa Vety 1.3.1 platí $nsc(L_{p^n}) \geq p^n$. Keďže sa nám podarilo zostrojiť automat akceptujúci $L_{p^n}$, ktorý má práve $p^n$ stavov, tak platí $nsc(L_{p^n}) = p^n$. Intuitívne je jasné, že automat „počíta zvyšok po delení $p^n$".

Ďalej postupujme sporom. Uvažujme, že jazyk $L_{p^n}$ je rozložiteľný, teda že existuje netriviálny rozklad automatu $A_{p^n}$. To znamená, že existujú NKA $A_1^{p^n}, A_2^{p^n}$, také, že platí $\#_S(A_1^{p^n}) < p^n$, $\#_S(A_2^{p^n}) < p^n$, $L(A_1^{p^n}) \cap L(A_2^{p^n}) = L_{p^n}$. Navyše podľa Lemy 1.2.1 môžeme predpokladať, že automaty $A_1^{p^n}$ a $A_2^{p^n}$ neobsahujú prechody na $\varepsilon$.

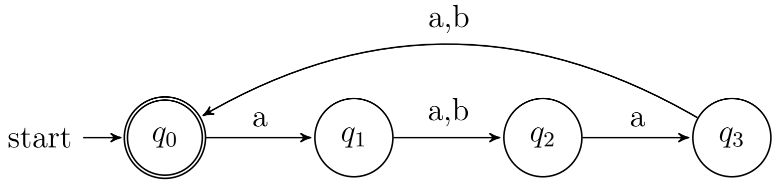
Z predchádzajúceho vyplýva, že $a^{p^n} \in L(A_1^{p^n}), a^{p^n} \in L(A_2^{p^n})$. Teraz sa pozrime na výpočet automatu $A_1^{p^n}$ na slove $a^{p^n}$. Nech tento výpočet vyzerá nasledovne $(q_0, a^{p^n}) \vdash (q_1, a^{p^n-1}) \vdash \cdots \vdash (q_{p^n-1}, a) \vdash (q_{p^n}, \varepsilon)$, kde $q_0$ je počiatočný stav automatu $A_1^{p^n}$, $q_{p^n}$ je nejaký akceptačný stav automatu $A_1^{p^n}$ a pre $1 \leq i < p^n$ $q_i \in K_{A_1^{p^n}}$. Nakolko $\#_S(A_1^{p^n}) < p^n$, tak nutne $\exists i, j \in \mathbb{N}, 0 \leq i, j < p^n, i \neq j : q_i = q_j$ (počas výpočtu sa v časti „od začatiatku po predposledný stav" nejaký stav zopakuje). Z toho vyplýva, že v akceptovanom slove môžem pumpovať časť, ktorá je kratšia ako $p^n$, t.j. $\exists r_1 \in \mathbb{N}, 1 \leq r_1 < p^n\ \forall k \in \mathbb{N} : a^{p^n+kr_1} \in L(A_1^{p^n})$.

Analogicky, uvažujúc výpočet automatu $A_2^{p^n}$ na slove $a^{p^n}$, platí $\exists r_2 \in \mathbb{N}, 1 \leq r_2 < p^n\ \forall k \in \mathbb{N} : a^{p^n+kr_2} \in L(A_2^{p^n})$.

Čísla $r_1$ a $r_2$ zapíšme nasledovne. $r_1 = p^{l_1} f_1, 0 \leq l_1 < n, p \nmid f_1$. $r_2 = p^{l_2} f_2, 0 \leq l_2 < n, p \nmid f_2$. Z uvedeného v predošlom vyplýva, že $a^{p^n + p^{max(l_1,l_2)} f_1 f_2} \in L(A_1^{p^n}) \cap L(A_2^{p^n})$. Nakolko však $p^n \nmid p^{max(l_1,l_2)} f_1 f_2$, tak $a^{p^n + p^{max(l_1,l_2)} f_1 f_2} \notin L_{p^n}$, čo je však v spore s predpokladom, že automaty $A_1^{p^n}$ a $A_2^{p^n}$ tvoria netriviálny rozklad automatu $A_{p^n}$. □

**Veta 2.2.3.** *Jazyk* $L = (\{a\}\{a,b\}\{a\}\{a,b\})^*$ *je nerozložiteľný.*

*Dôkaz.* Najprv ukážeme, že $nsc(L) = 4$. Zostrojme NKA $A_L$ taký, že $L(A_L) = L$. Automat uvádzame pomocou diagramu.




Obr. 2.13: automat $A_L$ pre jazyk $L = (\{a\}\{a,b\}\{a\}\{a,b\})^*$

Uvažujme množinu $F = \{(\varepsilon, aaaa), (a, aaa), (aa, aa), (aaa, a)\}$. Množina $F$ je podľa definície 1.3.1 oblbovacou množinou pre jazyk $L$, teda podľa Vety 1.3.1 platí $nsc(L) \geq 4$. Nakoľko sme zostrojili NKA akceptujúci jazyk $L$, ktorý má práve 4 stavy, tak $nsc(L) = 4$ a NKA $A_L$ je minimálnym automatom pre jazyk $L$.

Nech je jazyk $L$ rozložiteľný, teda existuje netriviálny rozklad automatu $A_L$. To znamená, že existujú NKA $A_1^L$ a $A_2^L$ také, že $L(A_1^L) \cap L(A_2^L) = L$ a $\#_S(A_1^L) < 4$, $\#_S(A_2^L) < 4$. Navyše vďaka Leme 1.2.1 môžeme predpokladať, že automaty $A_1^L$ a $A_2^L$ neobsahujú prechody na $\varepsilon$.

Uvažujme výpočet automatu $A_1^L$ na slove $aaaa$. Podľa predcházajúceho automat $A_1^L$ slovo $aaaa$ akceptuje. Výpočet vyzerá nasledovne: $(p_0, aaaa) \vdash (p_1, aaa) \vdash (p_2, aa) \vdash (p_3, a) \vdash (p_4, \varepsilon)$ kde $p_0$ je počiatočný stav $A_1^L$, $p_4 \in F_{A_1^L}$ a pre $1 \leq i < 4$ $p_i \in K_{A_1^L}$. Nakoľko $\#_S(A_1^L) < 4$, tak $\exists i, j \in \{0,1,2,3\}, i \neq j, p_i = p_j$ (vo výpočte sa nejaký stav zopakuje ešte pred tým ako bude slovo akceptované) . Z toho vyplýva, že v akceptovanom slove môžem nejakú jeho časť pumpovať, t.j. $\exists r_1 \in \{1,2,3\}$ $\forall k \in \mathbb{N} : a^{4+kr_1} \in L(A_1^L)$.

Analogicky, uvažujúc výpočet automatu $A_2^L$ na slove $aaaa$, platí $\exists r_2 \in \{1,2,3\}$ $\forall k \in \mathbb{N} : a^{n+kr_2} \in L(A_2^L)$.

Môžu nastať nasledovné prípady:

1. $r_1 = 1, r_2 = 3$ respektíve $r_1 = 3, r_2 = 1$. V tom prípade podľa predchádzajúceho platí $a^{4+3} \in L(A_1^L) \cap L(A_2^L)$. Avšak $a^{4+3} \notin L$ čo je v spore s tým, že automaty $A_1^L$ a $A_2^L$ tvoria netriviálny rozklad automatu $A_L$.

2. $r_1 = 2, r_2 = 2$. V tom prípade podľa predchádzajúceho platí $a^{4+2} \in L(A_1^L) \cap L(A_2^L)$. Avšak $a^{4+2} \notin L$ čo je v spore s tým, že automaty $A_1^L$ a $A_2^L$ tvoria netriviálny rozklad automatu $A_L$.

Nakoľko iné prípady nastať nemôžu, našli sme hľadaný spor čo kompletizuje dôkaz. $\square$

# Kapitola 3

# Vlastnosti tried rozložitelných a nerozložitelných jazykov

V tejto kapitole sa venujeme skúmaniu uzáverových a iných vlastností tried rozložiteľných a nerozložiteľných jazykov.

## 3.1 Uzáverové vlastnosti

**Veta 3.1.1.** *Trieda rozložiteľných jazykov nie je uzavretá na prienik.*

*Dôkaz.* Uvažujme jazyky $L_1 = \{a^{92}\} \cup \{b\}^*, L_2 = \{a^{92}\} \cup \{c\}^*$. $L_1$ a $L_2$ sú podla Vety 2.1.3 rozložiteľné. Avšak jazyk $L_1 \cap L_2 = \{a^{92}\}$ je podľa Vety 2.2.1 nerozložiteľný. □

**Veta 3.1.2.** *Trieda nerozložiteľných jazykov nie je uzavretá na prienik.*

*Dôkaz.* Uvažujme jazyky $L_1 = \{a^{2017k} | k \in \mathbb{N}\}, L_2 = \{a^{29k} | k \in \mathbb{N}\}$. $L_1$ a $L_2$ sú podla Vety 2.2.2 nerozložiteľné. Avšak jazyk $L_1 \cap L_2 = \{a^{58493k} | k \in \mathbb{N}\}$ je podľa Vety 2.1.2 rozložiteľný. □

**Veta 3.1.3.** *Trieda rozložiteľných jazykov nie je uzavretá na zjednotenie.*

*Dôkaz.* Uvažujme jazyky $L_1 = \{w \in \{a,b\}^* | \#_a(w) \equiv 0 (mod\ 2),\ \#_b(w) \equiv 0 (mod\ 3)\}, L_2 = \{w \in \{a,b\}^* | \#_a(w) \equiv 1 (mod\ 2),\ \#_b(w) \equiv 0 (mod\ 3)\}$. $L_1$ a $L_2$ sú podľa Vety 2.1.5 rozložiteľné. Avšak jazyk $L_1 \cup L_2 = \{a^{3k} | k \in \mathbb{N}\}$ je podľa Vety 2.2.2 nerozložiteľný. □

**Veta 3.1.4.** *Trieda nerozložiteľných jazykov nie je uzavretá na zjednotenie.*

*Dôkaz.* Uvažujme jazyky $L_1 = \{a^{2829}\}, L_2 = \{b\}^*$. $L_1$ je podľa Vety 2.2.1 nerozložiteľný a $L_2$ je podla Vety 3.2.1 nerozložiteľný. Avšak jazyk $L_1 \cup L_2$ je podľa Vety 2.1.3 rozložiteľný. □

**Veta 3.1.5.** *Trieda rozložiteľných jazykov nie je uzavretá na homomorfizmus.*

*Dôkaz.* Uvažujme jazyk $L = \{a^{89}\} \cup \{b\}^*$ a homomorfizmus $h : \{a, b\} \to \{\heartsuit\}$ definovaný nasledovne - $h(a) = \heartsuit, h(b) = \heartsuit$. Jazyk $L$ je podľa Vety 2.1.3 rozloziteľný. Avšak jazyk $h(L) = \{\heartsuit\}^*$ je podľa Vety 3.2.1 nerozložiteľný. $\square$

**Veta 3.1.6.** *Trieda nerozložiteľných jazykov nie je uzavretá na homomorfizmus.*

*Dôkaz.* Uvažujme jazyk $L = \{a^{2k} | k \in \mathbb{N}\}$ a homomorfizmus $h : \{a\} \to \{\gimel\}$ definovaný nasledovne - $h(a) = \gimel\gimel\gimel$. Jazyk $L$ je podľa Vety 2.2.2 nerozloziteľný. Avšak jazyk $h(L) = \{\gimel^{6k} | k \in \mathbb{N}\}$ je podľa Vety 2.1.2 rozložiteľný. $\square$

**Veta 3.1.7.** *Trieda rozložiteľných jazykov nie je uzavretá na inverzný homomorfizmus.*

*Dôkaz.* Uvažujme jazyk $L = \{a^{39}\} \cup \{b\}^*$ a homomorfizmus $h : \{b\} \to \{b\}$ definovaný nasledovne - $h(b) = b$. Jazyk $L$ je podľa Vety 2.1.3 rozloziteľný. Avšak jazyk $h^{-1}(L) = \{b\}^*$ je podľa Vety 3.2.1 nerozložiteľný. $\square$

**Veta 3.1.8.** *Trieda nerozložiteľných jazykov nie je uzavretá zreťazenie.*

*Dôkaz.* Uvažujme jazyky $L_1 = \{b\}, L_2 = \{w \in \{a, b\}^* | \#_a(w) = 81\}$. $L_1$ je podľa Vety 3.2.1 nerozložiteľný a $L_2$ je v dôsledku Vety 2.2.1 a Vety 3.2.2 ...tuto vetu treba dokopat a domyslet alebo prerobit dokaz... zatim nehavam tak... $\square$

## 3.2 Iné vlastnosti

**Veta 3.2.1.** *Nech $L$ je jazyk, pričom $nsc(L) \leq 2$. Potom $L$ je nerozložiteľný.*

*Dôkaz.* Pre $nsc(L) = 1$ je tvrdenie zrejmé. Uvažujme $nsc(L) = 2$ a postupujme sporom. Nech je $L$ rozložiteľný, t.j. existujú NKA $A_1$ a $A_2$ také, že $L(A_1) \cap L(A_2) = L, \#_S(A_1) = 1, \#_S(A_2) = 1$. Pozrime sa však lepšie na to, čo dokážu jednostavové NKA. Dá sa ľahko nahliadnuť, že jednostavový NKA môže akceptovať iba jeden z nasledovných troch typov jazykov: $\emptyset, \{\varepsilon\}, \Sigma^*$, kde $\Sigma$ je ľubovoľná abeceda. Taktiež platí $\emptyset \subset \{\varepsilon\} \subset \Sigma^*$. Z toho vyplýva, že $L(A_1) \cap L(A_2) \in \{\emptyset, \{\varepsilon\}, \Sigma^*\}$. Platí $nsc(\emptyset) = nsc(\{\varepsilon\}) = nsc(\Sigma^*) = 1$, teda $nsc(L(A_1) \cap L(A_2)) = 1$. Avšak $L(A_1) \cap L(A_2) = L$ a podľa predpokladu $nsc(L) = 2$, čo je hľadaný spor. $\square$

Nasledujúca veta formalizuje fakt, že ak máme regulárny jazyk a z neho vytvoríme nový jazyk takým štýlom, že vezmeme nový symbol, ktorý slová z pôvodného jazyka neobsahujú a tento symbol „ vopcháme “ do slov pôvodného jazyka, tak na rozložiteľnosti pôvodného jazyka to nič nezmení.

**Veta 3.2.2.** *Nech $L \in \mathscr{R}$ a $b \notin \Sigma_L$. Definujeme homomorfizmus $h_b : \Sigma_L \cup \{b\} \to \Sigma_L$ nasledovne - $h_b(b) = \varepsilon$, $\forall a \in \Sigma_L : h_b(a) = a$. Potom platia nasledovné tvrdenia:*

(a) $nsc(L) = nsc(h_b^{-1}(L))$

*(b) $L$ je rozložiteľný $\Leftrightarrow h_b^{-1}(L)$ je rozložiteľný*

*Dôkaz.* Najprv dokážeme (a). Nech $A_{min}^L = (K_L, \Sigma_L, \delta_L, q_L, F_L)$ je minimálny NKA pre $L$. Definujeme NKA $A_{min}^b = (K_L, \Sigma_L \cup \{b\}, \delta_b, q_L, F_L)$ kde $\delta_b$ je definovaná nasledovne - $\forall a \in \Sigma_L\ \forall q \in K_L : \delta_b(q,a) = \delta_L(q,a)$, $\forall q \in K_L : \delta_b(q,b) = \{q\}$. Ako možno ľahko vidieť, do NKA pre $L$ sme iba pridali slučku na $b$ v každom stave a preto platí $L(A_{min}^b) = h_b^{-1}(L)$.

Tvrdíme, že $A_{min}^b$ je minimálny NKA pre $h_b^{-1}(L)$. Toto tvrdenie dokážeme sporom. Nech existuje NKA $A_\downarrow^b = (K_\downarrow^b, \Sigma_\downarrow^b, \delta_\downarrow^b, q_\downarrow^b, F_\downarrow^b)$ taký, že $L(A_\downarrow^b) = h_b^{-1}(L), \#_S(A_\downarrow^b) < \#_S(A_{min}^b)$. Na základe $A_\downarrow^b$ definujeme NKA $A_\downarrow^L = (K_\downarrow^b, \Sigma_\downarrow^b - \{b\}, \delta_\downarrow^L, q_\downarrow^b, F_\downarrow^b)$ kde prechodová funkcia $\delta_\downarrow^L$ je definovaná nasledovne - $\forall q \in K_\downarrow^b\ \forall a \in \Sigma_\downarrow^b - \{b\} : \delta_\downarrow^L(q,a) = \delta_\downarrow^b(q,a)$. Dokážeme, že $L(A_\downarrow^L) = L$.
$\subseteq$: Nech $w \in L(A_\downarrow^L)$. Potom existuje akceptačný výpočet na $w$ v automate $A_\downarrow^L$. Vďaka tomu, ako je $A_\downarrow^L$ definovaný je tento výpočet taktiež akceptačným výpočtom v automate $A_\downarrow^b$ a teda $w \in h_b^{-1}(L)$, z čoho plynie $h_b(w) \in L$. Avšak z toho ako je $A_\downarrow^L$ definovaný vyplýva, že $w$ neobsahuje symbol $b$ a teda $h_b(w) = w$ z čoho plynie $w \in L$
$\supseteq$: Nech $w \in L$. Z toho ľahko vidno, že $w \in h_b^{-1}(L)$. Teda existuje akceptačný výpočet na slove $w$ v automate $A_\downarrow^b$. Nakoľko $w$ neobsahuje symbol $b$ a automat $A_\downarrow^L$ obsahuje všetky prechody automatu $A_\downarrow^b$ okrem prechodov na $b$, tak zmienený výpočet je taktiež akceptačným výpočtom na slove $w$ v automate $A_\downarrow^L$, čo kompletizuje dôkaz tvrdenia $L(A_\downarrow^L) = L$.
Z predošlého vyplýva $\#_S(A_\downarrow^L) = \#_S(A_\downarrow^b) < \#_S(A_{min}^b) = \#_S(A_{min}^L)$, čo je v spore s predpokladom, že automat $A_{min}^L$ je minimálny NKA pre jazyk $L$. Teda automat $A_\downarrow^b$ s uvedenými vlastnosťami nemôže existovať a teda $A_{min}^b$ je minimálny NKA pre $h_b^{-1}(L)$. Z konštrukcie automatu $A_{min}^b$ plynie, že $\#_S(A_{min}^b) = \#_S(A_{min}^L)$, čo kompletizuje dôkaz (a).

Dokážeme tvrdenie (b).
$\Rightarrow$: Nech je $L$ rozložiteľný. Teda ak $A_{min}^L$ je minimálny NKA pre $L$, tak existuje jeho netriviálny rozklad na NKA $A_1^L = (K_1, \Sigma_1, \delta_1, q_1, F_1)$ a $A_2^L = (K_2, \Sigma_2, \delta_2, q_2, F_2)$. BUNV môžeme predpokladať, že $b \notin \Sigma_1, b \notin \Sigma_2$. Definujeme NKA $A_1^b = (K_1, \Sigma_1 \cup \{b\}, \delta_1^b, q_1, F_1)$ kde prechodová funkcia $\delta_1^b$ je definovaná nasledovne - $\forall q \in K_1\ \forall a \in \Sigma_1 : \delta_1^b(q,a) = \delta_1(q,a)$, $\forall q \in K_1 : \delta_1^b(q,b) = q$. Ako si možno všimnúť, automat $A_1^b$ sme zostrojili z automatu $A_1^L$ tak, že sme v každom stave pridali slučku na $b$ a teda ľahko vidno, že $L(A_1^b) = h_b^{-1}(L(A_1^L))$. Analogicky vieme definovať na základe $A_2^L$ NKA $A_2^b$ o ktorom analogicky platí $L(A_2^b) = h_b^{-1}(L(A_2^L))$. Označme minimálny NKA pre jazyk $h_b^{-1}(L)$ $A_{min}^b$. Podľa (a) platí $\#_S(A_{min}^b) = \#_S(A_{min}^L)$. Nakoľko $\#_S(A_1^L) = \#_S(A_1^b)$ a $\#_S(A_2^L) = \#_S(A_2^b)$, tak na to, aby sme dokázali, že $A_1^b$ a $A_2^b$ tvoria netriviálny rozklad automatu $A_{min}^b$ stačí dokázať $L(A_1^b) \cap L(A_2^b) = h_b^{-1}(L)$. To dokážeme nasledujúcou argumentáciou, ktorá vyplýva z vlastností inverzných homomorfizmov a

konštrukcie automatov, ktoré v dôkaze používame - $w \in L(A_1^b) \cap L(A_2^b) \Leftrightarrow w \in h_b^{-1}(L(A_1^L)) \cap h_b^{-1}(L(A_2^L)) \Leftrightarrow w \in h_b^{-1}(L(A_1^L) \cap L(A_2^L)) \Leftrightarrow w \in h_b^{-1}(L)$. Teda $h_b^{-1}(L)$ je rozložiteľný.

$\Leftarrow$: Toto neni tak priamočiare jak by jeden chcel. Ale treba uklepať najprv rozklad vypchatého na normálny tvar kde sa na vypchávku necestuje... a potom už je. $\square$

# Kapitola 4

# Iné výsledky

Uvidíme čo kde ešte dať tak zatial sem

## 4.1 Porovnanie deterministickej a nedeterministickej rozložiteľnosti regulárnych jazykov

Zaujímavou otázkou je, či existuje regulárny jazyk taký, že je deterministicky nerozložiteľný a súčasne nedeterminiticky rozložiteľný respektíve deterministicky rozložiteľný a súčasne nedeterminiticky nerozložiteľný. Pred tým, ako uvedieme dosiahnuté výsledky zavedieme definícu deterministického konečného automatu, ktorú budeme používať, nakoľko existuje viacero prístupov k definovaniu deterministických konečných automatov.

**Definícia 4.1.1.** ***Deterministický konečný automat*** *je pätica* $(K, \Sigma, \delta, q_0, F)$*, kde:*

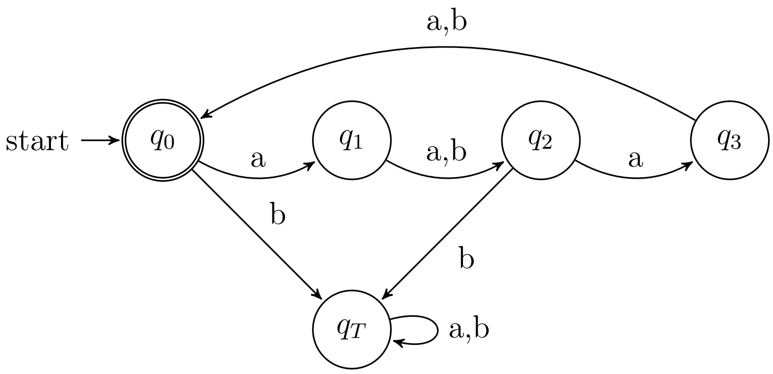
1. *$K$ je konečná množina stavov*
2. *$\Sigma$ je konečná vstupná abeceda*
3. *$q_0 \in K$ je počiatočný stav*
4. *$F \subseteq K$ je množina akceptačných stavov*
5. *$\delta : K \times \Sigma \to K$ je prechodová funkcia*

**Poznámka 4.1.1.** *Deterministický konečný automat sa skrátene označuje DKA.*

Poznajúc ako v našom texte definujeme deterministický konečný automat je pre čitateľa so základnými znalosťami v oblasti jasné, ako by boli definované ostatné potrebné pojmy, preto ich definície neuvádzame.

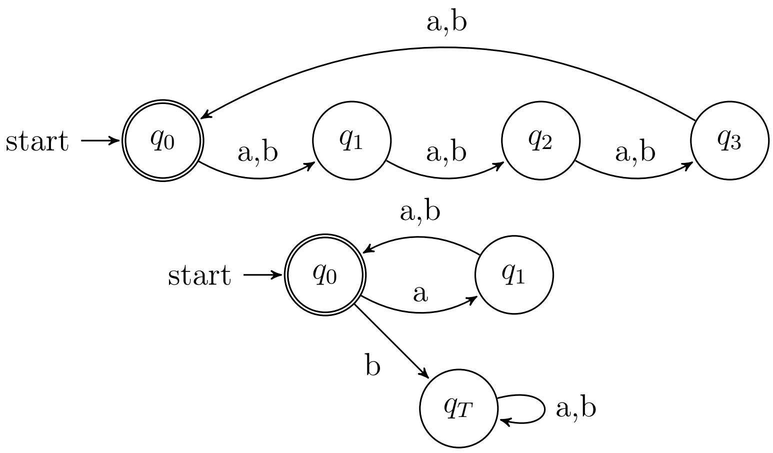
**Veta 4.1.1.** *Existuje nedeterministicky nerozložiteľný deterministicky rozložiteľný regulárny jazyk.*

*Dôkaz.* Hľadaným jazykom je jazyk $L = (\{a\}\{a,b\}\{a\}\{a,b\})^*$. Ukážeme, že jazyk $L$ je deterministicky rozložiteľný. Najprv zostrojíme minimálny DKA $A_L$ akceptujúci $L$. Automat uvádzame pomocou diagramu.




Obr. 4.1: deterministický konečný automat $A_L$ pre jazyk $L = (\{a\}\{a,b\}\{a\}\{a,b\})^*$

Ľahko vidno, že $A_L$ akceptuje práve $L$. Minimalita $A_L$ sa dá dokázať pomocou všeobecne známej Myhill-Nerodeovej vety. Zostrojíme netriviálny rozklad automatu $A_L$. Hľadané DKA $A_1^L$ a $A_2^L$ uvádzame pomocou ich diagramov.




Obr. 4.2: rozklad automatu $A_L$

Možno nahliadnuť, že jeden z automatov v rozklade počíta zvyšok po delení 4 a druhý kontroluje, či symboly na nepárnych pozíciách v slove sú $a$. Teda vidno, že $L(A_1^L) = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| \equiv 0 \ (mod\ 4)\}$ a $L(A_2^L) = (\{a\}\{a,b\})^*$. Teda $L(A_1^L) \cap L(A_2^L) = L$. Navyše $\#_S(A_1^L) < \#_S(A_L)$ a $\#_S(A_2^L) < \#_S(A_L)$, teda automaty $A_1^L$ a $A_2^L$ tvoria netriviálny rozklad automatu $A_L$. Z predchádzajúceho vyplýva, že jazyk $L = (\{a\}\{a,b\}\{a\}\{a,b\})^*$ je deterministicky rozložiteľný. Avšak tento jazyk je podľa Vety 2.2.3 nedeterministicky nerozložiteľný. □

Uvedená Veta síce ukazuje rozdiel medzi deterministickou a nedeterministickou rozložiteľnosťou, avšak jej dôkaz veľmi závisí od faktu, že DKA v definícii nútime k úplnej prechodovej funkcii a vďaka čomu DKA použitý v dôkaze musí mať odpadový stav. Bez tohto odpadového stavu by náš dôkaz neprešiel. Nasledujúca Veta ukazuje, že existujú prípady, kde rozdiel medzi deterministickou a nedeterministickou rozložiteľnosťou nie sú spôsobené iba nutnosťou úplnej prechodovej funkcie DKA.

**Veta 4.1.2.** *Existuje postupnosť jazykov* $(L_i)_{i=2}^{\infty}$*, taká, že platí:*

*(a) Jazyk* $L_i$ *je nedeterministicky nerozložiteľný a súčasne deterministicky rozložiteľný pre ľubovolné* $i \in \mathbb{N}, i \geq 2$.

*(b) Nech pre ľubovolné* $i \in \mathbb{N}, i \geq 2$ *je* $A_i$ *minimálny DKA akceptujúci* $L_i$*. Potom existuje taký rozklad* $A_i$ *na* $A_1^i$ *a* $A_2^i$*, že platí* $\#_S(A_1^i) = \#_S(A_2^i) = \frac{\#_S(A_i)+3}{2}$.

*Dôkaz.* to be done... □

## 4.2 Automaty tvorené jediným cyklom

Typickou schopnosťou konečných automatov je počítať v cykle zvyšok po delení dĺžky slova. Tieto automaty sa vyznačujú tým, že sú tvorené jediným cyklom, pričom nijak nezohľadňujú štruktúru slova. Podstatu otázok spojených s takýmito automatmi riešia Vety 2.2.2 a 2.1.2. Nakoľko v konečných automatoch sú práve cykly veľmi dôležitou štruktúrou, v našej práci sme túto otázku rozšírili a študovali sme otázku rozložiteľnosti jazykov, ktorých minimálne nedeterministické konečné automaty sú tvorené jediným cyklom, pričom v ňom zohľadňujú aj štruktrúru akceptovaného slova. Podstatou týchto automatov je, neformálne povedané, pumpovanie nejakého slova.

Pre lepšiu čitateľnosť dôkazov zavedieme nasledujúce označenia.

**Označenie 4.2.1.** Nech $u$ je ľubovolné slovo, $k \in \mathbb{N}$. Potom $pref(u, k)$ označujeme prefix slova $u$ dĺžky $k$ a $suff(u, k)$ označujeme suffix slova $u$ dĺžky $k$.

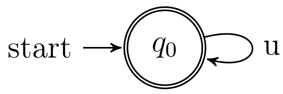
**Označenie 4.2.2.** Nech $u = u_1 u_2 \dots u_n$ je ľubovolné slovo. Ak v diagrame NKA $A$ použijeme nasledujúce označenie:

$$q \xrightarrow{\text{u}} p$$

Myslíme tým, že v automate $A$ sa dá zo stavu $q$ dostať do stavu $p$ na slovo $u$ pričom zo stavov, v ktorých sa automat $A$ nachádza počas čítania slova $u$ sa nedá už nikam inam dostať. Formálne existujú $q_0, q_1, \dots, q_n \in K_A$ také, že $q_0 = q, q_n = p, \delta_A(q, u_1) \ni q_1$ a pre $0 < i < n$ platí $\delta_A(q_i, u_{i+1}) = \{q_{i+1}\}, q_i \notin F_A$. Treba si uvedomiť, že pokiaľ $u = \varepsilon$, tak platí $q = p$, ak navyše v tom prípade aspoň jeden zo stavov je označený v diagrame ako akceptačný, tak sa tým myslí, že stav je akceptačný.

**Lema 4.2.1.** *Nech $\Sigma$ je ľubovolná abeceda, nech $u \in \Sigma^*$, nech $L_u = \{u\}^*$. Potom $nsc(L_u) = |u|$.*

*Dôkaz.* Zostrojíme NKA $A_u$ pre jazyk $L_u$. Automat uvádzame pomocou diagramu.

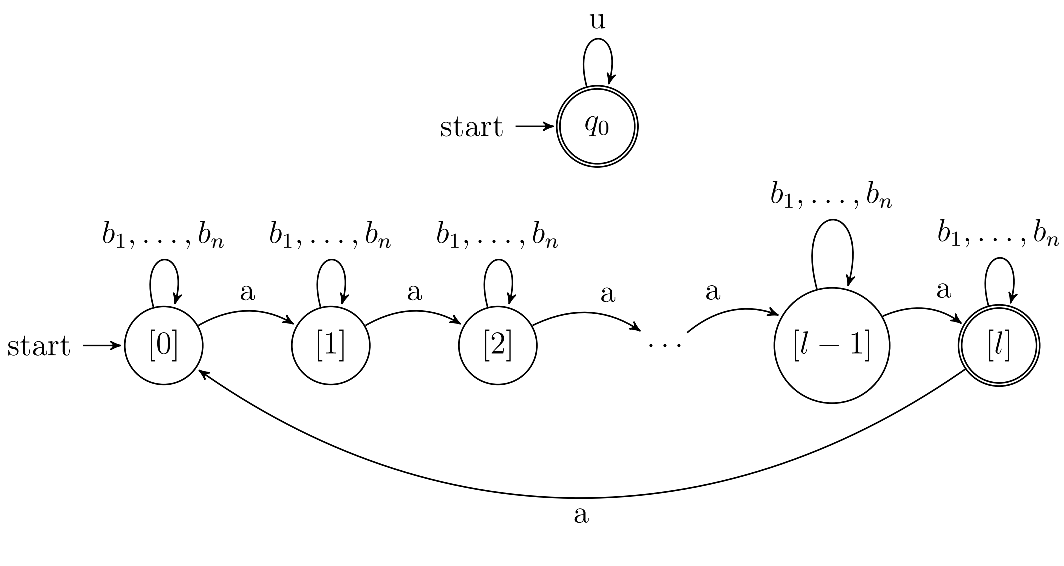



Obr. 4.3: automat $A_u$

Ľahko vidno, že $L(A_u) = L_u$. Uvažujme množinu dvojíc slov $F = \{(pref(u,i),\ suff(|u|-i)) \mid 0 \leq i < |u|\}$. Množina $F$ je podľa definície 1.3.1 oblbovacou množinou pre jazyk $L_u$. Nakoľko $|F| = |u|$, tak podľa Vety 1.3.1 $nsc(L_u) \geq |u|$. Kedže $L(A_u) = L_u$ a $\#_S(A_u) = |u|$, tak $nsc(L_u) = |u|$ a automat $A_u$ je minimálny NKA pre jazyk $L_u$. □

**Veta 4.2.1.** *Nech $\Sigma$ je ľubovolná abeceda taká, že $|\Sigma| \geq 2$. Nech pre $u \in \Sigma^*$, $k \geq 2$ je $L_u^k = \{u^k\}^*$. Ak $u$ obsahuje aspoň dva rôzne symboly, potom je $L_u^k$ rozložiteľný.*

*Dôkaz.* Nech $n \geq 1, \Sigma = \{a, b_1, \ldots, b_n\}, u \in \Sigma^*$, $u$ obsahuje symbol $a$ a minimálne ešte jeden symbol zo $\Sigma$. Podľa Lemy 4.2.1 platí $nsc(L_u^k) = k|u|$. Teda existuje NKA $A_u^k$ taký, že $L(A_u^k) = L_u^k$ a $\#_S(A_u^k) = k|u|$. Automat $A_u^k$ je teda minimálny NKA pre $L_u^k$. Zostrojíme netriviálny rozklad automatu $A_u^k$. Označme $l = k.\#_a(u)$. Rozklad uvádzame pomocou diagramu.




Obr. 4.4: rozklad automatu $A_u^k$ na automaty $A_u$(hore) a $A_k$(dole)

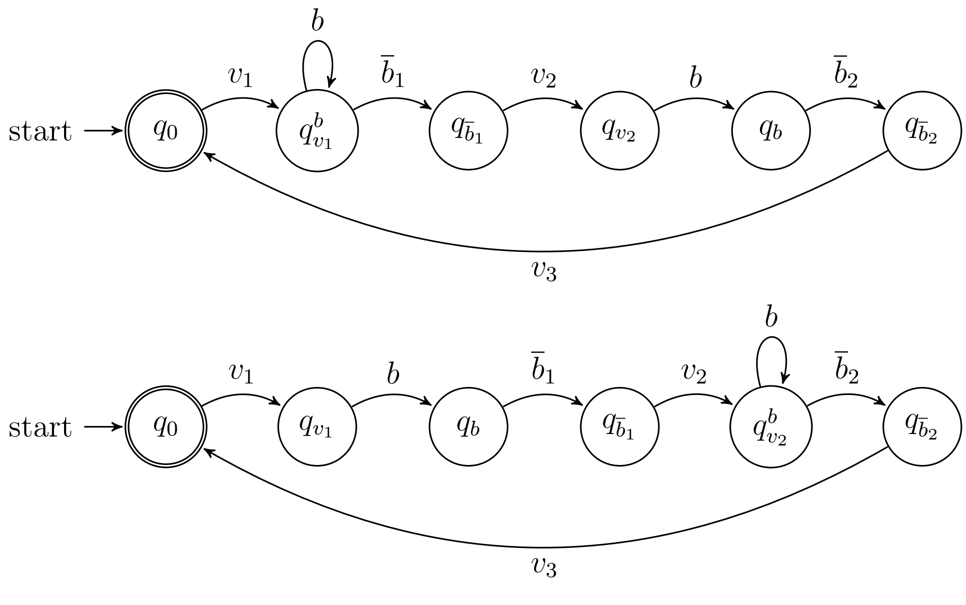
Myšlienkou tohto rozkladu je, že jeden z automatov kontroluje štruktúru slova, či je práve niekoľkonásobným zreťazením slova $u$ a druhý automat kontroluje, či je slov $u$ správne veľa. To však robí tak, že iba počíta počet nejakého jedného symbolu (v našom prípade ho označujeme $a$), ktorý $u$ obsahuje, pričom kontroluje, či slovo obsahuje práve $m.k.\#_a(u)$ pre nejaké $m \in \mathbb{N}$. Formálne $L(A_u) = \{u\}^*$ a $L(A_k) = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) \equiv 0 \ (mod\ k.\#_a(u))\}$. Teda $L(A_u) \cap L(A_k) = L(A_u^k)$. Navyše $\#_S(A_u) < \#_S(A_u^k)$ a $\#_S(A_k) < \#_S(A_u^k)$. Je dobré si uvedomiť, že kvôli prvej nerovnosti potrebujeme predpoklad $k \geq 2$ a kvôli druhej nerovnosti potrebujeme predpoklad o veľkosti abecedy $\Sigma$. Teda automaty $A_u$ a $A_k$ tvoria netriviálny rozklad automatu $A_u^k$.

□

**Veta 4.2.2.** *Nech $\Sigma$ je ľubovolná abeceda, nech $k_1, k_2 \in \{0, 1\}$, nech $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6 \in \Sigma^*$. Definujeme $L = \{w_1 a^{k_1} w_2 b w_3 a w_4 b w_5 a^{k_2} w_6\}^*$. Ak $k_1 = 1$ alebo $k_2 = 1$, potom je $L$ rozložiteľný.*

*Dôkaz.* Zaveďme označenia $u = w_1 a^{k_1} w_2 b w_3 a w_4 b w_5 a^{k_2} w_6$ a $\Sigma_{ab} = \Sigma \cup \{a, b\}$. Podľa Lemy 4.2.1 platí $nsc(L) = |u|$. Teda existuje NKA $A$ taký, že $L(A) = L$ s $\#_S(A) = |u|$. Automat $A$ je teda minimálny NKA pre $L$. Zostrojíme netriviálny rozklad automatu $A$. Rozoberieme nasledujúce dva prípady, podľa toho akého tvaru je slovo $u$. Podľa predpokladov je $u$ práve jedého z nasledujúcich tvarov:

1. Existujú dve rôzne podslová v slove $u$ také, že symbol $b$ je nasledovaný symbolom rôznym od $b$. Formálne existujú $v_1, v_2, v_3 \in \Sigma_{ab}^*$ a $\overline{b}_1, \overline{b}_2 \in \Sigma_{ab} - \{b\}$ také, že $u = v_1 b \overline{b}_1 v_2 \overline{b}_2 v_3$. Na základe tohto poznatku zostrojíme netriviálny rozklad automatu $A$. Rozklad uvádzame pomocou diagramu.




Obr. 4.5: rozklad automatu $A$ na automaty $A_1$ a $A_2$

Možno nahliadnuť, že $L(A_1) = \{v_1 b^l \overline{b}_1 v_2 b \overline{b}_2 v_3 \mid l \in \mathbb{N}\}^*$ a $L(A_2) = \{v_1 b \overline{b}_1 v_2 b^l \overline{b}_2 v_3 \mid l \in \mathbb{N}\}^*$.

Dokážeme, že $L(A_1) \cap L(A_2) = L$.

$\supseteq$: Táto inklúzia je triviálna, nebudeme ju formálne dokazovať.

$\subseteq$: Uvažujme $w \in L(A_1) \cap L(A_2)$. Potom existuje $n, m, l_1, \dots, l_n, o_1, \dots, o_m \in \mathbb{N}$ také, že $w = v_1 b^{l_1} \overline{b}_1 v_2 b \overline{b}_2 v_3 \dots v_1 b^{l_n} \overline{b}_1 v_2 b \overline{b}_2 v_3 = v_1 b \overline{b}_1 v_2 b^{o_1} \overline{b}_2 v_3 \dots v_1 b \overline{b}_1 v_2 b^{o_m} \overline{b}_2 v_3$. Indukciou na $n$ dokážeme, že $m = n$, pre $0 \leq i \leq n : l_i = 1$ a pre $0 \leq i \leq m : o_i = 1$.

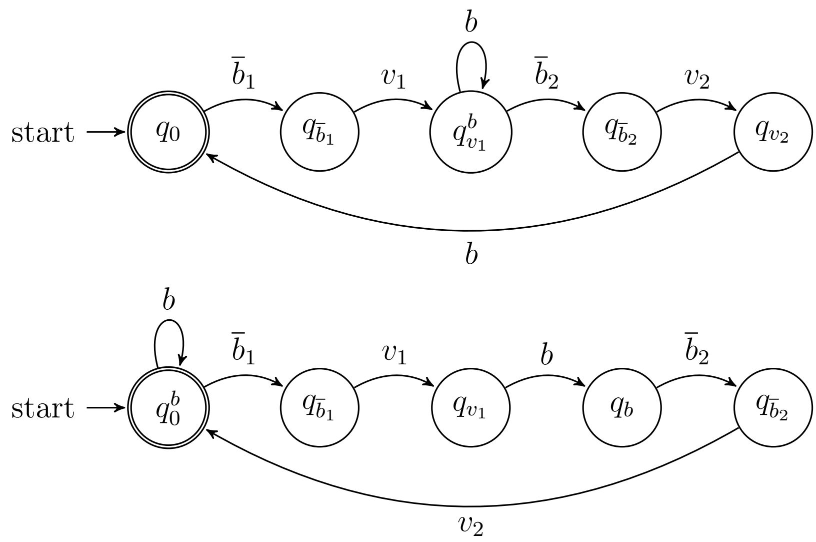
$1^0$ : Ak $n = 0$, tak $w = \varepsilon$ a tvrdenie triviálne platí.

$2^0$ : Platí $v_1 b^{l_1} \overline{b}_1 v_2 b \overline{b}_2 v_3 \dots v_1 b^{l_n} \overline{b}_1 v_2 b \overline{b}_2 v_3 = v_1 b \overline{b}_1 v_2 b^{o_1} \overline{b}_2 v_3 \dots v_1 b \overline{b}_1 v_2 b^{o_m} \overline{b}_2 v_3$. Pozrime sa pozornejšie na prvé úseky v tomto slove, t.j. na časti $v_1 b^{l_1} \overline{b}_1 v_2 b \overline{b}_2 v_3$ a $v_1 b \overline{b}_1 v_2 b^{o_1} \overline{b}_2 v_3$. Oba úseky sú prefixom toho istého slova a na prvých $|v_1|$ symboloch sa evidentne zhodujú. Musí platiť $l_1 \geq 1$, aby sa zhodovali aj na symoble $b$, ktorý nasleduje za $v_1$. Avšak nakoľko v tomto prefixe po zmienenom $b$ nasleduje znak $\overline{b}_1$, tak nutne $l_1 = 1$. Teda platí $v_1 b^{l_1} \overline{b}_1 v_2 = v_1 b \overline{b}_1 v_2$. Z toho plynie $o_1 \geq 1$, nakoľko po $v_2$ musí nasledovať symbol $b$. Ďalším sybmobolom je však $\overline{b}_2$, teda nutne $o_1 = 1$. Teda platí $v_1 b^{l_1} \overline{b}_1 v_2 b \overline{b}_2 v_3 = v_1 b \overline{b}_1 v_2 b^{o_1} \overline{b}_2 v_3 = v_1 b \overline{b}_1 v_2 b \overline{b}_2 v_3$. Navyše, oba automaty, $A_1$ aj $A_2$ sa po dočítaní tohto prefixu dostanú práve do ich počiatočného (a zároveň jediného akceptačného) stavu $q_0$. V prípade, že $n = 1$, tak niet čo ďalej dokazovať. Ak $n \geq 2$ tak z predchádzajúceho vyplýva, že $v_1 b^{l_2} \overline{b}_1 v_2 b \overline{b}_2 v_3 \dots v_1 b^{l_n} \overline{b}_1 v_2 b \overline{b}_2 v_3 = v_1 b \overline{b}_1 v_2 b^{o_2} \overline{b}_2 v_3 \dots v_1 b \overline{b}_1 v_2 b^{o_m} \overline{b}_2 v_3$ a navyše toto slovo akceptujú oba automaty, $A_1$ aj $A_2$. Teda podľa indukčného predpokladu môžeme tvrdiť, že $n = m$, pre $2 \leq i \leq n$ platí $l_i = o_i = 1$, čo dokazuje tvrdenie.

Z predošlého vyplýva, že $w \in L$, čo kompletizuje dôkaz tejto inklúzie.

Teda $L(A_1) \cap L(A_2) = L = L(A)$. Navyše $\#_S(A_1) < \#_S(A)$ a $\#_S(A_2) < \#_S(A)$, teda automaty $A_1$ a $A_2$ tvoria netriviálny rozklad automatu $A$.

2. Existujú $\overline{b}_1, \overline{b}_2 \in \Sigma_{ab} - \{b\}$, $v_1, v_2 \in \Sigma_{ab} - \{b\}$, $c_1, c_2 \geq 1$ také, že $u = \overline{b}_1 v_1 b^{c_1} \overline{b}_2 v_2 b^{c_2}$. Na základe tohto poznatku zostrojíme netriviálny rozklad automatu $A$. Rozklad uvádzame pomocou diagramu.




Obr. 4.6: rozklad automatu $A$ na automaty $A_1$(hore) a $A_2$(dole)

Možno nahliadnuť, že $L(A_1) = \{\overline{b}_1 v_1 b^l \overline{b}_2 v_2 b \mid l \in \mathbb{N}\}^*$ a $L(A_2) = \{b^l \overline{b}_1 v_1 b \overline{b}_2 v_2 \mid l \in \mathbb{N}\}^* \{b\}^*$. Platí $L(A_1) \cap L(A_2) = L$, čo sa dá dokázať veľmi podobne a rovnako veľmi technicky ako v predošlom prípade, preto dôkaz neuvádzame. Navyše $\#_S(A_1) < \#_S(A)$ a $\#_S(A_2) < \#_S(A)$, teda automaty $A_1$ a $A_2$ tvoria netriviálny rozklad automatu $A$.

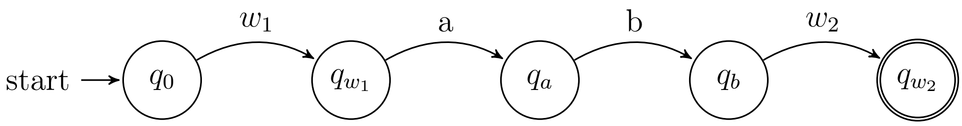
Záverom ešte spomeňme, že hlavnou myšlienkou rozkladu bola akási synchronizácia výpočtov automatov v rozklade na symboloch rôznych od $b$, ktoré nasledovali hneď za $b$. □

## 4.3 Charakterizácia jazykov tvorených jedným slovom

Uvádzame úplnú charakterizáciu triedy jazykov tvorených práve jedným slovom vzhľadom na rozložiteľnosť.

**Veta 4.3.1.** *Nech $L = \{w\}$. Potom je $L$ nedeterministicky rozložiteľný práve vtedy, keď $w$ obsahuje aspoň dva rôzne symboly.*

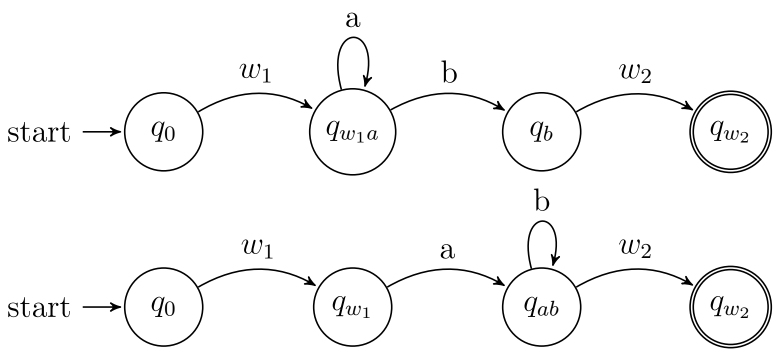
*Dôkaz.* $\Rightarrow$: Dokážeme obmenu tvrdenia. Ak $w$ obsahuje nanajvýš jeden znak, tak existuje nejaké $n \in \mathbb{N}$ také, že $L = \{a^n\}$. Potom podľa Vety 2.2.1 je jazyk $L$ nerozložiteľný.
$\Leftarrow$: Nech $w = w_1 a b w_2$ pre nejaké slová $w_1, w_2$. Zostrojíme NKA $A_w$ pre jazyk $L = \{w\}$. Automat uvádzame pomocou diagramu.




Obr. 4.7: automat $A_w$

Uvažujme množinu dvojíc slov $F = \{(pref(w,i), suff(w,|w|-i)) \mid 0 \leq i \leq |u|\}$. Množina $F$ je podľa definície 1.3.1 oblbovacou množinou pre jazyk $L$. Nakoľko $|F| = |w|+1$, tak podľa Vety 1.3.1 $nsc(L) \geq |w|+1$. Kedže $L(A_w) = L$ a $\#_S(A_w) = |w|+1$, tak $nsc(L) = |w|+1$ a automat $A_w$ je minimálny NKA pre jazyk $L$.

Zostrojíme netriviálny rozklad automatu $A_w$. Hľadané automaty $A_w^a$ a $A_w^b$ uvádzame pomocou diagramov.




A ešte dokážeme že je to netriviálny rozklad a super.

□

# Záver

Stručne zhrniem tieto prevratné výsledky :)

# Literatúra


[Gaži, 2006] Gaži, P. (2006). *Parallel decomposition of finite automata.* Diplomová práca pod vedením prof. Branislava Rovana.

[Glaister and Shallit, 1996] Glaister, I. and Shallit, J. (1996). A lower bound technique for the size of nondeterministic finite automata. *Information Processing Letters*, (59):75–77.

[Gruber and Holzer, 2006] Gruber, H. and Holzer, M. (2006). Finding lower bounds for nondeterministic state complexity is hard. Technical report, Institut fur Informatik, Technische Universitat Munchen, Boltzmannstraße 3, D-85748 Garching bei Munchen, Germany.

[Labath, 2010] Labath, P. (2010). *Zjednodušenie výpočtov prídavnou informáciou.* Diplomová práca pod vedením prof. Branislava Rovana.

[Palioudakis, 2012] Palioudakis, A. (October 2012). Nondeterministic state complexity and quantifying non-determinism in finite automata. Technical Report Technical Report 2012-596, School of Computing, Queen's University, Kingston, ON, Canada.