Prídavná informácia a zložitosť nedeterministických konečných automatov

Šimon Sádovský[1]
Školiteľ: Branislav Rovan[1]
[1] Katedra informatiky, FMFI UK, Mlynská Dolina, 842 48 Bratislava

Motivácia problému

V práci skúmame vplyv prídavnej informácie na zložitosť riešenia problému. Ako výpočtový model sme zvolili nedeterministické konečné automaty a mierou zložitosti je počet stavov. Voľne povedané, ak automatu garantujeme, že vstup, ktorý ide rozpoznávať patrí do nejakého poriadneho jazyka, vieme tým dosiahnuť, že na rozpoznávanie pôvodného jazyka stačí automat menšej zložitosti? Uveďme jeden príklad. Uvažujme, že chceme rozpoznávať jazyk $\{w \in \{a\}^* \mid |w| \equiv 0 \ (mod\ 6)\}$ a chceme ho rozpoznávať nedeterministickým konečným automatom. Ľahko vidno, že minimálny NKA pre tento jazyk má 6 stavov. Čo ak vopred vieme, že dĺžka vstupu je deliteľná tromi? Vtedy nám stačí vziať NKA s dvomi stavmi. Analogický problém bol skúmaný pre deterministické konečné automaty v [Gaži, 2006] a pre deterministické zásobníkové automaty [Labath, 2010].

Formalizácia problému

Formalizáciou tohto problému je hľadanie rozkladov nedeterministických automatov.

Označenie. *Počet stavov ľubovolného konečného automatu A označujeme $\#_S(A)$.*

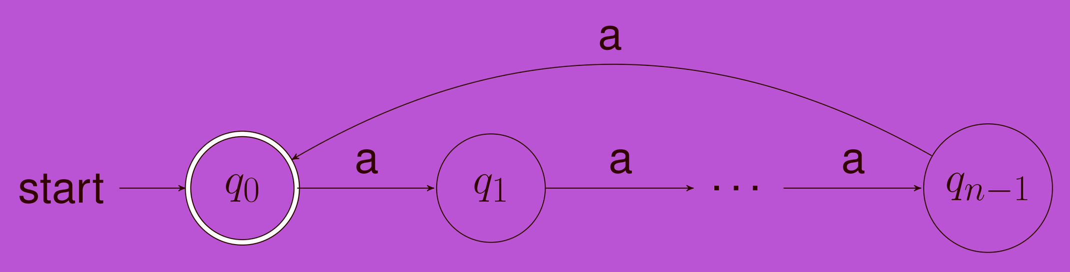
Definícia. *Nech A je nedeterministický konečný automat. Potom dva nedeterministické konečné automaty A_1, A_2 také, že $L(A) = L(A_1) \cap L(A_2)$ nazveme **rozklad automatu** A. Ak navyše platí $\#_S(A_1) < \#_S(A)$ a $\#_S(A_2) < \#_S(A)$, nazývame tento rozklad **netriviálny**. Ak existuje netriviálny rozklad automatu A, tak automat A nazývame **rozložiteľný**.*

Vlastnosť rozložiteľnosti sa dá prirodzene rozšíriť aj na vlastnosť regulárnych jazykov.

Definícia. *Nech $L \in \mathscr{R}$ a A je nejaký minimálny NKA pre jazyk L. Jazyk L nazývame **nedeterministicky rozložiteľný** práve vtedy, keď je automat A rozložiteľný.*

Jazyky založené na module dĺžky slova

Prirodzenou schopnosťou konečných automatov je v cykle rátať zvyšok po delení dĺžky slova. Pokiaľ je toto jediná vec, ktorú NKA robí, jedná sa o jazyky typu $\{a^{kn} | k \in \mathbb{N}\}$. Minimálne NKA akceptujúce takéto jazyky vyzerajú nasledovne.



Charakterizujeme tieto jazyky vzhľadom na nedeterministickú rozložiteľnosť.

Veta. *Nech pre $n \in \mathbb{N}, n > 0$ je $L_n = \{a^{kn} \mid k \in \mathbb{N}\}$. Potom L_n je nedeterministicky rozložiteľný práve vtedy, keď n nie je mocninou prvočísla.*

Jednoslovné jazyky

Charakterizujeme vzhľadom na nedeterministickú rozložiteľnosť jazyky, ktoré sú tvorené práve jedným slovom.

Veta. *Nech $L = \{w\}$. Potom je L nedeterministicky rozložiteľný práve vtedy, keď w obsahuje aspoň dva rôzne symboly.*

Príliš malé automaty

Ukazujeme, že príliš malé NKA sú nerozložiteľné.

Označenie. *Počet stavov minimálneho NKA akceptujúceho jazyk L označujeme $nsc(L)$.*

Veta. *Nech $L \in \mathscr{R}$, pričom $nsc(L) \leq 2$. Potom L je nedeterministicky nerozložiteľný.*

Rozdiel medzi deterministickou a nedeterministickou rozložiteľnosťou

Podstatnú časť našej práce tvorí hľadanie takzvaných rozdielových jazykov, ktoré by dokazovali, že pojem rozložiteľnosti regulárneho jazyka je rôzny ak uvažujeme deterministické resp. nedeterministické automaty. Intuícia našepkáva, že ak to pôjde, tak by to mohlo ísť skôr tak, že nájdeme jazyk ktorý je deterministicky nerozložiteľný a zároveň nedeterministicky rozložiteľný (očakávali sme, že v rozklade ušetrí nedeterminizmus stavy). Avšak podarilo sa nám nájsť rozdielové jazyky, pri ktorých to je opačne. Prvým našim výsledkom v tomto smere je nasledujúce tvrdenie.

Veta. *Jazyk $(\{a\}\{a,b\}\{a\}\{a,b\})^*$ je deterministicky rozložiteľný a súčasne nedeterministicky nerozložiteľný.*

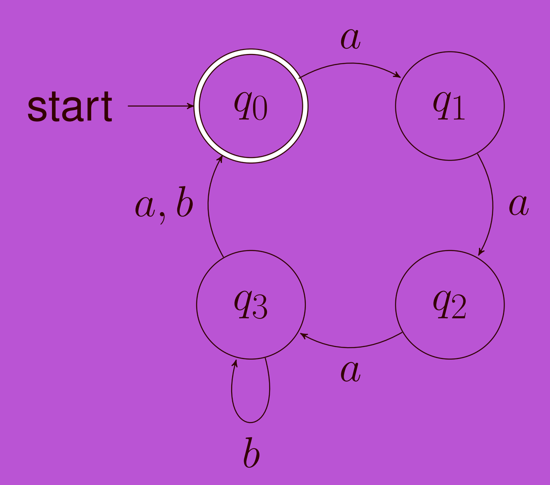
Chybou krásy tohoto výsledku bolo, že rozklad funguje iba vďaka požiadavke na úplnosť prechodovej funkcie v definícii DKA, vďaka čomu musí mať DKA pre rozdielový jazyk odpadový stav. Podarilo sa nám však nájsť nekonečnú postupnosť jazykov takú, ktorá tento problém už nemá.

Veta. *Existuje postupnosť jazykov $(L_i)_{i=2}^{\infty}$, taká, že platí:*

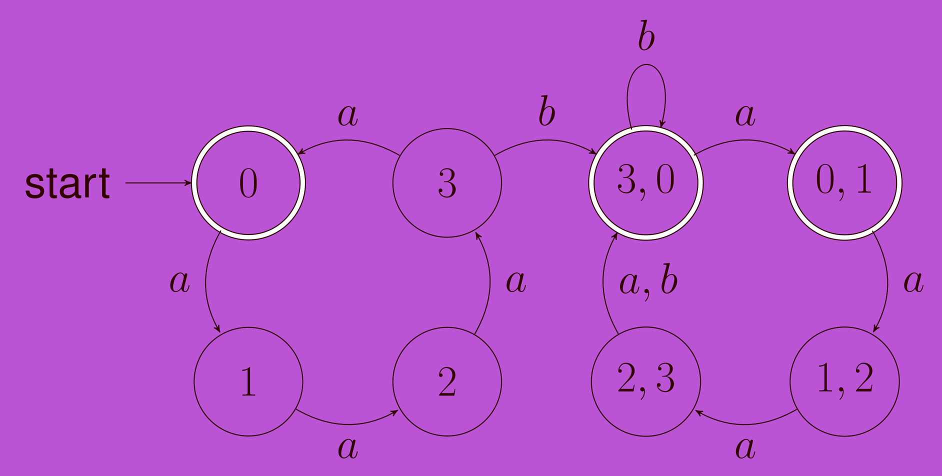
(a) *Jazyk L_i je nedeterministicky nerozložiteľný a súčasne deterministicky rozložiteľný pre ľubovolné $i \in \mathbb{N}, i \geq 2$.*

(b) *Nech pre ľubovolné $i \in \mathbb{N}, i \geq 3$ je A_i minimálny DKA akceptujúci L_i. Potom existuje taký rozklad A_i na A_1^i a A_2^i, že platí $\#_S(A_1^i) = \#_S(A_2^i) = \frac{\#_S(A_i)+3}{2}$.*

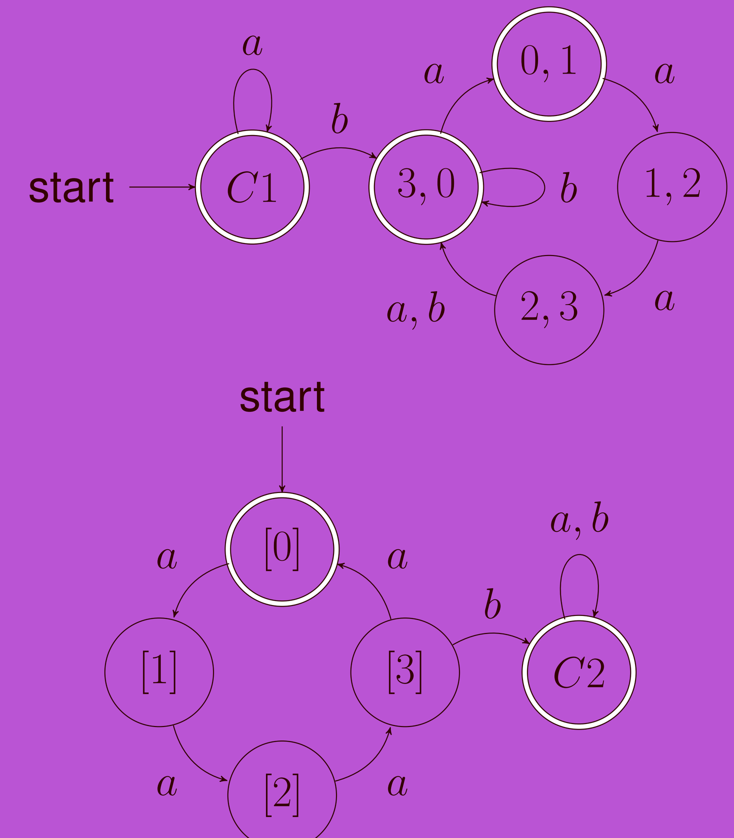
Definujme postupnosť jazykov $(L_i)_{i=2}^{\infty}$ nasledovne: $L_i = (\{a^{i-1}\}\{b\}^*\{a,b\})^*$ pre ľubovolné $i \geq 2$. Táto postupnosť ešte nie je tá, ktorú hľadáme. Tú, ktorú hľadáme, však dostaneme z P vybratím niektorých (nekonečne veľa) jej členov. Na príklade jazyka L_4 možno vidieť ako vyzerá minimálny NKA pre jazyk L_i.



Tento NKA je pre nekonečne veľa $i \geq 2$ nerozložiteľný, t.j. L_i je nedeterministicky nerozložiteľný pre nekonečne veľa $i \geq 2$. Minimálny DKA pre L_i dostaneme štandardným prevodom z NKA. Ilustujeme na príklade pre L_4.



Myšlienkou rozkladu je, že každý z automatov v rozklade „vyrieši“ len jeden z cyklov pôvodného DKA.



Jazyk L_i je deterministicky rozložiteľný pre ľubovolné $i \geq 2$. Teda sme našli nekonečnú postupnosť s hľadanými vlastnosťami.

Literatúra

[Gaži, 2006] Gaži, P. (2006). *Parallel decompositions of finite automata.* Diplomová práca pod vedením prof. Branislava Rovana.

[Labath, 2010] Labath, P. (2010). *Zjednodušenie výpočtov prídavnou informáciou.* Diplomová práca pod vedením prof. Branislava Rovana.