

Prídavná informácia a zložitosť nedeterministických konečných automatov

diplomová práca

Šimon Sádovský

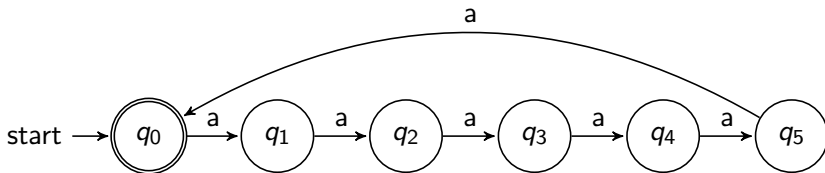
Školiteľ: Branislav Rován

FMFI UK

17. marca 2017

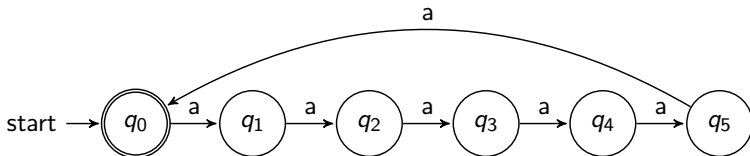
Úvod do problematiky, motivácia

- Chceme nedeterministickým konečným automatom akceptovať jazyk $\{w \in \{a\}^* \mid |w| \equiv 0 \pmod{6}\}$. Koľko stavov potrebujeme?

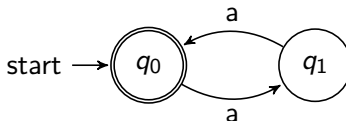


Úvod do problematiky, motivácia

- Čo ak by sme automatu niečo o vstupe „našepkali“?

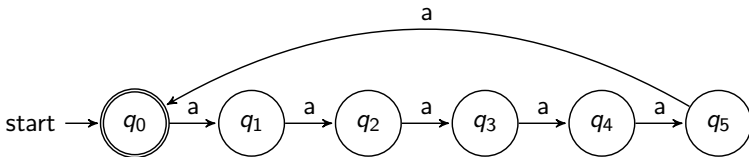


- Ak budeme šepkať, či je dĺžka slova na vstupe deliteľná tromi, tak stačí NKA s dvomi stavmi.



Úvod do problematiky, motivácia

- Ak budeme šepkať, či je slovo dĺžky aspoň 78, tak sme automatu vo všeobecnosti veľmi nepomohli.



- Skúmame otázku, aké našepkávanie je zmysluplné a pomôže a aké nie.
- Ako formalizovať tento problém?

Definícia problému

Definícia

Stavovou zložitou *nedeterministického konečného automatu A (označujeme $\#_S(A)$)* rozumieme počet jeho stavov.

Definícia

Nedeterministickú stavovú zložitou jazyka $L \in \mathcal{R}$ (označujeme $nsc(L)$ - z anglického *nondeterministic state complexity*) definujeme $nsc(L) = \min\{\#_S(A) \mid L(A) = L\}$.

Definícia

Nech $L \in \mathcal{R}$. **Minimálnym nedeterministickým konečným automatom pre jazyk L** rozumieme ľubovoľný nedeterministický konečný automat A taký, že $\#_S(A) = nsc(L)$.

Definícia

*Nech A je nedeterministický konečný automat. Potom dva nedeterministické konečné automaty A_1, A_2 také, že $L(A) = L(A_1) \cap L(A_2)$ nazveme **rozklad automatu** A . Ak navyše platí $\#_S(A_1) < \#_S(A)$ a $\#_S(A_2) < \#_S(A)$, nazývame tento rozklad **netriviálny**. Ak existuje netriviálny rozklad automatu A , tak automat A nazývame **rozložiteľný**.*

Definícia

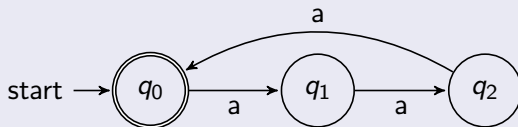
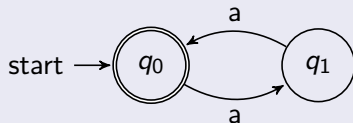
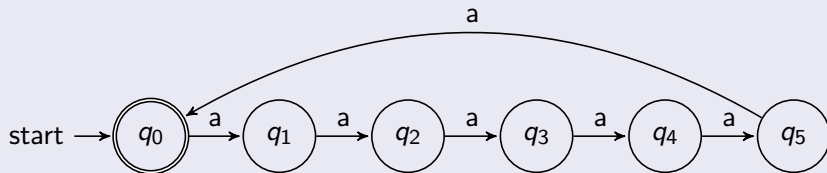
*Nech $L \in \mathcal{R}$ a A je nejaký minimálny NKA pre jazyk L . **Jazyk** L nazývame **nedeterministicky rozložiteľný** práve vtedy, keď je automat A rozložiteľný.*

Príklad rozložiteľného

Veta

Jazyk $\{w \in \{a\}^* \mid |w| \equiv 0 \pmod{6}\}$ je rozložiteľný.

Dôkaz.

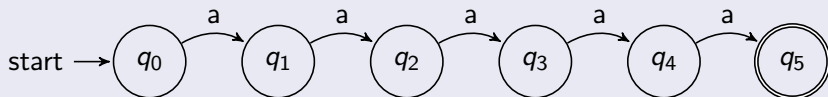


Príklad nerozložiteľného

Veta

Jazyk $\{a^5\}$ je nerozložiteľný.

Dôkaz.



- Nech existuje rozklad, t.j. NKA A_1, A_2 také, že $L(A_1) \cap L(A_2) = \{a^5\}$, $\#_s(A_1) < \#_s(A)$, $\#_s(A_1) < \#_s(A)$.
- $a^5 \in L(A_1)$, $a^5 \in L(A_2)$
- lebo málo stavov, tak viem pumpovať nejakú časť a^5 v A_1 aj A_2 , t.j. $\exists k, l \leq 5 \forall n : a^{5+kn} \in L(A_1), a^{5+ln} \in L(A_2)$
- $a^{5+kl} \in L(A_1) \cap L(A_2)$, spor

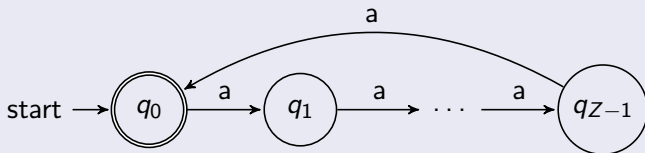


Jazyky založené na dĺžke slov

Veta

Nech pre $Z \in \mathbb{N}$, $Z > 0$ je $L_Z = \{a^{kZ} \mid k \in \mathbb{N}\}$. Potom ak Z nie je mocninou prvočísła, tak jazyk L_Z je rozložiteľný.

Dôkaz.



- $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_r^{m_r}$ je prvočíselný rozklad čísla Z
- automaty A_1^Z, A_2^Z tvoriace rozklad akceptujú jazyky $L(A_1^Z) = \{a^{kp_1^{m_1}} \mid k \in \mathbb{N}\}$ a $L(A_2^Z) = \{a^{kp_2^{m_2} \dots p_r^{m_r}} \mid k \in \mathbb{N}\}$

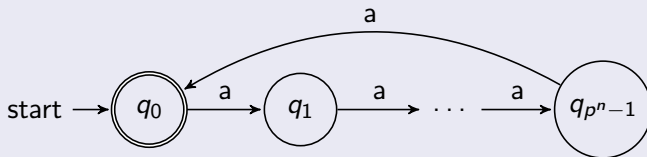


Jazyky založené na dĺžke slov

Veta

Pre $n \geq 1$ a p je prvočíslo definujeme $L_{p^n} = \{a^{kp^n} \mid k \in \mathbb{N}\}$. Potom je jazyk L_{p^n} nerozložiteľný.

Dôkaz.



- sporom, založený na pumpovaní časti slova a^{p^n} v automatoch v netriviálnom rozklade a algebraických vlastnostiach následne vyplývajúcich



Uzáverové vlastnosti tried nedeterministicky rozložiteľných a nedeterministicky nerozložiteľných jazykov

- Nepekné uzáverové vlastnosti

	\cap	\cup	\cdot	h	h^{-1}
R	\times	\times	\times	\times	?
NR	\times	\times	?	\times	\times

- zatiaľ sme nepojali ani podozrenie, že by niektorá z tried mohla byť na niečo rozumné uzavretá

Veta

Nech L je jazyk, pričom $nsc(L) \leq 2$. Potom L je nerozložiteľný.

Dôkaz.

- jednostavové NKA dokážu iba $\emptyset, \{\varepsilon\}, \Sigma^*$
- $\emptyset \subset \{\varepsilon\} \subset \Sigma^*$



Veta

Nech $L \in \mathcal{R}$ a $b \notin \Sigma_L$. Definujeme homomorfizmus $h_b : \Sigma_L \cup \{b\} \rightarrow \Sigma_L$ nasledovne - $h_b(b) = \varepsilon$, $\forall a \in \Sigma_L : h_b(a) = a$. Potom L je rozložiteľný práve vtedy, keď $h_b^{-1}(L)$ je rozložiteľný

Veta

Existuje nedeterministicky nerozložiteľný deterministicky rozložiteľný regulárny jazyk.

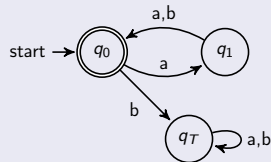
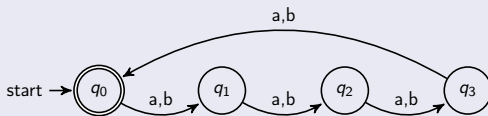
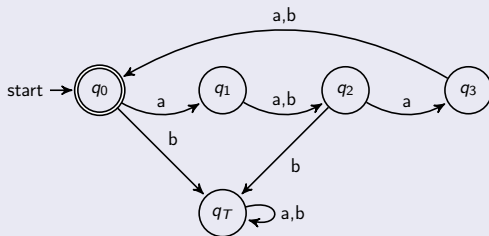
Dôkaz.

- rozdielový jazyk je $(\{a\}\{a, b\}\{a\}\{a, b\})^*$
- nedeterministicky nerozložiteľný opäť pomocou pumpovania



Deterministická vs. nedeterministická rozložiteľnosť

Dôkaz.



- Rozložiteľnosť je spôsobená nutnosťou trash-stavu v DKA

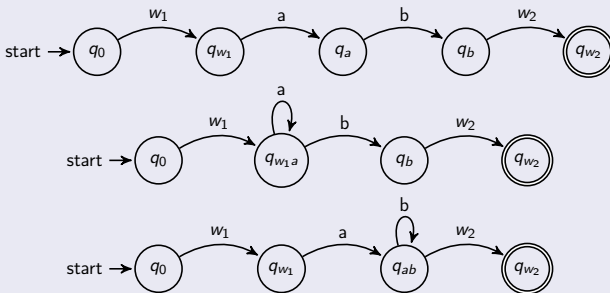
Charakterizácia singleton jazykov

Veta

Nech $w \in \Sigma^$ je slovo a $L = \{w\}$. Potom L je rozložiteľný práve vtedy, keď $w = w_1abw_2$ pre nejaké $a, b \in \Sigma$ a $w_1, w_2 \in \Sigma^*$*

Dôkaz.

- $L = \{a^n\}$ je nerozložiteľný



- Idea skúmať užitočnosť informácie vznikla na našej katedre u profesora Ravana
- Skúmané v súvislosti s deterministickými konečnými automatmi - Gaži (2006)
- Skúmané v súvislosti s deterministickými zásobníkovými automatmi - Labath (2010)
- Náš prínos je hlavne v otvorení témy v súvislosti s nedeterminizmom

Ďakujem za vašu
pozornosť!