Лекция 8

Дифференцируемость функции нескольких переменных

Понятие функции нескольких переменных.

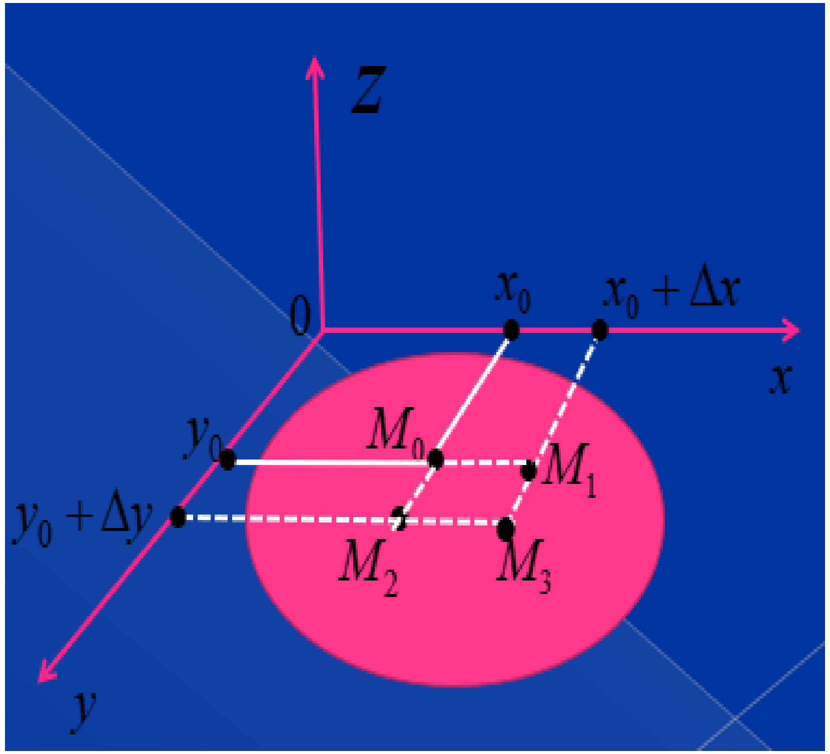
1. Частные приращения функции
2. Частные производные
3. Геометрический смысл частных производных
4. Частные производные высших порядков
5. Дифференцируемость функции в точке
6. Теорема (о связи дифференцируемости и непрерывности) (доказательство)
7. Теорема (о связи дифференцируемости с существованием частных
8. Теорема (достаточное условие дифференцируемости)

Частные приращения функции

Для функции $z = f(x; y)$ переменные x и y являются независимыми, их поведение не связано друг с другом, например одна может измениться, а другая при этом сохранить свое значение.

Приращение, которое функция $z = f(x; y)$ получает, когда изменяется только одна из переменных, а другая фиксируется, называется **частным приращением функции** по соответствующей переменной в точке $(x; y)$.

Для примера рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x,y)$, определенную *в* некоторой окрестности $M_0(x_0, y_0) \in D(f)$.



Пусть Δ x и Δ у настолько малы, что:

$$M_1(x_0 + \Delta x; y_0), \qquad M_2(x_0; y_0 + \Delta y),$$
$$M_3(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \in D(f)$$

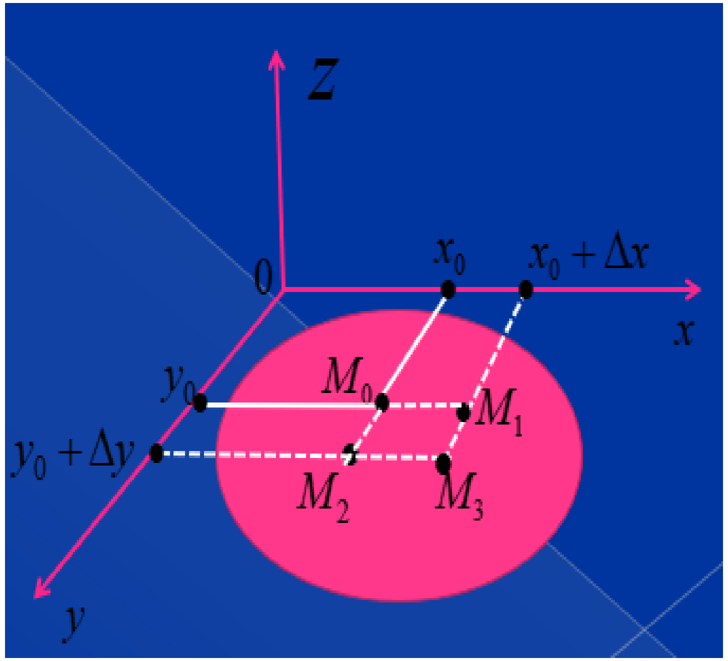
О п р е д е л е н и е 1. *Частным приращением по* x функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ называется выражение:

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

О п р е д е л е н и е 2. *Частным приращением по y* функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ называется выражение $\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$.

О п р е д е л е н и е 3. *Полным приращением функции* $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ называется выражение:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$



П р и м е р 1. Для функции $z = xy$ найти частные приращения и полное приращение в точке $M_0(1; 2)$.

Р е ш е н и е. Воспользовавшись определением, вычисляем в точке $M(x; y)$ приращения функции $z = xy$:

$$\Delta_x z = (x + \Delta x) \cdot y - xy = y \cdot \Delta x, \qquad \Delta_y z = x \cdot (y + \Delta y) - xy = x \cdot \Delta y,$$

$$\Delta z = (x + \Delta x) \cdot (y + \Delta y) - xy = x \cdot \Delta y + y \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta y.$$

В точке $M_0(1; 2)$:

$$\Delta_x z(M_0) = 2 \cdot \Delta x, \quad \Delta_y z(M_0) = \Delta y, \quad \Delta z(M_0) = 2 \cdot \Delta x + \Delta y + \Delta x \cdot \Delta y.$$

О т в е т:

$$\Delta_x z(M_0) = 2 \cdot \Delta x, \quad \Delta_y z(M_0) = \Delta y, \quad \Delta z(M_0) = 2 \cdot \Delta x + \Delta y + \Delta x \cdot \Delta y.$$

Частные производные функции

О п р е д е л е н и е 4. *Частной производной по x* функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ называется конечный предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ к приращению Δx при стремлении Δx к нулю, если этот предел существует. Используют обозначения:

$$z'_x,\ f'_x,\ \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{или} \quad \frac{\partial f}{\partial x}.$$

$$z'_x(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

О п р е д е л е н и е 5. Частной производной по y функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ называется конечный предел отношения частного приращения $\Delta_y z$ к приращению Δy при стремлении Δy к нулю, если этот предел существует. Используют обозначения: $z'_y,\ f'_y,\ \frac{\partial z}{\partial y}$ или $\frac{\partial f}{\partial y}$.

$$z'_y(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

З а м е ч а н и е 1. Из определения частных производных непосредственно вытекает метод их вычисления: чтобы найти z'_x (или z'_y), нужно продифференцировать выражение $f(x, y)$ по x (по y), считая величину у (величину x) постоянной.

З а м е ч а н и е 2. Понятия частных приращений, полного приращения, частных производных для функции $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ любого числа переменных вводятся аналогично.

З а м е ч а н и е 3. Процедура вычисления частных производных функции нескольких переменных сводится к вычислению обыкновенной производной этой функции по одной из переменных при условии, что остальные переменные выступают в роли параметров.

Отсюда следует, что правила вычисления частных производных совпадают с правилами, действующими для функции одной переменной. Однако требуется каждый раз помнить, по какой переменной вычисляется производная, а какие переменные при этом мысленно фиксируются.

П р и м е р 2.

Найти частные производные функции

$$z = x \ln y + \frac{y}{x}$$

Р е ш е н и е. Чтобы найти частную производную по x,

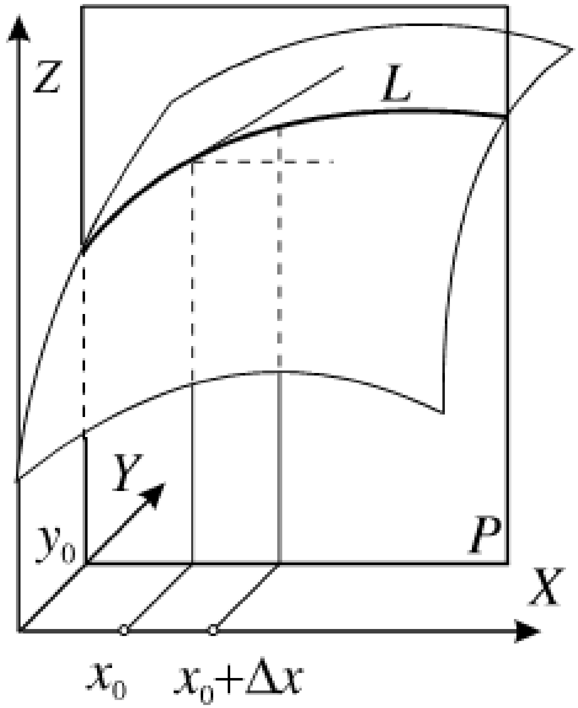
считаем y постоянной величиной.

$$z'_x = \ln y + y\left(\frac{1}{x}\right)' = \ln y - \frac{y}{x^2}.$$

Аналогично находим $z'_y = x(\ln y)' + \frac{1}{x}y' = \frac{x}{y} + \frac{1}{x}.$

Геометрический смысл частных производных

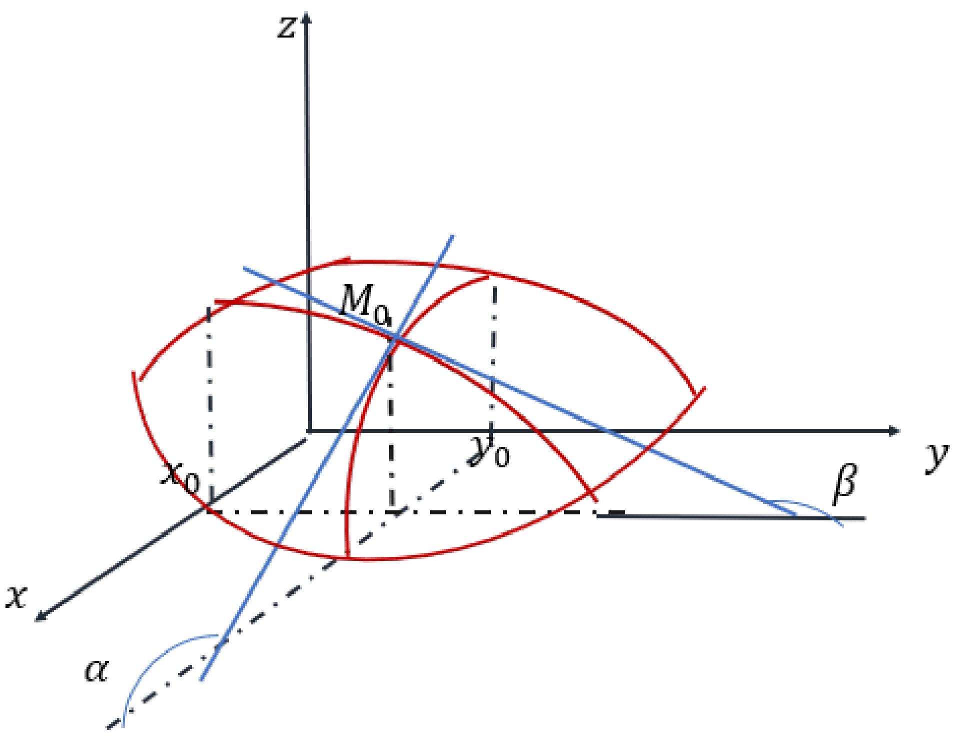
В пространстве XYZ условие $y = y_0$ описывает плоскость P, перпендикулярную оси OY и пересекающую эту ось в точке y_0. Плоскость P пересекается с графиком функции $z = f(x, y)$ вдоль некоторой линии L, как показано на рисунке 1. Тангенс угла между плоскостью XOY и касательной к линии L в точке с координатами $M(x_0, y_0)$ равен частной производной по x функции $z = f(x, y)$ в этой точке. В этом состоит геометрический смысл частной производной. Аналогичное заключение можно сделать относительно частной производной по y.



Графиком функции $z = f(x;y)$ является некоторая поверхность.

График функции $z = f(x;y_0)$ есть линия пересечения этой поверхности с плоскостью

$$y = y_0.$$



Исходя из геометрического смысла производной для функции одной переменной, $f'_x(x_0, y_0) = tg\alpha$, где α- угол между осью Ох и касательной, проведённой к кривой $z = f(x;y_0)$ в точке $M_0\left(x_0; y_0; f(x_0; y_0)\right)$.

Аналогично, $f'_y(x_0, y_0) = tg\beta$.

Абсолютная величина частной производной дает скорость, с которой происходит изменение функции при изменении только одной переменной (x или y), а знак частной про из водной указывает на характер этого изменения («+» — возрастание, «–» — убывание).

Частные производные высших порядков

Пусть функция $z = f(x; y)$ имеет частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x; y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x; y),$$

которые также являются функциями независимых переменных x и y. Частные производные от первых частных производных по x и по y называются вторыми частными производными, или **частными производными второго порядка** от данной функции. От каждой производной первого порядка функции двух переменных можно взять по две (по числу переменных) производные второго порядка, т.е. всего четыре.

Для вторых частных производных приняты следующие обозначения:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (z'_x)'_x = z''_{xx}$$

функция $z = f(x; y)$ два раза дифференцируется по x в предположении, что $y = \text{const}$;

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (z'_y)'_y = z''_{yy}$$

функция $z = f(x; y)$ два раза дифференцируется по y в предположении, что $x = \text{const}$;

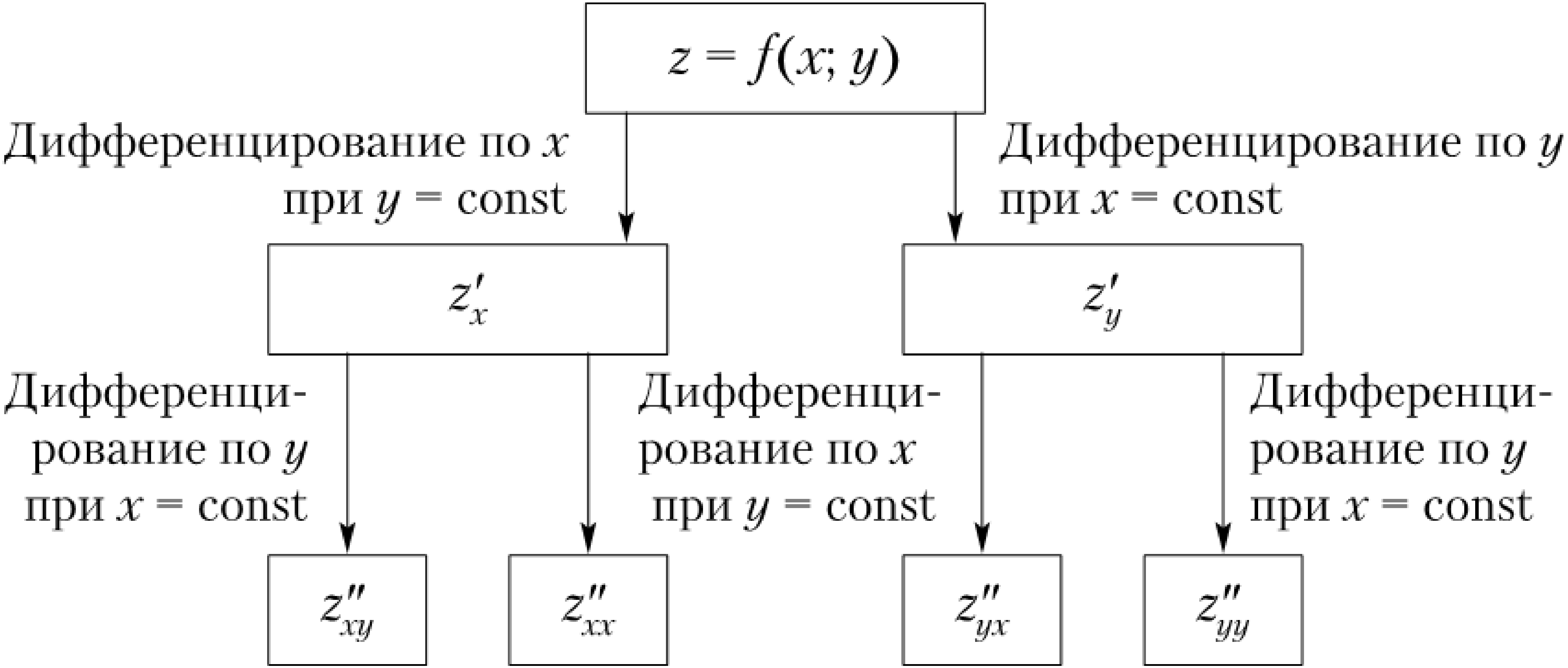
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (z'_x)'_y = z''_{xy}$$

сначала функция $z = f(x; y)$ дифференцируется по x (при $y = \text{const}$), полученный результат дифференцируется по y (при $x = \text{const}$);

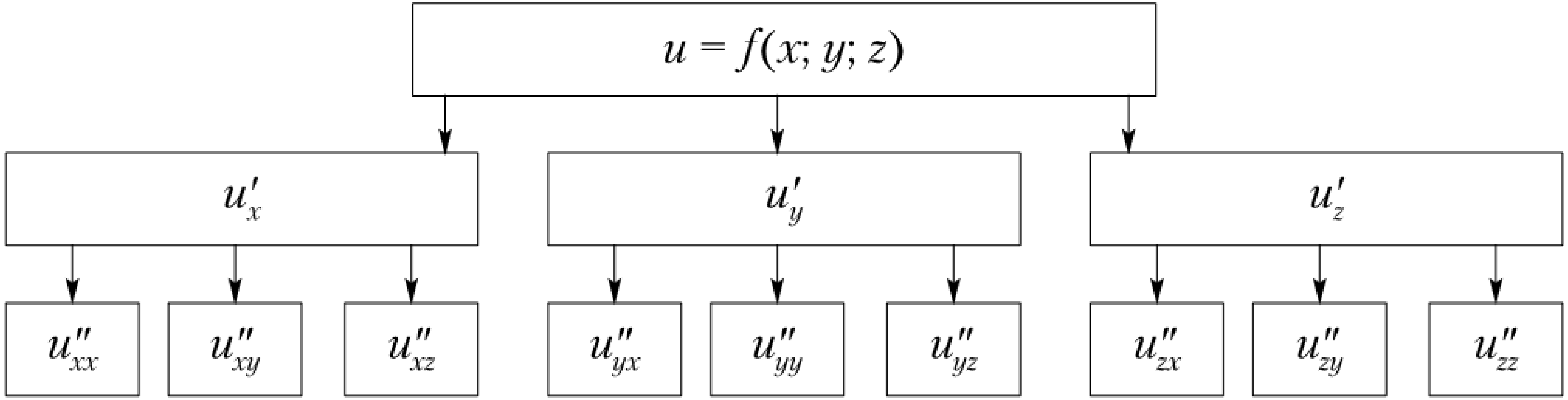
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (z'_y)'_x = z''_{yx}$$

сначала функция $z = f(x; y)$ дифференцируется по y (при $x = \text{const}$), полученный результат дифференцируется по x (при $y = \text{const}$).

Частная производная высшего порядка, взятая по различным переменным, например z''_{xy}, z''_{yx}, называется **смешанной** частной производной.



Получение вторых частных производных



Частные производные функции трех переменных

Пример 1. Найдем частные производные второго порядка функции:

а) $z = {}^3y^2 - 3xy^3 - xy + 1.$

Решение.

$$z'_x = (\underline{x}^3 y^2 - 3\underline{x}y^3 - \underline{x}y + 1)'_{x\ (y=c)} = 3x^2y^2 - 3y^3 - y;$$

$$z'_y = (x^3\underline{y}^2 - 3x\underline{y}^3 - x\underline{y} + 1)'_{y\ (x=c)} = 2x^3y - 9xy^2 - x;$$

$$z''_{xx} = (3\underline{x}^2y^2 - 3y^3 - y)'_{x\ (y=c)} = 6xy^2;$$

$$z''_{xy} = (3x^2\underline{y}^2 - 3\underline{y}^3 - \underline{y})'_{y\ (x=c)} = 6x^2y - 9y^2 - 1;$$

$$z''_{yx} = (2\underline{x}^3y - 9\underline{x}y^2 - x)'_{x\ (y=c)} = 6x^2y - 9y^2 - 1;$$

$$z''_{yy} = (2x^3\underline{y} - 9x\underline{y}^2 - x)'_{y\ (x=c)} = 2x^3 - 18xy.$$

Пример 2. Найдем частные производные второго порядка функции:

$$z = \frac{y^4}{\sin 2x}.$$

Решение.

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{y^4}{\sin 2\underline{x}} \right)'_{x\ (y=c)} = \frac{-2y^4 \cos 2x}{\sin^2 2x}; \qquad z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{\underline{y}^4}{\sin 2x} \right)'_{y\ (x=c)} = \frac{4y^3}{\sin 2x};$$

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{-2y^4 \cos 2\underline{x}}{\sin^2 2\underline{x}} \right)'_{x\ (y=c)} =$$

$$= -2y^4 \cdot \frac{-2\sin 2x \cdot \sin^2 2x - \cos 2x \cdot 2\sin 2x \cdot 2\cos 2x}{\sin^4 2x} =$$

$$= 4y^4 \cdot \frac{\sin^2 2x + 2\cos^2 2x}{\sin^3 2x} = 4y^4 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{\sin^3 2x};$$

Пример 3. Найти частные производные второго порядка для функции $z = e^{xy}$.

Р е ш е н и е. Найдём частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_x' = (ye^{xy})_x' = y^2 \cdot e^{xy};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_y' = (xe^{xy})_y' = x^2 \cdot e^{xy};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y' = (ye^{xy})_y' = e^{xy} + xye^{xy};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x' = (xe^{xy})_x' = e^{xy} + xye^{xy}.$$

$$z''_{xy}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\frac{-2\underline{y}^4\cos 2x}{\sin^2 2x}\right)'_{y\ (x=c)}=\frac{-8y^3\cos 2x}{\sin^2 2x};$$

$$z''_{yx}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\left(\frac{4y^3}{\sin 2\underline{x}}\right)'_{x\ (y=c)}=\frac{-4y^3\cdot 2\cos 2x}{\sin^2 2x}=\frac{-8y^3\cos 2x}{\sin^2 2x};$$

$$z''_{yy}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{4\underline{y}^3}{\sin 2x}\right)'_{y\ (x=c)}=\frac{12y^2}{\sin 2x}.$$

Как видим, смешанные производные оказались тождественно равны:

Полученный результат не случайный.

Теорема (Шварца , о равенстве смешанных производных). *Пусть у функции $z = f(x; y)$ в некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$ существуют производные z'_x, z'_y, z''_{xy}, z''_{yx} и пусть, кроме того, смешанные производные z''_{xy} и z''_{yx} непрерывны в точке $M_0(x_0; y_0)$. Тогда в точке $M_0(x_0; y_0)$ смешанные производные равны между собой:*

$$z''_{xy}(x_0; y_0) = z''_{yx}(x_0; y_0).$$

Утверждение теоремы распространяется и на более общий случай: непрерывные смешанные производные (любого порядка) функции нескольких переменных, которые отличаются лишь порядком дифференцирования, равны между собой, т.е. результат повторного дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования. Например, для функции трех переменных $u = f(x; y; z)$ справедливы соотношения:

$$u''_{xz}(x_0; y_0; z_0) = u''_{zx}(x_0; y_0; z_0);$$

$$u''_{xzy}(x_0; y_0; z_0) = u''_{yzx}(x_0; y_0; z_0) = u''_{xyz}(x_0; y_0; z_0);$$

$$u''_{xxy}(x_0; y_0; z_0) = u''_{yxx}(x_0; y_0; z_0) = u''_{xyx}(x_0; y_0; z_0)$$

и т.п., при условии что все указанные производные непрерывны в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

Дифференцируемость функции в точке

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности $V(M_0)$ точки $M_0(x_0; y_0)$, $\Delta x, \Delta y$ – достаточно малые приращения, так что $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in V(M_0)$.

О п р е д е л е н и е 6. Функция $z = f(x, y)$ называется *дифференцируемой* в точке $M_0(x_0; y_0)$, если в этой точке ее полное приращение представимо в виде:

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha(\rho) \cdot \rho,$$

где $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, $\alpha(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$,

A и B не зависят от $\Delta x, \Delta y$, $\quad \rho \to 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \end{cases} \Leftrightarrow M \to M_0$

Функция $\alpha(\rho)$ является бесконечно малой при $\rho \to 0$, т.е. $\lim\limits_{\rho \to 0} \alpha(\rho) = 0$.

Т е о р е м а (о связи дифференцируемости и непрерывности)

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0; y_0)$. Тогда она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Так как функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0; y_0)$, то справедливо следующее $\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha(\rho) \cdot \rho$.

Переходим к пределу $\lim\limits_{\rho \to 0} \Delta z = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha(\rho) \cdot \rho) =$

$A \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta x + B \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta y + \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha(\rho) \cdot \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \rho = 0.$

Следовательно, $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$, т.е. $f(M)$ непрерывна в точке M_0.

Теорема доказана.

Т е о р е м а 2 (о связи дифференцируемости с существованием частных производных)

Если функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0; y_0)$, то в этой точке она имеет частные производные по x и y, которые равны, соответственно, A и B :

$$z'_x(x_0, y_0) = A, \quad z'_y(x_0, y_0) = B.$$

Доказательство. Так как функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0; y_0)$, то справедливо следующее $\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha(\rho) \cdot \rho$ при любых Δx и Δy.

Пусть $\Delta y = 0$. Тогда $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = \Delta z_x$, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2} = |\Delta x|$,

$\Delta z_x = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot |\Delta x| \Rightarrow \frac{\Delta z_x}{\Delta x} = A \pm \alpha(\Delta x)$. Переходим к пределу

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} (A \pm \alpha(\Delta x)) = A$. Т.е. существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z_x}{\Delta x} = \text{A}$.

Аналогично доказывается существование $z'_y(x_0, y_0) = B$.

З а м е ч а н и е . Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0; y_0)$, то она обладает следующим свойством:

$\Delta z = \quad z'_x\,(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \; z'_y\,(x_0, y_0) \cdot \Delta y + \alpha(\rho) \cdot \rho,$ где $\alpha(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0,$

$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$

Δz – полное приращение функции $f(x, y)$ в точке M_0.

З а м е ч а н и е . В случае функции большего (чем два) числа переменных понятие дифференцируемой функции вводится аналогично. При этом естественным образом обобщаются свойства, отмеченные в теоремах.

Т е о р е м а (достаточное условие дифференцируемости)

Если функция $z = f(x, y)$ имеет в некоторой окрестности точки

$M_0(x_0; y_0)$ непрерывные частные производные по x и y, то функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке M и справедлива равенство

$\Delta z = z'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + z'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y + \alpha(\rho) \cdot \rho$, где $\alpha(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$,

$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

О п р е д е л е н и е 7. Функция $z = f(x, y)$ называется дифференцируемой в области $G \subset D(f)$, если она дифференцируема в любой его точке.