ЛЕКЦИЯ 2. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§1. Частные производные первого порядка

Пусть в некоторой (открытой) области задана функция двух переменных *z=f(x,y)*. Возьмем произвольную точку $M(x,y)$ этой области и дадим x приращение Δx, оставляя y неизменным. При этом функция $f(x,y)$ получит приращение $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$. Оно называется частным приращением этой функции в точке (x,y) по x. Отношение

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

является функцией аргумента Δx.

Определение. Если при $\Delta x \to 0$ существует $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$, то этот предел называется частной производной функции *z=f(x,y)* в точке (x,y) по переменной x и обозначается одним из следующих символов: z'_x, $f'_x\ (x,y)$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$.

Аналогично определяется частная производная функции $z = f(x,y)$ в точке (x,y) по переменной y:

$$z'_y = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}.$$

Замечание. Для функций любого числа n переменных частные производные вводятся так же, как и для функций двух переменных.

Пример 1. Найти частные производные функции

$$z = 2x^2y + 3xy^2 + x^3.$$

Решение. Считая y постоянным, находим $\partial z/\partial x$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2y\cdot 2x + 3y^2\cdot 1 + 3x^2 = 4xy + 3\left(x^2 + y^2\right).$$

При нахождении $\partial z/\partial y$ фиксируется аргумент x, т.е.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2\cdot 1 + 6xy = 2x(x+3y).$$

Пример 2. Найти значения частных производных в точке $M(0;1)$ функции $z = e^{-xy}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{-xy}\cdot(-xy)'_x = -ye^{-xy},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{-xy}\cdot(-xy)'_y = -xe^{-xy}.$$

Подставляя координаты точки M, получим

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = -1\cdot e^{-0\cdot1} = -1,\quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = 0\cdot e^{-0\cdot 1} = 0.$$

Пример 3. Доказать, что функция $z = \ln\left(x^2 + xy + y^2\right)$ удовлетворяет уравнению $x\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + y\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 2$.

Решение. Находим частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^2+xy+y^2}\cdot\left(x^2+xy+y^2\right)'_x = \frac{2x+y}{x^2+xy+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x^2+xy+y^2}\cdot\left(x^2+xy+y^2\right)'_y=\frac{x+2y}{x^2+xy+y^2}.$$

Подставляем $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в данное уравнение $x\cdot\frac{2x+y}{x^2+xy+y^2}+\quad+y\cdot\frac{x+2y}{x^2+xy+y^2}=2$, $\frac{2x^2+2xy+y^2}{x^2+xy+y^2}=2$, $\quad 2=2$.

§2. Понятие дифференцируемости функции нескольких переменных

Рассмотрим полное приращение функции $z=f(x,y)$ во внутренней точке $M(x,y)$ области определения функции:

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y).$$

Определение. Функция $z=f(x,y)$ называется дифференцируемой в точке (x,y), если ее полное приращение в этой точке представимо в виде

$$\Delta z=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y, \qquad (1)$$

где A и B – некоторые, не зависящие от $\Delta x,\Delta y$ числа, а α_1,α_2 – бесконечно малые при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ функции. Соотношение (1) называется условием дифференцируемости функции в данной точке.

Теорема 2.1. Если функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в точке $M(x,y)$, то она непрерывна в этой точке.

Теорема 2.2. Если функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в точке $M(x,y)$, то она имеет в этой точке частные производные, причем $z'_x=A$ и $z'_y=B$, где A и B числа из условия дифференцируемости (1).

Условие дифференцируемости (1) можно записать в виде

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y. \qquad (2)$$

Теорема 2.3. Если функция $z=f(x,y)$ имеет частные производные z'_x и z'_y в некоторой окрестности точки $M(x,y)$, причем эти частные производные непрерывны в самой точке M, то указанная функция дифференцируема в точке M.

Понятие дифференцируемости для функции n переменных вводится совершенно аналогично случаю функции двух переменных.

§3. Дифференциал функции нескольких переменных

Пусть функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в точке $M(x,y)$, т.е. ее полное приращение в этой точке можно представить в виде $\Delta z=\left[\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right]+\left(\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y\right)$. Выражение в квадратных скобках является линейной относительно Δx и Δy частью приращения функции, а выражение в круглых скобках – бесконечно малой функцией при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ более высокого порядка, чем $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

Определение. Главная, линейная относительно Δx и Δy часть дифференцируемой функции $z=f(x,y)$ называется ее полным дифференциалом в этой точке:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y. \qquad (3)$$

Дифференциалом независимых переменных x и y будем называть приращения этих переменных: $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$.

Тогда формула (3) запишется в виде

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \qquad (4)$$

Пример. Найти полный дифференциал функции

$$z = x^3 y - xy^3.$$

Решение. Находим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y - y^3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 - 3xy^2$.

По формуле (4) имеем $dz = (3x^2 y - y^3)dx + (x^3 - 2xy^2)dy$.

§4. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл дифференциала функции двух переменных

Если функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ существует касательная плоскость к графику этой функции, причем уравнение касательной плоскости имеет вид

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0). \qquad (5)$$

Нормальный вектор $\vec{n} = \{f'_x(x_0, y_0); f'_y(x_0, y_0); -1\}$ касательной плоскости принято называть нормалью к поверхности $z = f(x, y)$ в точке M_0.

Обозначив в (5) $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$, $z - z_0 = \Delta z$, видим, что приращение Δz аппликаты касательной плоскости дается формулой $\Delta z = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$ или $\Delta z = dz \Big|_{x = x_0, y = y_0}$. Таким образом, дифференциал функции двух переменных есть приращение аппликаты касательной плоскости.

Пример. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к параболоиду $z = x^2 + y^2$ в точке $M_0(1;-2)$.

Решение. Напишем уравнение касательной, используя формулу (5), т.е. $z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$. Предварительно найдем z_0: $z_0 = x_0^2 + y_0^2 = 1 + (-2)^2 = 5$, затем $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$: $f'_x(x, y) = 2x$, $f'_y(x, y) = 2y$, $f'_x(1;-2) = 2$, $f'_y(1;-2) = -4$. Следовательно, касательная плоскость имеет уравнение $z - 5 = 2(x - 1) - 4(y + 2)$ или $2x - 4y - z - 5 = 0$. Используя уравнение нормали $\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$, получим $\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{-4} = \frac{z - 5}{-1}$.

§7. Производная по направлению. Градиент функции.

Рассмотрим функцию z = f(x,y) определенную в некоторой окрестности точки M_0. Пусть этой окрестности принадлежит точка M_1. Через точки M_0 и M_1 проведем прямую, направля-ющим вектором которой в этом случае, будет $\bar{l} = \overline{M_0 M_1}$. Возьмем на данной прямой произвольную точку M. Обозначим через $M_0 M$ длину отрезка с началом в точке M_0 и концом в точке M.

Определение. Если существует предел

§8 Экстремумы функции нескольких переменных

п.1. Понятия локального экстремума функции двух переменных. Необходимые условия

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ пространства R^2.

Определение. Говорят, что функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ локальный максимум (локальный минимум), если найдется некоторая окрестность точки M_0, для всех точек которой выполняется неравенство

$$f(x, y) < f(x_0, y_0) \quad (f(x, y) > f(x_0, y_0)).$$

Говорят, что функция $z = f(x, y)$ имеет в точке M_0 локальный экстремум, если она имеет в этой точке либо локальный максимум, либо локальный минимум.

Теорема 2.1 (необходимые условия локального экстремума). Если функция $z = f(x, y)$ имеет в этой точке $M_0(x_0, y_0)$ частные производные первого порядка и локальный экстремум, то в этой точке обе частные производные первого порядка равны нулю, т.е. $f'_x(x_0, y_0) = 0$ и $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Определение. Точка $M_0(x_0, y_0)$, в которой частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ равны нулю, называется стационарной.

п2. Достаточные условия локального экстремума функции двух переменных

Теорема 2.2. Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ и имеет частные производные второго порядка в самой точке M_0. Пусть, кроме того, точка M_0 является стационарной точкой функции $z=f(x, y)$. Положим $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$. Тогда:

а) если $AC - B^2 > 0$, то в точке M_0 функция имеет локальный экстремум (максимум при $A < 0$ и минимум при $A > 0$);

б) если $AC - B^2 < 0$, то функция $z = f(x, y)$ не имеет в точке M_0 локального экстремума.

п3. Абсолютный экстремум функции двух переменных

Пусть задана непрерывно дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ на ограниченной замкнутой области $\overline{D} \subset R^2$. Тогда, согласно второй теореме Вейерштрасса, она достигает в этой области своих наибольшего и наименьшего значений. Наибольшее и наименьшее значения функции в данной области называется абсолютным экстремумом (соответственно абсолютным максимумом или абсолютным минимумом) в этой области.

Для того, чтобы найти абсолютный экстремум функции в данной замкнутой области $\overline{D}$, необходимо найти все стационарные точки, вычислить значения функции в этих точках и сравнить их со значениями функции на границе области $\overline{D}$. Наибольшее из этих значений и будет наибольшим значением функции на $\overline{D}$, наименьшее - наименьшим значением функции на $\overline{D}$.

п.3 Примеры решения задач

Пример 1. Найти точки локального экстремума функции

$$z = x^2 - xy + y^2.$$

Решение. Находим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y$. Приравнивая эти производные к нулю, получим систему уравнений $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$, из которой находим точку возможного экстремума $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. Отсюда точка $M_0(0;0)$ является точкой возможного экстремума. Проверим эту точку на локальный экстремум с помощью достаточных условий. Для этого найдем сначала вторые частные производные: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$. В точке $M_0(0;0)$ имеем

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0} = 2,\ B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} = -1,\ C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0} = 2.$$

Следовательно, $AC–B^2 = 3 > 0$, а так как $A > 0$, то в точке $M_0(0;0)$ данная функция имеет локальный минимум:

$$z_{\min} = z(0,0) = 0.$$

Пример 2. Найти экстремум функции

$$z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2.$$

Решение. Находим частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x} = 6 - 2x - y$, $\frac{\partial z}{\partial x} = -x - 2y$.

Используя необходимые условия экстремума, найдем стационарные точки $\begin{cases} 6-2x-y=0 \\ -x-2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$.

Значит, данная функция имеет только одну стационарную точку $M_0(4,–2)$. Найдем вторые частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$. В точке $M_0(4,–2)$ имеем: $A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0} = -2$, $B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} = -1$, $C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0} = -2$, $AC–B^2 = 3 > 0$ и т.к. $A < 0$, то в точке $M_0(4,–2)$ данная функция имеет максимум:

$$z_{\max} = z(4, -2) = 13.$$

Пример 3. Найти экстремум функции $z = 2xy - 4x - 2y$.

Решение. Найдем стационарные точки

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2y - 4, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 2 \qquad \begin{cases} 2y - 4 = 0 \\ 2x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Следовательно, точка $M_0(1, 2)$ является стационарной для данной функции. Вторые частные производные данной функции постоянны: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, поэтому в любой точке, в том числе и в точке $M_0(1, 2)$ имеем: A=0, B=2, C=0, $AC–B^2 < 0$. Следовательно, экстремума в точке M_0 нет.

Пример 4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x + y \text{ в круге } x^2 + y^2 \le 1.$$

Решение. Стационарных точек данная функция не имеет, т.к. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 1 \ne 0$. Наибольшее и наименьшее значения эта функция может принимать только на окружности $x^2 + y^2 = 1$. Параметрические уравнения этой окружности: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le 2\pi$.

Функция z на окружности примет вид $z = z(t) = \cos t + \sin t$. Найдем стационарные точки: $z'(t) = -\sin t + \cos t$, $z'(t) = 0$ =>

$-\sin t + \cos t = 0$ => $\operatorname{tg} t = 1$. Отсюда $t_1 = \frac{\pi}{4}$, $t_2 = \frac{5}{4}\pi$. В этих точках

$z_1 = z\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$, $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $z_2 = z\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{4} = -\sqrt{2}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, наибольшее значение функции $z = \sqrt{2}$ в точке $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и наименьшее $z = -\sqrt{2}$ в точке $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.