

Bayes'sche Inferenz & PyMC3

Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für deutsche Philologie
Lehrstuhl für Computerphilologie und Neuere Deutsche Literaturgeschichte
Seminar: Statistische Modellierung (04063632)

Dozent: Herr Dr. Steffen Pielström
Referentin: Madlin Marenc
Wintersemester 2022/23
02.02.2023

Gliederung

1. Bayes'sche Inferenz
 - 1.1. Bayes'scher Wahrscheinlichkeitsbegriff
 - 1.2. Begriffsklärungen
 - 1.3. Satz von Bayes (Bayes Theorem)
2. Implementierung in Python mit PyMC3
 - 2.1. PyMC3
 - 2.2. Beispiel: Münzwurf
3. Hausaufgaben
4. Literaturverzeichnis und Tutorials

Bayes'sche Inferenz

(benannt nach dem englischen Mathematiker Thomas Bayes,
*1701, †1761)



Bayes'scher Wahrscheinlichkeitsbegriff

- die persönliche Überzeugung, dass ein bestimmtes Ereignis in einem bestimmten Experiment eintritt
 - Überzeugung bildet sich aus der bisherigen Erfahrung sowie dem Ergebnis des Experiments heraus
 - als Maß für die Glaubwürdigkeit einer Aussage gilt: 0 (falsch, unglaublich) bis 1 (glaubwürdig, wahr)
- man spricht hierbei vom Grad persönlicher Überzeugung

1.2. Begriffsklärungen

A-priori-Wahrscheinlichkeit (Prior)

Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße \mathcal{C} begründeter Vorannahmen bzw. durch gegebenes Vorwissen „Blick auf die Daten“)

A-posteriori-Wahrscheinlichkeit (Posterior)

Wahrscheinlichkeitsverteilung nach Beobachtung der Zufallsgröße \mathcal{C} bzw. unter Einbezug des Vorwissens \mathcal{J} und der Messdaten \mathcal{D} („nach Blick auf die Daten“)

Likelihood

Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Messdaten \mathcal{D} , wenn der Modellparameter \mathcal{M} und das Vorwissen \mathcal{J} gegeben sind

1.3. Satz von Bayes (Bayes Theorem)

A-priori-Wahrscheinlichkeit (Prior)

$$\rightarrow \Pr(\mathcal{M} | \mathcal{I})$$

A-posteriori-Wahrscheinlichkeit (Posterior)

$$\rightarrow \Pr(\mathcal{M} | \mathcal{D}, \mathcal{I})$$

Likelihood

$$\rightarrow \Pr(\mathcal{D} | \mathcal{M}, \mathcal{I})$$

\mathcal{M} = Modellparameter; \mathcal{D} = Messdaten; \mathcal{I} = Vorwissen

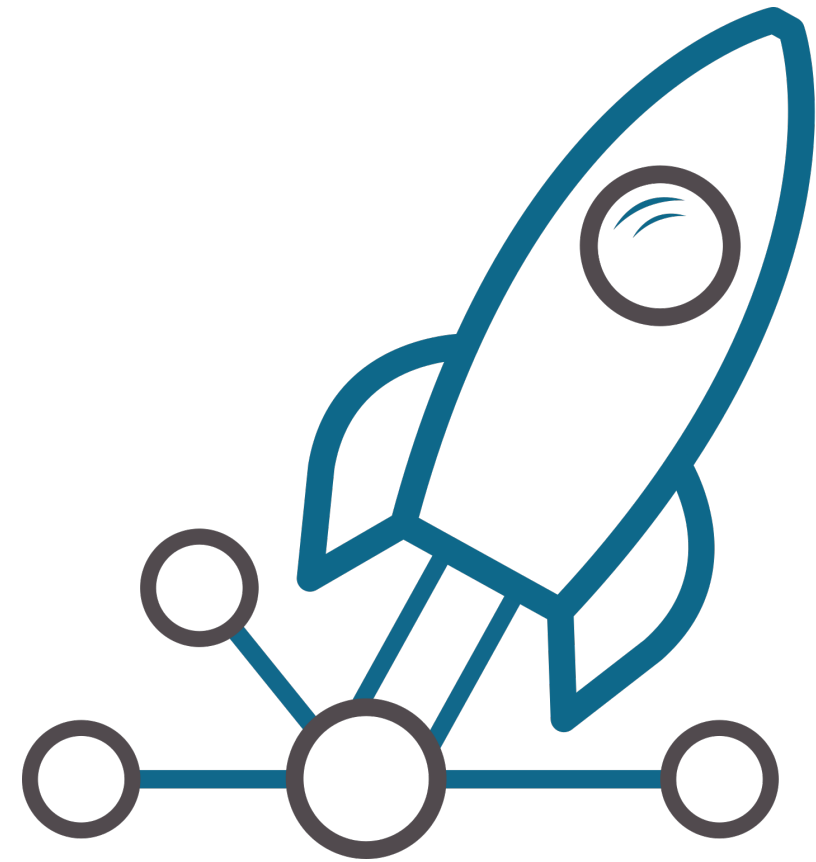
1.3. Satz von Bayes (Bayes Theorem)

Satz von Bayes

$$\text{Posterior} \quad \Pr(\mathcal{M} | \mathcal{D}, \mathcal{I}) = \frac{\text{Likelihood} \quad \Pr(\mathcal{D} | \mathcal{M}, \mathcal{I}) \quad \text{Prior} \quad \Pr(\mathcal{M} | \mathcal{I})}{\text{Normierungsfaktor} \quad \Pr(\mathcal{D} | \mathcal{I})}$$

\mathcal{M} = Modellparameter; \mathcal{D} = Messdaten; \mathcal{I} = Vorwissen

Implementierung in Python mit



PYMC3

2.1. PyMC3

- **PyMC3** Python-Bibliothek (Open Source) für probabilistische Programmierung
 - → spezialisiert auf fortgeschrittene Markov-Chain-Monte-Carlo- (MCMC) und Variationsanpassungs-Algorithmen
- **Warum MCMC?** Um mit leistungsstarken Stichprobenalgorithmen die A-Posteriori-Wahrscheinlichkeit zu berechnen
 - No-U-Turn Sampler (NUTS)
 - Metropolis-Hastings
 - Sequentielle Monte-Carlo-Methoden (SMC Methoden)
- **ArviZ:** Python-Bibliothek zur Datenvisualisierung
 - vor allem für die Interpretation und Visualisierung von Posterior-Verteilungen

2.2. Beispiel: Münzwurf

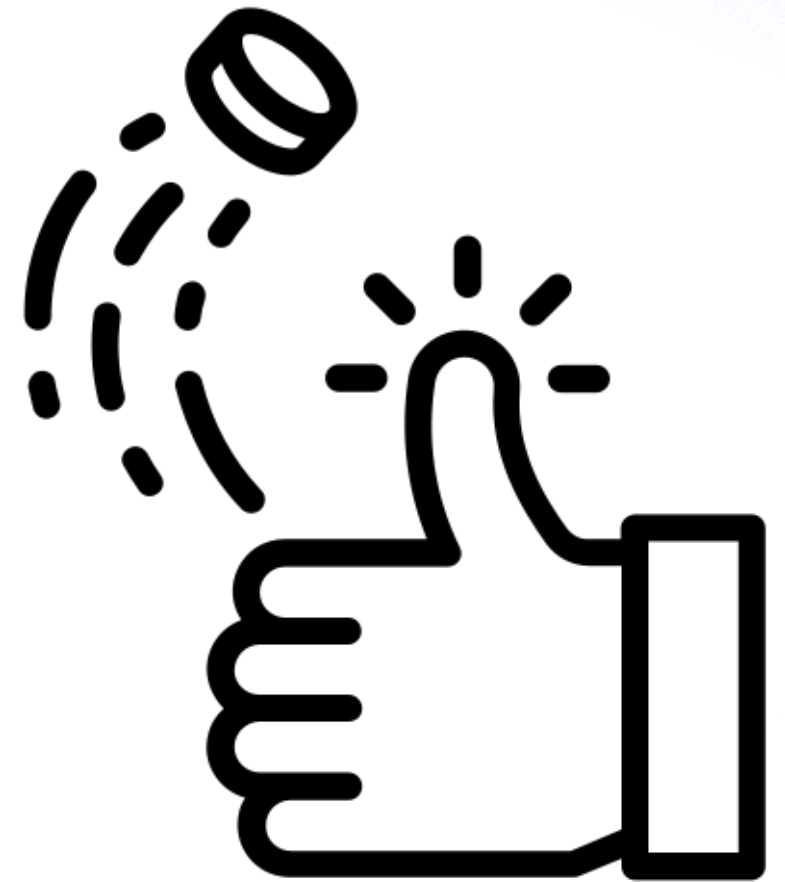
Eine Münze hat zwei Seiten: Kopf (head) und Zahl (tail).

Es soll untersucht werden, mit welcher Wahrscheinlichkeit beim Münzwurf Kopf fällt.

Aufgrund der zwei Seiten der Münze wird im ersten Schritt davon ausgegangen (Vorannahme), dass die Wahrscheinlich in etwa bei 50 % liegen wird.

Man könnte auch sagen:

Die A-priori-Wahrscheinlichkeit (Prior) sei eine eng gestreute Normalverteilung um den Mittelwert $p = 0.5$.

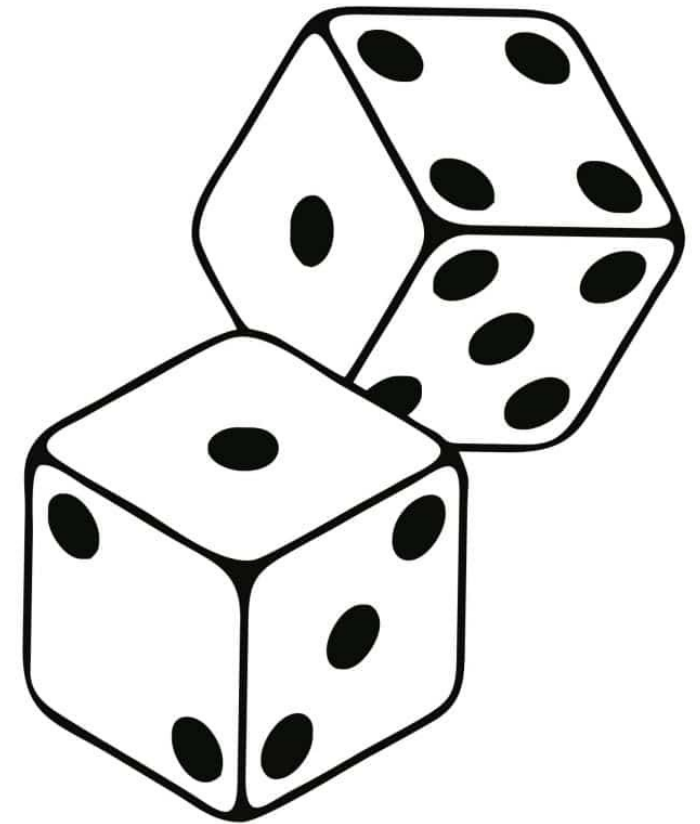


Hausaufgaben: Würfelwurf

Ein Würfel hat sechs Seiten mit je sechs verschiedenen Augenzahlen. Es soll untersucht werden, mit welcher Wahrscheinlichkeit beim Würfeln die Zahl 6 fällt.

(Es gilt: 0 = Misserfolg, es wurde keine 6 gewürfelt / 1 = Erfolg, es wurde eine 6 gewürfelt)

1. Mit welcher Vorannahme geht ihr in das Experiment hinein? Stellt die A-priori-Wahrscheinlichkeit auf und begründet diese kurz.
2. Generiert nun die Daten für den Würfelwurf. Dabei soll eure A-priori-Wahrscheinlichkeit in der Variable p gespeichert und es soll zu Anfang 10x gewürfelt werden.
3. Auf Grundlage der generierten Daten implementiert nun das passende PyMC3 Modell. Visualisiert anschließend die A-posteriori-Wahrscheinlichkeit. Was ist der Mittelwert und der Wert für die Standardabweichung?



Literatur

- Juola, Patrick/Ramsay, Stephen: Six Septembers. Mathematics for the Humanist. Nebraska 2017. Online verfügbar unter: <https://digitalcommons.unl.edu/zeabook/55/> [Stand: 30.01.2023].
- McElreath, Richard: Statistical Rethinking. A Bayesian Course with Examples in R and STAN. Boca Raton/Oxon 2020. Online verfügbar unter: <https://ebookcentral.proquest.com/lib/ub-wuerzburg/detail.action?docID=6133700> [Stand: 19.01.2023]

Tutorials

- „Statistical Rethinking 2022“ Vorlesung von Richard McElreath.
Online verfügbar unter:
<https://www.youtube.com/watch?v=BYUykHScxj8&list=PLDcUM9US4XdMROZ57-0IRtIK0a0ynbgZN>
- Jupyter Notebooks „Statistical Rethinking: A Bayesian Course Using python and pymc3“ zur Vorlesung „Statistical Rethinking 2022“. Online verfügbar unter:
https://github.com/gbosquechacon/statrethink_course_in_pymc3
- Jupyter Notebook „Probabilistic Programming and Bayesian Methods for Hackers“. Online verfügbar unter:
https://nbviewer.org/github/CamDavidsonPilon/Probabilistic-Programming-and-Bayesian-Methods-for-Hackers/blob/master/Chapter1_Introduction/Ch1_Introduction_PyMC3.ipynb