Razão, Proporção e Regra de Três

Razão

A razão entre dois números a e b, com $b \neq 0$, é o resultado da divisão de a por b, ou seja, $\frac{a}{b}$. A razão entre a e b também pode ser simbolizada por $a \div b$ ou $a\!:\!b$.

Algumas razões importantes:

- $Velocidade\ média = \frac{distância\ percorrida}{tempo\ gasto}$
- $Densidade = \frac{massa}{volume}$
- $Escala = \frac{comrpimento\ no\ desenho}{comprimento\ real}$
- $Concorrência = \frac{nº\ de\ candidatos\ inscritos}{nº\ de\ vagas\ oferecidas}$

Exemplo 1: Em uma turma, a razão entre o número de homens e o número de mulheres é $3/5$. Nessa turma há 21 homens. Calcule o número total de alunos na turma.

R: 56

Exemplo 2: Cinco marcas de pão integral apresentam as seguintes concentrações de fibras (massa de fibra por massa de pão):

- Marca A: 2 g de fibras a cada 50 g de pão;
- Marca B: 5 g de fibras a cada 40 g de pão;
- Marca C: 5 g de fibras a cada 100 g de pão;
- Marca D: 6 g de fibras a cada 90 g de pão;
- Marca E: 7 g de fibras a cada 70 g de pão.

Recomenda-se a ingestão do pão que possuir a maior concentração de fibras. Que marca é essa?

R: Marca B

Observação 1: É muito frequente entre os problemas de razão são os que envolvem escalas (mapas, desenhos, maquetes, miniaturas). A escala E é a razão entre o comprimento do mapa, ou desenho, ou maquete, ou miniatura (d) e o comprimento real (D).

$$E = \frac{d}{D}$$

Exemplo 3: Nos mapas usados na aula de geografia encontramos um tipo de razão chamada de escala. Uma escala é a relação matemática entre o comprimento ou a distância medida sobre um mapa e a sua medida real na superfície terrestre. Em um mapa encontramos a escala $1:200.000$. Se nesse mapa a distância entre duas cidades é igual a 65 cm, calcule a distância real entre as cidades, em km.

R: 130 km

Observação 2: Uma escala sempre relaciona medidas de comprimento, porém é bastante comum problemas que envolvam relações entre áreas. Dessa forma, é importante saber que as relações entre as áreas são proporcionais aos quadrados das relações de comprimento. Assim:

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{d}{D}\right)^2$$

Exemplo 4: A maquete de um condomínio foi construída em uma escala $1:80$. Nessa maquete, há uma piscina com área igual a 50 cm^2. Calcule a área real dessa piscina.

R: 32m^2.

Observação 3: Da mesma forma, existem problemas que envolvem relações entre os volumes. Nesse caso, os volumes são proporcionais aos cubos das relações de comprimento.

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{d}{D}\right)^3$$

Exemplo 5: A maquete de um armazém de estrutura cúbica foi construída na escala de $1:40$. Durante a análise de um engenheiro, foi verificado que a maquete não atendeu às medidas corretas e que o volume da estrutura é 10% maior do que a maquete representa.

Sendo o volume da maquete igual a 200 cm^3, calcule o volume real do armazém, em m^3.

R: 14,08 m^3

Proporção

A proporção é uma igualdade entre duas razões. Representa-se a proporção por $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ($\boldsymbol{a}$ está para $\boldsymbol{b}$ assim como $\boldsymbol{c}$ está para $\boldsymbol{d}$).

São duas as propriedades mais importantes da proporção:

- Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então $a.d = b.c$
- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a \pm b}{c \pm d}$

Exemplo 5: Na proporção $\frac{x}{5} = \frac{3}{2}$, calcule o valor de x.

R: 7,5

Exemplo 7: Três números x, y e z são tais que $x + y + z = 30$ e $\frac{x}{7} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$. Calcule x.

R: $\boldsymbol{x = 14}$

- **Grandezas diretamente proporcionais**: quando se uma delas aumenta, a outra aumenta na mesma proporção e, do mesmo modo, se uma delas diminui, a outra diminui na mesma proporção.
  Exemplos: Preço pago e quantidade de produto adquirido;
  Velocidade e distância, admitindo o tempo constante;
  Quantidade de peças produzidas e número de funcionários.

- **Grandezas inversamente proporcionais:** quando se uma delas aumenta, a outra diminui na mesma proporção e, do mesmo modo, se uma delas diminui, a outra aumenta na mesma proporção.
  Exemplos: Velocidade e tempo, admitindo a distância constante;
  Prêmio de uma loteria e número de acertadores;
  Operários e tempo para conclusão de uma obra.

Exemplo 8: Os números a, 6 e 8 são diretamente proporcionais aos números 2, 12 e b. Calcule o valor de $a + b$.

R: 17

Exemplo 9: A uma velocidade de 80 km/h, seu Juarez leva exatamente 1 hora e 30 minutos para sair da sua cidade e chegar até a cidade da sua namorada. Caso ele reduza a velocidade para 60 km/h, calcule o tempo gasto por ele para chegar até a outra cidade, aproximadamente.

R: 2 horas

Exemplo 10: O prêmio de um programa de auditório, no valor de $R\$\ 40.000{,}00$ foi dividido de forma diretamente proporcional aos pontos obtidos pelos quatro participantes. O primeiro colocado fez 330 pontos, o segundo 270, já o terceiro e quarto fizeram 100 pontos cada um. Calcule a parte do prêmio referente ao participante que fez a maior pontuação.

R: $\boldsymbol{R\$\ 16.500{,}00}$

Exemplo 11: Uma empresa vai distribuir ao final do ano $R\$\ 3100{,}00$ entre os seus três funcionários mais assíduos, de modo que a divisão seja feita de maneira inversamente proporcional à quantidade de dias que cada funcionário faltou ao longo do ano. Os três funcionários mais assíduos faltaram 2, 3 e 5 dias ao longo do ano. Quanto o funcionário que faltou 2 dias irá receber?

***R*: R$ 1500,00**

Regra de Três Simples

Na regra de três simples existem apenas duas grandezas envolvidas e essas grandezas podem ser diretamente ou inversamente proporcionais.

Exemplo 1: Se 10 litros de leite custa $R\$\ 25{,}00$, qual o valor de 26 litros?

Resposta:

Litros	**Valor**
$\uparrow$ 10	25 $\uparrow$
26	x

(Observe que aumentando a quantidade de litros de leite, aumenta o preço a pagar, logo, as grandezas são diretamente proporcionais e, por isso, colocamos as setas no mesmo sentido)

$\frac{10}{26} = \frac{25}{x} \Rightarrow 10x = 25.26 \Rightarrow x = \frac{25.25}{10} \Rightarrow x = \frac{650}{10} \Rightarrow x = 65$

$\therefore$ O valor de 26 litros é $R\$\ 65{,}00$

Exemplo 2: Um carro percorreu uma estrada em 5 horas, à velocidade média de 100 km/h. Com qual velocidade o carro faria o mesmo percurso em 4 horas?

Resposta:

Velocidade	**Tempo**
100	5 $\uparrow$
$\downarrow$ x	4

(As grandezas são inversamente proporcionais, pois a medida que diminui o tempo da viagem, é necessário que a velocidade do carro aumente. Quando as grandezas são inversamente proporcionais, as flechas têm sentidos contrários.)

$\frac{100}{x} = \frac{4}{5} \Rightarrow 4x = 500 \Rightarrow x = 125$

$\therefore$ 125 km/h

Exemplo 3: Três caminhões transportam 200 m^3 de areia. Para transportar 1600 m^3 de areia, quantos caminhões iguais a esse seriam necessários?

R: 24 caminhões

Exemplo 4: Com 8 eletricistas podemos fazer a instalação de uma casa em 3 dias. Quantos dias levarão 6 eletricistas para fazer o mesmo trabalho?

R: 4 dias

Exemplo 5: Uma fábrica engarrafa 3000 refrigerantes em 6 horas. Quantas horas levará para engarrafar 4000 refrigerantes?

R: 8 horas

Exemplo 6: Uma certa quantidade de suco foi colocado em latas de 2 litros cada uma, obtendo-se assim 60 latas. Se fossem usadas latas de 3 litros, quantas latas seriam necessárias para colocar a mesma quantidade de suco?

R: 40 latas

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1- Durante um naufrágio, os sobreviventes dividiram a comida que lhes sobrou em partes iguais. Sabendo que a quantidade de comida duraria 9 dias pra os 12 náufragos, caso fossem encontrados mais 4 sobreviventes e a comida fosse redistribuída, a quantidade de dias aproximadamente que ela duraria seria de:

a) 2 dias **b)** 4 dias **c)** 5 dias **d) 6 dias** **e)** 8 dias

2- Na pandemia de covid-19, uma confecção se dedicou À fabricação de máscaras de tecido. Quando a confecção tinha 8 funcionários, o total de máscaras produzidas diariamente era de 184 máscaras. Com o objetivo de atingir uma produção de 500 máscaras diárias, quantos funcionários no mínimo devem ser contratados a mais?

a) 21 **b)** 22 **c) 14** **d)** 15 **e)** 16

3- Para viajar de uma cidade para a outra, com uma velocidade média de 60 km/h, leva-se 2 horas e 30 minutos. Quanto tempo seria gasto para fazer esse mesmo percurso caso a velocidade fosse de 75 km/h?

a) 2 horas e 15 minutos
b) **2 horas**
c) 1 hora e 45 miutos
d) 1 hora e 30 minutos
e) 1 hora e 15 minutos

4- Uma das bebidas mais consumidas no mundo é o refrigerante. Durante o verão, devido às altas temperaturas, o consumo dessa bebida tende a ser maior e, com isso, uma fabricante local da cidade de Juazeiro do Norte decidiu aumentar a produção da bebida. Sabendo que ele consegue produzir e engarrafar 4000 refrigerantes em 8 horas, qual será o tempo necessário de trabalho para produzir 5000 refrigerantes?

a) 8 horas e 30 minutos
b) 10 horas e 30 minutos
c) 9 horas
d) 9 horas e 30 minutos
e) **10 horas**

5- Para realizar uma reforma em larga escala em um condomínio fechado, contratou-se uma empreiteira que planejou essa reforma de acordo com a quantidade de funcionários disponíveis na empresa. Na primeira proposta, seriam necessários 15 funcionários para realizar a reforma em 10 dias, porém, durante a reunião do condomínio, decidiram que o prazo deveria ser de no máximo 6 dias para a conclusão da obra. Buscando atender à solicitação do condomínio, qual deve ser a quantidade de funcionários a mais que devem ser contratados?

a) **10** **b)** 12 **c)** 15 **d)** 20 **e)** 25

<u>Regra de Três Composta</u>

Regra de três composta é um processo matemático utilizado na resolução de problemas que envolvem a proporcionalidade direta ou inversa com mais de duas grandezas.

Para resolver ela, você precisa seguir os seguintes passos:

1. Verificar quais são as grandezas envolvidas;
2. Determinar qual o tipo de relação entre elas (direta ou inversa);
3. Efetuar os cálculos utilizando os dados disponibilizados.

Exemplo 1: Se para alimentar uma família com 9 pessoas por 25 dias são necessários 5 kg de arroz, quantos kg de arroz seriam necessários para alimentar 15 pessoas durante 45 dias?

Resposta:

1º passo: Identificar as grandezas

Nº de pessoas	**Nº de dias**	**Kg de arroz**
9	25	5
15	45	x

2º passo: Após verificar quais são as grandezas envolvidas (nº de pessoas, nº de dias e kg de arroz), precisamos interpretar se a proporção entre as grandezas é direta ou inversa. Para isso, é necessário avaliar todas as grandezas comparando com a grandeza que precisamos descobrir (a coluna do x).

- Analisando as grandezas "nº de pessoas" e "kg de arroz", verificamos que são grandezas diretamente proporcionais: quanto mais pessoas têm, maior será a quantidade de arroz necessária para alimentá-las.
- Analisando as grandezas "nº de dias" e "kg de arroz", verificamos que são grandezas diretamente proporcionais: quanto mais dias passarem, mais arroz será necessário para alimentar as pessoas.

3º passo: Igualar a grandeza com a incógnita do problema (kg de arroz) com o produto das outras duas grandezas. Como todas as relações são diretamente proporcionais, não é necessário fazer nenhum ajuste nas razões envolvidas.

$$\frac{5}{x} = \frac{9}{15} \cdot \frac{25}{45} \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{225}{675} \Rightarrow 225x = 5 \cdot 675 \Rightarrow x = \frac{3375}{225} \Rightarrow x = 15$$

∴ É necessário 15 kg de arroz para alimentar 15 pessoas por 45 dias.

Exemplo 2: Numa gráfica existem 3 impressoras que trabalham 4 dias, 5 horas diárias e produzem 300.000 impressões. Se uma máquina precisar ser retirada para manutenção e as duas máquinas restantes trabalharem por 5 dias, fazendo 6 horas diárias, quantas impressões serão produzidas?

Resposta

1º passo:

Nº de impressoras	**Nº de dias**	**Horas/dia**	**Nº de impressões**
3 2	4 5	5 6	300.000 x

2º passo: Relacionando a grandeza que contém a incógnita com as outras grandezas, vemos que:

- "nº de impressoras" e "nº de impressões" são grandezas diretamente proporcionais, pois quanto mais impressoras trabalhando, maior vai ser a quantidade de impressões;
- "nº de dias" e "nº de impressões" são grandezas diretamente proporcionais, pois quanto mais dias trabalhados, mais impressões é possível fazer;
- "horas/dia" e "nº de impressões" são grandezas diretamente proporcionais, pois quanto mais horas por dia for trabalhado, mais impressões é possível realizar.

3º passo: Igualar a grandeza com a incógnita do problema (nº de impressões) com o produto das outras três grandezas. Como todas as relações são diretamente proporcionais, não é necessário fazer nenhum ajuste nas razões envolvidas

$$\frac{300\,000}{x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{300\,000}{x} = \frac{60}{60} \Rightarrow \frac{300\,000}{x} = 1 \Rightarrow x = 300\,000$$

∴ Se duas máquinas trabalharem 5 horas por dia durante 6 dias o número de impressões não será afetado, continuarão produzindo 300 000 impressões.

Exemplo 3: Um texto ocupa 6 páginas de 45 linhas cada uma, com 80 letras (ou espaços) em cada linha. Para torná-lo mais legível, diminui-se para 30 o número de linhas por página e para 40 o número de letras por linha. Considerando as novas condições, determine o número de páginas ocupadas.

R: 18 páginas

Exemplo 4: Um ônibus percorre 2232 km em 6 dias, correndo 12 horas por dia. Quantos quilômetros percorrerá em 10 dias, correndo 14 horas por dia?