Wiederholung

R komm. Ring $1 \neq 0$

- $R^{n \times n}$ Ring, i. A. nicht kommutativ, $GL_n(R) = (R^{n \times n})^{\times}$
- $A = (a_{ij}) \in R^{m \times n}$, $A^t := (a_{ji})_{\substack{j=1,\dots,m \\ i=1,\dots,m}}$ Transponierte von A
- $(A+B)^t = A^t + B^t$, $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
- $D \in GL_n(R) \Rightarrow D^t \in GL_n(R)$ und $(D^t)^{-1} = (D^{-1})^t$.

$K \quad K_p, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad$ LGS über K

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

m Gleichungen

n Unbekannte

$Ax = b$ mit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ n-Tupel von Unbekannten

$A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ Koeffizientenmatrix des LGS

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m$ rechte Seite LGS

$(A, b) \in K^{m \times (n+1)}$ erweiterte Koeff. matrix des LGS

$\mathbb{L}(A, b) = \{ s \in K^n \mid As = b \}$ Lösungsmenge

- Für alle $s \in \mathbb{L}(A,b)$ gilt $\mathbb{L}(A,b) = s + \mathbb{L}(A,0)$ $\left(= \{ s+u \mid u \in \mathbb{L}(A,0)\}\right)$
- Äquivalenzumformungen des LGS:

(a) Vertausche zwei Gleichungen

(b) Addiere das c-fache einer Gl. zu einer <u>andere</u>.

(c) Multipliziere eine Gl mit $c \in K$, $c \neq 0$.

$\longrightarrow$ elementare Zeilentrafos (von Matrizen)

(a) T_{ij}: Vertausche Zeilen i und j

(b) $\alpha_{ij}(c)$: $(i \neq j)$ Addiere das c-Fache von Zeile j zu Zeile i

(c) $\mu_i(c)$: $(c \neq 0)$ Multipliziere Zeile i mit c.

$A \rightsquigarrow B$: B entsteht aus A durch Folge elem. Zeilentrafo's.

$(A,b), (A',b') \in K^{m \times (n+1)}$

$(A,b) \rightsquigarrow (A',b') \implies \mathbb{L}(A,b) = \mathbb{L}(A',b')$.

Zeilenstufenform

$$k_i := \begin{cases} n+1, & \text{falls } z_i \text{ Nullzeile} \\ \text{Pos. in } z_i \text{ des ersten von } 0 \text{ versch. Eintrags} \end{cases}$$

Definition

Es sei $A \in K^{m \times n}$.

- z_i sei die i-te Zeile von A, $i = 1, \ldots, m$.
- $k_i \in \underline{n+1}$: (Anzahl der führenden Nullen von z_i) $+ 1$.
- A hat *Zeilenstufenform*, wenn gilt:

$$k_1 < k_2 < \cdots < k_r < k_{r+1} = \cdots = k_m = n+1$$

  für ein $0 \leq r \leq m$.
- In diesem Fall: r: *Stufenzahl*, $k_1, \ldots, k_r$: *Stufenindizes* von A.

Bemerkung

Die Nullmatrix hat Zeilenstufenform (Fall $r = 0$).

Zeilenstufenform

A hat genau dann Zeilenstufenform, wenn A die Gestalt hat:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccc}
 & & & k_1 & & & & k_2 & & & k_r & & &
\end{array}\\
\left(\begin{array}{ccc|ccccccccccc}
0 & \cdots & 0 & \blacksquare & \star & \cdots & \star & \star & \star & \cdots & \star & \star & \cdots & \star \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \blacksquare & \star & \cdots & \star & \star & \cdots & \star \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & & \vdots & & & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & & \star & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \blacksquare & \star & \cdots & \star \\
\hline
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & & 0 & 0 & \cdots & & 0 & & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & & 0 & 0 & \cdots & & 0 & & \cdots & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\\a\end{array}}\right\} r\\
\left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}}\right\} m-r
\end{array}
\end{array}
$$

$\blacksquare$ und $\star$ sind beliebige Elemente aus K, aber $\blacksquare \neq 0$;

$\blacksquare$ steht in der i-ten Zeile genau an der Stelle k_i.

Zeilenstufenform (Forts.)

Satz

$A \in K^{m \times n}$ kann durch eine Folge elementarer Transformationen auf Zeilenstufenform gebracht werden.

der Typen T, α

Zeilenstufenform (Forts.)

Algorithmus (Gauß)

Eingabe: $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$.
Ausgabe: $A' \in K^{m \times n}$ mit $A \rightsquigarrow A'$ und A' hat Zeilenstufenform.

Für $j = 1, \ldots, n$ bezeichne s_j die j-te Spalte von A.

1. Ist A die Nullmatrix oder eine $(1 \times n)$-Matrix, dann Stopp.
2. Setze $k := \min\{1 \leq j \leq n \mid s_j \neq 0\}$.
3. Wähle ein i mit $a_{ik} \neq 0$ und wende τ_{1i} an. (τ_{11} ist erlaubt.)
4. Für jedes $i = 2, \ldots, m$ wende $\alpha_{i1}(-\frac{a_{ik}}{a_{1k}})$ an.
5. Führe 1. – 5. rekursiv mit $(a_{ij})_{\substack{2 \leq i \leq m \\ k < j \leq n}} \in K^{(m-1)\times(n-k)}$ aus.

(Nach den Schrittten 3. und 4. wird die **transformierte** Matrix wieder mit (a_{ij}) bezeichnet.)

Ad 1) Nullmatrix oder $(1 \times n)$-Matrix hat ZSF (Zeilenstufenform)

Ad 2) k Nummer der ersten Spalte $\neq 0$.

Ad 3) i ex. nach Wahl von k; mache i-te Zeile zur 1-ten.

Ad 4) Erzeuge Nullen in der k-ten Spalte ab Zeile 2.
(Ausräumen!)

Ad 5) Nach 4. haben wir

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & \cdots & 0 & a_{1k} & * & \cdots & * \\ & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & & \end{array}\right)$$

$\uparrow$ Spalte k

Mache mit dieser Matrix weiter.

Zeilenstufenform (Forts.)

Beispiel

freie Unbekannte

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & 6 & 9 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -3 & -6 \\ 1 & -2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} k_1 & & k_2 & k_3 & \end{array} \end{array}$$

$r = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & 6 & 9 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -3 & -6 \\ 1 & -2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\alpha_{41}(-1)]{\alpha_{21}(-2),\ \alpha_{31}(1)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\tau_{34}]{\tau_{23}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_{43}(1)}$$

$$\begin{array}{ccccc} k_1 & & k_2 & k_3 & \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 3 & 4 & \end{array}$$

Lösungsverfahren für homogene LGS

Algorithmus

Eingabe: $A \in K^{m \times n}$.
Ausgabe: $\mathbb{L}(A, 0)$.

1. Bringe A mittels elementarer Zeilentransformationen auf Zeilenstufenform.
2. *Abhängige Unbekannte*: die r Unbekannten zu $k_1, \ldots, k_r$; *Freie Unbekannte*: die $n - r$ restlichen.
3. Ersetze die freien Unbekannten durch Parameter $t_1, \ldots, t_{n-r} \in K$.
4. Löse von unten nach oben nach den abhängigen Unbekannten auf (*Rückwärtssubstitution*).

Lösungsverfahren für homogene LGS (Forts.)

Beispiel $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{L}(A,0) = \left\{ \begin{pmatrix} 2t_1 - \frac{31}{2}t_2 \\ t_1 \\ \frac{1}{2}t_2 \\ 3t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; t_1, t_2 \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Lösung zum Beispiel:

$x_2 = t_1, \quad x_5 = t_2$

$-x_4 + 3t_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_4 = 3t_2$

$2x_3 + 3t_2 - 4t_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{1}{2}t_2$

$x_1 - 2t_1 + \frac{3}{2}t_2 + 12t_2 + 2t_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2t_1 - \frac{31}{2}t_2$

$\cancel{\Rightarrow x_1 = 2t_1}$

Lösungsverfahren für homogene LGS (Forts.)

Bemerkung

Es sei $A \in K^{m \times n}$.

- $0 \in \mathbb{L}(A, 0)$: die *triviale Lösung* $0 \in K^n$
- Ist $m < n$, dann existiert ein $s \in \mathbb{L}(A, 0) \setminus \{0\}$ (eine nicht-triviale Lösung). Ist $m < n$, dann ist $r < n$, d.h. es ex. freie Unbekannte
  Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht!
- Für das homogene LGS $Ax = 0$ sind äquivalent:
  - Das LGS ist nicht-trivial lösbar.
  - $\mathbb{L}(A, 0) \neq \{0\}$.
  - Das LGS ist nicht eindeutig lösbar.
  - Es gibt freie Unbekannte ($n - r > 0$).

Lösungsverfahren für inhomogene LGS

Es seien $A \in K^{m \times n}$, $b \in K^m$.

Erinnerung

Eine spezielle Lösung.

Ist $s \in \mathbb{L}(A, b)$, dann ist

$$\mathbb{L}(A, b) = \{s + u \mid u \in \mathbb{L}(A, 0)\} = s + \mathbb{L}(A, 0).$$

Bemerkung

$\mathbb{L}(A, b) = \emptyset$ ist möglich.

Lösungsverfahren für inhomogene LGS (Forts.)

Algorithmus

Eingabe: $A \in K^{m \times n}$, $b \in K^m$.
Ausgabe: $\mathbb{L}(A, b)$.

1. Bringe (A, b) mittels elementarer Zeilentransformationen auf Zeilenstufenform.

2. <u>Lösungsentscheidung</u>:

   Es seien $k_1, \ldots, k_r$ die Stufenindizes der Zeilenstufenform.
   Ist $r > 0$ und $k_r = n + 1$, so ist $\mathbb{L}(A, b) = \emptyset$.
   Ist $r = 0$ oder $k_r \leq n$, so ist $\mathbb{L}(A, b) \neq \emptyset$.

3. <u>Lösungsmenge</u>: Bestimme $\mathbb{L}(A, 0)$ (ignoriere b).

   Bestimme **eine** Lösung $s \in \mathbb{L}(A, b)$ wie folgt:
   Setze alle freien Unbekannten gleich 0 und löse nach den abhängigen Unbekannten auf.

Lösungsentscheidung $\quad r > 0$ und $k_{r+1} = n+1$, d.h. die r-te Zeile

$$\begin{array}{ccccc} \big(0 & 0 & \cdots & 0 & \overset{\neq 0}{\blacksquare} \big) \\ 1 & & & n & n+1 \end{array}$$

Gleichung $0 \cdot x_1 + \cdots + 0 \cdot x_n = b_r \neq 0$.

Lösungsverfahren für inhomogene LGS (Forts.)

Beispiel $K = \mathbb{Q}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 6 & 9 \\ -1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4.$$

$$(A, b) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -2 & 3 & 4 & 2 \\
0 & 0 & 2 & 1 & -4 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\end{array}
$$

Lösungsentscheidung:

$r = 3 > 0, \quad k_r = 4 \neq 5 = n+1$

$\Rightarrow \quad \mathbb{L}(A, b) \neq \emptyset$

Homogenes System: x_2 frei, $x_2 = t$

$x_4 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_1 - 2t = 0$, d.h. $x_1 = 2t$

Spezielle Lösung: $x_2 = 0$

$-x_4 = 3$

$2x_3 - 3 = -4$

$x_1 - \frac{3}{2} - 12 = 2$

$x_4 = -3$

$x_3 = -\frac{1}{2}$

$x_2 = 0$

$x_1 = \frac{31}{2}$

$$\mathbb{L}(A,b) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{31}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{Q} \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{31}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix} + \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{Q} \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{31}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix} + \mathbb{Q} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{31}{2} + 2t \\ t \\ -\frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{Q} \right\}$$

Lösungsverfahren für inhomogene LGS (Forts.)

Bemerkung

Es sei $A \in K^{m \times n}$ und A' eine Zeilenstufenform von A.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) $Ax = b$ hat für jedes $b \in K^m$ höchstens eine Lösung.
- (b) $Ax = 0$ ist eindeutig lösbar (nur trivial).
- (c) A' hat Stufenzahl n.
- (d) φ_A is injektiv. $\varphi_A : K^m \to K^n, \quad v \mapsto Av$

Insbesondere ist in diesem Fall $m \geq n$.

Beweis der Bemerkung

(a) $\Rightarrow$ (b): Nehme $b = 0$.

(b) $\Rightarrow$ (c): A' Stufenzahl $< n$ $\Rightarrow$ es ex. freie Unbekannte

(c) $\Rightarrow$ (a): Bei der Rückwärtssubstitution (falls lösbar) jeweils eindeutige Lösung.

(a) $\Leftrightarrow$ (d): Klar.

Insbesondere: (c) $\Rightarrow$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc} \blacksquare & & * \\ & \ddots & \\ & & \blacksquare \\ \hline 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

Reduzierte Zeilenstufenform

Beispiel

Weitere elementare Zeilentransfornationen an Spalten zu Stufenindizes liefern:

$$(A,b) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & \frac{31}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus ist die Lösungsmenge direkt ablesbar.

$$\mathbb{L}(A,b) = \begin{pmatrix} \frac{31}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix} + \mathbb{Q} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mu_3(-1)]{\alpha_{23}(1)\ \alpha_{13}(4)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_2(\frac{1}{2})}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_{12}(-3)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & \frac{31}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Reduzierte Zeilenstufenform (Forts.)

Definition

Es sei $A \in K^{m \times n}$.

1. A hat *reduzierte Zeilenstufenform*, wenn A Zeilenstufenform hat und zusätzlich gilt:

$$\text{Für alle } 1 \leq j \leq r\text{: } a_{1k_j} = a_{2k_j} = \cdots = a_{j-1,k_j} = 0,\ a_{jk_j} = 1$$

2. A hat *Normalform*, wenn A reduzierte Zeilenstufenform hat und zusätzlich gilt:

$$\text{Für alle } 1 \leq i \leq r \text{ ist } k_i = i.$$

Reduzierte Zeilenstufenform (Forts.)

Eine Matrix hat reduzierte Zeilenstufenform, wenn sie so aussieht:

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccccccccccc}
0 & \cdots & 0 & 1 & \star & \cdots & \star & 0 & \star & \cdots & 0 & \star & \cdots & \star \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \star & \cdots & 0 & \star & \cdots & \star \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & & \vdots & & & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & & 0 & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \star & \cdots & \star \\
\hline
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & & 0 & 0 & \cdots & & 0 & & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & & 0 & 0 & \cdots & & 0 & & \cdots & 0
\end{array}\right)
$$

wobei $\star$ beliebige Einträge aus K sind.

Reduzierte Zeilenstufenform (Forts.)

Eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ hat Normalform, wenn sie so aussieht:

$$\begin{array}{cc}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \\
0 & 0 & \ddots & & \vdots & C \\
\vdots & \vdots & & 1 & 0 & \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \\
\hline
 & & 0 & & & 0
\end{array}\right)
&
\begin{array}{l}
\left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} r \\
\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} m-r
\end{array}
\\
\begin{array}{cc} \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{r} & \underbrace{\qquad\quad}_{n-r} \end{array} &
\end{array}$$

wobei $C \in K^{r \times (n-r)}$ ist. Dafür verwenden wir auch die „Block"-Schreibweise:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} E_r & C \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Reduzierte Zeilenstufenform (Forts.)

Satz

Jede Matrix $A \in K^{m \times n}$ kann durch eine Folge elementarer Zeilentransformationen (vom Typ τ, α und μ) auf reduzierte Zeilenstufenform gebracht werden.

Mit Spaltenvertauschungen kann A weiter auf Normalform gebracht werden.

Reduzierte Zeilenstufenform (Forts.)

Bemerkung

Beim Lösen von (homogenen und inhomogenen) linearen Gleichungssystemen dürfen Spalten vertauscht werden, wenn über die Zuordnung zwischen Spalten und Unbekannten Buch geführt wird, und die „b-Spalte“ an ihrer Stelle bleit.

Reduzierte Zeilenstufenform (Forts.)

Beispiel

Spaltenvertauschungen können die Rechnung abkürzen.
Z.B. kann man

$$(A, b) := \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \end{array}$$

allein durch Spaltenvertauschungen auf die Zeilenstufenform

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_2 & x_3 & x_1 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \end{array}$$

bringen.

Reduzierte Zeilenstufenform (Forts.)

Beispiel

Weiter kommt man in zwei Schritten zur reduzierten Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x_2 & x_3 & x_1 & b \\ \hline 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} x_2 & x_3 & x_1 & b \\ \hline 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Diese ist eine Normalform, und man liest als Lösungsmenge ab:

$$\mathbb{L}(A, b) = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Beweis des Satzes:

$\mathbb{L}(A,0)$: $\quad A \cdot \left(\begin{array}{c} C \\ \hline -E_{n-r} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} E_r & C \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} C \\ \hline -E_{n-r} \end{array}\right) = 0 \in K^{m \times (n-r)}.$