LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. S. Walcher
Markus Hirshman, Dipl.-Gyml.
Niclas Kruff, M. Sc.

Aachen, den 26. Oktober 2018

Übung 3 zur Vorlesung Analysis für Informatiker, WS 2018/2019

Abgabe bis Mittwoch, 31.10.2018, 12 Uhr

Präsenzaufgaben

Die folgenden Aufgaben werden in der Globalübung am 25.10.2018 bearbeitet und besprochen.

Präsenzaufgabe 2

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen für $x \in \mathbb{R}$:

a) $\mid x+3 \mid < 7-x$.

b) $(x-3)(x+4) < 0$.

Lösung

a) Wir betrachten die beiden Fälle $x+3 \geqslant 0$ und $x+3 < 0$.

Fall: $x+3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -3$
In diesem Fall ist $|x+3| = x+3$ und somit vereinfacht sich die obige Ungleichung zu:

$$x+3 < 7-x \;\Leftrightarrow\; 2x < 4 \;\Leftrightarrow\; x < 2.$$

Somit ist also:

$$\mathbb{L}_1 = \{x \in \mathbb{R}; x < 2\} \cap \{x \in \mathbb{R}; x \geqslant -3\} = \{x \in \mathbb{R}; -3 \leqslant x < 2\} = [-3, 2)\,.$$

Fall: $x+3 < 0 \Leftrightarrow x < -3$
Somit ist $|x+3| = -(x+3) = -x-3$ und daher gilt

$$-x-3 < 7-x \Leftrightarrow -3 < 7. \qquad (*)$$

Nun ist $(*)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt und damit ist

$$\mathbb{L}_2 = \mathbb{R} \cap \{x \in \mathbb{R}; x < -3\} = \{x \in \mathbb{R}; x < -3\} = (-\infty, -3)\,.$$

Insgesamt gilt nun für die Lösungsmenge der Ungleichung:

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = (-\infty, -3) \cup [-3, 2) = \{x \in \mathbb{R}; x < 2\} = (-\infty, 2)\,.$$

b) Systematische Lösung: Zunächst gilt: Ein Produkt ist genau dann gleich Null, wenn einer seiner Faktoren gleich Null ist. Mit

$$(x-3)(x+4) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -4$$

können wir nun folgende Fallunterscheidung machen:

1. $x - 3 < 0$ und $x + 4 < 0$
2. $x - 3 < 0$ und $x + 4 > 0$
3. $x - 3 > 0$ und $x + 4 < 0$
4. $x - 3 > 0$ und $x + 4 > 0$.

Wir erhalten:

1. Mit $x - 3 < 0$ und $x + 4 < 0$ ist das Produkt $(x-3)(x+4) > 0$. Es gilt also $\mathbb{L}_1 = \emptyset$.
2. Da ein Faktor positiv und eine Faktor negativ ist, ist das Produkt $(x-3)(x+4)$ negativ. Also erfüllen alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x - 3 < 0$ und $x + 4 > 0$ die Ungleichung:

   $$\mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R},\ x - 3 < 0 \text{ und } x + 4 > 0\} = \{x \in \mathbb{R},\ x < 3 \text{ und } x > -4\} = (-4, 3).$$

3. Es gilt

   $$x - 3 > 0 \text{ und } x + 4 < 0 \iff x > 3 \text{ und } x < -4.$$

   Also gibt es keine $x \in \mathbb{R}$, die die Bedingungen erfüllen: $\mathbb{L}_3 = \emptyset$.
4. Da beide Faktoren positiv sind, ist das Produkt positiv. Es gilt also $\mathbb{L}_4 = \emptyset$.

Insgesamt ergibt sich

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 \cup \mathbb{L}_4 = \emptyset \cup (-4, 3) \cup \emptyset \cup \emptyset = (-4, 3).$$

Geschickte Lösung: Ein Produkt zweier Faktoren ist genau dann negativ, wenn einer der beiden Faktoren positiv und der andere negativ ist. Es muss also

$$x + 4 > 0 \text{ und } x - 3 < 0 \iff x > -4 \text{ und } x < 3 \iff -4 < x < 3$$

oder

$$x + 4 < 0 \text{ und } x - 3 > 0 \iff x < -4 \text{ und } x > 3.$$

gelten. Da die zweite Möglichkeit einen Widerspruch erzeugt, ist die Lösungsmenge durch

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R},\ x < 3 \text{ und } x > -4\} = (-4, 3)$$

gegeben.