



Übung 2 zur Vorlesung Analysis für Informatiker, WS 2018/2019

Abgabe bis Mittwoch, 24.10.2018, 12 Uhr

Präsenzaufgaben

Die folgenden Aufgaben werden in der Globalübung am 18.10.2018 bearbeitet und besprochen.

Präsenzaufgabe 4

Es sei K ein angeordneter Körper. Beweisen, widerlegen oder beweisen Sie geeignet modifizierte Aussage:

$$x, y \in K \setminus \{0\} : x < y \implies x^{-1} > y^{-1}.$$

Lösung

Diese Aussage ist im Allgemeinen falsch. Man nehme $K = \mathbb{Q}$ und $x = -2$ und $y = 1$. Dann gilt $x < y$ aber $x^{-1} = -\frac{1}{2} < 1 = y^{-1}$. Wir beweisen die Aussage, falls $x, y > 0$ oder $x, y < 0$ sind. Seien ohne Einschränkung $x, y > 0$. Damit gilt $x \cdot y > 0$. Weiterhin gilt für alle $z \in K$, dass $z^2 \geq 0$ ist. Für $z \geq 0$ ist die Aussage klar. Für $z < 0$ ist $-z > 0$ und damit

$$0 < (-z) \cdot (-z) = z^2.$$

Insbesondere erhalten wir $1 > 0$. Darüberhinaus, ist für $x > 0$ das Inverse x^{-1} auch positiv. Angenommen $x^{-1} < 0$, dann gilt:

$$0 < x \cdot (-(x^{-1})) = -1.$$

Aus $1 > 0$ folgt damit $0 < 1 + (-1) = 0$, was ein Widerspruch ist. Zusammenfassend gilt:

$$\begin{aligned} x < y &\implies x^{-1} \cdot x < x^{-1} \cdot y \implies 1 < x^{-1} \cdot y \\ &\implies y^{-1} < x^{-1} \cdot y \cdot y^{-1} = x^{-1} \end{aligned}$$

und damit folgt die Behauptung.