Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. S. Walcher
Niclas Kruff, M. Sc.
Dipl.-Gyml. Markus Hirshman

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Dezember 2018

Lösung zu Klausurtraining Mentoring zur Vorlesung Analysis für Informatiker

Aufgabe 1 Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ für welche die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$$

konvergiert.

Lösung Wir machen die folgende Fallunterscheidung:

i) $x = 0$

Für $x = 0$ und damit $\frac{1}{k} x^k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist die Reihe offensichtlich konvergent.

ii) $x \neq 0$

Für alle $x \neq 0$ erhalten wir mit Hilfe des Quotientenkriteriums:

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{\frac{1}{k+1} x^{k+1}}{\frac{1}{k} x^k} \right| = \left| \frac{k}{k+1} \cdot x \right| = \frac{1}{1 + \frac{1}{k}} \cdot |x| \xrightarrow[\text{GWS}]{\frac{1}{k} \to 0} |x|$$

Mit dem Quotienkriterium konvergiert die Reihe somit für $|x| < 1$ absolut und divergiert für $|x| > 1$. Bleiben noch die Fälle $|x| = 1$ zu prüfen:

i) Für $x = 1$ erhalten wir mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot 1^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

die harmonische Reihe, welche divergiert.

ii) Für $x = -1$ erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot (-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Wegen

$$\frac{1}{k} > \frac{1}{k+1} \quad \text{und} \quad \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} = 0$$

ist die Reihe somit nach dem Leibnizkriterium konvergent.

Wichtige Aspekte der Lösung:

- Der Fall $x = 0$ muss explizit untersucht werden, da hierfür das Quotientenkriterium nicht angewendet werden kann.
- Der Grenzwert $\frac{1}{k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$ kann als bekannt vorausgesetzt werden, die (korrekte) Verwendung der Grenzwertsätze muss explizit gekennzeichnet werden.
- Für $x = 1$ ist für die Divergenz ein Verweis auf Inhalte der Vorlesung ausreichend, wenn die Reihe explizit als harmonische Reihe identifiziert wird.
- Für $x = -1$ ist für die Konvergenz ein Verweis auf Inhalte der Vorlesung ausreichend, wenn die Reihe explizit als alternierende harmonische Reihe identifiziert wird. $\square$

Aufgabe 2 Definiere die Funktion f durch

$$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto x + \ln(x).$$

Zeigen Sie:

a) f besitzt im Intervall $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ eine Nullstelle.

b) f besitzt auf $\mathbb{R}_+^*$ genau eine Nullstelle.

Lösung a) f ist als Summe stetiger Funktionen (Polynom und Logarithmus) selbst stetig auf $\mathbb{R}_+^*$. Mit $2 < e < 3$ ist zunächst

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$$

und somit:

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} + \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} - \ln(e) = \frac{1}{e} - 1 < \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0$$

sowie

$$f(1) = 1 + \ln(1) = 1 > 0.$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert somit ein $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ mit $f(x_0) = 0$.

b) Da $x \mapsto x$ und $x \mapsto \ln(x)$ auf $\mathbb{R}_+^*$ streng monoton wachsend ist, ist auch f als Summe dieser Funktionen streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}_+^*$ und somit injektiv. Somit hat f höchstens eine Nullstelle. Da wir in a) die Existenz (mindestens) einer Nullstelle nachgewiesen haben, handelt es sich hierbei also um die einzige Nullstelle von f.

Wichtige Aspekte der Lösung:

- Die Stetigkeit der Funktion f als Summe einer Polynom- und Logarithmusfunktion muss genau begründet werden.

- Die Abschätzung $2 < e < 3$ bzw. äquivalent dazu $\frac{1}{3} < \frac{1}{e} < \frac{1}{2} < 1$ kann als bekannt vorausgesetzt werden.
- Die Negativität/Positivität zweier geeigneter Funktionswerte muss nachvollziehbar begründet werden (einfach nur $f(1/e) < 0$ bzw. $f(1) > 0$ hinschreiben reicht nicht)
- Der Zwischenwertsatz muss explizit erwähnt werden.
- Die Monotonie von $x \mapsto x$ und $x \mapsto \ln(x)$ kann als bekannt vorausgesetzt werden.
- Die Aussage zur Summe monoton wachsender Funktionen muss nicht weiter begründet werden. $\square$
