TA 11.1

b) Zeige DNF-SAT ∈ P, dann wäre P = NP, wenn DNF-SAT NP-vollständig wäre, was der Annahme widerspricht.

$\varphi = \bigvee_i \bigwedge_j L_{i,j}$

$(x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (x_3 \wedge x_4 \wedge \bar{x}_1) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_3)$

$L_{1,1}$ $L_{3,1}$

Eine Formel φ in DNF hat die Form $\bigvee_i \bigwedge_j L_{i,j}$ für Literale $L_{i,j}$. Damit muss für Erfüllbarkeit von φ mindestens eine Konj $\bigwedge_j L_{i,j}$ (feste i) erfüllbar sein.
Umgekehrt ist das auch hinreichend, wenn φ erfüllt, dann muss auch ein Konjunktion erfüllt sein.
Für $\bigwedge_j L_{i,j}$ reicht zum Prüfen der Erfüllbarkeit ein simpler Algorithmus.
In $\bigwedge_j L_{i,j}$ müssen alle Literale erfüllt sein, dh. mögliche Belegungen sind bereits vorgegeben und es genügt, diese auf Widersprüche zu testen.
Damit erhalten wir einen Linearzeitalgorithmus für DNF-SAT. Iteriere über jede Klausel $\bigwedge_j L_{i,j}$ und teste ob sie erfüllbar ist. Falls eine erf. Konj existiert, so akz. sonst verwerfe.

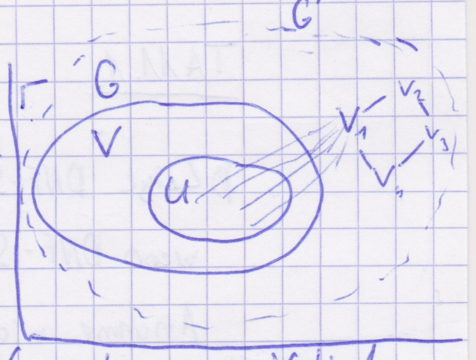
TA 11.2

Wir müssen zeigen dass EDVC ∈ NP und NP-schwer ist.

EDVC ∈ NP Sei $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

Zertifikat: Ein 0-1-String der Länge $|V| = n$, wobei das i-te Bit angibt, ob $v_i \in C$. Die Länge ist polyn. beschränk

Verifizierer: Der Verifizierer A prüft zunächst ob die Eingabe die richtige Form hat. Dabei wird insbesondere geprüft ob alle v_i ~~aus~~ Vm geraden Grad haben.
Dann zählt A ob das Zertifikat maximal k 1-en enthält, wenn nicht, verwerfe
Nun iteriere über alle Kanten und überprüfen, ob eine der beiden inzidenten Kanten in C enthalten ist (1 im Zertifikat), wenn nicht dann verwerfe. Wenn alle Tests durchlaufen dann akzeptiere.
Alle Schritte können in poly. Laufzeit in der Eingabelänge durchgeführt werden.



EDVC NP-schwer

Zeige $VC \leq_p EDVC$

Sei ~~Ω~~ (G,k) eine Vertex-Cover-Instanz mit $G=(V,E)$. Sei V die Menge aller Knoten in G mit ungeraden Grad. Konstruiere G' wie folgt.

Seien v_1, v_2, v_3, v_4 neue Knoten, die nicht in V vorkommen. Verbinde v_1 zu allen Knoten die in U und füge Kanten $\{v_1,v_2\}, \{v_2,v_3\}$, ~~und~~ $\{v_3,v_4\}$ und $\{v_4,v_1\}$ hinzu. Anm: Man könnte ~~man~~ auch v_1 weglassen und $\{v_1,v_3\}$ statt $\{v_1,v_4\}$ & $\{v_3,v_4\}$ hinzufügen.

Nun bildet $(G', k+2)$ die neue EDVC-Instanz. Jeder Knoten in G' hat geraden Grad. Insbesondere gilt dies für v_1, da U gerade Kardinalität hat. (Summe aller Knotengrade ist genau $2|E|$ und somit gerade) ~~[illegible]~~

G' kann einfach in poly Zeit konstruiert werden.

Korrektheit:

Sei $C \subseteq V$ ein VC von G mit $|C| \leq k$. Dann bildet $C' := C \cup \{v_1, v_3\}$ nicht Kante sondern Menge ein VC von G' mit $|C'| = |C| + 2 \leq k+2$.

Sei nun C' ein VC von G' mit $|C'| \leq k+2$. Setze $C = C' \cap V$. Um $\{v_1,v_2\} \{v_2,v_3\}. \{v_3,v_4\}$ und $\{v_4,v_1\}$ abzudecken muss C' mind. zwei von v_1, v_2, v_3, v_4 enthalten. ~~Alt~~ Also $|C| \leq k$. Außerdem ist C ein VC für G da jede Kante aus G auch in G' vorkommt und damit abgedeckt ist.

Somit gilt $EDVC \in NP$ und NP-schwer da $VC \leq_p EDVC$. Damit ist EDVC NP vollständig.

Aufgabe 11.3

Wir nehmen an dass HAM-PATH $\in P$. Dann ex[t] ein poly Zeit Alg

A_{HP} in poly Zeit. Dann entscheidet folgender Alg HAM-CYCLE in poly Zeit

Wir iterieren über alle Kanten $e = \{u,v\} \in E$ und führen für jede

Kante folgendem Prozedur aus.

Konstruiere G_e, der aus G durch löschen von e entsteht.

Falls G_e einen Hamilton Pfad von u nach v enthält, dann akzeptiere

Wenn alle Kanten ohne dass Akzeptiert wurde durchlaufen wurden dann

verwerfen.

Laufzeit ist polynomiell, da max $|E|$ oft A_{HP} aufgerufen wird.

Korrektheit: Nehme an dass $G \in$ HAM-CYCLE. Sei $\{u,v\} \in E$ eine Kante

auf dem Hamilton Kreis. Dann existiert in G' ein Ham-Pfad

von u nach, welcher e nicht verwendet. Also enthält G_e diesen

Pfad ebenfalls und der Alg akz.

Rückrichtung: Alg akz. G. Sei $e = \{u,v\} \in E$ die gelöschte Kante,

so dass G_e Ham Pfad von u nach v enthält.

Füge e zu diesem Pfad hinzu, um einen Ham-Kreis zu

erhalten. Also hat G einen HAM-Kreis.

Dies reicht nicht um NP-schwere zz.