Prüfungstechnisches:

1. Anmeldung (RWTH Online) ist heute möglich. (Sollte jedenfalls-)

2. Probeklausur (Mentoring) – AII-Teil:

   Wir korrigieren das!

Heute:

▷ Noch mehr Begriffe etc.

▷ Stetigkeit: Def. & Eigenschaften

Beweisidee zu (1.11) a)

(i) Es reicht z.z.: Für jede monoton fallende Folge (x_n) in $D \cap (x_0, x_0+r)$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ ex. $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$ (unabh. von der Wahl der Folge)

(Folgenkrit. für Konvergenz; leicht modifiziert)

(ii) Ist (x_n) monoton fallende Folge in (x_0, x_0+r) mit $\lim x_n = x_0$, so ist $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ monotone und beschränkte Folge, also konvergent.

(iii) .....

Bsp $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n} < x \le \frac{1}{n-1} ; n \ge 2 \text{ usw} \\ x^2, & x \ge 1 \end{cases}$

f ist monoton wachsend (Nachweis mit FU)

Damit: $\lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x)$ und $\lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x)$

existieren für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ nach (1.11).

($f|_{[x_0-1, x_0+1]}$ ist beschränkt !)

Bsp ▷ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ ($D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$)

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $x_0 = -\frac{1}{\varepsilon}$;

dann $\left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{|x|} < \frac{1}{|x_0|} = \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon$

für alle $x < x_0$.

▷ Auch: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

▷ $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$, denn: $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$,

und für alle $x > 0$ ist $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{x^k}{k!}}_{\geq 0} \geq 1+x > x$,

also $0 < e^{-x} < \frac{1}{x}$.

Zu $\varepsilon > 0$ wähle also $x_0 = \frac{1}{\varepsilon}$; damit für alle $x > x_0$:

$$|e^{-x} - 0| = e^{-x} = \frac{1}{e^x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{x_0} = \varepsilon.$$

▷ $\lim_{x\to\infty} \cos x$ existiert nicht, denn

$\cos(2\pi k) = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$

$\cos(2\pi k + \pi) = -1$

Würde $L = \lim_{x\to\infty} \cos x$ existieren, so wäre

$|L-1| < 1$ und $|L+1| < 1$ ↯ ($\varepsilon = 1$, Funktionswerte von oben, Bsp

▷ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{e^x+1} = 1$, denn

$$\frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{1+e^{-x}} \qquad \left(\text{„} \cdot \frac{e^{-x}}{e^{-x}} \text{"} \right)$$

und $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$ (s.o.)

$$\overset{(1.14)}{\Rightarrow} \lim_{x\to\infty} (e^{-x}+1) = 1 \overset{(1.14)}{\Rightarrow} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = 1.$$

▷ Es sei $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt (sonst beliebig).

Dann ist durch

$$h(x) := \sup\{g(z);\ z \le x\}$$

eine monoton wachsende ⊗ Funktion definiert, und $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)$ existiert, (denn (1.14) b))

⊗ und beschränkte

Bsp $\triangleright$ Polynom $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$; $n \in \mathbb{N}$ und $a_n > 0$.

Dann gilt $\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty$, denn:

Es gibt ($\to$ Kap $\overline{\text{N}}$) ein $r > 0$, so daß

$$|p(x)| \geq \frac{1}{2} a_n x^n \quad \text{für alle } x \geq r.$$

Man kann $r \geq 1$ annehmen, dann

$$|p(x)| \geq \frac{1}{2} a_n \cdot x \quad , \text{ alle } x \geq r.$$

Zu $M > 0$ wähle man

(.. R so, daß $\frac{1}{2} a_n \cdot R \geq M$, also ...)

$$R = \frac{2M}{a_n}.$$

Dann $p(x) > M$ für alle $x > R$.

▷ $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$, da $e^x > x$ für alle $x>0$ (s.o.),

also kann zu $M>0$: $R = M$ gewählt werden.

Bsp ▷ $\lim_{x\downarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$: Zu $M>0$ wähle $a = \frac{1}{M}$.

Dann gilt für $0<x<a$:

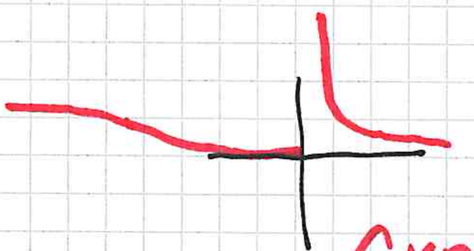
$$\frac{1}{x} > \frac{1}{a} = M .$$

▷ $\lim_{x\downarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$ (mit $e^{\frac{1}{x}} > \frac{1}{x}$ für $x>0$)

▷ $\lim_{x\uparrow 0} e^{+\frac{1}{x}} = 0$, da $\lim_{y\to\infty} e^{-y} = 0$

und für $x<0$ gilt:

$$\lim_{x\uparrow 0} \frac{1}{x} = -\infty .$$



Graph (in etwa)

<u>Bsp</u> : $D = \{ \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N} \}$; $f: D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$

Dann ist f stetig in D, denn kein Punkt von D ist Häufungspunkt.

($\frac{1}{n}$ hat „Nachbarn" $\frac{1}{n+1}$ und $\frac{1}{n-1}$) und Abstand $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$ zu $D \setminus \{\frac{1}{n}\}$. Damit

$$D \cap \left(\left(\frac{1}{n+1} , \frac{1}{n-1} \right) \setminus \left\{ \frac{1}{n} \right\} \right) = \emptyset \quad .)$$

<u>Bsp</u> : Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} , & x \neq 0 \\ c , & x = 0 \end{cases}$

Dann ist f nicht stetig in 0 (unabhängig von der Wahl von c) denn:

Für $a_n = \frac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt $f(a_n) = \sin(n\pi) = 0$;

für $b_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f(b_n) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Wäre f stetig in 0, so

$$\left.\begin{aligned} c = f(0) &= \lim_{n\to\infty} \underbrace{f(a_n)}_{=0} = 0, \text{ und} \\ c = f(0) &= \lim_{n\to\infty} \underbrace{f(b_n)}_{=1} = 1 \end{aligned}\right\} \lightning$$

<u>Bew</u> (7.5) c) siehe entsprechende Regeln für Grenzwerte, falls x_0 Häufungspunkt.

Falls x_0 kein Häufungspunkt: ✓

d) so ähnlich ($\to$ GW-Regeln & triviale Stetigkeit, falls x_0 kein HP).

(9)

<u>Bew</u> (7.5) a) Falls x_0 kein HP, ex. Umgebung U von x_0 so, daß $U \cap (D \setminus \{x_0\}) = \emptyset$, also $U \cap D = \{x_0\}$ und $|f(x)| \leq |f(x_0)|$ für alle $x \in U \cap D$.

Falls x_0 Häufungspunkt: Dann ist $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, also gibt es zu $\varepsilon^* := 1$ ein $\delta > 0$ so, daß

$$|f(x) - f(x_0)| < 1 \quad \text{für alle } x \in D \cap U_\delta(x_0).$$

Es folgt

$$|f(x)| = |f(x) - f(x_0) + f(x_0)|$$
$$\leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| < 1 + |f(x_0)| =: C$$

für alle $x \in D \cap \underbrace{U_\delta(x_0)}_{=U}$.

$\Leftarrow$ x_0 Häufungspunkt

b) ~~Satz~~ Sei $f(x_0) > 0$, o.V. Setze $\varrho := \frac{1}{2} f(x_0)$.

Weil f stetig in x_0, gibt es zu $\varepsilon = \varrho$ ein $\delta > 0$ so, daß
$$|f(x) - f(x_0)| < \varrho \quad \text{für alle } x \in D \cap U_\delta(x_0)$$

$$\Rightarrow \quad -\varrho < f(x) - f(x_0) < \varrho \qquad \text{—//—}$$

$$\Rightarrow \quad \overset{=\varrho}{f(x_0) - \varrho} < f(x) < \overset{3\varrho}{f(x_0) + \varrho} \qquad \text{—//—}$$

$$\Rightarrow \quad \varrho < f(x) < 3\varrho \qquad \text{—//—}$$

Bsp

▷ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^x}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$, denn $x \mapsto e^x$ stetig und (1.14) c) gilt

▷ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-x^2}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

Begründung: $x \mapsto -x^2$ stetig auf $\mathbb{R}$ (Polynom)

$x \mapsto e^x$ stetig in ($\to$ (2.7))

Nach (7.5) d) ist die Komposition

$g: x \to e^{-x^2}$ stetig auf $\mathbb{R}$.

Beweisidee (unvollständig) zu (7.6)

Betrachte monotone Folge (y_n) in W mit

$\lim y_n = y_0$

Dann gibt es eindeutige x_n mit $y_n = f(x_n)$

die f injektiv, und (x_n) ist monoton (f monoton)

mit Grenzwert $f(y_0)$.

Bsp.:

▷ Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt[n]{x} \quad \text{stetig},$$

denn $g_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^n$ ist

stetig und streng monoton.

▷ $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1 + x + x^3 + x^7$

ist stetig (Polynom) und streng monoton wachsend,

da für $x_1 < x_2$ stets gilt:

$$x_1 < x_2, \quad x_1^3 < x_2^3, \quad x_1^7 < x_2^7$$

$$\Rightarrow 1 + x_1 + x_1^3 + x_1^7 < 1 + x_2 + x_2^3 + x_2^7 .$$?

Also: h besitzt auf dem Wertebereich W von h

eine stetige und streng monotone Umkehrfunktion.