Lehrstuhl A für Mathematik

Prof. Dr. S. Walcher
Niclas Kruff, M. Sc.
Dipl.-Gyml. Markus Hirshman

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Februar 2019

# Formelsammlung zur Vorlesung Analysis für Informatiker

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ ist $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

- $|x+y| \leq |x| + |y|$
- $|x| - |y| \leq |x-y|$

Es gilt:

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$,
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$,
- $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ (für $|q| < 1$),
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$ (für $q > 0$).

Reihendarstellung von exp: für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\exp(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt die Funktionalgleichung $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

Reihendarstellung von Cosinus und Sinus: Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\cos(x) := \mathrm{Re}(e^{ix}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$, $\sin(x) := \mathrm{Im}(e^{ix}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$.

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:
$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

Wichtige Werte der trig. Funktionen $x \mapsto \sin(x), x \mapsto \cos(x), x \mapsto \tan(x), x \mapsto \exp(ix)$

| $x$ | $0$ | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ | $\pi$ | $3\pi/2$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin(x)$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ |
| $\cos(x)$ | $1$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
| $\tan(x)$ | $0$ | $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | — | $0$ | — | $0$ |
| $\exp(ix)$ | $1$ | $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)$ | $\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$ | $i$ | $-1$ | $-i$ | $1$ |

Funktionen mit bekannten Ableitungen:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,\quad f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$ für $n \in \mathbb{N}_0$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(x),\quad f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(x)$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(x),\quad f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(x)$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(x),\quad f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -\sin(x)$

$f : \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \tan(x),\quad f' : \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, x \mapsto 1+\tan^2(x)$

$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(x),\ f' : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$

$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^\alpha,\quad f' : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|,\ f' : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{sgn}(x)$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \arctan(x),\ f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$