LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. S. Walcher
Markus Hirshman, Dipl.-Gyml.
Niclas Kruff, M. Sc.

Aachen, den 10. Dezember 2018

Übung 7 zur Vorlesung Analysis für Informatiker, WS 2018/2019

Abgabe bis Mittwoch, 28.11.2018, 12 Uhr

Hausaufgabe 3

(a) Wenn es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass die Folge $(a_k)_{k \geqslant k_0}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, so gilt die Aussage (3.12) aus Kapitel III für alle $n \geqslant k_0$.

(b) Benutze Teil (a), um zu zeigen, dass

$$\cos(1.5) > 0, \text{ und } \cos(1.6) < 0$$

gilt.

(5+5) Punkte

Lösung

(a) Die Reihe ist immer noch konvergent, denn es gilt für die N-te Partialsumme:

$$\sum_{k=1}^{N} (-1)^k \cdot a_k = \sum_{k=1}^{k_0-1} (-1)^k \cdot a_k + \sum_{k=k_0}^{N} (-1)^k \cdot a_k$$

Die Summe $\sum_{k=1}^{k_0-1} (-1)^k \cdot a_k$ ist endlich und konvergiert somit. Für den zweiten Teil nehmen wir eine Indexverschiebung vor:

$$\sum_{k=k_0}^{N} (-1)^k \cdot a_k = \sum_{k=1}^{N-k_0+1} (-1)^{k-1+k_0} \cdot a_{k-1+k_0}$$

Damit konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1+k_0} \cdot a_{k-1+k_0}$ mit dem Leibnizkriterium und es gilt für $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\left| \sum_{k=n+k_0-1}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k \right| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^{k-1+k_0} \cdot a_{k-1+k_0} \right| \leqslant a_{n-1+k_0}$$

Außerdem konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k$ mit dem Grenzwertsätzen als Summe von zwei konvergenten Folgen

(b) Mit der Vorlesung gilt für $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Insbesondere gilt dann für $x = 1.5$, dass $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0} := \left((1.5)^{2k}/(2k)!\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge ist. Aus $a_k \geqslant 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und der Rechnung

$$a_{k+1}/a_k = \frac{9}{4\cdot(2k+2)\cdot(2k+1)}$$

sehen wir aber, dass die Folge erst ab $k = 1$ monoton fallend ist Analoges gilt, wenn wir anstelle von $x = 1.5$ den Wert $x = 1.6$ einsetzen Damit gilt für $x = 1.5$:

$$\cos(1.5) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1.5^{2k}}{(2k)!} = 1 - 1.5^2/2 + 1.5^4/24 - 1.5^6/6! + \sum_{k=4}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1.5^{2k}}{(2k)!}$$

Da die Folge der a_k monoton fallend ist, folgt, dass $\sum\limits_{k=4}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1.5^{2k}}{(2k)!}$ positiv und aus $1 - 1.5^2/2 + 1.5^4/24 - 1.5^6/6! > 0$ folgt somit, dass

$$\cos(1.5) > 0$$

ist. Für $x = 1.6$ sehen wir aus der Monotonie der Folge a_k (nun aber $x = 1.6$ anstelle von $x = 1.5$), dass die Reihe

$$\sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1.6^{2k}}{(2k)!}$$

$\leqslant 0$ ist. Außerdem gilt $\sum\limits_{k=0}^{2} (-1)^k \cdot \frac{1.6^{2k}}{(2k)!} = 1 - 1.6^2/2 + 1.6^4/24 < 0$ und somit ist $\cos(1.6) < 0$.