Lehrstuhl für Informatik 1
Prof. Dr. Gerhard Woeginger
Jan Böker, Tim Hartmann

WS 2018/19

Übung zur Vorlesung
Berechenbarkeit und Komplexität
Lösung Blatt 8

Hausaufgabe 8.1 **(2+2 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen primitiv rekursiv sind. Verwenden Sie dazu die Definition von primitiv rekursiven Funktionen, und bauen Sie die Funktionen aus konstanten Funktionen, Projektionen und Nachfolgerfunktion durch Komposition und primitive Rekursion zusammen. Sie dürfen die Funktionen aus der Tutoraufgabe 8.1 und $\mathbf{add}, \mathbf{mult}, \mathbf{pred}, \mathbf{sub}$ aus der Vorlesung verwenden.

(a) $\boldsymbol{f_5(x,y) = x \mod y}$**.**

Für $x, y \in \mathbb{N}$ gilt, dass $x \mod y = x - (\lfloor \frac{x}{y} \rfloor \cdot y)$. Also ist f_5 primitiv rekursiv da

$f_5(x,y) = \text{sub}(x, \text{mult}(f_3(x,y)), y)$,

und f_3 aus der Tutoriumsaufgabe 8.1.

(b) $\boldsymbol{f_6(x,y) = \text{ggT}(x,y)}$**, wobei $\boldsymbol{\text{ggT}(x,y)}$ der größte gemeinsame Teiler von $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ ist.**

Sei $\text{gT}(t,b,c) = [b \mod t = 0] \cdot [c \mod t = 0]$

Die Funktion $f(a) = [a = 0]$ ist primitiv rekursiv, da $f(a) = 1 - \text{sgn}(a)$ und sgn nach Tutoraufgabe 8.1 primitiv rekursiv ist. Dann ist $\text{gT}(t,b,c)$ primitiv rekursiv, da prod und $(x \mod y)$, nach (a), primitiv rekursiv sind.

Es gilt $\text{ggT}(x,y) = \max\{z \leq x \mid \text{gT}(z,b,c)\}$, da ein Teiler von x kleiner sein muss als x.

Die Funktion $f_6'(m,x,y)$ berechne $\min\{z \leq m \mid x \mod z = 0 \wedge y \mod z = 0\}$. Dann gilt $f_6(x,y) = f_6'(x,x,y)$. Die Funktion f_6' ist primitiv rekursiv da

$f_6'(0,x,y) = g(x,y) = 0$

$f_6'(m+1,x,y) = h(m, f_6'(x,y,m+1), x, y)$

$= \max\left\{\text{gT}(m+1,x,y) \cdot (m+1),\ f_6'(m,x,y)\right\}.$

$= \text{gT}(m+1,x,y) \cdot (m+1) \ + \ (1 - \text{gT}(m+1,x,y)) \cdot f_6'(m,x,y),$

da gT, add und mult primitiv rekursiv sind.

Hausaufgabe 8.2 **(2+3 Punkte)**

Zeigen Sie unter Verwendung von primitiv rekursiven Funktionen und dem $\boldsymbol{\mu}$-Operator, dass die folgenden Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ alle $\boldsymbol{\mu}$-rekursiv sind.

(a) $\boldsymbol{f_7(x) = 1}$ **falls** $\boldsymbol{x}$ **Quadratzahl, und andernfalls** $\boldsymbol{f_7(x) = \perp}$

Die Funktion $f_7(x)$ ist definiert als

$$f_7(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \exists y:\ y^2 = x, \\ \perp & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt, dass

$$\min\{y \mid (y^2 \dot{-} x) + (x \dot{-} y^2) = 0\}) = \begin{cases} y & \text{falls } \exists y:\ y^2 = x, \\ \perp & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also lässt sich $f_7(x)$ berechnen mit $\mathrm{sgn}(\mu f_7'(x) + 1)$ mit $f_7'(y, x) = (y^2 \dot{-} x) + (x \dot{-} y^2)$.

(b) $\boldsymbol{f_8(x) = 1}$ **falls** $\boldsymbol{x}$ **keine Quadratzahl, und andernfalls** $\boldsymbol{f_8(x) = \perp}$

Die Funktion $f_8(x)$ ist definiert als

$$f_8(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \forall y \le x:\ y^2 \ne x \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei $f_8'(a, x) = [0^2 \ne x][1^2 \ne x] \ldots [x^2 \ne x]$.

$f_8'(a, x) \ne 0$ gdw. $0^2 \ne x, \ldots, x^2 \ne x$, also $f_8'(a, x) = 0$ gdw. $\exists y : y^2 = x$.

Sei $\overline{f_8'}(x) = 1 - f_8'(a, x)$.

Demnach ist $f_8(x) = 1 + \mu\overline{f_8'}(x)$, und wir müssen nur noch zeigen, dass $f_8'(a, x)$ μ-rekursiv ist:

Wir können $f_8'(a, x) = [0^2 \ne x][1^2 \ne x] \ldots [x^2 \ne x]$ primitiv rekursiv berechnen mit

$f_8''(0, a, x) = g(a, x) = [0^2 \ne x]$

$f_8''((y + 1), a, x) = h(y, f_8''(y, a, x), x) = f_8''(y, a, x) \cdot [(y + 1)^2 \ne x]$.

und $f_8'(a, x) = f_8''(x, a, x)$.

Hausaufgabe 8.3 (4 Punkte)

Sei $\boldsymbol{L = \{\langle M_1\rangle\langle M_2\rangle \mid L(M_1) \cap L(M_2) \ne \Sigma^*\}}$**. Zeigen Sie mittels Reduktion, dass** $\boldsymbol{L}$ **nicht rekursiv aufzählbar ist.**

Nicht rekursiv aufzählbar. Für einen Widerspruch nehmen wir an, L ist rekursiv aufzählbar. Wir zeigen $\overline{H_\varepsilon} \le L$ und somit den Widerspruch, dass $\overline{H_\varepsilon}$ rekursiv aufzählbar sei.

Konstruktion f: Falls Eingabe w keine Gödelnummer ist, gib $\langle M_1\rangle\langle M_2\rangle \in L$ aus. Sonst, sei $w = \langle M\rangle$, für eine TM M. Sie M^* die TM, welche die Eingabe löscht und sich dann wie M auf Eingabe ε verhält, und bei Terminierung akzeptiert. Sei M' eine fixe TM, welche immer akzeptiert, also $L(M') = \Sigma^*$. Gib $\langle M^*\rangle\langle M'\rangle$ aus.

Die Konstruktion, insbesondere die Konstruktion von $\langle M^*\rangle$ gegeben $\langle M'\rangle$, ist berechenbar.

Korrektheit:

($\Rightarrow$) Sei $w \in \overline{H_\varepsilon}$. Falls w nicht die Form $\langle M\rangle$ für eine TM M hat, so ist $f(w) = \langle M_1\rangle\langle M_2\rangle \in L$. Sonst ist $w = \langle M\rangle$ für eine TM M und M hält nicht auf ε. Dann hält

M^* auf keiner Eingabe, also $L(M^*) = \emptyset$. Dann gilt $M^* \cap M' = \emptyset \cap \Sigma^* =\neq \Sigma^*$. Also gilt $f(w) = \langle M^* \rangle \langle M' \rangle \in L$.

($\Leftarrow$) Sei $w \notin \overline{H_\varepsilon}$. Dann ist $w = \langle M \rangle$ für eine TM M, und M hält auf ε. Dann hält M^* auf allen Eingaben. Dann ist $M^* \cap M' = \Sigma^* \cap \Sigma^* = \Sigma^*$. Also ist $\langle M^* \rangle \langle M' \rangle \notin L$