1.5 Relationen

Es seien M und N Mengen.

Definition

- Eine *Relation zwischen M und N* ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times N$.
- Im Fall $M = N$ sagen wir: R ist *Relation auf M*.

Terminologie und Notation

Es sei $R \subseteq M \times N$ eine Relation zwischen M und N. Für $(x, y) \in R$ schreiben wir auch

$$x \, R \, y$$

und sagen

x *steht* bzgl. R in *Relation* zu y.

Relationen (Forts.)

Beispiele

- $<$ auf $\mathbb{N}$
- M Menge
  $\subseteq$ auf $\mathrm{Pot}(M)$
- M Menge
  $=$ auf M
- M Menge
  $M \times M$ auf M
- $\{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(3,3)\}$ auf $\{1,2,3\}$
- M, N, Mengen, $f : M \to N$ Abbildung.
  $\{(x, f(x)) \mid x \in M\}$.

Relationen (Forts.)

Beispiele

- A: Einwohner von Aachen

  für $a, b \in A$: $a\ N\ b$: a ist Nachkomme von b
- D: Studierende von *Diskrete Strukturen*

  für $s, t \in D$: $s\ E\ t$: s hat die gleichen Eltern wie t
  für $s, t \in D$: $s\ G\ t$: s hat den gleichen Geburtstag wie t
- P: farbige Glasperlen in einer Dose

  für $p, q \in P$: $p\ F\ q$: p hat die gleiche Farbe wie q

Eigenschaften

Definition

M Menge, R Relation auf M. Dann heißt R:

(R)	*reflexiv*:	für $x \in M$:	$x\,R\,x$
(S)	*symmetrisch*:	für $x, y \in M$:	$x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x$
(A)	*antisymmetrisch*:	für $x, y \in M$:	$x\,R\,y$ und $y\,R\,x \Rightarrow x = y$
(T)	*transitiv*:	für $x, y, z \in M$:	$x\,R\,y$ und $y\,R\,z \Rightarrow x\,R\,z$
(V)	*vollständig*:	für $x, y \in M$:	$x\,R\,y$ oder $y\,R\,x$

Eigenschaften (Forts.)

Beispiel

$<$ auf $\mathbb{N}$:

- transitiv
- nicht reflexiv
- nicht symmetrisch
- antisymmetrisch
- nicht vollständig

Eigenschaften (Forts.)

Beispiel

- R auf $\{1\}$ gegeben durch $R = \{(1,1)\}$

  R reflexiv

- R auf $\{1,2\}$ gegeben durch $R = \{(1,1)\}$

  R nicht reflexiv

Abschlüsse

Definition

M Menge, R Relation auf M

- *transitiver Abschluss* von R: Relation S auf M mit
  - S transitiv und $R \subseteq S$
  - für jede Relation T auf M: T transitiv und $R \subseteq T \Rightarrow S \subseteq T$
- *reflexiver Abschluss* von R: Relation S auf M mit
  - S reflexiv und $R \subseteq S$
  - für jede Relation T auf M: T reflexiv und $R \subseteq T \Rightarrow S \subseteq T$
- *symmetrischer Abschluss* von R: Relation S auf M mit
  - S symmetrisch und $R \subseteq S$
  - für jede Relation T auf M: T symmetrisch und $R \subseteq T \Rightarrow S \subseteq T$

Abschlüsse (Forts.)

Beispiel

R Relation auf $\{1, 2, 3\}$ gegeben durch $R = \{(1, 2), (2, 3)\}$

- ein transitiver Abschluss von R:

$$S =$$

- ein reflexiver Abschluss von R:

$$S =$$

- ein symmetrischer Abschluss von R:

$$S =$$

Abschlüsse (Forts.)

Proposition

M Menge, R Relation auf M

- es gibt genau einen transitiven Abschluss S von R
  für $x, y \in M$: $\quad x\,S\,y \Leftrightarrow$ es gibt $n \in \mathbb{N}$, $x_0, \ldots, x_n \in M$:
  $$x = x_0 \; R \; x_1 \; R \ldots R \; x_n = y$$
- es gibt genau einen reflexiven Abschluss S von R
  für $x, y \in M$: $\quad x\,S\,y \Leftrightarrow x\,R\,y$ oder $x = y$
- es gibt genau einen symmetrischen Abschluss S von R
  für $x, y \in M$: $\quad x\,S\,y \Leftrightarrow x\,R\,y$ oder $y\,R\,x$

Äquivalenzrelationen und Ordnungen

Es sei M eine Menge und R eine Relation auf M.

Definition

- R heißt *Äquivalenzrelation* auf M, falls R

  $$(R), (S), (T)$$

  erfüllt.
- R heißt *(partielle) Ordnung* auf M, falls R

  $$(R), (A), (T)$$

  erfüllt.
- R heißt *Totalordnung* auf M, falls R eine Ordnung ist und falls R vollständig ist.

Äquivalenzrelationen und Ordnungen (Forts.)

Es sei M eine Menge.

Beispiele

- „$\leq$“ auf $\mathbb{R}$ ist Totalordnung.
- „$<$“ auf $\mathbb{R}$ ist antisymmetrisch und transistiv, aber weder reflexiv noch symmetrisch.
- „$\subseteq$“ auf $\mathrm{Pot}(M)$ ist Ordnung.
  Keine Totalordnung, falls $|M| \geq 2$.
- $M = \mathbb{Z}$ oder $M = \mathbb{N}$. Definiere *Teilbarkeitsrelation* „$|$“ durch

  $$x \mid y :\Leftrightarrow \text{Es existiert } z \in M \text{ mit } xz = y.$$

  Dann ist „$|$“ reflexiv und transitiv.
  „$|$“ ist Ordnung auf $\mathbb{N}$ aber keine Totalordnung.
  „$|$“ ist keine Ordnung auf $\mathbb{Z}$.

Äquivalenzrelationen und Ordnungen (Forts.)

Es sei M eine Menge.

Beispiele

- *Gleichheit* „$=$“ ist eine Äquivalenzrelation auf M.
- Es sei N eine Menge und $f : M \to N$ Abbildung.
  Die *Bildgleichheit* „R_f“ auf M ist definiert durch:

  $$xR_f x' :\Leftrightarrow f(x) = f(x').$$

  R_f ist Äquivalenzrelation auf M.
- $M = \mathbb{Z}$. Die *Paritätsrelation* „$\equiv_2$“ ist definiert durch

  $$x \equiv_2 y :\Leftrightarrow x - y \text{ gerade.}$$

  „$\equiv_2$“ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.

Äquivalenzrelationen (Forts.)

Weitere Beispiele

- C auf $\mathbb{R}$:
  für $x, y \in \mathbb{R}$: $\quad x \; C \; y \; :\Leftrightarrow x = y$ oder $x = -y$
- C auf $\{1, 2, 3, 4\}$

  $$C = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1), (1,4), (4,1), (2,4), (4,2)\}$$

- D: Studierende von *Diskrete Strukturen*

  für $s, t \in D$: $\quad s \; E \; t$: $\quad s$ hat die gleichen Eltern wie t
  für $s, t \in D$: $\quad s \; G \; t$: $\quad s$ hat den gleichen Geburtstag wie t
- P: farbige Glasperlen in einer Dose

  für $p, q \in P$: $\quad p \; F \; q$: $\quad p$ hat die gleiche Farbe wie q

Äquivalenzrelationen (Forts.)

Definition
M Menge, C Äquivalenzrelation auf M, $x \in M$

Äquivalenzklasse von x in M bzgl. C:

$$[x] = [x]_C := \{\tilde{x} \in M \mid \tilde{x} \; C \; x\}$$

Terminologie:

- *Repräsentant* von $[x]_C$: x

  auch: jedes $x' \in M$ mit

Äquivalenzrelationen (Forts.)

Beispiele

- C auf $\mathbb{R}$:
  für $x, y \in \mathbb{R}$: $\quad x \; C \; y :\Leftrightarrow x = y$ oder $x = -y$

  für $x \in \mathbb{R}$: $\quad [x]_C =$

  Repräsentanten für $[x]_C$:

- $\equiv_2$ auf $\mathbb{Z}$:
  für $x, y \in \mathbb{Z}$: $\quad x \equiv_2 y \Leftrightarrow x - y$ gerade.

  $[0]_{\equiv_2} =$

  Repräsentanten für $[0]_{\equiv_2}$:

Äquivalenzrelationen (Forts.)

Beispiele

- C auf $\{1, 2, 3, 4\}$

  $$C = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(1,4),(4,1),\\ (2,4),(4,2)\}$$

  $[1]_C =$

- M Menge, $=$ auf M

  für $x \in M$: $[x]_= =$

Äquivalenzrelationen (Forts.)

Proposition

M Menge, C Äquivalenzrelation auf M

- Für $x \in M$ gilt: $\quad x \in [x]_C$.
- Für $x, y \in M$ sind äquivalent:
  - $[x]_C = [y]_C$
  - $[x]_C \subseteq [y]_C$
  - $x \; C \; y$

Äquivalenzrelationen (Forts.)

Definition
M Menge, C Äquivalenzrelation auf M

Quotientenmenge von M modulo C:

$$M/C := \{[x]_C \mid x \in M\}$$

Terminologie und Notation:

- *Quotientenabbildung* von M/C:

$$\kappa : M \to M/C, \quad x \mapsto [x]_C$$

Quotientenmengen (Forts.)

Beispiel

C auf $\{1, 2, 3, 4\}$

$$c = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(1,4),(4,1),\\ (2,4),(4,2)\}$$

$\{1, 2, 3, 4\}/C =$