LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK

Prof. Dr. S. Walcher

Markus Hirshman, Dipl.-Gyml.

Niclas Kruff, Dr.

Aachen, den 21. Dezember 2018

Übung 11 zur Vorlesung Analysis für Informatiker, WS 2018/2019

Abgabe bis Mittwoch, 09.01.2018, 12 Uhr

Präsenzaufgaben

Die folgenden Aufgaben werden in der Globalübung am 20.12.2018 bearbeitet und besprochen.

Präsenzaufgabe 3

Bestimmen Sie die folgenden Integrale

(a) $\int \sin^2(x)\mathrm{d}x$

(b) Berechnen Sie auf zwei Arten das Integral

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos(x)\mathrm{d}x$$

(c) $\int_2^x \frac{1}{u\ln(u^n)}\mathrm{d}u$ für jedes $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$ und $x \in [2, \infty)$.

Lösung

(a) Die Funktionen $\sin, -\cos$ sind stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und damit auf jedem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ integrierbar, wende die partielle Integration an: Wir haben mit $u(x) = \sin(x), u'(x) = \cos(x), v(x) = -\cos(x), v'(x) = \sin(x)$:

$$\begin{aligned}
\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x &= \int u(x) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\sin(x)\cos(x) + \int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\sin(x)\cos(x) + \int (1 - \sin^2(x))\,\mathrm{d}x \\
&= -\sin(x)\cos(x) + x - \int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(-\sin(x)\cos(x) + x).$$

(b) Die Funktionen sin, cos sind stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und damit auf dem Intervall $[0, \pi/2] \subset \mathbb{R}$ integrierbar, wende die partielle Integration an: Wir haben mit $u(x) = \sin(x), u'(x) = \cos(x), v(x) = \sin(x), v'(x) = \cos(x)$:

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \int u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= u(x)v(x)\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \sin^2(x)\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (\cos(x)\sin(x))\,\mathrm{d}x$$
$$= 1 - \int_0^{\pi/2} (\cos(x)\sin(x))\,\mathrm{d}x.$$

Indem wir auf beiden Seiten $\int_0^{\pi/2}(\cos(x)\sin(x))\,\mathrm{d}x$ addieren und anschließend durch zwei dividieren erhalten wir

$$\int_0^{\pi/2} (\cos(x)\sin(x))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Alternativ können wir unter den gleichen Voraussetzungen auch die Substitutionsregel zur Berechnung heranziehen. Wir definieren $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ und $\varphi : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \sin(x)$. Dann erhalten wir

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 u\mathrm{d}u = \frac{u^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

(c) Wir betrachten die Funktion $\varphi : x \mapsto \ln(x^n)$, die auf dem Intervall $[2, \infty)$ definiert ist und dort stetig differenzierbar ist. Weiter ist $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ auf $(0, \infty)$ definiert. Dann gilt erstens

$$\varphi'(x) = \frac{nx^{n-1}}{x^n} = \frac{n}{x}$$

und zweitens $\varphi([2, \infty)) \subset (0, \infty)$. Mit Hilfe der Substitutionsregel erhalten wir dann für alle $a, b \in [2, \infty)$ mit $a < b$

$$\int_a^b \frac{1}{x\ln(x^n)}\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_{\ln(a^n)}^{\ln(b^n)} f(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{n}(\ln(\ln(b^n)) - \ln(\ln(a^n))).$$

Dies zeigt

$$\int \frac{1}{x\ln(x^n)}\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\ln(\ln(x^n))$$

Präsenzaufgabe 4

Bestimmen Sie für zwei reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$ das Integral

$$\int \frac{1}{(t-a)(t-b)} \mathrm{d}t\,.$$

Hinweis: Beweisen Sie zunächst folgende Hilfsaussage:
Es existieren Zahlen $A, B \in \mathbb{R}$, so dass wir eine Zerlegung der Form

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\backslash\{a, b\}$$

erhalten.

Lösung

Wir beweisen zunächst die Hilfsaussage. Aus $a \neq b$ folgt, dass der Ausdruck $B := \frac{1}{b-a}$ wohldefiniert ist. Wir setzen weiter $A := -B$. Dann erhalten wir für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{a, b\}$

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{(A+B)x + B(b-a)}{(x-a)(x-b)} = \frac{A(x-b) + B(x-a)}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

und damit die gewünschte Zerlegung. Damit folgern wir

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)(t-b)} = \int \frac{A}{t-a} + \frac{B}{t-b} \mathrm{d}t = A \ln|t-a| + B \ln|t-b|\,.$$