Lehrstuhl A für Mathematik

Prof. Dr. S. Walcher
Niclas Kruff, M. Sc.
Dipl.-Gyml. Markus Hirshman

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Dezember 2018

Lösung zu Weihnachtsblatt zur Vorlesung Analysis für Informatiker

Die Lösungen des Weihnachtsblatts werden nicht vollständig ausgeführt sondern lediglich skizziert.

Aufgabe 1 Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} .$$

Lösung (Skizze) Wir machen eine Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Im Induktionsschritt verwendet man

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &\overset{\text{I.V.}}{=} \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\end{aligned}$$

Der Rest ist Bruchrechnung und bei Bedarf „Vorwärts-Rückwärts"-Umformungen.

Siehe auch:

- Übungsblatt 2, PA1, HA1
- Kurztest Woche 3, A2 □

Aufgabe 2 a) Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

$$a_n = \frac{2n^4 + 2n + 2}{(n^2+1)(n^2-2)},\ n \in \mathbb{N} \qquad , \quad b_n = \frac{\cos(n^2)}{\sqrt{n}},\ n \in \mathbb{N}$$

b) i) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass $\sin x < x$ für alle $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

ii) Wir definieren die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ rekursiv durch die Vorschrift

$$a_0 = 1 \quad , \quad a_{n+1} = \sin a_n .$$

Beweisen Sie, dass $(a_n)_n$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Lösung (Skizze)

a) Der Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lässt sich durch Ausklammern der höchsten Potenz von n in Zähler und Nenner bestimmen.

Bei der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kann man $|\cos(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ verwenden, um eine geeignete Abschätzung für die Anwendung des Sandwichlemmas zu finden.

b) i) Der Beweis folgt im Wesentlichen den gleichen Schritten wie Beispiel VII (2.5).

ii) Mit Aussage $b)i)$ lässt sich zeigen, dass die Folge monoton fallend ist. Zusammen mit der Beschränktheit der Folge, welche sich aus der Beschränktheit des Sinus folgern lässt, folgt dann die Konvergenz. Über das Teilfolgenprinzip

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sin(a_n)$$

sowie unter Verwendung der Stetigkeit des Sinus kann man nun den Grenzwert $a = 0$ bestimmen.

Siehe auch:

- Übungsblatt 5, PA1, PA2, PA3, HA1
- Übungsblatt 10, PA3
- Kurztest Woche 6, A1
- Kurztest Woche 7, A1
- Kurztest Woche 11, A2 $\square$

Aufgabe 3 (Konvergenz – oder doch nicht?) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie für die nachfolgenden Aussagen, ob diese äquivalent zur Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a sind, und geben Sie jeweils einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an:

(A) Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n > n_0$.

(B) Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| \leq \epsilon$ für alle $n \geq n_0$.

(C) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$.

(D) Es gibt ein $c > 0$, so dass es für alle $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n - a| < c\epsilon$ für alle $n \geq n_0$.

Lösung (Skizze) Nach Definition bedeutet die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a gerade, dass

(K) Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$.

(K), (A), (B) und (D) sind jeweils mögliche Formulierungen für die Konvergenz einer Folge.□

Aufgabe 4 Wir betrachten die Dirichletsche Sprungfunktion

$$D : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Weiter sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge.

Untersuchen Sie die Folge $b_n := D(a_n)$ auf Konvergenz.

Lösung (Skizze) Ist $k \in \mathbb{N}$ so, dass $a_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \geq k$ oder $a_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ für alle $n \geq k$, dann ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Existieren zu allen $k \in \mathbb{N}$ jedoch $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $n_1, n_2 > k$ und $a_{n_1} \in \mathbb{Q},\ a_{n_2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, dann ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent. □

Aufgabe 5 a) Zeigen Sie, dass die folgende Reihe für alle $x \in (-1, 1)$ absolut konvergiert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}}.$$

b) Untersuchen Sie die Reihe auf Konvergenz und absolute Konvergenz. Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Reihenwert bis auf einen Fehler von 10^{-1} und geben Sie das Ergebnis als vollständig gekürzten Bruch an

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3}.$$

Lösung (Skizze)

a) Wegen $\frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ findet man für $|x| < 1$ eine geometrische Reihe als konvergente Majorante.

b) Mit $k^2 \leq k^3$ für alle $k \in \mathbb{N}$ findet man $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ als konvergente Majorante. Alternativ lässt sich die Konvergenz auch mit dem Leibnizkriterium begründen. Zur näherungsweisen Bestimmung des Reihenwertes lässt sich die Abschätzung für den Reihenrest aus dem Leibnizkriterium verwenden. Diese liefert $A = \frac{7}{8}$ als Approximation des Reihenwertes bis auf einen Fehler von 10^{-1}.

Siehe auch:

- Übungsblatt 6, PA1, PA2, PA3, HA1, HA2, HA3
- Übungsblatt 7, PA2, PA3, HA2, HA3
- Kurztest Woche 7, A2
- Kurztest Woche 8, A1, A2 $\square$

Aufgabe 6 Zeigen Sie, dass die Funktion f mit

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \begin{cases} \frac{e^{-x}-1}{x}, & x \neq 0, \\ -1, & x = 0, \end{cases}$$

stetig ist.

Lösung (Skizze) Für $x \neq 0$ ist f als Quotient stetiger Funktionen stetig. Für die Stetigkeit in $x_0 = 0$ identifziert man

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x} - e^{-0}}{x - 0}$$

als Ableitung der Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto e^{-x}$ in $x_0 = 0$.

Siehe auch:

- Übungsblatt 9, HA2
- Übungsblatt 10, HA2 $\square$

Aufgabe 7 Zeigen oder widerlegen Sie:

a) Es existiert eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(\mathbb{Q}) = [0, 1]$.

b) Es existiert eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(\mathbb{Q}) = (0, 1)$.

c) Es existiert eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f([0, 1]) = \mathbb{Q}$.

d) Es existiert eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f((0,1)) = \mathbb{Q}$.

Lösung (Skizze)

a) Eine solche Funktion existiert nicht, da $\mathbb{Q}$ abzählbar und $[0,1]$ überabzählbar ist.

b) Analog zu a).

c) Eine solche Funktion existiert nicht, da für f stetig $f([0,1]) = [m, M] \neq \mathbb{Q}$ nach dem Zwischenwertsatz (Bezeichnung wie in VI (2.9)) gelten muss.

d) Eine solche Funktion existiert nicht. Würde eine solche Funktion existieren, dann existieren beispielsweise $x_1, x_2 \in (0,1)$ mit $f(x_1) = 1$ und $f(x_2) = 2$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert dann $\tilde{x} \in (x_1, x_2)$ (oder $\tilde{x} \in (x_2, x_1)$ falls $x_2 < x_1$) mit $f(\tilde{x}) = \sqrt{2}$ und damit wäre wegen $(x_1, x_2) \subset (0,1)$ schon $\sqrt{2} \in f((0,1)) = \mathbb{Q}$. ↯

Aufgabe 8 Zeigen Sie, dass die folgende Funktion genau eine reelle Nullstelle hat

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = \exp(x) + x^3 - 2\,.$$

Lösung (Skizze) Die Funktion ist als Summe differenzierbarer Funktionen wieder differenzierbar und damit insbesondere stetig. Mit dem Zwischenwertsatz und $f(0) = -1$ sowie $f(1) = e-1$ lässt sich die Existenz mindestens einer Nullstelle nachweisen. Mit Hilfe der Ableitung zeigt man, dass f streng monoton steigend und damit injektiv ist.

Siehe auch:

- Übungsblatt 9, PA3, HA3
- Kurztest Woche 10, A2 □

Aufgabe 9 Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion der folgenden Funktionen. Geben Sie insbesondere den Definitionsbereich D' der Ableitungsfunktion an.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 4x^6 - 2x^4 + x^3 + 5x^2 - 6x,$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin\left((x^2+1)\cos\left(e^{x^3-x}\right)\right),$

c) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x^3 + x}\,\ln(x^2+1),$

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x \sqrt[5]{x^4 + x^2 + 1}$,

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \arctan(e^{3x})$,

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{1 + \cos^2(x)}$,

g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2}{4 + x^2}$.

Lösung (Skizze)

a) Als Polynom ist f auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und dort auch differenzierbar, d.h. es ist $D = D' = \mathbb{R}$. Für die Ableitungsfunktion erhalten wir:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 24x^5 - 8x^3 + 3x^2 + 10x - 6.$$

b) f als Komposition differenzierbarer Funktion differenzierbar mit $D = D' = \mathbb{R}$. Verwendet man die Ketten- und Produktregel so erhält man:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \cos\left((x^2 + 1)\cos\left(e^{x^3-x}\right)\right) \cdot \left(2x\cos\left(e^{x^3-x}\right) - (x^2+1)\cdot(3x^2 - x)e^{x^3-x}\sin\left(e^{x^3-x}\right)\right)$$

c) f als Komposition differenzierbarer Funktion differenzierbar mit $D' = (0, \infty)$. Mit der Produkt- und Kettenregel ist:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \frac{3x^2 + 1}{2\sqrt{x^3 + x}} \cdot \ln(x^2 + 1) + \sqrt{x^3 + x} \cdot \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

d) f als Komposition differenzierbarer Funktion differenzierbar mit $D = D' = \mathbb{R}$. Mit der Produkt- und Kettenregel ist:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = e^x \sqrt[5]{x^4 + x^2 + 1} + \frac{e^x(4x^3 + 2x)}{5\sqrt[5]{(x^4 + x^2 + 1)^4}}$$

e) f als Komposition differenzierbarer Funktion differenzierbar mit $D = D' = \mathbb{R}$. Für die Ableitungsfunktion erhalten wir mit der Kettenregel:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \frac{3e^{3x}}{1 + e^{6x}}$$

f) Mit $1 + \cos^2(x) > 0$ ist f als Komposition rationaler und trigonometrischer Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und differenzierbar, d.h. $D = D' = \mathbb{R}$. Mit der Quotienten- sowie der Kettenregel erhalten wir für die Ableitung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \frac{2x\cos(x^2)(1 + \cos^2(x)) + 2\sin(x)\cos(x)\sin(x^2)}{(1 + \cos^2(x))^2}$$

g) Mit $4 + x^2 > 0$ ist f als rationale Funktion auf $D = D' = \mathbb{R}$ differenzierbar. Mit der Quotientenregel erhalten wir:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \frac{8x}{(4 + x^2)^2}$$

Siehe auch:

- Übungsblatt 10, PA1, HA3
- Kurztest Woche 11, A1 □

Knobelaufgaben

Die folgenden Aufgaben sind explizit als ***Knobel***aufgaben gestellt.

Aufgabe 10 Sei $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ein Polynom mit ganzzahligen, nichtnegativen Koeffizienten und $a_n \neq 0$. Es können beliebig viele Funktionswerte erfragt werden (d.h. Sie fragen nach dem Funktionswert an der Stelle t und eine göttliche Instanz liefert Ihnen das Ergebnis). Zeigen oder widerlegen Sie:

Es ist möglich allein aus der Kenntnis dieser erfragten Funktionswerte das Polynom eindeutig zu bestimmen. Falls dies möglich ist, was ist die maximale Anzahl an Funktionswerten die erfragt werden muss?

Aufgabe 11 Sei $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ sowie $a_n \neq 0$. Weiter seien $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$, so dass $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$ ist.

a) Zeigen Sie: p teilt a_0 und q teilt a_n.

b) Was lässt sich im Spezialfall eines normierten Polynoms, d.h. $a_n = 1$ folgern?

c) Aus der Schule ist evtl. bekannt, dass man zur Nullstellenbestimmung eines Polynoms vom Grad 3 oder höher zunächst eine Nullstelle “raten” muss und anschließend eine Polynomdivision durchführt.Als mögliche Kandidaten werden oftmals $\pm 1, \pm 2$ gewählt. Geben Sie ein besseres Vorgehen an, um eine Nullstelle zu “raten” und bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f mit
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f(x) = x^3 - 9x^2 - 57x + 385.$$

Aufgabe 12 Analog zur pq-Formel existiert eine Lösungsformel zur Nullstellenbestimmung von Polynomen dritten Grades, welche als *Formel von Cardano* bekannt ist. Wir geben hier einen kurzen Abriss des Vorgehens an.

Für $a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ betrachte die Funktion f mit

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Alle Nullstellen von f lassen sich dann wie folgt bestimmen:

- Division durch a und anschließende Substitution von $x = z - \frac{b}{3a}$ liefert
$$z^3 + pz + q = 0.$$
- Weitere Substitution $z = u + v$ führt auf
$$z^3 = 3uvz + u^3 + v^3.$$
Ein Koeffizientenvergleich liefert dann ein (nicht lineares) Gleichungssystem
$$\begin{aligned} u^3v^3 &= -\frac{p^3}{27} \\ u^3 + v^3 &= -q \end{aligned}$$
- Nach dem Satz von Vieta sind dann u^3 und v^3 die Nullstellen des (quadratischen) Polynoms $t \mapsto t^2 + qt - \frac{p^3}{27}$.

Insbesondere sind u^3 und v^3 nicht notwendigerweise reell, auch wenn alle Lösungen der Ursprungsgleichung reell sind.

a) Vollziehen Sie die Schritte des skizzierten Vorgehens nach.

b) Verwenden Sie das Vorgehen um alle Lösungen der Gleichung
$$z^3 - 6z + 4 = 0$$
zu bestimmen.

(Die Lösungen lassen sich hier auch ohne die Formel von Cardano etwa mit der Methode aus Aufgabe 10 bestimmen, die notwendigen Schritte werden aber bei diesen „einfachen Ergebnissen“ bereits sehr unschön weshalb wir uns mit dieser „einfachen“ Gleichung begnügen)

Hinweise zu b):

- Für alle $0 \neq z \in \mathbb{C}$ existiert ein eindeutig bestimmtes $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit
$$z = |z| \cdot e^{i\varphi} = |z| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)).$$
- Ist $0 \neq z \in \mathbb{C}$ mit $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$, so sind die n-ten Wurzeln aus z genau die komplexen Zahlen
$$z_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{\frac{i\varphi}{n} + k \cdot \frac{2\pi i}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$
Dies liefert je 3 Kandidaten für u bzw. v. Über $-3uv = l$ lassen sich die relevanten Paare (u_i, v_i) bestimmen, welche eine Lösung der Gleichung liefern werden.

- $\cos\left(\frac{19}{12}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{8}}$ und $\cos\left(\frac{11}{12}\pi\right) = \frac{-\sqrt{3}-1}{\sqrt{8}}$.

Aufgabe 13 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n+k}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

Hinweise:

- Riemannsche Summen können helfen (siehe Seite 112-114 im Skript).
- Der Logarithmus eines Produkts ist eine Summe von Logarithmen.

Aufgabe 14 Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $Q(n)$ die **Quersumme**, d.h. es ist etwa

$$Q(6) = 6,\ Q(53) = 5+3 = 8,\ Q(2089) = 2+0+8+9 = 19.$$

Bestimmen Sie $Q(Q(Q(4444^{4444})))$.

Hinweise: Für $a, b, k \in \mathbb{Z}$ schreiben wir $a \equiv b \mod k$, falls k die Differenz $(a-b)$ teilt. Sie dürfen die folgenden Aussagen ohne Beweis verwenden:

- Ist $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $Q(n) \equiv n \mod 9$ (darauf basiert die evtl. noch aus der Schule bekannte Teilbarkeitsregel für die 9).
- Sind $a, \tilde{a}, b, \tilde{b}, k \in \mathbb{Z}$ mit

  $$a \equiv \tilde{a} \mod k \quad \text{und} \quad b \equiv \tilde{b} \mod k,$$

  dann ist auch $a \cdot b \equiv \tilde{a} \cdot \tilde{b} \mod k$.
- Sind $a, \tilde{a}, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ mit $a \equiv a' \mod k$, dann ist auch $a^n \equiv \tilde{a}^n \mod k$.
