EFFIZIENTE ALGORITHMEN

Übungsblatt 2

Prof. Dr. Gerhard Woeginger, PD Dr. Walter Unger, Prof. Dr. Rossmanith
Dennis Fischer
Lehrstuhl für Informatik 1
RWTH Aachen

WS 18/19
25. Oktober 2018
Abgabe: **2. November, 10:00**

- Die Übungsblätter sollen in Gruppen von 3-5 Studierenden abgegeben werden.
- Die abgegebenen Lösungen mit Namen und Matrikelnummern aller Teammitglieder und der Übungsgruppe beschriften.
- Um zur Klausur zugelassen zu werden müssen 50% aller möglichen Übungspunkte erreicht werden.

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Eine komplexe Zahl $a + bi \in \mathbb{C}$ sei dargestellt durch ein Tupel (a, b). Zeige:

(a) Für $a + bi \in \mathbb{C}$ kann $(a + bi)^2$ mit 2 reelen Multiplikationen bestimmt werden.

(b) Für $a + bi, c + di \in \mathbb{C}$ kann $(a + bi)(c + di)$ mit 3 reelen Multiplikationen bestimmt werden.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass man zwei 2×2 Matrizen mit 7 Multiplikationen und 18 Additionen multiplizieren kann. In dieser Aufgabe wollen wir dies auf 7 Multiplikationen und 15 Additionen (und Subtraktionen) verbessern. Robert L. Probert hat 1976 bewiesen, dass keine weitere Verbesserung auf 7 Multiplikationen und 14 Additionen mehr möglich ist.

Wir betrachten daher zwei beliebige 2×2 Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$. In der ersten Phase führen wir die folgenden acht Additionen (und Subtraktionen) durch:

$$\begin{aligned} s_1 &= c + d & \qquad s_5 &= x - w \\ s_2 &= s_1 - a & s_6 &= z - s_5 \\ s_3 &= a - c & s_7 &= z - x \\ s_4 &= b - s_2 & s_8 &= s_6 - y \end{aligned}$$

In der zweiten Phase führen wir die folgenden sieben Multiplikationen durch:

$$\begin{aligned} p_1 &= a \cdot w & \qquad p_5 &= s_1 \cdot s_5 \\ p_2 &= b \cdot y & p_6 &= s_4 \cdot z \\ p_3 &= s_2 \cdot s_6 & p_7 &= d \cdot s_8 \\ p_4 &= s_3 \cdot s_7 & & \end{aligned}$$

Zeigen Sie, wie man nun aus den acht Summen $s_1, \ldots, s_8$ und den sieben Produkten $p_1, \ldots, p_7$ durch sieben geeignete weitere Additionen (und Subtraktionen) das Produkt der beiden Matrizen bestimmen kann.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Gegeben ist die Adjazenzmatrix A eines ungerichteten, schlingenlosen Graphen G mit n Knoten. Zeigen Sie, dass man in $o(n^3)$ Zeit entscheiden kann, ob G ein Dreieck enthält.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Es seien x, y, z drei reelle Zahlen mit $xz \neq 0$. Bestimmen Sie die inverse Matrix A^{-1} der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}.$$

(b) Wir nehmen an, dass das Produkt von zwei $n \times n$ Matrizen in $O(n^\gamma)$ Zeit berechnet werden kann, wobei $\gamma \geq 2$ eine fixe reelle Zahl ist. Es sei M eine nicht-singuläre $k \times k$ Matrix in oberer Dreiecksform, wobei $k \geq 4$ eine Zweierpotenz ist. Zeigen Sie unter Verwendung von (a), dass die Inverse von M in $O(k^\gamma)$ Zeit berechnet werden kann.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Wir wollen (probabilistisch) testen, ob drei gegebene $n \times n$ Matrizen A, B, C die Gleichung $AB = C$ erfüllen. Dazu wählen wir zufällig einen Zeilenindex i und einen Spaltenindex j, und überprüfen ob $(AB)_{ij} = C_{ij}$ gilt (Antwort JA) oder ob $(AB)_{ij} \neq C_{ij}$ gilt (Antwort NEIN).

(a) Wie groß ist die Fehlerwahrscheinlichkeit bei diesem Test?

(b) Wie oft müssen wir den Test wiederholen, damit die Fehlerwahrscheinlichkeit unter $1/2$ sinkt? Geben Sie eine Funktion f(n) an, so dass für die zahl der benötigten Tests $t(n)$ gilt $t(n) \in \Theta(f(n))$.

Abgabefrist: 2. November, 10:00 im Abgabekasten vor dem Lehrstuhl i1.