Lehrstuhl für Informatik 1
Prof. Dr. Gerhard Woeginger
Jan Böker, Tim Hartmann

WS 2018/19

Übung zur Vorlesung
Berechenbarkeit und Komplexität

Lösung Blatt 11

Hausaufgabe 11.1 **(2 Punkte)**

Wir betrachten das folgende Entscheidungsproblem.

> 100-Clique
>
> **Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$.**
>
> **Frage: Enthält G eine Clique mit genau 100 Knoten?**

Zeigen Sie, dass 100-Clique unter der Annahme P $\neq$ NP nicht NP-vollständig ist.

Zeige, dass 100-Clique $\in$ P gilt: Wäre 100-Clique NP-vollständig, so würde P = NP folgen, was der Annahme widerspricht.

Es sei n die Anzahl der Knoten von G. Dann hat V also $\binom{n}{100} \leq n^{100}$ Teilmengen der Größe 100, d. h., die Anzahl der Kandidaten für eine Clique mit genau 100 Knoten ist polynomiell beschränkt. Indem man all diese Mengen durchprobiert (z. B. indem man alle 100-Tupel von Knoten von G durchprobiert), kann man in polynomieller Zeit entscheiden, ob G eine Clique mit genau 100 Knoten enthält.

Hausaufgabe 11.2 **(5 Punkte)**

Wir betrachten das folgende Entscheidungsproblem.

> Dominating Set
>
> **Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.**
>
> **Frage: Enthält G ein Dominating Set mit höchstens k Knoten?**

Zeigen Sie, dass Dominating Set NP-schwer ist, indem Sie 3-SAT auf Dominating Set reduzieren.

Wir zeigen 3-SAT $\leq_p$ Dominating Set. Sei φ eine Formel in 3-CNF mit n Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Wir konstruieren aus φ einen Graphen $G = (V, E)$, der genau dann ein Dominating Set der Größe höchstens n hat, wenn es eine erfüllende Belegung der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ gibt. Den Graphen konstruieren wir wie folgt:

- Für jede Variable x_i füge einen Knoten für x_i und $\neg x_i$ hinzu und verbinde diese beiden mit einer Kante.

- Weiterhin füge für jede Variable x_i einen Knoten x_i' ein, und verbinde diesen mit den beiden Knoten von oben. Wir werden die Knoten $x_i, \neg x_i$ und x_i' als Variablenknoten bezeichnen.
- Für jede Klausel C_i füge einen Knoten ein.
- Taucht in einer Klausel das Literal x_i auf, verbinden wir den Klauselknoten C_i mit dem zugehörigen Variablenknoten x_i (bzw. im Falle des negierten Auftauchens mit $\neg x_i$).

Bemerkung: Zeichnung anfertigen!

Der Graph G ist in linearer Zeit konstruierbar (pro Variable und Klausel nur konstanter Aufwand).

Zur Korrektheit:

Sei zunächst φ erfüllbar. In einer erfüllenden Belegung wird jede Variable x_i eindeutig mit einem Wert belegt. Wenn $x_i = 1$ nehmen wir den entsprechenden Knoten ins Dominating Set auf, sonst nehmen wir den Knoten auf, der $\neg x_i$ entspricht. Damit sind alle Variablenknoten dominiert, als auch jeder Klauselknoten, da jede Klausel durch mindestens ein Literal erfüllt werden muss.

Für die Rückrichtung nehmen wir an, dass der Graph G ein Dominating Set der Größe höchstens n hat. Knoten mit der Bezeichnung x_i' können nur durch sich selbst oder die zugehörigen Variablenknoten x_i bzw. $\neg x_i$ dominiert werden, da sie ansonsten keine Nachbarn besitzen. Für die n Variablen werden also auch mindestens n Variablenknoten im Dominating-Set benötigt. Es folgt, dass das Dominating Set pro Variable x_i genau einen der zugehörigen Variablenknoten $x_i, \neg x_i$ oder x_i' enthält. Klauselknoten können aufgrund der Größenbeschränkung nicht enthalten sein. Interpretiere die Auswahl des Variablenknotens x_i als Wahrheitsbelegung $x_i = 1$ und die Auswahl von $\neg x_i$ als $x_i = 0$. Wenn x_i' ausgewählt wird, dann können wir die Variable x_i mit einem beliebigen Wert belegen. In dem Dominating Set wird jeder Klauselknoten durch (mindestens) eine Variable dominiert und zwar jeweils in der Form, in der diese Variable als Literal in der Klausel auftaucht. Da das jeweilige Literal nach der oben definierten Wahrheitsbelegung erfüllt wird, folgt, dass alle Klauseln und somit auch die gesamte Formel erfüllt sind.

Anmerkung: In Tutoriumsaufgabe 9.3 wurde gezeigt, dass VERTEX COVER $\leq_p$ DOMINATING SET gilt. Da VERTEX COVER nach Vorlesung NP-vollständig ist, folgt auf diesem Weg schon die NP-Schwere von DOMINATING SET; zudem ist diese Reduktion wohl simpler als die obige.

Hausaufgabe 11.3 (5 Punkte)

Wir betrachten das folgende Entscheidungsproblem.

HALF-CLIQUE

Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$ mit $|V| = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$)

Frage: Enthält G eine Clique mit mindestens k Knoten?

Zeigen Sie, dass HALF-CLIQUE NP-vollständig ist.

Wir müssen zeigen, dass HALF-CLIQUE in NP liegt und NP-schwer ist.

Wir beginnen mit dem Beweis, dass HALF-CLIQUE in NP liegt. Sei $V = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Zertifikat: Ein 0-1-String der Länge n, wobei das i-te Bit angibt, ob der Knoten v_i in C enthalten ist. Die Länge ist offensichtlich polynomiell beschränkt.

Verifizierer: Der Verifizierer prüft zunächst, ob die Eingabe (inklusive des Zertifikates) das richtige Format hat. Dabei wird insbesondere überprüft, ob der gegebene Graph gerade viele Knoten hat. Dann zählt der Verifizierer, ob im Zertifikat mindestens die Hälfte der Bits auf 1 gesetzt ist. Wenn nicht, dann verwirf. Nun iteriert der Verifizierer über alle Paare von Knoten, deren Bits im Zertifikat auf 1 gesetzt sind, und prüft für jedes Paar, ob die beiden Knoten durch eine Kante verbunden sind. Wenn nicht, dann verwirf. Wenn alle Tests durchlaufen sind, dann akzeptiere.

Alle Schritte können in polynomieller Laufzeit durchgeführt werden.

Wir zeigen nun, dass CLIQUE $\leq_p$ HALF-CLIQUE gilt. Da CLIQUE nach Vorlesung NP-schwer ist, folgt somit, dass HALF-CLIQUE NP-schwer ist.

Lösung 1: Sei (G, k) eine CLIQUE-Instanz, wobei $G = (V, E)$ sei und o. B. d. A. $1 < k \leq n$ für $n := |V|$ gelte. Aus G konstruieren wir den Graphen G': Zunächst werden n Knoten hinzugefügt, die mit allen anderen Knoten verbunden sind („Cliquenknoten") Insbesondere werden also Kanten zwischen diesen n neuen Knoten eingefügt. Danach werden noch $2k$ isolierte Knoten hinzugefügt.

Offensichtlich können wir den Graphen G' in polynomieller Zeit berechnen, da nach unserer Annahme $k \leq n$ gilt. Ungültige Kodierungen werden auf ungültige Kodierungen abgebildet. Instanzen, die $1 < k \leq n$ verletzen, werden passend auf feste Ja-/Nein-Instanzen abgebildet.

Es bleibt also die Korrektheit zu zeigen: G hat eine Clique der Größe mindestens k gdw. G' eine Clique hat, die mindestens die Hälfte der Knoten enthält. Da G' über $2(n+k)$ Knoten verfügt, heißt „Hälfte der Knoten" also $n + k$.

Sei zunächst $C \subseteq V$ eine Clique von G mit $|C| \geq k$. Es sei C' die Menge, die man aus C erhält, indem man alle n neuen Cliquenknoten von G' hinzufügt. Dann ist C' eine Clique in G' mit $|C'| \geq k + n = n + k$; dies ist also die gewünschte Clique. Umgekehrt sei C' eine Clique von G' mit $|C'| \geq n + k > 1$. Also enthält C' keinen der k isolierten Knoten, die zu G' hinzugefügt wurden. Indem man die neuen Cliquenknoten von G' aus C' entfernt (es müssen nicht notwendigerweise alle in C' enthalten sein), erhält man eine Clique C von G mit $|C| \geq n + k - n = k$.

Lösung 2: Sei (G, k) eine CLIQUE-Instanz, wobei $G = (V, E)$ sei und o. B. d. A. $1 < k \leq n$ für $n := |V|$ gelte. Basierend auf einer Fallunterscheidung konstruieren wir aus G den Graphen G': Falls $\frac{n}{2} \geq k$ („Die Clique ist zu klein, weshalb sie vergrößert werden muss."), so entstehe G' aus G, indem $n - 2k$ Knoten hinzugefügt werden und diese mit allen anderen Knoten verbunden werden. Falls $\frac{n}{2} < k$ („Die Clique ist zu groß, weshalb der Restgraph vergrößert werden muss."), so entstehe G' aus G, indem $2k - n$ isolierte Knoten hinzugefügt werden.

Offensichtlich können wir den Graphen G' in polynomieller Zeit berechnen, da nach unserer Annahme $k \leq n$ gilt. Ungültige Kodierungen werden auf ungültige Kodierungen abgebildet. Instanzen, die $1 < k \leq n$ verletzen, werden passend auf feste Ja-/Nein-Instanzen abgebildet.

Es bleibt also die Korrektheit zu zeigen: G hat eine Clique der Größe mindestens k gdw. G' eine Clique hat, die mindestens die Hälfte der Knoten enthält. Falls $\frac{n}{2} \geq k$: Sei zunächst $C \subseteq V$ eine Clique von G mit $|C| \geq k$. Es sei C' die Menge, die man aus C erhält, indem man alle $n - 2k$ neuen Knoten von G' hinzufügt. Dann ist C' eine Clique in G' mit $|C'| \geq k + n - 2k = n - k$. Da G' genau $n + n - 2k = 2(n - k)$ Knoten hat, ist dies die gewünschte Clique. Umgekehrt sei C' eine Clique von G' mit $|C'| \geq n - k$. Indem man alle neuen Knoten von G' aus C' entfernt, erhält man eine Clique C von G mit $|C| \geq n - k - (n - 2k) = k$.

Falls $\frac{n}{2} < k$: Sei $C \subseteq V$ eine Clique von G mit $|C| \geq k$. Dann ist C auch Clique in G'. Da G' genau $n + 2k - n = 2k$ Knoten hat, ist C schon die gesuchte Clique. Umgekehrt, ist eine Clique C' von G mit $|C'| \geq k > 1$ auch eine Clique von G, da nur isolierte Knoten hinzugefügt wurden; diese können also nicht in C' enthalten sein.