

EFFIZIENTE ALGORITHMEN

Übungsblatt 1

Prof. Dr. Gerhard Woeginger, PD Dr. Walter Unger, Prof. Dr. Rossmanith
Dennis Fischer
Lehrstuhl für Informatik 1
RWTH Aachen

WS 18/19
11. Oktober 2018
Abgabe: 25. Oktober

- Die Übungsblätter sollen in Gruppen von 3-5 Studierenden abgegeben werden.
- Die abgegebenen Lösungen mit Namen und Matrikelnummern aller Teammitglieder und der Übungsgruppe beschriften.
- Um zur Klausur zugelassen zu werden müssen 50% aller möglichen Übungspunkte erreicht werden.

Aufgabe 1 (0 Punkte)
Besuche <https://algo.rwth-aachen.de/Lehre/WS1819/Effi.php> und lies den Text, der das Übungssystem beschreibt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es sei $n \geq 2$ eine beliebige ganze Zahl. Zeigen Sie:

- (a) Für n gegebene paarweise verschiedene Zahlen a_1, \dots, a_n kann die zweitgrößte Zahl mit $n + \lceil \log_2 n \rceil - 2$ Vergleichen im Worst Case gefunden werden.
- (b) Die Schranke $n + \lceil \log_2 n \rceil - 2$ ist bestmöglich, das heißt es gibt keinen Algorithmus, welcher im Worst Case weniger Vergleiche benötigt.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Klaus-Eberhard sucht zwei volle Batterien für seinen Walkman. In seinem Zimmer liegen 30 Batterien in wildem Durcheinander am Boden, von denen 15 voll und 15 leer sind. Wenn Klaus-Eberhard zwei volle Batterien in den Walkman gibt und auf den On-Knopf drückt, spielt der Walkman ein Lied. Wenn aber (mindestens) eine der beiden Batterien leer ist, so macht der Walkman gar nichts. Klaus-Eberhard möchte mit möglichst wenigen Versuchen den Walkman zum Laufen bringen.

- (a) Zeigen Sie, dass Klaus-Eberhard den Walkman mit **höchstens 18** Versuchen (im Worst Case) zum Laufen bringen kann.
- (b) Suchen Sie in einem Lehrbuch zur Graphentheorie oder im Internet nach dem sogenannten Satz von Turán. Vervollständigen Sie damit den folgenden Satz:
"Wenn ein Graph $G = (V, E)$ mit $|V| = n$ keinen vollständigen Teilgraphen mit k Knoten enthält, dann [...]."
- (c) Zeigen Sie, dass Klaus-Eberhard im Worst Case **mindestens 18** Versuche braucht. (Hinweis: Modellieren Sie die Batterien als Knoten. Beginnen Sie mit dem vollständigen Graphen. Bei jedem erfolglosen Versuch wird die entsprechende Kante aus dem Graphen gelöscht. Der Adversary wendet den Satz von Turán an.)

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Gegeben ist ein zweidimensionales Array $A[1 \dots n, 1 \dots n]$ mit reellen Einträgen, dessen Zeilen und Spalten streng monoton steigen: Es gilt

$$\begin{aligned} A[i, j] &< A[i, j+1] & \forall 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n-1, \\ A[i, j] &< A[i+1, j] & \forall 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

Wir wollen wissen, ob dieses Array einen Suchwert x enthält. Die einzigen zulässigen Abfragen geben i und j mit $1 \leq i, j \leq n$ an, und erhalten " $x < A[i, j]$ " oder " $x = A[i, j]$ " oder " $x > A[i, j]$ " als Antwort.

- (a) Zeigen Sie: Man kann mit $2n - 1$ Abfragen entscheiden, ob das Array A den Suchwert x enthält.
- (b) Zeigen Sie: Jede Suchstrategie benötigt im Worst Case mindestens $2n - 1$ Abfragen.

Aufgabe 5 (2 Punkte)
Der in der Vorlesung besprochene Linearzeitalgorithmus für Median und k -größte Zahl teilt die Zahlen in lauter Fünfergruppen auf. Zeigen Sie:

- (a) Nimmt man Dreiergruppen statt Fünfergruppen, so erhält man keine lineare Laufzeit.
- (b) Nimmt man Siebenergruppen statt Fünfergruppen, so erhält man ebenfalls eine lineare Laufzeit.