Übungsblatt 7

Diskrete Strukturen, Prof. Dr. Gerhard Hiß, WS 2018/19

Für Matrikelnummer: 399191
Abgabezeitpunkt: Fr 07 Dez 2018 14:00:00 CET
Dieses Blatt wurde erstellt: Mo 21 Jan 2019 13:08:48 CET

Die Lösungen der ersten drei Aufgaben sind online abzugeben.		
36	Seien $f = 3X^3 - 14X + 9$, $g = -3X^4 + X^3 - 2X^2 + X$ und $h = X^{100} - 1 \in \mathbb{R}[X]$ Polynome.	
	Was ist der Grad von fgh?	______________
	Was ist der Wert von f an der Stelle 2?	______________
	Was ist die Summe der Koeffizienten von h?	______________
	Was ist der Leitkoeffizient von hf?	______________
	Was ist der konstante Koeffizient von $(X+1)h - g^3$?	______________
37	Berechnen Sie jeweils den größten gemeinsamen Teiler d der beiden Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie ferner Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ mit $\lambda \cdot a + \mu \cdot b = d$. Damit die Antwort eindeutig wird, sind λ, μ so zu finden, dass $0 \leq \lambda < \frac{b}{d}$ ist. Geben Sie dann die geforderten Werte ein.	
	λ für $a = 987$ und $b = 610$.	______________
	μ für $a = 75789033$ und $b = 309264066$.	______________
	μ für $a = 65432100$ und $b = 12345600$.	______________
	μ für $a = 2561792$ und $b = 2562304$.	______________
	μ für $a = 247$ und $b = 323$.	______________
38	Die Polynome in dieser Aufgabe haben Koeffizienten in den reellen Zahlen. Wenn nach dem ggT von zwei Polynomen gefragt wird, dann ist der normierte ggT gemeint. Wenn als Antwort nach einem Polynom gefragt wird, so geben Sie die Liste der Koeffizienten durch Kommas getrennt an; fangen Sie beim Hauptkoeffzient an und hören Sie mit dem absoluten Koeffizienten auf (1 und 0 als Koeffizient werden mitgeschrieben). Beispiel $X^4 - 3X^2 + X + 8$ geben Sie ein als: `1,0,-3,1,8`.	
	Was ist der ggT von $2X^2 - 10X + 12$ und $3X^3 - 9X^2 + 2X - 6$?	______________
	Ist $4X^5 - 3X$ ein Teiler von $4X^{12} - 3X^8 - 6X^5 + 6X$?	◯ Ja / ◯ Nein
	Was ist der ggT von $X^5 - 3X^4 + 2X^3 - X^2 + 3X - 2$ und $X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2$?	______________
	Ist $2X + 3$ ein Teiler von $2X^6 + 3X^5 - 4X^4 - 9X^3 + 12X + 18$?	◯ Ja / ◯ Nein
	Was ist der ggT von $X^7 - 1$ und $X^4 + 1$?	______________
39	Umfrage zur Bearbeitungszeit.	

	Wieviele Stunden haben Sie für die Lösung dieses Übungsblattes aufgewendet? (Bitte auf ganze Stunden runden und nur diese ganze Zahl eintragen.) Diese Angabe ist freiwillig. Es gibt keine Punkte für die Beantwortung.	________________

Bitte werfen Sie Ihre Lösungen zu den schriftlich zu bearbeitenden Aufgaben in das Ihrer Gruppennummer entsprechende Fach im Abgabekasten des Lehrstuhl D für Mathematik (Flur 2.OG im Hauptgebäude, neben der Mathematischen Bibliothek).

Denken Sie daran, dass Sie bei den schriftlichen Aufgaben Ihre Aussagen auch immer begründen.

40 Sei R ein kommutativer Ring. Eine Teilmenge $I \subseteq R$ von R heißt *Ideal* von R, falls gilt:

(1) I ist Untergruppe der additiven Gruppe $(R,+)$.

(2) $RI \subseteq I$, das heißt $ra \in I$ für alle $r \in R$ und $a \in I$.

Für Elemente $a_1,\ldots,a_k \in R$ definieren wir

$$(a_1,\ldots,a_k) = \{r_1a_1 + \ldots + r_ka_k \mid r_1,\ldots,r_k \in R\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für $a_1,\ldots,a_k \in R$ ist $(a_1,\ldots,a_k)$ das kleinste Ideal, das $a_1,\ldots,a_k$ enthält.

(b) Zeigen Sie, dass es für jedes Ideal $I \subseteq \mathbb{Z}$ ein $g \in \mathbb{Z}$ mit $I = (g)$ gibt.

Tip: Wenn $I \neq \{0\}$, sei $g \in \mathbb{N}$ minimal mit $g \in I$. Dann ist $I = (g)$.

Bemerkung: Ideale, die von einem Element erzeugt werden, heißen auch *Hauptideale*. Ringe, in denen jedes Ideal ein Hauptideal ist, werden *Hauptidealringe* genannt.

(c) Für $a,b \in \mathbb{Z}$ und $g = ggT(a,b)$ gilt $(a,b) = (g)$.

(d) Für $a,b \in \mathbb{Z}$ und $k = kgV(a,b)$ gilt $(a) \cap (b) = (k)$.

41 Es sei $R = \mathbb{Z}$ oder $R = K[X]$ für einen Körper K. Ferner seien $a,b \in R$ gegeben und es sei $g := \mathrm{ggT}(a,b)$. Schließlich seien $p,q \in R$ mit $a = pg$ und $b = qg$.
Für $c \in R$ sei $S_c := \{(x,y) \in R \times R \mid xa + yb = c\}$.
Zeigen Sie:

(a) Für $d \in R$ und $(x,y) \in S_g$ ist $(dx,dy) \in S_{dg}$.

(b) Für $c \in R$ ist genau dann $S_c \neq \emptyset$, wenn $g|c$ gilt.

(c) Für $c \in R$ und $(x,y) \in S_c$ gilt $S_c = \{(x+x_0, y+y_0) \mid (x_0,y_0) \in S_0\}$.

(d) Es gilt $S_0 = \begin{cases} R \times R, & \text{falls } (a,b) = (0,0) \\ \{(mq,-mp) \mid m \in R\}, & \text{falls } (a,b) \neq (0,0). \end{cases}$

Abgabe bis spätestens Freitag, dem 7. Dezember 2018, 14 Uhr, sowohl am Abgabekasten als auch online.