LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. S. Walcher
Markus Hirshman, Dipl.-Gyml.
Niclas Kruff, Dr.

Aachen, den 25. Januar 2019

Übung 11 zur Vorlesung Analysis für Informatiker, WS 2018/2019

Abgabe bis Mittwoch, 09.01.2018, 12 Uhr

Hausaufgabe 4

Bestimmen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\, dx$

(b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cdot \exp(x)\, dx$

(c) $\displaystyle\int_{-\frac{5}{2}}^{\frac{3}{2}} (2x+5)^{2018}\, dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(\cos(x)) \cdot \sin(x)\, dx$

(e) $\displaystyle\int_e^{e^2} \ln(x)x\, dx$

(f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} \mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/4}} x\tan(x^2)\mathrm{d}x$

((6+6+6+6+6+6+6) Punkte)

Lösung

In allen Teilen gilt:
Voraussetzung für die Existenz des Integrals (stetige Funktion auf abgeschlossenenm Intervall): **1 Punkt**

Voraussetzungen für Substitution oder partielle Integration prüfen: **2 Punkte**.
Rechnung korrekt durchgeführt: **2 Punkte**.
Ergebnis richtg: **1 Punkt**.

(a) Die Funktion $x \mapsto 1/x$ ist stetig auf $\mathbb{R}_{>0}$ und $x \mapsto \cos(x)$ ist stetig differenzierbar auf $[0, \pi/4]$ mit $\cos([0, \pi/4]) \subseteq \mathbb{R}_{>0}$. Mit $\cos'(x) = -\sin(x)$, $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$ und der Substitutionsregel erhalten wir:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\, dx = \int_{\cos(0)}^{\cos(\frac{\pi}{4})} -\frac{1}{y}\, dy = -\int_{\cos(0)}^{\cos(\frac{\pi}{4})} \frac{1}{y}\, dy$$

$$= -\int_1^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{y}\, dy = \int_{1/\sqrt{2}}^{1} \frac{1}{y}\, dy = \ln(|y|)\Big|_{1/\sqrt{2}}^{1} = \ln(y)\Big|_{1/\sqrt{2}}^{1} = 0 - \ln(1/\sqrt{2}) = 1/2 \cdot \ln(2).$$

(b) Die Funktionen $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \exp(x)$ sind stetig differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ und mit der partiellen Integration sehen wir:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cdot \exp(x)\, dx = \sin(x)\exp(x)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot \exp(x)\, dx.$$

Auch die Funktion $x \mapsto \cos(x)$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar und durch eine erneute partielle Integration erhalten wir:

$$\sin(x)\exp(x)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot \exp(x)\, dx = \sin(x)\exp(x)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \cos(x)\exp(x)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$+ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-\sin(x)) \cdot \exp(x)\, dx$$

$$= \exp(x) \cdot (\sin(x) - \cos(x))\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cdot \exp(x)\, dx.$$

Zusammenfassen der Ergebniss liefert:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cdot \exp(x)\, dx = 1/2 \cdot \exp(x) \cdot (\sin(x) - \cos(x))\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 1/2(\exp(\pi/2) + \exp(-\pi/2)).$$

(c) Die Funktion $x \mapsto x^{2018}$ ist auf $D := \mathbb{R}$ stetig und $\varphi : x \mapsto 2x + 5$ ist auf $[-5/2, 3/2]$ stetig differenzierbar mit $\varphi([-5/2, 3/2]) \subseteq \mathbb{R}$. Dann gilt mit der Substitutionsregel:

$$\int_{-\frac{5}{2}}^{\frac{3}{2}} (2x+5)^{2018}\, dx = 1/2 \cdot \int_{\varphi(-\frac{5}{2})}^{\varphi(\frac{3}{2})} y^{2018}\, dy = 1/2 \cdot \frac{1}{2019} y^{2019}\Big|_0^8 = 1/2 \cdot \frac{1}{2019} 8^{2019}.$$

(d) Die Funktion $x \mapsto \sin(x)$ ist stetig auf $D = \mathbb{R}$ und die Funktion $\varphi : x \mapsto \cos(x)$ ist stetig differenzierbar auf $[0, \pi]$ mit $\varphi([0, \pi]) \subseteq D$. Mit der Substitutionsregel folgt:

$$\int_0^\pi \sin(\cos(x)) \cdot \sin(x)\, dx = -\int_{\cos(0)}^{\cos(\pi)} \sin(y)\, dy = \cos(y)\Big|_1^{-1} = \cos(-1) - \cos(1) = 0.$$

(e) Die Funktionen $x \mapsto x$ und $x \mapsto \ln(x)$ sind auf $[e, e^2]$ stetig differenzierbar und mit einer partiellen Integration erhalten wir:

$$\int_e^{e^2} \ln(x)x\, dx = 1/2x^2 \cdot \ln(x)\Big|_e^{e^2} - 1/2 \cdot \int_e^{e^2} x^2 \cdot \frac{1}{x}\, dx$$
$$= 1/2 \cdot e^4 \cdot 2 - 1/2 \cdot e^2 \cdot 1 - 1/2 \cdot \left(1/2x^2\Big|_e^{e^2}\right) = 3/4 \cdot e^4 - 1/4 \cdot e^2.$$

(f) Das Integral existiert, da der Integrand als Kompostition und Quotient stetiger Funktionen auf $[0, 1]$, mit nicht verschwindenem Nenner, wieder stetig ist. Es gilt weiter mit den GWS für Integrale:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2-1}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \frac{x^2-1}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x.$$

Allgemein gilt für $\alpha > -1$ mit der Vorlesung und der Substitutionsregel:

$$\int_0^1 (1+x)^\alpha \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1} \cdot (1+x)^{\alpha+1}\Big|_0^1.$$

Damit erhalten wir mit der dritten binomischen Formel und den GWS:

$$\int_0^1 \frac{x^2-1}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x = \int_0^1 (x-1) \cdot (x+1)^{1/2}\mathrm{d}x + \int_0^1 (x+1)^{-1/2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 x \cdot (x+1)^{1/2}\mathrm{d}x - \int_0^1 (x+1)^{1/2}\mathrm{d}x + \int_0^1 (x+1)^{-1/2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 x \cdot (x+1)^{1/2}\mathrm{d}x - 2/3 \cdot (2^{3/2} - 1) + 2 \cdot (2^{1/2} - 1).$$

Für das erste Integral gilt:

$$\int_0^1 x \cdot (x+1)^{1/2}\mathrm{d}x = \int_0^1 (x+1) \cdot (x+1)^{1/2}\mathrm{d}x - \int_0^1 (x+1)^{1/2}\mathrm{d}x$$
$$= 2/5 \cdot \left(2^{5/2} - 1\right) - 2/3 \cdot \left(2^{3/2} - 1\right).$$

Somit folgt insgesamt:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} \mathrm{d}x = 2/5 \cdot \left(2^{5/2} - 1\right) - 4/3 \cdot \left(2^{3/2} - 1\right) + 2 \cdot (2^{1/2} - 1) = 14/15 \cdot \sqrt{2} - 16/15.$$

(g) Hier verwenden wir eine Substitution. Die Funktion $x \mapsto \tan(x)$ ist auf $D := (-\pi/2, \pi/2)$ stetig und die Funktion $\varphi : x \mapsto x^2$ ist auf $[0, \sqrt{\pi/4}]$ stetig differenzierbar mit $\varphi([0, \sqrt{\pi/4}]) \subseteq D$ und $\varphi'(x) = 2x$. Mit der Substitutionsregel und Teil (a) folgt schließlich:

$$\int_0^{\sqrt{\pi/4}} x \tan(x^2) \mathrm{d}x = 1/2 \cdot \int_0^{\pi/4} \tan(y) \mathrm{d}y = -1/2 \cdot \ln(\cos(y)) \Big|_0^{\pi/4} = -\ln(1/\sqrt{2}) = 1/4 \cdot \ln(2).$$