Wiederholung

★ $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $\prod_{i=1}^{n} a_n = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$

$\bigcup_{i=1}^{n} M_i = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n$, $\bigcap_{i=1}^{n} M_i = M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_1$.

★ M Menge, $\mathcal{P} \subseteq \mathrm{Pot}(M)$ Partition, falls

(1) $C \neq \emptyset \quad \forall\, C \in \mathcal{P}$

(2) $C \cap C' = \emptyset \quad \forall\, C \neq C' \in \mathcal{P}$

(3) $\bigcup_{C \in \mathcal{P}} C = M$

★ - Direkter Beweis: $A = A_1 \Rightarrow A_2$, $A_2 \Rightarrow A_3$, $\dots$, $A_{n-1} \Rightarrow A_n = B$

- Kontraposition: z.z. $A \Rightarrow B$: Wir zeigen $\neg B \Rightarrow \neg A$

- Äquivalenz: z.z. $A \Leftrightarrow B$: Wir zeigen $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$

„$\Rightarrow$" „$\Leftarrow$"

-

☆ <u>Vollständige Induktion</u> z.z.: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A(n)$.

Induktionsanfang: $A(1)$

Induktionsannahme: $A(n)$ ist wahr für ein $n \in \mathbb{N}$

Induktionsschritt: $A(n+1)$ ist wahr (unter IA)

☆ <u>Widerspruchsbeweis</u>: z.z.: A ist wahr.

Annahme: $\neg A$ ist wahr und folgern daraus einen Widerspruch,

etwa $B \wedge \neg B$ für eine Aussage B.

1.4 Abbildungen

Vorstellung

M, N Mengen

Abbildung (oder *Funktion*) von M nach N:

„Vorschrift“ (z.B. „Formel“),
die jedem $x \in M$ genau ein $y \in N$ „zuordnet“.

Abbildungen (Forts.)

Definition

- *Abbildung* (oder *Funktion*) von M nach N: besteht aus
  - M Menge
  - N Menge
  - $f \subseteq M \times N$

  so, dass: für jedes $x \in M$ ex. genau ein $y \in N$ mit $(x, y) \in f$

  $(x,y) \in f$ und $(x,y') \in f \implies y = y'$

  Missbrauch von Notation: notiere Abbildung wieder als f

- Terminologien und Notationen:

  f Abbildungsvorschrift

  - M heißt *Definitionsbereich* von f.
  - N heißt *Zielbereich* oder *Wertebereich* von f.
  - *Bild* von $x \in M$ unter f: **das** $y \in N$ mit $(x, y) \in f$
    Notation: $f(x)$
  - *Urbild* von $y \in N$ unter f: **ein** $x \in M$ mit $y = f(x)$

  $(x,y) \in f$ und $(x',y) \in f$ mit $x \neq x'$ erlaubt

Abbildungen (Forts.)

Notation

Es seien M, N Mengen.

- *Menge der Abbildungen* von M nach N:
  $\mathrm{Abb}(M, N)$ oder N^M.
- Notationen für $f \in \mathrm{Abb}(M, N)$:
  - $f\colon M \to N$
  - $f\colon M \to N,\ x \mapsto f(x)$
  - $M \xrightarrow{f} N$

Abbildungen (Forts.)

Beispiele

- $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} =$
  Menge aller reellen Funktionen.

- $\mathrm{Abb}(\{1,2\},\{3,4,5\})$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Abb}(\{1,2\},\{3,4,5\})\\
&= \{(1 \mapsto 3, 2 \mapsto 3), (1 \mapsto 3, 2 \mapsto 4), (1 \mapsto 3, 2 \mapsto 5),\\
&\quad (1 \mapsto 4, 2 \mapsto 3), (1 \mapsto 4, 2 \mapsto 4), (1 \mapsto 4, 2 \mapsto 5),\\
&\quad (1 \mapsto 5, 2 \mapsto 3), (1 \mapsto 5, 2 \mapsto 4), (1 \mapsto 5, 2 \mapsto 5)\}
\end{aligned}
$$

$M = \{1,2\}$, $N = \{3,4,5\}$, $|N^M| = |N|^{|M|}$.

Abbildungen (Forts.)

Beispiele

- $\{1, 2, 3\} \to \{4, 5, 6\}$, $1 \mapsto 4$, $2 \mapsto 5$, $3 \mapsto 4$ ist Abbildung.
- $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto 2x^2$ ist Abbildung. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = 2x^2$.
- Es gibt keine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = \sqrt{x}$ für $x \in \mathbb{N}$. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$.
- Es gibt keine Abbildung $f : \{-2, 3, \sqrt{61}\} \to \mathbb{Q}$ mit $f(3) = -5$ und $f(3) = 2/7$. $(3, -5) \in f$, $(3, 2/7) \in f$ ↯
- $\{(x, \frac{1}{x}) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ liefert keine Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $0 \mapsto$? ?
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

ist Abbildung.

$(M, N, f), (M', N', f')$ Abbildungen $(f \subseteq M \times N, f' \subseteq M' \times N')$

sind gleich $\iff$

Abbildungen (Forts.)

$M = M'$

$N = N'$

Beispiele

$f = f'$ $[f(x) = f'(x) \quad \forall x \in M]$

- $f\colon \{1,2,3\} \to \mathbb{N},\ x \mapsto x+2$
  $g\colon \{1,2,3\} \to \mathbb{N},\ 1 \mapsto 3,\ 2 \mapsto 4,\ 3 \mapsto 5$ $\Big\}$ $f = g$
- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ 0 & \text{für } x = -1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ -1 & \text{für } x = -1 \end{cases}$$

$f \neq g$

$f(-1) = 0 \neq -1 = g(-1)$

- $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto x^2$
  $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N},\ x \mapsto x^2$

  $f \neq g$
- $f\colon \mathbb{N} \to \underline{\mathbb{N}}\ x \mapsto x+1$
  $g\colon \mathbb{N} \to \underline{\mathbb{Z}},\ x \mapsto x+1$

  $f \neq g$

Abbildungen (Forts.)

Beispiele

- Briefpostversand der Aachener Post:

$$\{\text{Briefe}\} \longrightarrow \{\text{Postadressen}\}$$

- Nachrichtenverschlüsselung:

$$\{\text{Klartexte}\} \longrightarrow \{\text{Geheimtext}\}$$

  Nachrichtenentschlüsselung:

$$\{\text{Geheimtext}\} \longrightarrow \{\text{Klartext}\}$$

$x, x' \in \mathbb{Z}, \quad x = x'$

$y \in \mathbb{Z}$

Abbildungen (Forts.)

$\Rightarrow \; x + y = +(x,y) \underset{\substack{\uparrow \\ (x,y) = (x',y)}}{=} +(x',y) = x' + y.$

Beispiele

- Addition in $\mathbb{Z}$ ist die Abbildung

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad (x, y) \mapsto x + y. \qquad +(x,y)$$

- M Menge von Glasperlen , F Menge aller Farben.
  $f \; \cancel{F} : M \to F, x \mapsto$ Farbe von x.
- A Menge von Personen.
  $J : A \to \mathbb{Z}, p \mapsto$ Geburtsjahr von p.
- Zu jeder Menge M gibt es die *Identitätsabbildung*

$$\mathrm{id}_M : M \to M, x \mapsto x. \qquad id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; id_{\mathbb{R}}(x) = x$$

- N Menge. Dann existiert genau eine Abbildung $\emptyset \to N$. $\quad \emptyset \times N = \emptyset, \quad f = \emptyset$
- M nicht-leere Menge. Dann existiert keine Abbildung $M \to \emptyset$. $\quad M \times \emptyset = \emptyset$

Folgen

Es sei N eine Menge.

Definition
Eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to N$ wird auch *Folge in N* genannt.

Schreibweisen

- Die Folge $f : \mathbb{N} \to N$ in N wird auch geschrieben als

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

a_i : Folgenglieder

  oder

$$(a_i)_{i \in \mathbb{N}}.$$

  Hier ist $a_i := f(i)$ für $i \in \mathbb{N}$.

- Menge aller Folgen in N:
  $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, N)$ oder $N^{\mathbb{N}}$.

Folgen (Forts.)

Beispiele

- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad i \mapsto i^2$
  wird auch geschrieben als

  $$1, 4, 9, 16, \ldots$$

  oder

  $$(i^2)_{i \in \mathbb{N}}.$$

- $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ Menge der Binärfolgen. (Manchmal auch $2^{\mathbb{N}}$.)

- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ Menge der reellen Folgen.

Definition durch Rekursion

Folgen auf einer Menge können *rekursiv* definiert werden.

Beispiele

$a_1 = 1, \quad a_2 = 1 + \frac{1}{1} = 1 + 1 = 2$

$a_3 = 1 + \frac{1}{2}, \quad a_4 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}, \ldots$

- Auf $\mathbb{R}_{>0}$ existiert genau eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_1 := 1 \text{ und } a_{n+1} := 1 + \frac{1}{a_n} \text{ für } n \geq 1.$$

- Es sei $a \in \mathbb{R}$. Es gibt genau eine Folge $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit

$$x_1 = a \text{ und } x_{n+1} = a \cdot x_n \text{ für } n \geq 1.$$

$a_1 = a, \quad a_2 = a \cdot a, \quad a_3 = a \cdot a_2 = a \cdot a \cdot$

Wir schreiben: $a^n := x_n$ für das n-te Glied dieser Folge.
Sprechweise oft: Wir definieren die *Potenzen* a^n für $n \in \mathbb{N}$ rekursiv durch:

$$a^1 := a \text{ und } a^{n+1} := a \cdot a^n \text{ für } n \geq 1.$$

Definition durch Rekursion (Forts.)

Die Definition durch Rekursion beruht auf dem folgenden Satz.

Proposition

Es sei N eine Menge, $f: N \to N$ Abbildung und $a \in N$.

Dann gibt es genau eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in N mit:

- $a_1 = a$
- $a_{n+1} = f(a_n)$ für $n \in \mathbb{N}$.

Dieser *Rekursionssatz von Dedekind* kann durch vollständige Induktion bewiesen werden.

Definition durch Rekursion (Forts.)

Beispiele

In obigen Beispielen können wir nehmen:

- $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto 1 + 1/x$.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax$.

Tupel

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Erinnerung: $\underline{n} = \{1, 2, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$.

Definition
Eine Abbildung $f : \underline{n} \to N$ wird auch *n-Tupel in N* genannt.

Schreibweisen

- Das n-Tupel $f : \underline{n} \to N$ in N wird auch geschrieben als

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

  oder

$$(a_i)_{i \in \underline{n}}.$$

  Hier ist $a_i := f(i)$ für $i \in \underline{n}$.
- Menge aller n-Tupel in N:
  $N^n := N^{\underline{n}} = \mathrm{Abb}(\underline{n}, N)$.

$n = 1$

$\{1\} \longrightarrow N, \quad 1 \longmapsto a_1 \in N$

$N^1 = \{(a) \mid a \in N\}$

$\underline{n = 0}$?

$\emptyset = \underline{0} \longrightarrow N \quad N^0 = \{f : \emptyset \to N\}$
$= \{(\,)\}$

Tupel (Forts.)

Beispiele

- Das 5-Tupel $(1, -3, 0, 0, 27)$ in $\mathbb{Z}$ ist die Abbildung $t : \underline{5} \to \mathbb{Z}$ mit $t(1) = 1, t(2) = -3, t(3) = t(4) = 0, t(5) = 27$.

- $\{0, 1\}^3 =$
  $\{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,1), (1,0,0),$
  $(0,1,1), (0,1,0), (0,0,1), (0,0,0)\}$.

- Für jede Menge N kann N^2 mit $N \times N$ identifiziert werden.
  (Hier wird das 2-**Tupel** $(x, y) \in N^2$, d.h. die Abbildung $\{1, 2\} \to N$, $1 \mapsto x$, $2 \mapsto y$, identifiziert mit dem **geordneten Paar** $(x, y) \in N \times N$.)

$A \quad B \quad C$

Tupel (Forts.)

A	B	C	$(A \vee (\neg B \rightarrow C)) \wedge A$
1	1	1	
1	1	0	
1	0	1	

Beispiel

$n \in \mathbb{N}$, $A_1, \ldots, A_n$ Variablen für Aussagen (bzw. deren Wahrheitswert):

- Belegung von $A_1, \ldots, A_n$:
  modelliert als Element von $\{0,1\}^n$

- potentielle Wahrheitstafel für $A_1, \ldots, A_n$:

$$\{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$$