# Effiziente Algorithmen (SS2015) Kapitel 4 Lineare Programme 1

Walter Unger

Lehrstuhl für Informatik 1

13:52 Uhr, den 22. November 2018

4 Inhaltsverzeichnis

Algorithmus von Seidel

Dualität

Ganzzahligkeit 000000000

Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWTH

#### Inhalt I

- Einleitung zu LPs

  Beispiele
  - Formen eines LP
  - Geometrische Interpretation
- Algorithmus von Seidel
  Details
  - Algorithmus

- Laufzeit
  - Dualität
  - EinleitungAussagen
- Beispiele
- Ganzzahligkeit
  Einleitung
  - Einleitung
     Unimodularität

Einleitung zu LPs Algorithmus von Seidel Dualität Ganzzahligkeit •00000000000000 4:1 Beispiele 1/17 Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWTH

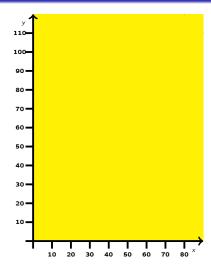
Einleitung zu LPs Algorithmus von Seidel Dualität Ganzzahligkeit •00000000000000 4:1 Beispiele 2/17 Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWTH

**Dualität** 0000000

Walter Unger 22.11.2018 13:52

Ganzzahligkeit 00000000 SS2015 RWTH

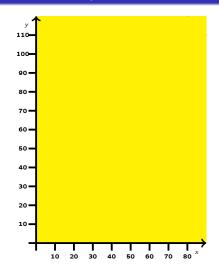
4:1 Beispiele 3/17



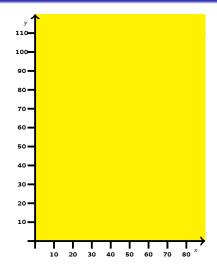
**Dualität** 0000000 Ganzzahligkeit

Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWTH

## Einfaches Beispiel



• Wir betrachten ein System von linearen Ungleichungen.



- Wir betrachten ein System von linearen Ungleichungen.
- Dabei ist eine "Zielfunktion" zu optimieren.

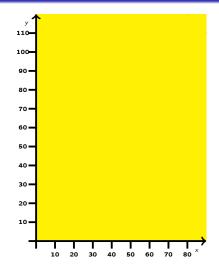
Algorithmus von Seidel

on Seidel Dualität

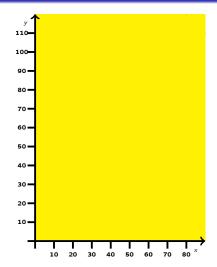
 Dualität
 Ganzzahligkeit

 0000000
 000000000

 Walter Unger 22.11.2018 13:52
 SS2015
 RWTH



- Wir betrachten ein System von linearen Ungleichungen.
- Dabei ist eine "Zielfunktion" zu optimieren.
- Beispiel (Brotrezept):



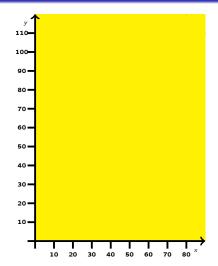
- Wir betrachten ein System von linearen Ungleichungen.
- Dabei ist eine "Zielfunktion" zu optimieren.
- Beispiel (Brotrezept):
  - x kg Weizenmehl

Algorithmus von Seidel

Dualität

Walter Unger 22.11.2018 13:52

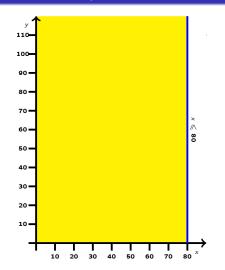
Ganzzahligkeit SS2015 RWIH



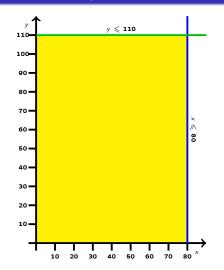
- Wir betrachten ein System von linearen Ungleichungen.
- Dabei ist eine "Zielfunktion" zu optimieren.
- Beispiel (Brotrezept): x kg Weizenmehl

  - y kg Roggenmehl

Walter Unger 22.11.2018 13:52

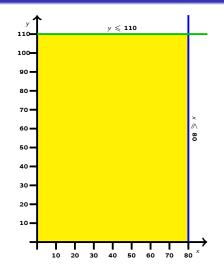


- Wir betrachten ein System von linearen Ungleichungen.
- Dabei ist eine "Zielfunktion" zu optimieren.
- Beispiel (Brotrezept):
  - x kg Weizenmehl
  - y kg Roggenmehl
  - Maximal 80 kg Weizenmehl.

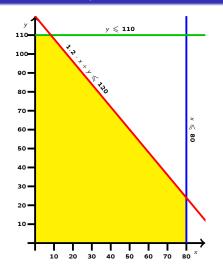


- Wir betrachten ein System von linearen Ungleichungen.
- Dabei ist eine "Zielfunktion" zu optimieren.
- Beispiel (Brotrezept):
  - x kg Weizenmehl
  - y kg Roggenmehl
  - Maximal 80 kg Weizenmehl.
  - Maximal 110 kg Roggenmehl.

Walter Unger 22.11.2018 13:52

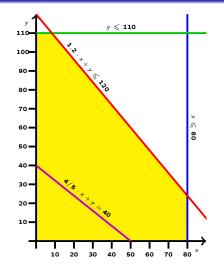


- Wir betrachten ein System von linearen Ungleichungen.
- Dabei ist eine "Zielfunktion" zu optimieren.
- Beispiel (Brotrezept):
  - x kg Weizenmehl
  - y kg Roggenmehl
  - Maximal 80 kg Weizenmehl.
  - Maximal 110 kg Roggenmehl.
  - Mischungsverhältnis:  $1.2 \cdot x + y$ .



- Wir betrachten ein System von linearen Ungleichungen.
- Dabei ist eine "Zielfunktion" zu optimieren.
- Beispiel (Brotrezept):
  - x kg Weizenmehl
  - y kg Roggenmehl
  - Maximal 80 kg Weizenmehl.
  - Maximal 110 kg Roggenmehl.
  - Mischungsverhältnis:  $1.2 \cdot x + y$ .
  - Maximale Brotmenge:

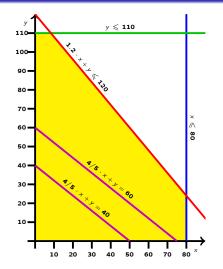
$$1.2 \cdot x + y \leqslant 120.$$



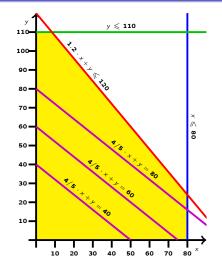
- Wir betrachten ein System von linearen Ungleichungen.
- Dabei ist eine "Zielfunktion" zu optimieren.
- Beispiel (Brotrezept):
  - x kg Weizenmehl
  - y kg Roggenmehl
  - Maximal 80 kg Weizenmehl.
  - Maximal 110 kg Roggenmehl.
  - Mischungsverhältnis:  $1.2 \cdot x + y$ .
  - Maximale Brotmenge:

$$1.2 \cdot x + y \leqslant 120.$$

$$f(x,y) = 4/5 \cdot x + y.$$



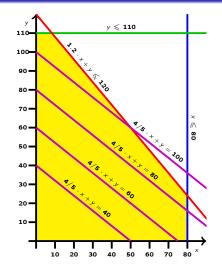
- Wir betrachten ein System von linearen Ungleichungen.
- Dabei ist eine "Zielfunktion" zu optimieren.
- Beispiel (Brotrezept):
  - x kg Weizenmehl
  - y kg Roggenmehl
  - Maximal 80 kg Weizenmehl.
  - Maximal 110 kg Roggenmehl.
  - Mischungsverhältnis:  $1.2 \cdot x + y$ .
  - Maximale Brotmenge:
  - $1.2 \cdot x + y \leqslant 120.$
  - Zu optimieren:  $f(x, y) = 4/5 \cdot x + y.$



- Wir betrachten ein System von linearen Ungleichungen.
- Dabei ist eine "Zielfunktion" zu optimieren.
- Beispiel (Brotrezept):
  - x kg Weizenmehl
  - y kg Roggenmehl
  - Maximal 80 kg Weizenmehl.
  - Maximal 110 kg Roggenmehl.
  - Mischungsverhältnis:  $1.2 \cdot x + y$ .
  - Maximale Brotmenge:
  - $1.2 \cdot x + y \leqslant 120.$

$$f(x,y)=4/5\cdot x+y.$$

Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWIH

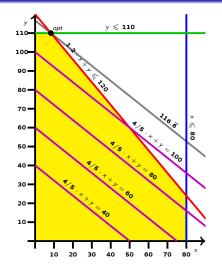


- Wir betrachten ein System von linearen Ungleichungen.
- Dabei ist eine "Zielfunktion" zu optimieren.
- Beispiel (Brotrezept):
  - x kg Weizenmehl
  - y kg Roggenmehl
  - Maximal 80 kg Weizenmehl.
  - Maximal 110 kg Roggenmehl.
  - Mischungsverhältnis:  $1.2 \cdot x + y$ .
  - Maximale Brotmenge:
  - $1.2 \cdot x + y \leqslant 120.$ Zu optimieren:

$$f(x, y) = 4/5 \cdot x + y.$$

Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWIH

#### Beispiele 17/17 Einfaches Beispiel



- Wir betrachten ein System von linearen Ungleichungen.
- Dabei ist eine "Zielfunktion" zu optimieren.
- Beispiel (Brotrezept):
  - x kg Weizenmehl
  - y kg Roggenmehl
  - Maximal 80 kg Weizenmehl.
  - Maximal 110 kg Roggenmehl.
  - Mischungsverhältnis:  $1.2 \cdot x + y$ .
  - Maximale Brotmenge:

$$1.2 \cdot x + y \leqslant 120.$$

$$f(x,y)=4/5\cdot x+y.$$

# Beispiel: Flussproblem

Flussproblem:

Dualität 0000000

00000000 13:52 SS2015 RWTH

Ganzzahligkeit

Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS20

#### Beispiel: Flussproblem

- Flussproblem:
  - Gegeben G = (V, E, s, t, c) mit  $c : E \mapsto \mathbb{N}$ .

Ganzzahligkeit Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWTH

#### Beispiel: Flussproblem

Einleitung zu LPs

- Flussproblem:
  - Gegeben G = (V, E, s, t, c) mit  $c : E \mapsto \mathbb{N}$ .
  - Maximiere den Fluss.

Ganzzahligkeit

# Beispiel: Flussproblem

Einleitung zu LPs

000000000000000 4:2 Beispiele 4/10

- Flussproblem:
  - Gegeben G = (V, E, s, t, c) mit  $c : E \mapsto \mathbb{N}$ .
  - Maximiere den Fluss.
- als lineares Programm:

## Beispiel: Flussproblem

Einleitung zu LPs

- Flussproblem:
  - Gegeben G = (V, E, s, t, c) mit  $c : E \mapsto \mathbb{N}$ .
  - Maximiere den Fluss.
- als lineares Programm:
  - Variablen  $x_e$  für  $e \in E$ .

## Beispiel: Flussproblem

Einleitung zu LPs

- Flussproblem:
  - Gegeben G = (V, E, s, t, c) mit  $c : E \mapsto \mathbb{N}$ .
  - Maximiere den Fluss.
- als lineares Programm:
  - Variablen  $x_e$  für  $e \in E$ .
  - Maximiere

$$\sum_{e \in N_{out}(s) \in E} x_e.$$

Walter Unger 22.11.2018 13:52

Einleitung zu LPs

# Beispiel: Flussproblem

- Flussproblem:
  - Gegeben G = (V, E, s, t, c) mit  $c : E \mapsto \mathbb{N}$ . Maximiere den Fluss.
- als lineares Programm:
  - Variablen  $x_e$  für  $e \in E$ .
  - Maximiere

$$\sum_{e \in N_{out}(s) \in E} x_e.$$

unter Einhaltung der Bedingungen:

### Beispiel: Flussproblem

Einleitung zu LPs

000000000000000 4:2 Beispiele 8/10

- Flussproblem:
  - Gegeben G = (V, E, s, t, c) mit  $c : E \mapsto \mathbb{N}$ .
  - Maximiere den Fluss.
- als lineares Programm:
  - Variablen  $x_e$  für  $e \in E$ .
  - Maximiere

$$\sum_{e \in N_{out}(s) \in E} x_e.$$

- unter Einhaltung der Bedingungen:
  - Für jeden Knoten  $v \in V \setminus \{s, t\}$ :  $\sum_{e \in N_{in}(v)} x_e = \sum_{e \in N_{out}(v)} x_e$ ,

Einleitung zu LPs

000000000000000

### Beispiel: Flussproblem

- Flussproblem:
  - Gegeben G = (V, E, s, t, c) mit  $c : E \mapsto \mathbb{N}$ .
  - Maximiere den Fluss.
- als lineares Programm:
  - Variablen  $x_e$  für  $e \in E$ .
  - Maximiere

$$\sum_{e \in N_{out}(s) \in E} x_e.$$

- unter Einhaltung der Bedingungen:
  - Für jeden Knoten  $v \in V \setminus \{s, t\}$ :  $\sum_{e \in N_{in}(v)} x_e = \sum_{e \in N_{out}(v)} x_e$ ,
  - $\forall e \in E : x_e \leqslant c_e$ , und

Einleitung zu LPs

### Beispiel: Flussproblem

- Flussproblem:
  - Gegeben G = (V, E, s, t, c) mit  $c : E \mapsto \mathbb{N}$ .
  - Maximiere den Fluss.
- als lineares Programm:
  - Variablen  $x_e$  für  $e \in E$ .
  - Maximiere

$$\sum_{e \in N_{out}(s) \in E} x_e.$$

- unter Einhaltung der Bedingungen:
  - Für jeden Knoten  $v \in V \setminus \{s, t\}$ :  $\sum_{e \in N_{in}(v)} x_e = \sum_{e \in N_{out}(v)} x_e$ ,
  - $\forall e \in E : x_e \leqslant c_e$ , und
  - $\forall e \in E : x_e \geqslant 0$ .

Relaxiertes Rucksackproblem:

- Relaxiertes Rucksackproblem:
  - $\bullet$  gegeben d teilbare Objekte mit Gewichten  $g_i$  und

- Relaxiertes Rucksackproblem:
  - ullet gegeben d teilbare Objekte mit Gewichten  $g_i$  und
  - ullet die Gewichtsschranke G des Rucksacks.

Einleitung zu LPs

- Relaxiertes Rucksackproblem:
  - gegeben d teilbare Objekte mit Gewichten gi und
  - die Gewichtsschranke G des Rucksacks.
  - Und  $v_i$  sei der Nutzen für  $1 \leqslant i \leqslant d$ .

- Relaxiertes Rucksackproblem:
  - ullet gegeben d teilbare Objekte mit Gewichten  $g_i$  und
  - die Gewichtsschranke G des Rucksacks.
  - Und  $v_i$  sei der Nutzen für  $1 \leqslant i \leqslant d$ .
  - Sei  $x_i$  der Anteil von Objekt i.

- Relaxiertes Rucksackproblem:
  - ullet gegeben d teilbare Objekte mit Gewichten  $g_i$  und
  - die Gewichtsschranke G des Rucksacks.
  - Und  $v_i$  sei der Nutzen für  $1 \le i \le d$ .
  - Sei  $x_i$  der Anteil von Objekt i.
  - Fülle den Rucksack. Dabei soll der Nutzen maximal sein.

- Relaxiertes Rucksackproblem:
  - ullet gegeben d teilbare Objekte mit Gewichten  $g_i$  und
  - ullet die Gewichtsschranke G des Rucksacks.
  - Und  $v_i$  sei der Nutzen für  $1 \le i \le d$ . • Sei v. der Anteil von Obiekt i
  - Sei  $x_i$  der Anteil von Objekt i.
  - Fülle den Rucksack. Dabei soll der Nutzen maximal sein.
- Als lineares Programm:

Walter Unger 22.11.2018 13:52

#### Beispiel: Relaxiertes Rucksackproblem

Einleitung zu LPs

- Relaxiertes Rucksackproblem:
  - gegeben d teilbare Objekte mit Gewichten gi und
  - die Gewichtsschranke G des Rucksacks.
  - Und  $v_i$  sei der Nutzen für  $1 \leqslant i \leqslant d$ .
  - Sei x<sub>i</sub> der Anteil von Objekt i.
  - Fülle den Rucksack. Dabei soll der Nutzen maximal sein.
- Als lineares Programm:
  - Maximiere

$$\sum_{i=1}^{d} v_i \cdot x_i$$

Dualität

Ganzzahligkeit

Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWTH

## Beispiel: Relaxiertes Rucksackproblem

Einleitung zu LPs

000000000000000 4:3 Beispiele 9/12

- Relaxiertes Rucksackproblem:
  - gegeben d teilbare Objekte mit Gewichten gi und
  - die Gewichtsschranke G des Rucksacks
  - Und  $v_i$  sei der Nutzen für  $1 \leqslant i \leqslant d$ .
  - Sei x<sub>i</sub> der Anteil von Objekt i.
  - Fülle den Rucksack. Dabei soll der Nutzen maximal sein.
- Als lineares Programm:
  - Maximiere

$$\sum_{i=1}^d v_i \cdot x_i.$$

unter den Nebenbedingungen:

## Beispiel: Relaxiertes Rucksackproblem

- Relaxiertes Rucksackproblem:
  - gegeben d teilbare Objekte mit Gewichten gi und
  - die Gewichtsschranke G des Rucksacks
  - Und  $v_i$  sei der Nutzen für  $1 \le i \le d$ .
  - Sei x<sub>i</sub> der Anteil von Objekt i.
  - Fülle den Rucksack. Dabei soll der Nutzen maximal sein.
- Als lineares Programm:
  - Maximiere

$$\sum_{i=1}^{d} v_i \cdot x_i$$

- unter den Nebenbedingungen:
  - $\sum_{i=1}^d g_i \cdot x_i \leqslant G$ ,

## Beispiel: Relaxiertes Rucksackproblem

Einleitung zu LPs

000000000000000 4:3 Beispiele 11/12

- Relaxiertes Rucksackproblem:
  - gegeben d teilbare Objekte mit Gewichten gi und
  - die Gewichtsschranke G des Rucksacks
  - Und  $v_i$  sei der Nutzen für  $1 \le i \le d$ .
  - Sei x<sub>i</sub> der Anteil von Objekt i.
  - Fülle den Rucksack, Dabei soll der Nutzen maximal sein.
- Als lineares Programm:
  - Maximiere

$$\sum_{i=1}^{d} v_i \cdot x_i.$$

- unter den Nebenbedingungen:

  - $\sum_{i=1}^{d} g_i \cdot x_i \leqslant G$ ,  $\forall i : 1 \leqslant i \leqslant d : x_i \leqslant 1$ , und

Walter Unger 22.11.2018 13:52

## Beispiel: Relaxiertes Rucksackproblem

Einleitung zu LPs

000000000000000 4:3 Beispiele 12/12

- Relaxiertes Rucksackproblem:
  - gegeben d teilbare Objekte mit Gewichten gi und
  - die Gewichtsschranke G des Rucksacks
  - Und  $v_i$  sei der Nutzen für  $1 \le i \le d$ .
  - Sei x<sub>i</sub> der Anteil von Objekt i.
  - Fülle den Rucksack, Dabei soll der Nutzen maximal sein.
- Als lineares Programm:
  - Maximiere

$$\sum_{i=1}^{d} v_i \cdot x_i.$$

- unter den Nebenbedingungen:
  - $\sum_{i=1}^d g_i \cdot x_i \leqslant G$ ,
  - $\forall i : 1 \leq i \leq d : x_i \leq 1$ , und
  - $\forall i : 1 \leq i \leq d : x_i \geq 0$ .

 Routing und Wellenlängenzuweisung: bestimme die Wellenlängen in einem optischen Netzwerk. In dem Netzwerk gibt es Kommunikationsanfragen für Paare von Knoten.

- Routing und Wellenlängenzuweisung: bestimme die Wellenlängen in einem optischen Netzwerk. In dem Netzwerk gibt es Kommunikationsanfragen für Paare von Knoten.
  - N<sub>E</sub> Endknoten.

- Routing und Wellenlängenzuweisung: bestimme die Wellenlängen in einem optischen Netzwerk. In dem Netzwerk gibt es Kommunikationsanfragen für Paare von Knoten.
  - N<sub>E</sub> Endknoten.
  - N<sub>R</sub> Router mit Konverter.

- Routing und Wellenlängenzuweisung: bestimme die Wellenlängen in einem optischen Netzwerk. In dem Netzwerk gibt es Kommunikationsanfragen für Paare von Knoten.
  - N<sub>E</sub> Endknoten.
  - N<sub>R</sub> Router mit Konverter.
  - $\bullet \ n = N_E + N_R.$

Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 **RWTH** 

Ganzzahligkeit

- Routing und Wellenlängenzuweisung: bestimme die Wellenlängen in einem optischen Netzwerk. In dem Netzwerk gibt es Kommunikationsanfragen für Paare von Knoten.
  - N<sub>E</sub> Endknoten.
  - N<sub>R</sub> Router mit Konverter.
  - $n = N_E + N_R$ .
  - Namen der Knoten:  $N_i$   $(1 \le i \le n)$ .

Dualität

Ganzzahligkeit Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWTH

Beispiel: Routing und Wellenlängenzuweisung

- Routing und Wellenlängenzuweisung: bestimme die Wellenlängen in einem optischen Netzwerk. In dem Netzwerk gibt es Kommunikationsanfragen für Paare von Knoten.
  - N<sub>F</sub> Endknoten.

Einleitung zu LPs

4:4 Beispiele 6/12

- N<sub>R</sub> Router mit Konverter.
- $n = N_F + N_R$ .
- Namen der Knoten:  $N_i$   $(1 \le i \le n)$ .
- m Anzahl der Lichtwege.

- Routing und Wellenlängenzuweisung: bestimme die Wellenlängen in einem optischen Netzwerk. In dem Netzwerk gibt es Kommunikationsanfragen für Paare von Knoten.
  - N<sub>E</sub> Endknoten.

4:4 Beispiele 7/12

- N<sub>R</sub> Router mit Konverter.
- $n = N_F + N_R$ .
- Namen der Knoten:  $N_i$   $(1 \le i \le n)$ .
- m Anzahl der Lichtwege.
- $E: (i, j) \in E \iff \text{Kante von } N_i \text{ nach } N_i$ .

- Routing und Wellenlängenzuweisung: bestimme die Wellenlängen in einem optischen Netzwerk. In dem Netzwerk gibt es Kommunikationsanfragen für Paare von Knoten.
  - N<sub>F</sub> Endknoten.

4:4 Beispiele 8/12

- N<sub>R</sub> Router mit Konverter.
- $n = N_F + N_R$ .
- Namen der Knoten:  $N_i$   $(1 \le i \le n)$ .
- m Anzahl der Lichtwege.
- $E: (i, j) \in E \iff \text{Kante von } N_i \text{ nach } N_i$ .
- src(k): ist Startknoten der k-ten Anfrage.

- Routing und Wellenlängenzuweisung: bestimme die Wellenlängen in einem optischen Netzwerk. In dem Netzwerk gibt es Kommunikationsanfragen für Paare von Knoten.
  - N<sub>F</sub> Endknoten.
  - N<sub>R</sub> Router mit Konverter.
  - $n = N_F + N_R$ .
  - Namen der Knoten:  $N_i$   $(1 \le i \le n)$ .
  - m Anzahl der Lichtwege.
  - $E: (i, j) \in E \iff \text{Kante von } N_i \text{ nach } N_i$ .
  - src(k): ist Startknoten der k-ten Anfrage.
  - dst(k): ist Endknoten der k-ten Anfrage.

- Routing und Wellenlängenzuweisung: bestimme die Wellenlängen in einem optischen Netzwerk. In dem Netzwerk gibt es Kommunikationsanfragen für Paare von Knoten.
  - N<sub>F</sub> Endknoten.
  - N<sub>R</sub> Router mit Konverter.
  - $n = N_F + N_R$ .
  - Namen der Knoten:  $N_i$   $(1 \le i \le n)$ .
  - m Anzahl der Lichtwege.
  - $E: (i, j) \in E \iff \text{Kante von } N_i \text{ nach } N_i$ .
  - src(k): ist Startknoten der k-ten Anfrage.
  - dst(k): ist Endknoten der k-ten Anfrage.
  - $\Omega_{max}$ : Congestion des Netzwerks.

- Routing und Wellenlängenzuweisung: bestimme die Wellenlängen in einem optischen Netzwerk. In dem Netzwerk gibt es Kommunikationsanfragen für Paare von Knoten.
  - N<sub>F</sub> Endknoten.
  - N<sub>R</sub> Router mit Konverter.
  - $n = N_F + N_R$ .
  - Namen der Knoten:  $N_i$   $(1 \le i \le n)$ .
  - m Anzahl der Lichtwege.
  - $E: (i, j) \in E \iff \text{Kante von } N_i \text{ nach } N_i$ .
  - src(k): ist Startknoten der k-ten Anfrage.
  - dst(k): ist Endknoten der k-ten Anfrage.
  - Ω<sub>max</sub>: Congestion des Netzwerks.
  - $X_{ii}^k \in \{0,1\}$  mit:

$$X_{ij}^k = \left\{ egin{array}{ll} 1 & ext{der $k$-te Weg nutzt Kante } (i,j) \in E \\ 0 & ext{sonst} \end{array} 
ight.$$

#### Beispiel: Routing und Wellenlängenzuweisung

- Routing und Wellenlängenzuweisung: bestimme die Wellenlängen in einem optischen Netzwerk. In dem Netzwerk gibt es Kommunikationsanfragen für Paare von Knoten.
  - N<sub>F</sub> Endknoten.
  - N<sub>R</sub> Router mit Konverter.
  - $n = N_F + N_R$ .
  - Namen der Knoten:  $N_i$   $(1 \le i \le n)$ .
  - m Anzahl der Lichtwege.
  - $E: (i, j) \in E \iff \text{Kante von } N_i \text{ nach } N_i$ .
  - src(k): ist Startknoten der k-ten Anfrage.
  - dst(k): ist Endknoten der k-ten Anfrage.
  - Ω<sub>max</sub>: Congestion des Netzwerks.
  - $X_{ii}^k \in \{0,1\}$  mit:

$$X_{ij}^{k} = \begin{cases} 1 & \text{der } k\text{-te Weg nutzt Kante } (i,j) \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

• Wegen  $X_{ii}^k \in \{0,1\}$  ist dies hier ein "Integer Linerar Programm".

Dualität

Ganzzahligkeit

Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWTH

## Routing und Wellenlängenzuweisung als ILP

• Minimiere Zielfunktion  $\Omega_{max}$ .

$$src(k) \longleftrightarrow dst(k) : (\mathbf{1} \leqslant k \leqslant m)$$
  
 $X_{ii}^k : k$ -te Weg nutzt Kante  $(i, j)$ 

 $X_{ii}^{k}$ : k-te Weg nutzt Kante (i, j)

# Routing und Wellenlängenzuweisung als ILP

• Minimiere Zielfunktion  $\Omega_{max}$ .

Einleitung zu LPs

000000000000000 4:5 Beispiele 2/9

•  $\sum_{k=1}^{m} X_{ij}^{k} \leqslant \Omega_{max}, \forall (i,j) \in E$ .

 $rc(k) \longleftrightarrow dst(k) : (\mathbf{1} \leqslant k \leqslant m)$  $X_{ii}^{k}: k$ -te Weg nutzt Kante (i, j)

# Routing und Wellenlängenzuweisung als ILP

Minimiere Zielfunktion Ω<sub>max</sub>.

Einleitung zu LPs

0000000000000000 4:5 Beispiele 3/9

- $\sum_{k=1}^{m} X_{ii}^{k} \leq \Omega_{max}, \forall (i,j) \in E$ .
- Für alle  $k: 1 \le k \le m$  und alle  $i: 1 \le i \le n$ :

$$\sum_{j:(i,j)\in E} X_{ij}^k - \sum_{j:(j,i)\in E} X_{ji}^k = \begin{cases} 1 & \text{falls } src(k) = i \\ -1 & \text{falls } dst(k) = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

 $n = N_E + N_R$   $src(k) \longleftrightarrow dst(k) : (\mathbf{1} \leqslant k \leqslant m)$  $X_{ii}^{k}: k$ -te Weg nutzt Kante (i, j)

## Routing und Wellenlängenzuweisung als ILP

Minimiere Zielfunktion Ω<sub>max</sub>.

Einleitung zu LPs

0000000000000000 4:5 Beispiele 4/9

- $\sum_{k=1}^{m} X_{ii}^{k} \leq \Omega_{max}, \forall (i,j) \in E$ .
- Für alle  $k: 1 \le k \le m$  und alle  $i: 1 \le i \le n$ :

$$\sum_{j:(i,j)\in\mathcal{E}} X_{ij}^k - \sum_{j:(j,i)\in\mathcal{E}} X_{ji}^k = \begin{cases} 1 & \text{falls } src(k) = i \\ -1 & \text{falls } dst(k) = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

• Dies ist eine korrekte Formulierung des Routen- und Wellenlängenzuweisungsproblems als ILP.

 $n = N_E + N_R$   $src(k) \longleftrightarrow dst(k) : (\mathbf{1} \leqslant k \leqslant m)$  $X_{ii}^{k}: k$ -te Weg nutzt Kante (i, j)

Walter Unger 22.11.2018 13:52

## Routing und Wellenlängenzuweisung als ILP

- Minimiere Zielfunktion Ω<sub>max</sub>.
- $\sum_{k=1}^{m} X_{ii}^{k} \leq \Omega_{max}, \forall (i,j) \in E$ .
- Für alle  $k: 1 \le k \le m$  und alle  $i: 1 \le i \le n$ :

$$\sum_{j:(i,j)\in E} X_{ij}^k - \sum_{j:(j,i)\in E} X_{ji}^k = \begin{cases} 1 & \text{falls } src(k) = i \\ -1 & \text{falls } dst(k) = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Dies ist eine korrekte Formulierung des Routen- und Wellenlängenzuweisungsproblems als ILP.
- Komplexität:

Einleitung zu LPs

0000000000000000 4:5 Beispiele 5/9

 $n = N_E + N_R$   $src(k) \longleftrightarrow dst(k) : (\mathbf{1} \leqslant k \leqslant m)$  $X_{ij}^{k}: k$ -te Weg nutzt Kante (i, j)

## Routing und Wellenlängenzuweisung als ILP

- Minimiere Zielfunktion Ω<sub>max</sub>.
- $\sum_{k=1}^{m} X_{ii}^{k} \leq \Omega_{max}, \forall (i,j) \in E$ .
- Für alle  $k: 1 \le k \le m$  und alle  $i: 1 \le i \le n$ :

$$\sum_{j:(i,j)\in\mathcal{E}} X_{ij}^k - \sum_{j:(j,i)\in\mathcal{E}} X_{ji}^k = \begin{cases} 1 & \text{falls } src(k) = i \\ -1 & \text{falls } dst(k) = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Dies ist eine korrekte Formulierung des Routen- und Wellenlängenzuweisungsproblems als ILP.
- Komplexität:

Einleitung zu LPs

0000000000000000 Beispiele 6/9

m · |E| Variablen der Form X<sup>k</sup><sub>ii</sub>.

Dualität

# Routing und Wellenlängenzuweisung als ILP

 $n = N_E + N_R$   $src(k) \longleftrightarrow dst(k) : (\mathbf{1} \leqslant k \leqslant m)$  $X_{ii}^{k}$ : k-te Weg nutzt Kante (i, j)

- Minimiere Zielfunktion Ω<sub>max</sub>.
- $\sum_{k=1}^{m} X_{ii}^{k} \leq \Omega_{max}, \forall (i,j) \in E$ .
- Für alle  $k: 1 \le k \le m$  und alle  $i: 1 \le i \le n$ :

$$\sum_{j:(i,j)\in\mathcal{E}} X_{ij}^k - \sum_{j:(j,i)\in\mathcal{E}} X_{ji}^k = \begin{cases} 1 & \text{falls } src(k) = i \\ -1 & \text{falls } dst(k) = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Dies ist eine korrekte Formulierung des Routen- und Wellenlängenzuweisungsproblems als ILP.
- Komplexität:

Einleitung zu LPs

0000000000000000 4:5 Beispiele 7/9

- $m \cdot |E|$  Variablen der Form  $X_{ii}^k$ .
- Eine Variable Ω<sub>max</sub>.

 $n = N_E + N_R$   $src(k) \longleftrightarrow dst(k) : (\mathbf{1} \leqslant k \leqslant m)$  $X_{ii}^{k}$ : k-te Weg nutzt Kante (i, j)

Walter Unger 22.11.2018 13:52

## Routing und Wellenlängenzuweisung als ILP

- Minimiere Zielfunktion Ω<sub>max</sub>.
- $\sum_{k=1}^{m} X_{ii}^{k} \leq \Omega_{max}, \forall (i,j) \in E$ .
- Für alle  $k: 1 \le k \le m$  und alle  $i: 1 \le i \le n$ :

$$\sum_{j:(i,j)\in E} X_{ij}^k - \sum_{j:(j,i)\in E} X_{ji}^k = \begin{cases} 1 & \text{falls } src(k) = i \\ -1 & \text{falls } dst(k) = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Dies ist eine korrekte Formulierung des Routen- und Wellenlängenzuweisungsproblems als ILP.
- Komplexität:

Einleitung zu LPs

0000000000000000 4:5 Beispiele 8/9

- m · |E| Variablen der Form X<sup>k</sup><sub>ii</sub>.
- Eine Variable  $\Omega_{max}$ .
- Nebenbedingungen:  $|E| + n \cdot m$ .

 $n = N_E + N_R$   $src(k) \longleftrightarrow dst(k) : (\mathbf{1} \leqslant k \leqslant m)$  $X_{ii}^{k}: k$ -te Weg nutzt Kante (i, j)

## Routing und Wellenlängenzuweisung als ILP

- Minimiere Zielfunktion Ω<sub>max</sub>.
- $\sum_{k=1}^{m} X_{ii}^{k} \leq \Omega_{max}, \forall (i,j) \in E$ .
- Für alle  $k: 1 \le k \le m$  und alle  $i: 1 \le i \le n$ :

$$\sum_{j:(i,j)\in\mathcal{E}} X_{ij}^k - \sum_{j:(j,i)\in\mathcal{E}} X_{ji}^k = \begin{cases} 1 & \text{falls } src(k) = i \\ -1 & \text{falls } dst(k) = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Dies ist eine korrekte Formulierung des Routen- und Wellenlängenzuweisungsproblems als ILP.
- Komplexität:

Einleitung zu LPs

00000000000000000 4:5 Beispiele 9/9

- m · |E| Variablen der Form X<sup>k</sup><sub>ii</sub>.
- Eine Variable  $\Omega_{max}$ .
- Nebenbedingungen:  $|E| + n \cdot m$ .
- Schon f
  ür relativ kleine Netzwerke zu aufwendig.

• N<sub>E</sub> Endknoten; N<sub>R</sub> Router ohne Konverter.

Einleitung zu LPs

000000000000000 4:6 Beispiele 2/9

- N<sub>E</sub> Endknoten; N<sub>R</sub> Router ohne Konverter.
- $n = N_E + N_R$ ; Namen der Knoten:  $N_i$   $(1 \le i \le n)$ .

000000000000000 4:6 Beispiele 3/9

- N<sub>E</sub> Endknoten; N<sub>R</sub> Router ohne Konverter.
  - $n = N_E + N_R$ ; Namen der Knoten:  $N_i$   $(1 \le i \le n)$ .
  - m Anzahl der Lichtwege; n<sub>ch</sub> Anzahl der Wellenlängen.

Einleitung zu LPs

00000000000000000 4:6 Beispiele 4/9

- N<sub>E</sub> Endknoten; N<sub>R</sub> Router ohne Konverter.
- $n = N_E + N_R$ ; Namen der Knoten:  $N_i$   $(1 \le i \le n)$ .
- m Anzahl der Lichtwege; n<sub>ch</sub> Anzahl der Wellenlängen.
- $E: (i, j) \in E \iff \text{Kante von } N_i \text{ nach } N_i$ .

Einleitung zu LPs

00000000000000000 4:6 Beispiele 5/9

- N<sub>E</sub> Endknoten; N<sub>R</sub> Router ohne Konverter.
- $n = N_E + N_R$ ; Namen der Knoten:  $N_i$   $(1 \le i \le n)$ .
- m Anzahl der Lichtwege; n<sub>ch</sub> Anzahl der Wellenlängen.
- $E: (i, j) \in E \iff \text{Kante von } N_i \text{ nach } N_j$ .
- src(k): ist Startknoten der k-ten Anfrage.

Einleitung zu LPs

00000000000000000 4:6 Beispiele 6/9

- N<sub>E</sub> Endknoten; N<sub>R</sub> Router ohne Konverter.
- $n = N_E + N_R$ ; Namen der Knoten:  $N_i$   $(1 \le i \le n)$ .
- m Anzahl der Lichtwege; n<sub>ch</sub> Anzahl der Wellenlängen.
- $E: (i, j) \in E \iff \text{Kante von } N_i \text{ nach } N_i$ .
- src(k): ist Startknoten der k-ten Anfrage.
- dst(k): ist Endknoten der k-ten Anfrage.

Dualität

Einleitung zu LPs

## Routen- und Wellenlängenzuweisung

- N<sub>E</sub> Endknoten; N<sub>R</sub> Router ohne Konverter.
- $n = N_E + N_R$ ; Namen der Knoten:  $N_i$   $(1 \le i \le n)$ .
- m Anzahl der Lichtwege; n<sub>ch</sub> Anzahl der Wellenlängen.
- $E: (i, j) \in E \iff \text{Kante von } N_i \text{ nach } N_i$ .
- src(k): ist Startknoten der k-ten Anfrage.
- dst(k): ist Endknoten der k-ten Anfrage.
- $\Omega_{max}$ : Congestion des Netzwerks.

- N<sub>F</sub> Endknoten: N<sub>R</sub> Router ohne Konverter.
- $n = N_E + N_R$ ; Namen der Knoten:  $N_i$  ( $1 \le i \le n$ ).
- m Anzahl der Lichtwege; n<sub>ch</sub> Anzahl der Wellenlängen.
- $E: (i, j) \in E \iff \text{Kante von } N_i \text{ nach } N_i$ .
- src(k): ist Startknoten der k-ten Anfrage.
- dst(k): ist Endknoten der k-ten Anfrage.
- $\Omega_{max}$ : Congestion des Netzwerks.
- $X_{ii}^{wk} \in \{0,1\}$  mit:

$$X_{ij}^{wk} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{der } k\text{-te Weg nutzt } (i,j) \in E \text{ und W.länge } w \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right.$$

- N<sub>F</sub> Endknoten: N<sub>R</sub> Router ohne Konverter.
- $n = N_E + N_R$ ; Namen der Knoten:  $N_i$   $(1 \le i \le n)$ .
- m Anzahl der Lichtwege; n<sub>ch</sub> Anzahl der Wellenlängen.
- $E: (i, j) \in E \iff \text{Kante von } N_i \text{ nach } N_i$ .
- src(k): ist Startknoten der k-ten Anfrage.
- dst(k): ist Endknoten der k-ten Anfrage.
- $\Omega_{max}$ : Congestion des Netzwerks.
- $X_{ii}^{wk} \in \{0,1\}$  mit:

$$X_{ij}^{wk} = \left\{ egin{array}{ll} 1 & \det k ext{-te Weg nutzt }(i,j) \in E \ ext{und W.länge } w \ 0 & ext{sonst} \end{array} 
ight.$$

•  $Y_w^k \in \{0, 1\}$  mit:

$$Y_w^k = \begin{cases} 1 & \text{der } k\text{-te Weg nutzt Wellenlänge } w \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

 $\sum_{n_{ch}}^{n_{ch}}\sum_{j}^{m}X_{ij}^{wk}\leqslant\Omega_{max}, orall (i,j)\in E$ 

Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWTH

ILP:

• Minimiere Zielfunktion  $\Omega_{max}$ :

$$src(k) \longleftrightarrow dst(k) : (\mathbf{1} \leqslant k \leqslant m)$$
  
 $X_{ij}^k : k$ -te Weg nutzt Kante  $(i,j)$   
 $Y_{w}^k : k$ -te Weg nutzt Wellenlänge  $w$ 

Ganzzahligkeit

• Minimiere Zielfunktion  $\Omega_{max}$ :

 $src(k) \longleftrightarrow dst(k) : (\mathbf{1} \leqslant \overline{k} \leqslant \overline{m})$  $X_{ij}^{k}: k$ -te Weg nutzt Kante (i, j) $Y_{W}^{k}: k$ -te Weg nutzt Wellenlänge w

$$\sum_{i=1}^{n_{ch}}\sum_{j=1}^{m}X_{ij}^{wk}\leqslant\Omega_{max},orall(i,j)\in E$$

• Für alle  $k, w : 1 \le k \le m, 1 \le w \le n_{ch}$  und alle  $i : 1 \le i \le n$ :

$$\sum_{j:(i,j)\in E} X_{ij}^{wk} - \sum_{j:(j,i)\in E} X_{ji}^{wk} = \begin{cases} Y_w^k & \text{falls } src(k) = i \\ -Y_w^k & \text{falls } dst(k) = i \end{cases}$$

$$0 & \text{sonst}$$

Walter Unger 22.11.2018 13:52

ILP:

Einleitung zu LPs

• Minimiere Zielfunktion  $\Omega_{max}$ :

 $src(k) \longleftrightarrow dst(k) : (\mathbf{1} \leqslant \overline{k} \leqslant \overline{m})$  $X_{ij}^k$  : k-te Weg nutzt Kante (i, j) $Y_{w}^{k}$ : k-te Weg nutzt Wellenlänge w

$$\sum_{i=1}^{n_{ch}}\sum_{j=1}^{m}X_{ij}^{wk}\leqslant\Omega_{max},orall(i,j)\in E$$

• Für alle  $k, w : 1 \le k \le m, 1 \le w \le n_{ch}$  und alle  $i : 1 \le i \le n$ :

$$\sum_{j:(i,j)\in E} X_{ij}^{wk} - \sum_{j:(j,i)\in E} X_{ji}^{wk} = \begin{cases} Y_w^k & \text{falls } src(k) = i \\ -Y_w^k & \text{falls } dst(k) = i \end{cases}$$

$$0 & \text{sonst}$$

• Für alle  $k: 1 \leq k \leq m$ :

$$\sum_{n_{ch}}^{n_{ch}} Y_w^k = 1$$

Walter Unger 22.11.2018 13:52

Einleitung zu LPs

 $src(k) \longleftrightarrow dst(k) : (\mathbf{1} \leqslant \overline{k} \leqslant \overline{m})$  $X_{ij}^{k}$ : k-te Weg nutzt Kante (i, j)

 $Y_w^k$ : k-te Weg nutzt Wellenlänge w

$$\sum_{i=1}^{n_{ch}}\sum_{j=1}^{m}X_{ij}^{wk}\leqslant\Omega_{max},orall(i,j)\in E$$

• Für alle  $k, w : 1 \le k \le m, 1 \le w \le n_{ch}$  und alle  $i : 1 \le i \le n$ :

$$\sum_{j:(i,j)\in\mathcal{E}} X_{ij}^{wk} - \sum_{j:(j,i)\in\mathcal{E}} X_{ji}^{wk} = \begin{cases} Y_w^k & \text{falls } src(k) = i \\ -Y_w^k & \text{falls } dst(k) = i \end{cases}$$

$$0 \quad \text{sonst}$$

• Für alle  $k: 1 \leq k \leq m$ :

$$\sum_{w=1}^{n_{ch}} Y_w^k = 1$$

• Für alle  $w: 1 \leq w \leq n_{ch}$  und alle  $(i, j) \in E$ :

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij}^{wk} \leqslant 1$$

# Kanonische Form eines LP

Einleitung zu LPs

000000000000000 4:8 Formen eines LP 1/15

• Ein LP ist in kanonischer Form, falls:

Dualität

Ganzzahligkeit

Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWTH

- Ein LP ist in kanonischer Form, falls:
  - Es gibt d Variablen  $x_i \in \mathbb{R} \ (1 \leqslant i \leqslant d)$ ,

Dualität

Ganzzahligkeit Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWTH

- Ein LP ist in kanonischer Form, falls:
  - Es gibt d Variablen  $x_i \in \mathbb{R} \ (1 \leqslant i \leqslant d)$ ,
  - Werte  $c_j \in \mathbb{R}$  für  $1 \leqslant j \leqslant d$ ,

- Ein LP ist in kanonischer Form, falls:
  - Es gibt d Variablen  $x_i \in \mathbb{R} \ (1 \leqslant i \leqslant d)$ ,
  - Werte  $c_i \in \mathbb{R}$  für  $1 \leqslant j \leqslant d$ ,
  - Werte  $\vec{b_i} \in \mathbb{R}$  für  $1 \leqslant i \leqslant m$  und

## Kanonische Form eines LP

Einleitung zu LPs

000000000000000 4:8 Formen eines LP 5/15

- Ein LP ist in kanonischer Form, falls:
  - Es gibt d Variablen  $x_i \in \mathbb{R} \ (1 \leqslant i \leqslant d)$ ,
  - Werte  $c_i \in \mathbb{R}$  für  $1 \leq j \leq d$ ,
  - Werte  $b_i \in \mathbb{R}$  für  $1 \leq i \leq m$  und
  - Werte  $a_{i,j} \in \mathbb{R}$  für  $1 \leq j \leq d$  und  $1 \leq i \leq m$ .

- Ein LP ist in kanonischer Form, falls:
  - Es gibt d Variablen  $x_i \in \mathbb{R} \ (1 \leq i \leq d)$ ,
  - Werte  $c_i \in \mathbb{R}$  für  $1 \leq j \leq d$ ,
  - Werte  $\check{b_i} \in \mathbb{R}$  für  $1 \leqslant i \leqslant m$  und
  - Werte  $a_{i,j} \in \mathbb{R}$  für  $1 \leq j \leq d$  und  $1 \leq i \leq m$ .
  - Gesucht ist eine Belegung der Variablen  $x_i \in \mathbb{R}$  mit:

0000000000000000

- Ein LP ist in kanonischer Form, falls:
  - Es gibt d Variablen  $x_i \in \mathbb{R} \ (1 \leq i \leq d)$ ,
  - Werte  $c_j \in \mathbb{R}$  für  $1 \leqslant j \leqslant d$ ,
  - Werte  $b_i \in \mathbb{R}$  für  $1 \leq i \leq m$  und
  - Werte  $a_{i,j} \in \mathbb{R}$  für  $1 \leq j \leq d$  und  $1 \leq i \leq m$ .
  - Gesucht ist eine Belegung der Variablen  $x_i \in \mathbb{R}$  mit:
    - Maximiere Zielfunktion  $\sum_{i=1}^{d} c_i \cdot x_i$

Dualität

Einleitung zu LPs

00000000000000000

- Ein LP ist in kanonischer Form, falls:
  - Es gibt d Variablen  $x_i \in \mathbb{R} \ (1 \leq i \leq d)$ ,
  - Werte  $c_i \in \mathbb{R}$  für  $1 \leq j \leq d$ ,
  - Werte  $b_i \in \mathbb{R}$  für  $1 \leq i \leq m$  und
  - Werte  $a_{i,j} \in \mathbb{R}$  für  $1 \leq j \leq d$  und  $1 \leq i \leq m$ .
  - Gesucht ist eine Belegung der Variablen  $x_i \in \mathbb{R}$  mit:
    - Maximiere Zielfunktion  $\sum_{i=1}^{d} c_i \cdot x_i$
    - unter den Nebenbedingungen:

## Kanonische Form eines LP

Einleitung zu LPs

00000000000000000 4:8 Formen eines LP 9/15

- Ein LP ist in kanonischer Form, falls:
  - Es gibt d Variablen  $x_i \in \mathbb{R} \ (1 \leqslant i \leqslant d)$ ,
  - Werte  $c_i \in \mathbb{R}$  für  $1 \leq j \leq d$ ,
  - Werte  $b_i \in \mathbb{R}$  für  $1 \leq i \leq m$  und
  - Werte  $a_{i,j} \in \mathbb{R}$  für  $1 \leq j \leq d$  und  $1 \leq i \leq m$ .
  - Gesucht ist eine Belegung der Variablen  $x_i \in \mathbb{R}$  mit:
    - Maximiere Zielfunktion  $\sum_{i=1}^{d} c_i \cdot x_i$
    - unter den Nebenbedingungen:
    - $\sum_{i=1}^d a_{ij} \cdot x_j \leqslant b_j$  für  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  und

### Kanonische Form eines LP

Einleitung zu LPs

00000000000000000 4:8 Formen eines LP 10/15

- Ein LP ist in kanonischer Form, falls:
  - Es gibt d Variablen  $x_i \in \mathbb{R} \ (1 \leq i \leq d)$ ,
  - Werte  $c_i \in \mathbb{R}$  für  $1 \leq j \leq d$ ,
  - Werte  $b_i \in \mathbb{R}$  für  $1 \leq i \leq m$  und
  - Werte  $a_{i,j} \in \mathbb{R}$  für  $1 \leq j \leq d$  und  $1 \leq i \leq m$ .
  - Gesucht ist eine Belegung der Variablen  $x_i \in \mathbb{R}$  mit:
    - Maximiere Zielfunktion  $\sum_{i=1}^{d} c_i \cdot x_i$
    - unter den Nebenbedingungen:
    - $\sum_{i=1}^d a_{ij} \cdot x_j \leqslant b_j$  für  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  und
    - $x_i \ge 0$  für  $i \in \{1, 2, ..., d\}$ .

Walter Unger 22.11.2018 13:52

Einleitung zu LPs

00000000000000000

- Ein LP ist in kanonischer Form, falls:
  - Es gibt d Variablen  $x_i \in \mathbb{R} \ (1 \leq i \leq d)$ ,
  - Werte  $c_i \in \mathbb{R}$  für  $1 \leq j \leq d$ ,
  - Werte  $b_i \in \mathbb{R}$  für  $1 \leq i \leq m$  und
  - Werte  $a_{i,j} \in \mathbb{R}$  für  $1 \leq j \leq d$  und  $1 \leq i \leq m$ .
  - Gesucht ist eine Belegung der Variablen  $x_i \in \mathbb{R}$  mit:
    - Maximiere Zielfunktion  $\sum_{i=1}^{d} c_i \cdot x_i$
    - unter den Nebenbedingungen:
    - $\sum_{i=1}^d a_{ij} \cdot x_j \leqslant b_j$  für  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  und
    - $x_i \ge 0$  für  $i \in \{1, 2, ..., d\}$ .
- Setze:

## Kanonische Form eines LP

Einleitung zu LPs

00000000000000000 4:8 Formen eines LP 12/15

- Ein LP ist in kanonischer Form, falls:
  - Es gibt d Variablen  $x_i \in \mathbb{R} \ (1 \leq i \leq d)$ ,
  - Werte  $c_i \in \mathbb{R}$  für  $1 \leq i \leq d$ ,
  - Werte  $b_i \in \mathbb{R}$  für  $1 \leq i \leq m$  und
  - Werte  $a_{i,j} \in \mathbb{R}$  für  $1 \leq j \leq d$  und  $1 \leq i \leq m$ .
  - Gesucht ist eine Belegung der Variablen  $x_i \in \mathbb{R}$  mit:
    - Maximiere Zielfunktion  $\sum_{i=1}^{d} c_i \cdot x_i$
    - unter den Nebenbedingungen:
    - $\sum_{j=1}^d a_{ij} \cdot x_j \leqslant b_j$  für  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  und
    - $x_i \ge 0$  für  $i \in \{1, 2, ..., d\}$ .
- Setze:
  - $x = (x_i), c = (c_i), b = (b_i) \text{ und } A = (a_{ii}).$

Walter Unger 22.11.2018 13:52

Einleitung zu LPs

0000000000000000 4:8 Formen eines LP 13/15

- Ein LP ist in kanonischer Form, falls:
  - Es gibt d Variablen  $x_i \in \mathbb{R} \ (1 \leq i \leq d)$ ,
  - Werte  $c_i \in \mathbb{R}$  für  $1 \leq i \leq d$ ,
  - Werte  $b_i \in \mathbb{R}$  für  $1 \leq i \leq m$  und
  - Werte  $a_{i,j} \in \mathbb{R}$  für  $1 \leq j \leq d$  und  $1 \leq i \leq m$ .
  - Gesucht ist eine Belegung der Variablen  $x_i \in \mathbb{R}$  mit:
    - Maximiere Zielfunktion  $\sum_{i=1}^{d} c_i \cdot x_i$
    - unter den Nebenbedingungen:
    - $\sum_{i=1}^d a_{ij} \cdot x_j \leqslant b_j$  für  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  und
    - $x_i \ge 0$  für  $i \in \{1, 2, ..., d\}$ .
- Setze:
  - $x = (x_i), c = (c_i), b = (b_i) \text{ und } A = (a_{ii}).$
- Dann ist kurzgefasst die kanonische Form:

Walter Unger 22.11.2018 13:52

Einleitung zu LPs

00000000000000000

- Ein LP ist in kanonischer Form, falls:
  - Es gibt d Variablen  $x_i \in \mathbb{R} \ (1 \leq i \leq d)$ ,
  - Werte  $c_i \in \mathbb{R}$  für  $1 \leq i \leq d$ ,
  - Werte  $\vec{b_i} \in \mathbb{R}$  für  $1 \leqslant i \leqslant m$  und
  - Werte  $a_{i,j} \in \mathbb{R}$  für  $1 \leq j \leq d$  und  $1 \leq i \leq m$ .
  - Gesucht ist eine Belegung der Variablen  $x_i \in \mathbb{R}$  mit:
    - Maximiere Zielfunktion  $\sum_{i=1}^{d} c_i \cdot x_i$
    - unter den Nebenbedingungen:
    - $\sum_{j=1}^d a_{ij} \cdot x_j \leqslant b_j$  für  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  und
    - $x_i \ge 0$  für  $i \in \{1, 2, ..., d\}$ .
- Setze:
  - $x = (x_i), c = (c_i), b = (b_i) \text{ und } A = (a_{ii}).$
- Dann ist kurzgefasst die kanonische Form:
  - Maximiere  $c^T \cdot x$  unter den Nebenbedingungen:

## Kanonische Form eines LP

Einleitung zu LPs

00000000000000000 4:8 Formen eines LP 15/15

- Ein LP ist in kanonischer Form, falls:
  - Es gibt d Variablen  $x_i \in \mathbb{R} \ (1 \leq i \leq d)$ ,
  - Werte  $c_i \in \mathbb{R}$  für  $1 \leq i \leq d$ ,
  - Werte  $\vec{b_i} \in \mathbb{R}$  für  $1 \leqslant i \leqslant m$  und
  - Werte  $a_{i,j} \in \mathbb{R}$  für  $1 \leq j \leq d$  und  $1 \leq i \leq m$ .
  - Gesucht ist eine Belegung der Variablen  $x_i \in \mathbb{R}$  mit:
    - Maximiere Zielfunktion  $\sum_{i=1}^{d} c_i \cdot x_i$
    - unter den Nebenbedingungen:
    - $\sum_{i=1}^d a_{ij} \cdot x_j \leqslant b_j$  für  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  und
    - $x_i \ge 0$  für  $i \in \{1, 2, ..., d\}$ .
- Setze:

• 
$$x = (x_j), c = (c_j), b = (b_i) \text{ und } A = (a_{ij}).$$

- Dann ist kurzgefasst die kanonische Form:
  - Maximiere  $c^T \cdot x$  unter den Nebenbedingungen:
  - $A \cdot x \leq b$  und  $x \geq 0$ .

# Umformungen zur kanonischen Form

• Minimierungsproblem in ein Maximierungsproblem:

Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWTH

Ganzzahligkeit

# Umformungen zur kanonischen Form

- Minimierungsproblem in ein Maximierungsproblem:
  - $c^T \cdot x$  wird zu  $-c^T \cdot x$ .

Dualität

Ganzzahligkeit

Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWTH

# Umformungen zur kanonischen Form

Einleitung zu LPs

- Minimierungsproblem in ein Maximierungsproblem:
  - $c^T \cdot x$  wird zu  $-c^T \cdot x$ .
- Eine Gleichung  $a^T \cdot x = b$  wird ersetzt durch

# Umformungen zur kanonischen Form

Einleitung zu LPs

0000000000000000

- Minimierungsproblem in ein Maximierungsproblem:
  - $c^T \cdot x$  wird zu  $-c^T \cdot x$ .
- Eine Gleichung  $a^T \cdot x = b$  wird ersetzt durch
  - $a^T \cdot x \leq b$  und

0000000000000000 4:9 Formen eines LP 5/11

- Minimierungsproblem in ein Maximierungsproblem:
  - $c^T \cdot x$  wird zu  $-c^T \cdot x$ .
- Eine Gleichung  $a^T \cdot x = b$  wird ersetzt durch
  - $a^T \cdot x \leq b$  und
  - $a^T \cdot x \geqslant b$ .

0000000000000000 4:9 Formen eines LP 6/11

- Minimierungsproblem in ein Maximierungsproblem:
- $c^T \cdot x$  wird zu  $-c^T \cdot x$ .
- Eine Gleichung  $a^T \cdot x = b$  wird ersetzt durch
  - $a^T \cdot x \leq b$  und
  - $a^T \cdot x \ge b$ .
- Eine Gleichung  $a^T \cdot x \ge b$  wird ersetzt durch

# Umformungen zur kanonischen Form

Einleitung zu LPs

00000000000000000 4:9 Formen eines LP 7/11

- Minimierungsproblem in ein Maximierungsproblem:
  - $c^T \cdot x$  wird zu  $-c^T \cdot x$ .
- Eine Gleichung  $a^T \cdot x = b$  wird ersetzt durch
  - $a^T \cdot x \leq b$  und
  - $a^T \cdot x \ge b$ .
- Eine Gleichung  $a^T \cdot x \geqslant b$  wird ersetzt durch
  - $\bullet$   $-a^T \cdot x \leq -b$ .

## Umformungen zur kanonischen Form

- Minimierungsproblem in ein Maximierungsproblem:
  - $c^T \cdot x$  wird zu  $-c^T \cdot x$ .
- Eine Gleichung  $a^T \cdot x = b$  wird ersetzt durch
  - $a^T \cdot x \leq b$  und •  $a^T \cdot x \ge b$ .
- Eine Gleichung  $a^T \cdot x \geqslant b$  wird ersetzt durch
  - $\bullet$   $-a^T \cdot x \leq -b$ .
- Eine möglicherweise negative Variable  $x \in \mathbb{R}$  wird ersetzt durch:

00000000000000000 Formen eines LP 9/11

- Minimierungsproblem in ein Maximierungsproblem:
  - $c^T \cdot x$  wird  $zu c^T \cdot x$
- Eine Gleichung  $a^T \cdot x = b$  wird ersetzt durch
  - $a^T \cdot x \leq b$  und
  - $a^T \cdot x \ge b$ .
- Eine Gleichung  $a^T \cdot x \ge b$  wird ersetzt durch
  - $\bullet$   $-a^T \cdot x \leq -b$ .
- Eine möglicherweise negative Variable  $x \in \mathbb{R}$  wird ersetzt durch:
  - x' x'' und den Nebenbedingungen:

# Umformungen zur kanonischen Form

- Minimierungsproblem in ein Maximierungsproblem:
  - $\circ$   $c^T \cdot x$  wird  $z_{11} c^T \cdot x$
- Eine Gleichung  $a^T \cdot x = b$  wird ersetzt durch
  - $a^T \cdot x \leq b$  und
  - $a^T \cdot x \ge b$ .
- Eine Gleichung  $a^T \cdot x \geqslant b$  wird ersetzt durch
  - $\bullet$   $-a^T \cdot x \leq -b$ .
- Eine möglicherweise negative Variable  $x \in \mathbb{R}$  wird ersetzt durch:
  - x' x'' und den Nebenbedingungen:
  - $x' \ge 0$  und

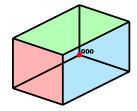
## Umformungen zur kanonischen Form

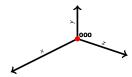
- Minimierungsproblem in ein Maximierungsproblem:
  - $\circ$   $c^T \cdot x$  wird  $z_{11} c^T \cdot x$
- Eine Gleichung  $a^T \cdot x = b$  wird ersetzt durch
  - $a^T \cdot x \leq b$  und
  - $a^T \cdot x \ge b$ .
- Eine Gleichung  $a^T \cdot x \geqslant b$  wird ersetzt durch
  - $\bullet$   $-a^T \cdot x \leq -b$ .
- Eine möglicherweise negative Variable  $x \in \mathbb{R}$  wird ersetzt durch:
  - x' x'' und den Nebenbedingungen:
  - $x' \ge 0$  und
  - $x'' \ge 0$ .

Geometrische Interpretation

Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWTH

# Geometrische Interpretation



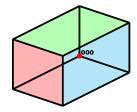


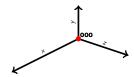
$$0 \leqslant x \leqslant t$$

$$0 \leqslant y \leqslant t$$

$$0 \leqslant z \leqslant t$$

# Geometrische Interpretation

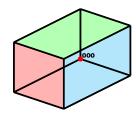




$$0 \leqslant x \leqslant t$$

$$0 \leqslant y \leqslant t$$

$$0 \leqslant z \leqslant t$$



$$0 \leqslant x \leqslant t$$

$$0 \leqslant y \leqslant t$$

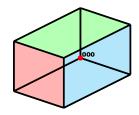
$$0 \leqslant z \leqslant t$$

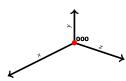
• Eine Variablenbelegung  $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ entspricht einem Punkt im d-dimensionalen Raum.

Walter Unger 22.11.2018 13:52

# Geometrische Interpretation

4:10 Geometrische Interpretation





$$0 \leqslant x \leqslant t$$

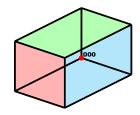
$$0 \leqslant y \leqslant t$$

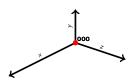
$$0 \leqslant z \leqslant t$$

- Eine Variablenbelegung  $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ entspricht einem Punkt im d-dimensionalen Raum.
- Eine Nebenbedingung  $a_i \cdot x \leq b_i$  definiert einen Halbraum.

# Geometrische Interpretation

4:10 Geometrische Interpretation





- $0 \leqslant x \leqslant t$
- $0 \leqslant y \leqslant t$
- $0 \leqslant z \leqslant t$

- Eine Variablenbelegung  $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ entspricht einem Punkt im d-dimensionalen Raum.
- Eine Nebenbedingung  $a_i \cdot x \leq b_i$  definiert einen Halbraum.
- Die Grenze des Halbraums ist die Hyperebene  $a_i \cdot x = b_i$ .

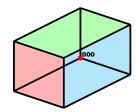
Algorithmus von Seidel

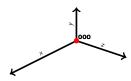
Dualität

Walter Unger 22.11.2018 13:52

Ganzzahligkeit

4:10 Geometrische Interpretation 7/10 Geometrische Interpretation





$$0 \leqslant x \leqslant t$$

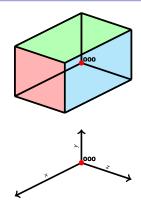
$$0 \le v \le t$$

$$0 \leqslant z \leqslant t$$

- Eine Variablenbelegung  $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ entspricht einem Punkt im d-dimensionalen Raum.
- Eine Nebenbedingung  $a_i \cdot x \leq b_i$  definiert einen Halbraum.
- Die Grenze des Halbraums ist die Hyperebene  $a_i \cdot x = b_i$ .
- Der Schnitt aller Halbräume ist der Raum der zulässigen Lösungen.

4:10 Geometrische Interpretation

# Geometrische Interpretation



$$0 \leqslant x \leqslant t$$

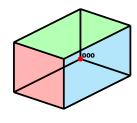
$$0 \le v \le t$$

$$0 \leqslant z \leqslant t$$

- Eine Variablenbelegung  $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ entspricht einem Punkt im d-dimensionalen Raum.
- Eine Nebenbedingung  $a_i \cdot x \leq b_i$  definiert einen Halbraum.
- Die Grenze des Halbraums ist die Hyperebene  $a_i \cdot x = b_i$ .
- Der Schnitt aller Halbräume ist der Raum der zulässigen Lösungen.
- Ein LP wird als zulässig bezeichnet, wenn des zulässige Lösungen gibt.

4:10 Geometrische Interpretation

## Geometrische Interpretation





$$0 \leqslant x \leqslant t$$

$$0 \le v \le t$$

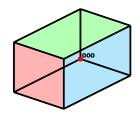
$$0 \leqslant z \leqslant t$$

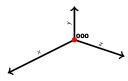
- Eine Variablenbelegung  $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ entspricht einem Punkt im d-dimensionalen Raum.
- Eine Nebenbedingung  $a_i \cdot x \leq b_i$  definiert einen Halbraum.
- Die Grenze des Halbraums ist die Hyperebene  $a_i \cdot x = b_i$ .
- Der Schnitt aller Halbräume ist der Raum der zulässigen Lösungen.
- Ein LP wird als zulässig bezeichnet, wenn des zulässige Lösungen gibt.
- Schnittmengen von Halbräumen bilden ein Polyhedron.

4:10 Geometrische Interpretation

Ganzzahligkeit 000000000

### Geometrische Interpretation





$$0 \leqslant x \leqslant t$$
$$0 \leqslant y \leqslant t$$
$$0 \leqslant z \leqslant t$$

• Eine Variablenbelegung  $x = (x_1, x_2, ..., x_d)$ entspricht einem Punkt im d-dimensionalen Raum

Walter Unger 22.11.2018 13:52

- Eine Nebenbedingung  $a_i \cdot x \leq b_i$  definiert einen Halbraum.
- Die Grenze des Halbraums ist die Hyperebene  $a_i \cdot x = b_i$ .
- Der Schnitt aller Halbräume ist der Raum der zulässigen Lösungen.
- Ein LP wird als zulässig bezeichnet, wenn des zulässige Lösungen gibt.
- Schnittmengen von Halbräumen bilden ein Polyhedron.
- Damit bilden die zulässigen Lösungen ein Polyhedron.

#### Konvexität

P Polyhedron

Lemma

Ein Polyhedron P ist konvex.

#### Konvexität

P Polyhedron

#### Lemma

Ein Polyhedron P ist konvex.

#### Konvexität

P Polyhedron

#### Lemma

Ein Polyhedron P ist konvex.

#### Beweis:

• Konvex:  $\forall a, b \in P : I(a, b) \in P$  mit:

#### Konvexität

P Polyhedron

#### Lemma

Ein Polyhedron P ist konvex.

- Konvex:  $\forall a, b \in P : I(a, b) \in P$  mit:
- $I(a, b) = \{\lambda a + (1 \lambda)b \mid 0 \le \lambda \le 1\}.$

#### Konvexität

Lemma

Ein Polyhedron P ist konvex.

- Konvex:  $\forall a, b \in P : I(a, b) \in P$  mit:
- $I(a, b) = \{\lambda a + (1 \lambda)b \mid 0 \le \lambda \le 1\}.$
- Ein Halbraum ist konvex.

Walter Unger 22.11.2018 13:52

P Polyhedron

#### Lemma

Ein Polyhedron P ist konvex.

- Konvex:  $\forall a, b \in P : I(a, b) \in P$  mit:
- $I(a, b) = \{\lambda a + (1 \lambda)b \mid 0 \le \lambda \le 1\}.$
- Ein Halbraum ist konvex.
- Ein Polyhedron ist der Schnitt von Halbräumen.

Dualität

Walter Unger 22.11.2018 13:52

Ganzzahligkeit

Konvexität

P Polyhedron

#### Lemma

Ein Polyhedron P ist konvex.

- Konvex:  $\forall a, b \in P : I(a, b) \in P$  mit:
- $I(a, b) = \{\lambda a + (1 \lambda)b \mid 0 \le \lambda \le 1\}.$
- Ein Halbraum ist konvex.
- Ein Polyhedron ist der Schnitt von Halbräumen.
- Zeige: Der Schnitt von konvexen Mengen ist konvex.

8/11

Walter Unger 22.11.2018 13:52

Einleitung zu LPs

#### Lemma

Ein Polyhedron P ist konvex.

- Konvex:  $\forall a, b \in P : I(a, b) \in P$  mit:
- $I(a, b) = \{\lambda a + (1 \lambda)b \mid 0 \le \lambda \le 1\}.$
- Ein Halbraum ist konvex.
- Ein Polyhedron ist der Schnitt von Halbräumen.
- Zeige: Der Schnitt von konvexen Mengen ist konvex.
- D.h. aus A, B konvex folgt  $A \cap B$  konvex.

Einleitung zu LPs

P Polyhedron

#### Lemma

Ein Polyhedron P ist konvex.

- Konvex:  $\forall a, b \in P : I(a, b) \in P$  mit:
- $I(a, b) = \{\lambda a + (1 \lambda)b \mid 0 \le \lambda \le 1\}.$
- Ein Halbraum ist konvex.
- Ein Polyhedron ist der Schnitt von Halbräumen.
- Zeige: Der Schnitt von konvexen Mengen ist konvex.
- D.h. aus A, B konvex folgt  $A \cap B$  konvex.
- Damit gilt:  $\forall a, b \in A : I(a, b) \in A$  und

#### Konvexität

Einleitung zu LPs

0000000000000000

P Polyhedron

#### Lemma

Ein Polyhedron P ist konvex.

- Konvex:  $\forall a, b \in P : I(a, b) \in P$  mit:
- $I(a, b) = \{\lambda a + (1 \lambda)b \mid 0 \le \lambda \le 1\}.$
- Ein Halbraum ist konvex.
- Ein Polyhedron ist der Schnitt von Halbräumen.
- Zeige: Der Schnitt von konvexen Mengen ist konvex.
- D.h. aus A, B konvex folgt  $A \cap B$  konvex.
- Damit gilt:  $\forall a, b \in A : I(a, b) \in A$  und
- weiter  $\forall a, b \in B : I(a, b) \in B$ .

Einleitung zu LPs

P Polyhedron

#### Lemma

Ein Polvhedron P ist konvex.

- Konvex:  $\forall a, b \in P : I(a, b) \in P$  mit:
- $I(a, b) = \{\lambda a + (1 \lambda)b \mid 0 \le \lambda \le 1\}.$
- Ein Halbraum ist konvex.
- Ein Polyhedron ist der Schnitt von Halbräumen.
- Zeige: Der Schnitt von konvexen Mengen ist konvex.
- D.h. aus A, B konvex folgt  $A \cap B$  konvex.
- Damit gilt:  $\forall a, b \in A : I(a, b) \in A$  und
- weiter  $\forall a, b \in B : I(a, b) \in B$ .
- Es folgt:  $\forall a, b \in A \cap B : I(a, b) \in A \cap B$ .

P Polyhedron

#### Lemma

Sei  $z, x \in P$  und  $c^T z > c^T x$ .

Dann existiert für  $\varepsilon > 0$  ein  $y \in P$  mit:  $||x - y|| \le \varepsilon$  und  $c^T y > c^T x$ .

P Polyhedron

#### Lemma

Sei  $z, x \in P$  und  $c^T z > c^T x$ .

Dann existiert für  $\varepsilon > 0$  ein  $y \in P$  mit:  $||x - y|| \le \varepsilon$  und  $c^T y > c^T x$ .

P Polyhedron

#### Lemma

Sei  $z, x \in P$  und  $c^T z > c^T x$ .

Dann existiert für  $\varepsilon > 0$  ein  $y \in P$  mit:  $||x - y|| \le \varepsilon$  und  $c^T y > c^T x$ .

#### Beweis:

• P ist konvex, gilt  $I(x, z) \in P$ .

P Polyhedron

#### Lemma

Sei  $z, x \in P$  und  $c^T z > c^T x$ .

Dann existiert für  $\varepsilon > 0$  ein  $y \in P$  mit:  $||x - y|| \le \varepsilon$  und  $c^T y > c^T x$ .

- P ist konvex, gilt  $I(x, z) \in P$ .
- Wähle  $y \in I(x, z)$  mit  $x \neq y$  und  $||x y|| \leq \varepsilon$ .

### Lokales und globales Optimum

#### Lemma

Sei  $z, x \in P$  und  $c^T z > c^T x$ .

Dann existiert für  $\varepsilon > 0$  ein  $y \in P$  mit:  $||x - y|| \le \varepsilon$  und  $c^T y > c^T x$ .

- P ist konvex, gilt  $I(x, z) \in P$ .
- Wähle  $y \in I(x, z)$  mit  $x \neq y$  und  $||x y|| \leq \varepsilon$ .
- Nach Definition von I gibt  $\lambda > 0$  mit:  $y = \lambda x + (1 \lambda)z$ .

#### Lemma

Sei  $z, x \in P$  und  $c^T z > c^T x$ .

Dann existiert für  $\varepsilon > 0$  ein  $y \in P$  mit:  $||x - y|| \le \varepsilon$  und  $c^T y > c^T x$ .

- P ist konvex, gilt  $I(x, z) \in P$ .
- Wähle  $y \in I(x, z)$  mit  $x \neq y$  und  $||x y|| \leq \varepsilon$ .
- Nach Definition von I gibt  $\lambda > 0$  mit:  $y = \lambda x + (1 \lambda)z$ .
- Es folgt:

$$c^T y = c^T (\lambda x + (1 - \lambda)z)$$

# Lokales und globales Optimum

Lemma

Sei 
$$z, x \in P$$
 und  $c^T z > c^T x$ .

Dann existiert für 
$$\varepsilon > 0$$
 ein  $y \in P$  mit:  $||x - y|| \le \varepsilon$  und  $c^T y > c^T x$ .

- P ist konvex, gilt  $I(x, z) \in P$ .
- Wähle  $y \in I(x, z)$  mit  $x \neq y$  und  $||x y|| \leq \varepsilon$ .
- Nach Definition von I gibt  $\lambda > 0$  mit:  $y = \lambda x + (1 \lambda)z$ .
- Es folgt:

$$c^T y = c^T (\lambda x + (1 - \lambda)z)$$

Walter Unger 22.11.2018 13:52

### Lokales und globales Optimum

#### Lemma

Einleitung zu LPs

Sei  $z, x \in P$  und  $c^T z > c^T x$ .

Dann existiert für  $\varepsilon > 0$  ein  $y \in P$  mit:  $||x - y|| \le \varepsilon$  und  $c^T y > c^T x$ .

- P ist konvex, gilt  $I(x, z) \in P$ .
- Wähle  $y \in I(x, z)$  mit  $x \neq y$  und  $||x y|| \leq \varepsilon$ .
- Nach Definition von I gibt  $\lambda > 0$  mit:  $y = \lambda x + (1 \lambda)z$ .
- Es folgt:

$$c^T y = c^T (\lambda x + (1 - \lambda)z)$$
  
=  $\lambda c^T x + (1 - \lambda)c^T z$ 

# Lokales und globales Optimum

#### Lemma

Einleitung zu LPs

Sei  $z, x \in P$  und  $c^T z > c^T x$ .

Dann existiert für  $\varepsilon > 0$  ein  $y \in P$  mit:  $||x - y|| \le \varepsilon$  und  $c^T y > c^T x$ .

- P ist konvex, gilt  $I(x, z) \in P$ .
- Wähle  $y \in I(x, z)$  mit  $x \neq y$  und  $||x y|| \leq \varepsilon$ .
- Nach Definition von / gibt  $\lambda > 0$  mit:  $y = \lambda x + (1 \lambda)z$ .
- Es folgt:

$$c^{T}y = c^{T}(\lambda x + (1 - \lambda)z)$$
$$= \lambda c^{T}x + (1 - \lambda)c^{T}z$$
$$> \lambda c^{T}x + (1 - \lambda)c^{T}x$$

10/11

# Lokales und globales Optimum

P Polyhedron

#### Lemma

Einleitung zu LPs

4:12 Geometrische Interpretation

Sei 
$$z, x \in P$$
 und  $c^T z > c^T x$ .  
Dann existiert für  $\varepsilon > 0$  ein  $y \in P$  mit:  $||x - y|| \le \varepsilon$  und  $c^T y > c^T x$ .

- P ist konvex, gilt  $I(x, z) \in P$ .
- Wähle  $y \in I(x, z)$  mit  $x \neq y$  und  $||x y|| \leq \varepsilon$ .
- Nach Definition von / gibt  $\lambda > 0$  mit:  $y = \lambda x + (1 \lambda)z$ .
- Es folgt:

$$c^{T}y = c^{T}(\lambda x + (1 - \lambda)z)$$

$$= \lambda c^{T}x + (1 - \lambda)c^{T}z$$

$$> \lambda c^{T}x + (1 - \lambda)c^{T}x$$

$$= c^{T}x$$

### Lokales und globales Optimum

#### Lemma

Einleitung zu LPs

Sei  $z, x \in P$  und  $c^T z > c^T x$ .

Dann existiert für  $\varepsilon > 0$  ein  $y \in P$  mit:  $||x - y|| \le \varepsilon$  und  $c^T y > c^T x$ .

#### Beweis:

- P ist konvex, gilt  $I(x, z) \in P$ .
- Wähle  $y \in I(x, z)$  mit  $x \neq y$  und  $||x y|| \leq \varepsilon$ .
- Nach Definition von I gibt  $\lambda > 0$  mit:  $y = \lambda x + (1 \lambda)z$ .
- Es folgt:

$$c^{T}y = c^{T}(\lambda x + (1 - \lambda)z)$$

$$= \lambda c^{T}x + (1 - \lambda)c^{T}z$$

$$> \lambda c^{T}x + (1 - \lambda)c^{T}x$$

$$= c^{T}x$$

#### Lemma

Ein lokales Optimum ist auch ein globales Optimum.

# Unterräume

P Polyhedron

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_d x_d = \beta.$$

### Unterräume

Einleitung zu LPs

• Eine Hyperebene wird beschrieben durch:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_d x_d = \beta.$$

• Es sind d-1 Variablen frei wählbar.

# Unterräume

P Polyhedron

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_d x_d = \beta.$$

- Es sind d-1 Variablen frei wählbar.
- Der Wert der d-ten Variable ist dann festgelegt.

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_d x_d = \beta.$$

- Es sind d − 1 Variablen frei wählbar.
- Der Wert der d-ten Variable ist dann festgelegt.
- Der durch die Hyperebene beschriebene affine Unterraum ist ein Unterraum der Dimension d-1.

### Unterräume

Einleitung zu LPs

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_d x_d = \beta.$$

- Es sind d − 1 Variablen frei wählbar.
- Der Wert der d-ten Variable ist dann festgelegt.
- Der durch die Hyperebene beschriebene affine Unterraum ist ein Unterraum der Dimension d-1.
- Ein Unterraum, der als Schnittmenge von k linear unabhängigen Hyperräumen beschrieben wird, hat Dimension d - k.

Walter Unger 22.11.2018 13:52

P Polyhedron

#### Unterräume

Einleitung zu LPs

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_d x_d = \beta.$$

- Es sind d − 1 Variablen frei wählbar.
- Der Wert der d-ten Variable ist dann festgelegt.
- Der durch die Hyperebene beschriebene affine Unterraum ist ein Unterraum der Dimension d-1.
- Ein Unterraum, der als Schnittmenge von k linear unabhängigen Hyperräumen beschrieben wird, hat Dimension d - k.
- Falls mehr als d Nebenbedingungen (Hyperebenen) sich in einem Punkt treffen, so ist das LP degeneriert.

Walter Unger 22.11.2018 13:52

#### Unterräume

00000000000000000

4:13 Geometrische Interpretation 7/7

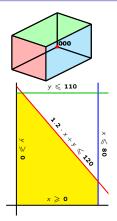
Einleitung zu LPs

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_d x_d = \beta.$$

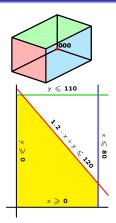
- Es sind d − 1 Variablen frei wählbar.
- Der Wert der d-ten Variable ist dann festgelegt.
- Der durch die Hyperebene beschriebene affine Unterraum ist ein Unterraum der Dimension d-1.
- Ein Unterraum, der als Schnittmenge von k linear unabhängigen Hyperräumen beschrieben wird, hat Dimension d - k.
- Falls mehr als d Nebenbedingungen (Hyperebenen) sich in einem Punkt treffen, so ist das LP degeneriert.
- Ein degeneriertes LP kann in ein nicht-degeneriertes LP umgeformt werden, ohne die Form (Zusammensetzung) der Lösung signifikant zu verändern.

# Oberfläche eines Polyhedrons

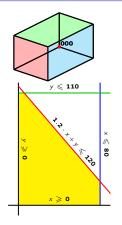
### Oberfläche eines Polyhedrons



### Oberfläche eines Polyhedrons



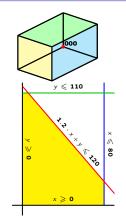
### Oberfläche eines Polyhedrons



• Die Oberfläche eines Polyhedrons besteht aus Facetten.

Walter Unger 22.11.2018 13:52

### Oberfläche eines Polyhedrons



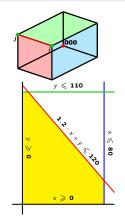
• Die Oberfläche eines Polyhedrons besteht aus

- Facetten.
  - Sei P ein Polyhedron und H eine Hyperebene und sei P komplett auf einer Seite der Hyperebene H.

P Polyhedron

Walter Unger 22.11.2018 13:52

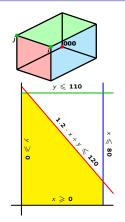
## Oberfläche eines Polyhedrons



- Die Oberfläche eines Polyhedrons besteht aus Facetten.
  - Sei P ein Polyhedron und H eine Hyperebene und sei P komplett auf einer Seite der Hyperebene H.
  - Falls  $f = P \cap H$  nicht leer ist. so

P Polyhedron

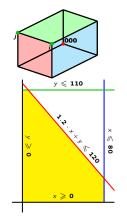
Oberfläche eines Polyhedrons



P Polyhedron

- Die Oberfläche eines Polyhedrons besteht aus Facetten.
  - Sei P ein Polyhedron und H eine Hyperebene und sei P komplett auf einer Seite der Hyperebene H.
    - Falls  $f = P \cap H$  nicht leer ist, so
    - ist f eine Facette von P.

# Oberfläche eines Polyhedrons

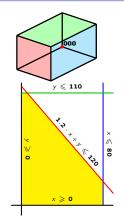


P Polyhedron

Ganzzahligkeit

- Die Oberfläche eines Polyhedrons besteht aus Facetten.
  - Sei P ein Polyhedron und H eine Hyperebene und sei P komplett auf einer Seite der Hyperebene H.
    - Falls  $f = P \cap H$  nicht leer ist, so
  - ist f eine Facette von P.
- Eine Facette der Dimension d-1 heißt Face.

#### Oberfläche eines Polyhedrons



- Die Oberfläche eines Polyhedrons besteht aus Facetten.
  - Sei P ein Polyhedron und H eine Hyperebene und sei P komplett auf einer Seite der Hyperebene H.
    - Falls  $f = P \cap H$  nicht leer ist. so
  - ist f eine Facette von P
- Eine Facette der Dimension d-1 heißt Face.
- Eine Kante entspricht dem Schnitt von d-1Hyperebenen (Facette der Dimension 1).

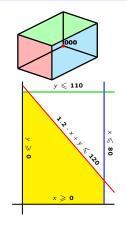
Dualität

Ganzzahligkeit SS2015 RWTH

P Polyhedron

Walter Unger 22.11.2018 13:52

### Oberfläche eines Polyhedrons

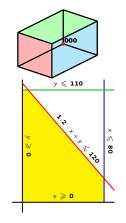


- Facetten.
  - Sei P ein Polyhedron und H eine Hyperebene und sei P komplett auf einer Seite der Hyperebene H.
  - Falls  $f = P \cap H$  nicht leer ist. so
  - ist f eine Facette von P
- Eine Facette der Dimension d-1 heißt Face.
- Eine Kante entspricht dem Schnitt von d-1Hyperebenen (Facette der Dimension 1).
- Ein Knoten entspricht dem Schnitt von d Hyperebenen (Facette der Dimension 0).

P Polyhedron

Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWTH

### Oberfläche eines Polyhedrons

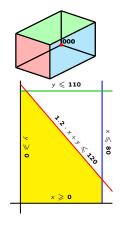


- Facetten.
  - Sei P ein Polyhedron und H eine Hyperebene und sei P komplett auf einer Seite der Hyperebene H.
    - Falls  $f = P \cap H$  nicht leer ist. so
- ist f eine Facette von P
- Eine Facette der Dimension d-1 heißt Face.
- Eine Kante entspricht dem Schnitt von d-1Hyperebenen (Facette der Dimension 1).
- Ein Knoten entspricht dem Schnitt von d Hyperebenen (Facette der Dimension 0).
- Zwei Knoten sind benachbart, wenn sie durch eine Kante verbunden sind.

P Polyhedron

Walter Unger 22.11.2018 13:52

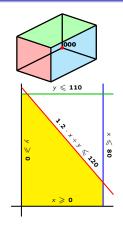
#### Oberfläche eines Polyhedrons



- Facetten.
  - Sei P ein Polyhedron und H eine Hyperebene und sei P komplett auf einer Seite der Hyperebene H.
    - Falls  $f = P \cap H$  nicht leer ist. so
  - ist f eine Facette von P
- Eine Facette der Dimension d − 1 heißt Face.
- Eine Kante entspricht dem Schnitt von d-1Hyperebenen (Facette der Dimension 1).
- Ein Knoten entspricht dem Schnitt von d Hyperebenen (Facette der Dimension 0).
- Zwei Knoten sind benachbart, wenn sie durch eine Kante verbunden sind.
- Falls P unbeschränkt ist, so kann es unbeschränkte Kanten geben.

P Polyhedron

### Oberfläche eines Polyhedrons



- Facetten.
  - Sei P ein Polyhedron und H eine Hyperebene und sei P komplett auf einer Seite der Hyperebene H.
    - Falls  $f = P \cap H$  nicht leer ist. so
  - ist f eine Facette von P
- Eine Facette der Dimension d − 1 heißt Face.
- Eine Kante entspricht dem Schnitt von d-1Hyperebenen (Facette der Dimension 1).
- Ein Knoten entspricht dem Schnitt von d Hyperebenen (Facette der Dimension 0).
- Zwei Knoten sind benachbart, wenn sie durch eine Kante verbunden sind.
- Falls P unbeschränkt ist, so kann es unbeschränkte Kanten geben.
- Solche Kanten haben nur einen oder keinen Endpunkt.

• Die Zielfunktion  $c^T x$  (Vektor) gibt eine Richtung in  $\mathbb{R}^d$  vor.

- Die Zielfunktion  $c^T x$  (Vektor) gibt eine Richtung in  $\mathbb{R}^d$  vor.
- Falls die Nebenbedingungen den Zielwert nach oben beschränken, so wird das LP als beschränkt bezeichnet.

- Die Zielfunktion  $c^T x$  (Vektor) gibt eine Richtung in  $\mathbb{R}^d$  vor.
- Falls die Nebenbedingungen den Zielwert nach oben beschränken, so wird das LP als beschränkt bezeichnet.
  - Falls der Zielwert nicht beschränkt ist, so heißt das LP unbeschränkt.

- Die Zielfunktion  $c^T x$  (Vektor) gibt eine Richtung in  $\mathbb{R}^d$  vor.
- Falls die Nebenbedingungen den Zielwert nach oben beschränken, so wird das LP als beschränkt bezeichnet.
  - Falls der Zielwert nicht beschränkt ist, so heißt das LP unbeschränkt.
- Das Polyhedron muss dabei nur in der Richtung von  $c^Tx$  beschränkt sein.

- Die Zielfunktion  $c^T x$  (Vektor) gibt eine Richtung in  $\mathbb{R}^d$  vor.
- Falls die Nebenbedingungen den Zielwert nach oben beschränken, so wird das LP als beschränkt bezeichnet.
  - Falls der Zielwert nicht beschränkt ist, so heißt das LP unbeschränkt.
- Das Polyhedron muss dabei nur in der Richtung von  $c^T x$  beschränkt sein.
- Ist das Polyhedron in alle Richtungen beschränkt (in einer Kugel enthalten), so wird es als Polytop bezeichnet.

# Geometrische Bestimmung des Optimums

• Betrachte beschränktes LP in kanonischer Form mit Lösungspolyhedron P und Zielfunktion  $c^T x$ .

- Betrachte beschränktes LP in kanonischer Form mit Lösungspolyhedron P und Zielfunktion  $c^T x$ ,
- ullet Sei  ${\cal H}$  eine zum Vektor c orthogonale Hyperebene.

- Betrachte beschränktes LP in kanonischer Form mit Lösungspolyhedron P und Zielfunktion  $c^T x$ ,
- ullet Sei  ${\mathcal H}$  eine zum Vektor c orthogonale Hyperebene.
- Damit gibt es  $t \in \mathbb{R}$  mit:  $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T \cdot x = t\}$ .

Walter Unger 22.11.2018 13:52

- ullet Betrachte beschränktes LP in kanonischer Form mit Lösungspolyhedron Pund Zielfunktion  $c^T x$ .
- Sei  $\mathcal{H}$  eine zum Vektor c orthogonale Hyperebene.
- Damit gibt es  $t \in \mathbb{R}$  mit:  $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T \cdot x = t\}$ .
- Setze  $\mathcal{H}_t = \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T \cdot x = t\}.$

0000000000000000

- ullet Betrachte beschränktes LP in kanonischer Form mit Lösungspolyhedron Pund Zielfunktion  $c^T x$ .
- Sei  $\mathcal{H}$  eine zum Vektor c orthogonale Hyperebene.
- Damit gibt es  $t \in \mathbb{R}$  mit:  $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T \cdot x = t\}$ .
- Setze  $\mathcal{H}_t = \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T \cdot x = t\}.$
- Sei  $\mathcal{H}$  so gewählt, dass  $P \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$  gilt.

0000000000000000

- Betrachte beschränktes LP in kanonischer Form mit Lösungspolyhedron P und Zielfunktion  $c^T x$ .
- Sei  $\mathcal{H}$  eine zum Vektor c orthogonale Hyperebene.
- Damit gibt es  $t \in \mathbb{R}$  mit:  $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T \cdot x = t\}$ .
- Setze  $\mathcal{H}_t = \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T \cdot x = t\}.$
- Sei  $\mathcal{H}$  so gewählt, dass  $P \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$  gilt.
- Wähle z maximal mit  $P \cap \mathcal{H}_z \neq \emptyset$ .

0000000000000000

- Betrachte beschränktes LP in kanonischer Form mit Lösungspolyhedron P und Zielfunktion  $c^T x$ .
- Sei  $\mathcal{H}$  eine zum Vektor c orthogonale Hyperebene.
- Damit gibt es  $t \in \mathbb{R}$  mit:  $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T \cdot x = t\}$ .
- Setze  $\mathcal{H}_t = \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T \cdot x = t\}.$
- Sei  $\mathcal{H}$  so gewählt, dass  $P \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$  gilt.
- Wähle z maximal mit  $P \cap \mathcal{H}_z \neq \emptyset$ .
- Ein beliebiger Punkt  $x^* \in P \cap \mathcal{H}_z$  ist eine optimale Lösung des LPs.

- Betrachte beschränktes LP in kanonischer Form mit Lösungspolyhedron P und Zielfunktion  $c^T x$ .
- Sei  $\mathcal{H}$  eine zum Vektor c orthogonale Hyperebene.
- Damit gibt es  $t \in \mathbb{R}$  mit:  $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T \cdot x = t\}$ .
- Setze  $\mathcal{H}_t = \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T \cdot x = t\}.$
- Sei  $\mathcal{H}$  so gewählt, dass  $P \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$  gilt.
- Wähle z maximal mit  $P \cap \mathcal{H}_z \neq \emptyset$ .
- Ein beliebiger Punkt  $x^* \in P \cap \mathcal{H}_z$  ist eine optimale Lösung des LPs.
- Beobachtungen:

- Betrachte beschränktes LP in kanonischer Form mit Lösungspolyhedron P und Zielfunktion  $c^T x$ .
- Sei  $\mathcal{H}$  eine zum Vektor c orthogonale Hyperebene.
- Damit gibt es  $t \in \mathbb{R}$  mit:  $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T \cdot x = t\}$ .
- Setze  $\mathcal{H}_t = \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T \cdot x = t\}.$
- Sei  $\mathcal{H}$  so gewählt, dass  $P \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$  gilt.
- Wähle z maximal mit  $P \cap \mathcal{H}_z \neq \emptyset$ .
- Ein beliebiger Punkt  $x^* \in P \cap \mathcal{H}_z$  ist eine optimale Lösung des LPs.
- Beobachtungen:

0000000000000000 4:16 Geometrische Interpretation

•  $P \cap \mathcal{H}_z$  ist eine Facette f von P.

- Betrachte beschränktes LP in kanonischer Form mit Lösungspolyhedron P und Zielfunktion  $c^T x$ .
- Sei  $\mathcal{H}$  eine zum Vektor c orthogonale Hyperebene.
- Damit gibt es  $t \in \mathbb{R}$  mit:  $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T \cdot x = t\}$ .
- Setze  $\mathcal{H}_t = \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T \cdot x = t\}.$
- Sei  $\mathcal{H}$  so gewählt, dass  $P \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$  gilt.
- Wähle z maximal mit  $P \cap \mathcal{H}_z \neq \emptyset$ .
- Ein beliebiger Punkt  $x^* \in P \cap \mathcal{H}_z$  ist eine optimale Lösung des LPs.
- Beobachtungen:

0000000000000000

- P ∩ H<sub>z</sub> ist eine Facette f von P.
- Falls f nicht in allen Richtungen unbeschränkt ist, so gibt es mindestens einen optimalen Knoten.

#### Die Idee

• Kann eine zufällige Auswahl helfen?

#### Die Idee

- Kann eine zufällige Auswahl helfen?
- Können effiziente Algorithmen noch schneller gemacht werden?

#### Die Idee

- Kann eine zufällige Auswahl helfen?
- Können effiziente Algorithmen noch schneller gemacht werden?
- Kann bei schweren Problemen mit ausreichender Wahrscheinlichkeit ein gutes Ergebnis erreicht werden?

• Bestimme Extrempunkt eines Polyhedrons bezüglich einer Zielfunktion.

- Bestimme Extrempunkt eines Polyhedrons bezüglich einer Zielfunktion.
- Eingabe:

- Bestimme Extrempunkt eines Polyhedrons bezüglich einer Zielfunktion.
- Eingabe:
  - ullet Gegeben sind d Variablen.

- Bestimme Extrempunkt eines Polyhedrons bezüglich einer Zielfunktion.
- Eingabe:
  - Gegeben sind d Variablen.
  - Gegeben sind *m* lineare Ungleichungen (Nebenbedingungen).

- Bestimme Extrempunkt eines Polyhedrons bezüglich einer Zielfunktion.
- Eingabe:
  - Gegeben sind d Variablen.
  - Gegeben sind *m* lineare Ungleichungen (Nebenbedingungen).
  - ullet Gegeben ist eine lineare Zielfunktion f über die d Variablen.

- Bestimme Extrempunkt eines Polyhedrons bezüglich einer Zielfunktion.
- Eingabe:
  - Gegeben sind d Variablen.
  - Gegeben sind *m* lineare Ungleichungen (Nebenbedingungen).
  - Gegeben ist eine lineare Zielfunktion f über die d Variablen.
- Gesucht:

- Bestimme Extrempunkt eines Polyhedrons bezüglich einer Zielfunktion.
- Eingabe:
  - Gegeben sind d Variablen.
  - Gegeben sind *m* lineare Ungleichungen (Nebenbedingungen).
  - Gegeben ist eine lineare Zielfunktion f über die d Variablen.
- Gesucht:
  - $\bullet$  Maximiere f unter Berücksichtigung aller Nebenbedingungen.

Ganzzahligkeit

- Bestimme Extrempunkt eines Polyhedrons bezüglich einer Zielfunktion.
- Eingabe:
  - Gegeben sind d Variablen.
  - Gegeben sind *m* lineare Ungleichungen (Nebenbedingungen).
  - Gegeben ist eine lineare Zielfunktion f über die d Variablen.
- Gesucht:
  - $\bullet$  Maximiere f unter Berücksichtigung aller Nebenbedingungen.
- Das ist ein LP (lineares Programm)

0000000000000000

- Bestimme Extrempunkt eines Polyhedrons bezüglich einer Zielfunktion.
- Eingabe:
  - Gegeben sind d Variablen.
  - Gegeben sind m lineare Ungleichungen (Nebenbedingungen).
  - Gegeben ist eine lineare Zielfunktion f über die d Variablen.
- Gesucht:
  - Maximiere f unter Berücksichtigung aller Nebenbedingungen.
- Das ist ein LP (lineares Programm)
- Obere Schranke für Laufzeit:  $O(\binom{m}{d}) = O(n^d)$ .

Einleitung zu LPs

0000000000000000

- Bestimme Extrempunkt eines Polyhedrons bezüglich einer Zielfunktion.
- Eingabe:
  - Gegeben sind d Variablen.
  - Gegeben sind m lineare Ungleichungen (Nebenbedingungen).
  - Gegeben ist eine lineare Zielfunktion f über die d Variablen.
- Gesucht:
  - Maximiere f unter Berücksichtigung aller Nebenbedingungen.
- Das ist ein LP (lineares Programm)
- Obere Schranke für Laufzeit:  $O(\binom{m}{d}) = O(n^d)$ .
  - Untersuche für jede d-elementige Teilmenge der m Ungleichungen den jeweiligen Schnittpunkt (Basislösung).

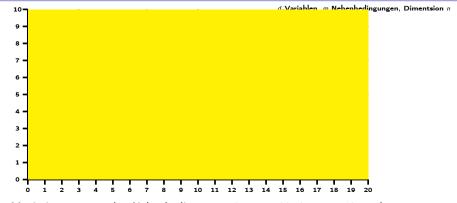
Einleitung zu LPs

0000000000000000

- Bestimme Extrempunkt eines Polyhedrons bezüglich einer Zielfunktion.
- Eingabe:
  - Gegeben sind d Variablen.
  - Gegeben sind m lineare Ungleichungen (Nebenbedingungen).
  - Gegeben ist eine lineare Zielfunktion f über die d Variablen.
- Gesucht:
  - Maximiere f unter Berücksichtigung aller Nebenbedingungen.
- Das ist ein LP (lineares Programm)
- Obere Schranke für Laufzeit:  $O(\binom{m}{d}) = O(n^d)$ .
  - Untersuche für jede d-elementige Teilmenge der m Ungleichungen den jeweiligen Schnittpunkt (Basislösung).
- Hier nun Algorithmus mit erwarteter linearer Laufzeit (d.h. linear in m).

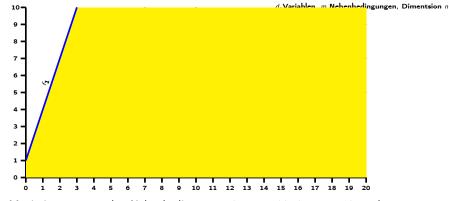


## Beispiel



Maximiere y unter den Nebenbedingungen  $0 \leqslant x \leqslant 20$ ,  $0 \leqslant y \leqslant 10$ , und:

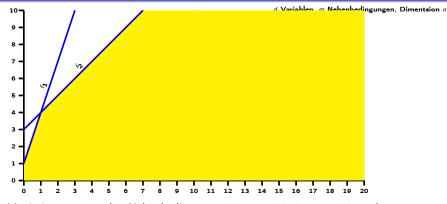
## Beispiel



Maximiere y unter den Nebenbedingungen  $0\leqslant x\leqslant 20$ ,  $0\leqslant y\leqslant 10$ , und:

$$f_1: y \leqslant 3 \cdot x + 1$$

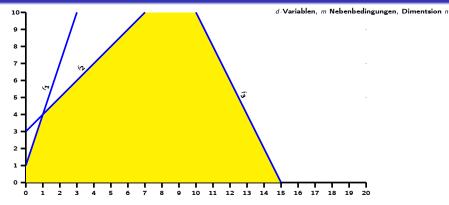
## Beispiel



Maximiere y unter den Nebenbedingungen  $0\leqslant x\leqslant 20$ ,  $0\leqslant y\leqslant 10$ , und:

$$f_1: y \leqslant 3 \cdot x + 1$$

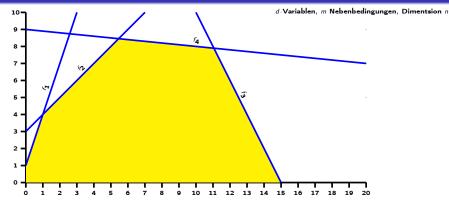
$$f_2: y \leqslant 1 \cdot x + 2$$



$$f_1: y \leqslant 3 \cdot x + 1$$

$$f_2: y \leqslant 1 \cdot x + 2$$

$$f_3: y \leqslant -2 \cdot x + 30$$



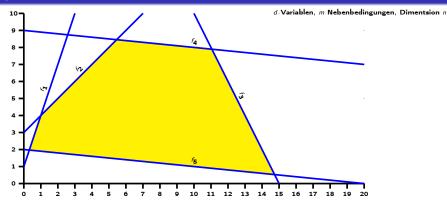
$$f_1: y \leqslant 3 \cdot x + 1$$

$$f_1: y \leq 3 \cdot x + 1$$
  $f_4: y \leq -0.9 \cdot x + 9$ 

$$f_2: y \leqslant 1 \cdot x + 2$$

$$\leq 1 \cdot x +$$

$$f_3: y \leq -2 \cdot x + 30$$



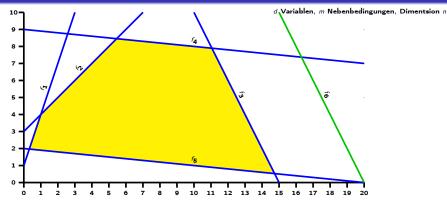
$$f_1: y \leqslant 3 \cdot x + 1$$

$$f_1: y \leq 3 \cdot x + 1$$
  $f_4: y \leq -0.9 \cdot x + 9$ 

$$f_2: y \leqslant 1 \cdot x +$$

$$f_2: y \le 1 \cdot x + 2$$
  $f_5: y \ge -0.9 \cdot x + 2$ 

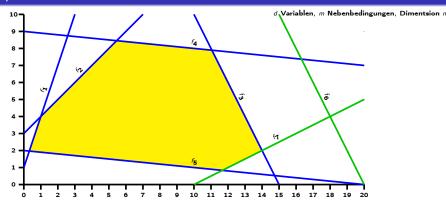
$$f_3: y \leqslant -2 \cdot x + 30$$



$$f_1: y \le 3 \cdot x + 1$$
  $f_4: y \le -0.9 \cdot x + 9$ 

$$f_2: y \le 1 \cdot x + 2$$
  $f_5: y \ge -0.9 \cdot x + 2$ 

$$f_3:y\leqslant -2\cdot x+30 \quad f_6:y\leqslant -2\cdot x+40$$



$$f_1: y \le 3 \cdot x + 1$$
  $f_4: y \le -0.9 \cdot x + 9$   $f_7: y \ge 0.5 \cdot x - 5$ 

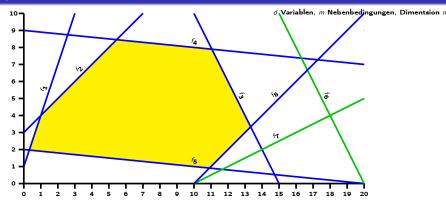
$$f_4: y \leq -0.9 \cdot x + 9$$

$$f_2: y \le 1 \cdot x + 2$$
  $f_5: y \ge -0.9 \cdot x + 2$ 

$$f_3:y\leqslant -2\cdot x+30 \quad f_6:y\leqslant -2\cdot x+40$$

$$f_3: y \leqslant -2 \cdot x +$$

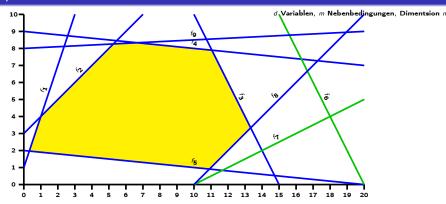
$$f_6: y \leqslant -2 \cdot x + 4$$



$$f_1: y \le 3 \cdot x + 1$$
  $f_4: y \le -0.9 \cdot x + 9$   $f_7: y \ge 0.5 \cdot x - 5$   
 $f_2: y \le 1 \cdot x + 2$   $f_5: y \ge -0.9 \cdot x + 2$   $f_8: y \ge 1 \cdot x - 10$   
 $f_3: y \le -2 \cdot x + 30$   $f_6: y \le -2 \cdot x + 40$ 

Dualität 0000000 Walter Unger 22.11.2018 13:52 Ganzzahligkeit 00000000 SS2015 RWTH

### Beispiel



$$\begin{array}{lll} f_1: y \leqslant 3 \cdot x + 1 & f_4: y \leqslant -0.9 \cdot x + 9 & f_7: y \geqslant 0.5 \cdot x - 5 \\ f_2: y \leqslant 1 \cdot x + 2 & f_5: y \geqslant -0.9 \cdot x + 2 & f_8: y \geqslant 1 \cdot x - 10 \\ f_3: y \leqslant -2 \cdot x + 30 & f_6: y \leqslant -2 \cdot x + 40 & f_9: y \leqslant 1.05 \cdot x + 8 \end{array}$$

## Vorgab<u>en</u>

• Variablen:  $x_1, x_2, \ldots, x_d$  mit:

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n

Ganzzahlig<u>keit</u>

000000000

SS2015 RWTH

## Dualität Ganzzahligkeit 0000000 00000000 Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWTH

## Vorgaben

• Variablen:  $x_1, x_2, \dots, x_d$  mit: •  $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T$  und

- Variablen:  $x_1, x_2, \ldots, x_d$  mit:
  - $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T$  und
- Nebenbedingungen:  $A \cdot x \leq b$  mit:

- Variablen:  $x_1, x_2, \ldots, x_d$  mit:
  - $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T$  und
- Nebenbedingungen:  $A \cdot x \leq b$  mit:
  - A ist eine  $m \times d$  Matrix und

Dualität

0000000

Walter Unger 22.11.2018 13:52

## Vorgaben

- Variablen:  $x_1, x_2, \ldots, x_d$  mit:
  - $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T$  und
- Nebenbedingungen:  $A \cdot x \leq b$  mit:
  - A ist eine  $m \times d$  Matrix und
  - $b = (b_1, b_2, \ldots, b_d)^T$ .

- Variablen:  $x_1, x_2, \ldots, x_d$  mit:
  - $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T$  und
- Nebenbedingungen:  $A \cdot x \leq b$  mit:
  - A ist eine  $m \times d$  Matrix und •  $b = (b_1, b_2, \ldots, b_d)^T$ .
- Zielfunktion  $f(x) = c^T \cdot x$  mit:

Dualität

0000000

Walter Unger 22.11.2018 13:52

- Variablen:  $x_1, x_2, \ldots, x_d$  mit:
  - $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T$  und
- Nebenbedingungen:  $A \cdot x \leq b$  mit:
  - A ist eine  $m \times d$  Matrix und
  - $b = (b_1, b_2, \ldots, b_d)^T$ .
- Zielfunktion  $f(x) = c^T \cdot x$  mit:
  - $c = (c_1, c_2, \ldots, c_d).$

Einleitung zu LPs

# 4:20 Details 8/14

0000000000000000

- Variablen:  $x_1, x_2, \ldots, x_d$  mit:
  - $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T$  und
- Nebenbedingungen:  $A \cdot x \leq b$  mit:
  - A ist eine  $m \times d$  Matrix und
  - $b = (b_1, b_2, \ldots, b_d)^T$ .
- Zielfunktion  $f(x) = c^T \cdot x$  mit:
  - $c = (c_1, c_2, \ldots, c_d).$
- O.B.d.A. gibt es eine zulässige Lösung.

- Variablen:  $x_1, x_2, \ldots, x_d$  mit:
  - $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T$  und
- Nebenbedingungen:  $A \cdot x \leq b$  mit:
  - A ist eine  $m \times d$  Matrix und
  - $b = (b_1, b_2, \ldots, b_d)^T$ .
- Zielfunktion  $f(x) = c^T \cdot x$  mit:
  - $c = (c_1, c_2, \ldots, c_d)$ .
- O.B.d.A. gibt es eine zulässige Lösung.
- O.B.d.A. ist die Lösung eindeutig.

Einleitung zu LPs

0000000000000000

4:20 Details 10/14

- Variablen:  $x_1, x_2, \ldots, x_d$  mit:
  - $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T$  und
- Nebenbedingungen:  $A \cdot x \leq b$  mit:
  - A ist eine  $m \times d$  Matrix und
  - $b = (b_1, b_2, \ldots, b_d)^T$ .
- Zielfunktion  $f(x) = c^T \cdot x$  mit:
  - $c = (c_1, c_2, \ldots, c_d)$ .
- O.B.d.A. gibt es eine zulässige Lösung.
- O.B.d.A. ist die Lösung eindeutig.
  - Falls nicht, so setze:

0000000000000000

## Vorgaben

- Variablen:  $x_1, x_2, \ldots, x_d$  mit:
  - $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T$  und
- Nebenbedingungen:  $A \cdot x \leq b$  mit:
  - A ist eine  $m \times d$  Matrix und
  - $b = (b_1, b_2, \dots, b_d)^T$ .
- Zielfunktion  $f(x) = c^T \cdot x$  mit:
  - $c = (c_1, c_2, \ldots, c_d)$ .
- O.B.d.A. gibt es eine zulässige Lösung.
- O.B.d.A. ist die Lösung eindeutig.
  - Falls nicht. so setze:
  - $c_i = c_i + \varepsilon^i$  für ein  $\varepsilon > 0$ .

## Vorgaben

Einleitung zu LPs

- Variablen:  $x_1, x_2, \ldots, x_d$  mit:
- $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T$  und
- Nebenbedingungen:  $A \cdot x \leq b$  mit:
  - A ist eine  $m \times d$  Matrix und
  - $b = (b_1, b_2, \dots, b_d)^T$ .
- Zielfunktion  $f(x) = c^T \cdot x$  mit:
  - $c = (c_1, c_2, \ldots, c_d)$ .
- O.B.d.A. gibt es eine zulässige Lösung.
- O.B.d.A. ist die Lösung eindeutig.
  - Falls nicht, so setze:
  - $c_i = c_i + \varepsilon^i$  für ein  $\varepsilon > 0$ .
  - Zielfunktion wird virtuell perturbiert (durcheinander wirbeln, stören).

Dualität

0000000

Einleitung zu LPs

0000000000000000

4:20 Details 13/14

- Variablen:  $x_1, x_2, \ldots, x_d$  mit:
- $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T$  und
- Nebenbedingungen:  $A \cdot x \leq b$  mit:
  - A ist eine  $m \times d$  Matrix und
  - $b = (b_1, b_2, \dots, b_d)^T$ .
- Zielfunktion  $f(x) = c^T \cdot x$  mit:
  - $c = (c_1, c_2, \ldots, c_d)$ .
- O.B.d.A. gibt es eine zulässige Lösung.
- O.B.d.A. ist die Lösung eindeutig.
  - Falls nicht, so setze:
  - $c_i = c_i + \varepsilon^i$  für ein  $\varepsilon > 0$ .
  - Zielfunktion wird virtuell perturbiert (durcheinander wirbeln, stören).
  - D.h. es wird lexikographisch kleinste Basislösung gewählt.

## Vorgaben

- Variablen:  $x_1, x_2, \ldots, x_d$  mit:
  - $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T$  und
- Nebenbedingungen:  $A \cdot x \leq b$  mit:
  - A ist eine  $m \times d$  Matrix und
  - $b = (b_1, b_2, \dots, b_d)^T$ .
- Zielfunktion  $f(x) = c^T \cdot x$  mit:
  - $c = (c_1, c_2, \ldots, c_d)$ .
- O.B.d.A. gibt es eine zulässige Lösung.
- O.B.d.A. ist die Lösung eindeutig.
  - Falls nicht, so setze:
  - $c_i = c_i + \varepsilon^i$  für ein  $\varepsilon > 0$ .
  - Zielfunktion wird virtuell perturbiert (durcheinander wirbeln, stören).
  - D.h. es wird lexikographisch kleinste Basislösung gewählt.
- Jede Nebenbedingung entspricht einer Hyperebene.

 Dualität
 Ganzzahligkeit

 0000000
 00000000

 Walter Unger 22.11.2018 13:52
 SS2015
 RWTH

Vorgaben

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n

• Das LP sollte nicht unbeschränkt sein.

## Vorgaben

- Das LP sollte nicht unbeschränkt sein.
- Daher werden zusätzlich Box-Bedingungen eingefügt.

Dualität 0000000 Walter Unger 22.11.201813:52

Ganzzahligkeit 000000000 SS2015 RWTH

Vorgaben

- Das LP sollte nicht unbeschränkt sein.
- Daher werden zusätzlich Box-Bedingungen eingefügt.
  - $-t \leqslant x_i \leqslant t$  für:  $(1 \leqslant i \leqslant d)$ .

 Dualität 0000000

Walter Unger 22.11.2018 13:52

Ganzzahligkeit 000000000 SS2015 RWTH

4:21 Details 4/9
Vorgaben

- Das LP sollte nicht unbeschränkt sein.
- Daher werden zusätzlich Box-Bedingungen eingefügt.
  - $-t \leqslant x_i \leqslant t$  für:  $(1 \leqslant i \leqslant d)$ .
  - t muss so groß sein, dass keine Basislösung verloren geht.

- Das I P sollte nicht unbeschränkt sein.
- Daher werden zusätzlich Box-Bedingungen eingefügt.
  - $-t \leqslant x_i \leqslant t$  für:  $(1 \leqslant i \leqslant d)$ .
  - t muss so groß sein, dass keine Basislösung verloren geht.
  - ullet D.h. in jeder Basislösung müssen die Variablenwerte zwischen t und -t liegen.

Algorithmus von Seidel ○●○○○○○○○○○○○ Dualität 0000000 Walter Unger 22.11.2018 13:52

Ganzzahligkeit 00000000 SS2015 RWTH

Vorgaben

- Das LP sollte nicht unbeschränkt sein.
- Daher werden zusätzlich Box-Bedingungen eingefügt.

• 
$$-t \leqslant x_i \leqslant t$$
 für:  $(1 \leqslant i \leqslant d)$ .

- t muss so groß sein, dass keine Basislösung verloren geht.
- $\bullet$  D.h. in jeder Basislösung müssen die Variablenwerte zwischen t und -t liegen.
- So ein Wert t existiert immer.

## Vorgaben

- Das LP sollte nicht unbeschränkt sein.
- Daher werden zusätzlich Box-Bedingungen eingefügt.
  - $-t \leqslant x_i \leqslant t$  für:  $(1 \leqslant i \leqslant d)$ .
  - t muss so groß sein, dass keine Basislösung verloren geht.
  - ullet D.h. in jeder Basislösung müssen die Variablenwerte zwischen t und -t liegen.
  - So ein Wert t existiert immer.
  - $\bullet\ t$  kann polynomiell in der Eingabelänge bestimmt werden.

 Dualität 0000000 Walter Unger 22.11.201813:52

Ganzzahligkeit 00000000 SS2015 RWTH

Vorgaben

- Das LP sollte nicht unbeschränkt sein.
- Daher werden zusätzlich Box-Bedingungen eingefügt.
  - $-t \leqslant x_i \leqslant t$  für:  $(1 \leqslant i \leqslant d)$ .
  - t muss so groß sein, dass keine Basislösung verloren geht.
  - ullet D.h. in jeder Basislösung müssen die Variablenwerte zwischen t und -t liegen.
  - So ein Wert t existiert immer.
  - t kann polynomiell in der Eingabelänge bestimmt werden.
  - Man kann auch t als symbolischen Wert darstellen.

Algorithmus von Seidel

Dualität 0000000 Walter Unger 22.11.201813:52

Ganzzahligkeit 00000000 SS2015 RWTH

Vorgaben

- Das LP sollte nicht unbeschränkt sein.
- Daher werden zusätzlich Box-Bedingungen eingefügt.
  - $-t \leqslant x_i \leqslant t$  für:  $(1 \leqslant i \leqslant d)$ .
  - t muss so groß sein, dass keine Basislösung verloren geht.
  - ullet D.h. in jeder Basislösung müssen die Variablenwerte zwischen t und -t liegen.
  - So ein Wert t existiert immer.
  - t kann polynomiell in der Eingabelänge bestimmt werden.
  - Man kann auch t als symbolischen Wert darstellen.
  - Dann wird t im folgenden Algorithmus immer größer sein als jeder bis dahin berechnete Wert.

## Algorithmus von Seidel (1991)

• Idee:

# Algorithmus von Seidel (1991)

Idee:

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n

• Sei H die Menge der Nebenbedingungen (Ohne Box-Bedingungen).

# Algorithmus von Seidel (1991)

• Idee:

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n

- Sei H die Menge der Nebenbedingungen (Ohne Box-Bedingungen).
- Wähle zufällig  $h \in H$  aus, und

Dualität 0000000

000000000

Ganzzahligkeit

Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWTH

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n

# Algorithmus von Seidel (1991)

#### Idee:

- Sei H die Menge der Nebenbedingungen (Ohne Box-Bedingungen).
- Wähle zufällig  $h \in H$  aus, und
- löse dann rekursiv

Walter Unger 22.11.2018 13:52 S

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n

# Algorithmus von Seidel (1991)

- Idee:
  - C: WE ME THE COLD DE
  - Sei H die Menge der Nebenbedingungen (Ohne Box-Bedingungen).
  - ullet Wähle zufällig  $h \in H$  aus, und
  - löse dann rekursiv.
- Für  $H' \subset H$  sei LP(H') das LP, bei dem alle Nebenbedingungen aus  $H \setminus H'$  gestrichen wurden.

Dualität

# Algorithmus von Seidel (1991)

Idee:

Einleitung zu LPs

0000000000000000

4:22 Algorithmus 6/11

- Sei H die Menge der Nebenbedingungen (Ohne Box-Bedingungen).
- Wähle zufällig  $h \in H$  aus, und
- löse dann rekursiv
- Für  $H' \subset H$  sei LP(H') das LP, bei dem alle Nebenbedingungen aus  $H \setminus H'$  gestrichen wurden.
- Die optimale Basislösung von LP(H') wird mit opt(H') bezeichnet.

Dualität

0000000

#### Idee:

Einleitung zu LPs

0000000000000000

4:22 Algorithmus 7/11

- Sei H die Menge der Nebenbedingungen (Ohne Box-Bedingungen).
- Wähle zufällig  $h \in H$  aus, und
- löse dann rekursiv
- Für  $H' \subset H$  sei LP(H') das LP, bei dem alle Nebenbedingungen aus  $H \setminus H'$  gestrichen wurden.
- Die optimale Basislösung von LP(H') wird mit opt(H') bezeichnet.
- Algorithmus von Seidel:

Idee:

Einleitung zu LPs

0000000000000000

4:22 Algorithmus 8/11

- Sei H die Menge der Nebenbedingungen (Ohne Box-Bedingungen).
- Wähle zufällig  $h \in H$  aus, und
- löse dann rekursiv
- Für  $H' \subset H$  sei LP(H') das LP, bei dem alle Nebenbedingungen aus  $H \setminus H'$  gestrichen wurden.
- Die optimale Basislösung von LP(H') wird mit opt(H') bezeichnet.
- Algorithmus von Seidel:
  - **1** Falls d=1 oder m=0, so gebe opt(H) aus.

# Algorithmus von Seidel (1991)

Idee:

Einleitung zu LPs

0000000000000000

- Sei H die Menge der Nebenbedingungen (Ohne Box-Bedingungen).
- Wähle zufällig  $h \in H$  aus, und
- löse dann rekursiv
- Für  $H' \subset H$  sei LP(H') das LP, bei dem alle Nebenbedingungen aus  $H \setminus H'$  gestrichen wurden.
- Die optimale Basislösung von LP(H') wird mit opt(H') bezeichnet.
- Algorithmus von Seidel:
  - **4** Falls d=1 oder m=0, so gebe opt(H) aus.
  - **2** Ansonsten wähle uniform eine Nebenbedingung  $h \in H$  aus, und berechne  $opt(H \setminus \{h\})$  rekursiv.

# Algorithmus von Seidel (1991)

Idee:

Einleitung zu LPs

- Sei H die Menge der Nebenbedingungen (Ohne Box-Bedingungen).
- Wähle zufällig  $h \in H$  aus, und
- löse dann rekursiv
- Für  $H' \subset H$  sei LP(H') das LP, bei dem alle Nebenbedingungen aus  $H \setminus H'$  gestrichen wurden.
- Die optimale Basislösung von LP(H') wird mit opt(H') bezeichnet.
- Algorithmus von Seidel:
  - **4** Falls d=1 oder m=0, so gebe opt(H) aus.
  - **2** Ansonsten wähle uniform eine Nebenbedingung  $h \in H$  aus, und berechne  $opt(H \setminus \{h\})$  rekursiv.
  - 3 Falls  $opt(H \setminus \{h\})$  die Nebenbedingung h nicht verletzt, so gebe  $opt(H \setminus \{h\}) = opt(H)$  aus.

# Algorithmus von Seidel (1991)

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n

- Idee:
  - Sei H die Menge der Nebenbedingungen (Ohne Box-Bedingungen).
  - Wähle zufällig  $h \in H$  aus, und
  - löse dann rekursiv
- Für  $H' \subset H$  sei LP(H') das LP, bei dem alle Nebenbedingungen aus  $H \setminus H'$  gestrichen wurden.
- Die optimale Basislösung von LP(H') wird mit opt(H') bezeichnet.
- Algorithmus von Seidel:
  - **4** Falls d=1 oder m=0, so gebe opt(H) aus.
  - **2** Ansonsten wähle uniform eine Nebenbedingung  $h \in H$  aus, und berechne  $opt(H \setminus \{h\})$  rekursiv.
  - 3 Falls  $opt(H \setminus \{h\})$  die Nebenbedingung h nicht verletzt, so gebe  $opt(H \setminus \{h\}) = opt(H)$  aus.
  - Ansonsten berechne den Schnitt des Lösungspolyhedrons mit der Hyperebene h, und löse das so entstandene (d-1)-dimensionale LP rekursiv.

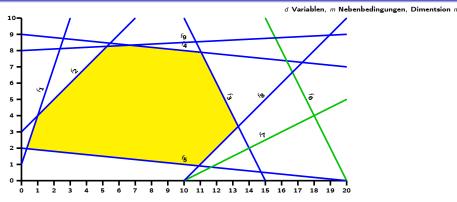
Einleitung zu LPs Algorithmus von Seidel 000000000000000 0000000 4:23 Algorithmus 1/9 Beispiel (Abstieg der ersten vier Rekursionen)

000000000 Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWTH

Ganzzahligkeit

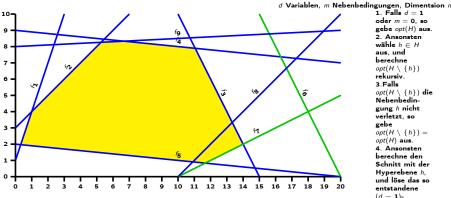
Dualität

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n



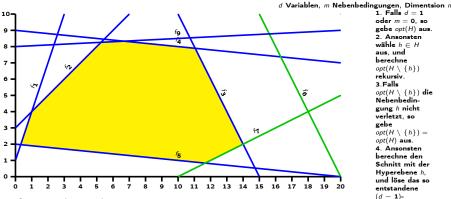
Entferne nacheinander f<sub>8</sub>,

$$\begin{array}{lll} f_1: y \leqslant 3 \cdot x + 1 & f_4: y \leqslant -0.9 \cdot x + 9 & f_7: y \geqslant 0.5 \cdot x - 5 \\ f_2: y \leqslant 1 \cdot x + 2 & f_5: y \geqslant -0.9 \cdot x + 2 & f_8: y \geqslant 1 \cdot x - 10 \\ f_3: y \leqslant -2 \cdot x + 30 & f_6: y \leqslant -2 \cdot x + 40 & f_9: y \leqslant 1.05 \cdot x + 8 \end{array}$$



Entferne nacheinander  $f_8$ ,

$$\begin{array}{lll} f_1: y \leqslant 3 \cdot x + 1 & f_4: y \leqslant -0.9 \cdot x + 9 & f_7: y \geqslant 0.5 \cdot x - 5 \\ f_2: y \leqslant 1 \cdot x + 2 & f_5: y \geqslant -0.9 \cdot x + 2 & f_8: y \geqslant 1 \cdot x - 10 \\ f_3: y \leqslant -2 \cdot x + 30 & f_6: y \leqslant -2 \cdot x + 40 & f_9: y \leqslant 1.05 \cdot x + 8 \end{array}$$

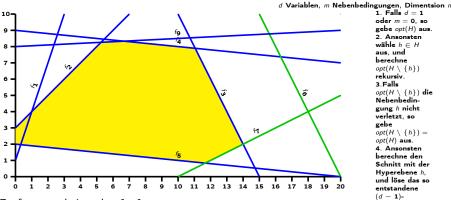


Entferne nacheinander  $f_8$ ,  $f_1$ ,

$$f_1: y \le 3 \cdot x + 1 \qquad f_4: y \le -0.9 \cdot x + 9 \qquad f_7: y \ge 0.5 \cdot x - 5$$

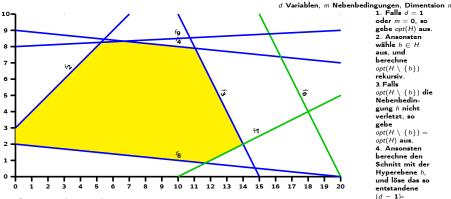
$$f_2: y \le 1 \cdot x + 2 \qquad f_5: y \ge -0.9 \cdot x + 2$$

$$f_3: y \le -2 \cdot x + 30 \qquad f_6: y \le -2 \cdot x + 40 \qquad f_9: y \le 1.05 \cdot x + 8$$



Entferne nacheinander  $f_8$ ,  $f_1$ ,

$$f_1: y \le 3 \cdot x + 1$$
  $f_4: y \le -0.9 \cdot x + 9$   $f_7: y \ge 0.5 \cdot x - 5$   
 $f_2: y \le 1 \cdot x + 2$   $f_5: y \ge -0.9 \cdot x + 2$   
 $f_3: y \le -2 \cdot x + 30$   $f_6: y \le -2 \cdot x + 40$   $f_9: y \le 1.05 \cdot x + 8$ 

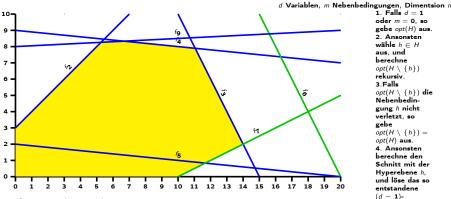


Entferne nacheinander f<sub>8</sub>, f<sub>1</sub>, f<sub>5</sub>

$$f_4: y \leqslant -0.9 \cdot x + 9 \quad f_7: y \geqslant 0.5 \cdot x - 5$$

$$f_2: y \leqslant 1 \cdot x + 2 \quad f_5: y \geqslant -0.9 \cdot x + 2$$

$$f_3: y \leqslant -2 \cdot x + 30 \quad f_6: y \leqslant -2 \cdot x + 40 \quad f_9: y \leqslant 1.05 \cdot x + 8$$

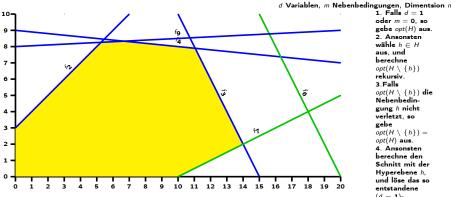


Entferne nacheinander f<sub>8</sub>, f<sub>1</sub>, f<sub>5</sub>

$$f_4: y \le -0.9 \cdot x + 9 \quad f_7: y \ge 0.5 \cdot x - 5$$

$$f_2: y \le 1 \cdot x + 2 \quad f_5: y \ge -0.9 \cdot x + 2$$

$$f_3: y \le -2 \cdot x + 30 \quad f_6: y \le -2 \cdot x + 40 \quad f_9: y \le 1.05 \cdot x + 8$$

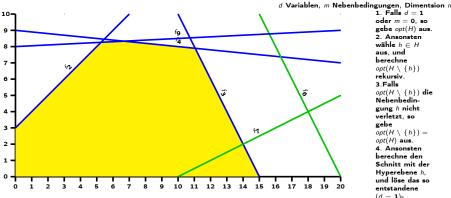


Entferne nacheinander  $f_8$ ,  $f_1$ ,  $f_5$  und  $f_7$  und löse jeweils rekursiv.

$$f_4: y \leqslant -0.9 \cdot x + 9$$
  $f_7: y \geqslant 0.5 \cdot x - 5$ 

$$f_2: v \leq 1 \cdot x + 2$$

$$f_3: y \leqslant -2 \cdot x + 30$$
  $f_6: y \leqslant -2 \cdot x + 40$   $f_9: y \leqslant 1.05 \cdot x + 8$ 



Entferne nacheinander  $f_8$ ,  $f_1$ ,  $f_5$  und  $f_7$  und löse jeweils rekursiv.

$$f_4: y \leqslant -0.9 \cdot x + 9$$
  $f_7: y \geqslant 0.5 \cdot x - 5$ 

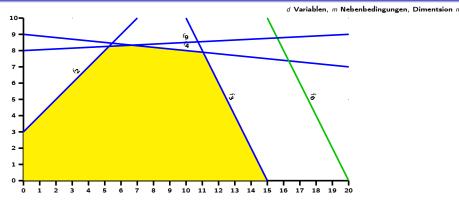
$$f_2: v \leq 1 \cdot x + 2$$

$$f_3: y \leqslant -2 \cdot x + 30$$
  $f_6: y \leqslant -2 \cdot x + 40$   $f_9: y \leqslant 1.05 \cdot x + 8$ 

Einleitung zu LPs Algorithmus von Seidel Dualität Ganzzahligkeit 000000000000000 0000000 000000000 4:24 Algorithmus 1/11 Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWTH

# Beispiel (Abstieg der nächsten vier Rekursionen)

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n



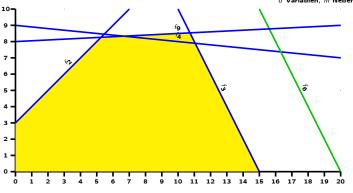
Entferne nacheinander  $f_4$ ,

$$\textit{f}_4: y \leqslant -0.9 \cdot x + 9$$

$$f_2: y \leqslant 1 \cdot x + 2$$

$$f_3: y \leq -2 \cdot x + 30$$
  $f_6: y \leq -2 \cdot x + 40$   $f_9: y \leq 1.05 \cdot x + 8$ 

$$f_9: y \leqslant 1.05 \cdot x + 3$$



Entferne nacheinander f4,

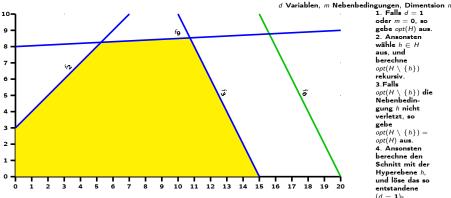
$$f_4:y\leqslant -0.9\cdot x+9$$

$$f_2: y \leq 1 \cdot x + 2$$

$$f \cdot y < 2 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot$$

$$f_3: y \leq -2 \cdot x + 30$$
  $f_6: y \leq -2 \cdot x + 40$   $f_9: y \leq 1.05 \cdot x + 8$ 

$$f_9: y \leqslant 1.05 \cdot x +$$



Entferne nacheinander  $f_4$ ,  $f_6$ ,

 $f_2: y \leq 1 \cdot x + 2$ 

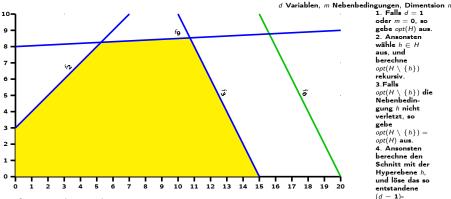
Einleitung zu LPs

0000000000000000

$$f_2: y \le 1 \cdot x + 2$$
  
 $f_3: y \le -2 \cdot x + 30$   $f_6: y \le -2 \cdot x + 40$   $f_9: y \le 1.05 \cdot x + 8$ 

 Falls d = 1 oder m = 0, so gebe opt(H) aus. 2. Ansonsten wähle  $h \in H$ aus, und berechne  $opt(H \setminus \{h\})$ rekursiv. 3.Falls  $opt(H \setminus \{h\})$  die Nebenbedingung h nicht verletzt, so gebe  $opt(H \setminus \{h\}) =$ opt(H) aus. 4. Ansonsten berechne den Schnitt mit der Hyperebene h, und löse das so entstandene (d - 1)dimensionale

I P rekursiv



Entferne nacheinander  $f_4$ ,  $f_6$ ,

Falls d = 1

oder m = 0, so gebe opt(H) aus.

$$\textit{f}_2: y \leqslant 1 \cdot x + 2$$

Einleitung zu LPs

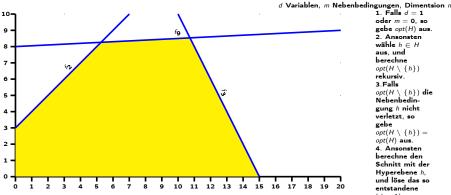
0000000000000000

4:24 Algorithmus 5/11

$$f_3: y \le -2 \cdot x + 30$$
  $f_6: y \le -2 \cdot x + 40$   $f_9: y \le 1.05 \cdot x + 8$ 

$$f_6: y \leqslant -2 \cdot x + 40$$

$$f_9: y \leqslant 1.05 \cdot x +$$



Entferne nacheinander f4, f6, f3

$$f_2: y \le 1 \cdot x + 2$$
  
 $f_3: y \le -2 \cdot x + 30$ 

Einleitung zu LPs

0000000000000000

4:24 Algorithmus 6/11

$$f_9: y \leq 1.05 \cdot x + 8$$

 Falls d = 1 oder m = 0, so gebe opt(H) aus. 2. Ansonsten wähle  $h \in H$ aus, und berechne  $opt(H \setminus \{h\})$ rekursiv. 3.Falls  $opt(H \setminus \{h\})$  die Nebenbedingung h nicht verletzt, so gebe  $opt(H \setminus \{h\}) =$ opt(H) aus. 4. Ansonsten berechne den Schnitt mit der Hyperebene h, und löse das so entstandene (d - 1)dimensionale

I P rekursiv

Falls d = 1

oder m = 0, so gebe opt(H) aus.

2. Ansonsten wähle  $h \in H$ 

 $opt(H \setminus \{h\})$ rekursiv.

Nebenbedingung h nicht

verletzt, so gebe

 $opt(H \setminus \{h\}) =$ opt(H) aus.

4. Ansonsten berechne den

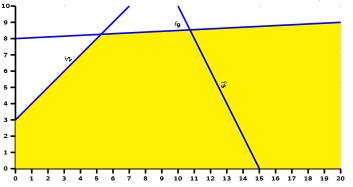
dimensionale I P rekursiv

Schnitt mit der Hyperebene h, und löse das so entstandene (d - 1)-

aus, und berechne

3.Falls  $opt(H \setminus \{h\})$  die

# Beispiel (Abstieg der nächsten vier Rekursionen)

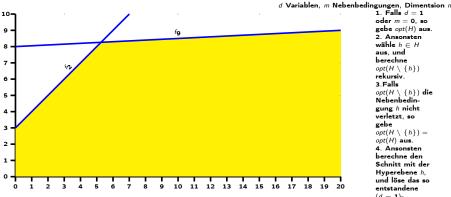


Entferne nacheinander f4, f6, f3

$$f_2: y \le 1 \cdot x + 2$$
  
 $f_3: y \le -2 \cdot x + 30$ 

Einleitung zu LPs

$$f_9: y \leq 1.05 \cdot x + 8$$



Entferne nacheinander  $f_4$ ,  $f_6$ ,  $f_3$  und  $f_2$  und löse jeweils rekursiv.

oder m = 0, so gebe opt(H) aus. 2. Ansonsten wähle  $h \in H$ aus, und berechne  $opt(H \setminus \{h\})$ rekursiv. 3.Falls  $opt(H \setminus \{h\})$  die Nebenbedingung h nicht verletzt, so gebe  $opt(H \setminus \{h\}) =$ opt(H) aus. 4. Ansonsten berechne den Schnitt mit der Hyperebene h, und löse das so entstandene (d - 1)dimensionale

I P rekursiv

Falls d = 1

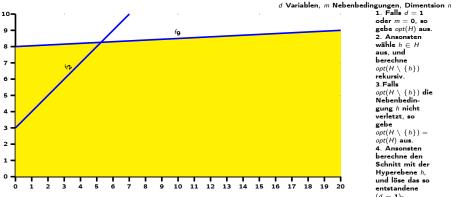
$$f_2: y \leq 1 \cdot x + 2$$

Einleitung zu LPs

0000000000000000

4:24 Algorithmus 8/11

$$f_9: y \leq 1.05 \cdot x + 8$$



Entferne nacheinander  $f_4$ ,  $f_6$ ,  $f_3$  und  $f_2$  und löse jeweils rekursiv.

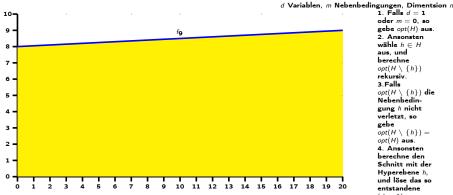
 Falls d = 1 oder m = 0, so gebe opt(H) aus. 2. Ansonsten wähle  $h \in H$ aus, und berechne  $opt(H \setminus \{h\})$ rekursiv. 3.Falls  $opt(H \setminus \{h\})$  die Nebenbedingung h nicht verletzt, so gebe  $opt(H \setminus \{h\}) =$ opt(H) aus. 4. Ansonsten berechne den Schnitt mit der Hyperebene h, und löse das so entstandene (d - 1)dimensionale

I P rekursiv

$$f_2: y \leq 1 \cdot x + 2$$

Einleitung zu LPs

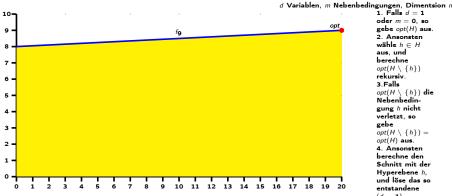
$$f_9: y \leq 1.05 \cdot x + 8$$



Entferne nacheinander  $f_4$ ,  $f_6$ ,  $f_3$  und  $f_2$  und löse jeweils rekursiv.

 Falls d = 1 oder m = 0, so gebe opt(H) aus. 2. Ansonsten wähle  $h \in H$ aus, und berechne  $opt(H \setminus \{h\})$ rekursiv. 3.Falls  $opt(H \setminus \{h\})$  die Nebenbedingung h nicht verletzt, so gebe  $opt(H \setminus \{h\}) =$ opt(H) aus. 4. Ansonsten berechne den Schnitt mit der Hyperebene h, und löse das so entstandene (d - 1)dimensionale

I P rekursiv

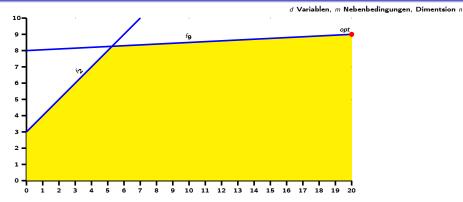


Entferne nacheinander  $f_4$ ,  $f_6$ ,  $f_3$  und  $f_2$  und löse jeweils rekursiv.

Einleitung zu LPs Algorithmus von Seidel Dualität Ganzzahligkeit 000000000000000 0000000 000000000 4:25 Algorithmus 1/8 Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWTH

Beispiel (Aufstieg der letzten vier Rekursionen)

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n



Füge nacheinander wieder ein:  $f_2$ ,

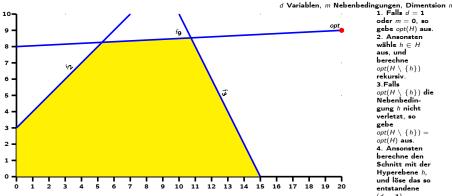
$$f_2: y \le 1 \cdot x + 2$$

Einleitung zu LPs

0000000000000000

4:25 Algorithmus 2/8

$$f_9: y \leq 1.05 \cdot x + 8$$



Füge nacheinander wieder ein:  $f_2$ ,  $f_3$ ,

$$f_2: y \le 1 \cdot x + 2$$
  
 $f_3: y \le -2 \cdot x + 30$ 

$$f_9: y \leq 1.05 \cdot x + 8$$

 Falls d = 1 oder m = 0, so gebe opt(H) aus. 2. Ansonsten wähle  $h \in H$ aus, und berechne  $opt(H \setminus \{h\})$ rekursiv. 3.Falls  $opt(H \setminus \{h\})$  die Nebenbedingung h nicht verletzt, so gebe  $opt(H \setminus \{h\}) =$ opt(H) aus. 4. Ansonsten berechne den Schnitt mit der Hyperebene h, und löse das so entstandene (d - 1)dimensionale

I P rekursiv

Falls d = 1

2. Ansonsten wähle  $h \in H$ 

 $opt(H \setminus \{h\})$ rekursiv.

Nebenbedingung h nicht

verletzt, so gebe

 $opt(H \setminus \{h\}) =$ opt(H) aus.

4. Ansonsten berechne den

dimensionale I P rekursiv

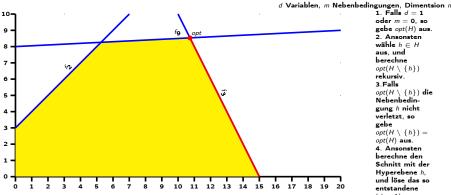
Schnitt mit der Hyperebene h, und löse das so entstandene (d - 1)-

aus, und berechne

3.Falls  $opt(H \setminus \{h\})$  die

oder m = 0, so gebe opt(H) aus.

## Beispiel (Aufstieg der letzten vier Rekursionen)



Füge nacheinander wieder ein:  $f_2$ ,  $f_3$ ,

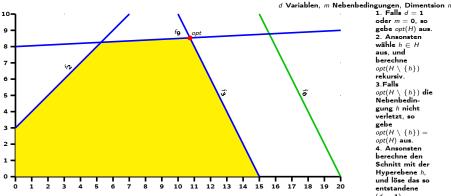
$$f_2: y \le 1 \cdot x + 2$$
  
 $f_3: y \le -2 \cdot x + 30$ 

Einleitung zu LPs

0000000000000000

4:25 Algorithmus 4/8

$$f_9: y \leq 1.05 \cdot x + 8$$



Füge nacheinander wieder ein:  $f_2$ ,  $f_3$ ,  $f_6$ 

 Falls d = 1 oder m = 0, so gebe opt(H) aus. 2. Ansonsten wähle  $h \in H$ aus, und berechne  $opt(H \setminus \{h\})$ rekursiv. 3.Falls  $opt(H \setminus \{h\})$  die Nebenbedingung h nicht verletzt, so gebe  $opt(H \setminus \{h\}) =$ opt(H) aus. 4. Ansonsten berechne den Schnitt mit der Hyperebene h, und löse das so entstandene (d - 1)dimensionale

I P rekursiv

$$f_2:y\leqslant 1\cdot x+2$$

Einleitung zu LPs

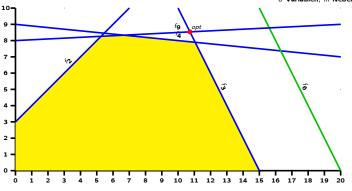
0000000000000000

4:25 Algorithmus 5/8

$$f_3: y \leqslant -2 \cdot x + 30$$
  $f_6: y \leqslant -2 \cdot x + 40$   $f_9: y \leqslant 1.05 \cdot x + 8$ 

$$y \leqslant -2 \cdot x + 40$$

$$f_9: y \leq 1.05 \cdot x +$$



Füge nacheinander wieder ein:  $f_2$ ,  $f_3$ ,  $f_6$  und  $f_4$ .

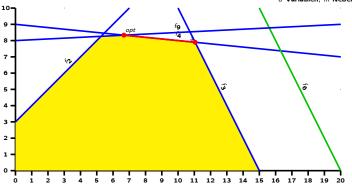
$$f_4: y \leqslant -0.9 \cdot x + 9$$

$$f_2: y \leq 1 \cdot x + 2$$

$$f_2 : v \le -2 \cdot x + 30$$

$$f_3: y \leq -2 \cdot x + 30$$
  $f_6: y \leq -2 \cdot x + 40$   $f_9: y \leq 1.05 \cdot x + 8$ 

$$f_9: y \leq 1.05 \cdot x +$$



Füge nacheinander wieder ein:  $f_2$ ,  $f_3$ ,  $f_6$  und  $f_4$ .

$$f_4: y \leqslant -0.9 \cdot x + 9$$

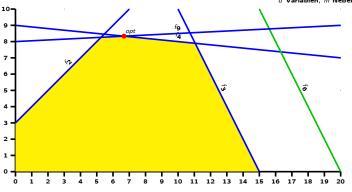
$$f_2: y \leq 1 \cdot x + 2$$

$$f_2: v \le -2 \cdot x + 30$$

$$f_3: y \leq -2 \cdot x + 30$$
  $f_6: y \leq -2 \cdot x + 40$   $f_9: y \leq 1.05 \cdot x + 8$ 

$$f_9: y \leqslant 1.05 \cdot x +$$

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n Falls d = 1 oder m = 0, so gebe opt(H) aus. 2. Ansonsten wähle  $h \in H$ aus, und berechne  $opt(H \setminus \{h\})$ rekursiv. 3.Falls  $opt(H \setminus \{h\})$  die Nebenbedingung h nicht verletzt, so gebe  $opt(H \setminus \{h\}) =$ opt(H) aus. 4. Ansonsten berechne den Schnitt mit der Hyperebene h, und löse das so entstandene (d - 1)dimensionale I P rekursiv



Füge nacheinander wieder ein:  $f_2$ ,  $f_3$ ,  $f_6$  und  $f_4$ .

$$f_4: y \leqslant -0.9 \cdot x + 9$$

$$f_2: y \leq 1 \cdot x + 2$$

$$f_2 : v \le -2 \cdot x + 30$$

$$f_3: y \leq -2 \cdot x + 30$$
  $f_6: y \leq -2 \cdot x + 40$   $f_9: y \leq 1.05 \cdot x + 8$ 

$$f_9: y \leq 1.05 \cdot x +$$

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n Falls d = 1 oder m = 0, so gebe opt(H) aus. 2. Ansonsten wähle  $h \in H$ aus, und berechne  $opt(H \setminus \{h\})$ rekursiv. 3.Falls  $opt(H \setminus \{h\})$  die Nebenbedingung h nicht verletzt, so gebe  $opt(H \setminus \{h\}) =$ opt(H) aus. 4. Ansonsten berechne den Schnitt mit der Hyperebene h, und löse das so entstandene (d - 1)dimensionale I P rekursiv

000000000000000 0000000 4:26 Algorithmus 1/5 Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWTH

Algorithmus von Seidel

Beispiel (Aufstieg der ersten vier Rekursionen)

Einleitung zu LPs

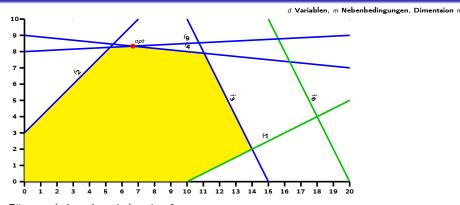
Ganzzahligkeit

000000000

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n

Dualität

### Beispiel (Aufstieg der ersten vier Rekursionen)



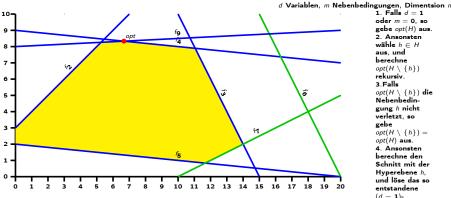
Füge nacheinander wieder ein:  $f_7$ ,

$$f_4:y\leqslant -0.9\cdot x+9 \quad f_7:y\geqslant 0.5\cdot x-5$$

$$f_2: y \leq 1 \cdot x + 2$$

Einleitung zu LPs

$$f_3: y \leqslant -2 \cdot x + 30$$
  $f_6: y \leqslant -2 \cdot x + 40$   $f_9: y \leqslant 1.05 \cdot x + 8$ 



Füge nacheinander wieder ein:  $f_7$ ,  $f_5$ ,

$$f_4: y \le -0.9 \cdot x + 9 \quad f_7: y \ge 0.5 \cdot x - 5$$

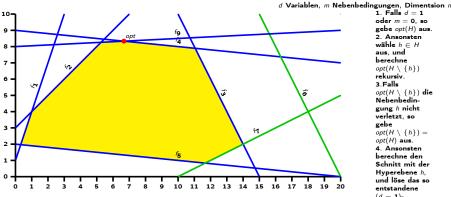
$$f_2: y \le 1 \cdot x + 2 \quad f_5: y \ge -0.9 \cdot x + 2$$

$$f_3: y \le -2 \cdot x + 30 \quad f_6: y \le -2 \cdot x + 40 \quad f_9: y \le 1.05 \cdot x + 8$$

 Falls d = 1 oder m = 0, so gebe opt(H) aus. 2. Ansonsten wähle  $h \in H$ aus, und berechne  $opt(H \setminus \{h\})$ rekursiv. 3.Falls  $opt(H \setminus \{h\})$  die Nebenbedingung h nicht verletzt, so gebe  $opt(H \setminus \{h\}) =$ opt(H) aus. 4. Ansonsten berechne den Schnitt mit der Hyperebene h, und löse das so entstandene (d - 1)dimensionale I P rekursiv

0000000000000000

4:26 Algorithmus 4/5



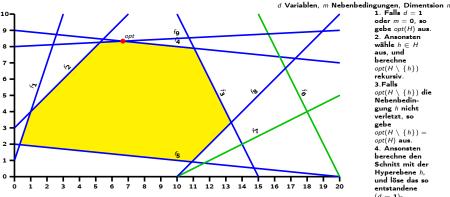
Füge nacheinander wieder ein:  $f_7$ ,  $f_5$ ,  $f_1$ 

$$f_1: y \le 3 \cdot x + 1$$
  $f_4: y \le -0.9 \cdot x + 9$   $f_7: y \ge 0.5 \cdot x - 5$   
 $f_2: y \le 1 \cdot x + 2$   $f_5: y \ge -0.9 \cdot x + 2$   
 $f_3: y \le -2 \cdot x + 30$   $f_6: y \le -2 \cdot x + 40$   $f_9: y \le 1.05 \cdot x + 8$ 

 Falls d = 1 oder m = 0, so gebe opt(H) aus. 2. Ansonsten wähle  $h \in H$ aus, und berechne  $opt(H \setminus \{h\})$ rekursiv. 3.Falls  $opt(H \setminus \{h\})$  die Nebenbedingung h nicht verletzt, so gebe  $opt(H \setminus \{h\}) =$ opt(H) aus. 4. Ansonsten berechne den Schnitt mit der Hyperebene h, und löse das so entstandene (d - 1)dimensionale I P rekursiv

0000000000000000

### Beispiel (Aufstieg der ersten vier Rekursionen)



Füge nacheinander wieder ein:  $f_7$ ,  $f_5$ ,  $f_1$  und  $f_8$ .

$$\begin{array}{lll} f_1: y \leqslant 3 \cdot x + 1 & f_4: y \leqslant -0.9 \cdot x + 9 & f_7: y \geqslant 0.5 \cdot x - 5 \\ f_2: y \leqslant 1 \cdot x + 2 & f_5: y \geqslant -0.9 \cdot x + 2 & f_8: y \geqslant 1 \cdot x - 10 \\ f_3: y \leqslant -2 \cdot x + 30 & f_6: y \leqslant -2 \cdot x + 40 & f_9: y \leqslant 1.05 \cdot x + 8 \end{array}$$

 Falls d = 1 oder m = 0, so gebe opt(H) aus. 2. Ansonsten wähle  $h \in H$ aus, und berechne  $opt(H \setminus \{h\})$ rekursiv. 3.Falls  $opt(H \setminus \{h\})$  die Nebenbedingung h nicht verletzt, so gebe  $opt(H \setminus \{h\}) =$ opt(H) aus. 4. Ansonsten berechne den Schnitt mit der Hyperebene h, und löse das so entstandene (d - 1)dimensionale I P rekursiv

 $^d$  Variablen,  $^m$  Nebenbedingungen, Dimentsion  $^n$  Falls d=1 gilt, gibt es nur noch eine Variable  $x_i$ .

- $^d$  Variablen,  $^m$  Nebenbedingungen, Dimentsion  $^n$  Falls d=1 gilt, gibt es nur noch eine Variable  $x_i$ .
  - Es gibt noch *m* Nebenbedingungen.

Dualität 0000000 Walter Unger 22.11.2018 13:52

#### Ganzzahligkeit 00000000 SS2015 RWTH

### Laufzeiten und Details (Schritt 1 bis 3)

- d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n Falls d=1 gilt, gibt es nur noch eine Variable  $x_i$ .
  - Es gibt noch *m* Nebenbedingungen.
  - Damit kann  $x_i$  in Zeit O(m) bestimmt werden.

Dualität 0000000 Ganzzahligkeit 000000000 S2015 RWTH

4:27 Laufzeit 4/12 Walter Unger 22.11.201813:52 SS2015 RWTH

### Laufzeiten und Details (Schritt 1 bis 3)

 $^d$  Variablen,  $^m$  Nebenbedingungen, Dimentsion  $^n$  Falls d=1 gilt, gibt es nur noch eine Variable  $x_i$ .

- Es gibt noch *m* Nebenbedingungen.
- Damit kann  $x_i$  in Zeit O(m) bestimmt werden.
- Falls  $x_i \in \{-t, t\}$  ist das LP ohne Box-Bedingungen unbeschränkt.

- $^d$  Variablen,  $^m$  Nebenbedingungen, Dimentsion  $^n$  Falls d=1 gilt, gibt es nur noch eine Variable  $x_i$ .
  - Es gibt noch m Nebenbedingungen.
  - Damit kann  $x_i$  in Zeit O(m) bestimmt werden.
  - Falls  $x_i \in \{-t, t\}$  ist das LP ohne Box-Bedingungen unbeschränkt.
  - Ansonsten ist  $-t < x_i < t$  die optimale Lösung.

Einleitung zu LPs

0000000000000000

4:27 Laufzeit 6/12

- d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n • Falls d = 1 gilt, gibt es nur noch eine Variable  $x_i$ .
  - Es gibt noch m Nebenbedingungen.
  - Damit kann  $x_i$  in Zeit O(m) bestimmt werden.
  - Falls  $x_i \in \{-t, t\}$  ist das LP ohne Box-Bedingungen unbeschränkt.
    - Ansonsten ist  $-t < x_i < t$  die optimale Lösung.
- Falls m = 1 gilt, gibt es nur eine Nebenbedingung neben den Box-Bedingungen.

Einleitung zu LPs

0000000000000000

4:27 Laufzeit 7/12

- d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n • Falls d = 1 gilt, gibt es nur noch eine Variable  $x_i$ .
  - Es gibt noch m Nebenbedingungen.
  - Damit kann  $x_i$  in Zeit O(m) bestimmt werden.
  - Falls  $x_i \in \{-t, t\}$  ist das LP ohne Box-Bedingungen unbeschränkt.
  - Ansonsten ist  $-t < x_i < t$  die optimale Lösung.
  - Falls m=1 gilt, gibt es nur eine Nebenbedingung neben den Box-Bedingungen.
    - Damit haben wir ein relaxiertes Rucksackproblem.

Dualität Ganzzahligkeit 0000000 Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWTH

### Laufzeiten und Details (Schritt 1 bis 3)

Einleitung zu LPs

0000000000000000

4:27 Laufzeit 8/12

- d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n • Falls d = 1 gilt, gibt es nur noch eine Variable  $x_i$ .
  - Es gibt noch m Nebenbedingungen.
  - Damit kann  $x_i$  in Zeit O(m) bestimmt werden.
  - Falls  $x_i \in \{-t, t\}$  ist das LP ohne Box-Bedingungen unbeschränkt.
  - Ansonsten ist  $-t < x_i < t$  die optimale Lösung.
- Falls m=1 gilt, gibt es nur eine Nebenbedingung neben den Box-Bedingungen.
  - Damit haben wir ein relaxiertes Rucksackproblem.
  - Dies kann optimal mittels Greedy gelöst werden.

0000000000000000

4:27 Laufzeit 9/12

- d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n • Falls d = 1 gilt, gibt es nur noch eine Variable  $x_i$ .
  - Es gibt noch m Nebenbedingungen.
  - Damit kann  $x_i$  in Zeit O(m) bestimmt werden.
  - Falls  $x_i \in \{-t, t\}$  ist das LP ohne Box-Bedingungen unbeschränkt.
  - Ansonsten ist  $-t < x_i < t$  die optimale Lösung.
  - Falls m=1 gilt, gibt es nur eine Nebenbedingung neben den Box-Bedingungen.
    - Damit haben wir ein relaxiertes Rucksackproblem.
    - Dies kann optimal mittels Greedy gelöst werden.
    - Laufzeit: O(d log d) = O(d<sup>2</sup>).

0000000000000000

4:27 Laufzeit 10/12

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n • Falls d = 1 gilt, gibt es nur noch eine Variable  $x_i$ .

- Es gibt noch m Nebenbedingungen.
- Damit kann  $x_i$  in Zeit O(m) bestimmt werden.
- Falls  $x_i \in \{-t, t\}$  ist das LP ohne Box-Bedingungen unbeschränkt.
- Ansonsten ist  $-t < x_i < t$  die optimale Lösung.
- Falls m=1 gilt, gibt es nur eine Nebenbedingung neben den Box-Bedingungen.
  - Damit haben wir ein relaxiertes Rucksackproblem.
  - Dies kann optimal mittels Greedy gelöst werden.
  - Laufzeit: O(d log d) = O(d<sup>2</sup>).
- In Schritt 2 wird rekursiv ein Problem gelöst, bei dem m um eins verringert ist.

Einleitung zu LPs

0000000000000000

4:27 Laufzeit 11/12

- d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n • Falls d = 1 gilt, gibt es nur noch eine Variable  $x_i$ .
  - Es gibt noch m Nebenbedingungen.
  - Damit kann x<sub>i</sub> in Zeit O(m) bestimmt werden.
  - Falls  $x_i \in \{-t, t\}$  ist das LP ohne Box-Bedingungen unbeschränkt.
  - Ansonsten ist  $-t < x_i < t$  die optimale Lösung.
  - Falls m=1 gilt, gibt es nur eine Nebenbedingung neben den Box-Bedingungen.
    - Damit haben wir ein relaxiertes Rucksackproblem.
    - Dies kann optimal mittels Greedy gelöst werden.
    - Laufzeit: O(d log d) = O(d<sup>2</sup>).
  - In Schritt 2 wird rekursiv ein Problem gelöst, bei dem m um eins verringert ist.
- In Schritt 3 wird getestet, ob die gewählte Hyperebene h nicht die Lösung  $opt(H \setminus \{h\})$  verletzt.

0000000000000000

4:27 Laufzeit 12/12

- Falls d = 1 gilt, gibt es nur noch eine Variable  $x_i$ .
  - Es gibt noch m Nebenbedingungen.
  - Damit kann x<sub>i</sub> in Zeit O(m) bestimmt werden.
  - Falls  $x_i \in \{-t, t\}$  ist das LP ohne Box-Bedingungen unbeschränkt.
    - Ansonsten ist  $-t < x_i < t$  die optimale Lösung.
- Falls m=1 gilt, gibt es nur eine Nebenbedingung neben den Box-Bedingungen.
  - Damit haben wir ein relaxiertes Rucksackproblem.
  - Dies kann optimal mittels Greedy gelöst werden.
  - Laufzeit: O(d log d) = O(d<sup>2</sup>).
- In Schritt 2 wird rekursiv ein Problem gelöst, bei dem m um eins verringert ist.
- In Schritt 3 wird getestet, ob die gewählte Hyperebene h nicht die Lösung  $opt(H \setminus \{h\})$  verletzt.
  - Das kann in O(d) gelöst werden.

## Laufzeiten und Details (Schritt 4)

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion nFasse die Nebenbedingung h als Gleichung auf.

 Dualität
 Ganzzahligkeit

 0000000
 00000000

 Walter Unger 22.11.2018 13:52
 SS2015
 RWTH

### Laufzeiten und Details (Schritt 4)

- d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion nFasse die Nebenbedingung h als Gleichung auf.
- Löse h zu einer beliebigen Variablen  $x_k$  auf  $(k \in \{1, 2, ..., d\})$ .

0000000000000000

4:28 Laufzeit 3/12

- Fasse die Nebenbedingung h als Gleichung auf.
- Löse h zu einer beliebigen Variablen  $x_k$  auf  $(k \in \{1, 2, ..., d\})$ .
- D.h.  $x_k = s_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_d)$ .

0000000000000000

- Fasse die Nebenbedingung h als Gleichung auf.
- Löse h zu einer beliebigen Variablen  $x_k$  auf  $(k \in \{1, 2, ..., d\})$ .
- D.h.  $x_k = s_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_d)$ .
- Ersetze jedes Auftreten von  $x_k$  durch  $s_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_d)$  in:

0000000000000000

4:28 Laufzeit 5/12

- Fasse die Nebenbedingung h als Gleichung auf.
- Löse h zu einer beliebigen Variablen  $x_k$  auf  $(k \in \{1, 2, ..., d\})$ .
- D.h.  $x_k = s_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_d)$ .
- Ersetze jedes Auftreten von  $x_k$  durch  $s_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_d)$  in:
  - allen Nebenbedingungen aus  $H \setminus \{h\}$ ,

0000000000000000

4:28 Laufzeit 6/12

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n

Dualität

0000000

- Fasse die Nebenbedingung h als Gleichung auf.
- Löse h zu einer beliebigen Variablen  $x_k$  auf  $(k \in \{1, 2, ..., d\})$ .
- D.h.  $x_k = s_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_d)$ .
- Ersetze jedes Auftreten von  $x_k$  durch  $s_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_d)$  in:
  - allen Nebenbedingungen aus  $H \setminus \{h\}$ ,
  - in der Zielfunktion, und

0000000000000000

### d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n

Dualität

0000000

Walter Unger 22.11.2018 13:52

- Fasse die Nebenbedingung h als Gleichung auf.
- Löse h zu einer beliebigen Variablen  $x_k$  auf  $(k \in \{1, 2, ..., d\})$ .
- D.h.  $x_k = s_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_d)$ .
- Ersetze jedes Auftreten von  $x_k$  durch  $s_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_d)$  in:
  - allen Nebenbedingungen aus  $H \setminus \{h\}$ ,
  - in der Zielfunktion, und
  - in der Box-Bedingung für  $h_k^- \leq x_k \leq h_k^+$ :

### Laufzeiten und Details (Schritt 4)

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n

Dualität

0000000

- Fasse die Nebenbedingung h als Gleichung auf.
- Löse h zu einer beliebigen Variablen  $x_k$  auf  $(k \in \{1, 2, ..., d\})$ .
- D.h.  $x_k = s_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_d)$ .
- Ersetze jedes Auftreten von  $x_k$  durch  $s_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_d)$  in:
  - allen Nebenbedingungen aus  $H \setminus \{h\}$ ,
  - in der Zielfunktion, und
  - in der Box-Bedingung für  $h_{\nu}^{-} \leq x_{k} \leq h_{\nu}^{+}$ :
    - $h_k^- \leqslant s_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_d)$  und

### Laufzeiten und Details (Schritt 4)

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n

Dualität

0000000

- Fasse die Nebenbedingung h als Gleichung auf.
- Löse h zu einer beliebigen Variablen  $x_k$  auf  $(k \in \{1, 2, ..., d\})$ .
- D.h.  $x_k = s_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_d)$ .
- Ersetze jedes Auftreten von  $x_k$  durch  $s_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_d)$  in:
  - allen Nebenbedingungen aus  $H \setminus \{h\}$ ,
  - in der Zielfunktion, und
  - in der Box-Bedingung für  $h_{\nu}^{-} \leq x_{k} \leq h_{\nu}^{+}$ :
    - $h_k^- \leqslant s_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_d)$  und
    - $h_k^+ \geqslant s_k(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_d)$ .

0000000000000000

4:28 Laufzeit 10/12

- Fasse die Nebenbedingung h als Gleichung auf.
- Löse h zu einer beliebigen Variablen  $x_k$  auf ( $k \in \{1, 2, ..., d\}$ ).
- D.h.  $x_k = s_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_d)$ .
- Ersetze jedes Auftreten von  $x_k$  durch  $s_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_d)$  in:
  - allen Nebenbedingungen aus  $H \setminus \{h\}$ ,
  - in der Zielfunktion, und • in der Box-Bedingung für  $h_k^- \leq x_k \leq h_k^+$ :
    - $h_{i}^{-} \leq s_{k}(x_{1}, x_{2}, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{d})$  und
    - $h_k^+ \geqslant s_k(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_d)$ .
  - Nenne diese beiden letzten Bedingungen h' und h''.

0000000000000000

4:28 Laufzeit 11/12

- Fasse die Nebenbedingung h als Gleichung auf.
- Löse h zu einer beliebigen Variablen  $x_k$  auf ( $k \in \{1, 2, ..., d\}$ ).
- D.h.  $x_k = s_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_d)$ .
- Ersetze jedes Auftreten von  $x_k$  durch  $s_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_d)$  in:
  - allen Nebenbedingungen aus  $H \setminus \{h\}$ ,
  - in der Zielfunktion, und
  - in der Box-Bedingung für  $h_k^- \leq x_k \leq h_k^+$ :
    - $h_k^- \leqslant s_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_d)$  und
    - $h_k^+ \geqslant s_k(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_d)$ .
  - Nenne diese beiden letzten Bedingungen h' und h''.
- Setze nun  $H' = H \cup \{h', h''\} \setminus \{h\}$  und löse H' rekursiv.

0000000000000000

4:28 Laufzeit 12/12

- Fasse die Nebenbedingung h als Gleichung auf.
- Löse h zu einer beliebigen Variablen  $x_k$  auf  $(k \in \{1, 2, ..., d\})$ .
- D.h.  $x_k = s_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_d)$ .
- Ersetze jedes Auftreten von  $x_k$  durch  $s_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_d)$  in:
  - allen Nebenbedingungen aus  $H \setminus \{h\}$ ,
  - in der Zielfunktion, und
  - in der Box-Bedingung für  $h_k^- \leq x_k \leq h_k^+$ :
    - $h_k^- \leqslant s_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_d)$  und
    - $h_k^+ \geqslant s_k(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_d)$ .
  - Nenne diese beiden letzten Bedingungen h' und h''.
- Setze nun  $H' = H \cup \{h', h''\} \setminus \{h\}$  und löse H' rekursiv.
- Beachte: H' hat m+1 Nebenbedingungen, aber nur d-1 Variablen.

00000000000000	0000000000000000	0000000	000000000
4:29 Laufzeit 1/9		Walter Unger 22.11.2018 13:52	SS2015 RWTH
Data dal Calada A ( )	2)		

Algorithmus von Seidel

Beispiel Schritt 4 (d = 3)

Einleitung zu LPs

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n

Ganzzahligkeit

Dualität

Dualität 000000 Ganzzahligkeit 000000000

Walter Unger 22.11.201813:52 SS2015 RWTH

### Beispiel Schritt 4 (d = 3)

### Nebenbedingungen:

$$0 \leqslant x, \quad x \leqslant 10$$

$$0 \leqslant y$$
,  $y \leqslant 10$ 

$$0 \leqslant z, \quad z \leqslant 10$$

Ganzzahligkeit

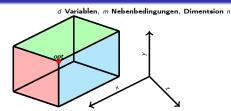
### Beispiel Schritt 4 (d = 3)

#### Nebenbedingungen:

$$0 \leqslant x$$
,  $x \leqslant 10$ 

$$0 \leqslant y$$
,  $y \leqslant 10$ 

$$0 \leqslant z$$
,  $z \leqslant 10$ 



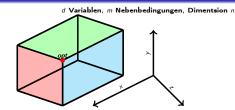
### Beispiel Schritt 4 (d = 3)

#### Nebenbedingungen:

$$0 \leqslant x$$
,  $x \leqslant 10$   $x + y + z \leqslant 25$ 

$$0 \leqslant y, \quad y \leqslant 10$$

$$0 \leqslant z, \quad z \leqslant 10$$



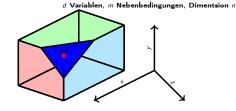
Gegeben seien die sechs einfachen Nebenbedingungen

### Beispiel Schritt 4 (d = 3)

#### Nebenbedingungen:

 $0 \leqslant z$ ,  $z \leqslant 10$ 

$$0 \le x$$
,  $x \le 10$   $x + y + z \le 25$   
 $0 \le y$ ,  $y \le 10$ 



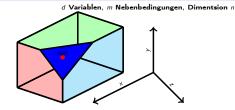
- Gegeben seien die sechs einfachen Nebenbedingungen
- Zu maximieren sei die Funktion  $f(x, y, z) = 0.99 \cdot x + 0.974 \cdot y + z$ .

# Beispiel Schritt 4 (d = 3)

# Nebenbedingungen:

$$0 \le x$$
,  $x \le 10$   $x + y + z \le 25$   
 $0 \le y$ ,  $y \le 10$ 

$$0 \leqslant z, \quad z \leqslant 10$$



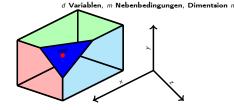
- Gegeben seien die sechs einfachen Nebenbedingungen
- Zu maximieren sei die Funktion  $f(x, y, z) = 0.99 \cdot x + 0.974 \cdot y + z$ .
- Das Maximum wird bei f(10, 10, 10) erreicht.

# Beispiel Schritt 4 (d = 3)

### Nebenbedingungen:

 $0 \leqslant z$ ,  $z \leqslant 10$ 

$$0 \le x$$
,  $x \le 10$   $x + y + z \le 25$   
 $0 \le y$ ,  $y \le 10$ 



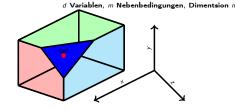
- Gegeben seien die sechs einfachen Nebenbedingungen
- Zu maximieren sei die Funktion  $f(x, y, z) = 0.99 \cdot x + 0.974 \cdot y + z$ .
- Das Maximum wird bei f(10, 10, 10) erreicht.
- Die zusätzliche Nebenbedingung  $x + y + z \le 25$  widerspricht diesem Maximum

# Beispiel Schritt 4 (d = 3)

### Nebenbedingungen:

 $0 \leqslant z$ ,  $z \leqslant 10$ 

$$0 \le x$$
,  $x \le 10$   $x + y + z \le 25$   
 $0 \le y$ ,  $y \le 10$ 



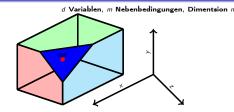
- Gegeben seien die sechs einfachen Nebenbedingungen
- Zu maximieren sei die Funktion  $f(x, y, z) = 0.99 \cdot x + 0.974 \cdot y + z$ .
- Das Maximum wird bei f(10, 10, 10) erreicht.
- Die zusätzliche Nebenbedingung  $x + y + z \le 25$  widerspricht diesem Maximum
- Das neue Maximum liegt damit auf der blauen Fläche.

# Beispiel Schritt 4 (d = 3)

### Nebenbedingungen:

 $0 \leqslant z$ ,  $z \leqslant 10$ 

$$0 \leqslant x, \quad x \leqslant 10 \quad x+y+z \leqslant 25$$
  
 $0 \leqslant y, \quad y \leqslant 10$ 



- Gegeben seien die sechs einfachen Nebenbedingungen
- Zu maximieren sei die Funktion  $f(x, y, z) = 0.99 \cdot x + 0.974 \cdot y + z$ .
- Das Maximum wird bei f(10, 10, 10) erreicht.
- Die zusätzliche Nebenbedingung  $x + y + z \le 25$  widerspricht diesem Maximum
- Das neue Maximum liegt damit auf der blauen Fläche.
- Wir lösen nach z auf: z = 25 x y. Damit verbleibt:

$$0 \le x$$
,  $x \le 10$ ,  $x + y \le 25$   $f(x, y) = -0.01 \cdot x - 0.026 \cdot y + 25$   
 $0 \le y$ ,  $y \le 10$ ,  $15 \le x + y$ 

Einleitung zu LPs Algorithmus von Seidel 000000000000000 0000000000000000 4:30 Laufzeit 1/12 Korrektheit

Ganzzahligkeit 0000000 000000000 Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWTH

Dualität

on Seidel Dualität
0000000 0000000
Walter Unger 22.11.2018 13:5:

# Korrektheit

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n

Ganzzahligkeit

Dualität 0000000

Walter Unger 22.11.2018 13:52

Ganzzahligkeit 000000000 SS2015 RWTH

# Korrektheit

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n

• Setze  $k(d, m) = 2 \cdot d + m$ .

# Korrektheit

- Setze  $k(d, m) = 2 \cdot d + m$ .
- Pro rekursiven Aufruf wird k(d, m) um eins verringert.

Dualität 0000000 Ganzzahligkeit 000000000 SS2015 RWTH

Walter Unger 22.11.2018 13:52

### Korrektheit

- Setze  $k(d, m) = 2 \cdot d + m$ .
- Pro rekursiven Aufruf wird k(d, m) um eins verringert.
- Bei spätestens k(d, m) = 3 terminiert das Verfahren mit:

Algorithmus von Seidel 000000000000000000 Dualität 0000000

Ganzzahligkeit SS2015 RWIH

Walter Unger 22.11.2018 13:52

### Korrektheit

- Setze  $k(d, m) = 2 \cdot d + m$ .
- Pro rekursiven Aufruf wird k(d, m) um eins verringert.
- Bei spätestens k(d, m) = 3 terminiert das Verfahren mit: • d = 1 oder m = 0.

$$u = 1$$
 odel  $m = 0$ .

0000000000000000

- Setze  $k(d, m) = 2 \cdot d + m$ .
- Pro rekursiven Aufruf wird k(d, m) um eins verringert.
- Bei spätestens k(d, m) = 3 terminiert das Verfahren mit: • d = 1 oder m = 0.
- Falls h eine Nebenbedingung ist, die keinen Einfluss auf die optimale Lösung hat.

### Korrektheit

Einleitung zu LPs

- Setze  $k(d, m) = 2 \cdot d + m$ .
- Pro rekursiven Aufruf wird k(d, m) um eins verringert.
- Bei spätestens k(d, m) = 3 terminiert das Verfahren mit: • d = 1 oder m = 0.
- Falls h eine Nebenbedingung ist, die keinen Einfluss auf die optimale Lösung hat.
  - Dann bestimmt der Algorithmus  $opt(H \setminus \{h\})$  in Schritt 3.

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n

Dualität

0000000

Walter Unger 22.11.2018 13:52

- Setze  $k(d, m) = 2 \cdot d + m$ .
- Pro rekursiven Aufruf wird k(d, m) um eins verringert.
- Bei spätestens k(d, m) = 3 terminiert das Verfahren mit: • d = 1 oder m = 0
- Falls h eine Nebenbedingung ist, die keinen Einfluss auf die optimale Lösung hat.
- Dann bestimmt der Algorithmus  $opt(H \setminus \{h\})$  in Schritt 3.
- Falls h eine Nebenbedingung ist, mit der sich die optimale Lösung schneidet.

0000000000000000

- Setze  $k(d, m) = 2 \cdot d + m$ .
- Pro rekursiven Aufruf wird k(d, m) um eins verringert.
- Bei spätestens k(d, m) = 3 terminiert das Verfahren mit: • d = 1 oder m = 0
- Falls h eine Nebenbedingung ist, die keinen Einfluss auf die optimale Lösung hat.
  - Dann bestimmt der Algorithmus  $opt(H \setminus \{h\})$  in Schritt 3.
- Falls h eine Nebenbedingung ist, mit der sich die optimale Lösung schneidet.
  - Dann befindet sich die optimale Lösung auf der Hyperebene, die durch h beschrieben wird

0000000000000000

4:30 Laufzeit 11/12

- - Setze  $k(d, m) = 2 \cdot d + m$ .
  - Pro rekursiven Aufruf wird k(d, m) um eins verringert.
  - Bei spätestens k(d, m) = 3 terminiert das Verfahren mit:
    - d = 1 oder m = 0
  - Falls h eine Nebenbedingung ist, die keinen Einfluss auf die optimale Lösung hat.
  - Dann bestimmt der Algorithmus  $opt(H \setminus \{h\})$  in Schritt 3.
  - Falls h eine Nebenbedingung ist, mit der sich die optimale Lösung schneidet.
    - Dann befindet sich die optimale Lösung auf der Hyperebene, die durch h beschrieben wird
    - Diese betrachtet der Algorithmus in Schritt 4.

### Korrektheit

Einleitung zu LPs

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n 1. Falls d = 1 oder

- Setze  $k(d, m) = 2 \cdot d + m$ .
- Pro rekursiven Aufruf wird k(d, m) um eins verringert.
- Bei spätestens k(d, m) = 3 terminiert das Verfahren mit: • d = 1 oder m = 0
- Falls h eine Nebenbedingung ist, die keinen Einfluss auf die optimale Lösung hat.
  - Dann bestimmt der Algorithmus  $opt(H \setminus \{h\})$  in Schritt 3.
- Falls h eine Nebenbedingung ist, mit der sich die optimale Lösung schneidet.
  - Dann befindet sich die optimale Lösung auf der Hyperebene, die durch h beschrieben wird
  - Diese betrachtet der Algorithmus in Schritt 4.

m = 0, so gebe opt(H) aus. 2. Ansonsten wähle  $h \in H$  aus. und berechne  $opt(H \setminus \{h\})$ rekursiv. 3. Falls  $opt(H \setminus \{h\})$ die Nebenbedingung h nicht verletzt, so gebe  $opt(H \setminus \{h\}) =$ opt(H) aus. 4. Ansonsten berechne den Schnitt mit der

Hyperebene h, und löse das so

entstandene

(d - 1)dimensionale LP rekursiv.

Einleitung zu LPs Algorithmus von Seidel Dualität Ganzzahligkeit 000000000000000 00000000000000000 0000000 000000000 Walter Unger 22.11.2018 13:52 4:31 Laufzeit 1/8 SS2015 RWTH

# Laufzeit

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n

• Sei T(m, d) eine obere Schranke für die erwartete Laufzeit.

idel Dualität Ganzzahligkeit
00000 0000000

Walter Unger 22.11.201813:52 S52015 | TWTH

### Laufzeit

- Sei T(m, d) eine obere Schranke für die erwartete Laufzeit.
- ullet Falls m>0 und d>1 ergibt sich folgende Abschätzung für die Laufzeiten der vier Schritte:

Einleitung zu LPs

4:31 Laufzeit 3/8

- Sei T(m, d) eine obere Schranke für die erwartete Laufzeit.
- Falls m > 0 und d > 1 ergibt sich folgende Abschätzung für die Laufzeiten der vier Schritte:
  - Schritt 1:  $T_1 = O(1)$ .

Einleitung zu LPs

4:31 Laufzeit 4/8

- Sei T(m, d) eine obere Schranke für die erwartete Laufzeit.
- Falls m > 0 und d > 1 ergibt sich folgende Abschätzung für die Laufzeiten der vier Schritte:
  - Schritt 1:  $T_1 = O(1)$ .
  - Schritt 2:  $T_2 = T(m-1, d)$ .

Algorithmus von Seidel 000000000000000000

Dualität Ganzzahligkeit 0000000 000000000 Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWTH

# Laufzeit

- Sei T(m, d) eine obere Schranke für die erwartete Laufzeit.
- Falls m > 0 und d > 1 ergibt sich folgende Abschätzung für die Laufzeiten der vier Schritte:
  - Schritt 1:  $T_1 = O(1)$ . • Schritt 2:  $T_2 = T(m-1, d)$ .

  - Schritt 3:  $T_3 = O(d)$ .

Einleitung zu LPs

- Sei T(m, d) eine obere Schranke für die erwartete Laufzeit.
- Falls m > 0 und d > 1 ergibt sich folgende Abschätzung für die Laufzeiten der vier Schritte:
  - Schritt 1:  $T_1 = O(1)$ .
  - Schritt 2:  $T_2 = T(m-1, d)$ .
  - Schritt 3:  $T_3 = O(d)$ .
  - Schritt 4:  $T_4 = T(m+1, d-1) + O(d \cdot m)$ .

Einleitung zu LPs

0000000000000000

4:31 Laufzeit 7/8

- Sei T(m, d) eine obere Schranke für die erwartete Laufzeit.
- Falls m > 0 und d > 1 ergibt sich folgende Abschätzung für die Laufzeiten der vier Schritte:
  - Schritt 1:  $T_1 = O(1)$ .
  - Schritt 2:  $T_2 = T(m-1, d)$ .
  - Schritt 3:  $T_3 = O(d)$ .
  - Schritt 4:  $T_4 = T(m+1, d-1) + O(d \cdot m)$ .
- Dabei wird der Schritt 4 nicht immer ausgeführt.

Einleitung zu LPs

0000000000000000

4:31 Laufzeit 8/8

- Sei T(m, d) eine obere Schranke für die erwartete Laufzeit.
- Falls m > 0 und d > 1 ergibt sich folgende Abschätzung für die Laufzeiten der vier Schritte:
  - Schritt 1:  $T_1 = O(1)$ .
  - Schritt 2:  $T_2 = T(m-1, d)$ .
  - Schritt 3:  $T_3 = O(d)$ .
  - Schritt 4:  $T_4 = T(m+1, d-1) + O(d \cdot m)$ .
- Dabei wird der Schritt 4 nicht immer ausgeführt.
- Im Folgenden schätzen wir diese Wahrscheinlichkeit ab.

Einleitung zu LPs Algorithmus von Seidel 000000000000000 4:32 Laufzeit 1/10

Dualität Ganzzahligkeit 0000000

000000000 Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWTH

# Aussage

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n

### Lemma

Die Wahrscheinlichkeit, dass Schritt 4 ausgeführt wird, ist höchstens d/m.

 Dualität
 Ganzzahligkeit

 0000000
 000000000

 Walter Unger 22.11.2018 13:52
 SS2015
 RWTH

# Aussage

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n

#### Lemma

Die Wahrscheinlichkeit, dass Schritt 4 ausgeführt wird, ist höchstens d/m.

Dualität 0000000 Ganzzahligkeit 000000000

Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWTH

# Aussage

# Lemma

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n

Die Wahrscheinlichkeit, dass Schritt 4 ausgeführt wird, ist höchstens d/m.

Beweis:

• Sei  $x^* = opt(H)$ .

Dualität Ganzzahligkeit Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWTH

# Aussage

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n

#### Lemma

Die Wahrscheinlichkeit, dass Schritt 4 ausgeführt wird, ist höchstens d/m.

- Sei  $x^* = opt(H)$ .
- $x^*$  ist damit auf dem Schnitt von d Hyperebenen.

Walter Unger 22.11.2018 13:52

Aussage

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n

#### Lemma

Die Wahrscheinlichkeit, dass Schritt 4 ausgeführt wird, ist höchstens d/m.

- Sei  $x^* = opt(H)$ .
- $x^*$  ist damit auf dem Schnitt von d Hyperebenen.
- Diese d Hyperebenen sind Nebenbedingungen oder Box-Bedingungen.

Algorithmus von Seidel  Dualität 0000000 Ganzzahligkeit

Walter Unger 22.11.2018 13:52

# Aussage

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n

#### Lemma

Die Wahrscheinlichkeit, dass Schritt 4 ausgeführt wird, ist höchstens d/m.

- Sei  $x^* = opt(H)$ .
- $x^*$  ist damit auf dem Schnitt von d Hyperebenen.
- Diese d Hyperebenen sind Nebenbedingungen oder Box-Bedingungen.
- Sei D eine Auswahl mit |D| = d dieser  $x^*$  bestimmenden Hyperebenen.

# Aussage

Einleitung zu LPs

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n

#### Lemma

Die Wahrscheinlichkeit, dass Schritt 4 ausgeführt wird, ist höchstens d/m.

- Sei  $x^* = opt(H)$ .
- $x^*$  ist damit auf dem Schnitt von d Hyperebenen.
- Diese d Hyperebenen sind Nebenbedingungen oder Box-Bedingungen.
- Sei D eine Auswahl mit |D| = d dieser  $x^*$  bestimmenden Hyperebenen.
- Damit gilt:  $opt(D) = x^*$ .

Dualität

0000000

Einleitung zu LPs

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n

#### Lemma

0000000000000000

4:32 Laufzeit 8/10

Die Wahrscheinlichkeit, dass Schritt 4 ausgeführt wird, ist höchstens d/m.

- Sei  $x^* = opt(H)$ .
- $x^*$  ist damit auf dem Schnitt von d Hyperebenen.
- Diese d Hyperebenen sind Nebenbedingungen oder Box-Bedingungen.
- Sei D eine Auswahl mit |D| = d dieser  $x^*$  bestimmenden Hyperebenen.
- Damit gilt:  $opt(D) = x^*$ .
- Schritt 4 wird ausgeführt, falls  $opt(H \setminus \{h\})$  die Nebenbedingung h verletzt.

# Aussage

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n

Dualität

0000000

Walter Unger 22.11.2018 13:52

#### Lemma

Die Wahrscheinlichkeit, dass Schritt 4 ausgeführt wird, ist höchstens d/m.

- Sei  $x^* = opt(H)$ .
- $x^*$  ist damit auf dem Schnitt von d Hyperebenen.
- Diese d Hyperebenen sind Nebenbedingungen oder Box-Bedingungen.
- Sei D eine Auswahl mit |D| = d dieser  $x^*$  bestimmenden Hyperebenen.
- Damit gilt:  $opt(D) = x^*$ .
- Schritt 4 wird ausgeführt, falls  $opt(H \setminus \{h\})$  die Nebenbedingung h verletzt.
- D.h. Schritt 4 wird ausgeführt, falls  $h \in D$ .

# Aussage

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n

#### Lemma

0000000000000000

Die Wahrscheinlichkeit, dass Schritt 4 ausgeführt wird, ist höchstens d/m.

- Sei  $x^* = opt(H)$ .
- $x^*$  ist damit auf dem Schnitt von d Hyperebenen.
- Diese d Hyperebenen sind Nebenbedingungen oder Box-Bedingungen.
- Sei D eine Auswahl mit |D| = d dieser  $x^*$  bestimmenden Hyperebenen.
- Damit gilt:  $opt(D) = x^*$ .
- Schritt 4 wird ausgeführt, falls  $opt(H \setminus \{h\})$  die Nebenbedingung h verletzt.
- D.h. Schritt 4 wird ausgeführt, falls h ∈ D.
- Damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass Schritt 4 ausgeführt wird:

$$\mathbb{P}\mathsf{r}[h\in D] = \frac{|D\cap H|}{|H|} \leqslant \frac{d}{m}.$$

# Abschätzung der Laufzeit

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n

• Im Falle m > 0 und d > 1 gilt:  $T(m, d) = T_1 + T_2 + T_3 + \frac{d}{m} \cdot T_4$ .

 Dualität
 Ganzzahligkeit

 0000000
 00000000

 Walter Unger 22.11.2018 13:52
 SS2015
 RWTH

# Abschätzung der Laufzeit

- d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n
- Im Falle m>0 und d>1 gilt:  $T(m,d)=T_1+T_2+T_3+\frac{d}{m}\cdot T_4$ .
- Unter Vernachlässigung der konstanten Faktoren:

0000000

## Abschätzung der Laufzeit

Einleitung zu LPs

0000000000000000

4:33 Laufzeit 3/7

- d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n • Im Falle m > 0 und d > 1 gilt:  $T(m, d) = T_1 + T_2 + T_3 + \frac{d}{m} \cdot T_4$ .
- Unter Vernachlässigung der konstanten Faktoren:
- Im Falle m > 0 und d > 1 gilt:

$$T(m,d) \leqslant T(m-1,d) + d^2 + \frac{d}{m} \cdot T(m+1,d-1).$$

## Abschätzung der Laufzeit

Einleitung zu LPs

0000000000000000

4:33 Laufzeit 4/7

- d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n • Im Falle m > 0 und d > 1 gilt:  $T(m, d) = T_1 + T_2 + T_3 + \frac{d}{m} \cdot T_4$ .
- Unter Vernachlässigung der konstanten Faktoren:
- Im Falle m > 0 und d > 1 gilt:

$$T(m,d) \leqslant T(m-1,d) + d^2 + \frac{d}{m} \cdot T(m+1,d-1).$$

• Im Falle m = 0 oder d = 1 gilt:

$$T(m,d) \leqslant d^2 + m.$$

0000000

## Abschätzung der Laufzeit

Einleitung zu LPs

0000000000000000

Laufzeit 5/7

- d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n • Im Falle m > 0 und d > 1 gilt:  $T(m, d) = T_1 + T_2 + T_3 + \frac{d}{m} \cdot T_4$ .
- Unter Vernachlässigung der konstanten Faktoren:
- Im Falle m > 0 und d > 1 gilt:

$$T(m,d) \leqslant T(m-1,d) + d^2 + \frac{d}{m} \cdot T(m+1,d-1).$$

• Im Falle m=0 oder d=1 gilt:

$$T(m,d) \leqslant d^2 + m.$$

• Wir definieren nun f(1) = 1 und für d > 1:

$$f(d) = d \cdot f(d-1) + 3 \cdot d^3$$

## Abschätzung der Laufzeit

Einleitung zu LPs

0000000000000000

Laufzeit 6/7

- $_{d}$  Variablen,  $_{m}$  Nebenbedingungen, Dimentsion  $_{n}$   $_{d}$  Im Falle  $_{d}$   $_{d}$  0 und  $_{d}$   $_{d}$  1 gilt:  $_{d}$   $_{d}$
- Unter Vernachlässigung der konstanten Faktoren:
- Im Falle m > 0 und d > 1 gilt:

$$T(m,d) \leqslant T(m-1,d) + d^2 + \frac{d}{m} \cdot T(m+1,d-1).$$

• Im Falle m = 0 oder d = 1 gilt:

$$T(m,d) \leqslant d^2 + m.$$

• Wir definieren nun f(1) = 1 und für d > 1:

$$f(d) = d \cdot f(d-1) + 3 \cdot d^3$$

Damit gilt:

$$f(d) = d! + \sum_{i=1}^{d} 3 \cdot k^{3} \cdot \frac{d!}{(k-1)!} = O(d!).$$

## Abschätzung der Laufzeit

Einleitung zu LPs

Laufzeit 7/7

- d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n • Im Falle m > 0 und d > 1 gilt:  $T(m, d) = T_1 + T_2 + T_3 + \frac{d}{m} \cdot T_4$ .
- Unter Vernachlässigung der konstanten Faktoren:
- Im Falle m > 0 und d > 1 gilt:

$$T(m,d) \leqslant T(m-1,d) + d^2 + \frac{d}{m} \cdot T(m+1,d-1).$$

• Im Falle m=0 oder d=1 gilt:

$$T(m,d) \leqslant d^2 + m.$$

• Wir definieren nun f(1) = 1 und für d > 1:

$$f(d) = d \cdot f(d-1) + 3 \cdot d^3$$

Damit gilt:

$$f(d) = d! + \sum_{k=2}^{d} 3 \cdot k^{3} \cdot \frac{d!}{(k-1)!} = O(d!).$$

• Denn  $\sum_{k=2}^{d} \frac{3 \cdot k^3}{(k-1)!}$  ist durch Konstante beschränkt.

000000000 Walter Unger 22.11.2018 13:52

SS2015 RWITH

Ganzzahligkeit

## Finale Abschätzung der Laufzeit

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n

#### Lemma

Es gilt:  $T(m, d) \leq (m-1) \cdot f(d) + 2 \cdot d^2$ .

Beweis:

000000000 Walter Unger 22.11.2018 13:52

SS2015 RWITH

Ganzzahligkeit

## Finale Abschätzung der Laufzeit

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n

#### Lemma

Es gilt:  $T(m, d) \leq (m-1) \cdot f(d) + 2 \cdot d^2$ .

Beweis:

## Finale Abschätzung der Laufzeit

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n

#### Lemma

Es gilt: 
$$T(m, d) \leq (m-1) \cdot f(d) + 2 \cdot d^2$$
.

#### Beweis:

$$T(m,d) \leq d^2 + 1 \leq (m-1) \cdot f(d) + 2 \cdot d^2$$
.

#### Lemma

0000000000000000

4:34 Laufzeit 4/9

Einleitung zu LPs

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n

Es gilt:  $T(m,d) \leq (m-1) \cdot f(d) + 2 \cdot d^2$ .

### Beweis:

• Induktionsanfang: m = 1

$$T(m,d) \leqslant d^2 + 1 \leqslant (m-1) \cdot f(d) + 2 \cdot d^2.$$

$$T(m,d) \leqslant m+1 \leqslant (m-1) \cdot f(d) + 2 \cdot d^2.$$

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n

#### Lemma

0000000000000000

4:34 Laufzeit 5/9

Einleitung zu LPs

Es gilt: 
$$T(m, d) \leq (m-1) \cdot f(d) + 2 \cdot d^2$$
.

#### Beweis:

• Induktionsanfang: m = 1

$$T(m,d) \leq d^2 + 1 \leq (m-1) \cdot f(d) + 2 \cdot d^2.$$

• Induktionsanfang: d = 1

$$T(m,d) \leqslant m+1 \leqslant (m-1) \cdot f(d) + 2 \cdot d^2.$$

Für den Induktionsschritt setzen wir:

0000000

## Finale Abschätzung der Laufzeit

Lemma

Einleitung zu LPs

0000000000000000

4:34 Laufzeit 6/9

Es gilt:  $T(m,d) \leq (m-1) \cdot f(d) + 2 \cdot d^2$ .

Beweis:

• Induktionsanfang: m = 1

$$T(m,d) \leqslant d^2 + 1 \leqslant (m-1) \cdot f(d) + 2 \cdot d^2.$$

$$T(m,d) \leqslant m+1 \leqslant (m-1) \cdot f(d) + 2 \cdot d^2.$$

- Für den Induktionsschritt setzen wir:
  - $k = 2 \cdot d + m$

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n

## Finale Abschätzung der Laufzeit

Beweis:

Es gilt:  $T(m,d) \leq (m-1) \cdot f(d) + 2 \cdot d^2$ .

• Induktionsanfang: m = 1

$$T(m,d) \leq d^2 + 1 \leq (m-1) \cdot f(d) + 2 \cdot d^2$$
.

$$T(m,d) \leqslant m+1 \leqslant (m-1) \cdot f(d) + 2 \cdot d^2.$$

- Für den Induktionsschritt setzen wir:
  - $k = 2 \cdot d + m$
  - Es sei nun  $m \ge 2$  und  $d \ge 2$ .

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n

#### Lemma

0000000000000000

4:34 Laufzeit 8/9

Einleitung zu LPs

Es gilt: 
$$T(m, d) \leq (m-1) \cdot f(d) + 2 \cdot d^2$$
.

#### Beweis:

Induktionsanfang: m = 1

$$T(m,d) \leqslant d^2 + 1 \leqslant (m-1) \cdot f(d) + 2 \cdot d^2.$$

$$T(m,d) \leqslant m+1 \leqslant (m-1) \cdot f(d) + 2 \cdot d^2.$$

- Für den Induktionsschritt setzen wir:
  - $k = 2 \cdot d + m$
  - Es sei nun  $m \ge 2$  und  $d \ge 2$ .
  - Behauptung sei gezeigt für alle d' und m' mit  $2 \cdot d' + m' < k$ .

## Finale Abschätzung der Laufzeit

d Variablen, m Nebenbedingungen, Dimentsion n

Dualität

0000000

#### Lemma

Es gilt: 
$$T(m, d) \leq (m-1) \cdot f(d) + 2 \cdot d^2$$
.

#### Beweis:

Induktionsanfang: m = 1

$$T(m,d) \leqslant d^2 + 1 \leqslant (m-1) \cdot f(d) + 2 \cdot d^2.$$

$$T(m,d) \leqslant m+1 \leqslant (m-1) \cdot f(d) + 2 \cdot d^2.$$

- Für den Induktionsschritt setzen wir:
  - $k = 2 \cdot d + m$
  - Es sei nun  $m \ge 2$  und  $d \ge 2$ .
  - Behauptung sei gezeigt für alle d' und m' mit  $2 \cdot d' + m' < k$ .
  - Also auch für (m-1, d) und (m+1, d-1).

Ganzzahligkeit 000000000

Walter Unger 22.11.201813:52 SS2015 RWTH

$$T(m, d) \leqslant (m - \mathbf{1}) \cdot f(d) + \mathbf{2} \cdot d^{\mathbf{2}}$$
  
 $f(d) = d \cdot f(d - \mathbf{1}) + \mathbf{3} \cdot d^{\mathbf{3}}$ 

$$T(m,d) \leq T(m-1,d) + d^2 + \frac{d}{m} \cdot T(m+1,d-1)$$

Ganzzahligkeit

Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWTH

$$T(m, d) \leqslant (m - \mathbf{1}) \cdot f(d) + \mathbf{2} \cdot d^{\mathbf{2}}$$
$$f(d) = d \cdot f(d - \mathbf{1}) + \mathbf{3} \cdot d^{\mathbf{3}}$$

$$\begin{array}{ll} T(m,d) & \leqslant & T(m-1,d) + d^2 + \frac{d}{m} \cdot T(m+1,d-1) \\ & \leqslant & (m-2) \cdot f(d) + 2 \cdot d^2 + d^2 + \frac{d}{m} \cdot T(m+1,d-1) \end{array}$$

Ganzzahligkeit 000000000

Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 **RWTH** 

$$T(m, d) \leqslant (m - \mathbf{1}) \cdot f(d) + 2 \cdot d^{2}$$
$$f(d) = d \cdot f(d - \mathbf{1}) + 3 \cdot d^{3}$$

$$T(m,d) \leq T(m-1,d) + d^2 + \frac{d}{m} \cdot T(m+1,d-1) \leq (m-2) \cdot f(d) + 2 \cdot d^2 + d^2 + \frac{d}{m} \cdot T(m+1,d-1) \leq (m-2) \cdot f(d) + 3 \cdot d^2 + \frac{d}{m} \cdot m \cdot f(d-1) + 2 \cdot (d-1)^2$$

Ganzzahligkeit 000000000

Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 **RWTH** 

$$T(m, d) \leqslant (m - \mathbf{1}) \cdot f(d) + \mathbf{2} \cdot d^{\mathbf{2}}$$
  
 $f(d) = d \cdot f(d - \mathbf{1}) + \mathbf{3} \cdot d^{\mathbf{3}}$ 

$$\begin{array}{lll} T(m,d) & \leqslant & T(m-1,d) + d^2 + \frac{d}{m} \cdot T(m+1,d-1) \\ & \leqslant & (m-2) \cdot f(d) + 2 \cdot d^2 + d^2 + \frac{d}{m} \cdot T(m+1,d-1) \\ & \leqslant & (m-2) \cdot f(d) + 3 \cdot d^2 + \frac{d}{m} \cdot m \cdot f(d-1) + 2 \cdot (d-1)^2 \\ & \leqslant & (m-2) \cdot f(d) + 3 \cdot d^2 + \frac{d}{m} \cdot m \cdot f(d-1) + 2 \cdot d^2 \end{array}$$

Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 🖪

$$T(m, d) \leqslant (m - \mathbf{1}) \cdot f(d) + \mathbf{2} \cdot d^{\mathbf{2}}$$
  
 $f(d) = d \cdot f(d - \mathbf{1}) + \mathbf{3} \cdot d^{\mathbf{3}}$ 

$$\begin{array}{lll} T(m,d) & \leqslant & T(m-1,d) + d^2 + \frac{d}{m^2} \cdot T(m+1,d-1) \\ & \leqslant & (m-2) \cdot f(d) + 2 \cdot d^2 + d^2 + \frac{d}{m} \cdot T(m+1,d-1) \\ & \leqslant & (m-2) \cdot f(d) + 3 \cdot d^2 + \frac{d}{m} \cdot m \cdot f(d-1) + 2 \cdot (d-1)^2 \\ & \leqslant & (m-2) \cdot f(d) + 3 \cdot d^2 + \frac{d}{m} \cdot m \cdot f(d-1) + 2 \cdot d^2 \\ & = & (m-2) \cdot f(d) + 3 \cdot d^2 + d \cdot \frac{f(d) - 3 \cdot d^3}{d} + 2 \cdot d^2 \end{array}$$

 Ganzzahligkeit

Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWTH

$$T(m, d) \leqslant (m - \mathbf{1}) \cdot f(d) + \mathbf{2} \cdot d^{\mathbf{2}}$$
$$f(d) = d \cdot f(d - \mathbf{1}) + \mathbf{3} \cdot d^{\mathbf{3}}$$

$$T(m,d) \leq T(m-1,d) + d^2 + \frac{d}{m} \cdot T(m+1,d-1)$$

$$\leq (m-2) \cdot f(d) + 2 \cdot d^2 + d^2 + \frac{d}{m} \cdot T(m+1,d-1)$$

$$\leq (m-2) \cdot f(d) + 3 \cdot d^2 + \frac{d}{m} \cdot m \cdot f(d-1) + 2 \cdot (d-1)^2$$

$$\leq (m-2) \cdot f(d) + 3 \cdot d^2 + \frac{d}{m} \cdot m \cdot f(d-1) + 2 \cdot d^2$$

$$= (m-2) \cdot f(d) + 3 \cdot d^2 + d \cdot \frac{f(d) - 3 \cdot d^3}{d} + 2 \cdot d^2$$

$$= (m-2) \cdot f(d) + 3 \cdot d^2 + f(d) - 3 \cdot d^3 + 2 \cdot d^2$$

0000000000000000

4:35 Laufzeit 7/7

$$\begin{array}{lll} T(m,d) & \leqslant & T(m-1,d) + d^2 + \frac{d}{m^2} \cdot T(m+1,d-1) \\ & \leqslant & (m-2) \cdot f(d) + 2 \cdot d^2 + d^2 + \frac{d}{m} \cdot T(m+1,d-1) \\ & \leqslant & (m-2) \cdot f(d) + 3 \cdot d^2 + \frac{d}{m} \cdot m \cdot f(d-1) + 2 \cdot (d-1)^2 \\ & \leqslant & (m-2) \cdot f(d) + 3 \cdot d^2 + \frac{d}{m} \cdot m \cdot f(d-1) + 2 \cdot d^2 \\ & = & (m-2) \cdot f(d) + 3 \cdot d^2 + d \cdot \frac{f(d) - 3 \cdot d^3}{d} + 2 \cdot d^2 \\ & = & (m-2) \cdot f(d) + 3 \cdot d^2 + f(d) - 3 \cdot d^3 + 2 \cdot d^2 \\ & \leqslant & (m-1) \cdot f(d) + 2 \cdot d^2 \end{array}$$

## Aussage

#### Theorem

Der Algorithmus von Seidel löst ein zulässiges d-dimensionales LP mit m Nebenbedingungen in erwarteter Laufzeit von  $O(m \cdot d!)$ .

Algorithmus von Seidel 00000000000000000 Dualität 0000000 Ganzzahligkeit

Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWTH

## Aussage

#### Theorem

Der Algorithmus von Seidel löst ein zulässiges d-dimensionales LP mit m Nebenbedingungen in erwarteter Laufzeit von  $O(m \cdot d!)$ .

• Ist d konstant, so ist die erwartete Laufzeit O(m).

Ganzzahligkeit 000000000

Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWTH

### Aussage

#### Theorem

Der Algorithmus von Seidel löst ein zulässiges d-dimensionales LP mit m Nebenbedingungen in erwarteter Laufzeit von  $O(m \cdot d!)$ .

- Ist d konstant, so ist die erwartete Laufzeit O(m).
- Ist d > 10 so ist die Konstante aber ein wenig unpraktisch.

 Dualität
 Ganzzahligkeit

 ●000000
 000000000

 Walter Unger 22.11.2018 13:52
 SS2015
 RWTH

## Beispiel

• Maximiere:  $5 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2$  unter den Nebenbedingungen:

$$x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 4$$
,  $x_1 + x_2 \leq 2$ , und  $x_1, x_2 \geq 0$ .

Einleitung 2/6

Einleitung zu LPs

• Maximiere:  $5 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2$  unter den Nebenbedingungen:

$$x_1 + 4 \cdot x_2 \leqslant 4$$
,  $x_1 + x_2 \leqslant 2$ , und  $x_1, x_2 \geqslant 0$ .

• Einfache obere Schranke:  $5 \cdot x_1 + 17 \cdot x_2 \le 18$ , gewonnen aus:

$$4 \cdot (x_1 + 4 \cdot x_2 \leqslant 4)$$
 plus  $x_1 + x_2 \leqslant 2$ .

Einleitung 3/6

• Maximiere:  $5 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2$  unter den Nebenbedingungen:

$$x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 4$$
,  $x_1 + x_2 \leq 2$ , und  $x_1, x_2 \geq 0$ .

• Einfache obere Schranke:  $5 \cdot x_1 + 17 \cdot x_2 \le 18$ , gewonnen aus:

$$4 \cdot (x_1 + 4 \cdot x_2 \leqslant 4)$$
 plus  $x_1 + x_2 \leqslant 2$ .

• Weitere einfache obere Schranke:  $5 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2 \le 14$ , gewonnen aus:

$$2 \cdot (x_1 + 4 \cdot x_2 \leqslant 4)$$
 plus  $3 \cdot (x_1 + x_2 \leqslant 2)$ .

## Beispiel

• Maximiere:  $5 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2$  unter den Nebenbedingungen:

$$x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 4$$
,  $x_1 + x_2 \leq 2$ , and  $x_1, x_2 \geq 0$ .

• Einfache obere Schranke:  $5 \cdot x_1 + 17 \cdot x_2 \le 18$ , gewonnen aus:

$$4 \cdot (x_1 + 4 \cdot x_2 \leqslant 4)$$
 plus  $x_1 + x_2 \leqslant 2$ .

• Weitere einfache obere Schranke:  $5 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2 \le 14$ , gewonnen aus:

$$2 \cdot (x_1 + 4 \cdot x_2 \leqslant 4)$$
 plus  $3 \cdot (x_1 + x_2 \leqslant 2)$ .

• Rezept für obere Schranke: Bestimme  $y_1, y_2$  mit  $y_1 + y_2 \ge 5$  und  $4 \cdot y_1 + y_2 \geqslant 7$  und addiere:

$$y_1 \cdot x_1 + y_1 \cdot 4 \cdot x_2 \leq y_1 \cdot 4$$
 plus  $y_2 \cdot x_1 + y_2 \cdot x_2 \leq y_2 \cdot 2$ .

Einleitung 5/6

## Beispiel

• Maximiere:  $5 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2$  unter den Nebenbedingungen:

$$x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 4$$
,  $x_1 + x_2 \leq 2$ , und  $x_1, x_2 \geq 0$ .

• Einfache obere Schranke:  $5 \cdot x_1 + 17 \cdot x_2 \le 18$ , gewonnen aus:

$$4 \cdot (x_1 + 4 \cdot x_2 \leqslant 4)$$
 plus  $x_1 + x_2 \leqslant 2$ .

• Weitere einfache obere Schranke:  $5 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2 \le 14$ , gewonnen aus:

$$2 \cdot (x_1 + 4 \cdot x_2 \leqslant 4)$$
 plus  $3 \cdot (x_1 + x_2 \leqslant 2)$ .

• Rezept für obere Schranke: Bestimme  $y_1, y_2$  mit  $y_1 + y_2 \ge 5$  und  $4 \cdot y_1 + y_2 \geqslant 7$  und addiere:

$$y_1 \cdot x_1 + y_1 \cdot 4 \cdot x_2 \leq y_1 \cdot 4$$
 plus  $y_2 \cdot x_1 + y_2 \cdot x_2 \leq y_2 \cdot 2$ .

• Damit haben wir ein Ungleichungssystem zum Bestimmen einer kleinsten oberen Schranke, d.h.:

Einleitung 6/6

• Maximiere:  $5 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2$  unter den Nebenbedingungen:

$$x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 4$$
,  $x_1 + x_2 \leq 2$ , und  $x_1, x_2 \geq 0$ .

• Einfache obere Schranke:  $5 \cdot x_1 + 17 \cdot x_2 \le 18$ , gewonnen aus:

$$4 \cdot (x_1 + 4 \cdot x_2 \leqslant 4)$$
 plus  $x_1 + x_2 \leqslant 2$ .

• Weitere einfache obere Schranke:  $5 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2 \le 14$ , gewonnen aus:

$$2 \cdot (x_1 + 4 \cdot x_2 \leqslant 4)$$
 plus  $3 \cdot (x_1 + x_2 \leqslant 2)$ .

• Rezept für obere Schranke: Bestimme  $y_1, y_2$  mit  $y_1 + y_2 \ge 5$  und  $4 \cdot y_1 + y_2 \geqslant 7$  und addiere:

$$y_1 \cdot x_1 + y_1 \cdot 4 \cdot x_2 \leq y_1 \cdot 4$$
 plus  $y_2 \cdot x_1 + y_2 \cdot x_2 \leq y_2 \cdot 2$ .

- Damit haben wir ein Ungleichungssystem zum Bestimmen einer kleinsten oberen Schranke. d.h.:
- Minimiere  $4 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2$  unter den Nebenbedingungen:

$$y_1 + y_2 \ge 5$$
,  $4 \cdot y_1 + y_2 \ge 7$ , und  $y_1, y_2 \ge 0$ .

#### Definition

Einleitung 1/3

Gegeben sei ein LP (im Weiteren das primale LP) mit n Variablen und m Nebenbedingungen in kanonischer Form:

Maximiere 
$$c^T x$$
 unter  $Ax \leq b$ ,  $x \geq 0$ .

Das duale LP hat m Variablem und n Nebenbedingungen und die Form:

Minimiere 
$$y^T b$$
 unter  $y^T A \geqslant c^T$ ,  $y \geqslant 0$ .

Äquivalente Schreibweise: Minimiere  $b^T y$  unter  $A^T y \ge c$ ,  $y \ge 0$ .

Einleitung zu LPs

#### Definition

Einleitung 2/3

Gegeben sei ein LP (im Weiteren das primale LP) mit n Variablen und m Nebenbedingungen in kanonischer Form:

Maximiere 
$$c^T x$$
 unter  $Ax \leq b$ ,  $x \geq 0$ .

Das duale LP hat *m* Variablem und *n* Nebenbedingungen und die Form:

Minimiere 
$$y^T b$$
 unter  $y^T A \geqslant c^T$ ,  $y \geqslant 0$ .

Äquivalente Schreibweise: Minimiere  $b^T y$  unter  $A^T y \ge c$ ,  $y \ge 0$ .

• Aus den n Variablen des primalen LP werden n Nebenbedingungen des dualen I Ps.

#### Definition

Einleitung 3/3

Gegeben sei ein LP (im Weiteren das primale LP) mit n Variablen und m Nebenbedingungen in kanonischer Form:

Maximiere 
$$c^T x$$
 unter  $Ax \leq b$ ,  $x \geq 0$ .

Das duale LP hat m Variablem und n Nebenbedingungen und die Form:

Minimiere 
$$y^T b$$
 unter  $y^T A \geqslant c^T$ ,  $y \geqslant 0$ .

Äquivalente Schreibweise: Minimiere  $b^T y$  unter  $A^T y \ge c$ ,  $y \ge 0$ .

- Aus den n Variablen des primalen LP werden n Nebenbedingungen des dualen I Ps.
- Aus den m Nebenbedingungen des primalen LP werden m Variablen des dualen LPs.

mus von Seidel

Dualität 00●0000 Ganzzahligkeit 00000000 SS2015 RWTH

Walter Unger 22.11.201813:52 SS2015 R

## Dual von Dual

#### Theorem

Das duale LP des dualen LP ist das primale LP.

Beweis:

Algorithmus von Seidel

Dualität 0000000

Ganzzahligkeit SS2015 RWIH

Walter Unger 22.11.2018 13:52

## Dual von Dual

primal:  $c^T x : Ax \leq b, x \geq 0$ , dual:  $b^T y : A^T y \geq c, y \geq 0$ 

#### **Theorem**

Das duale LP des dualen LP ist das primale LP.

Beweis:

Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015

Dualität

0000000

# 4:39 Aussagen 3/7 Dual von Dual

Einleitung zu LPs

 $\mathbf{primal}\colon c^{T}\mathbf{x}:A\mathbf{x}\leqslant b,\mathbf{x}\geqslant\mathbf{0},\,\mathbf{dual}\colon b^{T}\mathbf{y}:A^{T}\mathbf{y}\geqslant c,\mathbf{y}\geqslant\mathbf{0}$ 

#### Theorem

Das duale LP des dualen LP ist das primale LP.

#### Beweis:

Primale LP:

Maximiere  $c^T x$  unter  $Ax \leq b$ ,  $x \geq 0$ .

0000000

Einleitung zu LPs

#### Dual von Dual

primal:  $c^T x : Ax \leqslant b, x \geqslant \mathbf{0}$ , dual:  $b^T y : A^T y \geqslant c, y \geqslant \mathbf{0}$ 

#### Theorem

Das duale LP des dualen LP ist das primale LP.

- Primale LP:
   Maximiere c<sup>T</sup>x unter Ax ≤ b, x ≥ 0.
- Duale LP: Minimiere  $b^T y$  unter  $A^T y \ge c$ ,  $y \ge 0$ .

0000000

Einleitung zu LPs

## primal: $c^T x : Ax \leq b, x \geq 0$ , dual: $b^T y : A^T y \geq c, y \geq 0$

#### Theorem

Das duale LP des dualen LP ist das primale LP.

- Primale I P: Maximiere  $c^T x$  unter  $Ax \leq b$ ,  $x \geq 0$ .
- Duale I P: Minimiere  $b^T y$  unter  $A^T y \ge c$ ,  $y \ge 0$ .
- Duale LP in kanonischer Form: Maximiere  $-b^T y$  unter  $-A^T y \leqslant -c$ ,  $y \geqslant 0$ .

#### Dual von Dual

primal:  $c^T x : Ax \leq b, x \geq 0$ , dual:  $b^T y : A^T y \geq c, y \geq 0$ 

#### Theorem

Das duale LP des dualen LP ist das primale LP.

- Primale I P: Maximiere  $c^T x$  unter  $Ax \leq b$ ,  $x \geq 0$ .
- Duale I P: Minimiere  $b^T y$  unter  $A^T y \ge c$ ,  $y \ge 0$ .
- Duale LP in kanonischer Form: Maximiere  $-b^T y$  unter  $-A^T y \leq -c$ ,  $y \geq 0$ .
- Davon wieder das duale LP: Minimiere  $-c^T x$  unter  $-Ax \ge -b$ ,  $x \ge 0$ .

#### Aussagen 7/7 Dual von Dual

Einleitung zu LPs

primal:  $c^T x : Ax \leq b, x \geq 0$ , dual:  $b^T y : A^T y \geq c, y \geq 0$ 

#### $\mathsf{Theorem}$

Das duale LP des dualen LP ist das primale LP.

- Primale I P: Maximiere  $c^T x$  unter  $Ax \leq b$ ,  $x \geq 0$ .
- Duale I P: Minimiere  $b^T y$  unter  $A^T y \ge c$ ,  $y \ge 0$ .
- Duale LP in kanonischer Form: Maximiere  $-b^T y$  unter  $-A^T y \leq -c$ ,  $y \geq 0$ .
- Davon wieder das duale LP: Minimiere  $-c^T x$  unter  $-Ax \ge -b$ ,  $x \ge 0$ .
- Das wieder in kanonische Form gebracht: Maximiere  $c^T x$  unter  $Ax \leq b$ ,  $x \geq 0$ .

Dualität 000●000

Walter Unger 22.11.2018 13:52

Ganzzahligkeit 000000000 SS2015 RWTH

Schwaches Dualitätsprinzip

primal:  $c^T x : Ax \leq b, x \geqslant \mathbf{0}$ , dual:  $b^T y : A^T y \geqslant c, y \geqslant \mathbf{0}$ 

#### Theorem

Sei x eine zulässige Lösung für das primale LP und sei y eine zulässige Lösung für das duale LP. Dann gilt  $y^T \cdot b \geqslant x^T \cdot x$ .

Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWTH

Ganzzahligkeit

## Schwaches Dualitätsprinzip

primal:  $c^T x : Ax \leq b, x \geqslant 0$ , dual:  $b^T y : A^T y \geqslant c, y \geqslant 0$ 

#### Theorem

Sei x eine zulässige Lösung für das primale LP und sei y eine zulässige Lösung für das duale LP. Dann gilt  $y^T \cdot b \geqslant x^T \cdot x$ .

0000000

## Schwaches Dualitätsprinzip

primal: 
$$c^T x : Ax \leq b, x \geqslant \mathbf{0}$$
, dual:  $b^T y : A^T y \geqslant c, y \geqslant \mathbf{0}$ 

#### Theorem

Einleitung zu LPs

4:40 Aussagen 3/7

Sei x eine zulässige Lösung für das primale LP und sei y eine zulässige Lösung für das duale LP. Dann gilt  $y^T \cdot b \ge x^T \cdot x$ .

#### Beweis:

• Aus der Zulässigkeit folgt jeweils:  $x \ge 0$  und  $y^T A \ge c^T$ .

#### Theorem

Einleitung zu LPs

4:40 Aussagen 4/7

Sei x eine zulässige Lösung für das primale LP und sei y eine zulässige Lösung für das duale LP. Dann gilt  $y^T \cdot b \ge x^T \cdot x$ .

- Aus der Zulässigkeit folgt jeweils:  $x \ge 0$  und  $v^T A \ge c^T$ .
- Damit folgt:  $c^T x \leq y^T A x$ .

# primal: $c^T x : Ax \leq b, x \geq 0$ , dual: $b^T y : A^T y \geq c, y \geq 0$

#### Theorem

Einleitung zu LPs

4:40 Aussagen 5/7

Sei x eine zulässige Lösung für das primale LP und sei y eine zulässige Lösung für das duale LP. Dann gilt  $y^T \cdot b \ge x^T \cdot x$ .

- Aus der Zulässigkeit folgt jeweils:  $x \ge 0$  und  $v^T A \ge c^T$ .
- Damit folgt:  $c^T x \leq y^T A x$ .
- Weiter folgt aus der Zulässigkeit:  $v \ge 0$  und  $Ax \le b$ .

Einleitung zu LPs

## Schwaches Dualitätsprinzip

primal:  $c^T x : Ax \leq b, x \geqslant \mathbf{0}$ , dual:  $b^T y : A^T y \geqslant c, y \geqslant \mathbf{0}$ 

#### Theorem

Sei x eine zulässige Lösung für das primale LP und sei y eine zulässige Lösung für das duale LP. Dann gilt  $y^T \cdot b \geqslant x^T \cdot x$ .

- Aus der Zulässigkeit folgt jeweils:  $x \ge 0$  und  $y^T A \ge c^T$ .
- Damit folgt:  $c^T x \leq y^T A x$ .
- Weiter folgt aus der Zulässigkeit:  $y \ge 0$  und  $Ax \le b$ .
- Damit folgt:  $y^T A x \leqslant y^T b$ .

primal:  $c^T x : Ax \leq b, x \geq 0$ , dual:  $b^T y : A^T y \geq c, y \geq 0$ 

#### Theorem

Aussagen 7/7

Einleitung zu LPs

Sei x eine zulässige Lösung für das primale LP und sei y eine zulässige Lösung für das duale LP. Dann gilt  $y^T \cdot b \ge x^T \cdot x$ .

- Aus der Zulässigkeit folgt jeweils:  $x \ge 0$  und  $v^T A \ge c^T$ .
- Damit folgt:  $c^T x \leq v^T A x$ .
- Weiter folgt aus der Zulässigkeit:  $v \ge 0$  und  $Ax \le b$ .
- Damit folgt:  $y^T A x \leq y^T b$ .
- Damit gilt:  $c^T x \leq v^T A x \leq v^T b$ .

Dualität Ganzzahligkeit 0000000 Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWIH

## Starkes Dualitätsprinzip

primal:  $c^T x : Ax \leq b, x \geq 0$ , dual:  $b^T y : A^T y \geq c, y \geq 0$ 

#### Theorem

Einleitung zu LPs

4:41 Aussagen 1/4

Sei  $x^*$  eine optimale Lösung für das primale LP und sei  $y^*$  eine optimale Lösung für das duale LP. Dann gilt  $y^T \cdot b = x^T \cdot x$ .

Beweis (siehe Script):

## Starkes Dualitätsprinzip

primal:  $c^T x : Ax \leq b, x \geqslant \mathbf{0}$ , dual:  $b^T y : A^T y \geqslant c, y \geqslant \mathbf{0}$ 

#### Theorem

Einleitung zu LPs

Sei  $x^*$  eine optimale Lösung für das primale LP und sei  $y^*$  eine optimale Lösung für das duale LP. Dann gilt  $y^T \cdot b = x^T \cdot x$ .

Beweis (siehe Script):

0000000

## Starkes Dualitätsprinzip

primal: 
$$c^T x : Ax \leq b, x \geqslant 0$$
, dual:  $b^T y : A^T y \geqslant c, y \geqslant 0$ 

### Theorem

Einleitung zu LPs

4:41 Aussagen 3/4

Sei  $x^*$  eine optimale Lösung für das primale LP und sei  $y^*$  eine optimale Lösung für das duale LP. Dann gilt  $y^T \cdot b = x^T \cdot x$ .

Beweis (siehe Script):

Der Beweis ist sogar konstruktiv.

0000000

#### primal: $c^T x : Ax \leq b, x \geqslant 0$ , dual: $b^T y : A^T y \geqslant c, y \geqslant 0$

#### Theorem

Einleitung zu LPs

4:41 Aussagen 4/4

Sei  $x^*$  eine optimale Lösung für das primale LP und sei  $y^*$  eine optimale Lösung für das duale LP. Dann gilt  $y^T \cdot b = x^T \cdot x$ .

Beweis (siehe Script):

- Der Beweis ist sogar konstruktiv.
- D.h. eine "primale Lösung" kann in polynomieller Zeit in eine "duale Lösung" überführt werden.

Dualität 00000●0 Ganzzahligkeit 000000000

Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWTH

## Flussproblem als LP

nach t.

primal:  $c^Tx: Ax \leqslant b, x \geqslant \mathbf{0}$ , dual:  $b^Ty: A^Ty \geqslant c, y \geqslant \mathbf{0}$ 

• Gegeben G = (V, E, s, t, c). Sei  $P_{s,t}$  die Menge der einfachen Pfade von s

### Flussproblem als LP

Einleitung zu LPs

4:42 Beispiele 2/6

primal:  $c^T x : Ax \leq b, x \geq 0$ , dual:  $b^T y : A^T y \geq c, y \geq 0$ 

- Gegeben G = (V, E, s, t, c). Sei  $P_{s,t}$  die Menge der einfachen Pfade von snach t.
- Für jeden Pfad  $p \in P_{s,t}$  gibt es eine Variable  $x_p$ .

Einleitung zu LPs

## Flussproblem als LP

primal:  $c^T x : Ax \leq b, x \geq 0$ , dual:  $b^T y : A^T y \geq c, y \geq 0$ 

- Gegeben G = (V, E, s, t, c). Sei  $P_{s,t}$  die Menge der einfachen Pfade von snach t.
- Für jeden Pfad  $p \in P_{s,t}$  gibt es eine Variable  $x_p$ .
- Das primale LP lautet: Maximiere  $\sum_{p \in P_{n+}} x_p$  unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{p,e \in p} x_p \leqslant c(e), \ \forall e \in E \ \text{und} \ x_p \geqslant 0, \ \forall p \in P_{s,t}.$$

Beispiele 4/6

Einleitung zu LPs

### primal: $c^T x : Ax \leq b, x \geq 0$ , dual: $b^T y : A^T y \geq c, y \geq 0$

- Gegeben G = (V, E, s, t, c). Sei  $P_{s,t}$  die Menge der einfachen Pfade von snach t.
- Für jeden Pfad  $p \in P_{s,t}$  gibt es eine Variable  $x_p$ .
- Das primale LP lautet: Maximiere  $\sum_{p \in P_{n+}} x_p$  unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{p:e\in p} x_p \leqslant c(e), \ \forall e\in E \ \text{und} \ x_p\geqslant 0, \ \forall p\in P_{s,t}.$$

• Das duale LP lautet: Minimiere  $\sum_{e \in F} c(e) y_e$  unter den Nebenbedingungen:

$$\sum y_e\geqslant 1, \ \forall p\in P_{s,t} \ \text{und} \ y_e\geqslant 0, \ \forall e\in E.$$

Beispiele 5/6

Einleitung zu LPs

primal:  $c^T x : Ax \leq b, x \geq 0$ , dual:  $b^T y : A^T y \geq c, y \geq 0$ 

- Gegeben G = (V, E, s, t, c). Sei  $P_{s,t}$  die Menge der einfachen Pfade von snach t.
- Für jeden Pfad  $p \in P_{s,t}$  gibt es eine Variable  $x_p$ .
- Das primale LP lautet: Maximiere  $\sum_{p \in P_{n+}} x_p$  unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{p:e\in p} x_p \leqslant c(e), \ \forall e\in E \ \text{und} \ x_p\geqslant 0, \ \forall p\in P_{s,t}.$$

• Das duale LP lautet: Minimiere  $\sum_{e \in F} c(e)y_e$  unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{e \in p} y_e \geqslant 1, \ \forall p \in P_{s,t} \ \text{und} \ y_e \geqslant 0, \ \forall e \in E.$$

• Für das duale LP gilt (nach dem folgenden Abschnitt): die Werte von  $y_e$ sind aus  $\{0,1\}$ .

## Flussproblem als LP

primal: 
$$c^T x : Ax \leqslant b, x \geqslant \mathbf{0}$$
, dual:  $b^T y : A^T y \geqslant c, y \geqslant \mathbf{0}$ 

- Gegeben G = (V, E, s, t, c). Sei  $P_{s,t}$  die Menge der einfachen Pfade von snach t.
- Für jeden Pfad  $p \in P_{s,t}$  gibt es eine Variable  $x_p$ .
- Das primale LP lautet: Maximiere  $\sum_{p \in P_{n+}} x_p$  unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{p:e\in p} x_p \leqslant c(e), \ \forall e\in E \ \text{und} \ x_p\geqslant 0, \ \forall p\in P_{s,t}.$$

• Das duale LP lautet: Minimiere  $\sum_{e \in F} c(e)y_e$  unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{e \in p} y_e \geqslant 1, \ \forall p \in P_{s,t} \ \text{und} \ y_e \geqslant 0, \ \forall e \in E.$$

- Für das duale LP gilt (nach dem folgenden Abschnitt): die Werte von  $y_e$ sind aus  $\{0,1\}$ .
- Das duale LP entspricht dem Finden eines minimalen Schnitts zwischen s und t.

Ganzzahligkeit

SS2015 RWTH Walter Unger 22.11.2018 13:52

## Relaxiertes Matching

• Gegeben G = (V, E).

primal:  $c^T x : Ax \leq b, x \geqslant \mathbf{0}$ , dual:  $b^T y : A^T y \geqslant c, y \geqslant \mathbf{0}$ 

Ganzzahligkeit SS2015 RWIH

Walter Unger 22.11.2018 13:52

primal:  $c^T x : Ax \leq b, x \geq 0$ , dual:  $b^T y : A^T y \geq c, y \geq 0$ 

## Relaxiertes Matching

- Gegeben G = (V, E).
- Für jede Kante  $e \in E$  gibt es Variable  $x_e$ .

primal:  $c^T x : Ax \leq b, x \geq 0$ , dual:  $b^T y : A^T y \geq c, y \geq 0$ 

## Relaxiertes Matching

Einleitung zu LPs

4:43 Beispiele 3/7

• Gegeben 
$$G = (V, E)$$
.

- Gegeben G = (V, L).
- Für jede Kante  $e \in E$  gibt es Variable  $x_e$ .
- $\bullet$  Das primale LP lautet: Maximiere  $\sum_{e \in \mathcal{E}} x_e$  unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{e \in V} x_e \leqslant 1, \ \forall v \in V \ \text{und} \ x_e \geqslant 0, \ \forall e \in E.$$

Einleitung zu LPs

## Relaxiertes Matching

primal: 
$$c^T x : Ax \leqslant b, x \geqslant \mathbf{0}$$
, dual:  $b^T y : A^T y \geqslant c, y \geqslant \mathbf{0}$ 

- Gegeben G = (V, E).
- Für jede Kante  $e \in E$  gibt es Variable  $x_e$ .
- Das primale LP lautet: Maximiere  $\sum_{e \in F} x_e$  unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{e \in v} x_e \leqslant 1, \ \forall v \in V \ \text{und} \ x_e \geqslant 0, \ \forall e \in E.$$

• Das duale LP lautet: Minimiere  $\sum_{v \in V} y_v$  unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{v \in e} y_v \geqslant 1, \ \forall e \in E \ \text{und} \ y_v \geqslant 0, \ \forall v \in V.$$

Einleitung zu LPs

4:43 Beispiele 5/7

- primal:  $c^T x : Ax \leq b, x \geq 0$ , dual:  $b^T y : A^T y \geq c, y \geq 0$ • Gegeben G = (V, E).
- Für jede Kante  $e \in E$  gibt es Variable  $x_e$ .
- Das primale LP lautet: Maximiere  $\sum_{e \in F} x_e$  unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{e \in v} x_e \leqslant 1, \ \forall v \in V \ \text{und} \ x_e \geqslant 0, \ \forall e \in E.$$

• Das duale LP lautet: Minimiere  $\sum_{v \in V} y_v$  unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{v \in e} y_v \geqslant 1, \ \forall e \in E \ \text{und} \ y_v \geqslant 0, \ \forall v \in V.$$

• Das duale LP entspricht einem relaxierten Vertex-Cover-Problem.

Einleitung zu LPs

4:43 Beispiele 6/7

- primal:  $c^T x : Ax \leq b, x \geq 0$ , dual:  $b^T y : A^T y \geq c, y \geq 0$ • Gegeben G = (V, E).
- Für jede Kante  $e \in E$  gibt es Variable  $x_e$ .
- Das primale LP lautet: Maximiere  $\sum_{e \in F} x_e$  unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{e \in v} x_e \leqslant 1, \ \forall v \in V \ \text{und} \ x_e \geqslant 0, \ \forall e \in E.$$

• Das duale LP lautet: Minimiere  $\sum_{v \in V} y_v$  unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{v \in e} y_v \geqslant 1, \ \forall e \in E \ \text{und} \ y_v \geqslant 0, \ \forall v \in V.$$

- Das duale LP entspricht einem relaxierten Vertex-Cover-Problem.
- Aber hier liegt eine Ganzzahligkeit der Lösungen nur auf bipartiten Graphen vor.

Einleitung zu LPs

4:43 Beispiele 7/7

primal: 
$$c^T x : Ax \leqslant b, x \geqslant \mathbf{0}$$
, dual:  $b^T y : A^T y \geqslant c, y \geqslant \mathbf{0}$ 

- Gegeben G = (V, E).
- Für jede Kante  $e \in E$  gibt es Variable  $x_e$ .
- Das primale LP lautet: Maximiere  $\sum_{e \in F} x_e$  unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{e \in v} x_e \leqslant 1, \ \forall v \in V \text{ und } x_e \geqslant 0, \ \forall e \in E.$$

• Das duale LP lautet: Minimiere  $\sum_{v \in V} y_v$  unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{v \in e} y_v \geqslant 1, \ \forall e \in E \ \text{und} \ y_v \geqslant 0, \ \forall v \in V.$$

- Das duale LP entspricht einem relaxierten Vertex-Cover-Problem.
- Aber hier liegt eine Ganzzahligkeit der Lösungen nur auf bipartiten Graphen vor.
- Somit sind bipartites Matching und Vertex-Cover auf bipartiten Graphen dual zueinander.

ILPs (Integer Linear Programs) unterscheißen sich nur von LPs dadurch, y ≥ c, y ≥ 0 dass die Variablen aus IN sein müssen.

- ILPs (Integer Linear Programs) unterscheißen sich nur bon 1 Ps dad urch, y ≥ c, y ≥ 0 dass die Variablen aus N sein müssen.
  - Rucksackproblem: Gegeben d Objekte mit Gewichten  $g_i$  und Nutzen  $v_i$  für  $1 \le i \le d$ . Weiter sei G die Gewichtsschranke des Rucksacks.

Einleitung zu LPs

4:44 Einleitung 3/7

- ILPs (Integer Linear Programs) unterscheiden sich nur von LPs dad urch.  $^{T}_{v} > c, y > 0$ dass die Variablen aus IN sein müssen.
- Rucksackproblem: Gegeben d Objekte mit Gewichten  $g_i$  und Nutzen  $v_i$  für  $1 \le i \le d$ . Weiter sei G die Gewichtsschranke des Rucksacks.
- Maximiere  $\sum_{i=1}^{d} v_i \cdot x_i$  unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{i=1}^d g_i \cdot x_i \leqslant G, \ \forall i: 1 \leqslant i \leqslant d: x_i \in \{0,1\}.$$

Einleitung zu LPs

4:44 Einleitung 4/7

- ILPs (Integer Linear Programs) unterscheiden sich nur von LPs dad urch.  $^{T}_{v} > c, y > 0$ dass die Variablen aus IN sein müssen.
- Rucksackproblem: Gegeben d Objekte mit Gewichten  $g_i$  und Nutzen  $v_i$  für  $1 \leq i \leq d$ . Weiter sei G die Gewichtsschranke des Rucksacks.
- Maximiere  $\sum_{i=1}^{d} v_i \cdot x_i$  unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{i=1}^d g_i \cdot x_i \leqslant G, \ \forall i: 1 \leqslant i \leqslant d: x_i \in \{0,1\}.$$

• Gewichtetes Matchingproblem: Gegeben G = (V, E) mit Kantengewichten  $w_e, e \in E$ .

Einleitung zu LPs

4:44 Einleitung 5/7

- ILPs (Integer Linear Programs) unterscheiden sich nur von LPs dad urch  $^{T}_{v} > c, y > 0$ dass die Variablen aus IN sein müssen.
- Rucksackproblem: Gegeben d Objekte mit Gewichten  $g_i$  und Nutzen  $v_i$  für  $1 \leq i \leq d$ . Weiter sei G die Gewichtsschranke des Rucksacks.
- Maximiere  $\sum_{i=1}^{d} v_i \cdot x_i$  unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{i=1}^d g_i \cdot x_i \leqslant G, \ \forall i: 1 \leqslant i \leqslant d: x_i \in \{0,1\}.$$

- Gewichtetes Matchingproblem: Gegeben G = (V, E) mit Kantengewichten  $w_e, e \in E$ .
- Maximiere  $\sum_{e \in E} w_e \cdot x_e$  unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{e \in E: v \in e} x_e \leqslant 1, \ \forall v \in V \ \mathsf{und} \ x_e \in \{0,1\}, \ \forall e \in E.$$

- ILPs (Integer Linear Programs) unterscheiden sich nur von LPs dad urch  $^{T}_{v} > c, y > 0$ dass die Variablen aus IN sein müssen.
- Rucksackproblem: Gegeben d Objekte mit Gewichten  $g_i$  und Nutzen  $v_i$  für  $1 \le i \le d$ . Weiter sei G die Gewichtsschranke des Rucksacks.
- Maximiere  $\sum_{i=1}^{d} v_i \cdot x_i$  unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{i=1}^d g_i \cdot x_i \leqslant G, \ \forall i: 1 \leqslant i \leqslant d: x_i \in \{0,1\}.$$

- Gewichtetes Matchingproblem: Gegeben G = (V, E) mit Kantengewichten  $w_e, e \in E$ .
- Maximiere  $\sum_{e \in E} w_e \cdot x_e$  unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{e \in E: v \in e} x_e \leqslant 1, \ \forall v \in V \ \mathsf{und} \ x_e \in \{0,1\}, \ \forall e \in E.$$

 Das Rucksackproblem ist NP-hart, aber das gewichtete Matchingproblem ist in  $\mathcal{P}$ .

- ILPs (Integer Linear Programs) unterscheiden sich nur von LPs dad urch  $^{T}_{v} > c, y > 0$ dass die Variablen aus IN sein müssen.
- Rucksackproblem: Gegeben d Objekte mit Gewichten  $g_i$  und Nutzen  $v_i$  für  $1 \le i \le d$ . Weiter sei G die Gewichtsschranke des Rucksacks.
- Maximiere  $\sum_{i=1}^{d} v_i \cdot x_i$  unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{i=1}^d g_i \cdot x_i \leqslant G, \ \forall i: 1 \leqslant i \leqslant d: x_i \in \{0,1\}.$$

- Gewichtetes Matchingproblem: Gegeben G = (V, E) mit Kantengewichten  $w_e, e \in E$ .
- Maximiere  $\sum_{e \in E} w_e \cdot x_e$  unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{e \in E: v \in e} x_e \leqslant 1, \ \forall v \in V \ \mathsf{und} \ x_e \in \{0,1\}, \ \forall e \in E.$$

- Das Rucksackproblem ist NP-hart, aber das gewichtete Matchingproblem ist in  $\mathcal{P}$ .
- Wir untersuchen im Folgenden, wann ein ILP in  $\mathcal{P}$  liegt.

 Dualität
 Ganzzahligkeit

 ○○○○○○
 ○○○○○○

 Walter Unger 22.11.201813:52
 SS2015
 RWTH

## Unimodularität

primal:  $c^T x : Ax \leqslant b, x \geqslant \mathbf{0}$ , dual:  $b^T y : A^T y \geqslant c, y \geqslant \mathbf{0}$ 



Dualität Ganzzahlig<u>keit</u> 00000000 Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWTH

Unimodularität

primal:  $c^T x : Ax \leq b, x \geq 0$ , dual:  $b^T y : A^T y \geq c, y \geq 0$ 

## **Definition**

• Eine ganzzahlige quadratische Matrix heißt unimodular, falls ihre Determinante 1 oder -1 ist.

Dualität 0000000 Walter Unger 22.11.201813:52

Ganzzahligkeit ○●○○○○○○ SS2015 RWTH

Unimodularität

primal:  $c^T x : Ax \leq b, x \geq \mathbf{0}$ , dual:  $b^T y : A^T y \geq c, y \geq \mathbf{0}$ 

# Definition

- Eine ganzzahlige quadratische Matrix heißt unimodular, falls ihre Determinante 1 oder -1 ist.
- Eine ganzzahlige quadratische Matrix heißt total unimodular, falls jede quadratische reguläre Teilmatrix unimodular ist.

**Dualität** 0000000 Ganzzahligkeit ○●○○○○○○ SS2015 RWTH

Walter Unger 22.11.2018 13:52

### Unimodularität

primal:  $c^T x : Ax \leq b, x \geqslant \mathbf{0}$ , dual:  $b^T y : A^T y \geqslant c, y \geqslant \mathbf{0}$ 

## Definition

- Eine ganzzahlige quadratische Matrix heißt unimodular, falls ihre Determinante 1 oder -1 ist.
- Eine ganzzahlige quadratische Matrix heißt total unimodular, falls jede quadratische reguläre Teilmatrix unimodular ist.

### Unimodularität

primal:  $c^T x : Ax \leq b, x \geqslant \mathbf{0}$ , dual:  $b^T y : A^T y \geqslant c, y \geqslant \mathbf{0}$ 

### **Definition**

- Eine ganzzahlige quadratische Matrix heißt unimodular, falls ihre Determinante 1 oder -1 ist.
- Eine ganzzahlige quadratische Matrix heißt total unimodular, falls jede quadratische reguläre Teilmatrix unimodular ist.

### **Theorem**

Sei A total unimodular. Dann sind alle Basislösungen von  $A \cdot x = b$  ganzzahlig.

Beweis:

Dualität 0000000 Walter Unger 22.11.201813:52

Ganzzahligkeit

0000000

SS2015 RWTH

Unimodularität

primal:  $c^T x : Ax \leq b, x \geq \mathbf{0}$ , dual:  $b^T y : A^T y \geq c, y \geq \mathbf{0}$ 

### Definition

- Eine ganzzahlige quadratische Matrix heißt unimodular, falls ihre Determinante 1 oder -1 ist.
- Eine ganzzahlige quadratische Matrix heißt total unimodular, falls jede quadratische reguläre Teilmatrix unimodular ist.

### **Theorem**

Sei A total unimodular. Dann sind alle Basislösungen von  $A \cdot x = b$  ganzzahlig.

Beweis:

Dualität Walter Unger 22.11.2018 13:52

Ganzzahligkeit SS2015 RWTH

Unimodularität

primal:  $c^T x : Ax \leq b, x \geq 0$ , dual:  $b^T y : A^T y \geq c, y \geq 0$ 

### **Definition**

- Eine ganzzahlige quadratische Matrix heißt unimodular, falls ihre Determinante 1 oder -1 ist.
- Eine ganzzahlige quadratische Matrix heißt total unimodular, falls jede quadratische reguläre Teilmatrix unimodular ist.

### **Theorem**

Sei A total unimodular. Dann sind alle Basislösungen von  $A \cdot x = b$  ganzzahlig.

### **Beweis:**

• Sei  $\delta$  Basis von A. Die Basislösung ergibt sich aus  $A_{\delta} \cdot x_{\delta} = b$ .

Dualität Walter Unger 22.11.2018 13:52

Ganzzahligkeit SS2015 RWTH

Unimodularität

primal:  $c^T x : Ax \leq b, x \geq 0$ , dual:  $b^T y : A^T y \geq c, y \geq 0$ 

## **Definition**

- Eine ganzzahlige quadratische Matrix heißt unimodular, falls ihre Determinante 1 oder -1 ist.
- Eine ganzzahlige quadratische Matrix heißt total unimodular, falls jede quadratische reguläre Teilmatrix unimodular ist.

### **Theorem**

Sei A total unimodular. Dann sind alle Basislösungen von  $A \cdot x = b$  ganzzahlig.

#### **Beweis:**

- Sei  $\delta$  Basis von A. Die Basislösung ergibt sich aus  $A_{\delta} \cdot x_{\delta} = b$ .
- $A_{\delta}$  ist dabei eine quadratische Teilmatrix.

Einleitung zu LPs

## **Definition**

- Eine ganzzahlige quadratische Matrix heißt unimodular, falls ihre Determinante 1 oder -1 ist.
- Eine ganzzahlige quadratische Matrix heißt total unimodular, falls jede quadratische reguläre Teilmatrix unimodular ist.

### **Theorem**

Sei A total unimodular. Dann sind alle Basislösungen von  $A \cdot x = b$  ganzzahlig.

#### **Beweis:**

- Sei  $\delta$  Basis von A. Die Basislösung ergibt sich aus  $A_{\delta} \cdot x_{\delta} = b$ .
- $A_{\delta}$  ist dabei eine quadratische Teilmatrix.
- Damit folgt die Aussagen nach der Cramerschen Regel:

$$x_{\delta(i)} = rac{\det(A_{\delta(1)}, \dots, A_{\delta(i-1)}, b, A_{\delta(i+1)} \dots, A_{\delta(k)})}{\det(A_{\delta})}.$$

**Dualität** 0000000 Ganzzahligkeit

00000000

Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWTH

LPs

primal:  $c^T x : Ax \leqslant b, x \geqslant \mathbf{0}$ , dual:  $b^T y : A^T y \geqslant c, y \geqslant \mathbf{0}$ 

# Theorem

Sei A total unimodular, Dann sind alle Basislösungen von dem LP  $A \cdot x \leq b$  ganzzahlig.

Algorithmus von Seidel

OOOOOOOOOOOOOOO

Dualität

OOOOOOO

 Dualität
 Ganzzahligkeit

 0000000
 0000000

 Walter Unger 22.11.2018 13:52
 SS2015
 RWTH

LPs

primal:  $c^T x : Ax \leq b, x \geq 0$ , dual:  $b^T y : A^T y \geq c, y \geq 0$ 

### Theorem

Sei A total unimodular, Dann sind alle Basislösungen von dem LP  $A \cdot x \leqslant b$  ganzzahlig.

• Sei m die Anzahl der Zeilen von A.

Dualität Walter Unger 22.11.2018 13:52

Ganzzahligkeit SS2015 RWIH

**LPs** 

primal:  $c^T x : Ax \leq b, x \geq 0$ , dual:  $b^T y : A^T y \geq c, y \geq 0$ 

### **Theorem**

Sei A total unimodular, Dann sind alle Basislösungen von dem LP  $A \cdot x \leq b$ ganzzahlig.

- Sei m die Anzahl der Zeilen von A.
- Mit Schlupfvariablen erhalten wir ein LP in Gleichungsform:  $(A \mid E_m)$ .

LPs

primal:  $c^Tx: Ax \leq b, x \geqslant \mathbf{0}$ , dual:  $b^Ty: A^Ty \geqslant c, y \geqslant \mathbf{0}$ 

# Theorem

Sei A total unimodular, Dann sind alle Basislösungen von dem LP  $A \cdot x \leq b$  ganzzahlig.

- Sei m die Anzahl der Zeilen von A.
- Mit Schlupfvariablen erhalten wir ein LP in Gleichungsform:  $(A \mid E_m)$ .
- Wir zeigen nun, dass  $(A \mid E_m)$  total unimodular ist.

LPs

primal:  $c^T x : Ax \leq b, x \geqslant \mathbf{0}$ , dual:  $b^T y : A^T y \geqslant c, y \geqslant \mathbf{0}$ 

### **Theorem**

Sei A total unimodular, Dann sind alle Basislösungen von dem LP  $A \cdot x \leq b$  ganzzahlig.

- Sei m die Anzahl der Zeilen von A.
- Mit Schlupfvariablen erhalten wir ein LP in Gleichungsform:  $(A \mid E_m)$ .
- Wir zeigen nun, dass  $(A \mid E_m)$  total unimodular ist.
- Sei C beliebige quadratische Teilmatrix von  $(A \mid E_m)$ .

primal:  $c^T x : Ax \leq b, x \geq 0$ , dual:  $b^T y : A^T y \geq c, y \geq 0$ 

ganzzahlig.

Theorem
Sei A total unimodular, Dann sind alle Basislösungen von dem LP 
$$A \cdot x \leq b$$

- Sei m die Anzahl der Zeilen von A.
- Mit Schlupfvariablen erhalten wir ein LP in Gleichungsform:  $(A \mid E_m)$ .
- Wir zeigen nun, dass  $(A \mid E_m)$  total unimodular ist.
- Sei C beliebige quadratische Teilmatrix von  $(A \mid E_m)$ .
- Wir können C wie folgt umgeformt darstellen:

$$C' = \left( \begin{array}{cc} M & 0 \\ * & E_k \end{array} \right).$$

Sei A total unimodular, Dann sind alle Basislösungen von dem LP  $A \cdot x \leq b$  ganzzahlig.

- Sei m die Anzahl der Zeilen von A.
- Mit Schlupfvariablen erhalten wir ein LP in Gleichungsform:  $(A \mid E_m)$ .
- Wir zeigen nun, dass  $(A \mid E_m)$  total unimodular ist.
- Sei C beliebige quadratische Teilmatrix von  $(A \mid E_m)$ .
- Wir können C wie folgt umgeformt darstellen:

$$C' = \left( \begin{array}{cc} M & 0 \\ * & E_k \end{array} \right).$$

• Dabei ist  $E_k$  eine  $k \times k$ -Einheitsmatrix.

Sei A total unimodular, Dann sind alle Basislösungen von dem LP  $A \cdot x \leq b$  ganzzahlig.

- Sei m die Anzahl der Zeilen von A.
- Mit Schlupfvariablen erhalten wir ein LP in Gleichungsform:  $(A \mid E_m)$ .
- Wir zeigen nun, dass  $(A \mid E_m)$  total unimodular ist.
- Sei C beliebige quadratische Teilmatrix von  $(A \mid E_m)$ .
- Wir können C wie folgt umgeformt darstellen:

$$C' = \left( \begin{array}{cc} M & 0 \\ * & E_k \end{array} \right).$$

- Dabei ist  $E_k$  eine  $k \times k$ -Einheitsmatrix.
- M ist eine  $(m-k) \times (m-k)$ -Teilmatrix von A.

Sei A total unimodular, Dann sind alle Basislösungen von dem LP  $A \cdot x \leq b$ ganzzahlig.

- Sei m die Anzahl der Zeilen von A.
- Mit Schlupfvariablen erhalten wir ein LP in Gleichungsform:  $(A \mid E_m)$ .
- Wir zeigen nun, dass  $(A \mid E_m)$  total unimodular ist.
- Sei C beliebige quadratische Teilmatrix von  $(A \mid E_m)$ .
- Wir können C wie folgt umgeformt darstellen:

$$C' = \left( \begin{array}{cc} M & 0 \\ * & E_k \end{array} \right).$$

- Dabei ist E<sub>k</sub> eine k × k-Einheitsmatrix.
- M ist eine  $(m-k) \times (m-k)$ -Teilmatrix von A.
- Es folgt:  $|\det(C)| = |\det(C')| = |\det(M)| = 1$ .

Einleitung zu LPs

## **Theorem**

4:46 Unimodularität 10/10

primal: 
$$c^T x : Ax \leq b, x \geq 0$$
, dual:  $b^T y : A^T y \geq c, y \geq 0$ 

Sei A total unimodular, Dann sind alle Basislösungen von dem LP A  $\cdot$  x  $\leq$  b ganzzahlig.

- Sei m die Anzahl der Zeilen von A.
- Mit Schlupfvariablen erhalten wir ein LP in Gleichungsform:  $(A \mid E_m)$ .
- Wir zeigen nun, dass  $(A \mid E_m)$  total unimodular ist.
- Sei C beliebige quadratische Teilmatrix von  $(A \mid E_m)$ .
- Wir können C wie folgt umgeformt darstellen:

$$C' = \left( \begin{array}{cc} M & 0 \\ * & E_k \end{array} \right).$$

- Dabei ist  $E_k$  eine  $k \times k$ -Einheitsmatrix.
- M ist eine  $(m-k) \times (m-k)$ -Teilmatrix von A.
- Es folgt:  $|\det(C)| = |\det(C')| = |\det(M)| = 1$ .
- Damit ist  $(A \mid E_m)$  total unimodular.

Dualität 0000000 Walter Unger 22 Ganzzahligkeit 000000000 SS2015 RWTH

Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2018

# Eine Eigenschaft für unimodular

primal:  $c^T x : Ax \leqslant b, x \geqslant \mathbf{0}$ , dual:  $b^T y : A^T y \geqslant c, y \geqslant \mathbf{0}$ 

# Theorem

Dualität Ganzzahligkeit Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWIH

# Eine Eigenschaft für unimodular

primal:  $c^T x : Ax \leq b, x \geq 0$ , dual:  $b^T y : A^T y \geq c, y \geq 0$ 

# **Theorem**

Eine Matrix A mit Einträgen aus  $\{-1,0,1\}$  ist total unimodular, • nicht mehr als zwei Einträge pro Spalte aus  $\{-1,1\}$  sind und

Dualität Ganzzahligkeit Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWIH

# Eine Eigenschaft für unimodular

primal:  $c^T x : Ax \leq b, x \geq 0$ , dual:  $b^T y : A^T y \geq c, y \geq 0$ 

# **Theorem**

- nicht mehr als zwei Einträge pro Spalte aus  $\{-1,1\}$  sind und
- die Zeilen in zwei Mengen l<sub>1</sub> und l<sub>2</sub> aufteilen lassen, für die gilt:

Dualität Walter Unger 22.11.2018 13:52 Ganzzahligkeit

Eine Eigenschaft für unimodular

primal:  $c^T x : Ax \leq b, x \geq 0$ , dual:  $b^T y : A^T y \geq c, y \geq 0$ 

# **Theorem**

- nicht mehr als zwei Einträge pro Spalte aus  $\{-1,1\}$  sind und
- die Zeilen in zwei Mengen l<sub>1</sub> und l<sub>2</sub> aufteilen lassen, für die gilt:
  - Falls eine Spalte zwei unterschiedliche Einträge (-1 und 1) enthält, so sind die zugehörigen Zeilen in der gleichen Menge Ii.

Dualität

Ganzzahligkeit SS2015 RWTH

Walter Unger 22.11.2018 13:52

# Eine Eigenschaft für unimodular

primal:  $c^T x : Ax \leq b, x \geq 0$ , dual:  $b^T y : A^T y \geq c, y \geq 0$ 

### **Theorem**

- nicht mehr als zwei Einträge pro Spalte aus  $\{-1,1\}$  sind und
- die Zeilen in zwei Mengen l<sub>1</sub> und l<sub>2</sub> aufteilen lassen, für die gilt:
  - Falls eine Spalte zwei unterschiedliche Einträge (-1 und 1) enthält, so sind die zugehörigen Zeilen in der gleichen Menge I:.
  - ullet Falls eine Spalte zwei Einträge -1 oder zwei Einträge 1 hat, so sind die zugehörigen Zeilen in der unterschiedlichen Mengen Ii.

Dualität Walter Unger 22.11.2018 13:52

Ganzzahligkeit SS2015 RWTH

# Eine Eigenschaft für unimodular

primal:  $c^T x : Ax \leq b, x \geq 0$ , dual:  $b^T y : A^T y \geq c, y \geq 0$ 

### **Theorem**

- nicht mehr als zwei Einträge pro Spalte aus  $\{-1,1\}$  sind und
- die Zeilen in zwei Mengen l<sub>1</sub> und l<sub>2</sub> aufteilen lassen, für die gilt:
  - Falls eine Spalte zwei unterschiedliche Einträge (-1 und 1) enthält, so sind die zugehörigen Zeilen in der gleichen Menge I:.
  - ullet Falls eine Spalte zwei Einträge -1 oder zwei Einträge 1 hat, so sind die zugehörigen Zeilen in der unterschiedlichen Mengen Ii.

Dualität

# Eine Eigenschaft für unimodular

primal:  $c^T x : Ax \leq b, x \geq 0$ , dual:  $b^T y : A^T y \geq c, y \geq 0$ 

### **Theorem**

4:47 Unimodularität 7/9

Einleitung zu LPs

Eine Matrix A mit Einträgen aus  $\{-1,0,1\}$  ist total unimodular,

- nicht mehr als zwei Einträge pro Spalte aus  $\{-1,1\}$  sind und
- die Zeilen in zwei Mengen l<sub>1</sub> und l<sub>2</sub> aufteilen lassen, für die gilt:
  - Falls eine Spalte zwei unterschiedliche Einträge (-1 und 1) enthält, so sind die zugehörigen Zeilen in der gleichen Menge I:.
  - Falls eine Spalte zwei Einträge −1 oder zwei Einträge 1 hat, so sind die zugehörigen Zeilen in der unterschiedlichen Mengen Ii.

### Beweis:

Beweis erfolgt per Induktion über die Größe der Teilmatrizen.

4:47 Unimodularität 8/9

Einleitung zu LPs

Eine Matrix A mit Einträgen aus  $\{-1,0,1\}$  ist total unimodular,

- nicht mehr als zwei Einträge pro Spalte aus  $\{-1,1\}$  sind und
- die Zeilen in zwei Mengen l<sub>1</sub> und l<sub>2</sub> aufteilen lassen, für die gilt:
  - Falls eine Spalte zwei unterschiedliche Einträge (-1 und 1) enthält, so sind die zugehörigen Zeilen in der gleichen Menge I:.
  - ullet Falls eine Spalte zwei Einträge -1 oder zwei Einträge 1 hat, so sind die zugehörigen Zeilen in der unterschiedlichen Mengen Ii.

### Beweis:

- Beweis erfolgt per Induktion über die Größe der Teilmatrizen.
- Induktionsanfang: eine  $1 \times 1$  Teilmatrix ist offensichtlich unimodular.

4:47 Unimodularität 9/9

Einleitung zu LPs

Eine Matrix A mit Einträgen aus  $\{-1,0,1\}$  ist total unimodular,

- nicht mehr als zwei Einträge pro Spalte aus  $\{-1,1\}$  sind und
- die Zeilen in zwei Mengen l<sub>1</sub> und l<sub>2</sub> aufteilen lassen, für die gilt:
  - Falls eine Spalte zwei unterschiedliche Einträge (-1 und 1) enthält, so sind die zugehörigen Zeilen in der gleichen Menge I:.
  - ullet Falls eine Spalte zwei Einträge -1 oder zwei Einträge 1 hat, so sind die zugehörigen Zeilen in der unterschiedlichen Mengen Ii.

### Beweis:

- Beweis erfolgt per Induktion über die Größe der Teilmatrizen.
- Induktionsanfang: eine  $1 \times 1$  Teilmatrix ist offensichtlich unimodular.
- Induktionsannahme: jede  $(k-1) \times (k-1)$  Teilmatrix sei unimodular.

# Beweis

Induktionsannahme: jede  $(k-1) \times (k-1)$  Teilmatrix sei unimodular.

• Sei C eine  $k \times k$  Teilmatrix von A.

# Beweis

- Sei C eine  $k \times k$  Teilmatrix von A.
- Wir müssen zeigen: C ist nicht regulär oder C ist unimodular.

Dualität 0000000 Ganzzahligkeit 0000•0000 SS2015 RWTH

Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS

### **Beweis**

- Sei C eine  $k \times k$  Teilmatrix von A.
- Wir müssen zeigen: C ist nicht regulär oder C ist unimodular.
  - Falls C eine Spalte enthält, die  $0^k$  ist, so ist C nicht regulär.

Dualität 0000000 Ganzzahligkeit 00000000 SS2015 RWTH

Walter Unger 22.11.2018 13:52

### Beweis

- Sei C eine  $k \times k$  Teilmatrix von A.
- Wir müssen zeigen: C ist nicht regulär oder C ist unimodular.
  - Falls C eine Spalte enthält, die  $0^k$  ist, so ist C nicht regulär.
  - Falls C eine Spalte enthält, die nur einen Eintrag aus {-1,1} enthält, so können wir die Determinante nach dieser Spalte entwickeln.

**Dualität** 0000000 Ganzzahligkeit 00000000 SS2015 RWTH

Walter Unger 22.11.2018 13:52

### Beweis

- Sei C eine  $k \times k$  Teilmatrix von A
- Wir müssen zeigen: C ist nicht regulär oder C ist unimodular.
  - Falls C eine Spalte enthält, die  $0^k$  ist, so ist C nicht regulär.
  - Falls C eine Spalte enthält, die nur einen Eintrag aus  $\{-1,1\}$  enthält, so können wir die Determinante nach dieser Spalte entwickeln.
    - Dazu sind die Zeile und Spalte dieses Eintrags zu entfernen und die Determinante der verbleibenden  $(k-1) \times (k-1)$  ist zu betrachten.

**Dualität** 0000000 Ganzzahligkeit 0000●0000 SS2015 RWTH

**Beweis** 

Induktionsannahme: jede  $(k-1) \times (k-1)$  Teilmatrix sei unimodular.

Walter Unger 22.11.2018 13:52

- Sei C eine  $k \times k$  Teilmatrix von A
- Wir müssen zeigen: C ist nicht regulär oder C ist unimodular.
  - Falls C eine Spalte enthält, die  $0^k$  ist, so ist C nicht regulär.
  - Falls C eine Spalte enthält, die nur einen Eintrag aus  $\{-1,1\}$  enthält, so können wir die Determinante nach dieser Spalte entwickeln.
    - Dazu sind die Zeile und Spalte dieses Eintrags zu entfernen und die Determinante der verbleibenden  $(k-1) \times (k-1)$  ist zu betrachten.
    - Damit gilt die Behauptung in diesem Fall.

**Dualität** 0000000 Ganzzahligkeit 0000●0000 SS2015 RWTH

**Beweis** 

Induktionsannahme: jede  $(k-1) \times (k-1)$  Teilmatrix sei unimodular.

Walter Unger 22.11.2018 13:52

- Sei C eine  $k \times k$  Teilmatrix von A
- Wir müssen zeigen: C ist nicht regulär oder C ist unimodular.
  - Falls C eine Spalte enthält, die  $O^k$  ist, so ist C nicht regulär.
  - Falls C eine Spalte enthält, die nur einen Eintrag aus  $\{-1,1\}$  enthält, so können wir die Determinante nach dieser Spalte entwickeln.
    - Dazu sind die Zeile und Spalte dieses Eintrags zu entfernen und die Determinante der verbleibenden  $(k-1) \times (k-1)$  ist zu betrachten.
    - Damit gilt die Behauptung in diesem Fall.
  - Falls jede Spalte aus C zwei Einträge enthält, so gilt für jede Spalte j:

**Dualität** 0000000 Ganzzahligkeit 000000000 SS2015 RWTH

### Beweis

Induktionsannahme: jede  $(k-1) \times (k-1)$  Teilmatrix sei unimodular.

Walter Unger 22.11.2018 13:52

- Sei C eine  $k \times k$  Teilmatrix von A
- Wir müssen zeigen: C ist nicht regulär oder C ist unimodular.
  - Falls C eine Spalte enthält, die  $0^k$  ist, so ist C nicht regulär.
  - Falls C eine Spalte enthält, die nur einen Eintrag aus  $\{-1,1\}$  enthält, so können wir die Determinante nach dieser Spalte entwickeln.
    - Dazu sind die Zeile und Spalte dieses Eintrags zu entfernen und die Determinante der verbleibenden  $(k-1) \times (k-1)$  ist zu betrachten.
    - Damit gilt die Behauptung in diesem Fall.
  - Falls jede Spalte aus C zwei Einträge enthält, so gilt für jede Spalte j:
    - $\bullet \sum_{i \in I_1} a_{i,j} = \sum_{i \in I_2} a_{i,j}.$

Dualität 0000000 Walter Unger 22.11.201813:52 Ganzzahligkeit 0000●0000 SS2015 RWTH

Beweis

- Sei C eine  $k \times k$  Teilmatrix von A
- Wir müssen zeigen: C ist nicht regulär oder C ist unimodular.
  - Falls C eine Spalte enthält, die  $0^k$  ist, so ist C nicht regulär.
  - Falls C eine Spalte enthält, die nur einen Eintrag aus  $\{-1,1\}$  enthält, so können wir die Determinante nach dieser Spalte entwickeln.
    - Dazu sind die Zeile und Spalte dieses Eintrags zu entfernen und die Determinante der verbleibenden  $(k-1) \times (k-1)$  ist zu betrachten.
    - Damit gilt die Behauptung in diesem Fall.
  - Falls jede Spalte aus C zwei Einträge enthält, so gilt für jede Spalte j:
    - $\sum_{i \in I_1} a_{i,j} = \sum_{i \in I_2} a_{i,j}$
    - Damit können wir die Zeilenvektoren aus l<sub>1</sub> aufsummieren und die aus l<sub>2</sub> subtrahieren.

Beweis

- Sei C eine  $k \times k$  Teilmatrix von A
- Wir müssen zeigen: C ist nicht regulär oder C ist unimodular.
  - Falls C eine Spalte enthält, die  $0^k$  ist, so ist C nicht regulär.
  - Falls C eine Spalte enthält, die nur einen Eintrag aus  $\{-1,1\}$  enthält, so können wir die Determinante nach dieser Spalte entwickeln.
    - Dazu sind die Zeile und Spalte dieses Eintrags zu entfernen und die Determinante der verbleibenden  $(k-1) \times (k-1)$  ist zu betrachten.
    - Damit gilt die Behauptung in diesem Fall.
  - Falls jede Spalte aus C zwei Einträge enthält, so gilt für jede Spalte j:
    - $\sum_{i \in I_1} a_{i,j} = \sum_{i \in I_2} a_{i,j}$ .
    - Damit können wir die Zeilenvektoren aus l<sub>1</sub> aufsummieren und die aus l<sub>2</sub> subtrahieren.
    - $\bullet\,$  Das Ergebnis ist ein Nullvektor. Damit ist C nicht regulär.

# Inzidenzmatrix

Induktionsannahme: jede  $(k-1) \times (k-1)$  Teilmatrix sei unimodular.

• Die Inzidenzmatrix eines Graphen hat folgende Gestalt:

Dualität 0000000

Walter Unger 22.11.2018 13:52 S

Ganzzahligkeit 00000●000 SS2015 RWTH

# <u>Inzi</u>denzmatrix

- Die Inzidenzmatrix eines Graphen hat folgende Gestalt:
  - Für jeden Knoten gibt es eine Zeile.

Dualität

Ganzzahligkeit 000000000 Walter Unger 22.11.2018 13:52

SS2015 RWITH

## Inzidenzmatrix

- Die Inzidenzmatrix eines Graphen hat folgende Gestalt:
  - Für jeden Knoten gibt es eine Zeile.
  - Für jede Kante gibt es eine Spalte.

Dualität 0000000 Walter Unger 22.11.201813:52

Ganzzahligkeit 0000●000 SS2015 RWTH

Inzidenzmatrix

- Die Inzidenzmatrix eines Graphen hat folgende Gestalt:
  - Für jeden Knoten gibt es eine Zeile.
  - Für jede Kante gibt es eine Spalte.
  - Eine 1 besagt: die ungerichtete Kante ist zu dem Knoten inzident.

Dualität 0000000 Walter Unger 22.11.201813:52

Ganzzahligkeit 0000●000 SS2015 RWTH

Inzidenzmatrix

Induktionsannahme: jede  $(k-\mathbf{1}) \times (k-\mathbf{1})$  Teilmatrix sei unimodular.

- Die Inzidenzmatrix eines Graphen hat folgende Gestalt:
  - Für jeden Knoten gibt es eine Zeile.
  - Für jede Kante gibt es eine Spalte.
  - Eine 1 besagt: die ungerichtete Kante ist zu dem Knoten inzident.
  - Eine 1 besagt: die gerichtete Kante endet in dem Knoten.

Dualität 0000000 Walter Unger 22.11.201813:52

Ganzzahligkeit 000000000 SS2015 RWTH

Inzidenzmatrix

- Die Inzidenzmatrix eines Graphen hat folgende Gestalt:
  - Für jeden Knoten gibt es eine Zeile.
  - Für jede Kante gibt es eine Spalte.
  - Eine 1 besagt: die ungerichtete Kante ist zu dem Knoten inzident.
  - Eine 1 besagt: die gerichtete Kante endet in dem Knoten.
  - ullet Eine -1 besagt: die gerichtete Kante startet in dem Knoten.

### Inzidenzmatrix

- Die Inzidenzmatrix eines Graphen hat folgende Gestalt:
  - Für jeden Knoten gibt es eine Zeile.
  - Für jede Kante gibt es eine Spalte.
  - Eine 1 besagt: die ungerichtete Kante ist zu dem Knoten inzident.
  - Eine 1 besagt: die gerichtete Kante endet in dem Knoten.
  - ullet Eine -1 besagt: die gerichtete Kante startet in dem Knoten.
- Die Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen genügt den obigen Bedingungen:

Dualität Walter Unger 22.11.2018 13:52

Ganzzahligkeit 000000000 SS2015 RWIH

### Inzidenzmatrix

- Die Inzidenzmatrix eines Graphen hat folgende Gestalt:
  - Für jeden Knoten gibt es eine Zeile.
  - Für jede Kante gibt es eine Spalte.
  - Eine 1 besagt: die ungerichtete Kante ist zu dem Knoten inzident.
  - Eine 1 besagt: die gerichtete Kante endet in dem Knoten.
  - Eine -1 besagt: die gerichtete Kante startet in dem Knoten.
- Die Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen genügt den obigen Bedingungen:
  - Alle Zeilen gehören hier zur Menge I<sub>1</sub>.

Einleitung zu LPs

# 4:49 Unimodularität 9/11

- Die Inzidenzmatrix eines Graphen hat folgende Gestalt:
  - Für ieden Knoten gibt es eine Zeile.
  - Für jede Kante gibt es eine Spalte.
  - Eine 1 besagt: die ungerichtete Kante ist zu dem Knoten inzident.
  - Eine 1 besagt: die gerichtete Kante endet in dem Knoten.
  - Eine -1 besagt: die gerichtete Kante startet in dem Knoten.
- Die Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen genügt den obigen Bedingungen:
  - Alle Zeilen gehören hier zur Menge I<sub>1</sub>.
- Die Inzidenzmatrix eines ungerichteten bipartiten Graphen (V, W, E) genügt den obigen Bedingungen:

4:49 Unimodularität 10/11

Einleitung zu LPs

- Die Inzidenzmatrix eines Graphen hat folgende Gestalt:
  - Für ieden Knoten gibt es eine Zeile.
  - Für jede Kante gibt es eine Spalte.
  - Eine 1 besagt: die ungerichtete Kante ist zu dem Knoten inzident.
  - Eine 1 besagt: die gerichtete Kante endet in dem Knoten.
  - Eine -1 besagt: die gerichtete Kante startet in dem Knoten.
- Die Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen genügt den obigen Bedingungen:
  - Alle Zeilen gehören hier zur Menge I<sub>1</sub>.
- Die Inzidenzmatrix eines ungerichteten bipartiten Graphen (V, W, E) genügt den obigen Bedingungen:
  - Alle Zeilen die Knoten aus V repräsentieren gehören zur Menge  $I_1$ .

Dualität Walter Unger 22.11.2018 13:52

Ganzzahligkeit 000000000 SS2015 RWTH

#### Inzidenzmatrix

4:49 Unimodularität 11/11

Einleitung zu LPs

- Die Inzidenzmatrix eines Graphen hat folgende Gestalt:
  - Für ieden Knoten gibt es eine Zeile.
  - Für jede Kante gibt es eine Spalte.
  - Eine 1 besagt: die ungerichtete Kante ist zu dem Knoten inzident.
  - Eine 1 besagt: die gerichtete Kante endet in dem Knoten.
  - Eine -1 besagt: die gerichtete Kante startet in dem Knoten.
- Die Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen genügt den obigen Bedingungen:
  - Alle Zeilen gehören hier zur Menge I<sub>1</sub>.
- Die Inzidenzmatrix eines ungerichteten bipartiten Graphen (V, W, E) genügt den obigen Bedingungen:
  - Alle Zeilen die Knoten aus V repräsentieren gehören zur Menge  $I_1$ .
  - Alle Zeilen die Knoten aus W repräsentieren gehören zur Menge  $I_2$ .

Dualität 0000000

Walter Unger 22.11.2018 13:52

Ganzzahligkeit 000000●00 SS2015 RWTH

Folgerungen

Induktionsannahme: jede  $(k-1) \times (k-1)$  Teilmatrix sei unimodular.

#### Lemma

Ein LP in Standardform oder in kanonischer Form hat nur ganzzahlige Basislösungen, falls die Nebenbedingungsmatrix

Dualität 0000000 Ganzzahligkeit 00000●00 SS2015 RWTH

Walter Unger 22.11.2018 13:52

# Folgerungen

Induktionsannahme: jede  $(k-1) \times (k-1)$  Teilmatrix sei unimodular.

#### Lemma

Ein LP in Standardform oder in kanonischer Form hat nur ganzzahlige Basislösungen, falls die Nebenbedingungsmatrix

• der Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen oder

Dualität 0000000 Ganzzahligkeit 00000●00 SS2015 RWTH

Walter Unger 22.11.2018 13:52

# Folgerungen

Induktionsannahme: jede  $(k-1) \times (k-1)$  Teilmatrix sei unimodular.

#### Lemma

Ein LP in Standardform oder in kanonischer Form hat nur ganzzahlige Basislösungen, falls die Nebenbedingungsmatrix

- der Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen oder
- der Inzidenzmatrix eines bipartiten Graphen entspricht.

Dualität 0000000 Ganzzahligkeit 00000●00 SS2015 RWTH

Walter Unger 22.11.2018 13:52

# Folgerungen

Induktionsannahme: jede  $(k-1) \times (k-1)$  Teilmatrix sei unimodular.

#### Lemma

Ein LP in Standardform oder in kanonischer Form hat nur ganzzahlige Basislösungen, falls die Nebenbedingungsmatrix

- der Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen oder
- der Inzidenzmatrix eines bipartiten Graphen entspricht.

Dualität 0000000 Walter Unger 22.11.201813:52

Ganzzahligkeit 00000●00 SS2015 RWTH

Folgerungen

Induktionsannahme: jede  $(k-1) \times (k-1)$  Teilmatrix sei unimodular.

#### Lemma

Ein LP in Standardform oder in kanonischer Form hat nur ganzzahlige Basislösungen, falls die Nebenbedingungsmatrix

- der Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen oder
- der Inzidenzmatrix eines bipartiten Graphen entspricht.

Damit liefen die relaxierten LP-Formulierungen eine ganzzahlige optimale Lösung für:

maximalen Fluss,

**Dualität** 0000000 Ganzzahligkeit 00000●00 SS2015 RWTH

Walter Unger 22.11.2018 13:52

# Folgerungen

Induktionsannahme: jede  $(k-1) \times (k-1)$  Teilmatrix sei unimodular.

#### Lemma

Ein LP in Standardform oder in kanonischer Form hat nur ganzzahlige Basislösungen, falls die Nebenbedingungsmatrix

- der Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen oder
- der Inzidenzmatrix eines bipartiten Graphen entspricht.

Damit liefen die relaxierten LP-Formulierungen eine ganzzahlige optimale Lösung für:

- maximalen Fluss,
- kürzester Weg,

Walter Unger 22.11.2018 13:52

#### Lemma

Ein LP in Standardform oder in kanonischer Form hat nur ganzzahlige Basislösungen, falls die Nebenbedingungsmatrix

- der Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen oder
- der Inzidenzmatrix eines bipartiten Graphen entspricht.

Damit liefen die relaxierten LP-Formulierungen eine ganzzahlige optimale Lösung für:

- maximalen Fluss,
- kürzester Weg,
- gewichtetes bipartites Matching, und

Dualität 0000000 Walter Unger 22.11.2018 13:52 Ganzzahligkeit 00000●00 SS2015 RWTH

Folgerungen

Induktionsannahme: jede  $(k-1) \times (k-1)$  Teilmatrix sei unimodular.

#### Lemma

Ein LP in Standardform oder in kanonischer Form hat nur ganzzahlige Basislösungen, falls die Nebenbedingungsmatrix

- der Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen oder
- der Inzidenzmatrix eines bipartiten Graphen entspricht.

Damit liefen die relaxierten LP-Formulierungen eine ganzzahlige optimale Lösung für:

- maximalen Fluss,
- kürzester Weg,
- gewichtetes bipartites Matching, und
- bipartites Vertex-Cover.

 Dualität
 Ganzzahligkeit

 0000000
 000000000

 Walter Unger 22.11.2018 13:52
 SS2015
 RWTH

# Bemerkungen

Induktionsannahme: jede  $(k-1) \times (k-1)$  Teilmatrix sei unimodular.

 Damit folgt auch die Dualität des Matchings und des Vertex-Cover auf bipartiten Graphen.

**Dualität** 0000000 Ganzzahligkeit 000000●0 SS2015 RWTH

Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS20:

# Bemerkungen

- Damit folgt auch die Dualität des Matchings und des Vertex-Cover auf bipartiten Graphen.
- Betrachte folgende Matrix (Inzidenzmatrix von  $K_3$ ):

$$\left(\begin{array}{cccc}
1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1
\end{array}\right)$$

Dualität Ganzzahligkeit Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWIH

# 4:51 Unimodularität 3/6 Bemerkungen

Einleitung zu LPs

Induktionsannahme: jede  $(k-1) \times (k-1)$  Teilmatrix sei unimodular.

- Damit folgt auch die Dualität des Matchings und des Vertex-Cover auf bipartiten Graphen.
- Betrachte folgende Matrix (Inzidenzmatrix von  $K_3$ ):

$$\left(\begin{array}{ccc}
1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1
\end{array}\right)$$

Die Determinante dieser Matrix ist 2.

Unimodularität 4/6

Einleitung zu LPs

- Damit folgt auch die Dualität des Matchings und des Vertex-Cover auf bipartiten Graphen.
- Betrachte folgende Matrix (Inzidenzmatrix von  $K_3$ ):

$$\left(\begin{array}{ccc}
1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1
\end{array}\right)$$

- Die Determinante dieser Matrix ist 2.
- Der zugehörige Graph K<sub>3</sub> hat nur ein Matching der Größe 1.

Unimodularität 5/6

Einleitung zu LPs

- Damit folgt auch die Dualität des Matchings und des Vertex-Cover auf bipartiten Graphen.
- Betrachte folgende Matrix (Inzidenzmatrix von  $K_3$ ):

$$\left(\begin{array}{ccc}
1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1
\end{array}\right)$$

- Die Determinante dieser Matrix ist 2.
- Der zugehörige Graph K<sub>3</sub> hat nur ein Matching der Größe 1.
- Das relaxierte Matching hat aber einen Wert von 3/2.

Unimodularität 6/6

Einleitung zu LPs

- Damit folgt auch die Dualität des Matchings und des Vertex-Cover auf bipartiten Graphen.
- Betrachte folgende Matrix (Inzidenzmatrix von  $K_3$ ):

$$\left(\begin{array}{ccc}
1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1
\end{array}\right)$$

- Die Determinante dieser Matrix ist 2.
- Der zugehörige Graph K<sub>3</sub> hat nur ein Matching der Größe 1.
- Das relaxierte Matching hat aber einen Wert von 3/2.
- Dazu wird jede Kante zur Hälfte gematcht.

00000000 Walter Unger 22.11.2018 13:52 SS2015 RWIH

Ganzzahligkeit

### Literatur

Induktionsannahme: jede  $(k-1) \times (k-1)$  Teilmatrix sei unimodular.

• B. Korte, J. Vygen. Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms, 2nd Edition, Springer, 2002.

Dualität 0000000 Ganzzahligkeit 00000000 SS2015 RWTH

Walter Unger 22.11.2018 13:52

#### Literatur

Induktionsannahme: jede  $(k-\mathbf{1}) \times (k-\mathbf{1})$  Teilmatrix sei unimodular.

- B. Korte, J. Vygen. Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms, 2nd Edition, Springer, 2002.
- E. Lawler. Combinatorial Optimization: Networks and Matroids. Dover Publications, 1976.

Dualität 0000000 Walter Unger 22.11.201813:52

Ganzzahligkeit 00000000 SS2015 RWTH

Literatur

- B. Korte, J. Vygen. Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms, 2nd Edition, Springer, 2002.
- E. Lawler. Combinatorial Optimization: Networks and Matroids. Dover Publications, 1976.
- C. Papadimitriou und K. Steiglitz. Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity. Prentice Hall, 1982.

Dualität Walter Unger 22.11.2018 13:52

Ganzzahligkeit SS2015 RWTH

Literatur

- B. Korte, J. Vygen. Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms, 2nd Edition, Springer, 2002.
- E. Lawler. Combinatorial Optimization: Networks and Matroids. Dover Publications, 1976.
- C. Papadimitriou und K. Steiglitz. Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity. Prentice Hall, 1982.
- A. Schrijver. Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency. Springer, 2003.

# Fragen

• Wie arbeitet der Algorithmus von Seidel?

# Fragen

- Wie arbeitet der Algorithmus von Seidel?
- Wie ist die Laufzeit für den Algorithmus von Seidel?