Aufgabe: Zeigen Sie wenn möglich die Unentscheidbarkeit folgender Sprachen mit dem Satz von Rice. Wenn der Satz von Rice nicht anwendbar ist, geben Sie eine Begründung, warum.
$L_1 = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \emptyset\}$
$L_2 = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \Sigma^*\}$
$L_3 = \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ endlich}\}$
$L_4 = \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ unendlich}\}$
$L_5 = \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ enthält nur Wörter mit } |w|_1 \leq 5\}$
$L_6 = \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ enthält nur Wörter mit } |w|_1 \leq |\langle M \rangle|_1\}$

Lösung:

$\boldsymbol{L_1 = \{\langle M\rangle\,|L(M) = \emptyset\}}$

Wähle $\mathcal{S} = \{f_M|f_M(w) \neq 1\}$. Dann ist $\mathcal{S} \neq \emptyset$, da $f_0 \in \mathcal{S}$ mit $f_0(w) = 0$ für alle w und $\mathcal{S} \neq \mathcal{R}$, da $f_1 \notin \mathcal{S}$ mit $f_1(w) = 1$ für alle w. Dann ist

$$\begin{aligned} L(\mathcal{S}) &= \{\langle M\rangle\,|M \text{ berechnet eine Funktion aus } \mathcal{S}\} \\ &= \{\langle M\rangle\,|L(M) = \emptyset\} = L_1 \end{aligned}$$

Nach Satz von Rice folgt, dass $L(\mathcal{S}) = L_1$ unentscheidbar ist.

$\boldsymbol{L_2 = \{\langle M\rangle\,|L(M) = \Sigma^*\}}$

Wähle $\mathcal{S} = \{f_M|f_M(w) = 1\}$. Dann ist $\mathcal{S} \neq \emptyset$, da $f_1 \in \mathcal{S}$ mit $f_1(w) = 1$ für alle w und $\mathcal{S} \neq \mathcal{R}$, da $f_0 \notin \mathcal{S}$ mit $f_0(w) = 0$ für alle w. Dann ist

$$\begin{aligned} L(\mathcal{S}) &= \{\langle M\rangle\,|M \text{ berechnet eine Funktion aus } \mathcal{S}\} \\ &= \{\langle M\rangle\,|L(M) = \Sigma^*\} = L_2 \end{aligned}$$

Nach Satz von Rice folgt, dass $L(\mathcal{S}) = L_2$ unentscheidbar ist.

$\boldsymbol{L_3 = \{\langle M\rangle\,|L(M)}$ **endlich**$\boldsymbol{\}}$

Wähle $\mathcal{S} = \{f_M|\ |f_M(w) = 1| \text{ endlich}\}$. Dann ist $\mathcal{S} \neq \emptyset$, da $f_0 \in \mathcal{S}$ mit $f_0(w) = 0$ für alle w und $\mathcal{S} \neq \mathcal{R}$, da $f_1 \notin \mathcal{S}$ mit $f_1(w) = 1$ für alle w. Dann ist

$$\begin{aligned} L(\mathcal{S}) &= \{\langle M\rangle\,|M \text{ berechnet eine Funktion aus } \mathcal{S}\} \\ &= \{\langle M\rangle\,|L(M)\text{endlich}\} = L_3 \end{aligned}$$

Nach Satz von Rice folgt, dass $L(\mathcal{S}) = L_3$ unentscheidbar ist.

$\boldsymbol{L_4 = \{\langle M\rangle\,|L(M)}$ **unendlich**$\boldsymbol{\}}$

Wähle $\mathcal{S} = \{f_M|\ |f_M(w) = 1| \text{ unendlich}\}$. Dann ist $\mathcal{S} \neq \emptyset$, da $f_1 \in \mathcal{S}$ mit $f_1(w) = 1$ für alle w und $\mathcal{S} \neq \mathcal{R}$, da $f_0 \notin \mathcal{S}$ mit $f_0(w) = 0$ für alle w. Dann ist

$$\begin{aligned} L(\mathcal{S}) &= \{\langle M\rangle\,|M \text{ berechnet eine Funktion aus } \mathcal{S}\} \\ &= \{\langle M\rangle\,|L(M) \text{ unendlich}\} = L_4 \end{aligned}$$

Nach Satz von Rice folgt, dass $L(\mathcal{S}) = L_4$ unentscheidbar ist.

$\boldsymbol{L_5 = \{\langle M\rangle\,|L(M)}$ **enthält nur Wörter mit** $\boldsymbol{|w|_1 \leq 5\}}$

Wähle $\mathcal{S} = \{f_M|f_M(w) \neq 1 \text{ für alle w mit } |w|_1 > 5\}$. Dann ist $\mathcal{S} \neq \emptyset$, da $f_0 \in \mathcal{S}$ mit $f_0(w) = 0$ für alle w und $\mathcal{S} \neq \mathcal{R}$, da $f_1 \notin \mathcal{S}$ mit $f_1(w) = 1$ für alle w. Dann ist

$$\begin{aligned} L(\mathcal{S}) &= \{\langle M\rangle\,|M \text{ berechnet eine Funktion aus } \mathcal{S}\} \\ &= \{\langle M\rangle\,|L(M) \text{ enthält nur Wörter mit } |w|_1 \leq 5\} = L_5 \end{aligned}$$

Nach Satz von Rice folgt, dass $L(\mathcal{S}) = L_5$ unentscheidbar ist.

$L_6 = \{\langle M\rangle \,|L(M)$ enthält nur Wörter mit $|w|_1 \leq |\langle M\rangle|_1\}$
Der Satz von Rice ist mit einer ähnlichen Begründung zu Hausaufgabe 5.1 nicht anwendbar: Jede TM N, die die gleiche Funktion wie M berechnet, muss auch in L_6 enthalten sein, damit der Satz von Rice anwendbar ist. Dies ist hier jedoch nicht der Fall: Sei M eine TM, die so konstruiert wurde, dass ihre Gödelnummer möglichst viele 1en enthält, beispielsweise $|\langle M\rangle|_1 = 100$ und die Funktion die sie berechnet sei $f_M(w) = 1$ falls $|w|_1 \leq 100$ und $f_M(w) = 0$ sonst. Sei nun N eine TM, die die gleiche Funktion berechnet, aber $|\langle N\rangle|_1 = 80$.
Dann ist $f_M = f_N$, aber $\langle M\rangle \in L_6$ und $\langle N\rangle \notin L_6$.