Injektive, surjektive und bijektive Abbildungen (Forts.)

Satz

Es sei $f\colon M \to N$ Abbildung.

- Äquivalent sind:
  - f injektiv.
  - Jede Faser von f besitzt höchstens ein Element.
- Äquivalent sind:
  - f surjektiv.
  - Jede Faser von f besitzt mindestens ein Element.
- Äquivalent:
  - f bijektiv.
  - Jede Faser von f besitzt genau ein Element.

Einschränkung von Abbildungen

Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung.

Definition
Ist $M' \subseteq M$, dann heißt

$$f|_{M'} : M' \to N, \quad x \mapsto f(x)$$

die *Einschränkung* von f auf M'.

Bemerkung
Es existiert $M' \subseteq M$ so, dass $f|_{M'}$ injektiv ist.

Beispiel
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.

- $f|_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ injektiv.
- $f|_{\mathbb{R}_{\leq 0}}$ injektiv.

Einschränkung von Abbildungen (Forts.)

Definition

M Menge, $N \subseteq M$

Inklusion von N in M:

$$\iota = \iota^N := (\mathrm{id}_M)|_N \colon N \to M$$

Beispiel

$\iota \colon \{2, 5, 7\} \to \{2, 3, 5, 7, 11\}$, $2 \mapsto \quad$, $5 \mapsto \quad$, $7 \mapsto$

Komposition von Abbildungen

Definition

$f\colon M \to N$, $g\colon N \to L$ Abbildungen

Komposition von f und g:

$$g \circ f\colon M \to L,\ x \mapsto g(f(x))$$

Beispiel

$$\begin{aligned} f\colon &\quad \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto x+1 \\ g\colon &\quad \mathbb{Z} \to \mathbb{Q},\ y \mapsto 2y^2 \\ g \circ f\colon &\quad \ \ \to \ \ ,\ x \mapsto 2(x+1)^2 \end{aligned}$$

Komposition von Abbildungen (Forts.)

Bemerkungen

- $f\colon M \to N$, $g\colon N \to L$, $h\colon L \to K$ Abbildungen

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

- $f\colon M \to N$ Abbildung

$$f \circ \mathrm{id}_M = f = \mathrm{id}_N \circ f$$

Umkehrabbildungen

Definition
Es seien $f : M \to N$ und $g : N \to M$ Abbildungen.

- g ist *linksseitige Umkehrabbildung von* f, falls gilt:

$$g \circ f = \mathrm{id}_M.$$

- g ist *rechtsseitige Umkehrabbildung von* f, falls gilt:

$$f \circ g = \mathrm{id}_N.$$

- g ist *Umkehrabbildung von* f, falls gilt:

$$g \circ f = \mathrm{id}_M \text{ und } f \circ g = \mathrm{id}_N.$$

  In diesem Fall sagt man auch: g ist zu f *invers*.

Umkehrabbildungen (Forts.)

Beispiele

$\mathbb{Q}_{>0} := \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$, $\mathbb{Q}_{<0} := \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$

- $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{Q}_{<0}$, $x \mapsto -2x$
  $g\colon \mathbb{Q}_{<0} \to \mathbb{Q}_{>0}$, $y \mapsto -\frac{1}{2}y$

  g ist invers zu f

- $h\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{Q}_{<0}$, $x \mapsto -x$,
  $k\colon \mathbb{Q}_{<0} \to \mathbb{Q}_{>0}$, $y \mapsto -y$

  k ist invers zu h

- $l : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, x \mapsto -x$

  l ist zu sich selbst invers

Umkehrabbildungen (Forts.)

Bemerkung

Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung.

- f besitzt linksseitige Umkehrabbildung $\Leftrightarrow$ f ist injektiv.
- f besitzt rechtsseitige Umkehrabbildung $\Leftrightarrow$ f ist surjektiv.
- f besitzt Umkehrabbildung $\Leftrightarrow$ f ist bijektiv.

Umkehrabbildungen (Forts.)

Bemerkung

Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung.

Ist f bijektiv, dann ist die Umkehrabbildung von f eindeutig bestimmt.

Schreibweise und Notation

Es sei $f : M \to N$ eine bijektive Abbildung.

- Die Umkehrabbildung von f wird mit f^{-1} bezeichnet.
- Es gilt also:

  $f^{-1} : N \to M$ und $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M$, $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_N$.
- f heißt auch *invertierbar* und f^{-1} die *Inverse* von f.

Umkehrabbildungen (Forts.)

Bemerkung

Es seien $f : M \to N$ und $g : N \to L$ bijektive Abbildungen.

- $g \circ f$ bijektiv und es gilt:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

- f^{-1} ist bijektiv und es gilt $(f^{-1})^{-1} = f$.
- id_M ist bijektiv und $\mathrm{id}_M^{-1} = \mathrm{id}_M$.

Abbildungen einer Menge in sich

Es sei M eine Menge, $f, g : M \to M$ Abbildungen.
Dann sind $f \circ g$ und $g \circ f$ definiert.

Definition
Es sei $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen:

$$f^n := \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n\text{-mal}}, \quad f^0 := \mathrm{id}_M.$$

Falls f bijektiv ist, so definieren wir auch $f^{-n} := (f^{-1})^n$.

Bemerkung

- Es gilt $f^n(x) = f(f(\cdots f(x)))$ für alle $x \in M$.
- Ist f bijektiv, dann gelten die Potenzrechenregeln:

$$f^{a+b} = f^a \circ f^b \quad \text{und} \quad f^{ab} = (f^a)^b \qquad \text{für alle } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Die Mächtigkeit von Mengen

Definition
M und N heißen *gleichmächtig*, wenn eine bijektive Abbildung $M \to N$ existiert.

Beispiele

- $\{1, 2, 3\}$ ist gleichmächtig zu $\{4, 5, 6\}$.
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind gleichmächtig.

Die Mächtigkeit von Mengen

Satz (Cantor)

Für jede Menge M sind M und $\mathrm{Pot}(M)$ nicht gleichmächtig.

Die Mächtigkeit von Mengen (Forts.)

Definition

M Menge

- M *endlich*: es ex. $n \in \mathbb{N}_0$ mit M gleichmächtig zu $\underline{n}$
- M *unendlich*: M nicht endlich
- M endlich
  Abzählung von M: Bijektion von $\underline{n}$ nach M

Beispiele

- $\{1, 3, 17\}$
- $\mathbb{N}$ und $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ gerade}\}$
- $\emptyset$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 + 2x = 3x^2\}$

Die Mächtigkeit von Mengen (Forts.)

Definition

M endliche Menge, $n \in \mathbb{N}_0$ mit M gleichmächtig zu $\underline{n}$

Mächtigkeit von M:

$$|M| := n$$

Beispiele

- $|\{1, 3, 17\}| =$
- $|\{1, 1, 1\}| =$
- $|\{\{1\}\}| =$
- $|\{1, \{1\}\}| =$

Die Mächtigkeit von Mengen (Forts.)

Bemerkung

Es seien M, N endliche Mengen und $f : M \to N$ eine Abbildung.

- $|f(M)| \leq |M|$.
- $|f(M)| \leq |N|$.

Die Mächtigkeit von Mengen (Forts.)

Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung und M, N endlich.

Bemerkungen

- f injektiv $\Leftrightarrow |f(M)| = |M|$.
- f surjektiv $\Leftrightarrow |f(M)| = |N|$.
- Ist $|M| = |N|$, dann sind äquivalent:
  - f injektiv
  - f surjektiv
  - f bijektiv

Dedekind'sches Schubfachprinzip

Werden m Objekte auf n Schubfächer verteilt, und ist $m > n$, dann gibt es ein Schubfach, welches mindestens zwei Objekte enthält.

- Ist $|M| > |N|$, dann ist f nicht injektiv.