LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. S. Walcher
Markus Hirshman, Dipl.-Gyml.
Niclas Kruff, M. Sc.

Aachen, den 16. November 2018

Übung 6 zur Vorlesung Analysis für Informatiker, WS 2018/2019

Abgabe bis Mittwoch, 21.11.2018, 12 Uhr

Präsenzaufgaben

Die folgenden Aufgaben werden in der Globalübung am 15.11.2018 bearbeitet und besprochen.

Präsenzaufgabe 4

Wir definieren die Abbildung

$$g : [0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1], \ \sum_{k \in \mathbb{N}} d_k \cdot 2^{-k} \mapsto \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} d_{2k} \cdot 2^{-k}, \sum_{k \in \mathbb{N}} d_{2k-1} \cdot 2^{-k} \right)$$

wobei in der Darstellung $\sum_{k \in \mathbb{N}} d_k \cdot 2^{-k}$ kein Index N existieren darf, sodass $d_k = 0$ ist für alle $k \geqslant N$. Damit ist die Abbildung wohldefiniert. Zeigen Sie, dass die Abbildung g surjektiv ist.

Lösung

Jede Zahl im Intervall $a \in [0,1]$ lässt sich in der 2-adischen Darstellung repräsentieren als:

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(a) \cdot 2^{-k},$$

wobei $d_k(a) \neq 0$ für unendlich viele Indizes gilt. Sei nun $(a,b) \in [0,1] \times [0,1]$. Dann definiren wir $c \in [0,1]$:

$$c = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(c) \cdot 2^{-k}$$

mit $d_{2k}(c) = d_k(a)$ und $d_{2k-1}(c) = d_k(b)$. Damit gilt nach Konstruktion:

$$g(c) = \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} d_{2k} \cdot 2^{-k}, \sum_{k \in \mathbb{N}} d_{2k-1} \cdot 2^{-k} \right) = \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \cdot 2^{-k}, \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k \cdot 2^{-k} \right) = (a,b)$$

und folglich ist g surjektiv.