LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. S. Walcher
Markus Hirshman, Dipl.-Gyml.
Niclas Kruff, Dr.

Aachen, den 25. Januar 2019

Übung 12 zur Vorlesung Analysis für Informatiker, WS 2018/2019

Abgabe bis Mittwoch, 16.01.2018, 12 Uhr

Hausaufgabe 1

(a) Gegeben seien die beiden Differentialgleichungen

$$y' = \sin(y) \tag{1}$$

$$y' = x \cdot \sin(y) \tag{2}$$

- Welche konstanten Lösungen erhält man für die Anfangswertprobleme $x_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in \mathbb{Z}\pi$ mit zugehörigen Differentialgleichungen (1) und (2)?
- Nun betrachten wir die beiden Anfangswertprobleme für den Fall $x_0 = 0$ und $y_0 \in (0, \pi)$.

  (i) Zeigen Sie
  $$\int \frac{1}{\sin(x)} \mathrm{d}x = \ln|\tan(x/2)|\,.$$

  (ii) Zeigen Sie, dass es für beide Anfangswertprobleme genau eine Lösung gibt, und bestimmen Sie diese explizit. Wie lautet die Lösung im Spezialfall $y_0 = \pi/2$?

  (iii) Es sei φ die Lösung zu dem Anfangswertproblem (1). Untersuchen Sie, ob $\lim_{x\to\pm\infty} \varphi(x)$ existiert und bestimmen Sie diesen gegebenenfalls.

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = e^{-x} - \frac{y}{x} \quad , \quad y(1) = 2\,. \tag{3}$$

(((1+3+14+6)+6) Punkte)

Lösung

(a) (i) Die konstante Lösung $\varphi(x) = y_0$ die einzige Lösung beider Anfangswertprobleme, denn $y \mapsto \sin(y)$ ist differenzierbar in 0 (**1 Punkt**).

(ii) (a) Wir zeigen, dass die Funktion, die durch den Funktionsterm auf der rechten Seite der Gleichung steht, eine Stammfunktion von $\frac{1}{\sin(x)}$ ist. Dazu unterscheiden wir zwei Fälle. Ist $\tan(x/2) \geqslant 0$ (**1 Punkt**), so gilt mit der Kettenregel und den Additionstheoremen für den Sinus

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln|\tan(x/2)| &= (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln)(\tan(x/2)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan(x/2) \\ &= \frac{1}{2\tan(x/2)\cos^2(x/2)} = \frac{1}{2\sin(x/2)\cos(x/2)} = \frac{1}{\sin(x)}\,.\end{aligned}$$

(**3 Punkte**) Der andere Fall geht völlig analog. Alternativ kann man dies auch zeigen, indem man das Integral mit Hilfe der Substitutionsregel auswertet. Dazu substituiere man $t = \tan(x/2)$.

(b) Nun wollen wir die beiden Anfangswertprobleme lösen.

Anfangswertproblem (1) Es ist $y_0 \in (0, \pi)$ und $x_0 = 0$. Wir definieren

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad &, \quad f(x) = 1 \\ g : (0,\pi) \to \mathbb{R} \quad &, \quad g(y) = \sin(y)\,. \end{aligned}$$

(**1 Punkt**). Dann gilt $g(y_0) \neq 0$ und die Funktionen f, g sind stetig (**1 Punkt**). Damit gibt es Teilintervalle $I' \subset \mathbb{R}$ und $J' \subset (0,\pi)$, für die $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J'$ gilt, so dass eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems $\varphi : I' \to \mathbb{R}$ existiert mit

$$H(\varphi(x)) = F(x)\,.$$

(**1 Punkt**). In diesem Fall ist gemäß Aufgabenteil (a)

$$\begin{aligned} H : J' \to \mathbb{R}\,,\, H(y) &= \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}\mathrm{d}t = \ln|\tan(y/2)| - \ln|\tan(y_0/2)| \\ F : I' \to \mathbb{R}\,,\, F(x) &= \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t = x - 0 = x\,. \end{aligned}$$

(**2 Punkte**). Folglich ist H invertierbar, so dass für alle $x \in I'$ gilt

$$\varphi(x) = H^{-1}(F(x)) = H^{-1}(x) = 2\arctan(\tan(y_0/2)\exp(x))\,.$$

(**1 Punkt**). Ist speziell $y_0 = \pi/2$, so gilt

$$\varphi(x) = 2\arctan(\exp(x))\,.$$

(**1 Punkt**). Wir können also $J' = (0,\pi)$ und $I' = \mathbb{R}$ wählen.

Anfangswertproblem (2) Gleiche Punkteverteilung wie beim ertsen AWP.
Nun ändern wir f:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = x\,.$$

Nun gibt es wieder Teilintervalle $I' \subset \mathbb{R}$ und $J' \subset (0,\pi)$, für die $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J'$ gilt, so dass eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems $\varphi : I' \to \mathbb{R}$ existiert mit

$$H(\varphi(x)) = F(x)\,.$$

In diesem Fall ist gemäß Aufgabenteil (a) und der letzten Teilaufgabe

$$H : J' \to \mathbb{R}\,,\ H(y) = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}\mathrm{d}t = \ln|\tan(y/2)| - \ln|\tan(y_0/2)|$$

$$F : I' \to \mathbb{R}\,,\ F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}\,.$$

Dann ist wieder H invertierbar, so dass für alle $x \in I'$ gilt

$$\varphi(x) = H^{-1}(F(x)) = H^{-1}(x^2/2) = 2\arctan(\tan(y_0/2)\exp(x^2/2))\,.$$

Ist speziell $y_0 = \pi/2$, so gilt

$$\varphi(x) = 2\arctan(\exp(x^2/2))\,.$$

Wir können also wieder $J' = (0, \pi)$ und $I' = \mathbb{R}$ wählen.

(c) Gemäß Vorlesung gilt $\lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \pi/2$ und $\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\pi/2$ (**1 Punkt**), sowie $\arctan(0) = 0$ (**1 Punkt**). Die Funktion arctan ist stetig differenzierbar (**1 Punkt**). Weiter hat man $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$ und damit $\lim_{x\to\infty} \varphi_1(x) = \pi$ (**1 Punkt**). Wegen $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ erhält man aus der Stetigkeit von arctan die Existenz des Grenzwerts

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi_1(x) = 0\,.$$

(**1 Punkt**). Für die Lösung des zweiten Anfangswertproblems beachte man

$$\lim_{x\to\pm\infty} \exp(x^2/2) = \infty.$$

(**1 Punkt**). Daraus erhalten wir die Existenz beider Limiten mit $\lim_{x\to\pm\infty} \varphi_2(x) = \pi$ (**1 Punkt**).

(b) Wir lösen (3). Dies ist eine inhomogene linerae Differentialgleichung erster Ordnung. Die Funktionen

$$a : (0,\infty) \to \mathbb{R}\,,\ a(x) = \frac{-1}{x}$$
$$b : (0,\infty) \to \mathbb{R}\,,\ b(x) = e^{-x}$$

sind beide stetig differenzierbar (**2 Punkte**). Damit erhalten wir als Lösung

$$\psi(x) = v(x) \cdot u(x)$$

mit

$$v(x) = \exp\left(\int\limits_1^x a(t)\mathrm{d}t\right) = \exp(-\ln(x)) = 1/x$$

(**1 Punkt**) und

$$u(x) = 2 + \int\limits_1^x \frac{b(t)}{v(t)}\mathrm{d}t = 2 + \int\limits_1^x te^{-t}\mathrm{d}t = 2 - xe^{-x} - e^{-x} + 2e^{-1}$$

(**2 Punkte**) wie man mit Hilfe partieller Integration berechnet. Also ist

$$\psi : (0,\infty) \to \mathbb{R} \quad , \quad \psi(x) = \frac{1}{x}(2 - xe^{-x} - e^{-x} + 2e^{-1})$$

die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (**1 Punkt**).