Lehrstuhl für Informatik 1
Prof. Dr. Gerhard Woeginger
Jan Böker, Tim Hartmann

WS 2018/19
30.11.2018

Übung zur Vorlesung
Berechenbarkeit und Komplexität
Blatt 7

Tutoriumsaufgabe 7.1

Für eine gegebene CFG $G = (N, \Sigma, P, S)$ soll entschieden werden, ob $L(G)$ ein Palindrom enthält. Zeigen Sie, dass dieses Problem unentscheidbar ist.

Tutoriumsaufgabe 7.2

Zeigen Sie, dass folgende arithmetische Befehle durch ein LOOP-Programm simuliert werden können:

(a) $x_i \coloneqq x_j \dot{-} 1$ (modifizierte Vorgängerfunktion mit Ergebnis 0 falls $x_j = 0$)

(b) $x_i \coloneqq x_j \dot{-} x_k$ (modifizierte Subtraktion mit Ergebnis 0 falls $x_j < x_k$)

(c) $x_i \coloneqq \min\{x_j, x_k\}$

Tutoriumsaufgabe 7.3

Ein LOOP-Z-Programm ist ein LOOP-Programm, das das LOOP-Konstrukt nicht verwendet. Es lässt sich zeigen, dass für jedes LOOP-Z-Programm P mit Variablen $x_1, \ldots, x_n$ natürliche Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ und b existieren, sodass $f_P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b$ gilt. Zeigen Sie: Es gibt kein LOOP-Z-Programm P, das die Funktion $x_1 x_2$ berechnet.

Tutoriumsaufgabe 7.4

Beweisen Sie, dass die Wachstumsfunktion $F_P : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ des folgenden LOOP-Programms P die Beziehung $F_P(n) \in \Theta(n^3)$ erfüllt:

LOOP x_1 DO
  LOOP x_2 DO
    LOOP x_3 DO $x_4 \coloneqq x_4 + 1$ ENDLOOP
  ENDLOOP
ENDLOOP

Bestimmen Sie weiterhin eine natürliche Zahl m_P, sodass $F_P(n) < A(m_P, n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

— BITTE WENDEN —

Hausaufgabe 7.1 **(2 + 2 Punkte)**

Welche der folgenden Fragen über multivariate Polynome $p : \mathbb{Z}^k \to \mathbb{Z}$ (mit ganzzahligen Koeffizienten) sind entscheidbar? Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Antworten.

(a) Besitzt p eine Nullstelle, in der alle Variablen natürliche Werte annehmen?

(b) Besitzt p eine ganzzahlige Nullstelle, in der alle Variablenwerte zwischen -10^6 und 10^6 liegen?

Hausaufgabe 7.2 **(2 + 2 Punkte)**

Zeigen Sie, dass folgende arithmetische Befehle durch ein LOOP-Programm simuliert werden können:

(a) $x_i \coloneqq x_j$ DIV x_k (Division ohne Rest, gegeben $x_k > 0$)

(b) $x_i \coloneqq x_j$ MOD x_k (Modulo, gegeben $x_k > 0$)

Hausaufgabe 7.3 **(2 Punkte)**

Die Programmiersprache LOOP-WHILE ist eine Kombination der beiden Programmiersprachen LOOP und WHILE. Die syntaktischen Komponenten von LOOP-WHILE sind genau die Komponenten von LOOP zusammen mit den Komponenten von WHILE: LOOP-WHILE Programme sind Zuweisungen, die Hintereinanderausführung von zwei LOOP-WHILE-Programmen, das LOOP-Konstrukt um ein LOOP-WHILE-Programm oder das WHILE-Konstrukt um ein LOOP-WHILE-Programm. In einem LOOP-WHILE-Programm darf allerdings das WHILE-Konstrukt nur **höchstens einmal** benutzt werden.

Beweisen oder widerlegen Sie: Die Programmiersprache LOOP-WHILE ist Turing-mächtig.

Hausaufgabe 7.4 **(3 + 3 Punkte)**

Bestimmen Sie die Wachstumsfunktionen $F_P : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ für die folgenden LOOP-Programme. Bestimmen Sie für jedes dieser LOOP-Programme P eine natürliche Zahl m_P, sodass $F_P(n) < A(m_P, n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Beachten Sie, dass die folgenden LOOP-Programme Kurzschreibweisen verwenden, z. B. ist $x_2 \coloneqq x_3 + 2$ Kurzschreibweise für $x_2 \coloneqq x_3 + 1; x_2 \coloneqq x_2 + 1$.

(a) $x_3 \coloneqq x_2 + 3;$
$x_1 \coloneqq x_2 + 1;$
$x_2 \coloneqq x_3 + 2$

(b) $x_3 \coloneqq x_2;$
LOOP x_1 DO
  LOOP x_3 DO $x_2 \coloneqq x_2 + 1$ ENDLOOP
ENDLOOP

Abgabe bis Mittwoch, den 12.12.2018 um 12:15 Uhr
im Sammelkasten am Lehrstuhl i1, in Ihrem Tutorium oder am Anfang der Globalübung.