Wiederholung

- Binomischer Lehrsatz: R kommutativer Ring, $n \in \mathbb{N}$
  - $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \qquad \forall\, a,b \in R$$
  - $$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$
  - $\boxed{\text{Falls } p \in \mathbb{P} \text{ mit } p \cdot a = 0 \ \forall\, a \in R}$ dann:

    $$(a+b)^p = a^p + b^p \qquad \forall\, a,b \in R.$$

- Summenregel: $A_1, \dots, A_r$ paarw. disj. endl. Mengen:

$$\left| \bigcup_{i=1}^{r} A_i \right| = \sum_{i=1}^{r} |A_i| .$$

Differenzregel: M endl. Menge, $A \subseteq M$:

$$|M \setminus A| = |M| - |A| .$$

Produktregel: $A_1, \dots, A_r$ endl. Mengen

$$\left| \bigtimes_{i=1}^{r} A_i \right| = \prod_{i=1}^{r} |A_i| .$$

Inklusions-Exklusionsprinzip: $A_1, \ldots, A_r$ endl. Mengen

$$\left|\bigcup_{i=1}^{r} A_i\right| = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subseteq \underline{r} \\ |I| = k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

$\underline{r=2}$: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

$\underline{r=3}$: $$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - \big(|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|\big) + |A \cap B \cap C|.$$

- $n, k \in \mathbb{N}_0$

$S_{n,k} :=$ Anzahl der k-Partitionen ~~einer~~ von $\underline{n}$

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k\, S_{n-1,k} \qquad n,k \in \mathbb{N}$$

Stirling-Zahlen 2. Art

$s_{n,k} =$ Anzahl der Permutationen von $\underline{n}$ mit genau k Zykeln

$$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1)\, s_{n-1,k} \qquad n,k \in \mathbb{N}$$

Stirling-Zahlen 1. Art.

15. Januar 2019

Graphen

Graphen

Definition

Ein *(ungerichteteter, schlichter) Graph* ist ein Paar $G = (V, \overset{E}{\cancel{W}})$ mit

- V eine endliche Menge;
- E Menge von zweielementigen Teilmengen von V.

Sprechweisen

Ist $G = (V, E)$ eine Graph, dann heißen

- die Elemente von V *Knoten* von G (English: *vertex*),
- die Elemente von E *Kanten* von G (English: *edge*),
- $n_G := |V|$ die *Knotenzahl* von G,
- $m_G := |E|$ die *Kantenzahl* von G.

Für $\{u, v\} \in E$ schreiben wir auch uv oder vu. $uv = \{u, v\}, \ u \neq v$

Graphen (Forts.)

Bemerkungen

- Mathematisches Modell für Kante zwischen $u, v \in V$:
  *zwei*elementige Teilmenge $\{u, v\} = \{v, u\} \subseteq V$.
- Andere verbreitete Definitionen von Graphen erlauben
  - gerichtete Kanten,
  - Schlingen,
  - Mehrfachkanten,
  - gewichtete Kanten,
  - gefärbte Kanten,
  - unendlich viele Knoten oder Kanten.
  - usw.

  Mathematisches Modell für Kanten wird angepasst:
  Z.B.: gerichtete Kante vom Knoten u zum Knoten v
  modelliert durch $(u, v) \in V \times V$.

Graphen (Forts.)

Motivation

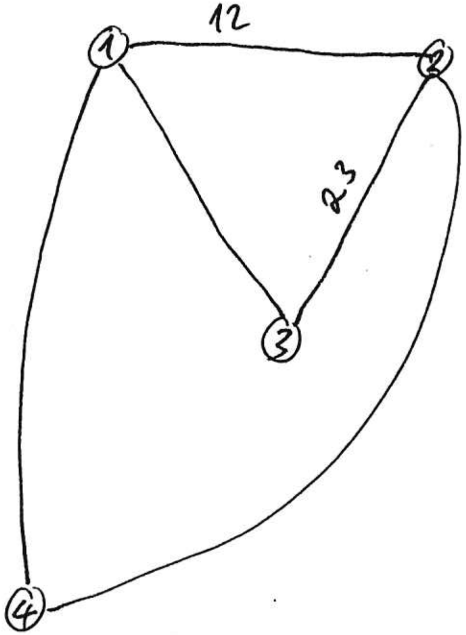
Graphen modellieren Netzwerke, z.B.

- Straßennetze
  - Knoten: Kreuzungen
  - Kanten: Straßen
- Stromnetze
  - Knoten: Umspannstationen
  - Kanten: Stromleitungen
- Computernetze
- Workflow-Diagramme

Graphen (Forts.)

Zeichnungen

Oft werden Graphen durch Bilder dargestellt. Beispiel:
$V = \{1, 2, 3, 4\}$,
$E = \{\{1, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 3\}\}$.



$\Gamma(3) = \{1, 2\}$

$\Gamma(1) = \{2, 3, 4\}$

3 inzident zu 23

23 inzident zu 12

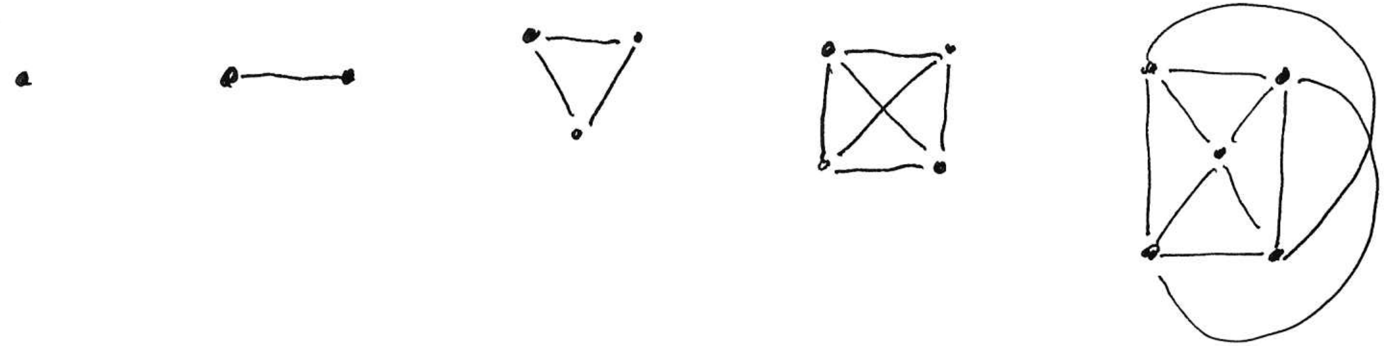
Graphen (Forts.)

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph.

Begriffe

- Es seien $u, v \in V$ mit $u \neq v$ und es sei $uv \in E$.
  - u und v heißen die *Endknoten* von uv.
  - u und v heißen *adjazent*. oder benachbart
  - u heißt *Nachbar* von v und umgekehrt.
- Für $v \in V$ ist $\Gamma(v) := \Gamma_G(v)$ die Menge der Nachbarn von v.
- $e \in E$ *inzident* zu $v \in V$, wenn v ein Endknoten von e ist.
- Zwei verschiedene Kanten heißen *inzident*, wenn sie einen gemeinsamen Endknoten haben.
- G heißt *vollständiger Graph*, falls je zwei verschiedene Knoten von G adjazent sind.

Beispiele für vollständige Graphen:



G vollständiger Graph

$$m_G = \binom{n_G}{2} = \frac{n_G\,(n_G - 1)}{2}.$$

Die Adjazenzmatrix

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $V = \{1, \ldots, n\}$.

Definition
Die *Adjazenzmatrix* von G ist die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \{0,1\}^{n\times n}$$

mit

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } ij \in E, \\ 0 & \text{falls } ij \notin E. \end{cases}$$

Die *Adjazenzliste* von G ist die Liste

$$\Gamma_G := \Gamma := (\Gamma(1), \Gamma(2), \ldots, \Gamma(n)).$$

Die Adjazenzmatrix (Forts.)

Beispiel

$V = \{1, 2, 3, 4\}$,
$E = \{\underbrace{\{1,4\}}_{e_1}, \underbrace{\{1,2\}}_{e_2}, \underbrace{\{1,3\}}_{e_3}, \underbrace{\{2,4\}}_{e_4}, \underbrace{\{2,3\}}_{e_5}\}$.

$$A = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \qquad \neq \qquad B = \begin{array}{c|ccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\Gamma = (\{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \{1,2\}, \{1,2\})$$

Die Inzidenzmatrix

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $V = \{1, \ldots, n\}$ und $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$.

Definition
Die *Inzidenzmatrix* von G ist die Matrix

$$B := \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} \in \{0,1\}^{n \times m}$$

mit

$$b_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i \in e_j, \\ 0 & \text{falls } i \notin e_j. \end{cases}$$

Die j-te Spalte der Inzidenzmatrix enthält genau zwei Einsen, nämlich zu den beiden Endknoten der Kante e_j.

Grad

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph.

Definition

- Für $v \in V$ heißt $\deg(v) := |\Gamma(v)|$ der *Grad von* v.
- Knoten vom Grad 0 heißen *isoliert*.

Bemerkung

Es gilt

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2m_G.$$

Folgerung Handschlagslemma

Die Anzahl der Knoten von G mit ungeradem Grad ist gerade.

Beweis der Bemerkung: B Inzidenzmatrix von G

Summe der Einträge von $B = 2 \cdot m_G$

Summe —— " ———— in Zeile zu Knoten v: $\deg(v)$

$\Rightarrow$ Summe der Einträge von $B = \sum_{v \in V} \deg(v)$.

Beweis der Folgerung: $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot m_G$

Rechne in $\mathbb{Z}_2 = \{0 + 2\mathbb{Z}, 1 + 2\mathbb{Z}\}$ $\quad \bar{\ } : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2, z \mapsto z + 2\mathbb{Z}$

$$0 = \overline{2 \cdot m_G} = \overline{\sum_{v \in V} \deg(v)} = \sum_{v \in V} \overline{\deg(v)} = \sum_{\substack{v \in V \\ \deg(v) \text{ ungerade}}} \bar{1} = \overline{|\{v \in V \mid \deg(v) \text{ unger.}\}|}$$

$\Rightarrow |\{v \in V \mid \deg(v) \text{ ungerade}\}|$ ist gerade. $\blacksquare$

Teilgraphen

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph.

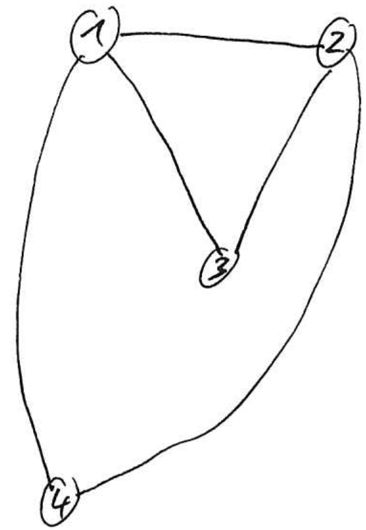
Definition
Ein Graph $G' = (V', E')$ heißt *Teilgraph* von G,
geschrieben $G' \leq G$,
wenn $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ ist.

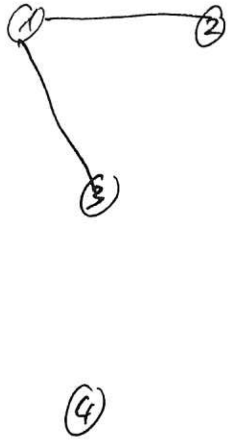
Beispiel
Ist $V' \subseteq V$, so wird durch

$$E' := \{uv \in E \mid u, v \in V'\}$$

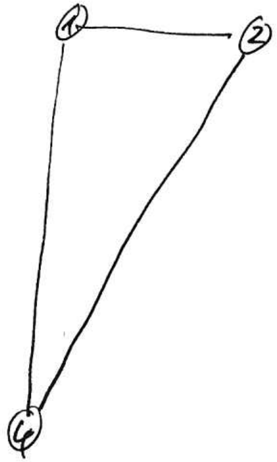
ein Teilgraph (V', E') von G definiert,
der *auf V' induzierte Teilgraph von G*,
geschrieben $G|_{V'}$.

Teilgraphen





Teilgraph



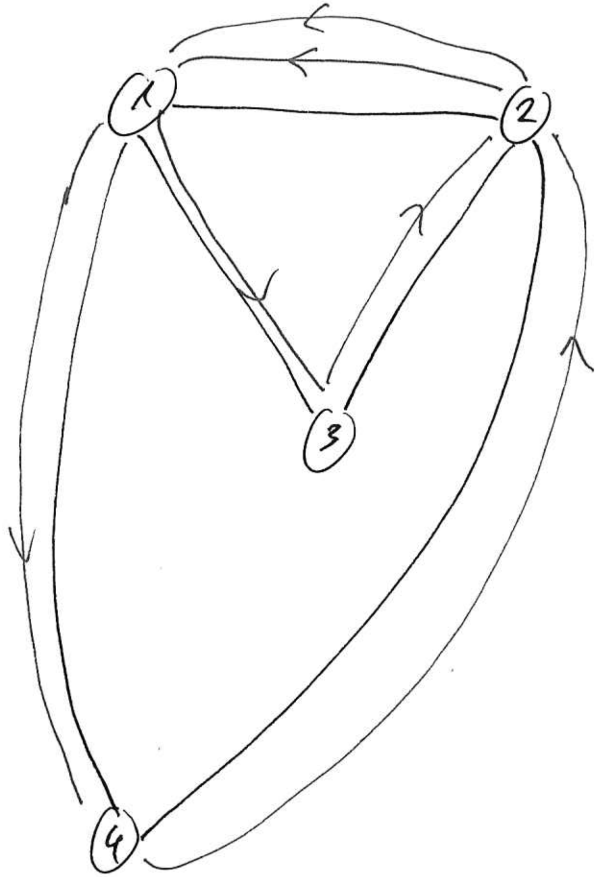
induzierter Teilgraph

Kantenzüge, Kreise und Pfade

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph und $l \in \mathbb{N}_0$.

Definition

- Ein *Kantenzug der Länge l in G* ist ein Tupel $(v_0, v_1, \ldots, v_l)$ von Knoten mit $v_i v_{i+1} \in E$ für alle $i = 0, \ldots, l-1$ (heißt auch v_0-v_l-Kantenzug). v_0-v_0-Kantenzug der Länge 0: (v_0)
- Der Kantenzug heißt *geschlossen* falls $v_0 = v_l$ ist.
- Ein Kantenzug $(v_0, \ldots, v_l)$ heißt *Pfad der Länge l in G*, falls die Knoten $v_0, \ldots, v_l$ paarweise verschieden sind. (heißt auch v_0-v_l-Pfad).
- Ein *Kreis der Länge l in G* ist ein geschlossener Kantenzug $(v_0, \ldots, v_l)$, für den $l \geq 3$ und $(v_0, \ldots, v_{l-1})$ ein Pfad ist.
- Eine *Tour der Länge l in G* ist ein geschlossener Kantenzug $(v_0, \ldots, v_l)$, für den die Kanten $v_0 v_1, v_1 v_2, \ldots, v_{l-1} v_l$ paarweise verschieden sind.



geschlossener

(2,1,3,2,1,4,2) Kantenzug der Länge 6

(2,1,4) Pfad der Länge 2

(1,3,2,1) Kreis der Länge 3

(2,1,4,2) Tour der Länge 3

Zusammenhang

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph.

Definition

- Die *Zusammenhangsrelation* $\sim$ auf V wird definiert durch

$$u \sim v :\Leftrightarrow \text{ es gibt einen } u\text{-}v\text{-Kantenzug in } G.$$

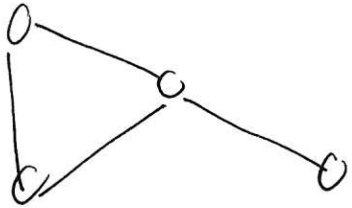
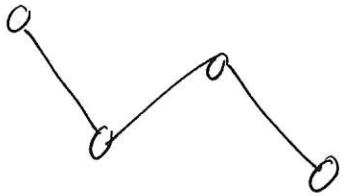
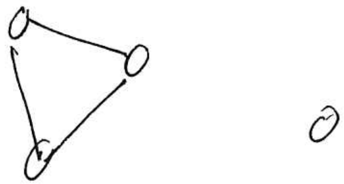
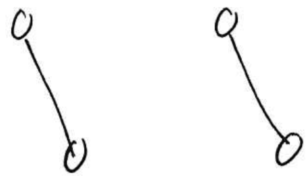
- G heißt *zusammenhängend*, falls $u \sim v$ für alle $u, v \in V$, anderenfalls *unzusammenhängend*.

  =: Z.K.

- *Zusammenhangskomponenten* von G: die induzierten Teilgraphen $G|_U$, wobei U die Äquivalenzklassen von V bzgl. $\sim$ durchläuft.

- r_G: Anzahl der Zusammenhangskomponenten von G

Beispiele

		$r_G = 1$
		$r_G = 2$

Zusammenhang (Forts.)

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph.

Lemma

Für alle $u \neq v \in V$ gilt:

- $r_G - 1 \leq r_{(V,E\cup\{uv\})} \leq r_G$.
- $r_{(V,E\setminus\{uv\})} - 1 \leq r_G \leq r_{(V,E\setminus\{uv\})}$.

Beweis:

1. Fall: u, v in verschiedenen Z.K. von G

$\Rightarrow r(V, E \cup \{uv\}) = r_G - 1$

2. Fall: u, v in gleichen ZK von G

$\Rightarrow r(V, E \cup \{uv\}) = r_G$.

Satz

(a) ▸ Untere Schranke für m_G: $m_G \geq n_G - r_G$.

(b) ▸ Obere Schranke für m_G: $m_G \leq \binom{n_G+1-r_G}{2}$.

Beweis des Satzes

(a) Induktion über m_G

<u>$m_G = 0$:</u> $\Rightarrow$ $r_G = n_G$ $\Rightarrow$ $m_G = 0 \leq 0 = n_G - r_G$

<u>$m_G > 0$:</u> Wähle $e \in G$, setze $G' := (V, E \setminus \{e\})$

$\overset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow}$ $r_{G'} - 1 \leq r_G$

$\Rightarrow n_G = n_{G'} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Induktions-} \\ \text{vorauss.}}}{\leq} m_{G'} + r_{G'} = m_G - 1 + r_{G'} \leq m_G + r_G$ ✓

(b) (1) $a,b \in \mathbb{N} \Rightarrow \binom{a}{2} + \binom{b}{2} \leq \binom{a+b-1}{2}$

Klar, falls $a = 1$ oder $b = 1$

$a,b \geq 2$: Zu zeigen: $a(a-1) + b(b-1) \leq (a+b-1)(a+b-2)$

direktes Nachrechnen.

(2) Induktion über r_G:

$\underline{r_G = 1}$: $\quad m_G \leq \binom{n_G}{2}$ ✓

$\underline{r_G > 1}$: $\quad G''$: eine Z.K. von G

G' : $(r-1)$ anderen Z.K. von G

$$m_G = m_{G'} + m_{G''} \overset{\text{I.V.}}{\leq} \binom{n_{G'} - (r_G - 1) + 1}{2} + \binom{n_{G''}}{2}$$

$$\overset{(a)}{\leq} \binom{n_{G'} - r_G + 2 + n_{G''} - 1}{2} = \binom{n_G - r_G + 1}{2}. \quad \blacksquare$$

Zusammenhang (Forts.)

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph.

Folgerung

- Ist G zusammenhängend, dann ist $m_G \geq n_G - 1$.
- Ist G unzusammenhängend, so gilt $m_G \leq \binom{n_G - 1}{2}$.

Brücken

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph, $u, v \in V$ mit $e = uv \in E$.

Bemerkung

Es sei $G' := (V, E \setminus \{e\})$. Dann sind äquivalent:

- $u \not\sim v$ in G'.
- $r_{G'} > r_G$.

Definition

e heißt *Brücke von G*, wenn eine der beiden Bedingungen aus der Bemerkung erfüllt ist.

Brücken (Forts.)

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph, $u, v \in V$ mit $e = uv \in E$.

Bemerkung

Es sei $G' := (V, E \setminus \{e\})$.
Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- (a) e ist keine Brücke von G.
- (b) $u \sim v$ in G'.
- (c) $r_{G'} = r_G$.
- (d) es gibt einen u-v-Kantenzug in G, der nicht über e führt.
- (e) es gibt einen u-v-Pfad in G, der nicht über e führt.
- (f) e ist Teil eines Kreises in G.

Beweis der Bem. (d) ⇒ (e):

Sei $(v_0, v_1, \dots, v_\ell)$ u-v-Kantenzug, der nicht über e führt, von kürzester Länge.

<u>Beh</u>: $(v_0, \dots, v_\ell)$ ist u-v-Pfad

<u>Bew</u>: Falls nicht, ex. i, j, $0 \leq i < j \leq \ell$ und $v_i = v_j$

$\Rightarrow$ $(v_0, \dots, v_i, v_{j+1}, \dots, v_\ell)$ ist Kantenzug von u nach v, der nicht über e führt, der Länge $\ell - (j-i) < \ell$ ↯.

∎