# Zykel (Forts.)

Die Zykelschreibweise lässt sich besonders leicht „potenzieren“.

**Beispiel**

$$
\begin{aligned}
\pi &= (10,11)(7,6,4)(8,2,5,1),\\
\pi^2 &= (1,2)(5,8)(4,6,7),\\
\pi^3 &= (1,5,2,8)(10,11),\\
\pi^4 &= (4,7,6)\\
&\vdots\\
\pi^{11} &= (1,5,2,8)(4,6,7)(10,11) = \pi^{-1}\\
\pi^{12} &= \mathrm{id}.
\end{aligned}
$$

# Zykel (Forts.)

## Erinnerung

Jeder Zykel ist Produkt von Transpositionen.

## Proposition

Jede Transposition in $S_n$ ist Produkt von Nachbartranspositionen.

## Beispiele

- $(1,4,7,3,5)(2,8,6,9) = (1,4)(4,7)(7,3)(3,5)(2,8)(8,6)(6,9)$
- $(1,4) = (4,3)(3,2)(1,2)(2,3)(3,4)$

# Signum

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $I_n := \{\{i,j\} \mid 1 \leq i,j \leq n, i \neq j\}$.

## Definition

Sei $\pi \in S_n$. Das *Signum* von $\pi$ ist definiert als

$$\operatorname{sgn} \pi := \prod_{\{i,j\} \in I_n} \frac{\pi(i) - \pi(j)}{i - j}.$$

## Bemerkung

- $\operatorname{sgn} \pi \in \{1, -1\}$ für alle $\pi \in S_n$.
- $\operatorname{sgn} \mathrm{id}_{\underline{n}} = 1$.

# Signum (Forts.)

## Produktsatz

Es seien $n \in \mathbb{N}$, $\pi, \sigma \in S_n$. Dann gilt:

$$\operatorname{sgn}(\pi\sigma) = (\operatorname{sgn}\pi)(\operatorname{sgn}\sigma)$$

# Signum (Forts.)

**Proposition**

Es sei $\tau = (a, b)$ eine Transposition in $S_n$.

Dann ist $\operatorname{sgn} \tau = -1$.

# Signum (Forts.)

**Korollar**

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

- $\operatorname{sgn} \pi^{-1} = \operatorname{sgn} \pi$ für alle $\pi \in S_n$.
- Ist $\pi = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_r$ mit Transpositionen $\tau_i \in S_n$, dann ist $\operatorname{sgn} \pi = (-1)^r$.
- Ist $\pi \in S_n$ ein $k$-Zykel, dann ist $\operatorname{sgn} \pi = (-1)^{k-1}$.

11. Dezember 2018

Matrixarithmetik

# Matrizen

## Setup

- $R$ kommutativer Ring mit $1 \neq 0$
- $m, n \in \mathbb{N}$

# Matrizen (Forts.)

**Definition**

Eine $(m \times n)$-*Matrix A über R* ist ein rechteckiges „Schema“ von $m \cdot n$ Elementen $a_{ij} \in R$ der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Alternative Schreibweise: $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m, \\ 1 \le j \le n}}$

Die $a_{ij}$ heißen die *Koeffizienten* oder *Einträge* von $A$.

$R^{m \times n}$: Menge der $(m \times n)$-Matrizen über $R$

# Matrizen (Forts.)

**Beispiele**

- $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 3}$
- $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{12}{5} & 3 & 8 \\ -7 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ -2 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 4}$
- $\begin{pmatrix} X^2 - 1 & X^3 + X + 1 & \frac{4}{5}X \\ \frac{16}{7}X^6 - 1 & 2X^2 + 2X + 3 & 0 \\ 3 & \frac{1}{9}X^5 + \frac{1}{3}X & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}[X]^{3\times 3}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{1\times 6}$
- $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{4\times 1}$

# Matrizen (Forts.)

## Definitionen

Es sei $A = (a_{ij}) \in R^{m \times n}$.

- Die $(1 \times n)$-Matrix $z_i := \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$ heißt $i$-te *Zeile* von $A$.
- Die $(m \times 1)$-Matrix $s_j := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ heißt $j$-te *Spalte* von $A$.
- Eine $(1 \times n)$-Matrix wird auch (Zeilen-)$n$-Tupel genannt.
- Eine $(m \times 1)$-Matrix wird (Spalten-)$n$-Tupel genannt.
- Wir setzen $R^n := R^{n \times 1}$.

# Matrizen (Forts.)

## Beispiele

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 3}$

  Zeilen von $A$:

  Spalten von $A$:

- $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

# Matrizen (Forts.)

**Bemerkung**

Eine $(m \times n)$-Matrix $A = (a_{ij})$ über $R$ kann als Abbildung

$$a : \underline{m} \times \underline{n} \to R, (i, j) \mapsto a(i, j) := a_{ij}$$

aufgefasst werden (vgl. Definition von Tupeln).

**Bemerkung**

Zwei Matrizen $A = (a_{ij}) \in R^{m \times n}$ und $A' = (a'_{ij}) \in R^{m' \times n'}$ sind genau dann gleich, geschrieben $A = A'$, wenn gilt:

- $m = m'$ und $n = n'$;
- $a_{ij} = a'_{ij}$ für alle $1 \leq i \leq m$ und alle $1 \leq j \leq n$.

# Matrixaddition

## Proposition

$R^{m \times n}$ wird abelsche Gruppe mit:

- Addition:
- Null:
- Negative:

# Matrixaddition (Forts.)

**Beispiele**

In $\mathbb{Z}^{2\times 3}$:

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$

- $0 =$

- $-\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} =$

# Multiplikation von Matrizen mit Skalaren

## Definition

$c \in R$, $A \in R^{m \times n}$

*c-faches* von $A$:

$$cA = c \cdot A =$$

## Beispiel

In $\mathbb{Z}^{2\times 3}$:

$$(-3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ -6 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

# Skalarmultiplikation von Matrizen (Forts.)

**Proposition**

Es seien $c, d \in R$, $A, B \in R^{m \times n}$

- $c(dA) = (cd)A$
- $1A = A$
- $(c + d)A = cA + dA$
  $c(A + B) = cA + cB$

# Matrixmultiplikation

## Definition

- $A \in R^{m \times n}$, $B \in R^{n \times l}$

  *Matrixprodukt* von $A$ und $B$:

  $$AB = A \cdot B =$$

- *n-reihige Einheitsmatrix* über $R$:

  $$\mathrm{E}_n =$$

# Matrixmultiplikation (Forts.)

**Beispiel**

- $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} =$

- $\mathrm{E}_3 =$

# Matrixmultiplikation (Forts.)

## Proposition

$A, A' \in R^{m\times n},\ B, B' \in R^{n\times l},\ C \in R^{l\times k}$

- $A(BC) = (AB)C$
- $\mathrm{E}_m A = A\mathrm{E}_n = A$
- $(A+A')B = AB + A'B$
  $A(B+B') = AB + AB'$
- $(cA)B = A(cB) = c(AB)$

# Matrixmultiplikation (Forts.)

**Korollar**

$R^{n \times n}$ wird ein Ring mit:

- Multiplikation:
- Eins:

**Bemerkung**

$R^{n \times n}$ ist nicht kommutativ für $n \geq 2$.

# Matrixmultiplikation (Forts.)

## Definition

*Allgemeine lineare Gruppe* vom Grad $n$ über $R$:

$$\mathrm{GL}_n(R) := (R^{n\times n})^\times$$

## Beispiel

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ mit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

# Transposition von Matrizen

## Definition

$A \in R^{m \times n}$

*Transponierte* von $A$:

$$A^t =$$

## Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}^t =$$

# Transposition von Matrizen (Forts.)

**Proposition**

$A, B \in R^{m\times n}$, $C \in R^{n\times l}$, $D \in \mathrm{GL}_n(R)$

- $(A^t)^t = A$
- $(A+B)^t = A^t + B^t$
- $(AC)^t = C^t A^t$
- $\mathrm{E}_n^t = \mathrm{E}_n$
- $D^t \in \mathrm{GL}_n(R)$ mit $(D^t)^{-1} = (D^{-1})^t$