

Übungsblatt 3

Diskrete Strukturen, Prof. Dr. Gerhard Hiß, WS 2018/19

Für Matrikelnummer: 399191

Abgabezeitpunkt: Fr 09 Nov 2018 14:00:00 CET

Dieses Blatt wurde erstellt: Mo 12 Nov 2018 00:54:42 CET

Die Lösungen der ersten drei Aufgaben sind online abzugeben.											
13	<p>Kreuzen Sie alle Eigenschaften der gegebenen Abbildung an. (Wenn Sie die Lösung einer Aufgabe abgeben, achten Sie bitte darauf, den Haken bei ' - ' wegzunehmen; dieser bedeutet, dass Sie keine Lösung zu der Frage abgeben möchten.)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 80%; padding: 5px;">$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x^2 - y.$</td> <td style="width: 20%; padding: 5px; vertical-align: top;"> <input type="checkbox"/> injektiv / <input type="checkbox"/> surjektiv </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, (x, y) \mapsto (x^2, x - y).$</td> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <input type="checkbox"/> injektiv / <input type="checkbox"/> surjektiv </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x^2 + 2y.$</td> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <input type="checkbox"/> injektiv / <input type="checkbox"/> surjektiv </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}, (a, b) \mapsto \frac{a}{b}.$</td> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <input type="checkbox"/> injektiv / <input type="checkbox"/> surjektiv </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, x \mapsto (x, x^3).$</td> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <input type="checkbox"/> injektiv / <input type="checkbox"/> surjektiv </td> </tr> </table>	$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x^2 - y.$	<input type="checkbox"/> injektiv / <input type="checkbox"/> surjektiv	$f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, (x, y) \mapsto (x^2, x - y).$	<input type="checkbox"/> injektiv / <input type="checkbox"/> surjektiv	$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x^2 + 2y.$	<input type="checkbox"/> injektiv / <input type="checkbox"/> surjektiv	$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}, (a, b) \mapsto \frac{a}{b}.$	<input type="checkbox"/> injektiv / <input type="checkbox"/> surjektiv	$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, x \mapsto (x, x^3).$	<input type="checkbox"/> injektiv / <input type="checkbox"/> surjektiv
$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x^2 - y.$	<input type="checkbox"/> injektiv / <input type="checkbox"/> surjektiv										
$f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, (x, y) \mapsto (x^2, x - y).$	<input type="checkbox"/> injektiv / <input type="checkbox"/> surjektiv										
$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x^2 + 2y.$	<input type="checkbox"/> injektiv / <input type="checkbox"/> surjektiv										
$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}, (a, b) \mapsto \frac{a}{b}.$	<input type="checkbox"/> injektiv / <input type="checkbox"/> surjektiv										
$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, x \mapsto (x, x^3).$	<input type="checkbox"/> injektiv / <input type="checkbox"/> surjektiv										
14	<p>Es seien die folgenden Mengen gegeben: $A := \{n \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq n \leq 10\}$ und $C := \{5, 6, 7, 8\}$. Außerdem seien die folgenden Abbildungen gegeben: $i : A \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto n$; $f : C \rightarrow A, n \mapsto n/2$ falls n gerade ist und $n \mapsto (n-1)/2$ falls n ungerade ist; $g : \mathbb{Z} \rightarrow A, z \mapsto r$, wobei $z = 11q + r$ mit $q, r \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq r < 11$. Bei den Fragen nach Anzahlen geben Sie entweder eine Zahl oder das Wort unendlich ein.</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 80%; padding: 5px;">Sei $h = g \circ i \circ f$. Wieviele Elemente hat die Faser $h^{-1}(\{1\})$</td> <td style="width: 20%; padding: 5px;">_____</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">Wieviele nicht-leere Fasern hat g?</td> <td style="padding: 5px;">_____</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">Wieviele Elemente hat das Urbild von $\{3, 5\}$ unter f?</td> <td style="padding: 5px;">_____</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">Welche Kompositionen sind definiert? (Alle richtigen ankreuzen!) (A) $i \circ f$ (B) $f \circ i$ (C) $i \circ g$ (D) $g \circ i$ (E) $f \circ g$ (F) $g \circ f$</td> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <input type="checkbox"/> A / <input type="checkbox"/> B / <input type="checkbox"/> C / <input type="checkbox"/> D / <input type="checkbox"/> E / <input type="checkbox"/> F </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">Wieviele Elemente hat das Bild von $g \circ i$?</td> <td style="padding: 5px;">_____</td> </tr> </table>	Sei $h = g \circ i \circ f$. Wieviele Elemente hat die Faser $h^{-1}(\{1\})$	_____	Wieviele nicht-leere Fasern hat g ?	_____	Wieviele Elemente hat das Urbild von $\{3, 5\}$ unter f ?	_____	Welche Kompositionen sind definiert? (Alle richtigen ankreuzen!) (A) $i \circ f$ (B) $f \circ i$ (C) $i \circ g$ (D) $g \circ i$ (E) $f \circ g$ (F) $g \circ f$	<input type="checkbox"/> A / <input type="checkbox"/> B / <input type="checkbox"/> C / <input type="checkbox"/> D / <input type="checkbox"/> E / <input type="checkbox"/> F	Wieviele Elemente hat das Bild von $g \circ i$?	_____
Sei $h = g \circ i \circ f$. Wieviele Elemente hat die Faser $h^{-1}(\{1\})$	_____										
Wieviele nicht-leere Fasern hat g ?	_____										
Wieviele Elemente hat das Urbild von $\{3, 5\}$ unter f ?	_____										
Welche Kompositionen sind definiert? (Alle richtigen ankreuzen!) (A) $i \circ f$ (B) $f \circ i$ (C) $i \circ g$ (D) $g \circ i$ (E) $f \circ g$ (F) $g \circ f$	<input type="checkbox"/> A / <input type="checkbox"/> B / <input type="checkbox"/> C / <input type="checkbox"/> D / <input type="checkbox"/> E / <input type="checkbox"/> F										
Wieviele Elemente hat das Bild von $g \circ i$?	_____										
15	<p>Es seien X, Y, Z Mengen und $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen. Sind die folgenden Aussagen stets wahr?</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 80%; padding: 5px;">Wenn $g \circ f$ bijektiv ist, dann ist auch f bijektiv.</td> <td style="width: 20%; padding: 5px; vertical-align: top;"> <input type="radio"/> Ja / <input type="radio"/> Nein </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">Wenn $g \circ f$ injektiv und f surjektiv ist, dann ist g injektiv.</td> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <input type="radio"/> Ja / <input type="radio"/> Nein </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">Wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist auch g injektiv.</td> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <input type="radio"/> Ja / <input type="radio"/> Nein </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, dann ist auch g surjektiv.</td> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <input type="radio"/> Ja / <input type="radio"/> Nein </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">Wenn $X = Z$ und $g \circ f = \text{Id}_X$ ist, dann ist g injektiv.</td> <td style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <input type="radio"/> Ja / <input type="radio"/> Nein </td> </tr> </table>	Wenn $g \circ f$ bijektiv ist, dann ist auch f bijektiv.	<input type="radio"/> Ja / <input type="radio"/> Nein	Wenn $g \circ f$ injektiv und f surjektiv ist, dann ist g injektiv.	<input type="radio"/> Ja / <input type="radio"/> Nein	Wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist auch g injektiv.	<input type="radio"/> Ja / <input type="radio"/> Nein	Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, dann ist auch g surjektiv.	<input type="radio"/> Ja / <input type="radio"/> Nein	Wenn $X = Z$ und $g \circ f = \text{Id}_X$ ist, dann ist g injektiv.	<input type="radio"/> Ja / <input type="radio"/> Nein
Wenn $g \circ f$ bijektiv ist, dann ist auch f bijektiv.	<input type="radio"/> Ja / <input type="radio"/> Nein										
Wenn $g \circ f$ injektiv und f surjektiv ist, dann ist g injektiv.	<input type="radio"/> Ja / <input type="radio"/> Nein										
Wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist auch g injektiv.	<input type="radio"/> Ja / <input type="radio"/> Nein										
Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, dann ist auch g surjektiv.	<input type="radio"/> Ja / <input type="radio"/> Nein										
Wenn $X = Z$ und $g \circ f = \text{Id}_X$ ist, dann ist g injektiv.	<input type="radio"/> Ja / <input type="radio"/> Nein										
16	Umfrage zur Bearbeitungszeit.										

	Wieviele Stunden haben Sie für die Lösung dieses Übungsblattes aufgewendet? (Bitte auf ganze Stunden runden und nur diese ganze Zahl eintragen.) Diese Angabe ist freiwillig. Es gibt keine Punkte für die Beantwortung.	_____
Bitte werfen Sie Ihre Lösungen zu den schriftlich zu bearbeitenden Aufgaben in das Ihrer Gruppennummer entsprechende Fach im Abgabekasten des Lehrstuhl D für Mathematik (Flur 2.OG im Hauptgebäude, neben der Mathematischen Bibliothek). Schreiben Sie auf jedes abgegebene Blatt deutlich Ihre Matrikelnummer, Ihren Namen und Ihre Gruppennummer . Ihre Gruppennummer finden Sie auf der Webseite unter dem Punkt <i>Ergebnisse abfragen</i> heraus.		
17	Es sei $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung und $M_1, M_2 \subseteq M$ und $N_1, N_2 \subseteq N$. Beweisen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel an: (a) $f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$ (b) $f(M_1 \cap M_2) = f(M_1) \cap f(M_2)$ (c) $f^{-1}(N_1 \cup N_2) = f^{-1}(N_1) \cup f^{-1}(N_2)$ (d) $f^{-1}(N_1 \cap N_2) = f^{-1}(N_1) \cap f^{-1}(N_2)$	
18	(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (a, b) \mapsto a + b$ surjektiv ist und berechnen Sie eine rechtsseitige Umkehrabbildung. (b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad x \mapsto 3x + 2$ injektiv ist und berechnen Sie eine linksseitige Umkehrabbildung. (c) Zeigen Sie allgemein, dass eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ genau dann surjektiv ist, wenn f eine rechtsseitige Umkehrabbildung hat.	
Abgabe bis spätestens Freitag, dem 9. November 2018, 14 Uhr, sowohl am Abgabekasten als auch online.		