Äquivalenzrelationen (Forts.)

Erinnerung

M Menge

Partition von M: $\mathcal{P} \subseteq \mathrm{Pot}(M)$ mit

- $\emptyset \notin \mathcal{P}$,
- $C \cap C' = \emptyset$ für $C \neq C' \in \mathcal{P}$,
- $M = \cup_{C \in \mathcal{P}} C$.

Beispiel

$\{\{1, 2, 4\}, \{3\}\}$ ist Partition von $\{1, 2, 3, 4\}$

Äquivalenzrelationen (Forts.)

Satz
Es sei M Menge, C Äquivalenzrelation auf M.
Dann ist M/C eine Partition von M.

Äquivalenzrelationen (Forts.)

Hauptsatz über Äquivalenzrelationen

Es sei M eine Menge.

Dann existiert eine Bijektion

$$\begin{aligned}\{C \mid C \text{ ist Äq.rel. auf } M\} &\to \{\mathcal{P} \mid \mathcal{P} \text{ ist Partition von } M\}\\ C &\mapsto M/C\end{aligned}$$

Homomorphiesatz für Mengen

Beispiel

Es sei $f: M \to N$ Abbildung.

- Nicht-leere Fasern von f bilden Partition von M (frühere Folie).
- Welche Äquivalenzrelation?
- Bildgleichheit: $xR_f x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$.

Homomorphiesatz für Mengen (Forts.)

Homomorphiesatz für Mengen

Es sei $f\colon M \to N$ Abbildung, und

$$\kappa : M \to M/R_f$$

die Quotientenabbildung zur Bildgleichheit R_f.

Dann existiert „wohldefinierte Abbildung“

$$\bar{f}\colon M/R_f \to N,\ [x]_{R_f} \mapsto f(x)$$

mit

$$f = \bar{f} \circ \kappa$$

- $\bar{f}$ injektiv
- $\mathrm{Im}\,\bar{f} = \mathrm{Im}\,f$

Homomorphiesatz für Mengen (Forts.)

Beispiel

$f\colon \{1,2,3,4\} \to \mathbb{Z}$, $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 1$, $3 \mapsto 3$, $4 \mapsto 1$

Homomorphiesatz für Mengen (Forts.)

Beispiel

P:	farbige Glasperlen in Dose
F:	Farben
$f : P \to F$:	Zuordnung der zugehörigen Farbe zu jeder Glasperle

Ordnungen

Definition
X Menge

- *Präordnung* auf X: transitive, reflexive Relation auf X
- *Ordnung* auf X: antisymmetrische Präordnung auf X
- *Totalordnung* auf X: vollständige Ordnung auf X

Ordnungen (Forts.)

- *Präordnung*:
  - reflexiv
  - transitiv
- *Ordnung*:
  - reflexiv
  - antisymmetrisch
  - transitiv
- *Totalordnung*:
  - reflexiv
  - antisymmetrisch
  - transitiv
  - vollständig

Ordnungen (Forts.)

Beispiele

- $\leq$ auf $\mathbb{N}$:
- M Menge

  $\subseteq$ auf $\mathrm{Pot}(M)$:
- $<$ auf $\mathbb{N}$:
- „$|$“ auf $\mathbb{Z}$:

Geordnete Mengen

Definition

- *Prägeordnete Menge*: besteht aus
  - M Menge
  - o Präordnung auf M

  Missbrauch von Notation: bezeichne prägeordnete Menge wieder mit M

  Terminologie und Notationen:
  - *Präordnung* von M: o
    Notation: $\leq := o$
- *geordnete Menge*: prägeordn. Mge M mit: $\leq$ Ordnung
- *totalgeordnete Menge*: prägeordn. Mge M mit: $\leq$ Totalordn.

Geordnete Mengen (Forts.)

Beispiel

- $\mathbb{N}$ mit üblicher Ordnung
- M Menge

  $\mathrm{Pot}(M)$ mit Teilmengenrelation

Definition
M geordnete Menge

Striktordnung von M: für $x, y \in M$: $\quad x < y :\Leftrightarrow x \leq y$ und $x \neq y$

Geordnete Mengen (Forts.)

Bemerkung

M prägeordnete Menge, $U \subseteq M$

U wird zu prägeordneter Menge mit:
für $u, v \in U$: $\quad u \leq^U v :\Leftrightarrow u \leq^M v$

Beispiele

- $\underline{n}$
- M Menge

  $\mathrm{Pot}(M) \setminus \{\emptyset\}$

Geordnete Mengen (Forts.)

Bemerkung

M prägeordnete Menge
Definiere Relation $\diamond$ auf M durch

$$x \diamond y :\Leftrightarrow x \leq y \text{ und } y \leq x.$$

Dann ist $\diamond$ eine Äquivalenzrelation auf M.

Beispiel

Sei „$|$" die Teilbarkeitsrelation auf $\mathbb{Z}$.
Was ist $\diamond$?

Extremale Elemente

Definition

M prägeordnete Menge, $x \in M$

- x ist *minimales* Element: für $y \in M$: $\quad y \leq x \Rightarrow x \leq y$
- x ist *maximales* Element: für $y \in M$: $\quad x \leq y \Rightarrow y \leq x$

Bemerkung

M geordnete Menge, $x \in M$

- x minimal $\Leftrightarrow$ (für $y \in M$: $\quad y \leq x \Leftrightarrow x = y$)
- x maximal $\Leftrightarrow$ (für $y \in M$: $\quad x \leq y \Leftrightarrow x = y$)

Extremale Elemente (Forts.)

Beispiel

- in $\mathbb{N}$:
  - minimal:
  - maximal:
- M Menge

  in $\mathrm{Pot}(M)$:
  - minimal:
  - maximal:
- $\mathrm{Pot}(\{1, 2, 3\}) \setminus \{\emptyset\}$:
  - minimal:
  - maximal:
- $\mathrm{Pot}(\{1, 2, 3\}) \setminus \{\{1, 2, 3\}\}$:
  - minimal:
  - maximal:

Extremale Elemente (Forts.)

Definition

M prägeordnete Menge, $x \in M$

- x ist *kleinstes* Element (oder *Minimum*): für $y \in M$: $\quad x \leq y$
- x ist *größtes* Element (oder *Maximum*): für $y \in M$: $\quad y \leq x$

Bemerkung

M prägeordnete Menge, $x \in M$

x kleinstes Element $\Rightarrow$ x minimales Element

Extremale Elemente (Forts.)

Beispiel

- in $\mathbb{N}$:
  - kleinst:
  - größt:
- M Menge

  in $\mathrm{Pot}(M)$:
  - kleinst:
  - größt:
- $\mathrm{Pot}(\{1,2,3\}) \setminus \{\emptyset\}$:
  - kleinst:
  - größt:
- $\mathrm{Pot}(\{1,2,3\}) \setminus \{\{1,2,3\}\}$:
  - kleinst:
  - größt:

Extremale Elemente (Forts.)

Bemerkung

M prägeordnete Menge, x kleinstes Element, $y \in M$

äquivalent:

- y kleinstes Element
- y minimales Element
- $x \leq y$ und $y \leq x$
- $y \leq x$

Extremale Elemente (Forts.)

Korollar

M geordnete Menge

es gibt höchstens ein kleinstes Element in M

Notation

M geordnete Menge

- es gebe kleinstes Element x in M

$$\min M := x$$

- es gebe größtes Element x in M

$$\max M := x$$

Extremale Elemente (Forts.)

Proposition

M total geordnete Menge, $x \in M$

x minimales Element in $M \Leftrightarrow x$ kleinstes Element in M