__Heute:__ Körper, angeordnete Körper

__Ziel:__ Rechenregeln, Beweisen

Körper: Addition, Subtraktion, Multiplikation
Division (außer durch Null)
(Grundmodell: $\mathbb{Q}$ (rationalen Zahlen))

(2.4.) Satz

(i) $a + x = b \overset{(-a)\text{ ex.}}{\Longleftrightarrow} (-a) + (a+x) = (-a) + b$

$\overset{\text{Ass. gesetz}}{\Longleftrightarrow} ((-a)+a) + x = (-a) + b$

$\Longleftrightarrow 0 + x = (-a) + b$

$\overset{0\text{ neutr. El.}}{\Longleftrightarrow} x = (-a) + b$

bzgl. +

$\overset{\text{Komm.}}{\Longleftrightarrow} x = b + (-a)$

3.3. $(-a)\cdot b = -(a\cdot b)$

$(-a)$ add. Inv. zu a

$$a\cdot b + (-a)\cdot b \overset{\text{Distributivgesetz}}{=\!=} \overbrace{(a+(-a))}^{=0}\cdot b$$

$$= 0\cdot b \overset{\text{Komm.}}{=\!=} b\cdot 0 = 0$$

Es ex. $-(a\cdot b)$ mit $a\cdot b + (-(a\cdot b)) = 0$

$\Rightarrow$

$$(-(a\cdot b)) + (a\cdot b + (-a)\cdot b) = (-(a\cdot b)) + 0$$

Ass.

$\Rightarrow$ $(-a)\cdot b = -(a\cdot b)$.

0 neutr. El.

(V) z.z.: $a \cdot 0 = 0$ Wissen: $0+0=0$

Distributivgesetz

$$a \cdot 0 = a \cdot (0+0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$$

Add. inv.

$\Rightarrow$ ~~(-a·0)~~ $(-(a\cdot 0)) + a\cdot 0 = (-(a\cdot 0)) + (a\cdot 0 + a\cdot 0)$

$(-a\cdot 0)$

Ass. ges.

$\Rightarrow$ $0 = 0 + a\cdot 0 = a\cdot 0$

0 neutr. El.

Jetzt: positive Elemente, angeordnete Körper

P ... Positivitätsbereich

(P.2) additive Abgeschlossenheit

(P.3) multiplikative —— " ——

<u>Beispiele:</u> $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

Nebenbem.: $\mathbb{F}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$, $P = \{\bar{1}\}$

$$\bar{1} + \bar{1} = \bar{0} \notin P \quad ↯ \quad P + P \subseteq P.$$

(2.8) Satz:

b1) $(b+c)-(a+c) \overset{K \text{ Körper}}{=} b-a$

$\Rightarrow \quad (b+c)-(a+c) \in P \Leftrightarrow b-a \in P$

$\Rightarrow \quad a+c < b+c \Leftrightarrow a<b$

b3) zz: $0<a$ und $0<b \Rightarrow 0<a\cdot b$

$a>0 \Leftrightarrow a \in P \quad , \; b>0 \Leftrightarrow b \in P$

$P\cdot P \subseteq P$
$\Rightarrow \quad a\cdot b \in P \Leftrightarrow a\cdot b > 0$.

c1) z.B. $a > 0$ und $b < 0 \Rightarrow a \cdot b < 0$.

$a > 0$ und $b < 0 \Rightarrow a \in P$ und $(-b) \in P$

$P \cdot P \subseteq P$

$\Rightarrow (a) \cdot (-b) \in P$, Wissen: $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$

$\Rightarrow -(a \cdot b) \in P \Rightarrow a \cdot b < 0$.

(2.11) Satz:

z.z. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ $\qquad \cancel{|x|=0}$

<u>1. Fall</u>: $x=0$ oder $y=0 \Rightarrow x \cdot y = 0 \Rightarrow |x \cdot y| = 0$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$|x|=0$ oder $|y|=0 \Rightarrow |x| \cdot |y| = 0$.

$$\Rightarrow \underbrace{|x \cdot y|}_{=0} = \underbrace{|x| \cdot |y|}_{=0}$$

<u>2. Fall</u>: $x > 0$ und $y > 0 \Rightarrow \underline{x \cdot y > 0}$

$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$

$|x| = x \qquad |y| = y \qquad |x \cdot y| = x \cdot y$

$$|x \cdot y| = x \cdot y = |x| \cdot |y|$$

(vi) 2. Dreiecksungleichung:

z.z. $|x+y| \geq ||x|-|y|| \geq |x|-|y|$

$|x| = |(x+y)+(-y)| \overset{(v)}{\leq} |x+y| + |-y| = |x+y| + |y|$

$\Rightarrow \quad |x+y| \geq |x|-|y|$

$|y| = |(y+x)+(-x)| \overset{(v)}{\leq} |x+y| + |-x| = |x+y| + |x|$

$\Rightarrow \quad |x+y| \geq |y|-|x| = -(|x|-|y|)$

$\Rightarrow \quad |x+y| \geq ||x|-|y||$

__3. Fall__ $x > 0$ und $y < 0 \Rightarrow x \cdot y < 0$

$\Downarrow \quad |x| = x$ $\quad\quad \Downarrow \quad |y| = -y$ $\quad\quad \Downarrow \quad |x \cdot y| = -(x \cdot y)$

$$|x| \cdot |y| = x \cdot (-y) = -(x \cdot y) = |x \cdot y|$$

(v) __1. Fall__ $x + y \geq 0 \Rightarrow |x+y| = x+y$

$x \leq |x|$, $y \leq |y|$ d.h. $|x| - x = 0$ oder $|x| - x \in P$

$$|x+y| = x+y \overset{P+P \subseteq P}{\leq} |x| + |y|$$

__2. Fall__ $x + y < 0 \overset{\text{Defin.}}{\Rightarrow} |x+y| = -(x+y)$

$$|x+y| = -(x+y) = (-x) + (-y) \underset{P+P \subseteq P}{\leq} |x| + |y|$$