Lehrstuhl für Informatik 1
Prof. Dr. Gerhard Woeginger
Jan Böker, Tim Hartmann

WS 2018/19
14.12.2018

# Übung zur Vorlesung
## Berechenbarkeit und Komplexität
## Blatt 9

---

### Tutoriumsaufgabe 9.1

Wir geben eine alternative Laufzeitdefinition für nichtdeterministische Turingmaschinen an. Für eine NTM $M$ und eine Eingabe $x$ sei

$$T'_M(x) := \text{Länge des längsten Rechenweges von } M \text{ auf } x.$$

Falls ein nicht-terminierender Rechenweg auf $x$ existiert, setzen wir $T'_M(x) := \infty$. Daraus erhalten wir die Worst-Case-Laufzeit $t'_M(n) := \max\{T'_M(x) \mid x \in \Sigma^n\}$. Sei nun $\mathsf{NP}'$ die Klasse der Entscheidungsprobleme, die durch eine NTM $M$ erkannt werden, deren Worst-Case-Laufzeit $t'_M(n)$ polynomiell beschränkt ist.

Zeigen Sie, dass $\mathsf{NP} = \mathsf{NP}'$.

### Tutoriumsaufgabe 9.2

Zeigen Sie, dass folgendes Problem in $\mathsf{NP}$ liegt:

Problem: GI
Eingabe: Zwei ungerichtete Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$
Frage: Ist $G_1$ isomorph zu $G_2$, d. h., existiert eine Bijektion $f : V_1 \to V_2$, sodass $\{u, v\} \in E_1$ genau dann wenn $\{f(u), f(v)\} \in E_2$?

### Tutoriumsaufgabe 9.3

Es sei $G = (V_G, E_G)$ ein ungerichteter Graph. Eine Menge $D \subseteq V_G$ heißt *Dominating Set* von $G$, wenn jeder Knoten in $V_G$ in $D$ liegt oder zu einem Knoten in $D$ benachbart ist. Eine Eingabe des Problems DOMINATING SET besteht aus einem Graphen $G$ und einer Zahl $k$. Die Frage ist, ob $G$ ein Dominating Set der Größe höchstens $k$ besitzt.

Für einen Graphen $G = (V_G, E_G)$ konstruieren wir einen neuen Graphen $H$ mit Knotenmenge $\{v \in V_G \mid v \text{ nicht isoliert in } G\} \cup \{w^e \mid e \in E_G\}$. Der Graph $H$ enthält alle Kanten in $E_G$, und außerdem ist für jede Kante $e = \{u, v\} \in E_G$ der Knoten $w^e$ zu den beiden Knoten $u$ und $v$ benachbart.

(a) Zeigen Sie: Wenn der Graph $G$ ein Vertex-Cover der Größe höchstens $k$ besitzt, dann besitzt $H$ ein Dominating Set der Größe höchstens $k$.

(b) Zeigen Sie: Wenn der Graph $H$ ein Dominating Set der Größe höchstens $k$ besitzt, dann besitzt $G$ ein Vertex-Cover der Größe höchstens $k$.

(c) Zeigen Sie: VERTEX COVER $\leq_p$ DOMINATING SET

— BITTE WENDEN —

## Hausaufgabe 9.1 **(3 Punkte)**

Die Sprache $L$ enthält die Gödelnummern $\langle M \rangle$ jener Turingmaschinen $M$, für die ein Wort $w \in \{0,1\}^*$ existiert, auf dem $M$ nach höchstens $|w|^3$ vielen Schritten anhält.

Beschreiben Sie eine NTM, die $L$ akzeptiert. Da aus jeder NTM eine (deterministische) TM konstruiert werden kann, die dieselbe Sprache erkennt, genügt dies, um zu zeigen, dass $L$ semi-entscheidbar ist.

## Hausaufgabe 9.2 **(4 Punkte)**

Zeigen Sie, dass folgendes Problem in $\mathsf{NP}$ liegt:

Problem: COMPOSITE
EINGABE: Eine natürliche Zahl $n$ (kodiert als Binärzahl)
FRAGE: Ist $n$ keine Primzahl?

Sie dürfen dabei **nicht** verwenden, dass ein Primzahltest in polynomieller Zeit möglich ist.

## Hausaufgabe 9.3 **(5 Punkte)**

*Da Weihnachten naht, muss der Weihnachtsmann seine Rentierschlitten auf das Geschenkeverteilen vorbereiten, wozu je zwei Rentiere auf jeweils einen Rentierschlitten verteilt werden müssen. Die Rentiere des Weihnachtsmannes sind allerdings bezüglich der Wahl ihres Schlittenpartners sehr wählerisch und teilen dem Weihnachtsmann mit, mit welchen anderen Rentieren sie als Schlittenpartner einverstanden sind. Der Weihnachtsmann möchte die Entscheidungen der Rentiere respektieren, aber dennoch so viele Schlitten wie möglich besetzen. Dazu modelliert er dieses Problem als ungerichteten Graphen: Die Knoten sind durch die Menge der Rentiere gegeben, und zwei Rentiere sind durch eine Kante verbunden, wenn sie dem Weihnachtsmann das gegenseitige Einverständnis mitgeteilt haben. Dies führt den Weihnachtsmann zu folgendem Entscheidungsproblem:*

Es sei $G = (V_G, E_G)$ ein ungerichteter Graph. Eine Menge $M \subseteq E_G$ heißt *Matching* in $G$, wenn keine zwei Kanten in $M$ einen gemeinsamen Knoten haben. Eine Eingabe des Problems MATCHING besteht aus einem Graphen $G$ und einer Zahl $k$. Die Frage ist, ob $G$ ein Matching der Größe mindestens $k$ besitzt.

Für einen Graphen $G = (V_G, E_G)$ konstruieren wir einen neuen Graphen $H = (V_H, E_H)$ mit Knotenmenge $V_H = \{w^e \mid e \in E_G\}$. Zwei Knoten $w^{e_1}$ und $w^{e_2}$ in $H$ sind adjazent genau dann, wenn die zugrundeliegenden Kanten $e_1$ und $e_2$ im Graphen $G$ einen gemeinsamen Knoten haben.

(a) Zeigen Sie: Wenn der Graph $G$ ein Matching der Größe $k$ besitzt, dann besitzt $H$ ein Independent Set der Größe $k$.

(b) Zeigen Sie: Wenn der Graph $H$ ein Independent Set der Größe $k$ besitzt, dann besitzt $G$ ein Matching der Größe $k$.

(c) Zeigen Sie: MATCHING $\leq_p$ INDEPENDENT SET

*Wir wünschen euch frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!*

Abgabe bis Mittwoch, den 09.01.2019 um 12:15 Uhr
im Sammelkasten am Lehrstuhl i1, in Ihrem Tutorium oder am Anfang der Globalübung.