(28.11.) ①

Heute: Grenzwerte von Funktionen

▷ Definition, Bsp

← Zusammenhang mit GW von Folgen

▷ Regeln

Bem: Ein Häufungspunkt von D muß nicht in D liegen (er darf aber)

Bsp: ▷ $D = (a,b)$ $(a<b)$

Das sind alle HP

- Jedes $x_0 \in (a,b)$ ist HP, denn es gibt $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x_0) \subset (a,b)$ $(\rightarrow M_0)$
- a ist HP von (a,b), da für $\varepsilon > 0$ z.B. $a + \frac{\varepsilon}{2} \in U_\varepsilon(a)$ (Œ $\varepsilon < b-a$)
- b ist HP von (a,b).

▷ $D = \mathbb{Q}$: Jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ (!) ist HP von $\mathbb{Q}$,
denn in jeder $U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ befinden sich rationale (und irrationale) Zahlen (→ Üb ?).

▷ $D = \mathbb{Z}$: Jedes $x_0 \in \mathbb{Z}$ ist isolierter Punkt von $\mathbb{Z}$;
$\mathbb{Z}$ besitzt keine HP.

- $x_0 \in \mathbb{Z}$ isoliert, denn in $U_{1/2}(x_0) \setminus \{x_0\}$ liegt keine ganze Zahl.
- Sei $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Dann ex. $k \in \mathbb{Z}$, so daß $x_1 \in (k, k+1)$ $(k = [x_1])$. Dann ex. $\delta > 0$ mit $U_\delta(x_1) \subset (k, k+1)$, also $U_\delta(x_1) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$, und x_1 kein HP von $\mathbb{Z}$.

▷ $D = \{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$:
- 0 ist HP von D, denn zu jedem $\delta > 0$ ex. $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_1} \in U_\delta(0)$
- 1 ist kein HP von D: $(U_{1/2}(1) \setminus \{1\}) \cap D = \emptyset$.

Bem Ist $x_0 \in D$, so gilt i.a. **nicht** $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, falls $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert.

Bsp

▷ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x+1$

Dann $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$, denn $= f(1)$

$$|f(x) - 2| = |x+1-2| = |x-1|,$$

und zu $\varepsilon > 0$ ergibt die Wahl $\delta = \varepsilon$:

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$$

▷ $g: \mathbb{R} \setminus \{+1\} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{x^2-1}{x-1}$

Dann $\lim_{x \to 1} g(x) = 2$, denn für $x \neq 1$ ist

$$\frac{x^2-1}{x-1} = x+1.$$

Jetzt s.o.

▷ Allgemeiner: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x + c$ ($c \in \mathbb{R}$ konst.)

Dann $\lim_{x \to x_0} f(x) = x_0 + c$ ($= f(x_0)$.)

(Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta = \varepsilon$ und wiederhole erstes Bsp.)

▷ Für kein $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert $\lim_{x \to x_0} D(x)$

$$\left(\text{Erinnerung: } \quad D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \right)$$

Denn zu $\varepsilon^* = \frac{1}{2}$ gilt: Für jedes $\delta > 0$ enthält $U_\delta(x_0)$ eine rationale Zahl x_1 mit $D(x_1) = 1$ und eine irrationale Zahl x_2 mit $D(x_2) = 0$

Annahme: Es ex. ein GW L. Da

$$|D(x_1) - L| < \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad |D(x_2) - L| < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad |1 - L| < \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad |L| < \frac{1}{2} \quad ↯$$

$\triangleright$ $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot D(x) = 0$, denn es gilt

$$|x\cdot D(x) - 0| = |x|\cdot\underbrace{|D(x)|}_{\leq 1} \leq |x| = |x-0|$$

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta = \varepsilon$.

$\triangleright$ $\lim\limits_{x\to 0} \exp(x) = 1$ $\left(\exp(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)$

$\triangleright$ $\exp(0) = 1$, aber das reicht nicht zum Beweis!

Schätze ab:

$$|\exp(x) - 1| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right| = |x|\cdot\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{k!}\right|$$

~~Für~~ Schätze Reihe weiter ab:

Für $|x| \leq 1$ gilt $\left|\frac{x^{k-1}}{k!}\right| \leq \frac{1}{k!}$, also

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{x^{k-1}}{k!}\right| \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}}_{\text{konv.} \to e-1}$$ konvergiert nach Majorantenkriterium.

Damit: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}$ konvergiert (da absolut konvergent)

und $\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} \right| \leq e-1 \leq e$

Gezeigt ist: Für $|x| \leq 1$ gilt

$$|\exp(x)-1| \leq e \cdot |x| = e \cdot |x-0|$$

Wählt man also zu $\varepsilon > 0$: $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{e}, 1\}$,

so folgt: $|x-0| < \delta \Rightarrow |\exp(x)-1| \leq e \cdot |x| \leq e \cdot \frac{\varepsilon}{e} = \varepsilon$.

Insbesondere: $\lim_{x \to 0} \exp(x) = \exp(0)$

Bew. (1.4) „(i) ⇒ (ii)" Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $D\setminus\{x_0\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, sowie $\varepsilon > 0$.

Zu zeigen: Es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß
$|f(x_n) - L| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

Nach Voraussetzung ex. $\delta > 0$, so daß
$|f(x) - L| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$

Weil $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, ex. $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß
$0 < |x_n - x_0| < \delta$ für alle $n \geq n_0$.

Für $n \geq n_0$ gilt also $0 < |x_n - x_0| < \delta$
$\Rightarrow |f(x_n) - L| < \varepsilon.$

__Bsp__ ▷ Für $H(x) := \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$,

gilt, daß $\lim_{x \to 0} H(x)$ nicht existiert.

Denn bei $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ gilt $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$

sowie $f(x_n) = \left\{ \begin{matrix} 0, & n \text{ ungerade} \\ 1, & n \text{ gerade} \end{matrix} \right\}$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + (-1)^n \right)$$

Die Folge der $f(x_n)$ ist divergent.

▷ Für kein $x_0 \in \mathbb{R}$ ex. $\lim_{x \to x_0} D(x)$ (Dirichlet-Funktion)

Denn es gibt eine Folge (a_n) rationaler Zahlen mit $\lim a_n = x_0$ und $\lim \underbrace{f(a_n)}_{=1} = 1$,

und eine Folge irrationaler Zahlen b_n mit $\lim b_n = x_0$ sowie $\lim \underbrace{f(b_n)}_{=0} = 0$. Beachte $1 \neq 0$.

Beweis (1.5) mit (1.4) und bekannten Regeln für GW von Folgen.

z.B. (x_n) Folge in $(D \cap D') \setminus \{x_0\}$ mit $\lim x_n = x_0$,

$$\lim_{n\to\infty} \big(f(x_n) + g(x_n) \big) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n) = L_f + L_g$$

Zusatz bei (iv): Es gibt ein $r > 0$, so daß $|g(x)| \neq 0$ für alle ~~$x \in D' \setminus \{x_0\}$~~

$$x \in \big((D \cap D') \setminus \{x_0\} \big) \cap U_r(x_0),$$

denn $|g(x) - L_g| < \frac{1}{2} |L_g|$ für alle

$x \in (D \cap D') \setminus \{x_0\}$ mit $|x - x_0|$ hinreichend klein;

folglich $g(x) \neq 0$ und

$\frac{f(x)}{g(x)}$ ist def. auf $\big((D \cap D') \setminus \{x_0\} \big) \cap U_r(x_0)$

<u>Beweis</u> (1.6) a)

<u>Schritt</u> 1 : Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n$$

Induktion nach n

<u>IA</u> : $n=0$, $n=1$ schon bekannt ($\to$ Bsp. oben)

<u>IS</u> : Annahme: Die Aussage gilt für ein n.

Dann ist $x^{n+1} = x \cdot x^n$, also

mit IA, Annahme und (1.5) (iii):

$$\lim_{x \to x_0} x^{n+1} = \lim_{x \to x_0} x \cdot \lim_{x \to x_0} x^n = x_0 \cdot x_0^n = x_0^{n+1}$$

"existiert und ist gleich"

<u>Schritt 2</u> für Polynom vom Grad n:

Induktion nach n; im IS

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + a_{n+1} x^{n+1}$$

Benutze (1.5) (i) & (ii)

Bw (1.7) a) Für $x_0 = 0$ ist dies schon bewiesen (s.o.)

Für beliebiges x_0 ist

$$\exp(x) = \exp(x - x_0 + x_0)$$

$$= \exp(x - x_0) \cdot \exp(x_0)$$

Weil $x - x_0 \to 0 \iff x \to x_0$,

folgt $\lim\limits_{x \to x_0} \exp(x - x_0) = \lim\limits_{y \to 0} \exp(y) \overset{(s.o.)}{=} \exp(0) =$

Mit (1.5) (i) also $\lim\limits_{x \to x_0} \exp(x - x_0) \cdot \exp(x_0) = \exp(x_0)$

b) (skizze)

▷ Folge (mit Reihen & Abschätzungen):

$\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$ und $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$.

▷ Damit $\sin x = \sin\left((x-x_0)+x_0\right)$

$$= \underbrace{\sin(x-x_0)}_{\to 0} \cdot \cos x_0 + \underbrace{\cos(x-x_0)}_{\to 1} \cdot \sin x_0$$

$\left(\lim\limits_{y\to 0} \sin y = 0\right)$ $\left(\lim\limits_{y\to 0} \cos y = 1\right)$

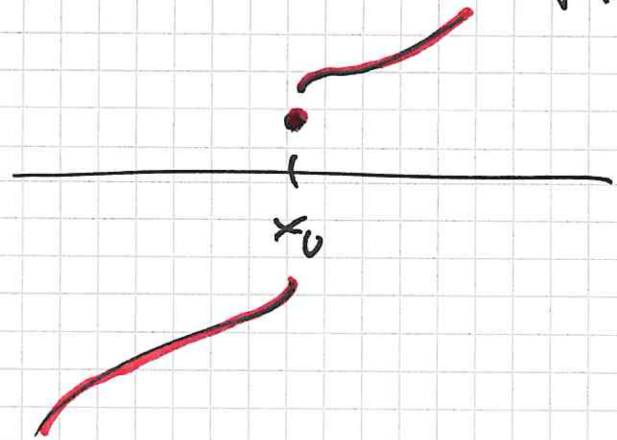
(1.7) (i) & (ii)

$\cancel{\Rightarrow} \to 0 \cdot \cos x_0 + 1 \cdot \sin x_0 = \sin x_0$

▷ Teil $\cos x = \cos\left((x-x_0)+x_0\right) = \cos(x-x_0)\cos x_0 - \sin(x-x_0)\cdot \sin x_0$

analog.

Graph (f)



<u>Bsp</u> $\quad H(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 0 \\ 1, & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

- Dann $\lim\limits_{x \downarrow 0} H(x) = 1$, denn

  $g_1 = H|_{(0,\infty)}$ erfüllt $g_1(x) = 1$ für alle $x \in (0,\infty)$,

  also $\lim\limits_{x \to 0} g_1(x) = 1$.

- Analog: $\lim\limits_{x \uparrow 0} H(x) = 0$

<u>Bsp</u> $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$?

Dieser Grenzwert existiert und ist gleich 1.

<u>Bew</u> $x \neq 0$: $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!} \Rightarrow e^x - 1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}$

$$= x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}$$ ← Reihe konvergiert für $x \neq 0$ mit QU-Regel

$\Rightarrow$ Für $x \neq 0$ gilt $\dfrac{e^x - 1}{x} = \underbrace{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x^{k-1}}{k!}}\ =: R(x)$

Weiter $R(x) - 1 = \sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{x^{k-1}}{k!}$

$$= x \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{k-2}}{k!}$$

Jetzt wieder Abschätzung (brutal schlecht, aber ausreichend):

Für $0 < |x| \leq 1$: $\left| \frac{x^{n-2}}{n!} \right| \leq \frac{1}{n!} \Rightarrow \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n!} \right|$

$$\leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq e$$

Also: Für $0 < |x| \leq 1$ gilt

$$\left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| = |R(x) - 1| \leq e \cdot |x|$$

etc.