



Übung 1 zur Vorlesung Analysis für Informatiker, WS 2018/2019

Abgabe bis Mittwoch, 17.10.2018, 12 Uhr

Präsenzaufgaben

Die folgenden Aufgaben werden in der Globalübung am 11.10.2018 bearbeitet und besprochen.

Präsenzaufgabe 3

Gegeben seien die Menge $M := \mathbb{Q} \setminus \{0, 1\}$ und die Abbildungen

$$f_1 : M \longrightarrow M, x \mapsto \frac{1}{x} \quad \text{und} \\ f_2 : M \longrightarrow M, x \mapsto 1 - x.$$

Dass dies wohldefinierte Abbildungen von M nach M sind, dürfen Sie als gegeben annehmen.

1. Geben Sie die Abbildungsvorschriften für

$$f_1 \circ f_2, f_2 \circ f_2, f_2 \circ f_1$$

an. Vereinfachen Sie das Ergebnis dabei so weit wie möglich.

2. Zeigen Sie

$$(f_1 \circ f_2)^3 = \text{id} \quad \text{und} \\ (f_2 \circ f_1)^3 = \text{id}.$$

Dabei bezieht sich die Potenz auf die Hintereinanderausführung von Abbildungen.

Lösung

1. Für beliebiges $x \in M$ erhalten wir:

$$(f_1 \circ f_1)(x) = f_1(f_1(x)) = \frac{1}{f_1(x)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} = x = \text{id}(x).$$

$$(f_2 \circ f_2)(x) = f_2(f_2(x)) = 1 - f_2(x) = 1 - (1 - x) = x = \text{id}(x).$$

$$(f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x)) = 1 - \frac{1}{f_1(x)} = 1 - \frac{1}{x}.$$

$$(f_1 \circ f_2)(x) = f_1(f_2(x)) = \frac{1}{f_2(x)} = \frac{1}{1 - x}.$$

2. Es gilt:

$$(f_1 \circ f_2)^2(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = 1 - \frac{1}{x} = (f_2 \circ f_1)(x).$$

Aus dem Assoziativgesetz der Verknüpfung von Abbildungen folgt nun:

$$\begin{aligned}(f_1 \circ f_2)^3 &= (f_1 \circ f_2)^2 \circ (f_1 \circ f_2) \\ &= (f_2 \circ f_1) \circ (f_1 \circ f_2) \\ &= f_2 \circ (f_1 \circ f_1) \circ f_2 \\ &= f_2 \circ \text{id} \circ f_2 \\ &= f_2 \circ f_2 = \text{id}.\end{aligned}$$

Analog zeigt man:

$$\begin{aligned}(f_2 \circ f_1)^3 &= f_2 \circ (f_1 \circ f_2 \circ f_1 \circ f_2) \circ f_1 \\ &= (f_2 \circ f_2) \circ (f_1 \circ f_1) \\ &= \text{id} \circ \text{id} = \text{id}.\end{aligned}$$