8. Januar 2019

Kombinatorik

Motivation

Es sei A eine endliche Menge mit $|A| = n$. Weiter sei $k \in \mathbb{N}$.

Stichproben

Eine *Stichprobe aus A vom Umfang k* ist eine Auswahl von k Elementen aus A. Dabei gibt es vier Szenarien:

- Elemente paarweise verschieden, Reihenfolge relevant (Ziehen ohne Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge);
- Elemente paarweise verschieden, Reihenfolge irrelevant (Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge);
- Elemente können mehrfach vorkommen, Reihenfolge relevant (Ziehen mit Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge);
- Elemente können mehrfach vorkommen, Reihenfolge irrelevant (Ziehen mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge).

Motivation (Forts.)

Beispiele

- Medaillenverteilung nach 100m-Lauf mit 8 Läufern ($A = \{\text{Läufer}\}$, $n = 8$, $k = 3$);
- Lottozahlen ($A = \underline{49}$, $n = 49$, $k = 6$);
- Dezimalzahlen in $\mathbb{N}$ mit k Ziffern ($A = \{0, 1, \ldots, 9\}$, $n = 10$);
- Wurf mit 5 Würfeln gleichzeitig $\left(A = \left\{⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅\right\}, n = 6, k = 5\right)$.

Stichproben relevant z.B. in Wahrscheinlichkeitstheorie

Gesucht: Anzahl der möglichen Stichproben (bei festem n und k)

k-Permutationen

Es sei A eine endliche Menge mit $|A| = n$. Weiter sei $k \in \mathbb{N}, k \leq n$.

Definition

Eine *k-Permutation* aus A ist eine geordnete Auswahl von k paarweise verschiedenen Elementen aus A
(ein k-Tupel über A mit paarweise verschiedenen Einträgen).

Eine n-Permutation aus A heißt *Permutation von A*
(stimmt mit früherer Definition von Permutation überein).

Bemerkung

k-Permutationen aus A modellieren Stichproben aus A vom Umfang k ohne Zurücklegen, unter Beachtung der Reihenfolge.

k-Permutationen (Forts.)

Beispiele

- $(4,3,2), (4,2,3)$ und $(3,5,1)$ sind 3-Permutationen aus $\underline{5}$.
- $(1,2,1)$ ist keine Permutation.
- $(1,3,5,2,4)$ und $(5,4,3,2,1)$ sind Permutationen von $\underline{5}$.
- Die Medaillenverteilung nach einem 100m-Lauf mit 8 Läufern ist eine 3-Permutation aus $\underline{8}$.
- Die aktuelle Bundesligatabelle ist eine Permutation von $\underline{18}$.

k-Permutationen (Forts.)

Erinnerung

Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n$$

und $0! = 1$.

Satz

Es sei A eine Menge mit $|A| = n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$.

Die Anzahl der k-Permutationen aus A ist

$$\frac{n!}{(n-k)!}.$$

Die Anzahl der Permutationen von A ist $n!$.

k-Permutationen (Forts.)

Beispiele

- Die Anzahl der 2-Permutationen aus $\underline{3}$ ist $\frac{3!}{(3-2)!} = 6$.
- Es gibt $\frac{8!}{(8-3)!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 = 336$ mögliche Medaillenverteilungen (Gold, Silber, Bronze) auf 8 Läufer.
- Es gibt $18! = 6.402.373.705.728.000 \approx 6{,}4 \cdot 10^{15}$ mögliche Bundesligatabellen aus 18 Mannschaften.

k-Kombinationen

Es sei A eine endliche Menge mit $|A| = n$. Weiter sei $k \in \mathbb{N}, k \leq n$.

Definition
Eine *k-Kombination* aus A ist eine ungeordnete Auswahl von k paarweise verschiedenen Elementen aus A
(eine k-elementige Teilmenge von A).

Bemerkung
k-Kombinationen aus A modellieren Stichproben aus A vom Umfang k ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge.

k-Kombinationen

Beispiele

- $\{4,3,2\} = \{4,2,3\}$ und $\{3,5,1\}$ sind 3-Kombinationen aus $\underline{5}$.
- Ein ausgefüllter Lottoschein ist eine 6-Kombination aus $\underline{49}$.
- Die Bundesliga-Absteiger bilden einen 3-Kombination aus $\underline{18}$.
- Eine Skathand ist eine 10-Kombination aus $\underline{32}$.

k-Kombinationen (Forts.)

Satz

Es sei A eine Menge mit $|A| = n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$.

Die Anzahl der k-Kombinationen aus A ist

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

k-Kombinationen (Forts.)

Beispiele

- Die Anzahl der 2-Kombinationen aus $\underline{4}$ ist $\frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$.
- Es gibt $\frac{49!}{6!43!} = 13.983.816$ Lottotipps.
- Es gibt $\frac{18!}{3!15!} = 816$ Möglichkeiten, drei von 18 Mannschaften absteigen zu lassen.
- Es gibt $\frac{32!}{10!22!} = 64.512.240$ mögliche Skathände.

k-Tupel

Es sei A eine endliche Menge mit $|A| = n$. Weiter sei $k \in \mathbb{N}$.

Bemerkung

k-Tupel über A modellieren Stichproben aus A vom Umfang k mit Zurücklegen, unter Beachtung der Reihenfolge.

Beispiel

Resultat von Klausur mit k Teilnehmern und 11 möglichen Noten: k-Tupel über $\underline{11}$.

Nummeriere Teilnehmer von 1 bis k; es sei a_i die Note von Teilnehmer i. Resultat: $(a_1, \ldots, a_k)$.

Satz

Die Anzahl der k-Tupel über A ist n^k.

k-Multimengen

Es sei A eine endliche Menge mit $|A| = n$. Weiter sei $k \in \mathbb{N}$.

Definition
Eine *k-Multimenge über A* ist eine ungeordnete Auswahl von k beliebigen (nicht notwendig verschiedenen) Elementen aus A. (Eine Multimenge ist eine Menge mit Wiederholungen.)

Bemerkung

k-Multimengen über A modellieren Stichproben aus A vom Umfang k mit Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge.

Beispiele

- Ein Lostopf ist eine Multimenge.
- Das Resultat eines Wurfs mit 5 Würfeln gleichzeitig ist eine 5-Multimenge über $\underline{6}$.

k-Multimengen (Forts.)

Es sei A eine endliche Menge mit $|A| = n$. Weiter sei $k \in \mathbb{N}$. Nummeriere A, etwa $A = \{a_1, \dots, a_n\}$.

Definition

Für eine k-Multimenge $\mathcal{X}$ über A sei $\ell_{\mathcal{X}} := (\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbb{N}_0^n$ mit $\sum_{i=1}^n \ell_i = k$ definiert durch

$$\ell_i := \text{ Vielfachheit von } a_i \text{ in } \mathcal{X}.$$

$\ell_{\mathcal{X}}$ heißt das *Häufigkeitstupel* der Multimenge $\mathcal{X}$.

Beispiel

Der Wurf mit 5 Würfeln gleichzeitig habe das Ergebnis

Nummerieren wir die Elemente aus A nach aufsteigender Augenzahl, erhalten wir das Häufigkeitstupel $(2, 2, 0, 1, 0, 0)$.

k-Multimengen (Forts.)

Bemerkung

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \{k\text{-Multimengen über } A\} &\to \{(\ell_1, \ldots, \ell_n) \in \mathbb{N}_0^n \mid \sum_{i=1}^{n} \ell_i = k\} \\ \mathcal{X} &\mapsto \ell_{\mathcal{X}} \end{aligned}$$

ist eine Bijektion.

k-Multimengen (Forts.)

Es sei A eine endliche Menge mit $|A| = n$. Weiter sei $k \in \mathbb{N}$.

Satz

Die Anzahl der k-Multimengen über A ist

$$\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

.

Binomialkoeffizienten

Es seien $n, k \in \mathbb{N}_0$.

Definition
Für $k \leq n$ heißt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

der *Binomialkoeffizient* n über k.

Beispiel

$$\binom{5}{3} =$$

Binomialkoeffizienten (Forts.)

Es seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$.

Bemerkung

- $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$
- $$\binom{n}{k} \in \mathbb{N}.$$
- Ist $1 \leq k \leq n-1$, dann gilt
$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

Binomialkoeffizienten (Forts.)

Pascal'sches Dreieck

$n = 0$:							1						
$n = 1$:						1		1					
$n = 2$:					1		2		1				
$n = 3$:				1		3		3		1			
$n = 4$:			1		4		6		4		1		
$n = 5$:		1		5		10		10		5		1	
$n = 6$:	1		6		15		20		15		6		1

Der binomische Lehrsatz

Es sei R ein kommutativer Ring.

Schreibweise
Für $a \in R$ und $z \in \mathbb{Z}$ schreiben wir

$$z.a := \begin{cases} \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{z \text{ Summanden}}, & \text{falls } z \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{falls } z = 0 \\ -(-z.a), & \text{falls } z < 0 \end{cases}$$

Meist lassen wir den Punkt weg, d.h. wir schreiben za statt $z.a$.

Bemerkung
Ist $z = xy$ für $x, y \in \mathbb{Z}$, dann gilt $z.a = x.(y.a)$ für alle $a \in R$.

Der binomische Lehrsatz (Forts.)

Binomischer Lehrsatz
Es sei R ein kommutativer Ring, $a, b \in R$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Korollar
Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Der binomische Lehrsatz (Forts.)

Schülers Traum

Es sei R ein Ring und p eine Primzahl mit $p.a = 0$ für alle $a \in R$ (z.B. $R = \mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elementen). Dann ist

$$(a + b)^p = a^p + b^p$$

für alle $a, b \in R$.

Beweis

Für $0 < k < p$ ist

$$\binom{p}{k} = \frac{p \cdot (p-1) \cdots (p-k+1)}{k!}$$

von der Form xp für ein $x \in \mathbb{N}$, also $\binom{p}{k}.a^k b^{p-k} = 0$.

Kombinatorische Beweisprinzipien

Summenregel

Es sei $r \in \mathbb{N}$ und $A_1, \ldots, A_r$ paarweise disjunkte endliche Mengen. Dann ist

$$|\bigcup_{i=1}^{r} A_i| = \sum_{i=1}^{r} |A_i|.$$

Kombinatorische Beweisprinzipien (Forts.)

Differenzregel

Es sei M endliche Menge, $A \subseteq M$. Dann ist

$$|M \setminus A| = |M| - |A|.$$

Beispiel

$|\{n \in \underline{10} \mid n \notin \mathbb{P}\}| =$

Kombinatorische Beweisprinzipien (Forts.)

Produktregel

Es sei $r \in \mathbb{N}$ und $A_1, \ldots, A_r$ endliche Mengen. Dann ist

$$|\bigtimes_{i=1}^{r} A_i| = \prod_{i=1}^{r} |A_i|.$$

Kombinatorische Beweisprinzipien (Forts.)

Satz

$\mathcal{A}$ eine Multimenge mit r verschiedenen Elementen $a_1, \ldots, a_r$.
Es sei $\ell_{\mathcal{A}} = (k_1, \ldots, k_r)$ und $k = k_1 + \cdots + k_r$.

Die Anzahl der Anordnungen von $\mathcal{A}$ ist

$$\frac{k!}{k_1! \cdots k_r!}.$$

Beispiel

Wieviele verschiedene Wörter kann man durch Anordnung der Buchstaben `P,I,Z,Z,A` gewinnen?