Bäume und Wälder

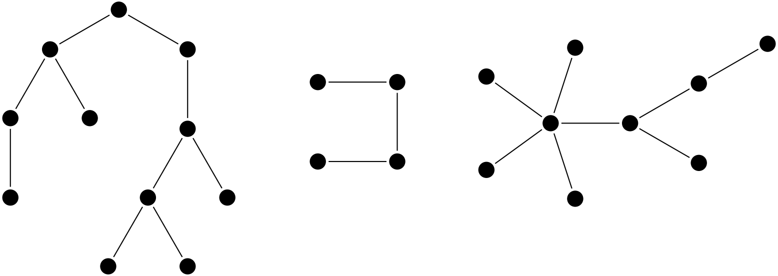
Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $n_G > 0$.

Definition

- G heißt *kreisfrei* bzw. *Wald*, falls G keine Kreise enthält.
- Ein zusammenhängender Wald heißt *Baum*.
- Die Knoten eines Waldes mit Grad ≤ 1 heißen Blätter.

Wälder und Bäume (Forts.)

Beispiel



Wälder und Bäume (Forts.)

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $n_G > 0$.

Bemerkung

- G ist genau dann kreisfrei, wenn jede Kante eine Brücke ist.
- Ist G ein Baum mit $n_G \geq 2$, dann hat G mindestens zwei Blätter.
- Ist G ein Baum mit $n_G \geq 3$, dann hat G höchstens $n_G - 1$ Blätter.

Wälder und Bäume (Forts.)

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $n_G > 0$.

Erinnerung

- r_G: Anzahl der Zusammenhangskomponenten von G
- Es ist $r_G \geq n_G - m_G$.
- Es sei $e \in E$ und $G' := (V, E \setminus \{e\})$. Dann ist $r_{G'} \leq r_G + 1$. Weiter ist $r_{G'} = r_G + 1$ genau dann, wenn e eine Brücke ist.

Satz
Es gilt $r_G = n_G - m_G$ genau dann, wenn G kreisfrei ist.

Wälder und Bäume (Forts.)

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $n_G > 0$.

Folgerung

G ist genau dann ein Baum, wenn mindestens zwei der folgenden Bedingungen erfüllt sind.

- G ist kreisfrei.
- G ist zusammenhängend.
- $m_G = n_G - 1$.

Wälder und Bäume (Forts.)

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $n_G > 0$.

Erinnerung

- Ist G zusammenhängend, dann ist $m_G \geq n_G - 1$.
- Ist G kreisfrei, dann ist $m_G = n_G - r_G \leq n_G - 1$.

Bemerkung

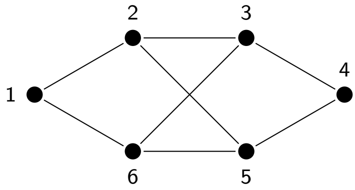
- Ein Baum ist ein zusammenhängender Graph mit minimal möglicher Kantenzahl.
- Ein Baum ist ein kreisfreier Graph mit maximal möglicher Kantenzahl.

Spannbäume

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $n_G > 0$.

Definition
Ein Teilgraph $G' = (V', E')$ von G heißt *Spannbaum* von G (engl. *spanning tree*), wenn G' ein Baum ist und $V' = V$.

Beispiel



Spannbäume (Forts.)

Satz

Jeder zusammenhängende Graph hat einen Spannbaum.

Beweis

Breitensuche.

Spannbäume (Forts.)

Es sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph.

Algorithmus (Sukzessives Entfernen von Kanten)

- Initialisiere $B := E$.
- Entferne sukzessive solche Kanten aus B, die keine Brücken in (V, B) sind.
- Ist das nicht mehr möglich, dann ist (V, B) ein Spannbaum von G.

Spannbäume (Forts.)

Es sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph.

Algorithmus (Sukzessives Hinzufügen von Kanten)

- Initialisiere $B := \emptyset$.
- Füge sukzessive solche Kanten zu B hinzu, deren Endknoten in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von (V, B) liegen.
- Ist das nicht mehr möglich, dann ist (V, B) ein Spannbaum.

Spannbäume (Forts.)

Es sei $G = (V, E, f)$ ein gewichteter Graph.

Erinnerung

- (V, E) ist ein Graph, und $f : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Gewichtsfunktion.
- Für $T \subseteq E$ heißt $f(T) := \sum_{e \in T} f(e)$ das Gewicht von T.

Definition

Ein *minimaler Spannbaum* von G ist ein Spannbaum (V, B) von G mit minimalem Gewicht $f(B)$ unter allen Spannbäumen von G.

Spannbäume (Forts.)

Es sei $G = (V, E, f)$ ein gewichteter Graph.

Algorithmus (Kruskal)

- Initialisiere $B := \emptyset$.
- Füge sukzessive solche Kanten zu B hinzu, deren Endknoten in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von (V, B) liegen, und unter allen solchen jeweils einen von minimalem Gewicht.
- Ist das nicht mehr möglich, dann ist (V, B) ein minimaler Spannbaum.

Spannbäume (Forts.)

Austauschlemma

Es seien (V, A) und (V, B) zwei Bäume mit derselben Knotenmenge V.

Für jedes $a \in A \setminus B$ gibt es ein $b \in B \setminus A$ so, dass $(V, B \cup \{a\} \setminus \{b\})$ auch ein Baum ist.