1.4 Abbildungen

Vorstellung

M, N Mengen

Abbildung (oder *Funktion*) von M nach N:

„Vorschrift“ (z.B. „Formel“),

die jedem $x \in M$ genau ein $y \in N$ „zuordnet“.

Abbildungen (Forts.)

Definition

- *Abbildung* (oder *Funktion*) von M nach N: besteht aus
  - M Menge
  - N Menge
  - $f \subseteq M \times N$

  so, dass: für jedes $x \in M$ ex. genau ein $y \in N$ mit $(x, y) \in f$

  Missbrauch von Notation: notiere Abbildung wieder als f

- Terminologien und Notationen:
  - M heißt *Definitionsbereich* von f.
  - N heißt *Zielbereich* oder *Wertebereich* von f.
  - *Bild* von $x \in M$ unter f: **das** $y \in N$ mit $(x, y) \in f$
    Notation:
  - *Urbild* von $y \in N$ unter f: **ein** $x \in M$ mit $y = f(x)$

Abbildungen (Forts.)

Notation

Es seien M, N Mengen.

- *Menge der Abbildungen* von M nach N: $\mathrm{Abb}(M, N)$ oder N^M.
- Notationen für $f \in \mathrm{Abb}(M, N)$:
  - $f\colon M \to N$
  - $f\colon M \to N$, $x \mapsto f(x)$
  - $M \xrightarrow{f} N$

Abbildungen (Forts.)

Beispiele

- $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} =$
  Menge aller reellen Funktionen.

- $\mathrm{Abb}(\{1, 2\}, \{3, 4, 5\})$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Abb}(\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}) \\
&= \{(1 \mapsto 3, 2 \mapsto 3), (1 \mapsto 3, 2 \mapsto 4), (1 \mapsto 3, 2 \mapsto 5), \\
&\qquad (1 \mapsto 4, 2 \mapsto 3), (1 \mapsto 4, 2 \mapsto 4), (1 \mapsto 4, 2 \mapsto 5), \\
&\qquad (1 \mapsto 5, 2 \mapsto 3), (1 \mapsto 5, 2 \mapsto 4), (1 \mapsto 5, 2 \mapsto 5)\}
\end{aligned}
$$

Abbildungen (Forts.)

Beispiele

- $\{1,2,3\} \to \{4,5,6\}$, $1 \mapsto 4$, $2 \mapsto 5$, $3 \mapsto 4$ ist Abbildung.
- $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto 2x^2$ ist Abbildung.
- Es gibt keine Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = \sqrt{x}$ für $x \in \mathbb{N}$.
- Es gibt keine Abbildung $f\colon \{-2, 3, \sqrt{61}\} \to \mathbb{Q}$ mit $f(3) = -5$ und $f(3) = 2/7$.
- $\{(x, \frac{1}{x}) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ liefert keine Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

  ist Abbildung.

Abbildungen (Forts.)

Beispiele

- $f\colon \{1,2,3\} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x+2$
  $g\colon \{1,2,3\} \to \mathbb{N}$, $1 \mapsto 3$, $2 \mapsto 4$, $3 \mapsto 5$
- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ 0 & \text{für } x = -1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ -1 & \text{für } x = -1 \end{cases}$$

- $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x^2$
  $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x^2$
- $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $x \mapsto x+1$
  $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x+1$

Abbildungen (Forts.)

Beispiele

- Briefpostversand der Aachener Post:
- Nachrichtenverschlüsselung:

  Nachrichtenentschlüsselung:

Abbildungen (Forts.)

Beispiele

- Addition in $\mathbb{Z}$ ist die Abbildung
$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad (x, y) \mapsto x + y.$$
- M Menge von Glasperlen , F Menge aller Farben.
  $F : M \to F, x \mapsto$ Farbe von x.
- A Menge von Personen.
  $J : A \to \mathbb{Z}, p \mapsto$ Geburtsjahr von p.
- Zu jeder Menge M gibt es die *Identitätsabbildung*
$$\mathrm{id}_M : M \to M, x \mapsto x.$$
- N Menge. Dann existiert genau eine Abbildung $\emptyset \to N$.
- M nicht-leere Menge. Dann existiert keine Abbildung $M \to \emptyset$.

Folgen

Es sei N eine Menge.

Definition

Eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to N$ wird auch *Folge in N* genannt.

Schreibweisen

- Die Folge $f : \mathbb{N} \to N$ in N wird auch geschrieben als

  $$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

  oder

  $$(a_i)_{i \in \mathbb{N}}.$$

  Hier ist $a_i := f(i)$ für $i \in \mathbb{N}$.

- Menge aller Folgen in N:
  $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, N)$ oder $N^{\mathbb{N}}$.

Folgen (Forts.)

Beispiele

- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad i \mapsto i^2$
  wird auch geschrieben als
  $$1, 4, 9, 16 \ldots$$
  oder
  $$(i^2)_{i \in \mathbb{N}}.$$

- $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ Menge der Binärfolgen. (Manchmal auch $2^{\mathbb{N}}$.)

- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ Menge der reellen Folgen.

Definition durch Rekursion

Folgen auf einer Menge können *rekursiv* definiert werden.

Beispiele

- Auf $\mathbb{R}_{>0}$ existiert genau eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_1 := 1 \text{ und } a_{n+1} := 1 + \frac{1}{a_n} \text{ für } n \geq 1.$$

- Es sei $a \in \mathbb{R}$. Es gibt genau eine Folge $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit

$$x_1 = a \text{ und } x_{n+1} = a \cdot x_n \text{ für } n \geq 1.$$

  Wir schreiben: $a^n := x_n$ für das n-te Glied dieser Folge.
  Sprechweise oft: Wir definieren die *Potenzen* a^n für $n \in \mathbb{N}$ rekursiv durch:

$$a^1 := a \text{ und } a^{n+1} := a \cdot a^n \text{ für } n \geq 1.$$

Definition durch Rekursion (Forts.)

Die Definition durch Rekursion beruht auf dem folgenden Satz.

Proposition

Es sei N eine Menge, $f: N \to N$ Abbildung und $a \in N$.

Dann gibt es genau eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in N mit:

- $a_1 = a$
- $a_{n+1} = f(a_n)$ für $n \in \mathbb{N}$.

Dieser *Rekursionssatz von Dedekind* kann durch vollständige Induktion bewiesen werden.

Definition durch Rekursion (Forts.)

Beispiele

In obigen Beispielen können wir nehmen:

- $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto 1 + 1/x$.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax$.

Tupel

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Erinnerung: $\underline{n} = \{1, 2, \dots, n\} \subseteq \mathbb{N}$.

Definition
Eine Abbildung $f : \underline{n} \to N$ wird auch *n-Tupel in N* genannt.

Schreibweisen

- Das n-Tupel $f : \underline{n} \to N$ in N wird auch geschrieben als
$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$
oder
$$(a_i)_{i \in \underline{n}}.$$
Hier ist $a_i := f(i)$ für $i \in \underline{n}$.
- Menge aller n-Tupel in N:
$N^n := N^{\underline{n}} = \mathrm{Abb}(\underline{n}, N)$.

Tupel (Forts.)

Beispiele

- Das 5-Tupel $(1, -3, 0, 0, 27)$ in $\mathbb{Z}$ ist die Abbildung $t : \underline{5} \to \mathbb{Z}$ mit $t(1) = 1, t(2) = -3, t(3) = t(4) = 0, t(5) = 27$.
- $\{0, 1\}^3 =$
$\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 0),$
$(0, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 0)\}$.
- Für jede Menge N kann N^2 mit $N \times N$ identifiziert werden.

  (Hier wird das 2-**Tupel** $(x, y) \in N^2$, d.h. die Abbildung $\{1, 2\} \to N$, $1 \mapsto x$, $2 \mapsto y$, identifiziert mit dem **geordneten Paar** $(x, y) \in N \times N$.)

Tupel (Forts.)

Beispiel

$n \in \mathbb{N}$, $A_1, \ldots, A_n$ Variablen für Aussagen (bzw. deren Wahrheitswert):

- Belegung von A_1, ..., A_n:
  modelliert als Element von
- potentielle Wahrheitstafel für A_1, ..., A_n: