Wiederholung

- Jede Permutation ist Produkt disjunkter Zykel.
- Jeder k-Zykel ist Produkt von k-1 Transpositionen.
- Jede Transposition ist Produkt von Nachbartranspositionen.
- $\pi \in S_n$: $\quad \operatorname{sgn} \pi = \prod_{\{i,j\} \in I_n} \frac{\pi(i) - \pi(j)}{i-j} \in \{1, -1\}$.
- $\operatorname{sgn}(\pi \sigma) = (\operatorname{sgn} \pi) \cdot (\operatorname{sgn} \sigma)$
- $\operatorname{sgn}(\pi^{-1}) = \operatorname{sgn} \pi$
- $\operatorname{sgn} \tau = -1$ für ~~ein~~ τ Transposition
- $\operatorname{sgn}(\tau_1 \cdots \tau_r) = (-1)^r$ für $\tau_1, \ldots, \tau_r$ Transpositionen
- $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{k-1}$ für einen k-Zykel σ

· R komm. Ring mit $1 \neq 0$, $m, n \in \mathbb{N}$

$$A = (a_{ij}) \in R^{m \times n} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad a_{ij} \in R$$

i-te Zeile von A: $\quad (a_{i1} \; a_{i2} \; \cdots \; a_{in}) \in R^{1 \times n}$ Zeilen-n-Tupel

j-te Spalte von A: $\quad \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in R^{m \times 1}$ Spalten-m-Tupel

$$R^n := R^{n \times 1}$$

E_n = n-reihige Einheitsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in R^{n \times n}$.

- $R^{m\times n}$ abelsche Gruppe mit:
  - $(a_{ij}) + (b_{ij}) := (a_{ij} + b_{ij}) \qquad (a_{ij}), (b_{ij}) \in R^{m\times n}$
  - Nullmatrix $\quad 0 \in R^{m\times n}$
  - $-(a_{ij}) = (-a_{ij})$.
- $A = (a_{ij}) \in R^{m\times n}, \quad c \in R: \qquad cA := (ca_{ij}) \in R^{m\times n}$
- $A = (a_{ij}) \in R^{m\times n}, \quad B = (b_{ij}) \in R^{n\times \ell}$

  $A\cdot B = (c_{ij}) \in R^{m\times \ell}, \quad c_{ij} := \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}$

  c_{ij}: Eintrag der (1×1)-Matrix $z_i \cdot s_j$,

  z_i: i-te Zeile von A, s_j j-te Spalte von B

Matrixmultiplikation (Forts.)

Proposition

$A, A' \in R^{m\times n},\ B, B' \in R^{n\times l},\ C \in R^{l\times k}$

- $A(BC) = (AB)C$
- $\mathrm{E}_m A = A\mathrm{E}_n = A$
- $(A + A')B = AB + A'B$
  $A(B + B') = AB + AB'$
- $(cA)B = A(cB) = c(AB)$

$A(BC) = (AB)C \qquad A = R^{m\times n},\ A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}) \in R^{n\times \ell},\ C = (c_{ij}) \in R^{\ell\times}$

(α, j) - Eintrag von BC : $\sum_{\beta=1}^{\ell} b_{\alpha\beta} c_{\beta j}$

(i,j) - " " $A(BC)$: $\sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{\ell} a_{i\alpha} b_{\alpha\beta} c_{\beta j}$

(i,β) - " " AB : $\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} b_{\alpha\beta}$

(i,j) " " $(AB)C$: $\sum_{\beta=1}^{\ell} \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} b_{\alpha\beta} c_{\beta j} = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{\ell} a_{i\alpha} b_{\alpha\beta} c_{\beta j}$.

$E_m A = A, \qquad A = (a_{ij}) \in R^{m\times n}$

Position i

i-te Zeile von E_m : $(0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0)$

(i-te Zeile von E_m) $\cdot$ (j-Spalte von A) $= (a_{ij})$. $\boxtimes$

Matrixmultiplikation (Forts.)

Korollar

$A \in R^{n \times n}$: quadratische Matrix

$R^{n\times n}$ wird ein Ring mit:

- Multiplikation: $A B$
- Eins: E_n

Bemerkung

$R^{n\times n}$ ist nicht kommutativ für $n \geq 2$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nullteiler: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matrixmultiplikation (Forts.)

Definition

Allgemeine lineare Gruppe vom Grad n über R:

$$\mathrm{GL}_n(R) := (R^{n\times n})^\times$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \text{ mit}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Transposition von Matrizen

Definition

$A \in R^{m \times n}$

$A = (a_{ij})_{1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n}$

Zeilen von A = Spalten von A^t

Transponierte von A:

$$A^t = (a_{ji})_{1 \le j \le n,\ 1 \le i \le m} \in R^{n \times m}$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Transposition von Matrizen (Forts.)

Proposition

$A, B \in R^{m \times n}$, $C \in R^{n \times l}$, $D \in \mathrm{GL}_n(R)$

(a) ▶ $(A^t)^t = A$

(b) ▶ $(A+B)^t = A^t + B^t$

(c) ▶ $(AC)^t = C^t A^t$

(d) ▶ $\mathrm{E}_n^t = \mathrm{E}_n$

(e) ▶ $D^t \in \mathrm{GL}_n(R)$ mit $(D^t)^{-1} = (D^{-1})^t$

Beweis der Proposition

(c) $A = (a_{ij}) \in R^{m \times n}$, $A^t = (a'_{ij}) \in R^{n \times m}$, $a'_{ij} = a_{ji}$

$C = (c_{ij}) \in R^{n \times l}$, $C^t = (c'_{ij}) \in R^{l \times n}$, $c'_{ij} = c_{ji}$

$C^t \cdot A^t$: $\sum_{k=1}^{n} c'_{ik} a'_{kj} = \sum_{k=1}^{n} c_{ki} \cdot a_{jk} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{jk} c_{ki}}$

(i,j)-Eintrag von $C^t \cdot A^t$

(j,i)-Eintrag von $A \cdot C$
also der (i,j)- " von $(A \cdot C)^t$.

(e) $D^t \cdot (D^{-1})^t = (D^{-1} \cdot D)^t = E_n^t = E_n$.

$(D^{-1})^t \cdot D^t = (D \cdot D^{-1})^t = E_n^t = E_n$.

13. Dezember 2018

Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme

Setup

- K Körper
- $m, n \in \mathbb{N}$

Lineare Gleichungssysteme (Forts.)

Ein lineares Gleichungssystem (LGS) aus m Gleichungen und n Unbekannten x_j für $j \in \underline{n}$ über K:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & & & & & & & \vdots & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

wobei $a_{ij}, b_i \in K$ für $i \in \underline{m}$, $j \in \underline{n}$.

Kurz:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad i\text{-te Gleichung}$$

für alle $i \in \underline{m}$.

Lineare Gleichungssysteme (Forts.)

Definition

Gegeben sie ein LGS über K wie oben.

Eine *Lösung* des LGS ist ein n-Tupel $\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in K^n$ $(= K^{n \times 1})$ mit

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} s_j}_{\in K} = \underbrace{b_i}_{\in K}$$

für alle $i \in \underline{n}$.

Matrix-Formulierung für LGS

Gegeben sie ein LGS über K wie oben.

Definition

- $A := (a_{ij}) \in K^{m \times n}$: *Koeffizientenmatrix* des LGS
- $b := (b_i) \in K^m$: *rechte Seite* des LGS
- $(A, b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in K^{m \times (n+1)}$: *erweiterte Koeffizientenmatrix*
- Lösungsmenge: $\mathbb{L}(A, b) \subseteq K^n$ Menge aller Lösungen
- Das LGS heißt *homogen*, falls $b = 0 \in K^m$.
- Das LGS heißt *inhomogen*, falls $b \neq 0 \in K^m$.

Matrix-Formulierung für LGS (Forts.)

Bemerkung Matrixgleich. $A \in K^{m \times n}$, $s \in K^{n}$, $As \in K^{m}$

$\mathbb{L}(A, b) = \{s \in K^n \mid As = b\}$

Beweis: $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m$, $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in K^n$

$$s \in \mathbb{L}(A, b) \iff \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot s_j = b_i \quad \forall\, 1 \leq i \leq m$$

$$A \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot s_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} \cdot s_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} \cdot s_j \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Matrix-Formulierung für LGS (Forts.)

Schreibweise

Schreiben LGS mit erweiterter Koeffizientenmatrix (A, b) formal:

$$Ax = b.$$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ Spalte von Unbekannten.

Beispiel

Das LGS

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 5 \\ x_1 & - & x_2 & & & = & 1 \end{array}$$

wird als Matrixgleichung geschrieben:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}}_{b}.$$

Matrix-Formulierung für LGS (Forts.)

Es sei $A \in K^{m \times n}$ und $b \in K^m$.

$A \in K^{m \times n}, v \in K^n \Rightarrow Av \in K^m$

Definition

$$\varphi_A : K^n \to K^m, \qquad v \mapsto Av$$

Bemerkung

(a) ▸ Für jedes $s \in \mathbb{L}(A, b)$ gilt

$$\mathbb{L}(A, b) = s + \mathbb{L}(A, 0) := \{s + u \mid u \in \mathbb{L}(A, 0)\}.$$

▸ Bild von φ_A: $\varphi_A(K^n) = \{b \in K^m \mid Ax = b \text{ lösbar}\}$.

▸ Faser von φ_A zu $b \in K^m$:

$$\varphi_A^{-1}(\{b\}) = \{s \in K^n \mid As = b\} = \mathbb{L}(A, b).$$

Bild φ_A: $\quad \varphi_A(K^n) = \{\varphi_A(v) \mid v \in K^n\}$

$$= \{Av \mid v \in K^n\}$$

~~Be~~ Beh: $b \in \text{Bild}(\varphi_A) \iff \mathbb{L}(A,b) \neq \emptyset$

Bew: „$\Rightarrow$" $b \in \text{Bild}(\varphi_A) \Rightarrow \exists\, v \in K^n$ mit $Av = b$

$$\Rightarrow v \in \mathbb{L}(A,b)$$

„$\Leftarrow$" Sei $s \in \mathbb{L}(A,b) \Rightarrow As = b \Rightarrow b \in \text{Bild}(\varphi_A)$. $\boxtimes$

Beweis der Bemerkung (a): Sei $s \in \mathbb{L}(A,b)$.

Beh: $\mathbb{L}(A,b) = s + \mathbb{L}(A,0) \quad (= \{s+u \mid u \in \mathbb{L}(A,0)\})$

Bew: „$\supseteq$" Z.z. $A(s+u) = b \quad \forall\, u$ mit $Au = 0$.

$$A(s+u) = As + Au = b + 0 \quad \forall\, u \in \mathbb{L}(A,0) \checkmark$$

„$\subseteq$" Sei $s' \in \mathbb{L}(A,b)$. $\Rightarrow As' = b = As$

$\Rightarrow A(s'-s) = As' - As = 0, \quad u := s'-s \in \mathbb{L}(A,0)$

$\Rightarrow s' = s+u \in s + \mathbb{L}(A,0)$ $\boxtimes$

Lineare Gleichungssysteme (Forts.)

Beispiel

$K = \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -2x_1 & + & 2x_2 & - & 6x_3 & - & 10x_4 & = & -24 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 9x_3 & - & 7x_4 & = & -15 \\ x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4 & = & -4 \end{array}$$

Lösungen sind z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Wie findet man alle Lösungen?

Lineare Gleichungssysteme (Forts.)

Beispiele

Es sei $K = \mathbb{R}$ und $m = n = 2$. Nehme x, y statt x_1, x_2.

- $$\begin{aligned} \mathrm{I}\quad x + y &= 2 \\ \mathrm{II}\quad x - y &= 0 \end{aligned}$$
  $\mathrm{II} \Rightarrow x = y$, Setze in I ein: $2x = 2$
  $\Rightarrow x = 1,\ y = 1 \quad \mathbb{L} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$

- $$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x + y &= 0 \end{aligned}$$
  $\mathrm{II} \Rightarrow y = -x$ Setze in I ein: $0 = 2$ ↯
  $\mathbb{L} = \emptyset$

- $$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 3x + 3y &= 6 \end{aligned}$$
  $\mathrm{I} \Rightarrow y = 2 - x$ Setze in II ein: $3x + 3(2-x) = 6$
  $\Rightarrow 6 = 6$ Keine Bed.
  $\mathbb{L} = \left\{\begin{pmatrix}t\\2-t\end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\}$.

Lineare Gleichungssysteme (Forts.)

Satz

Die Lösungsmenge eines LGS ändert sich nicht, wenn

- (a) zwei Gleichungen vertauscht werden, oder
- (b) das c-fache ($c \in K$) einer Gleichung zu einer anderen addiert wird, oder
- (c) eine Gleichung mit einem $c \in K$ ($c \neq 0$) multipliziert wird.

Definition

Die Umformungen aus dem Satz heißen *Äquivalenzumformungen*.

<u>Beweis des Satzes</u>: (a) u. (c) klar.

(b) O.B.d.A: die ersten zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathrm{I}: &\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \mathrm{II}: &\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \end{aligned}$$

$c\,\mathrm{I}+\mathrm{II}$ $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \mathrm{I}': &\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \mathrm{II}': &\quad (ca_{11}+a_{21})x_1 + (ca_{12}+a_{22})x_2 + \cdots + (ca_{1n}+a_{2n})x_n = cb_1+b_2 \end{aligned}$$

$s \in K^n$ mit $\sum_{j=1}^n a_{1j}s_j = b_1$, $\sum_{j=1}^n a_{2j}s_j = b_2$

$\Rightarrow$ s ist Lösung von I' und

$$\sum_{j=1}^n (ca_{1j}+a_{2j})s_j = c\Big(\sum_{j=1}^n a_{1j}s_j\Big) + \sum_{j=1}^n a_{2j}s_j = cb_1+b_2$$

$\Rightarrow$ s ist Lösung von II'.

I, II entsteht aus I', II' durch Addition des $(-c)$-fachen von I' auf II'

$\Rightarrow$ Beh. $\blacksquare$

Lineare Gleichungssysteme (Forts.)

Beispiel

Es sei $K = \mathbb{R}$ und $m = n = 2$. Nehme x, y statt x_1, x_2.

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{I}: & x + y = 2 \\ \mathrm{II}: & x - y = 0 \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{ll} \mathrm{I}+\mathrm{II}: & 2x = 2 \\ \mathrm{II}: & x = y \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \end{array}.$$

Lineare Gleichungssysteme (Forts.)

Das LGS

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & & & + & 3x_4 & = & 5 \\ & & & & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \end{array}$$

hat die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 5}.$$

Die Äquivalenzumformungen des LGS können an dieser Matrix durchgeführt werden.

$$
\begin{array}{c}
\mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV}
\end{array}
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 2 & 3 & 5 \\
2 & 4 & 0 & 3 & 5 \\
0 & 0 & 3 & 2 & 3
\end{pmatrix}
\xrightarrow[\mathrm{III} - 2\cdot \mathrm{I}]{\mathrm{II} - \mathrm{I}}
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\
0 & 0 & 3 & 2 & 3
\end{pmatrix}
\xrightarrow[(\mathrm{III},\, \mathrm{IV})]{\frac{1}{2}\cdot \mathrm{II}}
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 3 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 3
\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{\mathrm{III} - 3\cdot \mathrm{II}}
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 3
\end{pmatrix}
\xrightarrow[\mathrm{IV} - \mathrm{III}]{\mathrm{III}\cdot(-1)}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$\mathrm{III}: \quad x_4 = 3$

$\mathrm{II}: \quad x_3 + 3 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -1$

$\mathrm{I}: \quad x_1 + 2x_2 + 3 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 2x_2 = -2$

$\Rightarrow \quad x_1 = -2 - 2x_2$

$$
\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -2-2t \\ t \\ -1 \\ +3 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{Q} \right\}
$$

Elementare Transformationen

Definition

Eine *elementare Zeilentransformation* ist eine Abbildung

$$t : K^{m\times n} \to K^{m\times n}, \quad A \mapsto t(A),$$

von einem der drei Typen τ, α, μ, wobei $1 \leq i, j \leq m$ und $c \in K$:

- τ_{ij}: vertauscht die i-te und j-te Zeile von A.
- $\alpha_{ij}(c), i \neq j$: addiert das c-fache der j-ten Zeile zur i-ten Zeile von A.
- $\mu_i(c)$ mit $c \neq 0$: multipliziert die i-te Zeile von A mit c.

Schreibweise

$A \rightsquigarrow B$, falls $B \in K^{m\times n}$ aus $A \in K^{m\times n}$ durch eine endliche Folge elementarer Zeilentransformationen hervorgeht.

Elementare Transformationen (Forts.)

Bemerkung

Es seien $(A, b), (A', b') \in K^{m\times(n+1)}$ erweiterte Koeffizientenmatrizen von LGS.

Ist $(A, b) \rightsquigarrow (A', b')$, dann ist

$$\mathbb{L}(A, b) = \mathbb{L}(A', b').$$