Analysis für Informatiker Panikzettel

Philipp Schröer

5. April 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Dieser Panikzettel ist über die Vorlesung Analysis für Informatiker bei Prof. Stamm im Wintersemester 2017/18.

Dieser Panikzettel ist Open Source. Wir freuen uns über Anmerkungen und Verbesserungsvorschläge auf `https://git.rwth-aachen.de/philipp.schroer/panikzettel`.

2 Grundlagen

Wir werden hier *nicht* die mathematischen Grundlagen der Vorlesung wiederholen. Induktion, Rekursion und Zahlen sollten schon verstanden sein. Die wichtigsten Ergebnisse wollen wir aber trotzdem hier sammeln.

2.1 Formeln und Ungleichungen

Das allgemeine Nullstellenproblem lässt sich über Formeln lösen:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x^2 + px + q = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \end{aligned}$$

Für den *Binomialkoeffizienten* $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \in \mathbb{Q}$ gilt mit $k, n \in \mathbb{N}_0$ und $k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}, \text{ falls } k > 0$$

$$\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$$

Die *Binomische Formel* für $n \in \mathbb{N}_0$ und $a, b \in \mathbb{C}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Die *Geometrische Summenformel* ist praktisch. Mit $q \neq 1$ und $a \neq b$:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$$

Die *Bernoullische Ungleichung* für $a \geq -1$:

$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

2.2 Unendlichkeit

Eine Menge M ist genau dann *abzählbar*, wenn eine injektive Abbildung $g : M \to \mathbb{N}$ existiert.

Wir können eine bijektive Abbildung $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bauen, sodass auch $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist. Also ist eine abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen auch abzählbar. $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

Dagegen ist $\text{Pot}(\mathbb{N})$ überabzählbar, genau wie $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, die Menge der Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\{0, 1\}$.

3 Folgen

Eine *reelle Folge* ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Wir schreiben auch statt $\mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto a_n$ kurz $(a_n)_{n \geq 1}$.

Eine Folge ist *monoton wachsend*, wenn gilt $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. *Monoton fallend* analog $a_{n+1} \leq a_n$. *Streng monoton* mit jeweils $>$ bzw. $<$.

Eine Folge ist *nach oben beschränkt*, wenn es ein $b \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $a_n \leq b$ für alle $n \in \mathbb{N}$. *Nach unten beschränkt* analog. Monoton wachsende Folgen sind nach oben, monoton fallende nach unten beschränkt. Eine Folge ist *beschränkt*, wenn es ein $b \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $|a_n| \leq b$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Eine Folge heißt *konvergent*, wenn ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 (abhängig von ε) existiert mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n_0$$

Dann ist a der *Grenzwert* der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$. Eine *Nullfolge* hat Grenzwert 0. Eine nicht konvergente Folge ist *divergent*.

Eine (reelle) Folge hat höchstens einen Grenzwert. Eine konvergente Folge ist (durch den Grenzwert) beschränkt.

Die *Limitenregeln* lassen Grenzwerte von konvergenten (!) Folgen zusammenrechnen.
Seien $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}$ konvergente Folgen mit Grenzwerten a respektive b:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \alpha \cdot a_n = \alpha \cdot a \\
&\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b \\
&\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b \\
&\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \qquad \text{falls } b_n \neq 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert genau dann, wenn $(a_n - a)_{n\geq 1}$ eine Nullfolge ist.

Das *Sandwich-Lemma*: Für ein $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\begin{matrix} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b, \\ a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall\, n \geq n_0 \end{matrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

Nützliche Aussagen zur Wurzelfunktion:

- Für $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ ist $(q^n)_{n\geq 1}$ eine Nullfolge.
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
- Für $q \in \mathbb{R}$ mit $q > 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$.

Der *Satz von L'Hospital* erlaubt die Bestimmung von Grenzwerten über Ableitungen. Wenn f und g stetig differenzierbar sind und $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ oder $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$ gilt, dann folgt:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Eine *Teilfolge* $(a'_k)_{k\geq 1}$ zur Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ wird mit einer streng monoton wachsenden Indexfolge $(n_k)_{k\geq 1}$ gebaut. Jede Teilfolge konvergiert gegen den Grenzwert der ursprünglichen Folge.

Eine Folge heißt *Cauchy-Folge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 (abhängig von ε) gibt, so dass

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \qquad \text{für alle } m, n \geq n_0$$

Eine Folge ist genau dann eine Cauchy-Folge, wenn sie konvergiert.

Eine Folge ist *bestimmt divergent*, wenn es zu jedem $b \in \mathbb{R}, b > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a_n \geq b$ für alle $n \geq n_0$. Man schreibt $\lim_{n\to\infty} = \infty$. Analog für $-\infty$ mit $\leq$.

4 Reihen

4.1 Konvergenz

Eine *(unendliche) Reihe* besteht aus zwei Folgen: Der "inneren Folge" $(a_k)_{k\geq 1}$ und der Partialsummenfolge $(s_n)_{n\geq 1}$ sodass:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Wir schreiben auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ für die Reihe und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Wir können konvergente Reihen zusammen und auseinander ziehen. Mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1} (\alpha a_k + \beta b_k)$$

Das *Cauchy-Kriterium für Reihen*: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$|\sum_{k=m}^{n} a_k| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq m \geq n_0$$

Wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, muss auch $(a_k)_{k\geq 1}$ eine Nullfolge sein.

Eine Reihe konvergiert genau dann, wenn die Folge der Partialsummen nach oben beschränkt ist.

Das *Leibniz-Kriterium* hilft bei alternierenden Folgen. Sei $(a_k)_{k\geq 1}$ eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ und es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$|\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k a_k| \leq a_n$$

4.2 Absolute Konvergenz

Stärker als normale Konvergenz ist die *absolute Konvergenz*: Hier muss für $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sogar $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergieren.

- Eine Reihe, die konvergiert, aber nicht absolut konvergiert, heißt *bedingt konvergent*.
- Wenn eine Reihe absolut konvergent ist, ist sie auch konvergent.

Zum Zeigen der absoluten Konvergenz hilft das *Majorantenkriterium*. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergent. Wenn $|a_k| \leq c_k$ für alle $k \geq n_0$ gilt, ist $\sum_{k=1}^{\infty}$ absolut konvergent. Das Gegenstück, das *Minorantenkriterium*, zeigt Divergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ divergent ist.

Alternativ das *Quotientenkriterium*: Wenn $a_k \neq 0$ und $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| < 1$ für alle $k \geq n_0$ gilt, dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent. Es geht auch: $\lim_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| < 1$. Wenn > 1, so folgt Divergenz. Achtung: $= 1$ sagt nichts aus!

4.3 Die Exponentialfunktion

Man kann die Eulersche Zahl e ($e = e^1 = exp(1)$) durch eine Reihe darstellen. Für $x \in \mathbb{N}$:

$$e^x = \exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$\exp(x)$ für $x \in \mathbb{Q}$ ist über die üblichen Potenzgesetze berechenbar: $\exp(\frac{p}{q}) = \sqrt[q]{(}\exp(p))$.

4.4 Grenzwerttabelle

Geometrische Reihe	$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$	für $\lvert q \rvert < 1$
Harmonische Reihe	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$	
"Huh?"	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$	

5 Komplexe Zahlen

5.1 Definition und Rechenregeln

Die *komplexen Zahlen* sind definiert als $\mathbb{C} = \{ z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \}$.
Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definieren wir:

$$\mathrm{Re}(z) := x \qquad \mathrm{Im}(z) := y \qquad \bar{z} := x - iy$$

Rechenregeln:

$$\begin{aligned} i^2 &= -1 \\ (x + iy) + (u + iv) &= (x + u) + i(y + v) \\ (x + iy) \cdot (u + iv) &= (xu - yv) + i(xv + yu) \end{aligned}$$

Inverse lassen sich direkt bestimmen:

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Für die komplexe Konjugation gibt es auch einige weitere Rechenregeln.

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \qquad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

$$\overline{z + v} = \bar{z} + \overline{w} \qquad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \overline{w} \qquad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{w}}$$

$$z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$$

Der *Betrag* einer komplexen Zahl: $|z| := \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Für den Betrag gelten die üblichen Dreiecksungleichungen.

Nach dem *Fundamentalsatz der Algebra* hat jedes Polynom in $\mathbb{C}$ auch eine Lösung in $\mathbb{C}$.

5.2 Komplexe Folgen und Reihen

Die Definitionen von Abschnitt 2 und Abschnitt 3 lassen sich einfach mithilfe des Betrages für komplexe Zahlen übertragen. Einige Rechenregeln kann man auch übernehmen.

Wird die Definition der Exponentialfunktion auf $\mathbb{C}$ erweitert, so wird es interessant.

$$\begin{aligned} \exp(z+w) &= \exp(z) \cdot \exp(w) \\ \exp(\overline{z}) &= \overline{\exp(z)} \\ |\exp(ix)| &= 1 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\cos(x) := \operatorname{Re}(\exp(ix)) \qquad\qquad \sin(x) := \operatorname{Im}(\exp(ix))$$

Per Definition gilt die *Euler-Identität*:

$$\exp(ix) = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$$

Einige Rechenregeln für Sinus und Cosinus, mit $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y) \\ \sin(x+y) &= \cos(x) \cdot \sin(y) - \sin(x) \cdot \cos(y) \\ \cos(2x) &= \cos(x)^2 - \sin(x)^2 \\ \sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) \\ 1 &= \cos(x)^2 + \sin(x)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \cos(x - \frac{1}{2}\pi) \\ \sin(x+\pi) = -\sin(x), &\quad \sin(x+2\pi) = \sin(x) \\ \sin(2k \cdot \pi) = 0, &\quad \cos((2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}) = 0 \\ \tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{aligned}$$

Zur Berechnung von Sinus und Cosinus:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1

6 Reelle Funktionen

6.1 Umgebungen

Eine ε-*Umgebung* um $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} U_\varepsilon(x_0) &:= \{\, x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon \,\} \\ &= (x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon) \end{aligned}$$

Ein *innerer Punkt* $x_0 \in M$ von $M \subset \mathbb{R}$ ist ein x_0 so, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $U_\varepsilon(x_0) \subset M$. Außerdem sei das *Innere von M*, $\mathring{M}$, definiert als die Menge der inneren Punkte von M.

M ist *offen*, wenn alle $x \in M$ auch innere Punkte sind ($M = \mathring{M}$). M ist *abgeschlossen*, wenn $\mathbb{R} \setminus M$ offen ist.

6.2 Funktionen

Der *Graph* einer Funktion $f : A \to B$ ist die Menge $G_f = \{\, (x, f(x)) \mid x \in A \,\}$.

Wir definieren außerdem Addition und Multiplikation für Funktionen.[1] Sei $D \subset \mathbb{R}$ nicht leer und $f, g : D \to \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f+g, &\quad x \to f(x) + g(x) \\ \alpha f, &\quad x \to \alpha \cdot (f(x)) \\ f \cdot g, &\quad x \to f(x) \cdot g(x) \\ \frac{f}{g}, &\quad x \to \frac{f(x)}{g(x)} \qquad\qquad \text{falls } g(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in D \end{aligned}$$

Monotonie lässt sich auf Funktionen übertragen. $f : D \to E$ mit $D, E \subset \mathbb{R}$ ist *monoton wachsend*, wenn für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ immer $f(x) \leq f(y)$ gilt. *Monoton fallend* analog mit $\geq$. *Streng monoton wachsend* bzw. *fallend* analog mit $<$ bzw. $>$.

Wenn f streng monoton wachsend/fallend ist, dann ist f^{-1} injektiv und ebenfalls streng monoton wachsend/fallend.

f ist *nach oben/unten beschränkt*, wenn $f(D)$ nach oben/unten beschränkt ist.

6.3 Polynome und rationale Funktionen

Eine Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *(reelles) Polynom*, wenn es $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Der *Grad* n von f erfüllt $a_i = 0\ \forall\, i > n$.

[1] Mehr zu Funktionen als Vektorräume im Panikzettel Lineare Algebra.

Ein Polynom f vom Grad n hat höchstens n Nullstellen. Beweisidee: Für jede Nullstelle α ist $(x-\alpha)$ ein Teiler von f. Es kann nicht mehr als n solcher Teiler geben.

Haben wir mindestens $n+1$ verschiedene Stellen $x_0, \dots, x_n$, dann ist das ein Polynom vom Grad n dadurch eindeutig bestimmt. Anders gesagt: Haben zwei Polynome vom Grad $\le n$ mindestens $n+1$ gleiche Werte, so sind die Polynome gleich.

Zwei Wachstumssätze für ein Polynom p mit Koeffizienten a_i:

- Es gibt ein $r \in \mathbb{R}_+$, so dass
$$\frac{1}{2} \cdot a_n \cdot |x|^n \le |p(x)| \le 2 \cdot a_n \cdot |x|^n \qquad \text{für alle } |x| \ge r$$
- Sei $\rho > 0$. Dann gibt es ein $M > 0$ so dass
$$|p(x)| \le M \cdot |x|^n \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, |x| \ge \rho$$

7 Funktionen: Grenzwerte und Stetigkeit

7.1 Grenzwerte

Sei $D \subset \mathbb{R}$ nicht leer. Dann ist $x_0 \in \mathbb{R}$ ein *Häufungspunkt von D*, wenn $D \cap (U_\rho(x_0) \setminus \{ x_0 \})$ für jedes $\rho > 0$ nicht leer ist. Ist $x_0 \in D$ aber kein Häufungspunkt von D, dann ist x_0 ein *isolierter Punkt von D*.

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und x_0 Häufungspunkt von D. Dann ist $L \in \mathbb{R}$ der *Grenzwert von f für $x \to x_0$*, wenn
$$|f(x) - L| < \varepsilon \qquad \text{für alle } x \in D \text{ und } |x - x_0| \in (0, \delta)$$
mit einem von ε abhängigem $\delta > 0$. Man schreibt $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

Grenzwerte von Funktionen kann man auch über Folgen beschreiben. Sei L der Grenzwert von f für $x \to x_0$. Äquivalent gilt: Für jede Folge $(x_n)_{n \ge 1}$ in $D \setminus \{ x_0 \}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

Damit erhalten wir auch für die Grenzwerte $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_f$ und analog für L_g:
$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \quad (\alpha f)(x) &= \alpha L_f \\
\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) &= L_f + L_g \\
\lim_{x \to x_0} \ (f \cdot g)(x) &= L_f \cdot L_g \\
\lim_{x \to x_0} \quad (\frac{f}{g})(x) &= \frac{L_f}{L_g} \qquad \text{falls } L_g \ne 0
\end{aligned}$$

Konvergenz kann es auch nur einseitig geben. Sei x_0 Häufungspunkt von $D \cap (x_0, \infty)$ und $g = f\big|_{D \cap (x_0, \infty)}$. Wenn $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$, dann ist f *rechtsseitig konvergent gegen L für $x \to x_0$*, geschrieben $\lim_{x \downarrow x_0} f(x) = L$. Analog *linksseitig konvergent* als $\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = L$ mit $D \cap (-\infty, x_0)$.

Divergenz geht wieder ähnlich wie bei den Folgen. f ist *bestimmt divergent gegen ∞*, wenn es zu jedem $M > 0$ ein $R \in D$ gibt, so dass
$$f(x) > M \qquad \text{für alle } x > R$$

Analog für $-\infty$. Auch analog für rechtsseitige Grenzwerte mit $x \in D \cap (x_0, a)$ und $a \in D \cap (x_0, \infty)$, linksseitige Grenzwerte mit $x \in D \cap (b, x_0)$ und $b \in D \cap (-\infty, x_0)$.

7.2 Stetige Funktionen

Stetige Funktionen sind solche, die man “ohne Sprünge in einer Linie” zeichnen kann.

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$.

- Ist x_0 Häufungspunkt von D und $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, dann heißt f *stetig in* x_0.
- Ist x_0 kein Häufungspunkt von D, so ist f auch stetig in x_0.
- f ist stetig auf $E \subset D$, wenn f auf jedem $x_0 \in E$ stetig ist.

Dass f stetig in x_0 ist, ist äquivalent dazu, dass für jede Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ in D mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Seien $f : D_f \to \mathbb{R}$ und $g : D_g \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D_f \cap D_g$. Dann sind auch stetig: αf, $f + g$, $f \cdot g$ und f/g (wenn $g(x_0) \neq 0$).

Sei $f : D_f \to \mathbb{R}$ stetig in x_0 und $g : D_g \to \mathbb{R}$ stetig in $f(x_0)$. Dann ist $g \circ f$ stetig in x_0.

Polynomfunktionen sind stetig auf $\mathbb{R}$. Rationale Funktionen sind stetig auf ihrem maximalen Definitionsbereich. exp, sin, cos sind stetig auf $\mathbb{R}$.

Wenn f stetig in $x_0 \in D$ ist, dann gibt es eine Umgebung U von x_0, so dass $f|_{D \cap U}$ beschränkt ist.

Wenn f stetig und $f(x_0) > 0$ ($x_0 \in D$) ist, dann existiert eine Umgebung U und ein $\rho > 0$, so dass $f(x) > \rho$ für alle $x \in D \cap U$.

Sei f streng monton und stetig. Dann ist auch die Umkehrfunktion f^{-1} stetig.

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und $[a, b] \subset D$. Dann hat f auf $[a, b]$ ein Minimum und ein Maximum.

Zwischenwertsatz. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und $[a, b] \subset D$ und $a < b$.

- Gilt $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ (oder andersrum), dann existiert ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = 0$.
- Sei $m = \min\{\, f(x) \mid x \in [a, b] \,\}$ und $M = \max\{\, f(x) \mid x \in [a, b] \,\}$. Dann gilt $f([a, b]) = [m, M]$.

Mit dem Zwischenwertsatz kann man zeigen, dass jedes reelle Polynom ungeraden Grades eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ hat.

Eine Verfeinerung der Stetigkeit ist die *Lipschitz-Stetigkeit*. Diese besteht, wenn es eine Konstante $L \in \mathbb{R}$ mit $L \geq 0$ gibt, sodass für alle $x, y \in D$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

8 Differentialrechnung

8.1 Ableitungen

Zunächst der *Differenzenquotient* für f, x_0 und $h \neq 0$:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und x_0 innerer Punkt von D. f ist in x_0 *differenzierbar*, wenn der folgende Grenzwert existiert:

$$f'(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Ebenfalls gibt es einseitige Differenzierbarkeit mit $\lim_{h\uparrow 0}(f_-(x_0))$ und $\lim_{h\downarrow 0}(f_+(x_0))$. f ist *differenzierbar auf* D, wenn f in jedem $x_0 \in D$ differenzierbar ist.

Wenn f bei x_0 differenzierbar ist, dann ist f auch stetig in x_0.

f', f'' und so weiter heißen die *Ableitungen* einer entsprechend oft differenzierbaren Funktion f.

Rechenregeln für Differentiation. Mit f, g differenzierbar auf x_0:

$$\begin{aligned}
(\alpha f)'(x_0) &= \alpha f'(x_0) && \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \\
(f+g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0) \\
(f \cdot g)'(x_0) &= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \\
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} && \text{für } g(x_0) \neq 0 \\
(g \circ f)'(x_0) &= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)
\end{aligned}$$

Diese Regeln kann man leicht zeigen, indem man die Definition der Ableitung einsetzt und dann die Grenzwertregeln verwendet.

Für eine stetige, injektive und differenzierbare Funktion f gilt außerdem:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

8.2 Ableitungstabelle

D		$f : D \to \mathbb{R}$	$f' : D \to \mathbb{R}$
$\mathbb{R}$,	falls $n \in \mathbb{N}_0$		
$\mathbb{R} \setminus \{0\}$,	falls $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$	x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$(0, \infty)$,	falls $n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$		
$\mathbb{R}$		$\exp(x)$	$\exp(x)$
$(0, \infty)$		$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\mathbb{R}$		$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\mathbb{R}$		$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\mathbb{R}$		$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

8.3 Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Wenn f in x_0 ein relatives Extremum hat, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

Satz von Rolle. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $a < b$ und f auf (a, b) differenzierbar mit $f(a) = f(b) = 0$. Dann existiert mindestens ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$.

Mittelwertsatz. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $a < b$ und f differenzierbar auf (a, b). Dann existiert mindestens ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Anders formuliert: Die Steigung der Tangente in x_0 ist gleich der Steigung der Sekante durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$.

Daraus folgen einige Sätze. Seien I ein Intervall mit $\mathring{I} \neq \emptyset$ und $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ beide stetig und auf $\mathring{I}$ differenzierbar.

$$\begin{aligned}
\forall\, x \in \mathring{I} : f'(x) = 0 &\iff \exists\, c \in \mathbb{R} : (f(x) = c \;\; \forall\, x \in I) \\
\forall\, x \in \mathring{I} : f'(x) = g'(x) &\iff \exists\, c \in \mathbb{R} : (f(x) = g(x) + c \;\; \forall\, x \in I) \\
f \text{ ist monoton wachsend} &\iff f'(x) \geq 0 \;\; \forall\, x \in \mathring{I} \\
f \text{ ist monoton fallend} &\iff f'(x) \leq 0 \;\; \forall\, x \in \mathring{I} \\
f \text{ ist streng monoton wachsend} &\impliedby f'(x) > 0 \;\; \forall\, x \in \mathring{I} \\
f \text{ ist streng monoton fallend} &\impliedby f'(x) < 0 \;\; \forall\, x \in \mathring{I}
\end{aligned}$$

Endlich können wir auch Extrema berechnen.

Sei $\delta > 0$ so, dass f in $U_\delta(x_0) \setminus \{\, \delta \,\}$ differenzierbar ist.

$\forall\, x \in U_\delta(x_0)$ mit $x > x_0$		$\forall\, x \in U_\delta(x_0)$ mit $x < x_0$	$\Longrightarrow$
$f'(x) < 0$	$\wedge$	$f'(x) > 0$	x_0 ist strikte lokale Minimalstelle
$f'(x) > 0$	$\wedge$	$f'(x) < 0$	x_0 ist strikte lokale Maximalstelle

Gilt entweder $f'(x) > 0$ oder $f'(x) < 0$ für alle $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{\, x_0 \,\}$,
dann ist x_0 keine lokale Extremstelle.

Sei f zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung von x_0 und x_0 innerer Punkt von D.

$$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ ist strikte lokale Maximalstelle}$$
$$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \text{ ist strikte lokale Minimalstelle}$$

9 Stammfunktionen und Integrale

9.1 Stammfunktionen

Wir definieren Stammfunktionen als die Umkehrung der Ableitung.

$F : D \to \mathbb{R}$ ist eine *Stammfunktion* von f, wenn F auf D differenzierbar ist mit $F' = f$.

Für zwei Stammfunktionen F, G von f existiert immer ein $c \in \mathbb{R}$, sodass $F = G + c$.

Für stetiges $f : I \to \mathbb{R}$ mit Stammfunktion F schreiben wir auch $\int_a^b f(x)\,dx := F(b) - F(a) =: F|_a^b$.

Wir erhalten Rechenregeln für Integrale.

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(t) \cdot g'(t)\,dt = (f(t) \cdot g(t))|_a^b - \int_a^b f'(t) \cdot g(t)\,dt \qquad \textit{(partielle Integration)}$$

$$\int_a^b f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\,dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,dx \qquad \textit{(Substitutionsregel)}$$

Für die letzten zwei Regeln benötigen wir stetig differenzierbare f, g, ϕ. Partielle Integration entspricht der Produktregel der Differentiation und die Substitutionsregel der Kettenregel.

Das Schreibweise *unbestimmtes Integral* $\int f(x)\,dx = F(x)$ bedeutet nicht Gleichheit, sondern nur, dass $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)|_a^b$ gilt.

9.2 Zerlegungssummen

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt für stetiges f:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(a) - F(b) = f(\xi) \cdot (b - a) \qquad \text{für ein } \xi \in (a, b)$$

Das Integral entspricht also dem Flächeninhalt zwischen Funktion und x-Achse ihres Graphen.

Über diese geometrische Interpretation können wir auch ein Integral direkt berechnen. Dazu wird die Fläche unter der Funktion in viele kleine Rechtecke eingeteilt.

Die Breiten der Rechtecke sind durch eine *Zerlegung* Z eines Intervalls gegeben. $[a, b]$ wird durch viele Punkte x_i getrennt, wobei $x_0 = a$ und $x_n = b$.

Die Fläche der kleinen Rechtecke wird nun mit obiger Formel bestimmt, wobei für ξ hier zwei Approximationen verfügbar sind.

$$m_i = \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \qquad\qquad M_i = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$U(f, Z) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \qquad\qquad O(f, Z) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$U(f) = \sup_{Z \in \mathcal{Z}} U(f, Z) \qquad\qquad U(f) = \inf_{Z \in \mathcal{Z}} O(f, Z)$$

Untersumme *Obersumme*

Jetzt sind $U(f)$ und $O(f)$ also die besten Annäherungen an die jeweiligen Summen. Genau wenn nun $U(f) = O(f)$ gilt, nennen wir f *integrierbar*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = U(f) = O(f)$$

Konvention schreibt für $a < b$ außerdem vor:

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

9.3 Uneigentliche Integrale

Es gibt zwei Arten von uneigentlichen Integralen: Solche mit unbeschränkten Integrationsintervallen und solche mit unbeschränkten Integranden.

Eine stetige Funktion f ist *uneigentlich integrierbar*, wenn $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ existiert. Wir schreiben $\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$. Analoge Definition für untere Schranke auf $-\infty$, sowie oben und unten.

Ist f auf einer Grenze nicht definiert, aber existiert der Grenzwert, so können wir auch ein uneigentliches Integral aufstellen. Für $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ und falls $\lim_{\alpha\downarrow a} \int_\alpha^b f(x)\,dx$ existiert, ist f über $(a, b]$ *uneigentlich integrierbar* und man schreibt auch einfach $\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\alpha\downarrow a} \int_\alpha^b f(x)\,dx$. Analoge Definition für oben unbeschränkt.

Also aufpassen: Bei $\int_a^b f(x)\,dx$ prüfen, ob der Integrand an den Grenzen unbeschränkt ist.

9.4 Gewöhnliche Differentialgleichungen

9.4.1 Separierbare Gewöhnliche Differentialgleichungen

Seien $F : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ stetig.

Eine *separierbare gewöhnliche Differentialgleichung* hat die Form $y' = f(x) \cdot g(x)$.

ϕ ist eine *Lösung* der Differentialgleichung, wenn gilt:

$$\phi'(x) = f(x) \cdot g(\phi(x)) \qquad \forall\, x \in I' \subset I$$

Ein *Anfangswertproblem* fordert zusätzlich $y_0 := y(x_0) = \phi(x_0)$ für ein $x_0 \in I'$.

Lösung über Umkehrfunktion Wenn $g(y_0) \neq 0$ gilt, kann man über zwei Integrationen und einmal die Bestimmung der Umkehrfunktion eine Lösung bestimmen.

- $F : I \to \mathbb{R}$ Stammfunktion von f mit $F(x_0) = 0$,
- $H : J' \to \mathbb{R}$ Stammfunktion von $\frac{1}{g}$ auf $J' \subset J$,
  mit $y_0 \in J'$ und $g(y) \neq 0 \ \forall y \in J'$ und $H(y_0) = 0$.

Dann gibt es ein $I' \subset I$ mit eindeutiger Lösung: $\phi(x) = H^{-1}(F(x)) \quad \forall\ x \in I'$.

9.4.2 Lineare Differentialgleichungen

Seien $I \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ und $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig.

Homogene Gleichung

$$y' = a(x) \cdot y, \qquad y(x_0) = y_0$$

Lösung:

$$\phi(x) = y_0 \cdot \exp(\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt)$$

Inhomogene Gleichung

$$y' = a(x) \cdot y + b(x), \qquad y(x_0) = y_0$$

Lösung:

$$\psi(x) = \phi(x) \cdot u(x)$$

$$\phi(x) = \exp(\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt)$$

$$u(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{\phi(t)}\, dt$$

10 Funktionen mehrerer Veränderlicher

Einigen Formalismus für Matrizen haben wir schon im Panikzettel Lineare Algebra notiert.

Für 2×2-Matrizen gilt:

- $\det A := a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.
- Genau wenn $\det A \neq 0$ ist A invertierbar und

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

10.1 Kurven

Eine *Kurve* ist ein Funktion $\phi : I \to \mathbb{R}^n$ mit $\phi_1, \dots, \phi_n : I \to \mathbb{R}$ für die Komponenten.

Eine Kurve ist *stetig/differenzierbar/stetig differenzierbar*, wenn alle ϕ_i diese Eigenschaft haben.

Die *Ableitung* der Kurve ϕ ist

$$\phi' : I \to \mathbb{R}^n, t \mapsto \begin{pmatrix} \phi_1'(t) \\ \vdots \\ \phi_n'(t) \end{pmatrix}$$

Das Bild $\phi(I) = \{\, \phi(t) \mid t \in I \,\}$ heißt *Spur* von ϕ.

10.2 Längenmessung

Als Verallgemeinerung des Absolutbetrags die *Norm*:

$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

Für die Norm gilt wie für den Absolutbetrag:

- $\|x\| \geq 0$.
- $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
- $\|c \cdot x\| = |c| \cdot \|x\|$.
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(Dreiecksungleichung)*.

Die *offene Kugel* für ein $a \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$:

$$K_r(a) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r \}$$

Ein $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Umgebung von a*, wenn es ein $r > 0$ gibt, sodass $K_r(a) \subset U$.

$a \in M$ heißt *innerer Punkt von M*, wenn es eine Umgebung U von a gibt, sodass $U \subset M$. M heißt *offen*, wenn jeder Punkt von M ein innerer Punkt ist.

10.3 Stetigkeit

Eine Kurve f ist *stetig in a* für ein $a \in M$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.

10.4 Differentialrechnung

10.4.1 Partielle Differenzierbarkeit

Die *Richtungsableitung* ist

$$D_v\, f(a) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\, (f(a + tv) - f(a))$$

in Richtung $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{ 0 \}$ von f im Punkt a.

Die *partielle Ableitung* einer Funktion in einem Punkt ist einfach die Richtungsableitung in Richtung e_i, wobei e_i ein Einheitsvektor ist. Wir schreiben auch $D_k\, f(a) := \frac{\partial f}{\partial x_k} := D_{e_k}\, f(a)$.

Die *Funktionalmatrix/Jacobi-Matrix/Differential* von F an der Stelle x, sowie der *Gradient*:

$$D\, f(x) := \begin{pmatrix} D_1\, f(x) & \ldots & D_n\, f(x) \end{pmatrix} \qquad \nabla f(a) := D\, f(a)^T$$

Damit können wir eine Richtungsableitung auch folgendermaßen berechnen:

$$D_v\, f(a) = D\, f(a) \cdot v$$

Begriffe *partiell differenzierbar* und *stetig partiell differenzierbar* analog zu Begriffen in vorherigen Abschnitten.

10.4.2 Totale Differenzierbarkeit

f heißt *total differenzierbar* in $a \in U$ (U offen), wenn man f wie folgt darstellen kann:

$$f(x) = f(a) + T \cdot (x - a) + \|x - a\| \cdot \phi(x)$$

Mit einer Matrix $T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und einer stetigen Funktion $\phi : U \to \mathbb{R}^m$.

Äquivalent: Es gibt ein $T \in \mathbb{R}^{m \times n}$, sodass

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{\|x - a\|}(f(x) - f(a) - T \cdot (x - a)) = 0$$

Ist f total differenzierbar in a, dann ist f auch partiell differenzierbar in a. Außerdem ist T eindeutig bestimmt durch:

$$T_{i,j} = ((D\ f)(a))_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$$

f ist *total differenzierbar*, wenn f in allen Punkten $a \in U$ total differenzierbar ist.

Die Kettenregel:

$$\begin{aligned} & (D\ (g \circ f))(a) = (D\ g)(f(a)) \cdot (D\ f)(a) \\ \Leftrightarrow \qquad & \frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a) \end{aligned}$$

Wenn $f : U \to \mathbb{R}^n$ injektiv und stetig diffbar ist, $f(U)$ offen und f^{-1} diffbar, dann gilt:

$$D\ f^{-1}(y) = (D\ f(f^{-1}(y)))^{-1}$$

10.4.3 Der Satz von der Umkehrfunktion

Sei $f : M \to \mathbb{R}^n$ stetig diffbar und $a \in M$ so, dass $D\ f(a)$ invertierbar ist.
Dann existieren offene $U \subset M$ mit $a \in U$ und $V \subset f(M)$ mit $f(a) \in V$ so, dass

- $f|_U : U \to V$ bijektiv ist,
- Für alle $x \in U$ ist $D\ f(x)$ invertierbar,
- $(f|_U)^{-1}$ ist stetig diffbar,
- $(D\ f^{-1})(y) = (D\ f)(f^{-1}(y))^{-1}$.

10.4.4 Der Satz über implizite Funktionen

Dieser Satz erlaubt das Umstellen von komplizierteren Gleichungssystemen nach bestimmten Parametern, sodass das System als Nullstellenproblem in einer Umgebung der Lösung gelöst werden kann:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f\begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix} = 0$$

Hier wurde nach x aufgelöst, sodass y als $g(x)$ dargestellt wird.

Sei unsere Umgebung nun um c. Wir setzen $D_x\ f$ als die Jacobi-Matrix mit Spalten für Parameter, nach denen aufgelöst wird, sowie $D_y\ f$ analog für implizit dargestellte Parameter.

Voraussetzungen:

- $f : M \to R^{m+n}$ ist stetig diffbar,
- $f(c) = 0$,
- $(D_y\ f)(c)$ ist invertierbar (bspw. über $\det(D_y\ f)(c) \neq 0$ zeigen).

Dann sagt der *Satz über implizite Funktionen*: Es gibt ein $g : U \to V$ mit U Umgebung von a, V Umgebung von $f(a)$, gegeben durch die Ableitung:

$$(D\ g)(x) = -\left((D_y\ f)\begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix}\right)^{-1} \cdot \left((D_x\ f)\begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix}\right)$$

10.5 Gewöhnliche Differentialgleichungen: Existenz und Eindeutigkeit

Ein *System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen* mit $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$:

$$y' = f(x, y).$$

Eine Lösung ist eine Kurve $\phi : I \to \mathbb{R}^n$ mit:

- ϕ ist diffbar,
- $(x, \phi(x)) \in D \quad \forall\, x \in I$,
- $f(x, \phi(x)) \in D \quad \forall\, x \in I$.

Wir haben nur einen Satz zur Existenz von Lösungen:
Wenn f stetig ist und alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existieren und stetig sind, dann hat jedes Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung auf einem passenden Intervall.