26.11. 0

HA - Korrektur:

- Abgabe Mi
- Korrektur bis Mi folgende Woche
  - Falls nötig: Am Do Email Hirshman / Kraft

Problem (mindestens teilweise): IT

<u>Thema heute:</u>

> Allgemeines zu reellen Funktionen
(≈ 20 Begriffe, Fakten ...)

> Polynome

"Funktion": grundsätzlich
Abbildung $D \to \mathbb{R}$,
wobei $D \subset \mathbb{R}$

üblicherweise Zusatzforderungen an Funktion

üblicherweise Zusatzforderungen an D

Bsp ▷ $(0,1)$ ist Umgebung von $x_0 = \frac{1}{10}$

(Wähle $\varepsilon = \frac{1}{10}$)

▷ $\mathbb{Q}$ ist keine Umgebung von $x_0 = \frac{1}{10}$,
denn für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein
$y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $|y - \frac{1}{10}| < \varepsilon$

▷ $[\frac{1}{10}, 1]$ ist keine Umgebung von $x_0 = \frac{1}{10}$,
denn für jedes $\varepsilon > 0$ ist $(\frac{1}{10} - \varepsilon, \frac{1}{10}) \not\subset [\frac{1}{10}, 1]$

Bsp ▷ 0 kein innerer Punkt von $[0,1]$, da jede ε-Umg. von 0 negative Zahlen enthält, $[0,1]$ aber nicht

▷ $\frac{1}{10}$ ist innerer Punkt von $[0,1]$, da $U_{1/10}(1/10) \subset [0,1]$

▷ $\mathring{\overline{[0,1]}} = (0,1)$, denn:

0 ist kein innerer Punkt von $[0,1]$ (s.o.)

1 — " — (analog)

Ist $0 < x_0 < 1$, so setze $\varepsilon := \min\{x_0, 1-x_0\}$

Dann $x_0 - \varepsilon \geq 0$ und $x_0 + \varepsilon \leq 1$,

also $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \subset [0,1]$,

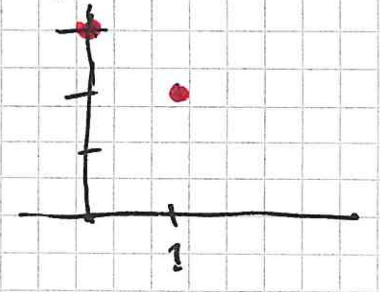
und x_0 innerer Punkt von $[0,1]$.

<u>Bsp</u> (ohne Beweis) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dann:

- $[a,b]$ ist abgeschlossen, nicht offen gem. (1.?)
- (a,b) ist offen, nicht abgeschlossen —"—
- $\emptyset$ ist offen („Default")
- $\mathbb{R}$ ist offen ($U_1(x_0) \subset \mathbb{R}$, alle $x_0 \in \mathbb{R}$)
- Also: $\emptyset = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ abgeschlossen, $\mathbb{R} = \mathbb{R} \setminus \emptyset$ ist abg.
- $\mathbb{Q}$ weder offen noch abgeschlossen
- $[a,b)$ und $(a,b]$ sind weder offen noch abg.

Bsp: ▷ $f: \{0, 1\} \to \mathbb{R}$, $f(0) = 3$, $f(1) = 2$

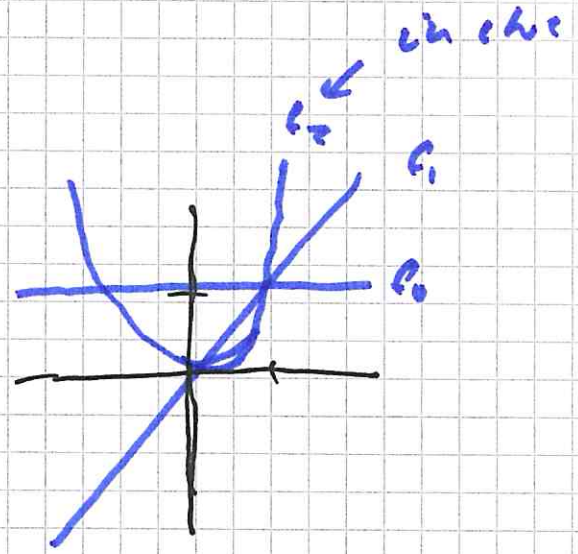
ist Funktion. Graph:



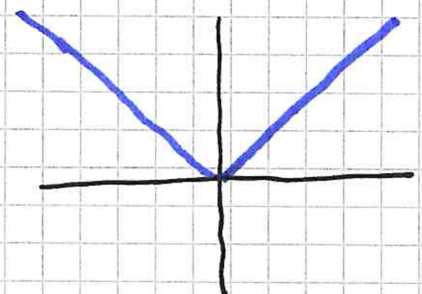
▷ Für $n \in \mathbb{N}_0$ definiere

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^n$$

Einige Graphen



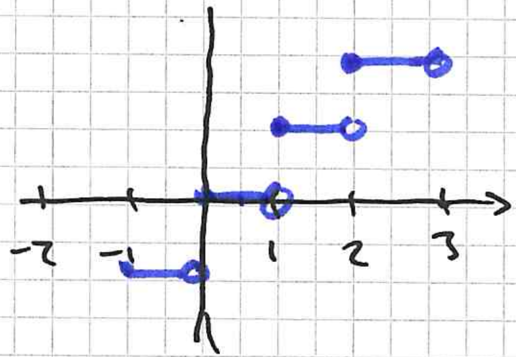
▷ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \to |x|$



Bsp.) Fkt:

▷ $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \to [x] := \overset{= \max}{\sup} \{ n \in \mathbb{Z} : n \leq x \}$

Gauß-Klammer ; Ganzteil



▷ Dirichlet-Funktion

$$D: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Graph kann nicht sinnvoll gezeichnet werden.

▷ Wichtig: exp, sin, cos, ...

Bsp ▷ ($f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^n$)

$$f_0 - f_3 + 3 \cdot f_5 : \quad x \mapsto f_0(x) - f_3(x) + 3 \cdot f_5(x)$$
$$= 1 - x^3 + 3 \cdot x^5$$

▷ $f_1 \cdot D : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$

$$x \mapsto \begin{cases} x \cdot 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ x \cdot 0, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Bsp ▷ $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$

ist weder monoton wachsend noch monoton fallend.

Denn $-1 < 0$ und $\underset{1}{f_2(-1)} > \underset{0}{f_2(0)}$

Also f_2 nicht monoton wachsend

Weiter $0 < 1$ und $f_2(0) < f_2(1)$

Also f_2 nicht monoton fallend.

Bsp., Forts.:

▷ $g: [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$
ist streng monoton wachsend,
d.h. aus $0 \le x_1 < x_2$ folgt $x_1^2 < x_2^2$ (→ Kap. II)

▷ $h: [1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$
ist streng monoton fallend (Kap. II).

Bew. (1.9) Betrachte den Fall, daß f streng monoton fallend.

- Injektivität: Seien $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 \neq x_2$.
  OE sei $x_1 < x_2$. Dann (s.m.f.):
  $f(x_1) > f(x_2)$, insbesondere $f(x_1) \neq f(x_2)$

- Umkehrfunktion: Sei $y_1, y_2 \in W$ mit $y_1 < y_2$,
  sowie $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$.
  Zeige ~~f(x_1)~~ $x_1 > x_2$

Wäre ~~ff~~ $x_1 \le x_2$, so $f(x_1) \ge f(x_2)$ (gilt)

$\Rightarrow \underline{y_1 \ge y_2}$ ↯

$\square$

Bsp $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$ für alle x

Jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ ist Maximal- und Minimalstelle

1 ist Maximum und Minimum.

Neues Thema: Polynome (einfachste halbwegs interessante Funktionenklasse)

Bsp: p_1: $x \mapsto x^2$

p_2: $x \mapsto x^7 - 3x^2 + 5$ ..

p_3: $x \mapsto 0$

Bew. (22)

Vorauss.: Es sei p; $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ (d.h. $a_n \neq 0$)

und $\beta \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle von p.

Dann gibt es ein Polynom q vom Grad $n-1$ derart, daß

$$p(x) = (x-\beta) \cdot q(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Begründung: Für $x \neq \beta$ gilt

$$(4) \quad \frac{x^k - \beta^k}{x-\beta} = \sum_{j=0}^{k-1} x^j \beta^{k-1-j} \quad ; \quad 1 \leq k \leq n.$$

(geom. Summenformel)

Also

$$p(x) = p(x) - p(\beta) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k - \sum_{k=0}^{n} a_k \beta^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k (x^k - \beta^k)$$

und

$$\frac{p(x)}{x-\beta} = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^k - \beta^k}{x-\beta} \overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k-1} x^j \beta^{k-1-j}$$

$$=: q(x)$$

Die höchste in q auftretende x-Potenz ist x^{n-1}, mit Koeffizient a_n.

Also: q hat Grad $n-1$.

Weiter: $p(x) = (x-\beta)\, q(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$
($x \neq \beta$: s.o.)
$x = \beta$: ✓ $0=0$

Eigentlicher Beweis mit Induktion nach n:

IA: $n=0$: p ist konstant und nicht Null, hat also keine Nullstelle

<u>$n \to n+1$</u>: Sei p Polynom vom Grad $n+1$.

Falls p keine Nullstelle hat: ✓

Falls p eine Nullstelle β hat, gilt

$p(x) = (x-\beta) \cdot q(x)$; Grad $q = n$

Nach IV hat q höchstens n Nullstellen,
also p höchstens $n+1$ Nullstellen.

$\square$

<u>Bew.</u> (7.3) ~~Annahme~~ Betrachte

$$p-q : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k)\, x^k .$$

Wäre die Aussage falsch, so gäbe es ein $\ell \in \{0,\dots,n\}$ mit $a_\ell - b_\ell \neq 0$. Damit $0 \neq p-q$ Polynom vom Grad $\leq n$; dieses hat höchstens n Nullstellen. Andererseits hat $p-q$ nach Konstruktion mindestens die $n+1$ Nullstellen $x_0, x_1, \dots, x_n$; Widerspruch.

Bw (24) a) Für $x \neq 0$ ist

$$p(x) = x^n \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \, x^{k-n} \right)$$

$$= x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots \frac{a_0}{x^n} \right)$$

Schätze $\left| \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n} \right|$ ab:

$$R := \left| \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n} \right| \underset{(\Delta\text{-Ungl.})}{\leq} \frac{|a_{n-1}|}{|x|} + \frac{|a_{n-2}|}{|x^2|} + \ldots + \frac{|a_0|}{|x|^n}$$

Für $|x| \geq 1$ gilt nun $\frac{1}{|x|^k} \leq \frac{1}{|x|}$, alle $k \geq 1$.

Also $R \leq \dfrac{|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \ldots + |a_0|}{|x|}$

Damit ex. $r \geq 1$, so daß

$$R \leq \frac{1}{2} a_n \text{ für alle } x \text{ mit } |x| \geq r$$

Es folgt für $|x| \geq r$:

$$\Rightarrow \quad |p(x)| = |x|^n \cdot \left| a_n + \cdots \right|$$

$$\underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |x|^n \left(a_n + R \right) \leq \frac{3}{2} a_n |x|^n$$

$$\Rightarrow \quad |p(x)| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\geq} |x|^n \cdot \left(a_n - R \right) \geq \frac{1}{2} a_n |x|^n$$

Bsp: Abschätzung für rationale Funktion:

$$R(x) = \frac{2x^{37} + 3x^{15} + 4}{x^{37} + x^{18} + 3x^2 + 5}$$

Mit (24): Es gibt ein $r > 0$, so daß

$$|R(x)| \leq 8 \text{ für alle } x \text{ mit } |x| \geq r$$

Abschätzung Zähler: Es gibt $r_1 > 0$, so daß

$$|2x^{37} + 3x^{15} + 4| \leq 2 \cdot 2\,|x|^{37} \quad \text{für } |x| \geq r_1.$$

Abschätzung Nenner: Es gibt $r_2 > 0$, so daß

$$|x^{37} + x^{18} + 3x^2 + 5| \geq \frac{1}{2}\,|x|^{37} \quad \text{für } |x| \geq r_2$$

Für $|x| \geq \max\{r_1, r_2\}$ also

$$|R(x)| \leq \frac{2 \cdot 2 \cdot |x|^{37}}{\frac{1}{2} \cdot |x|^{37}} = 8$$