LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. S. Walcher
Markus Hirshman, Dipl.-Gyml.
Niclas Kruff, Dr.

Aachen, den 14. Dezember 2018

Übung 10 zur Vorlesung Analysis für Informatiker, WS 2018/2019

Abgabe bis Mittwoch, 19.12.2018, 12 Uhr

Präsenzaufgaben

Die folgenden Aufgaben werden in der Globalübung am 13.12.2018 bearbeitet und besprochen.

Präsenzaufgabe 3

Es sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und es gebe ein $a \in \mathbb{R}$ mit $f(a) = a$. Weiterhin gelte $|f'(x)| < \frac{1}{2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir definieren die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$x_0 \in \mathbb{R} \text{ beliebig, } x_{n+1} = f(x_n).$$

Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \frac{1}{2} \cdot |x_n - x_{n-1}|$ gilt.

Lösung

Mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechung existiert für $x < y$ ein $\xi \in (x, y)$ mit

$$f(x) - f(y) = f'(\xi) \cdot (x - y).$$

Mit der Abschätzung $|f'(x)| < 1/2$ folgt somit:

$$|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2} \cdot |x - y|.$$

Damit lässt sich zeigen:

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| < 1/2 \cdot |x_n - x_{n-1}|.$$

Sei nun $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Per Induktion gilt dann für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|x_{n+1} - x_n| < \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot |x_1 - x_0|. \tag{1}$$

Der Induktionsanfang für $n = 1$ ist klar mit der bereits gezeigten Ungleichung. Für den Induktionsschluss gelte die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$, beliebig aber fest. Dann folgt:

$$\begin{aligned}|x_{n+2} - x_{n+1}| &= |f(x_{n+1}) - f(x_n)| < 1/2 \cdot |x_{n+1} - x_n| \overbrace{<}^{\text{I.V.}} 1/2 \cdot (1/2)^n \cdot |x_1 - x_0| \\ &= (1/2)^{n+1} \cdot |x_1 - x_0|.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir allgemeriner für alle $k, m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
|x_{m+k} - x_k| &= |x_{m+k} - x_{m+k-1} + x_{m+k-1} + \cdots + x_{k+1} - x_k| \\
&= \left| \sum_{j=0}^{m-1} x_{m+k-j} - x_{m+k-j-1} \right| \overbrace{\leqslant}^{(1)} |x_{m+k} - x_{m+k-1}| + \cdots + |x_{k+1} - x_k| \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} |x_{m+k-j} - x_{m+k-j-1}| \leqslant \left((1/2)^{m+k-1} + \cdots + (1/2)^k \right) \cdot |x_1 - x_0| \\
\overbrace{=}^{\text{Geom. Summenformel}} \quad &(1/2)^k \cdot \frac{1 - (1/2)^m}{1 - (1/2)} \cdot |x_1 - x_0| \overbrace{\leqslant}^{1/2<1} \frac{(1/2)^k}{1/2} \cdot |x_1 - x_0|.
\end{aligned}$$

Da $\frac{(1/2)^k}{1/2} = (1/2)^{k-1} \to 0$ gilt für $k \to \infty$, folgt, dass $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist und damit nach der Vorlesung auch konvergent ist. Somit existiert der Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} x_n =: b \in \mathbb{R}.$$

Für den Grenzwert gilt dann (Teilfolgenprinzip und Stetigkeit von f):

$$b = \lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} f(x_{n-1}) = f\left(\lim_{n \to \infty} x_{n-1} \right) = f(b).$$

Damit ist $b \in \mathbb{R}$ ein Fixpunkt von f. Angenommen es gelte $b \neq a$. Dann folgt:

$$|a - b| = |f(a) - f(b)| \leqslant 1/2 \cdot |a - b| < |a - b|$$

was ein Widerspruch ist.