Indexmengen

Definition
Es sei $n \in \mathbb{N}$. Für
Zahlen $a_1, \ldots, a_n$,
Mengen $M_1, \ldots, M_n$ und
Aussagen $A_1, \ldots, A_n$ definieren wir:

- $\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + \ldots + a_n$
- $\prod_{i=1}^{n} a_i := a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$
- $\bigcup_{i=1}^{n} M_i := M_1 \cup \ldots \cup M_n$
- $\bigcap_{i=1}^{n} M_i := M_1 \cap \ldots \cap M_n$
- $\bigvee_{i=1}^{n} A_i := A_1 \vee \ldots \vee A_n$
- $\bigwedge_{i=1}^{n} A_i := A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$

Indexmengen (Forts.)

Verallgemeinerung auf beliebige *Indexmengen* I.

Definition

Für jedes $i \in I$ sei M_i eine Menge.

- Wir definieren $\bigcup_{i \in I} M_i$ durch

$$x \in \bigcup_{i \in I} M_i :\Leftrightarrow \text{ es gibt } i \in I \text{ mit } x \in M_i.$$

- Wir definieren $\bigcap_{i \in I} M_i$ durch

$$x \in \bigcap_{i \in I} M_i :\Leftrightarrow \text{ für alle } i \in I \text{ gilt } x \in M_i.$$

Indexmengen (Forts.)

Verallgemeinerung des Begriffs *paarweise verschieden*.

Definition

Sei I eine Menge und für jedes $i \in I$ sei x_i ein Objekt.

Die Objekte $x_i, i \in I$, heißen *paarweise verschieden*, wenn für alle $i, j \in I$ gilt: $x_i = x_j \Rightarrow i = j$.

Beispiele

- Die Zahlen $n^2, n \in \mathbb{N}$, sind paarweise verschieden.
- Die Zahlen $n^2, n \in \mathbb{Z}$, sind nicht paarweise verschieden.

Mengenpartitionen

Definition

- Zwei Mengen A, B heißen *disjunkt*, wenn $A \cap B = \emptyset$.
- Sei I eine Menge und für jedes $i \in I$ sei M_i eine Menge.

  Die $M_i, i \in I$, heißen *paarweise disjunkt*, wenn für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$ gilt: $M_i \cap M_j = \emptyset$.
- Es sei $\mathcal{M}$ eine Menge von Mengen.

  Die Elemente von $\mathcal{M}$ heißen *paarweise disjunkt*, wenn je zwei davon disjunkt sind, d.h. wenn für alle $M, M' \in \mathcal{M}$ mit $M \neq M'$ gilt: $M \cap M' = \emptyset$.

Mengenpartitionen (Forts.)

Erinnerung $\mathbb{P}$: Menge der Primzahlen in $\mathbb{N}$.

Beispiel

Für $p \in \mathbb{P}$ sei $M_p := \{p^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
(d.h. die Menge aller Potenzen von p).

Dann sind die Mengen M_p, $p \in \mathbb{P}$ paarweise disjunkt.

Mengenpartitionen (Forts.)

Es sei M eine Menge.

Definition

Eine *Partition* von M ist eine Menge $\mathcal{P}$ nicht-leerer, paarweise disjunkter Teilmengen von M mit $M = \bigcup_{C \in \mathcal{P}} C$.

Die Elemente $C \in \mathcal{P}$ heißen *Teile* der Partition.

Bemerkung

Für jede Partition $\mathcal{P}$ von M ist $\mathcal{P} \subseteq \mathrm{Pot}(M) \setminus \{\emptyset\}$.

Mengenpartitionen (Forts.)

Beispiele

- $\mathcal{P} = \{\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ gerade}\}, \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ungerade}\}\}$ ist eine Partition von $\mathbb{N}$ mit zwei Teilen.
- $\mathcal{P} = \{\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ hat genau } k \text{ Dezimalstellen}\} \mid k \in \mathbb{N}\}$ ist eine Partition von $\mathbb{N}$ mit unendlich vielen Teilen.
- Die Menge $\mathcal{P} = \{\{p^n \mid n \in \mathbb{N}\} \mid p \in \mathbb{P}\}$ ist keine Partition von $\mathbb{N}$.
- Die einzige Partition von $\emptyset$ ist $\mathcal{P} = \emptyset$.

Mengenpartitionen (Forts.)

Bemerkungen

- Sind M, N endliche, disjunkte Mengen, so gilt $|M \cup N| = |M| + |N|$.
- Sind $M_1, \ldots, M_n$ endliche, paarweise disjunkte Mengen, so gilt

$$|\bigcup_{i=1}^{n} M_i| = \sum_{i=1}^{n} |M_i|.$$

- Ist M eine endliche Menge und $\mathcal{P}$ eine Partition von M, dann ist

$$|M| = \sum_{C \in \mathcal{P}} |C|.$$

1.3 Beweisprinzipien

Direkter Beweis

Ziel

Zeige die Implikation $A \Rightarrow B$.

Methode

Finde und verwende Implikationen

- $A_1 \Rightarrow A_2$
- $A_2 \Rightarrow A_3$

$\vdots$

- $A_{n-1} \Rightarrow A_n$

für eine natürliche Zahl n mit

- $A = A_1$
- $B = A_n$

Direkter Beweis (Forts.)

Beispiel

Für alle $z \in \mathbb{Z}$ gilt: z ungerade $\Rightarrow z^2$ ungerade.

Kontraposition

Ziel

Zeige die Implikation $A \Rightarrow B$.

Methode

Zeige stattdessen: $\neg B \Rightarrow \neg A$.
Beruht auf der Tautologie: $(A \to B) \Leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$.

Beispiel

Für alle $z \in \mathbb{Z}$ gilt: z^2 gerade $\Rightarrow z$ gerade.

Beweis einer Äquivalenz

Beispiel

$[A \Leftrightarrow B] \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$

Beispiel

Für jede ganze Zahl z gilt:
Genau dann ist z^2 gerade, wenn z gerade ist.

Widerspruchsbeweis

Ziel
Zeige $A \Rightarrow B$ ist wahr.

Methode
Zeige stattdessen: $\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)$ für eine passende Aussage B.

Beweis der Methode

- $B \wedge \neg B$ ist falsch.
- Aus $\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)$ folgt (per Definition):
- $\neg A \rightarrow (B \wedge \neg B)$ ist wahr.
- Aus der Definition von $\rightarrow$ folgt: $\neg A$ ist falsch.
- Damit ist A wahr.

Widerspruchsbeweis (Forts.)

Beispiel

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Vollständige Induktion

Ziel

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A(n)$.

Methode

- Führe die folgenden Beweisschritte durch:
  - *Induktionsanfang*:
    Zeige $A(1)$ ist wahr.
  - *Induktionsschritt*:
    Zeige die Implikation $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Dann ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.

Man spricht präziser von einer vollständigen Induktion *über n*.
Im Induktionsschritt nennt man die Aussage $A(n)$ die *Induktionsvoraussetzung*.

Vollständige Induktion (Forts.)

Beweis des Prinzips

Beruht auf der folgenden Eigenschaft von $\mathbb{N}$:

> Für jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$ gilt: Ist $1 \in A$ und ist für jedes $n \in A$ auch $n + 1 \in A$, dann ist $A = \mathbb{N}$.

Bei der vollständigen Induktion zeigen wir:
Die Menge $A := \{n \in \mathbb{N} \mid A(n) \text{ ist wahr}\}$ erfüllt diese Bedingung.

Damit ist $A = \mathbb{N}$.

Vollständige Induktion (Forts.)

Beispiel

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Beweis

Vollständige Induktion über n.
Sei $A(n)$ die Aussageform $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Vollständige Induktion (Forts.)

Bemerkung

Es gibt verschiedene Varianten der Induktion, z.B.

- Induktionsanfang bei $n_0 \in \mathbb{N}$ statt bei 1.
  Damit wird die Aussage $A(n)$ für alle $n \geq n_0$ gezeigt.
- Induktionsvoraussetzung: $A(1) \wedge \ldots \wedge A(n)$ anstelle von $A(n)$.