Lehrstuhl für Informatik 1
Prof. Dr. Gerhard Woeginger
Jan Böker, Tim Hartmann

WS 2018/19
26.10.2018

Übung zur Vorlesung
Berechenbarkeit und Komplexität
Blatt 2

Tutoriumsaufgabe 2.1

(a) Wiederhole die Definitionen der O-, Ω- und Θ-Notation.

(b) Sortiere die folgenden Funktionen nach wachsender Größenordnung. Wenn in deiner Sortierung f vor g steht, dann ist $f = O(g)$. Begründe dabei jeweils, warum f vor g steht.

$$\sqrt{n}, \quad n^n, \quad \log n, \quad \log(n!), \quad \frac{n}{\log n}, \quad n, \quad \frac{1}{n}, \quad n^2, \quad 3^n, \quad n \log n, \quad 2^n$$

Tutoriumsaufgabe 2.2

Gegeben sei die Turingmaschine $M = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, B, q_1, q_2, \delta)$ mit δ wie folgt:

	0	1	B
q_1	$(q_3, 1, N)$	$(q_1, 0, R)$	(q_2, B, L)
q_3	$(q_1, 0, L)$	$(q_3, 1, L)$	(q_1, B, R)

Berechnen Sie die Gödelnummer $\langle M \rangle$ von M wie in der Vorlesung definiert.

In den folgenden Tutoriumsaufgaben ist es **nicht** notwendig, die Turingmaschinen explizit anzugeben. Eine Beschreibung ihrer Arbeitsweise und Laufzeit in den einzelnen Arbeitsschritten genügt.

Tutoriumsaufgabe 2.3

Sei $L = \{w\#\overline{w} \mid w \in \{0, 1\}^*\}$, wobei $\overline{w}$ die bitweise Negation von w ist (zB. $\overline{1011} = 0100$).

Beschreiben Sie eine möglichst effiziente 1-Band-TM, die L entscheidet. Analysieren Sie den Zeit- und den Speicherplatzbedarf der von Ihnen entworfenen Maschine.

Tutoriumsaufgabe 2.4

Beschreiben Sie eine TM, die die Sprache $L = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit einem Zeitbedarf in $O(m \log m)$ entscheidet, wobei m die Länge der Eingabe bezeichnet.

Hausaufgabe 2.1 **(5 Punkte)**

Sei $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, B, q_0, \bar{q}, \delta)$ eine TM, welche nur Bandzellen zwischen einschließlich Positionen 0 und $s(n) - 1$ besucht. Zeigen Sie: Wenn M auf einer Eingabe w der Länge n hält, dann hält M auf w nach spätestens $|Q| \cdot |\Gamma|^{s(n)} \cdot s(n) + 1$ Schritten.

In den folgenden Hausaufgaben ist es **nicht** notwendig, die Turingmaschinen explizit anzugeben. Eine Beschreibung ihrer Arbeitsweise und Laufzeit in den einzelnen Arbeitsschritten genügt.

Hausaufgabe 2.2 **(4 Punkte)**

Sei $L = \{w\#\overline{w} \mid w \in \{0,1\}^*\}$ (über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1, \#\}$), wobei $\overline{w}$ die bitweise Negation von w ist (zB. $\overline{1011} = 0100$).

Beschreiben Sie eine möglichst effiziente 2-Band-TM, die L entscheidet. Analysieren Sie den Zeit- und den Speicherplatzbedarf der von Ihnen entworfenen Maschine.

Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst, wie ein zweites Band die Erkennung eines Wortes in L schneller machen kann.

Hausaufgabe 2.3 **(5 Punkte)**

Eine TM mit einseitig unendlichem Band ist eine TM, die die Positionen $p < 0$ nie benutzt. Zeigen Sie, dass jede 1-Band-TM (mit Akzeptieren oder Verwerfen als Ausgabe) durch eine 1-Band-TM mit einseitig unendlichem Band simuliert werden kann. Geben Sie ein möglichst effiziente Simulation. Wie groß ist der Zeitverlust Ihrer Simulation?

Abgabe bis Mittwoch, den 07.11.2018 um 12:15 Uhr im Sammelkasten am Lehrstuhl i1, in Ihrem Tutorium oder am Anfang der Globalübung.