Erinnerung (organisatorisch):

Prüfungsanmeldung ist freigeschaltet.

Heute:

(Relativer) Spaß mit stetigen Funktionen

(Stetigkeit von f in x_0:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

, falls x_0 Häufungspunkt der Def.-Menge)

Bsp: Polynome, rationale Funktionen, exp, sin, cos

Bsp: $f: [3,4] \to \mathbb{R}$,

$$x \mapsto \frac{e^{\sin x} \cdot \sqrt{x}}{(x-2)\cdot(1+\cos^2 x)}$$

ist stetig. Begründung (Skizze)

- $x \mapsto \sin x$ stetig, $x \mapsto \exp$ stetig
  $\Rightarrow$ $x \mapsto \exp(\sin x)$ stetig mit (7.5) d)

- $x \mapsto \sqrt{x}$ ist stetig (auf $[0,\infty)$),
  da Umkehrfunktion von $[0,\infty) \to [0,\infty)$, $x \mapsto x^2$ stetig
  (siehe (7.6))

- Also mit (7.5 c); „Produkt"): $x \mapsto e^{\sin x} \cdot \sqrt{x}$ stetig.

usw.

③

Teil des Beweises: Zeige, daß $f|_{[a,b]}$ beschränkt.

Annahme: $f|_{[a,b]}$ unbeschränkt. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a,b]$, so daß $|f(x_n)| \geq n$.

(Lücke:) Die Folge (x_n) besitzt eine monotone Teilfolge $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ (Gilt für alle reellen Folgen.)

Weil alle $x_{n_j} \in [a,b]$, ist diese Folge auch beschränkt, also konvergent (Monotoniekriterium).

Sei $x^* = \lim_{j \to \infty} x_{n_j}$. ~~Weil~~

Dann $x^* \in [a,b]$, da x^* Häufungspunkt von $[a,b]$.

Weil f stetig, ist $f(x^*) = \lim_{j \to \infty} f(x_{n_j})$;

also $(f(x_{n_j}))_{j \in \mathbb{N}}$ konvergent $\Rightarrow$ beschränkt $\lightning$ zu

$|f(x_{n_j})| \geq n_j \geq j$.

<u>Bsp</u>: $f: [3,4] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{e^{\sin x} \cdot \sqrt{x}}{(x-2)\cdot(1+\cos^2 x)}$

f nimmt in $[3,4]$ Max. und Min. an, dank Satz (7.8).

„<u>Gegenbsp</u>:" $g: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 - 2$

Dann g ~~ist~~ stetig (mit analoger Def.),

$g(0) = -2 < 0$; $g(2) = 2 > 0$,

aber g hat in $\mathbb{Q}$ keine Nullstelle

(„$\sqrt{2}$ ist irrational".)

Bew. (7.9) a) benutzt Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.

Betrachte (o.B.d.A.) den Fall $f(a) < 0$, $f(b) > 0$.

Definiere $S := \{ x \in [a,b] ; f(x) \leq 0 \}$.

Dann ist $S \neq \emptyset$, da $a \in S$, und

$S \subset [a,b]$, also beschränkt.

Somit existiert $c^* := \sup S$.

▷ Zeige $f(c^*) = 0$!

– Annahme: $f(c^*) < 0$. Nach (7.5 b)

gibt es dann ein $\delta > 0$, so daß

$f(x) < 0$ für alle $x \in U_\delta(c^*) \cap [a,b]$.

Insbesondere $f(c^* + \frac{\delta}{2}) < 0$, also $c^* + \frac{\delta}{2} \in S$,

somit c^* keine obere Schranke ↯.

– Annahme: $f(c^*) > 0$. Nach (25 b) ex. $\delta > 0$, so daß $f(x) > 0$ für alle $x \in U_\delta(c^*) \cap [a,b]$; insbes. $f(\underline{c^* - \frac{\delta}{2}}) > 0$; also c^* nicht kleinste obere Schranke.

Repariere Lücken:

(i) Es ist $c^* \neq a$ und $c^* \neq b$ (s.o.), wegen $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$.

(ii) Deshalb kann δ so gewählt werden, daß $U_\delta(c^*) \subset [a,b]$.

b) Zu zeigen: Zu jedem $y \in [m, M]$ gibt es ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = y$.

Wende a) ~~auf~~ $\cancel{\tilde{f}}$: $[a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - y$ an

Dann $\cancel{\tilde{f}(a) \underset{?}{=} f(a)} - y$, $\tilde{f}(b) \underset{?}{=} f(b) - y$

Sei $c \in [a,b]$ mit $f(c) = m$ und $d \in [a,b]$ mit $f(d) = M$. O.B.d.A. $c < d$.

(Bei $c = d$: $m = M$ ✓ ; im Fall $c > d$ betrachte $-f$.)

Betrachte $\tilde{f} : [c,d] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - y$.

Dann
$$\tilde{f}(c) = m - y \leq 0 \quad (\text{und } < 0, \text{ falls } y \neq m)$$
$$\tilde{f}(d) = M - y \geq 0 \quad (\text{und } > 0, \text{ falls } y \neq M).$$

Im Fall $m < y < M$ wende a) auf $\tilde{f}$ an:

Es gibt ein $x_0 \in [c,d]$ mit $\tilde{f}(x_0) = 0 \iff f(x_0) - y = 0$.

$\square$

Bsp.: Die Gleichung $\cos x = x$ besitzt eine Lösung in $\mathbb{R}$.
(Tip: Vergiß den Versuch „mit Formel")

Begründung: Betrachte die Funktion

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos x - x$$

f ist stetig (mit (7.5)) ;

und

$$f(0) = 1 > 0 \;; \quad f(1) = \cos 1 - 1 < 0$$

(da $\cos x \le 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$;
$\cos x = 1 \iff x = 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$)

Mit ZWS: f besitzt eine Nullstelle x_0 in $(0,1)$;

also $\cos x_0 = x_0$ (← Lösung der Gleichung)

(Fortsetzung möglich mit Halbieren des Intervalls:
Nullstelle in $(0, \frac{1}{2})$ oder in $(\frac{1}{2}, 1)$; etc.
BISEKTIONSVERFAHREN)

Bew. (7.10) Sei $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$; O.B.d.A. $a_n > 0$

und n ungerade.

Nach Polynomabschätzungen in Kap. V:

Es gibt $R > 0$, so daß

$$p(x) \geq \frac{a_n}{2} x^n \; (>0) \text{ für alle } x \geq R$$

und

$$p(x) \leq 2a_n x^n \; (<0) \text{ für alle } x \leq -R.$$

Insbesondere ex. $a < 0$ mit $p(a) < 0$
und ein $b > 0$ mit $p(b) > 0$.

Weil p (als Polynom) stetig, existiert nach ZWS
ein $c \in (a, b)$ mit $p(c) = 0$.

Bsp $\quad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1 + x + x^3 + x^7$

Dann gilt:

(i) Zu jedem $y_0 \in \mathbb{R}$ ex. $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $g(x_0) = y_0$. (Denn $\tilde{g} := g - y_0$ ist Polynom ungerades Grades. & Bemerkung (7.10).)

g ~~inj~~ surjektiv

(ii) g ist streng monoton wachsend (→ letzte Vorl.)

g injektiv

Insgesamt: $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist bijektiv, besitzt also eine Umkehrfunktion.

<u>Bw</u> (7.11 | a) Behauptung: $\lim\limits_{x\to\infty} \exp x = \infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \exp x = 0$

<u>Zu zeigen</u>: Zu jedem $y_0 > 0$ ex. ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\exp(x_0) = y_0$.

- Weil $\lim\limits_{x\to -\infty} \exp(x) = 0$, ex. $a \in \mathbb{R}$ mit

  $\exp(a) \leq \frac{y_0}{2}$ (GW-Def. mit $\varepsilon = \frac{y_0}{2}$)

- Weil $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$, ex. $b \in \mathbb{R}$ mit

  $\exp(b) \geq 2y_0$ (GW-Def. mit $M = 2y_0$)

Also: $f := \exp - y_0$ ist stetig und erfüllt

$f(a) \leq \frac{y_0}{2} - y_0 < 0$; $f(b) \geq 2y_0 - y_0 > 0$;

also ex. in (a,b) eine Nullstelle x_0 von f.

b) Sei $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ein Polynom; OE $a_n > 0$

Dann gibt es ein $R > 0$, so daß

$$P(x) \leq 2 a_n x^n \quad \text{für alle } x \geq R.$$

Andererseits ist für $x > 0$:

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \, ;$$

also für $x \geq R$:

$$0 \leq \frac{P(x)}{\exp(x)} \leq \frac{2 a_n x^n}{x^{n+1}/(n+1)!} = \frac{2 (n+1)! \, a_n}{x} \to 0 \quad (x \to \infty)$$

($\lim_{x \to -\infty}$: Betrachte $\frac{P(y)}{\exp(y)}$ mit $y = -x$.)

Bew. (2.13), Rest:

▷ $\exp(\ln x) = x$ (alle $x \in (0,\infty)$)

und $\ln(\exp(x)) = x$ (alle $x \in \mathbb{R}$)

gilt wg. „Umkehrfunktion"

▷ Funktionalgleichung: Für alle $x, y > 0$ gilt

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

exp injektiv

$$\iff \exp(\ln(xy)) = \exp(\ln(x) + \ln(y))$$

$$\iff xy = \exp(\ln(x)) \cdot \exp(\ln(y))$$

(Funktionalgl. von exp)

$$\iff xy = x \cdot y \quad \checkmark$$

▷ $\ln(1) = 0$ wegen $\exp(0) = 1$; $\ln(e) = 1$ wegen $\exp(1) = e$

Für $x > 0$:

▷ $0 = \ln 1 = \ln\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) \overset{F.G.}{=} \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

Also $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$$

wegen strenger Monotonie und Surjektivität.

$\square$

<u>Bem</u>: Es gilt weiter z.B.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0} x\cdot\ln x = 0$$

$\uparrow$

Setze $x = e^y$ und $x \to \infty \iff y \to \infty$

Dann

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln(e^y)}{e^y} = \frac{y}{e^y} \to 0$$

nach (7.11) b

Begründung (7.15):

(i) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a^n = \exp(n \cdot \ln a)$$

$$= \exp(\underbrace{\ln a + \ln a + \dots + \ln a}_{n \text{ Summand}})$$

$$= \underbrace{\overbrace{\exp(\ln a)}^{=a} \cdot \exp(\ln a) \cdots \exp(\ln a)}_{n \text{ Faktoren}}$$

$$= a^n$$

(ii) $n = 0$: ✓

(iii) $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$:

$$a^n = (a^{-1})^{-n} \overset{(i)}{=} \exp((-n) \ln(a^{-1}))$$

$$= \exp((-n) \cdot (-\ln a)) = \exp(n \cdot \ln a)$$

(iv) $b = \frac{p}{q}$ $(p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N})$:

$$\cancel{\exp(\tfrac{p}{q}} \ (\underline{\exp(\tfrac{p}{q} \cdot \ln a}))^q = (\exp(p \cdot \ln a) \cdot \tfrac{1}{q}))^q$$

$$\overset{(i)}{=} \exp\left(p \cdot \ln a \cdot \frac{1}{q} \cdot q\right) \overset{(iii)}{=} \exp(p \cdot \ln a) = a^p$$

$$\Rightarrow \exp\left(\frac{p}{q} \cdot \ln a\right) = \sqrt[q]{a^p}$$

(Eindeutigkeit.)