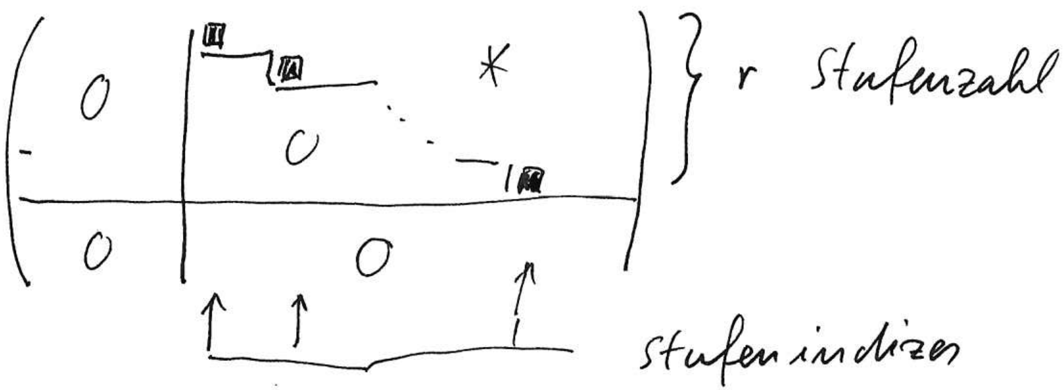
Wiederholung

- $A \in K^{m \times n}$ Zeilenstufenform



- Gauß-Algorithmus
- Lösungsverfahren für homogene LGS: $A \in K^{m \times n}$

Gesucht: $\mathbb{L}(A,0) = \{ s \in K^n \mid As = 0 \}$

$A \rightsquigarrow A'$, A' Zeilenstufenform $\mathbb{L}(A,0) = \mathbb{L}(A',0)$

Abhängige Unbekannte: zu Stufenindizes (von A')

Freie — " — : anderen

- Ersetze die freien Unbekannten durch Parameter $t_1, \dots, t_{n-r}$
- Löse, von unten nach oben, nach den abh. Unbek. auf.

- Lösungsverfahren für inhomogene LGS:

$A \in K^{m \times n}$, $b \in K^m$: $\mathbb{L}(A,b) = \{s \in K^n \mid As = b\}$

$(A,b) \rightsquigarrow (A',b')$ in Zeilenstufenform

- Lösungsentscheidung:

* Zeile r in (A',b'): $r > 0$ und $k_r = n+1$

  $(0, \dots, 0, \blacksquare)$ dann $\mathbb{L}(A,b) = \emptyset$

* $r = 0$ oder $k_r < n+1$: $\mathbb{L}(A,b) \neq \emptyset$

  - Bestimme $\mathbb{L}(A,0)$
  - Bestimme spezielle Lösung s: setze alle freien Unbek. auf 0, löse nach abhäng. Unbek. auf.
  - $\mathbb{L}(A,b) = s + \mathbb{L}(A,0)$.

- Reduzierte Zeilenstufenform

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} \blacksquare & * & 0 & & * & 0 & \\ & & \blacksquare & & & \vdots & * \\ & & & \ddots & & 0 & \\ & & 0 & & & \blacksquare & \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

Normalform

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\qquad}^{n-r} \\ \left(\begin{array}{c|c} E_r & C \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) & \end{array} \Big\} r$$

- $A = \left(\begin{array}{c|c} E_r & C \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \qquad b = \begin{pmatrix} b' \\ \hline b'' \end{pmatrix} \qquad b' \in K^r, \; b'' \in K^{m-r}$

$$\mathbb{L}(A,0) = \left\{ \begin{pmatrix} C \\ \hline -E_{n-r} \end{pmatrix} t \;\middle|\; t \in K^{n-r} \right\}$$

$$\mathbb{L}(A,b) = \emptyset \iff b'' \neq 0$$

$b'' = 0 \implies \begin{pmatrix} b' \\ \hline 0 \end{pmatrix} \in K^n$ ist in $\mathbb{L}(A,b)$.

8. Januar 2019

Kombinatorik

Motivation

Es sei A eine endliche Menge mit $|A| = n$. Weiter sei $k \in \mathbb{N}$.

Stichproben

Eine *Stichprobe aus A vom Umfang k* ist eine Auswahl von k Elementen aus A. Dabei gibt es vier Szenarien:

- Elemente paarweise verschieden, Reihenfolge relevant (Ziehen ohne Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge);
- Elemente paarweise verschieden, Reihenfolge irrelevant (Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge);
- Elemente können mehrfach vorkommen, Reihenfolge relevant (Ziehen mit Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge);
- Elemente können mehrfach vorkommen, Reihenfolge irrelevant (Ziehen mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge).

Motivation (Forts.)

Beispiele

- Medaillenverteilung nach 100m-Lauf mit 8 Läufern ($A = \{\text{Läufer}\}$, $n = 8$, $k = 3$);
- Lottozahlen ($A = \underline{49}$, $n = 49$, $k = 6$);
- Dezimalzahlen in $\mathbb{N}$ mit k Ziffern ($A = \{0, 1, \ldots, 9\}$, $n = 10$);
- Wurf mit 5 Würfeln gleichzeitig
  ($A = \{$⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\}$, $n = 6, k = 5$).

Stichproben relevant z.B. in Wahrscheinlichkeitstheorie

Gesucht: Anzahl der möglichen Stichproben (bei festem n und k)

k-Permutationen

Es sei A eine endliche Menge mit $|A| = n$. Weiter sei $k \in \mathbb{N}, k \leq n$.

Definition
Eine *k-Permutation* aus A ist eine geordnete Auswahl von k paarweise verschiedenen Elementen aus A
(ein k-Tupel über A mit paarweise verschiedenen Einträgen).

Eine n-Permutation aus A heißt *Permutation von A*
(stimmt mit früherer Definition von Permutation überein).

Bemerkung
k-Permutationen aus A modellieren Stichproben aus A vom Umfang k ohne Zurücklegen, unter Beachtung der Reihenfolge.

Permutation von A: Bijektion $\pi: A \to A$; $A = \{a_1, \dots, a_n\}$

$$\pi: \begin{pmatrix} a_1, \dots, a_n \\ \pi(a_1), \dots, \pi(a_n) \end{pmatrix} \leftarrow \text{n-Permutation: Anordnung von } A.$$

k-Permutationen (Forts.)

$\underline{n} = \{1, 2, \ldots, n\}, \quad n \in \mathbb{N}$

$\underline{0} = \emptyset$

Beispiele

- $(4,3,2), (4,2,3)$ und $(3,5,1)$ sind 3-Permutationen aus $\underline{5}$.
- $(1,2,1)$ ist keine Permutation.
- $(1,3,5,2,4)$ und $(5,4,3,2,1)$ sind Permutationen von $\underline{5}$.
- Die Medaillenverteilung nach einem 100m-Lauf mit 8 Läufern ist eine 3-Permutation aus $\underline{8}$.
- Die aktuelle Bundesligatabelle ist eine Permutation von $\underline{18}$.

k-Permutationen (Forts.)

Erinnerung

Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n \quad = \prod_{k=1}^{n} k$$

und $0! = 1$.

$1! = 1,\ 2! = 2,\ 3! = 6,\ 4! = 24,\ 5! = 120$

Satz

Es sei A eine Menge mit $|A| = n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$.

Die Anzahl der k-Permutationen aus A ist

$$\frac{n!}{(n-k)!}.$$

Die Anzahl der Permutationen von A ist $n!$.

Beweis des Satzes:

$$\left|\{(a_1,\dots,a_k) \mid a_i \in A \ \forall\, 1 \le i \le k,\ a_i \neq a_j \text{ für } i \neq j\}\right| = ?$$

Möglichkeiten für a_1: n

— " — " a_2: $n-1$

⋮

Möglichkeiten für a_k: $n-k+1$.

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

k-Permutationen (Forts.)

Beispiele

- Die Anzahl der 2-Permutationen aus $\underline{3}$ ist $\frac{3!}{(3-2)!} = 6$.
- Es gibt $\frac{8!}{(8-3)!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 = 336$ mögliche Medaillenverteilungen (Gold, Silber, Bronze) auf 8 Läufer.
- Es gibt $18! = 6.402.373.705.728.000 \approx 6,4 \cdot 10^{15}$ mögliche Bundesligatabellen aus 18 Mannschaften.

k-Kombinationen

Es sei A eine endliche Menge mit $|A| = n$. Weiter sei $k \in \mathbb{N}, k \leq n$.

Definition

Eine *k-Kombination* aus A ist eine ungeordnete Auswahl von k paarweise verschiedenen Elementen aus A
(eine k-elementige Teilmenge von A).

Bemerkung

k-Kombinationen aus A modellieren Stichproben aus A vom Umfang k ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge.

k-Kombinationen

Beispiele

- $\{4, 3, 2\} = \{4, 2, 3\}$ und $\{3, 5, 1\}$ sind 3-Kombinationen aus $\underline{5}$.
- Ein ausgefüllter Lottoschein ist eine 6-Kombination aus $\underline{49}$.
- Die Bundesliga-Absteiger bilden einen 3-Kombination aus $\underline{18}$.
- Eine Skathand ist eine 10-Kombination aus $\underline{32}$.

k-Kombinationen (Forts.)

Satz
Es sei A eine Menge mit $|A| = n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$.

Die Anzahl der k-Kombinationen aus A ist

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Beweis des Satzes:

Definieren ÄR auf $\{k\text{-Permutationen von } A\}$

$$(a_1, \dots, a_k) \sim (a_1', \dots, a_k') :\Longleftrightarrow \underbrace{\{a_1, \dots, a_k\}}_{k\text{-Kombination von } A} = \{a_1', \dots, a_k'\}$$

- Jede ÄK besteht aus genau $k!$ Elementen (den Permutationen der zugehörigen k-Kombination)
- Jede k-Kombination gehört zu genau einer ÄK.

$$\Longrightarrow \quad k! \, |\{k\text{-Kombinationen}\}| = |\{k\text{-Permutationen}\}|$$

$$\Longrightarrow \quad \text{Beh.}$$

k-Kombinationen (Forts.)

Beispiele

- Die Anzahl der 2-Kombinationen aus $\underline{4}$ ist $\frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$.
- Es gibt $\frac{49!}{6!43!} = 13.983.816$ Lottotipps.
- Es gibt $\frac{18!}{3!15!} = 816$ Möglichkeiten, drei von 18 Mannschaften absteigen zu lassen.
- Es gibt $\frac{32!}{10!22!} = 64.512.240$ mögliche Skathände.

k-Tupel

Es sei A eine endliche Menge mit $|A| = n$. Weiter sei $k \in \mathbb{N}$.

Bemerkung

k-Tupel über A modellieren Stichproben aus A vom Umfang k mit Zurücklegen, unter Beachtung der Reihenfolge.

Beispiel

Resultat von Klausur mit k Teilnehmern und 11 möglichen Noten:
k-Tupel über $\{\text{Noten}\} = \{1{,}0;\ 1{,}3;\ 1{,}7;\ \ldots\ ;\ 5{,}0\}$
Nummeriere Teilnehmer von 1 bis k; es sei a_i die Note von Teilnehmer i. Resultat: $(a_1, \ldots, a_k)$.

Satz

Die Anzahl der k-Tupel über A ist n^k.

k-Multimengen

Es sei A eine endliche Menge mit $|A| = n$. Weiter sei $k \in \mathbb{N}$.

Definition

Eine *k-Multimenge über A* ist eine ungeordnete Auswahl von k beliebigen (nicht notwendig verschiedenen) Elementen aus A. (Eine Multimenge ist eine Menge mit Wiederholungen.)

Bemerkung

k-Multimengen über A modellieren Stichproben aus A vom Umfang k mit Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge.

Beispiele

- Ein Lostopf ist eine Multimenge.
- Das Resultat eines Wurfs mit 5 Würfeln gleichzeitig ist eine 5-Multimenge über $\underline{6}$.

k-Multimengen (Forts.)

Bemerkung

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \{k\text{-Multimengen über } A\} &\to \{(\ell_1, \ldots, \ell_n) \in \mathbb{N}_0^n \mid \sum_{i=1}^{n} \ell_i = k\} \\ \mathcal{X} &\mapsto \ell_{\mathcal{X}} \end{aligned}$$

ist eine Bijektion.

k-Multimengen (Forts.)

Es sei A eine endliche Menge mit $|A| = n$. Weiter sei $k \in \mathbb{N}$.
Nummeriere A, etwa $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

Definition
Für eine k-Multimenge $\mathcal{X}$ über A sei $\ell_{\mathcal{X}} := (\ell_1, \ldots, \ell_n) \in \mathbb{N}_0^n$ mit $\sum_{i=1}^n \ell_i = k$ definiert durch

$$\ell_i := \text{ Vielfachheit von } a_i \text{ in } \mathcal{X}.$$

$\ell_{\mathcal{X}}$ heißt das *Häufigkeitstupel* der Multimenge $\mathcal{X}$.

$$\begin{array}{c} \quad n \quad k \\ 10 = 6 + 5 - 1 \end{array}$$

1101100100

Beispiel
Der Wurf mit 5 Würfeln gleichzeitig habe das Ergebnis
⚁ ⚀ ⚃ ⚀ ⚁
Nummerieren wir die Elemente aus A nach aufsteigender Augenzahl, erhalten wir das Häufigkeitstupel $(2, 2, 0, 1, 0, 0)$.

k-Multimengen (Forts.)

Es sei A eine endliche Menge mit $|A| = n$. Weiter sei $k \in \mathbb{N}$.

Satz
Die Anzahl der k-Multimengen über A ist

$$\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

.

<u>Beweis des Satzes:</u> $A = \{a_1, \dots, a_n\}$

$X := \{k\text{-Multimengen über } A\}$

$\updownarrow$ Bijektion

$Y := \{(l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}_0^n \mid \sum_{i=1}^{n} l_i = k\}$

$\updownarrow$ Bijektion

$Z := \{\text{Wörter über } \{0,1\} \text{ der Länge } n-1+k \text{ mit genau } k \text{ Einsen}\}$

$(l_1, \dots, l_n) \in Y$

$\downarrow$

(a) Ersetze jedes Komma durch 0 (Übergang $l_i \to l_{i+1}, i < n$)

(b) Ersetze l_i durch $\underbrace{111\dots1}_{l_i}$

Das ergibt die gewünschte Bijektion

$|Z| = |\{k\text{-Kombinationen von } n+k-1 \text{ Elementen}\}|$

Binomialkoeffizienten

Es seien $n, k \in \mathbb{N}_0$.

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

Definition
Für $k \leq n$ heißt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

der *Binomialkoeffizient* n über k.

Beispiel

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{1} \cdot 2} = 10$$

Binomialkoeffizienten (Forts.)

Es seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$.

Bemerkung

- $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$ ✓

- $$\binom{n}{k} \in \mathbb{N}.$$ ✓ $\binom{n}{k} = |\{k\text{-Komb. von } \underline{n}\}|$

- Ist $1 \leq k \leq n-1$, dann gilt

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} =$$

$$\frac{(n-1)!\;k}{k!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!\,(n-k)}{k!\,(n-k)!} =$$

$$\frac{(n-1)!\,(k+n-k)}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Binomialkoeffizienten (Forts.)

Pascal'sches Dreieck

$k =$ 0 1 2 3 4 5 6

$n = 0$:							1						
$n = 1$:						1		1					
$n = 2$:					1		2		1				
$n = 3$:				1		3		3		1			
$n = 4$:			1		4		6		4		1		
$n = 5$:		1		5		10		10		5		1	
$n = 6$:	1		6		15		20		15		6		1

Der binomische Lehrsatz

Es sei R ein kommutativer Ring.

Schreibweise
Für $a \in R$ und $z \in \mathbb{Z}$ schreiben wir

$$z.a := \begin{cases} \underbrace{a + a + \cdots + a}_{z \text{ Summanden}}, & \text{falls } z \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{falls } z = 0 \\ -(-z.a), & \text{falls } z < 0 \end{cases}$$

Meist lassen wir den Punkt weg, d.h. wir schreiben za statt $z.a$.

Bemerkung
Ist $z = xy$ für $x, y \in \mathbb{Z}$, dann gilt $z.a = x.(y.a)$ für alle $a \in R$.

Der binomische Lehrsatz (Forts.)

Binomischer Lehrsatz
Es sei R ein kommutativer Ring, $a, b \in R$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}}_{\in \mathbb{N}} \cdot a^k b^{n-k}.$$

Korollar
Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

<u>Beweis:</u> $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

Der binomische Lehrsatz (Forts.)

Schülers Traum

Es sei R ein Ring und p eine Primzahl mit $p.a = 0$ für alle $a \in R$ (z.B. $R = \mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elementen). Dann ist

$$(a+b)^p = a^p + b^p$$

für alle $a, b \in R$.

Beweis

Für $0 < k < p$ ist

$$\binom{p}{k} = \frac{p \cdot (p-1) \cdots (p-k+1)}{k!}$$

von der Form xp für ein $x \in \mathbb{N}$, also $\binom{p}{k}.a^k b^{p-k} = 0$.