Thema: Induktion und Rekursion

Eine Eigenschaft von $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

Ist $M \subseteq \mathbb{N}$ eine Teilmenge von $\mathbb{N}$

- $1 \in M$
- für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n \in M \Rightarrow n+1 \in M$

Dann gilt $M = \mathbb{N}$.

Beispiel: Zeige $2^n > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

<u>I.A.:</u> $n=1$: $2^1 = 2 > 1$.

<u>I.S.:</u> Sei $n \geq 1$, so dass $2^n > n$ bereits gilt.

$$\underline{2^{n+1}} = 2 \cdot 2^n \overset{\text{I.V.}}{>} 2 \cdot n = n+n \underset{n \in \mathbb{N}}{\geq} \underline{n+1}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

Beispiel Rekursion:

- Potenzen: $a, a^2, a^3, \dots$, $M = \mathbb{R}$, $b = a$

$$g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto a \cdot x$$

$r(1) = a$, $r(n+1) = a \cdot r(n)$, $a^{n+1} = a \cdot a^n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

- Ein Populationsmodell ("gebremstes Wachstum")

$r(1) = c > 0$, $r(n+1) = \dfrac{2r(n)}{1+r(n)}$

$\left(M = \mathbb{R}_+,\ g_n : x \longmapsto \dfrac{2x}{1+x} \right)$

Beispiele:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\cdot(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \text{ gilt } \forall n \in \mathbb{N}.$$

I.A.: $n=1$:

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{1}{1\cdot(1+1)} = \frac{1}{2}$$

$$\shortparallel$$

$$1 - \frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

I.S.: Sei die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gezeigt (I.V.)

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k\cdot(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\cdot(k+1)} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}$$

$$\overset{\text{I.V.}}{=} 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} = 1 - \frac{n+2}{(n+1)\cdot(n+2)} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}$$

$$= 1 - \frac{n+1}{(n+1)\cdot(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}.$$

Zeige: $\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right) = n+1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

<u>I.A.:</u> $n=1$: $\prod_{k=1}^{1} \left(1+\frac{1}{k}\right) = 1+\frac{1}{1} = 2 = 1+1.$

<u>I.S.:</u> Sei die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gezeigt (I.V.)

$$\prod_{k=1}^{n+1} \left(1+\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\overset{\text{I.V.}}{=} (n+1) \cdot \left(1+\frac{1}{n+1}\right) = (n+1+1) = n+2.$$

<u>I.A.</u> $n=1$: $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2} = \frac{1\cdot 2}{2} = 1$

<u>I.S.</u>: Es gelte die Aussage für ein $n\in\mathbb{N}$ (I.V.)

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \overset{\text{I.V.}}{=} \frac{n\cdot(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= (n+1)\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right) = (n+1)\cdot\left(\frac{n+2}{2}\right) = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$$

Allgemeinere Version von Induktion

für $m \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_m = \{k \in \mathbb{Z} ; k \geq m\}$

Beispiel: Zeige $2^n > n^2$ $\forall n \geq 5$

<u>I.A.:</u> $n=5$: $2^5 = 32 > 25 = 5^2$. $\mathbb{Z}_5$

<u>I.S.:</u> Gelte die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$. (I.V.)

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{\text{I.V.}}{>} 2 \cdot n^2 \overset{\text{Rechnen}}{\cdots\cdots} \geq (n+1)^2$$

$$2n^2 - (n+1)^2 = 2n^2 - (n^2+2n+1) = n^2 - 2n - 1$$

$$= (n^2-2n+1) - 1 - 1 = (n-1)^2 - 2 \overset{n \geq 3}{\geq} (3-1)^2 - 2$$

$$= 2 \geq 0$$

$$2n^2 \geq (n+1)^2 \quad \text{für } n \geq 5.$$

$$\Rightarrow 2^{n+1} > (n+1)^2 \Rightarrow \text{Beh. mit vollst. Ind.}$$

<u>Beispiel:</u> $$\sum_{k=-3}^{2} \frac{1}{k^2+1} = \frac{1}{(-3)^2+1} + \frac{1}{(-2)^2+1} + \frac{1}{(-1)^2+1} + \frac{1}{0^2+1} + \frac{1}{1^2+1} + \frac{1}{2^2+1}.$$

<u>Beispiel:</u> $$\sum_{k=0}^{n} a_{k+2} = \sum_{j=2}^{n+2} a_j \quad \text{Indexverschiebung.}$$

Konvention: $$\sum_{k=m}^{n} a_k = 0 \quad , \quad \prod_{k=m}^{n} a_k = 1 \quad , n < m.$$

$\binom{n}{k}$ kombinatorische Interpretation:

$M = \{1, 2, 3, 4\}$, $\#M = 4 = n$, $k = 2$

$\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)! \cdot 2!} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3}{2!} = \frac{4 \cdot 3}{2}$$

$$= 6.$$

(1.10) Lemma:

a) $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} \qquad \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!\cdot(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

b) $$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\cdot(n-(k-1))!} + \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\cdot(n+1-k)!} + \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$$

$$= \frac{n!}{k!\cdot(n+1-k)!}\cdot\left[k + (n+1-k)\right]$$

$$= \frac{n!}{k!\cdot(n+1-k)!}\cdot(n+1) = \frac{(n+1)!}{k!\cdot((n+1)-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

Beweis von (1.11) Satz.

(1) Umindizierung $k \longmapsto n-k$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$

(2) Induktion. ~~n=0~~.

<u>I.A</u>: $n=0$ $\quad (a+b)^0 = 1$

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} \cdot a^k \cdot b^{0-k} = \binom{0}{0} \cdot a^0 \cdot b^{0-0} = 1.$$

I.S. Die Beh. gelte für ein $n \in \mathbb{N}_0$ (I.V.)

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\cdot(a+b)^n \overset{\text{I.V.}}{=} (a+b)\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^k\cdot b^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^{k+1}\cdot b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^k\cdot b^{n+1-k}$$

$j=k+1$ ← Indexverschiebung

$$\overset{j=k+1}{=} \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}\cdot a^j\cdot b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^k\cdot b^{n+1-k}$$

$$= \binom{n}{(n+1)-1}\cdot a^{n+1}\cdot b^0 + \left[\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j-1}\cdot a^j\cdot b^{n+1-j} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^k\cdot b^{n+1-k}\right]$$

$$+ \binom{n}{0}\cdot a^0\cdot b^{n+1}$$

$$= \binom{n}{n} \cdot a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right]} \cdot a^{k} \cdot b^{n+1-k} + \binom{n}{0} \cdot b^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{n+1} \cdot a^{n+1-0} \cdot b^{0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot a^{k} \cdot b^{n+1-k} + \binom{n+1}{0} \cdot b^{n+1-0} \cdot a^{0}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot a^{k} \cdot b^{n+1-k}$$