Ganzzahliges Programmieren (ILP)

Sei A eine rationale Matrix und b, c rationale Vektoren. Das *ILP* ist es, folgende Optimierungsaufgaben zu lösen:

$$\begin{aligned} \text{Maximiere } & c^T x \\ \text{unter } & Ax \leq b \\ & x \text{ ganzzahlig} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \text{Maximiere } & c^T x \\ \text{unter } & Ax = b \\ & x \geq 0 \\ & x \text{ ganzzahlig} \end{aligned}$$

Eine einfache Abschätzung

Dualität liefert:

$$\begin{aligned} &\max\{\, c^T x \mid Ax \leq b,\ x \text{ ganzzahlig} \,\} \\ \leq &\min\{\, b^t y \mid A^T y = c,\ y \geq 0,\ y \text{ ganzzahlig} \,\} \end{aligned}$$

Im Gegensatz zu linearem Programmieren, ist die Ungleichung bei ILP normalerweise echt. Durch die *LP-Relaxation* erhalten wir eine Abschätzung, falls die Voraussetzung für starke Dualität vorliegt:

$$\begin{aligned} &\max\{\, c^T x \mid Ax \leq b,\ x \text{ ganzzahlig} \,\} \\ \leq &\max\{\, c^T x \mid Ax \leq b \,\} = \min\{\, b^t y \mid A^T y = c,\ y \geq 0 \,\} \\ \leq &\min\{\, b^t y \mid A^T y = c,\ y \geq 0,\ y \text{ ganzzahlig} \,\} \end{aligned}$$

Beispiel

Sei $A = (2)$, $b = (1)$, $c = (1)$.

$$
\begin{aligned}
& \max\{\, c^T x \mid Ax \le b,\ x \text{ ganzzahlig} \,\} && = 0 \\
\le\ & \max\{\, c^T x \mid Ax \le b \,\} && = 1/2 \\
=\ & \min\{\, b^t y \mid A^T y = c,\ y \ge 0 \,\} && = 1/2 \\
\le\ & \min\{\, b^t y \mid A^T y = c,\ y \ge 0,\ y \text{ ganzzahlig} \,\} && = \text{existiert nicht}
\end{aligned}
$$

Beispiel

Sei $A = (2)$, $b = (1)$, $c = (1)$.

$$
\begin{aligned}
&\max\{\, c^T x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\, x \text{ ganzzahlig}\,\} && = 0 \\
\leq\, &\max\{\, c^T x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\,\} && = 1/2 \\
=\, &\min\{\, b^t y \mid A^T y \geq c,\ y \geq 0\,\} && = 1/2 \\
\leq\, &\min\{\, b^t y \mid A^T y \geq c,\ y \geq 0,\ y \text{ ganzzahlig}\,\} && = 1
\end{aligned}
$$

Komplexität von ILP

Theorem

ILP ist NP-vollständig

Beweis

Reduktion von 3SAT auf ILP.

Gegeben ist eine Instanz F von 3SAT bestehend aus n Variablen $x_1, \ldots x_n$ und m Klauseln der Form $\{l_1, l_2, l_3\}$, wobei $l_i \in \{x_1, \bar{x}_1, \ldots, x_n, \bar{x}_n\}$.

Wir konstruieren aus F ein ILP I mit:

F hat eine erfüllende Belegung $\iff$ der optimale Wert von I ist 0

Unser ILP I hat die Literale von F als Variablen und sieht so aus:

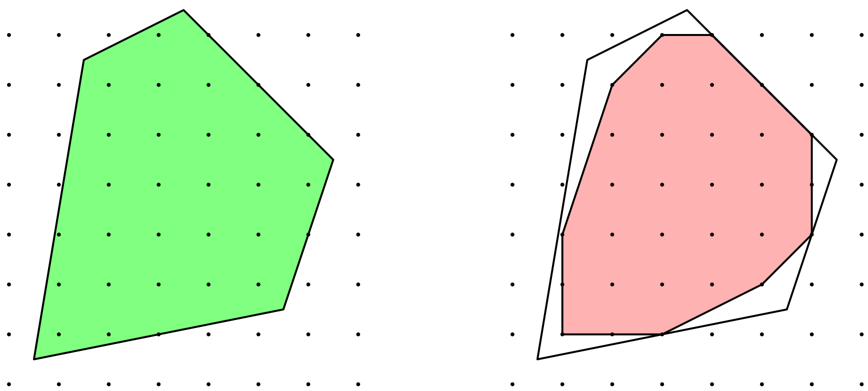
Maximiere 0

unter folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} l_1 + l_2 + l_3 &\geq 1 \text{ für alle Klauseln } \{l_1, l_2, l_3\} \text{ in } F \\ 0 \leq x_i, \bar{x}_i &\leq 1 \text{ für } i = 1, \ldots, n \\ x_i + \bar{x}_i &= 1 \text{ für } i = 1, \ldots, n \\ x_1, \ldots, x_n & \text{ ganzzahlig} \end{aligned}$$

Es gibt genau dann eine Lösung, wenn F erfüllbar ist. Die Konstruktion ist in polynomieller Zeit durchführbar. $\Box$

Die ganzzahlige Hülle



Die *ganzzahlige Hülle* P_I eines Polyeders P ist die konvexe Hülle aller ganzzahliger Punkte in P.

Falls alle Ecken von P ganzzahlig sind, das ist $P = P_I$ und das ILP kann durch lineares Programmieren gelöst werden.

Ein einfaches Lösungsverfahren

Wir wollen $\max\{\, c^T x \mid Ax \leq b,\ x \text{ ganzzahlig} \,\}$ bestimmen.

Wir starten mit $\Pi_1 = P$, $P = \{\, x \mid Ax \leq b \,\}$.

Im Schritt k haben wir eine Menge $\Pi_k = \{P_1, \ldots, P_k\}$ von Polyedern mit

1. $P_1, \ldots, P_k$ sind paarweise disjunkt (repräsentiert durch lineare Ungleichungen),
2. jeder ganzzahlige Punkt in P ist in $P_1 \cup \cdots \cup P_k$ enthalten.

Ein Schritt sieht so aus (Eingabe Π_k):

Sei $\mu_j = \max\{\, c^T x \mid x \in P_j \,\}$ und j^* so, daß μ_{j^*} maximal unter allen μ_j ist.

Sei x^* so, daß $\mu_{j^*} = c^T x^*$ (diese Werte lassen sich durch lineares Programmieren finden).

Falls x^* ganzzahlig ist, dann ist x^* eine optimale Lösung.

Andernfalls, sei x_i^* eine nicht-ganzzahlige Komponente. Wir definieren

$$Q_1 = \{\, x \mid P_{j^*} \mid x_i \geq \lceil x_i^* \rceil \,\}$$
$$Q_2 = \{\, x \mid P_{j^*} \mid x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor \,\}$$

Wir setzen

$$\Pi_{k+1} := \{P_1, \ldots, P_{j^*-1}, Q_1, Q_2, P_{j^*+1}, \ldots, P_k\}.$$

(Falls $P_i = \emptyset$ für alle i, dann gibt es keine Lösung.)

Beispiel