Übungsblatt 6

Diskrete Strukturen, Prof. Dr. Gerhard Hiß, WS 2018/19

Für Matrikelnummer: 399191
Abgabezeitpunkt: Fr 30 Nov 2018 14:00:00 CET
Dieses Blatt wurde erstellt: Mo 21 Jan 2019 13:08:45 CET

Die Lösungen der ersten drei Aufgaben sind online abzugeben.

30 Es sei $B := \{0,1\}$. Wir definieren Verknüpfungen $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, xor und nand auf B durch

$$
\begin{aligned}
x \wedge y &:= \begin{cases} 1, & \text{für } (x,y) = (1,1), \\ 0, & \text{für } (x,y) \in \{(1,0),(0,1),(0,0)\}, \end{cases} \\
x \vee y &:= \begin{cases} 1, & \text{für } (x,y) \in \{(1,1),(1,0),(0,1)\}, \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0), \end{cases} \\
x \Rightarrow y &:= \begin{cases} 1, & \text{für } (x,y) \in \{(1,1),(0,1),(0,0)\}, \\ 0, & \text{für } (x,y) = (1,0), \end{cases} \\
x \Leftrightarrow y &:= \begin{cases} 1, & \text{für } (x,y) \in \{(1,1),(0,0)\}, \\ 0, & \text{für } (x,y) \in \{(1,0),(0,1)\}, \end{cases} \\
x \text{ xor } y &:= \begin{cases} 1, & \text{für } (x,y) \in \{(1,0),(0,1)\}, \\ 0, & \text{für } (x,y) \in \{(1,1),(0,0)\}, \end{cases} \\
x \text{ nand } y &:= \begin{cases} 1, & \text{für } (x,y) \in \{(1,0),(0,1),(0,0)\}, \\ 0, & \text{für } (x,y) = (1,1). \end{cases}
\end{aligned}
$$

Untersuchen Sie in den folgenden Fällen, ob B zur angegebenen algebraischen Struktur wird.
Hinweis. Auch wenn die Elemente von B hier mit 0 und 1 bezeichnet werden, soll dies im Folgenden nicht zwingend bedeuten, dass 0 ein Nullelement bzw. 1 ein Einselement ist.

abelsche Gruppe mit Gruppenverknüpfung $\vee$	◯ Ja / ◯ Nein
Ring mit Addition $\vee$ und Multiplikation $\wedge$	◯ Ja / ◯ Nein
Gruppe mit Gruppenverknüpfung xor	◯ Ja / ◯ Nein
abelsche Gruppe mit Gruppenverknüpfung nand	◯ Ja / ◯ Nein
Körper mit Addition xor und Multiplikation $\wedge$	◯ Ja / ◯ Nein

31 Sind die folgenden Aussagen wahr?

Es wird $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zu einem Körper mit Addition gegeben durch $(x_1,x_2)+(y_1,y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2)$ und Multiplikation gegeben durch $(x_1,x_2)(y_1,y_2) = (x_1y_1, x_2y_2)$ für $(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.	◯ Ja / ◯ Nein
Es wird $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zu einem Körper mit Addition gegeben durch $(x_1,x_2)+(y_1,y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2)$ und Multiplikation gegeben durch $(x_1,x_2)(y_1,y_2) = (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$ für $(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.	◯ Ja / ◯ Nein
Jede Gruppe mit 3 Elementen ist kommutativ.	◯ Ja / ◯ Nein
Es seien Gruppen G_1 und G_2 gegeben. Dann wird $G_1 \times G_2$ zu einer Gruppe mit Gruppenverknüpfung gegeben durch $(x_1,x_2)(y_1,y_2) = (x_1y_1, x_2y_2)$ für $(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in G_1 \times G_2$.	◯ Ja / ◯ Nein
Für jede Gruppe G und alle $g \in G$ ist $G \to G$, $x \mapsto xg$ eine Bijektion.	◯ Ja / ◯ Nein

32 Ist U eine Untergruppe von G?

	G eine beliebige Gruppe, U_1 und U_2 beliebige Untergruppen von G und $U = U_1 \cup U_2$.	◯ Ja / ◯ Nein
	$G = (\mathbb{Z}, +), U =$ Menge der geraden ganzen Zahlen.	◯ Ja / ◯ Nein
	$(G, \cdot)$ eine beliebige abelsche Gruppe, $U = \{x \cdot x \cdot x \mid x \in G\}$.	◯ Ja / ◯ Nein
	$G = (S_n, \circ), U = \{\pi \in S_n \mid \pi(1) = 1, \pi(n) = n\}$.	◯ Ja / ◯ Nein
	G eine beliebige Gruppe, U_1 und U_2 beliebige Untergruppen von G und $U = U_1 \cap U_2$.	◯ Ja / ◯ Nein
33	Umfrage zur Bearbeitungszeit.	
	Wieviele Stunden haben Sie für die Lösung dieses Übungsblattes aufgewendet? (Bitte auf ganze Stunden runden und nur diese ganze Zahl eintragen.) Diese Angabe ist freiwillig. Es gibt keine Punkte für die Beantwortung.	____________

Bitte werfen Sie Ihre Lösungen zu den schriftlich zu bearbeitenden Aufgaben in das Ihrer Gruppennummer entsprechende Fach im Abgabekasten des Lehrstuhl D für Mathematik (Flur 2.OG im Hauptgebäude, neben der Mathematischen Bibliothek).

Denken Sie daran, dass Sie bei den schriftlichen Aufgaben Ihre Aussagen auch immer begründen.

34

(a) Es seien $(G, \bullet)$ und $(G', \circ)$ zwei Gruppen. Zeigen Sie, dass die Menge $G \times G'$ mit der Verknüpfung

$$(g_1, g_1') \cdot (g_2, g_2') := (g_1 \bullet g_2, g_1' \circ g_2')$$

wieder eine Gruppe ist.

(b) Bestimmen Sie alle Untergruppen von $(\mathbb{Z}, +)$.

35

Erinnerung: Für einen kommutativen Ring R und $a, b \in R$ schreiben wir $a \mid b$, wenn a ein Teiler von b ist (das heißt, wenn es ein $x \in R$ gibt mit $xa = b$).

(a) Sei R ein kommutativer Ring, $a, a', b \in R$ und sei b kein Nullteiler. Beweisen Sie die Kürzungsregel

$$a \cdot b = a' \cdot b \Rightarrow a = a'.$$

(b) Sei R ein kommutativer Ring, $a, b \in R$ und a kein Nullteiler. Weiter gelte $a \mid b$ und $b \mid a$. Zeigen Sie, dass es eine Einheit $w \in R^\times$ gibt mit $b = wa$.

(c) Sei R ein kommutativer Ring, $R^\times$ seine Einheitengruppe und seien $a, b \in R$. Zeigen Sie, dass genau dann $ab \in R^\times$ ist, wenn $a \in R^\times$ und $b \in R^\times$ ist. (Dies zeigt, dass auch $R \setminus R^\times$ abgeschlossen unter der Multiplikation ist.)

Abgabe bis spätestens Freitag, dem 30. November 2018, 14 Uhr, sowohl am Abgabekasten als auch online.