21.11. ①

Montag: $\mathbb{C}$ – wie?

Heute: $\mathbb{C}$ – warum?

Antwort der Analysis: Schöne neue Funktionen & Zusammenhänge

Bew. (7.6) b) Nach Cauchy-Kriterium:

Sei $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Die Folge der s_n konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $|s_n - s_m| < \varepsilon$ für alle $n \geq m \geq n_0$.

$\Leftrightarrow \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon$ —//—

Weil $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert, gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$\sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq m \geq n_0$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon \quad \text{— // —}.$$

Das war zu zeigen.

<u>Bsp.</u> (7.7) a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!}$ konvergiert, weil die reelle Exponentialreihe für alle reellen Zahlen konvergiert.

b) analog zum reellen Fall.

Bsp $\exp(i) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!}$

Für die Potenzen von i gilt:

$$i^n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \in 4\mathbb{Z} \\ i, & \text{falls } n \in 4\mathbb{Z}+1 \\ -1, & \text{falls } n \in 4\mathbb{Z}+2 \\ -i, & \text{falls } n \in 4\mathbb{Z}+3 \end{cases}$$

Also $i^n = \begin{cases} (-1)^{\ell}, & \text{falls } n = 2\ell \text{ gerade} \\ i \cdot (-1)^{\ell}, & \text{falls } n = 2\ell+1 \text{ ungerade} \end{cases}$

Realteil: $\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{i^k}{k!} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell}}{(2\ell)!}$

Imaginärteil: $\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{i^k}{k!} = i \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell}}{(2\ell+1)!}$

$\Rightarrow \exp(i) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell}}{(2\ell)!} + i \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell}}{(2\ell+1)!}$

Bw (7.8) a) Betrachte Partialsumme von $\overline{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^k}{k!}}$: (4)

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\bar{z}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \overline{\left(\frac{z^k}{k!}\right)} = \overline{\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right)}$$

$$\Rightarrow \bar{s}_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp(z)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \bar{s}_n = \exp(z) \underset{\text{(ZZ. oder so)}}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} s_n = \overline{\exp z}$$

b) $$|\exp(ix)|^2 = \exp(ix) \cdot \overline{\exp(ix)}$$

$$\overset{a)}{=} \exp(ix) \cdot \exp(\overline{ix}) = \exp(ix) \cdot \exp(-ix)$$

$$= \exp(ix + (-ix)) = \exp 0 = 1 .$$

✓

Bew. (7.11) Erinnerung: $i^n = \begin{cases} (-1)^{\cancel{2k}\,k}, & \text{falls } n = 2k \\ i\cdot(-1)^{\cancel{2k}\,k}, & \text{falls } n = 2k+1 \end{cases}$ ③

$x \in \mathbb{R}$

$$\exp(ix) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \underbrace{\frac{x^n}{n!}}_{\in \mathbb{R}}$$

Damit Realteil: $\cos x = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} i^n \frac{x^n}{n!} \underset{n=2k}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$

Imaginärteil:

$$i \cdot \sin x = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} i^n \frac{x^n}{n!} \underset{n=2k+1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} i\cdot(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Sinusfunktion - Herleitung des Funktionsgraphen

Am Einheitskreis lässt sich jedem im Bogenmaß gemessene Winkel $x \in \mathbb{R}$ ein eindeutiger Sinuswert $\sin(x)$ zuweisen. Dies definiert eine Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x).$$

Den Funktionsgraphen erhält man, indem man die am Einheitskreis gemessenen Werte in ein kartesisches Koordinatensystem überträgt.

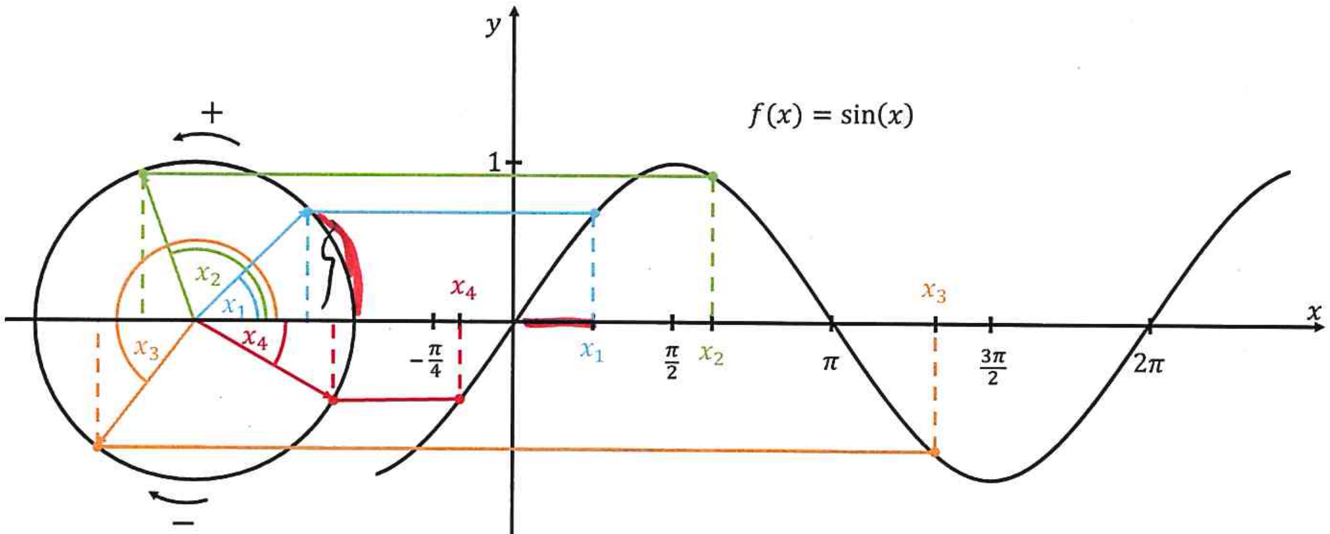


Abbildung: Funktionsgraph der trigonometrischen Funktion $f(x) = \sin(x)$

Bsp Berechnung von $\sin\left(\frac{1}{2}\right)$ mit Fehler $< 10^{-3}$,

$$\sin\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8\cdot 6} + \frac{1}{32\cdot 120} - \dots$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{48} = \frac{23}{48}$$

mit Fehler vom Betrag

$$< \frac{1}{32\cdot 120}$$

also $< \frac{1}{3000}$

Begründung: Leibniz-Reihe, da $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!}$ monoton fallende Nullfolge.

Größere Genauigkeit:

$$\sin\left(\frac{1}{2}\right) = \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{8\cdot 6} + \frac{1}{32\cdot 120}}_{\text{Fehler } < \frac{1}{500000}} - \frac{1}{128\cdot 5040}$$

<u>Bew.</u> (2.12)

$$\exp(i(x+y)) \overset{\text{Def.}}{=} \cos(x+y) + i\cdot\sin(x+y)$$

$$\|$$

$$\exp(ix+iy)$$

$$\|$$

$$\exp(ix)\cdot\exp(iy) = (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y)$$

$$\|$$

$$(\cos x\cos y - \sin x\sin y) + i\cdot(\sin x\cos y + \cos x\sin y)$$

Bew (7.13) mit (7.12)

▷ $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x$
$= \cos^2 x - \sin^2 x$

▷ $\sin(2x) = \sin(x+x) = \cos x \cdot \sin x + \sin x \cdot \cos x$
$= 2 \sin x \cdot \cos x$

▷ $\cos(x+(-x)) = \cos x \cdot \cos(-x) - \sin x \cdot \sin(-x)$
$\quad \| $
$\cos 0$
$\quad \|$ (Reihe)
1

$= \cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot \sin x$
$= \cos^2 x + \sin^2 x$

Nachtrag: $\cos(-x) \underset{\text{Reihe}}{\overset{\uparrow}{=}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (-x)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$
$= \cos x$

$\sin(-x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (-x)^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
$= -\sin x$

<u>Bemerkung</u> Aus „Pythagoras" folgt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\cos^2 x \leq 1 \quad \text{und} \quad \sin^2 x \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad -1 \leq \cos x \leq 1 \quad \text{und} \quad -1 \leq \sin x \leq 1 \quad .$$

Wie kommt π hier ins Spiel?

„Kreiszahl"

Wir versuchen, eine Nullstelle von cos einzugrenzen:

$$\cos 1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720} + \ldots$$

Dies ist Leibniz-Reihe, Fehler bei Abbruch nach erste drei Terme ist $< \frac{1}{720}$. Partialsumme bel. Wert

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} = \frac{24-12+1}{24} = \frac{13}{24} > \frac{1}{720}$$

<u>Also</u>: $\cos 1 > 0$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & a_1 & - & a_2 & & \ldots & & \\ \cos 2 & = & 1 & - & \frac{4}{2} & + & \frac{16}{24} & - & \frac{64}{720} \pm \ldots \end{array}$$

Leibniz-Reihe? $\quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2^{2k+2}}{(2k+2)!} \cdot \frac{(2k)!}{2^{2k}} = \frac{2}{(2k+1)(2k+2)}$

Es gilt $\quad \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ für alle $k \geq 1$

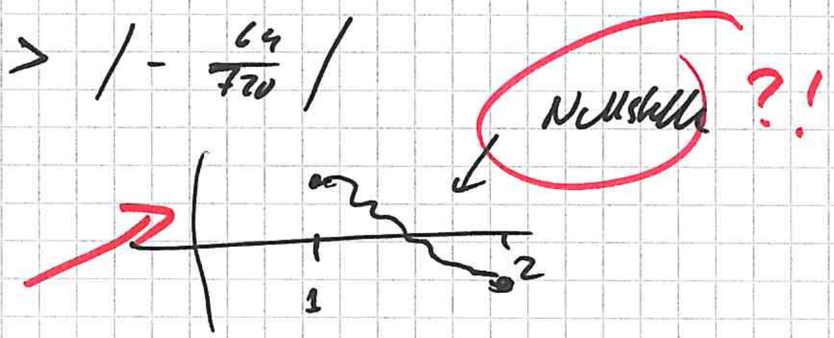
(Übung, HA) $\Rightarrow$ Leibniz-Krit. gilt, Fehlerabschätzung gilt ab $k = 2$

Partialsumme mit den ersten drei Gliedern:

$$1 - 2 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

Weiter gilt $\quad \left|-\frac{1}{3}\right| > \left|-\frac{64}{720}\right|$

Also $\quad \underline{\cos 2 < 0}$



Begründung: nicht klar (Stetigkeit, Zwischenwertsatz)

▷ $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} \in \{1, -1\}$, da

$$\underbrace{\cos^2\frac{\pi}{2}}_{=0} + \sin^2\frac{\pi}{2} = 1$$

Tabelle: $\sin\frac{\pi}{2} > 0$, also $\sin\frac{\pi}{2} = 1$

▷ $\cos\pi = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right) \overset{(2.13)}{=} \cos^2\frac{\pi}{2} - \sin^2\frac{\pi}{2}$

$= 0 - 1 = -1$

$\Longrightarrow$ $\sin\pi = 0$, da $1 = \underbrace{\cos^2\pi}_{=1} + \sin^2\pi$

▷ $\cos\frac{\pi}{4}$?

$0 = \cos\frac{\pi}{2} = \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \cos^2\frac{\pi}{4} - \sin^2\frac{\pi}{4}$

$1 \qquad = \cos^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{4}$

Addiere : $1 = 2\cdot\cos^2\frac{\pi}{4}$ $\Longrightarrow$ $\cos^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$ $\Longrightarrow$ $\cos\frac{\pi}{4} \in \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

Tabelle : $\cos\frac{\pi}{4} > 0$, also $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(13)

$\triangleright \cos(2\pi) = \cos\pi \cdot \cos\pi - \sin\pi \cdot \sin\pi$
$= (-1)^2 - 0 = 1$

$\Rightarrow \sin(2\pi) = 0$

$\triangleright \cos(x+2\pi) = \cos x \cdot \cos 2\pi - \sin x \sin 2\pi$
$= \cos x \cdot 1 - \sin x \cdot 0 = \cos x$

$\triangleright \sin(x+2\pi) = \cos x \cdot \sin 2\pi + \sin x \cdot \cos 2\pi$
$= \cos x \cdot 0 + \sin x \cdot 1 = \sin x$

<u>Also</u> cos und sin sind periodische Funktionen, Periode 2π.

Kollateraleffekt:

$$\boxed{e^{2\pi i} = 1}$$

$$\| $$

$$\exp(2\pi i) = \underbrace{\cos 2\pi}_{1} + i \cdot \underbrace{\sin 2\pi}_{0}$$

Also! exp ist in $\mathbb{C}$ periodisch ; Periode $2\pi i$.

Graphen (wie im Reellen)

cos: