

# Übung zur Vorlesung BERECHENBARKEIT UND KOMPLEXITÄT

## Blatt 3

---

### Tutoriumsaufgabe 3.1

Geben Sie das Programm einer Registermaschine zur Berechnung des Zweierlogarithmus  $\lfloor \log_2 n \rfloor$  für eine Eingabe  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  an.

### Tutoriumsaufgabe 3.2

Gegeben sei eine  $k$ -Band-TM  $M$  mit dem Eingabealphabet  $\Sigma = \{0, 1\}$  und einem beliebigen Bandalphabet  $\Gamma \supset \Sigma$  mit  $B \in \Gamma$ . Beschreiben Sie, wie aus  $M$  eine möglichst zeiteffiziente  $k$ -Band-TM  $M'$  konstruiert werden kann, die lediglich das Bandalphabet  $\{0, 1, B\}$  verwendet, und analysieren Sie den Laufzeitverlust, den die Konstruktion mit sich bringt.

### Tutoriumsaufgabe 3.3

Welche der folgenden Mengen sind abzählbar? Welche sind gleichmächtig mit  $\mathbb{R}$ ? Welche sind endlich?

- (a) Menge der endlichen Automaten mit Zustandsmenge  $\{1, 2, \dots, 100\}$  über  $\{a, b\}$
- (b) Menge aller Polynome vom Grad 2 mit ganzzahligen Koeffizienten
- (c) Menge der regulären Sprachen über  $\{a, b, c\}$
- (d) Menge der endlichen Sprachen über  $\{a, b, c\}$
- (e) Menge der entscheidbaren Sprachen über  $\{a\}$
- (f) Menge der unentscheidbaren Sprachen über  $\{a\}$
- (g) Menge der unentscheidbaren Sprachen über  $\{a, b\}$
- (h) Menge aller Funktionen  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
- (i) Menge aller Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

### Hausaufgabe 3.1

(2 + 1 + 2 Punkte)

In dieser Aufgabe wird folgendes RAM-Programm betrachtet:

```
1: CLOAD 2
2: STORE 2
3: LOAD 1
4: IF  $c(0) > 0$  THEN GOTO 6
5: END
6: CSUB 1
7: STORE 1
8: LOAD 2
9: MULT 2
10: STORE 2
11: GOTO 3
```

- (a) Wenn die RAM als Eingabe im Register  $c(1)$  eine Zahl  $m \geq 0$  erhält, welcher Wert steht dann bei Termination im Register  $c(2)$ ? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (b) Analysieren Sie die asymptotische (Worst-Case-)Laufzeit der RAM im **uniformen Kostenmaß**. Nehmen Sie dazu an, dass die Eingabe im Register  $c(1)$  eine Binärzahl mit  $n$  Bits ist.
- (c) Analysieren Sie die asymptotische (Worst-Case-)Laufzeit der RAM im **logarithmischen Kostenmaß**. Nehmen Sie dazu an, dass die Eingabe im Register  $c(1)$  eine Binärzahl mit  $n$  Bits ist.

### Hausaufgabe 3.2

(5 Punkte)

In dieser Aufgabe wird eine Erweiterung  $U'$  der universellen Turingmaschine  $U$  aus der Vorlesung „Turing-Maschinen II“ betrachtet, wozu eine sinnvolle Erweiterung der Gödelnummern auf  $k$ -Band-Turingmaschinen mit beliebigen Bandalphabeten angenommen wird.  $U'$  arbeitet wie folgt auf der Eingabe  $\langle M \rangle w$ , wobei  $M$  eine  $k$ -Band-TM und  $w \in \{0, 1\}^*$  ein Wort ist:

- (1) Konstruiere aus  $M$  die Kodierung einer äquivalenten 1-Band-TM  $M'$ , wie es in der Vorlesung skizziert wurde.
- (2) Konstruiere aus  $M'$  die Kodierung einer äquivalenten 1-Band-TM  $M''$ , die nur das Bandalphabet  $\{0, 1, B\}$  verwendet, wie in Tutoriumsaufgabe 3.2.
- (3) Arbeite wie  $U$  auf  $\langle M'' \rangle w$ .

Damit ist  $U'$  eine universelle 1-Band-TM, die eine beliebige  $k$ -Band-TM mit einem beliebigen Bandalphabet simulieren kann.

Analysieren Sie den Zeit- und Speicherverlust von  $U'$  bei der Simulation von  $M$ . Analysieren Sie dazu insbesondere den Speicherverlust von  $U$ . Die Kodierungslänge von  $M$  soll dabei als Konstante angesehen werden, und es darf angenommen werden, dass Zeit- und Speicherverlust der Konstruktion in Schritt 2 konstant sind.

### Hausaufgabe 3.3

(5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Menge  $\mathbb{N}^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^n$  der endlichen Wörter über den natürlichen Zahlen abzählbar ist.

**Hinweis:** Die Menge  $\mathbb{N}^*$  ist die Menge von endlichen Tupeln über den natürlichen Zahlen. Zum Beispiel sind  $(1, 1, 1)$ ,  $(11, 1)$ ,  $(1, 11)$ ,  $(111)$  verschiedene Elemente von  $\mathbb{N}^*$ .

|  |
|--|
| <p>Abgabe bis Mittwoch, den 14.11.2018 um 12:15 Uhr<br/>im Sammelkasten am Lehrstuhl i1, in Ihrem Tutorium oder am Anfang der Globalübung.</p> |
|--|