Wiederholung

* Mengen, M: $x \in M$, $x \notin M$
  - Aufzählung: $\{3, 17, 9, 8\} = \{3, 3, 9, 8, 17\}$
  - Beschreibung: Menge der ganzen Zahlen
  - Aussondern: $\{x \in M \mid A(x) \text{ ist wahr}\}$

    Hier: A Aussageform: $A(x)$, $x \in M$ Aussage

    $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ungerade}\}$
  - Abbildung: $\{i^2 \mid i \in \mathbb{N}\}$
* $\emptyset$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\underline{n} = \{1, \ldots, n\}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$
* $N \subseteq M :\Longleftrightarrow \forall x \in N : x \in M$.
* $N = M :\Longleftrightarrow N \subseteq M$ und $M \subseteq N$

* $M \cap N := \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$

  $M \cup N := \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$

  $M \setminus N := \{x \in M \mid x \notin N\}$

  $M \times N := \{(x,y) \mid x \in M, y \in N\}$

  $\mathrm{Pot}(M) := \{S \mid S \subseteq M\}$ $\qquad$ $\mathrm{Pot}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

* M Menge, $A(x)$ Aussageform

  $\longrightarrow$ Quantifizierte Aussage

  (1) Für alle $x \in M$ gilt $A(x)$ $\quad [\forall x \in M: A(x)]$

  (2) Es ex. ein $x \in M$ mit $A(x)$ $\quad [\exists x \in M: A(x)]$

  $\neg$(1) Es ex. ein $x \in M$ mit $\neg A(x)$

  $\neg$(2) Für alle $x \in M$ gilt $\neg A(x)$.

Indexmengen

Definition
Es sei $n \in \mathbb{N}$. Für
Zahlen $a_1, \ldots, a_n$,
Mengen $M_1, \ldots, M_n$ und
Aussagen $A_1, \ldots, A_n$ definieren wir:

Indexmenge: $\underline{n} = \{1, \ldots, n\}$

$\sum_{i=1}^{5} 1 = 5$

$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \sum_{i=1}^{5} i = 1+2+3+4+5$

$\prod_{i=1}^{n} a_i$

$\bigcup_{i=1}^{n}$

- $\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + \ldots + a_n$
- $\prod_{i=1}^{n} a_i := a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$
- $\bigcup_{i=1}^{n} M_i := M_1 \cup \ldots \cup M_n$
- $\bigcap_{i=1}^{n} M_i := M_1 \cap \ldots \cap M_n$
- $\bigvee_{i=1}^{n} A_i := A_1 \vee \ldots \vee A_n$
- $\bigwedge_{i=1}^{n} A_i := A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$

Indexmengen (Forts.)

Verallgemeinerung auf beliebige *Indexmengen* I.

Definition

Für jedes $i \in I$ sei M_i eine Menge.

- Wir definieren $\bigcup_{i \in I} M_i$ durch

$$x \in \bigcup_{i \in I} M_i \;:\Leftrightarrow\; \text{es gibt } i \in I \text{ mit } x \in M_i.$$

- Wir definieren $\bigcap_{i \in I} M_i$ durch

$$x \in \bigcap_{i \in I} M_i \;:\Leftrightarrow\; \text{für alle } i \in I \text{ gilt } x \in M_i.$$

Indexmengen (Forts.)

Verallgemeinerung des Begriffs *paarweise verschieden*.

Definition

Sei I eine Menge und für jedes $i \in I$ sei x_i ein Objekt.

Die Objekte $x_i, i \in I$, heißen *paarweise verschieden*, wenn für alle $i, j \in I$ gilt: $x_i = x_j \Rightarrow i = j$.

Beispiele

- Die Zahlen $n^2, n \in \mathbb{N}$, sind paarweise verschieden.
- Die Zahlen $n^2, n \in \mathbb{Z}$, sind nicht paarweise verschieden.

$$(-1)^2 = 1^2$$

Mengenpartitionen

Definition

- Zwei Mengen A, B heißen *disjunkt*, wenn $A \cap B = \emptyset$.
- Sei I eine Menge und für jedes $i \in I$ sei M_i eine Menge.

  Die $M_i, i \in I$, heißen *paarweise disjunkt*, wenn für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$ gilt: $M_i \cap M_j = \emptyset$.
- Es sei $\mathcal{M}$ eine Menge von Mengen.

  Die Elemente von $\mathcal{M}$ heißen *paarweise disjunkt*, wenn je zwei davon disjunkt sind, d.h. wenn für alle $M, M' \in \mathcal{M}$ mit $M \neq M'$ gilt: $M \cap M' = \emptyset$.

Mengenpartitionen (Forts.)

Erinnerung $\mathbb{P}$: Menge der Primzahlen in $\mathbb{N}$.

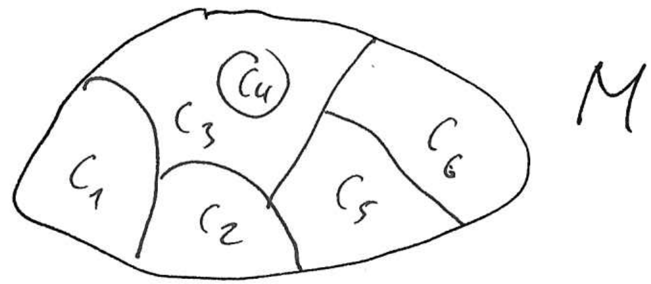
Beispiel

Für $p \in \mathbb{P}$ sei $M_p := \{p^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
(d.h. die Menge aller Potenzen von p).

Dann sind die Mengen M_p, $p \in \mathbb{P}$ paarweise disjunkt.

Mengenpartitionen (Forts.)

Es sei M eine Menge.



Definition

Eine *Partition* von M ist eine Menge $\mathcal{P}$ nicht-leerer, paarweise disjunkter Teilmengen von M mit $M = \bigcup_{C \in \mathcal{P}} C$.

Die Elemente $C \in \mathcal{P}$ heißen *Teile* der Partition.

Bemerkung

Für jede Partition $\mathcal{P}$ von M ist $\mathcal{P} \subseteq \mathrm{Pot}(M) \setminus \{\emptyset\}$.

Mengenpartitionen (Forts.)

	k
$\{1,2,3,\dots,9\}$	1
$\{10,11,\dots,99\}$	2
$\vdots$	

Beispiele

- $\mathcal{P} = \{\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ gerade}\}, \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ungerade}\}\}$
  ist eine Partition von $\mathbb{N}$ mit zwei Teilen.

  ohne führende Nullen
- $\mathcal{P} = \{\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ hat genau } k \text{ Dezimalstellen}\} \mid k \in \mathbb{N}\}$
  ist eine Partition von $\mathbb{N}$ mit unendlich vielen Teilen.
- Die Menge $\mathcal{P} = \{\{p^n \mid n \in \mathbb{N}\} \mid p \in \mathbb{P}\}$ $\quad \subseteq \mathcal{P}$
  ist keine Partition von $\mathbb{N}$.
- Die einzige Partition von $\emptyset$ ist $\mathcal{P} = \emptyset$.

Mengenpartitionen (Forts.)

Bemerkungen

- Sind M, N endliche, disjunkte Mengen, so gilt $|M \cup N| = |M| + |N|$.
- Sind $M_1, \ldots, M_n$ endliche, paarweise disjunkte Mengen, so gilt

$$|\bigcup_{i=1}^{n} M_i| = \sum_{i=1}^{n} |M_i|.$$

- Ist M eine endliche Menge und $\mathcal{P}$ eine Partition von M, dann ist

$$|M| = \sum_{C \in \mathcal{P}} |C|.$$

1.3 Beweisprinzipien

A	B	A → B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Direkter Beweis

Ziel

Zeige die Implikation $A \Rightarrow B$. [$A \to B$ ist wahr]

Methode

Finde und verwende Implikationen

- $A_1 \Rightarrow A_2$
- $A_2 \Rightarrow A_3$

$\vdots$

- $A_{n-1} \Rightarrow A_n$

für eine natürliche Zahl n mit

- $A = A_1$
- $B = A_n$

Direkter Beweis (Forts.)

Beispiel

Für alle $z \in \mathbb{Z}$ gilt: z ungerade $\Rightarrow$ z^2 ungerade.

Sei $z \in \mathbb{Z}$ (beliebig)

Zu zeigen: $\underbrace{z \text{ ungerade}}_{A} \Rightarrow \underbrace{z^2 \text{ ungerade}}_{B}$

$$\overbrace{z \text{ ungerade}}^{A_1} \xRightarrow[\text{ungerade}]{\text{Def. von}} \overbrace{\text{es ex. } x \in \mathbb{Z} \text{ mit } z = 2x+1}^{A_2}$$

$$\underbrace{\exists x \in \mathbb{Z}: z = 2x+1}_{A_2} \Longrightarrow \underbrace{\exists x \in \mathbb{Z}: z^2 = (2x+1)^2 = 4x^2+4x+1 = 2(2x^2+2x)+1}_{A_3}$$

$$\underbrace{\exists x \in \mathbb{Z}: z^2 = 2(2x^2+2x)+1}_{A_3} \xRightarrow[\text{ungerade}]{\text{Def. von}} \underbrace{z^2 \text{ ist ungerade}}_{A_4 = B.}$$

$\blacksquare$

Kontraposition

Ziel

Zeige die Implikation $A \Rightarrow B$.

Methode

Zeige stattdessen: $\neg B \Rightarrow \neg A$.
Beruht auf der Tautologie: $(A \rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$.

Beispiel

Für alle $z \in \mathbb{Z}$ gilt: z^2 gerade $\Rightarrow z$ gerade.

<u>Behauptung</u>: Für alle $z \in \mathbb{Z}$ gilt: z^2 gerade $\Rightarrow$ z gerade.

<u>Beweis</u>: Zeigen stattdessen:

- Für alle $z \in \mathbb{Z}$ gilt: z nicht gerade $\Rightarrow$ z^2 nicht gerade

In anderen Worten:

- Für alle $z \in \mathbb{Z}$ gilt: z ungerade $\Rightarrow$ z^2 ungerade.

$\blacksquare$

Das haben wir bereits bewiesen.

Beweis einer Äquivalenz

Beispiel

$[A \Leftrightarrow B] \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$

Beispiel

A : z^2 gerade
B : z gerade

Für jede ganze Zahl z gilt:
Genau dann ist z^2 gerade, wenn z gerade ist.

Beweis: „$\Rightarrow$" $A \Rightarrow B$ bereits bewiesen

„$\Leftarrow$" Zu zeigen: $\forall z \in \mathbb{Z}$: z gerade $\Rightarrow z^2$ gerade

Sei $z \in \mathbb{Z}$ gerade.

$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{Z}: \quad z = 2x$

$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{Z}: \quad z^2 = (2x)^2 = 4x^2 = 2(2x^2)$

$\Rightarrow z^2$ ist gerade.

$\blacksquare$

Widerspruchsbeweis

$D: B \wedge \neg B$

$C: \neg A$

C	D	$C \to D$	
1	1	1	
1	0	0	×
0	1	1	
0	0	1	⊛

Ziel
Zeige A ist wahr.

Methode
Zeige stattdessen: $\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)$ für eine passende Aussage B.

Beweis der Methode

- $\boxed{B \wedge \neg B \text{ ist falsch}}$
- Aus $\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)$ folgt (per Definition):
- $\neg A \to (B \wedge \neg B)$ ist wahr.
- Aus der Definition von $\to$ folgt: $\neg A$ ist falsch.
- Damit ist A wahr.

Widerspruchsbeweis (Forts.)

Beispiel

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\quad A$

Beweis: Annahme: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ [Aussage $\neg A$]

$\Rightarrow$ Es ex. $m, n \in \mathbb{N}$ mit

$(\sqrt{2} = \frac{m}{n})$ und $(\underbrace{m \text{ ungerade oder } n \text{ ungerade}}_{B})$ [Kürzen!]

$\Rightarrow 2n^2 = m^2$ und B gilt

$\Rightarrow m^2$ gerade (Def. von gerade)

$\Rightarrow m$ gerade (eben bewiesen)

$\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}$ mit $m = 2k$ (Def. von gerade)

$\Rightarrow 2n^2 = m^2 = (2k)^2 = 4k^2$

$\Rightarrow n^2 = 2k^2$ (durch 2 teilen)

$\Rightarrow n^2$ gerade (Def. von gerade)

$\Rightarrow n$ gerade (eben bewiesen)

$\Rightarrow m$ gerade und n gerade $(\neg B)$ $\lightning$. $\blacksquare$

Vollständige Induktion

Ziel

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A(n)$.

Methode

- Führe die folgenden Beweisschritte durch:
  - *Induktionsanfang*:
    Zeige $A(1)$ ist wahr.
  - *Induktionsschritt*:
    Zeige die Implikation $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Dann ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.

Man spricht präziser von einer vollständigen Induktion *über n*.
Im Induktionsschritt nennt man die Aussage $A(n)$ die
Induktionsvoraussetzung. (A(n) ist wahr.)

Vollständige Induktion (Forts.)

Beweis des Prinzips

Beruht auf der folgenden Eigenschaft von $\mathbb{N}$:

> Für jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$ gilt: Ist $1 \in A$ und ist für jedes $n \in A$ auch $n + 1 \in A$, dann ist $A = \mathbb{N}$.

Bei der vollständigen Induktion zeigen wir:
Die Menge $A := \{n \in \mathbb{N} \mid A(n) \text{ ist wahr}\}$ erfüllt diese Bedingung.

Damit ist $A = \mathbb{N}$.

Vollständige Induktion (Forts.)

Beispiel

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Beweis

Vollständige Induktion über n.
Sei $A(n)$ die Aussageform $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Induktionsanfang: $A(1)$ ist wahr.

Linke Seite: $\sum_{i=1}^{1} i = 1$, Rechte Seite: $\frac{1(1+1)}{2} = 1$ ✓

Induktionsannahme: $A(n)$ ist wahr, d.h.

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Induktionsschritt: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1)$$

$$\stackrel{\text{I.A.}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

$\Rightarrow A(n+1)$ ist wahr. $\blacksquare$

Vollständige Induktion (Forts.)

Bemerkung

Es gibt verschiedene Varianten der Induktion, z.B.

- Induktionsanfang bei $n_0 \in \mathbb{N}$ statt bei 1. Beginne mit $A(n_0)$
  Damit wird die Aussage $A(n)$ für alle $n \geq n_0$ gezeigt.
- Induktionsvoraussetzung: $A(1) \wedge \ldots \wedge A(n)$ anstelle von $A(n)$.