Wiederholung

Kartesische Produkte, $M_1, \dots, M_n$ Mengen

$$M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in M_i \text{ für } i = 1, \dots, n\}$$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Q} = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Q}\}$$

I Indexmenge, M_i mit $i \in I$ sei nicht leere Menge

$$\prod_{i \in I} M_i = \{(a_i)_{i \in I} \mid a_i \in M_i\} \neq \emptyset$$ „Auswahlaxiom"

M, N Mengen $\qquad f: M \to N$ Abb.

f <u>surjektiv</u> $:\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Bild}(f) = N$

f <u>injektiv</u> $:\Longleftrightarrow$ Für alle $x, y \in M$ mit $f(x) = f(y)$ ist $x = y$

oder: $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

f <u>bijektiv</u> $:\Longleftrightarrow$ f surj und inj.

Injektive, surjektive und bijektive Abbildungen (Forts.)

Satz

Es sei $f\colon M \to N$ Abbildung.

$y \in N$

$f^{-1}(\{y\})$

- Äquivalent sind:
  - f injektiv.
  - Jede Faser von f besitzt höchstens ein Element.
- Äquivalent sind:
  - f surjektiv.
  - Jede Faser von f besitzt mindestens ein Element.
- Äquivalent:
  - f bijektiv.
  - Jede Faser von f besitzt genau ein Element.

Einschränkung von Abbildungen

Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung.

Definition
Ist $M' \subseteq M$, dann heißt

$$f|_{M'} : M' \to N, \quad x \mapsto f(x)$$

die *Einschränkung* von f auf M'.

Bemerkung
Es existiert $M' \subseteq M$ so, dass $f|_{M'}$ injektiv ist.

und $\text{Bild}(f) = \text{Bild}(f|_{M'})$.

Wähle aus jeder nicht-leeren Faser ein Element

Beispiel
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.

- $f|_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ injektiv.
- $f|_{\mathbb{R}_{\leq 0}}$ injektiv.

Einschränkung von Abbildungen (Forts.)

Definition
M Menge, $N \subseteq M$

Inklusion von N in M:

$$\iota = \iota^N := (\mathrm{id}_M)|_N \colon N \to M$$

Beispiel
$\iota\colon \{2,5,7\} \to \{2,3,5,7,11\}$, $2 \mapsto 2$, $5 \mapsto 5$, $7 \mapsto 7$

Komposition von Abbildungen

Definition
$f: M \to N$, $g: N \to L$ Abbildungen

Wichtig:
Wertebereich von f =
Def.bereich von g

Komposition von f und g:

$$g \circ f: M \to L,\ x \mapsto g(f(x))$$

Sprechweise: „g nach f“

Beispiel

$$\begin{aligned} f:&\quad \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto x+1 \\ g:&\quad \mathbb{Z} \to \mathbb{Q},\ y \mapsto 2y^2 \\ g \circ f:&\ \mathbb{N} \to \mathbb{Q},\ x \mapsto 2(x+1)^2 \end{aligned}$$

Komposition von Abbildungen (Forts.)

Bemerkungen

- $f\colon M \to N$, $g\colon N \to L$, $h\colon L \to K$ Abbildungen

$$h \circ g \circ f := h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Assoziativgesetz

Beide: $M \to K$. Für $x \in M$ ist $(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x)$

- $f\colon M \to N$ Abbildung

$$f \circ \mathrm{id}_M = f = \mathrm{id}_N \circ f$$

Beide: Alle: $M \to N$, Für $x \in M$

$(f \circ \mathrm{id}_M)(x) = f(\mathrm{id}_M(x)) = f(x) = \mathrm{id}_N(f(x)) = (\mathrm{id}_N \circ f)(x)$

Umkehrabbildungen

Definition
Es seien $f : M \to N$ und $g : N \to M$ Abbildungen.

- g ist *linksseitige Umkehrabbildung von* f, falls gilt:
$$g \circ f = \mathrm{id}_M.$$
- g ist *rechtsseitige Umkehrabbildung von* f, falls gilt:
$$f \circ g = \mathrm{id}_N.$$
- g ist *Umkehrabbildung von* f, falls gilt:
$$g \circ f = \mathrm{id}_M \text{ und } f \circ g = \mathrm{id}_N.$$

  In diesem Fall sagt man auch: g ist zu f *invers*.

Umkehrabbildungen (Forts.)

Beispiele

$\mathbb{Q}_{>0} := \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$, $\mathbb{Q}_{<0} := \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$

- $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{Q}_{<0}$, $x \mapsto -2x$
  $g\colon \mathbb{Q}_{<0} \to \mathbb{Q}_{>0}$, $y \mapsto -\frac{1}{2}y$

  $(f \circ g)(y) = -2(-\frac{1}{2}y) = y$

  g ist invers zu f

- $h\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{Q}_{<0}$, $x \mapsto -x$,
  $k\colon \mathbb{Q}_{<0} \to \mathbb{Q}_{>0}$, $y \mapsto -y$

  k ist invers zu h

- $I : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, x \mapsto -x$

  $(I \circ I)(x) = -(-x) = x$

  I ist zu sich selbst invers

Umkehrabbildungen (Forts.)

Bemerkung

Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung.

- (a) f besitzt linksseitige Umkehrabbildung $\Leftrightarrow$ f ist injektiv.
- (b) f besitzt rechtsseitige Umkehrabbildung $\Leftrightarrow$ f ist surjektiv.
- (c) f besitzt Umkehrabbildung $\Leftrightarrow$ f ist bijektiv.

Bew von (a): „$\Rightarrow$": Sei $g : N \to M$ mit $g \circ f = id_M$.

Seien $x, x' \in M$ mit $f(x) = f(x')$ $\Rightarrow$

$x = id_M(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = x'$ $\Rightarrow$ f injektiv

„$\Leftarrow$": Sei f inj. Definiere $g: N \to M$ durch: für $y \in N$ ist

$$g(y) := \begin{cases} x \text{ mit } f(x) = y, & \text{falls } y \in \text{Bild}(f) \quad [x \text{ eindeutig!}] \\ x \in M \text{ beliebig}, & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ für $x \in M$: $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$ $\Rightarrow$ $g \circ f = id_M$

(b) Übung

(c) $f: M \to N$ bij $\iff \exists\, g, h : N \to M$ mit
$g \circ f = id_M$ und $f \circ h = id_N$

$$\underline{\underline{g}} = g \circ id_N = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = id_M \circ h = \underline{\underline{h}}$$

Umkehrabbildungen (Forts.)

Bemerkung

Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung.

Ist f bijektiv, dann ist die Umkehrabbildung von f eindeutig bestimmt.

Schreibweise und Notation

Es sei $f : M \to N$ eine bijektive Abbildung.

- Die Umkehrabbildung von f wird mit f^{-1} bezeichnet.
- Es gilt also:
  $f^{-1} : N \to M$ und $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M$, $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_N$.
- f heißt auch *invertierbar* und f^{-1} die *Inverse* von f.

Umkehrabbildungen (Forts.)

Bemerkung

Es seien $f : M \to N$ und $g : N \to L$ bijektive Abbildungen.

- $g \circ f$ bijektiv und es gilt:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}. \qquad : L \to M$$

- f^{-1} ist bijektiv und es gilt $(f^{-1})^{-1} = f$.
- id_M ist bijektiv und $\mathrm{id}_M^{-1} = \mathrm{id}_M$.

Bew.:

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ \underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{id_N} \circ f = f^{-1} \circ f = id_M$$

$\Rightarrow$ $f^{-1} \circ g^{-1}$ ist linksinvers zu $g \circ f$

rechtsinvers analog.

Abbildungen einer Menge in sich

Es sei M eine Menge, $f, g : M \to M$ Abbildungen.
Dann sind $f \circ g$ und $g \circ f$ definiert.

Definition
Es sei $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen:

$$f^n := \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n\text{-mal}}, \quad f^0 := \mathrm{id}_M.$$

Falls f bijektiv ist, so definieren wir auch $f^{-n} := (f^{-1})^n$.

Bemerkung

- Es gilt $f^n(x) = f(f(\cdots f(x)))$ für alle $x \in M$.
- Ist f bijektiv, dann gelten die Potenzrechenregeln:

$$f^{a+b} = f^a \circ f^b \quad \text{und} \quad f^{ab} = (f^a)^b \qquad \text{für alle } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Die Mächtigkeit von Mengen

Definition
M und N heißen *gleichmächtig*, wenn eine bijektive Abbildung $M \to N$ existiert.

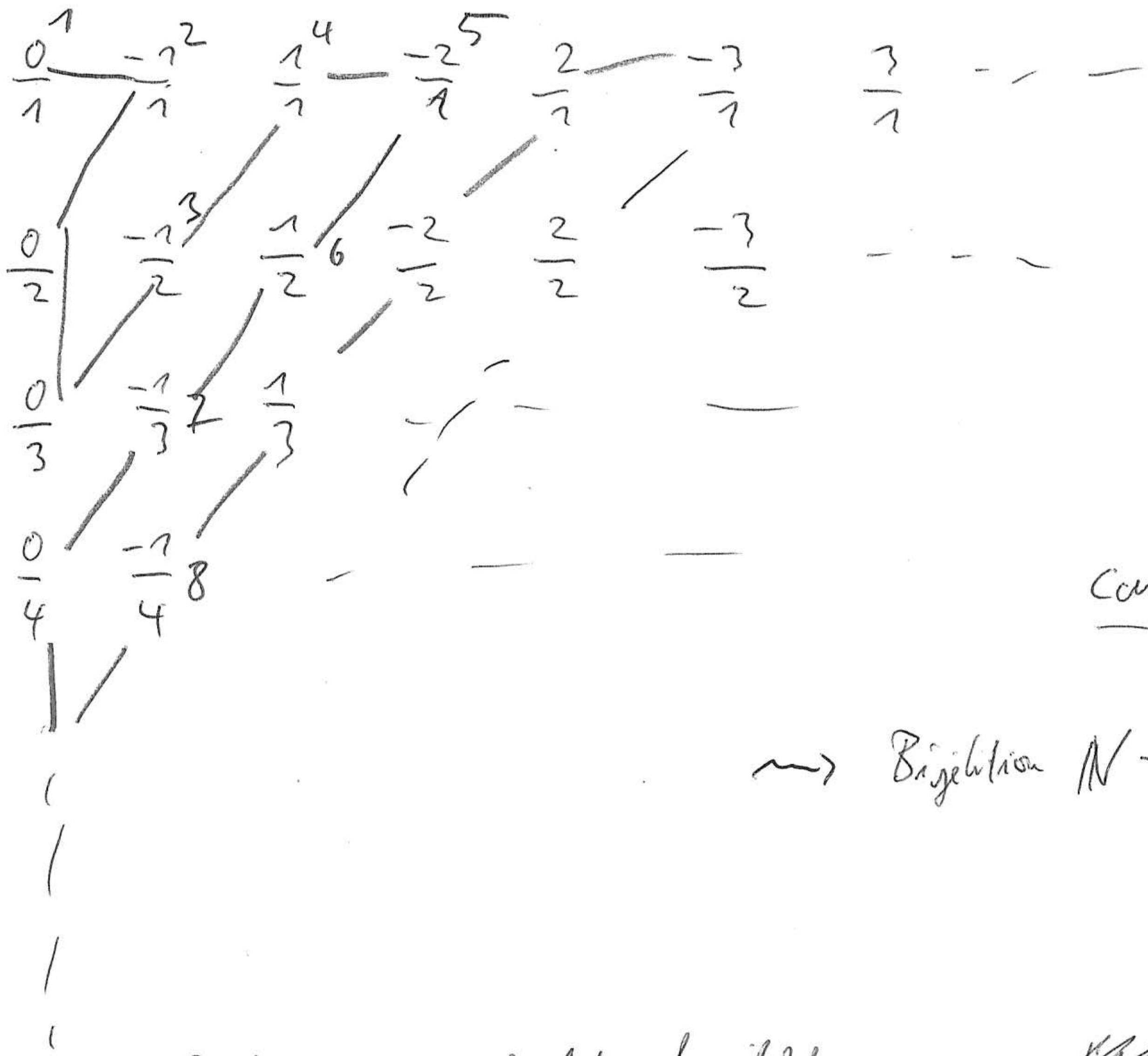
Beispiele

- $\{1, 2, 3\}$ ist gleichmächtig zu $\{4, 5, 6\}$. $1 \mapsto 4$, $2 \mapsto 6$, $3 \mapsto 5$
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind gleichmächtig.

$$
\begin{array}{llllllll}
\mathbb{Z}: & \{0, & -1, & 1, & -2, & +2, & -3, & +3, \ldots \} \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\
\mathbb{N}: & \{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \ldots \}
\end{array}
$$

Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

Schema aller rationaler Zahlen:



Zähle entlang Pfad, lasse nicht gekürzte aus.

<u>Cantorsches Diagonalargument</u>

$\rightsquigarrow$ Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$

<u>Def</u>: M heißt abzählbar unendlich $:\Leftrightarrow$ es gibt Bij $\mathbb{N} \to M$.

Die Mächtigkeit von Mengen

Satz (Cantor)

Für jede Menge M sind M und $\mathrm{Pot}(M)$ nicht gleichmächtig.

Bew.: Beh.: Jedes $f: M \to \mathrm{Pot}(M)$ ist nicht surjektiv (also nicht bijektiv)

Sei $U = \{x \in M \mid x \notin f(x)\}$

$U \notin \mathrm{Bild}(f)$, denn angenommen $y \in M$ und $f(y) = U$.

Ist $y \in U$, so folgt aus Def. von U $y \notin f(y) = U$, Widerspruch.

" $y \notin U$, ... — $y \in f(Y) = U$, " .

Also gibt es kein $y \in M$ mit $f(y) = U$.

Die Mächtigkeit von Mengen (Forts.)

Definition

M Menge

- M *endlich*: es ex. $n \in \mathbb{N}_0$ mit M gleichmächtig zu $\underline{n}$
- M *unendlich*: M nicht endlich
- M endlich
  Abzählung von M: Bijektion von $\underline{n}$ nach M

Beispiele

- $\{1, 3, 17\}$ gleichmächtig zu $\underline{3} = \{1, 2, 3\}$
- $\mathbb{N}$ und $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ gerade}\}$ unendlich und gleichmächtig $(y \mapsto 2y)$
- $\emptyset$ gleichmächtig zu $\underline{0}$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 + 2x = 3x^2\}$ $=$ $\{0, 1, 2\}$

  $\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x-2) = 0$

Die Mächtigkeit von Mengen (Forts.)

Definition
M endliche Menge, $n \in \mathbb{N}_0$ mit M gleichmächtig zu $\underline{n}$

Mächtigkeit von M:

$$|M| := n$$

Beispiele

- $|\{1, 3, 17\}| = 3$
- $|\{1, 1, 1\}| = 1$
- $|\{\{1\}\}| = 1$
- $|\{1, \{1\}\}| = 2$

Die Mächtigkeit von Mengen (Forts.)

Bemerkung

Es seien M, N endliche Mengen und $f : M \to N$ eine Abbildung.

- $|f(M)| \leq |M|$.
- $|f(M)| \leq |N|$.

$f(M) = \{f(x) \mid x \in M\} \subseteq N$

$\Rightarrow |f(M)| \leq |M|$

$\Downarrow$

$|f(M)| \leq |N|$

Die Mächtigkeit von Mengen (Forts.)

Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung und M, N endlich.

Bemerkungen

- f injektiv $\Leftrightarrow |f(M)| = |M|$.
- f surjektiv $\Leftrightarrow |f(M)| = |N|$.
- Ist $|M| = |N|$, dann sind äquivalent:
  - f injektiv
  - f surjektiv
  - f bijektiv

Dedekind'sches Schubfachprinzip

Werden m Objekte auf n Schubfächer verteilt, und ist $m > n$, dann gibt es ein Schubfach, welches mindestens zwei Objekte enthält.

- Ist $|M| > |N|$, dann ist f nicht injektiv.