Wiederholung

M, N Mengen

Relation zwischen M und N: Teilmenge $R \subset M \times N$

$$(x,y) \in R \iff: x R y$$

$M = N$: Relation auf M

$$R \subset M \times M$$

Name	Für alle $x, y, z \in M$	~~Beispiel~~
(R) reflexiv	$x R x$	
(S) symmetrisch	$x R y \Rightarrow y R x$	
(A) antisymm.	$x R y$ und $y R x \Rightarrow x = y$	
(T) transitiv	$x R y$ und $y R z \Rightarrow x R z$	
(V) vollständig	$x R y$ oder $y R x$	

			Bsp
Äquivalenzrelation	$\Leftrightarrow$	(R), (S), (T)	Bildgleichheit $=_f$, $f: M \to N$
Ordnungen	$\Leftrightarrow$	(R), (A), (T)	$\subseteq$ auf $\mathrm{Pot}(N)$
Totalordnung	$\Leftrightarrow$	Ordnung und (V)	$\leq$ auf $\mathbb{R}$

C Äquivalenzrel. auf M

$x \in M$: $[x]_C = \{ y \in M \mid y R x \}$ Äquivalenzklasse von x

M/C : $\{ [x]_C \mid x \in M \}$ Quotientenmenge „M modulo C"

$\pi : M \to M/C$, $x \mapsto [x]_C$ Quotientenabb.

Hatten : $[x]_C = [y]_C \Leftrightarrow x\, C\, y \Leftrightarrow y\, C\, x$

$$M \ni z \in [x]_C \cap [y]_C \Rightarrow z\, C\, x \text{ und } z\, C\, y \underset{(S)}{\Rightarrow}$$

$$x\, C\, z \text{ und } z\, C\, y \underset{(T)}{\Rightarrow} x\, C\, y \Rightarrow [x]_C = [y]_C$$

Äquivalenzrelationen (Forts.)

Erinnerung

M Menge

Partition von M: $\mathcal{P} \subseteq \mathrm{Pot}(M)$ mit

- $\emptyset \notin \mathcal{P}$,
- $C \cap C' = \emptyset$ für $C \neq C' \in \mathcal{P}$,
- $M = \cup_{C \in \mathcal{P}} C$.

Beispiel

$\{\{1, 2, 4\}, \{3\}\}$ ist Partition von $\{1, 2, 3, 4\}$

Äquivalenzrelationen (Forts.)

Satz
Es sei M Menge, C Äquivalenzrelation auf M.
Dann ist M/C eine Partition von M.

Bew.: $M/C = \{ [x]_C \mid x \in M \}$

$x \in [x]_C \Rightarrow [x]_C \neq \emptyset$ für alle $x \in M$ (C reflexiv)

$z \in [x]_C \cap [y]_C \underset{\text{oben}}{\Rightarrow} [x]_C = [y]_C$

$\Rightarrow M/C$ paarweise disjunkt

Sei $x \in M \Rightarrow [x]_C \in M/C$ und $x \in [x]_C$

$\Rightarrow \bigcup_{x \in M} [x]_C = M$

Äquivalenzrelationen (Forts.)

Hauptsatz über Äquivalenzrelationen

Es sei M eine Menge.

Dann existiert eine Bijektion

$$\{C \mid C \text{ ist Äq.rel. auf } M\} \to \{\mathcal{P} \mid \mathcal{P} \text{ ist Partition von } M\}$$
$$C \mapsto M/C$$

Bew: $x, y \in M$, $\quad x \, C \, y \iff [x]_C = [y]_C$

Also $\{C\} \to \{P\}$ ist injektiv.

Sei nun P Partition von M, Definiere

$C_P := \{ (x,y) \in M \times M \mid$ es gibt $U \in P$ mit $x, y \in U \}$

Dann: $\quad M/C_P = P$. Also ist die Abb. surjektiv.

Homomorphiesatz für Mengen

Beispiel

Es sei $f : M \to N$ Abbildung.

- Nicht-leere Fasern von f bilden Partition von M (frühere Folie).
- Welche Äquivalenzrelation?
- Bildgleichheit: $xR_f x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$.

Homomorphiesatz für Mengen (Forts.)

Homomorphiesatz für Mengen

Es sei $f : M \to N$ Abbildung, und

$$\kappa : M \to M/R_f$$

die Quotientenabbildung zur Bildgleichheit R_f.

Dann existiert „wohldefinierte Abbildung"

$$\bar{f} : M/R_f \to N, \; [x]_{R_f} \mapsto f(x)$$

$$\overset{\shortparallel}{[y]_{R_f}} \quad \Rightarrow f(x) = f(y)$$

mit

$$f = \bar{f} \circ \kappa$$

- $\bar{f}$ injektiv
- $\mathrm{Im}\,\bar{f} = \mathrm{Im}\,f$ $\quad \Leftrightarrow$ Bild $\bar{f}$ = Bild f

Homomorphiesatz für Mengen (Forts.)

Beispiel

$f\colon \{1,2,3,4\} \to \mathbb{Z}$, $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 1$, $3 \mapsto 3$, $4 \mapsto 1$

$[1]_{R_f} = \{1,2,4\} \qquad [3]_{R_f} = \{3\}$

$$\pi : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}/R_f$$

$$\begin{matrix} 1,2,4 & \mapsto & [1]_{R_f} \\ 3 & \mapsto & [3]_{R_f} \end{matrix}$$

$$\bar{f} : \{\{1,2,4\},\{3\}\} \to \mathbb{Z}$$

$$\begin{matrix} \{1,2,4\} & \mapsto & 1 \\ \{3\} & \mapsto & 3 \end{matrix}$$

Homomorphiesatz für Mengen (Forts.)

Beispiel

P: farbige Glasperlen in Dose

F: Farben

$f: P \to F$: Zuordnung der zugehörigen Farbe zu jeder Glasperle

$x \, R_f \, y \iff$ x und y haben gleiche Farbe

$\bar{f}: \; P/R_f \to F$

$\{y \text{ hat gleiche Farbe wie } x\} \mapsto$ Farbe von x

Ordnungen

Definition
X Menge

- *Präordnung* auf X: transitive, reflexive Relation auf X
- *Ordnung* auf X: antisymmetrische Präordnung auf X
- *Totalordnung* auf X: vollständige Ordnung auf X

Ordnungen (Forts.)

- *Präordnung*:
  - reflexiv
  - transitiv
- *Ordnung*:
  - reflexiv
  - antisymmetrisch
  - transitiv
- *Totalordnung*:
  - reflexiv
  - antisymmetrisch
  - transitiv
  - vollständig

Ordnungen (Forts.)

Beispiele

- $\leq$ auf $\mathbb{N}$: refl., trans., antisym., vollst. Totalord.
- M Menge

  $\subseteq$ auf $\mathrm{Pot}(M)$: refl., trans., antisym., $\neg$ vollst. Ordnung
- $<$ auf $\mathbb{N}$: $\neg$ refl., trans., antisym., $\neg$ vollst.
- „$|$" auf $\mathbb{Z}$: $a, b \in \mathbb{Z}$. $a \mid b \Leftrightarrow$ es gibt ein $x \in \mathbb{Z}$ ~~mit~~ mit $a \cdot x = b$

  refl., trans., $\neg$ antisym., $\neg$ vollst.

Geordnete Mengen

Definition

- *Prägeordnete Menge*: besteht aus
  - M Menge
  - o Präordnung auf M

  Missbrauch von Notation: bezeichne prägeordnete Menge wieder mit M

  Terminologie und Notationen:
  - *Präordnung* von M: o
    Notation: $\leq := o$
- *geordnete Menge*: prägeordn. Mge M mit: $\leq$ Ordnung
- *totalgeordnete Menge*: prägeordn. Mge M mit: $\leq$ Totalordn.

Geordnete Mengen (Forts.)

Beispiel

- $\mathbb{N}$ mit üblicher Ordnung
- M Menge

  $\mathrm{Pot}(M)$ mit Teilmengenrelation

Definition

M geordnete Menge

Striktordnung von M: für $x, y \in M$: $\quad x < y :\Leftrightarrow x \leq y$ und $x \neq y$

Geordnete Mengen (Forts.)

Bemerkung

M prägeordnete Menge, $U \subseteq M$

U wird zu prägeordneter Menge mit:
für $u, v \in U$: $\quad u \leq^U v :\Leftrightarrow u \leq^M v$

Beispiele

- $\underline{n} \subseteq \mathbb{N}$ $\qquad \leq^{n}$ ist Totalordn auf $\underline{n}$
- M Menge

  $\mathrm{Pot}(M) \setminus \{\emptyset\} \quad \subseteq \mathrm{Pot}(M)$. Ordnung bzgl. „$\subseteq$“

Geordnete Mengen (Forts.)

Bemerkung

M prägeordnete Menge
Definiere Relation $\diamond$ auf M durch

$$x \diamond y :\Leftrightarrow x \leq y \text{ und } y \leq x.$$

Dann ist $\diamond$ eine Äquivalenzrelation auf M. (R) ✓, (S) ✓ (T) ✓

Beispiel

Sei „|“ die Teilbarkeitsrelation auf $\mathbb{Z}$.
Was ist $\diamond$? Äquivalenzklassen:

$R: \{\{z, -z\} \mid z \in \mathbb{Z}\}$ $\mathbb{Z}/R$ ist „|“ Ordnung

Bsp: $M = \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) $x R y :\Leftrightarrow |x| \leq |y|$

$x \diamond y \Leftrightarrow |x| = |y|$

Extremale Elemente

Definition

M prägeordnete Menge, $x \in M$

- x ist *minimales* Element: für $y \in M$: $\quad y \leq x \Rightarrow x \leq y$
- x ist *maximales* Element: für $y \in M$: $\quad x \leq y \Rightarrow y \leq x$

Bemerkung

M geordnete Menge, $x \in M$

- x minimal $\Leftrightarrow$ (für $y \in M$: $\quad y \leq x \Leftrightarrow x = y$) wegen Antisymm.
- x maximal $\Leftrightarrow$ (für $y \in M$: $\quad x \leq y \Leftrightarrow x = y$)

Extremale Elemente (Forts.)

Beispiel

- in $\mathbb{N}$:
  - minimal: 1 ist minimal
  - maximal: gibt es nicht
- M Menge

  „$\subseteq$" $U \subseteq V$, $x \in U \Rightarrow x \in V$

  in $\mathrm{Pot}(M)$:
  - minimal: $\emptyset \in \mathrm{Pot}(M)$
  - maximal: $M \in \mathrm{Pot}(M)$
- $\mathrm{Pot}(\{1,2,3\}) \setminus \{\emptyset\}$:
  - minimal: $\{1\}, \{2\}, \{3\}$
  - maximal: $\{1,2,3\}$
- $\mathrm{Pot}(\{1,2,3\}) \setminus \{\{1,2,3\}\}$:
  - minimal: $\emptyset$
  - maximal: $\{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}$

Extremale Elemente (Forts.)

Definition

M prägeordnete Menge, $x \in M$

- x ist *kleinstes* Element (oder *Minimum*): für $y \in M$: $\quad x \leq y$
- x ist *größtes* Element (oder *Maximum*): für $y \in M$: $\quad y \leq x$

Bemerkung

M prägeordnete Menge, $x \in M$

x kleinstes Element $\Rightarrow$ x minimales Element ✓

x größtes Element $\Rightarrow$ x maximales Element

Extremale Elemente (Forts.)

Beispiel

- in $\mathbb{N}$:
  - kleinst: 1
  - größt: keines
- M Menge

  in $\mathrm{Pot}(M)$:
  - kleinst: $\emptyset$
  - größt: M
- $\mathrm{Pot}(\{1,2,3\}) \setminus \{\emptyset\}$:
  - kleinst: kein $\quad (\{1\} \nsubseteq \{2,3\})$
  - größt: M
- $\mathrm{Pot}(\{1,2,3\}) \setminus \{\{1,2,3\}\}$:
  - kleinst: $\emptyset$
  - größt: keins.

Extremale Elemente (Forts.)

Bemerkung

M prägeordnete Menge, x kleinstes Element, $y \in M$

äquivalent:

- (a) y kleinstes Element
- (b) y minimales Element
- (c) $x \leq y$ und $y \leq x$
- (d) $y \leq x$

(c) $\Rightarrow$ (d), (b) $\Rightarrow$ (c) Def von minimal. Element, (a) $\Rightarrow$ (b) oben

(d) $\Rightarrow$ (a) gegeben $y \leq x$, Sei $z \in M$.

Da x kleinstes Element, $x \leq z$ $\Rightarrow$ $y \leq x$ und $x \leq z$

$\underset{(T)}{\Rightarrow}$ $y \leq z$. Also ist y kleinstes Element.

Frage: x kleinstes Element

y kleinstes Element

Ist $x = y$?

Antw.: Im Allgemeinen: nein.

Aus der Vor. folgt nur: $x \leq y$ und $y \leq x$.

Falls aber $\leq$ eine Ordnung ist, so folgt wegen der Antisymmetrie: $x = y$. In diesem Fall ist ein kleinstes Element eindeutig.

~~Bsp~~ Beispiel in $\mathbb{Z}$ mit „$|$" Präordnung: 1 und -1 sind kleinstes Element.

Extremale Elemente (Forts.)

Korollar

M geordnete Menge

es gibt höchstens ein kleinstes Element in M

Notation

M geordnete Menge

- es gebe kleinstes Element x in M

$$\min M := x$$

- es gebe größtes Element x in M

$$\max M := x$$

Extremale Elemente (Forts.)

Proposition

M total geordnete Menge, $x \in M$

x minimales Element in M $\Leftrightarrow$ x kleinstes Element in M

„$\Leftarrow$" siehe weiter oben

„$\Rightarrow$" Sei x minimal. Für $y \in M$ gilt wegen (V): $x \leq y$ oder $y \leq x$.

Da x minimal, folgt in jedem Fall $x \leq y$. Also ist x kleinstes Element.