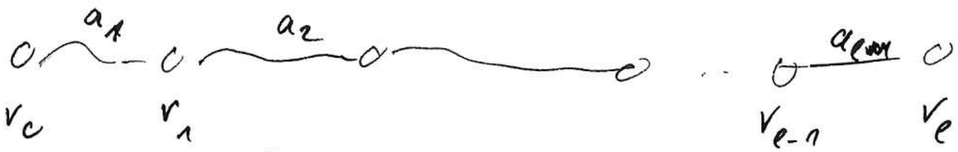
Wiederholung

- gewichteter Graph, $G = (V, E, f)$, (V, E) Graph

  $f: E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ Gewichtsfunktion

  $z = (v_0, v_1, \dots, v_\ell)$: $\quad f(z) := \sum_{i=1}^{\ell} f(v_{i-1} v_i)$ Gewicht von z



$$\sum_{i=1}^{\ell} a_i$$

$$d(v,w) := \begin{cases} \infty, & \text{falls } v \nsim w \\ \min \{ f(z) \mid z \text{ ist } v\text{-}w\text{-Pfad} \}, & \text{falls } v \sim w \end{cases}$$

- Dijkstras Algorithmus berechnet, ausgehend von $w \in V$:

  - $d(w,v)$ $\forall\, v \in V$ mit $v \sim w$
  - Für jedes $v \in V$ mit $v \sim w$ einen Knoten u, der auf einem w-v-Pfad vom Gewicht $d(w,v)$ unmittelbar vor v kommt.

- – G heißt <u>Wald</u>, wenn G kreisfrei ist.
  – G " <u>Baum</u>, falls G zshgd. Wald ist
  – G Wald : Blätter sind Knoten vom Grad 0 oder 1

    o isolierte Knoten, . . . —o

- $G = (V, E)$ Graph, $n_G > 0$.

<u>Bem</u>: (a) G kreisfrei $\Leftrightarrow$ jede Kante von G ist Brücke

(b) G Baum, $n_G \geq 2 \Rightarrow G$ hat ≥ 2 Blätter

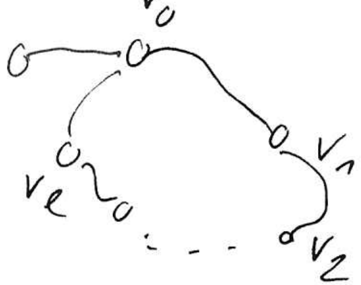
(c) G Baum, $n_G \geq 3 \Rightarrow G$ hat $\leq n_G - 1$ Blätter

Beweis: (a) Sei $e = uv \in E$

e Nicht Brücke $\iff \exists$ u-v-Kantenzug ohne e

$\iff \exists$ Kreis über e

(b) $(v_0, v_1, \ldots, v_\ell)$ max. Pfad in G



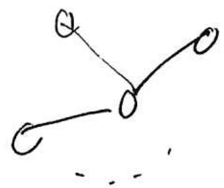
$\Rightarrow \deg(v_0) = \deg(v_\ell) = 1$

(c) Andernfalls gäbe es n_G Blätter, $\deg(v) \le 1 \ \forall v \in V$

$$\Rightarrow n_G \geq \sum_{v \in V} \deg(v) = 2\, m_G \geq 2(n_G - 1) = 2n_G - 2$$

$m_G \geq n_G - r_G$

$\Rightarrow n_G \le 2.$



Wälder und Bäume (Forts.)

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $n_G > 0$.

Erinnerung

- r_G: Anzahl der Zusammenhangskomponenten von G
- Es ist $r_G \geq n_G - m_G$.
- Es sei $e \in E$ und $G' := (V, E \setminus \{e\})$. Dann ist $r_{G'} \leq r_G + 1$. Weiter ist $r_{G'} = r_G + 1$ genau dann, wenn e eine Brücke ist.

Satz

Es gilt $r_G = n_G - m_G$ genau dann, wenn G kreisfrei ist.

Beweis des Satzes

„$\Leftarrow$" Induktion über m_G.

$\underline{m_G = 0}$: $\quad n_G = r_G \quad \checkmark$

$\underline{m_G > 0}$: Sei $e \in E$, $G' := (V, E \setminus \{e\})$

$$\underset{G' \text{ kreisfrei}}{\overset{\text{Induktion}}{\Longrightarrow}} r_G + 1 = r_{G'} = n_{G'} - m_{G'} = n_G - (m_G - 1) = n_G - m_G + 1$$

„$\Rightarrow$" Kontraposition: Sei G nicht kreisfrei

Sei $e \in E$ Nicht-Brücke, $G' := (V, E \setminus \{e\})$

$$\Rightarrow r_G = r_{G'} \geq n_{G'} - m_{G'} = n_G - m_G + 1 > n_G - m_G . \quad \blacksquare$$

Wälder und Bäume (Forts.)

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $n_G > 0$.

Folgerung

G ist genau dann ein Baum, wenn mindestens zwei der folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(a) ▶ G ist kreisfrei. (a') $r_G = n_G - m_G$.

(b) ▶ G ist zusammenhängend. (b') $r_G = 1$.

(c) ▶ $m_G = n_G - 1$. (c') $m_G = n_G - 1$.

Wälder und Bäume (Forts.)

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $n_G > 0$.

Erinnerung

- Ist G zusammenhängend, dann ist $m_G \geq n_G - 1$.
- Ist G kreisfrei, dann ist $m_G = n_G - r_G \leq n_G - 1$.

Bemerkung

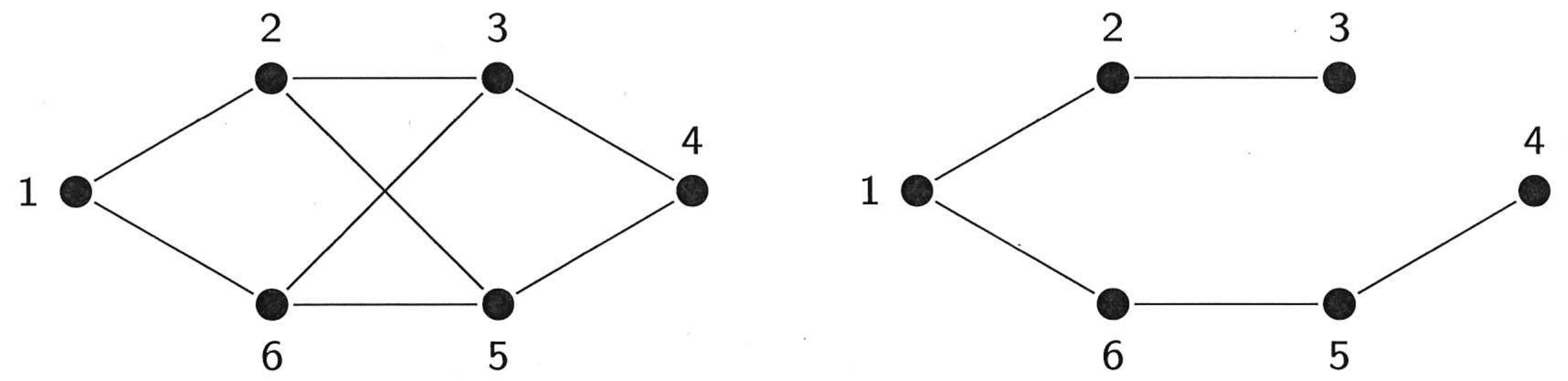
- Ein Baum ist ein zusammenhängender Graph mit minimal möglicher Kantenzahl.
- Ein Baum ist ein kreisfreier Graph mit maximal möglicher Kantenzahl.

Spannbäume

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $n_G > 0$.

Definition
Ein Teilgraph $G' = (V', E')$ von G heißt *Spannbaum* von G (engl. *spanning tree*), wenn G' ein Baum ist und $V' = V$.

Beispiel



Spannbäume (Forts.)

Satz

Jeder zusammenhängende Graph hat einen Spannbaum.

Beweis

Breitensuche.

Breitensuche startet bei $w \in V$, liefert, für alle $v \in V \setminus \{w\}$:

$p[v]$: Vorgänger von v auf einem w-v-Pfad der Länge $d(w,v)$

$E' := \{ p[v]v \mid v \in V \setminus \{w\}\}$; dann ist (V,E') Spannbaum

(a) (V,E') ist zshgd, da in (V,E') für alle $v \in V$ gilt: $v \sim w$

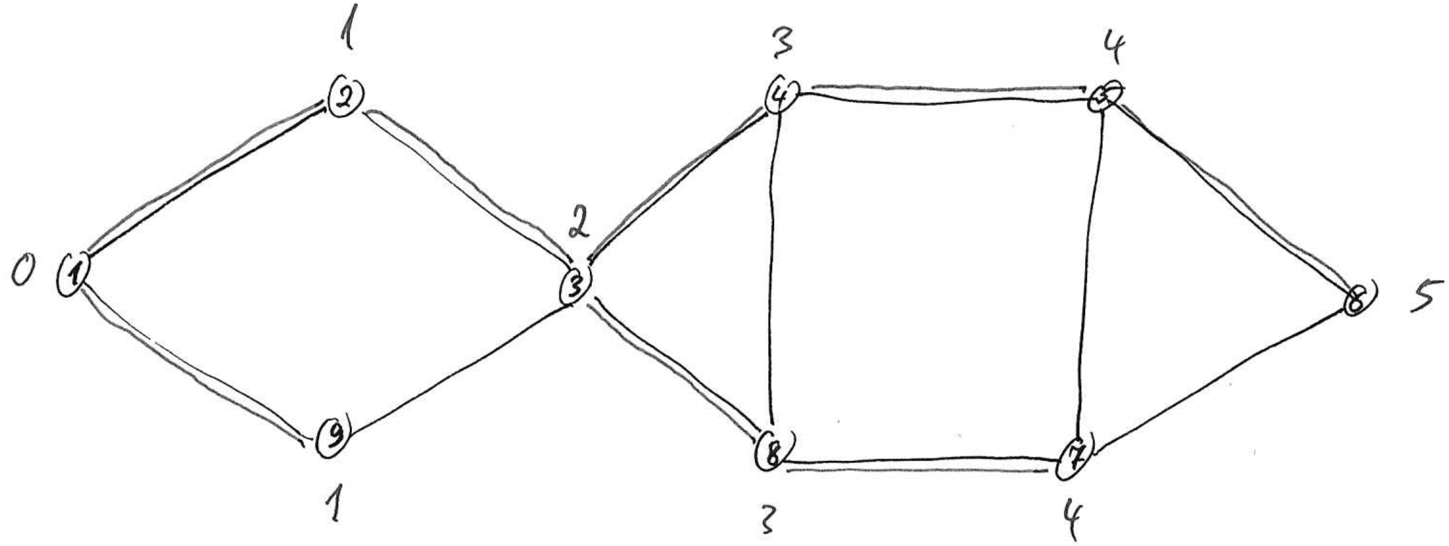
(b) Die Kanten von (V,E') sind paarw. verschieden, (selbst)

$|E'| = |V| - 1$

$\Rightarrow$ (V,E') ist Baum.

Beispiel: Breitensuche mit $w = 1$

$Q: \underline{\underline{0}}, \underline{\underline{2}}, \underline{\underline{9}}, \underline{\underline{3}}, \underline{\underline{4}}, \underline{\underline{8}}, \underline{\underline{5}}, \underline{\underline{7}}, \underline{\underline{6}}$



rot: $d[v]$

blau: $p[v]v$

v	1	2	9	3	4	8	5	7	6
d	0	1	1	2	3	3	4	4	5
p	–	1	1	2	3	3	4	8	5

Spannbäume (Forts.)

Es sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph.

Algorithmus (Sukzessives Entfernen von Kanten)

- Initialisiere $B := E$.
- Entferne sukzessive solche Kanten aus B, die keine Brücken in (V, B) sind.
- Ist das nicht mehr möglich, dann ist (V, B) ein Spannbaum von G.

<u>Beweis</u> der Korrektheit:

Zu Beginn: $(V, B) = (V, E)$ zshgd.

Nur Nicht-Brücken $e \in B$ werden entfernt: $(V, B \setminus \{e\})$ zshgd.

Hat (V, B) keine Nicht-Brücken $\Rightarrow$ (V, B) kreisfrei

Dann (V, B) Baum.

Spannbäume (Forts.)

Es sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph.

Algorithmus (Sukzessives Hinzufügen von Kanten)

- Initialisiere $B := \emptyset$.
- Füge sukzessive solche Kanten zu B hinzu, die in E liegen und deren Endknoten in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von (V, B) liegen.
- Ist das nicht mehr möglich, dann ist (V, B) ein Spannbaum.

Beweis des Algorithmus:

Zu Beginn: (V, B) kreisfrei

$e \in E$ mit Endknoten in versch. Z.K. von (V, B)

$\Rightarrow$ $(V, B \cup \{e\})$ kreisfrei

Hat (V, B) keine solchen Kanten mehr, ist (V, B) zshgd.

Dann ist (V, B) ein Baum.

Spannbäume (Forts.)

Es sei $G = (V, E, f)$ ein gewichteter Graph.

Erinnerung

- (V, E) ist ein Graph, und $f : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Gewichtsfunktion.
- Für $T \subseteq E$ heißt $f(T) := \sum_{e \in T} f(e)$ das Gewicht von T.

Definition

Ein *minimaler Spannbaum* von G ist ein Spannbaum (V, B) von G mit minimalem Gewicht $f(B)$ unter allen Spannbäumen von G.

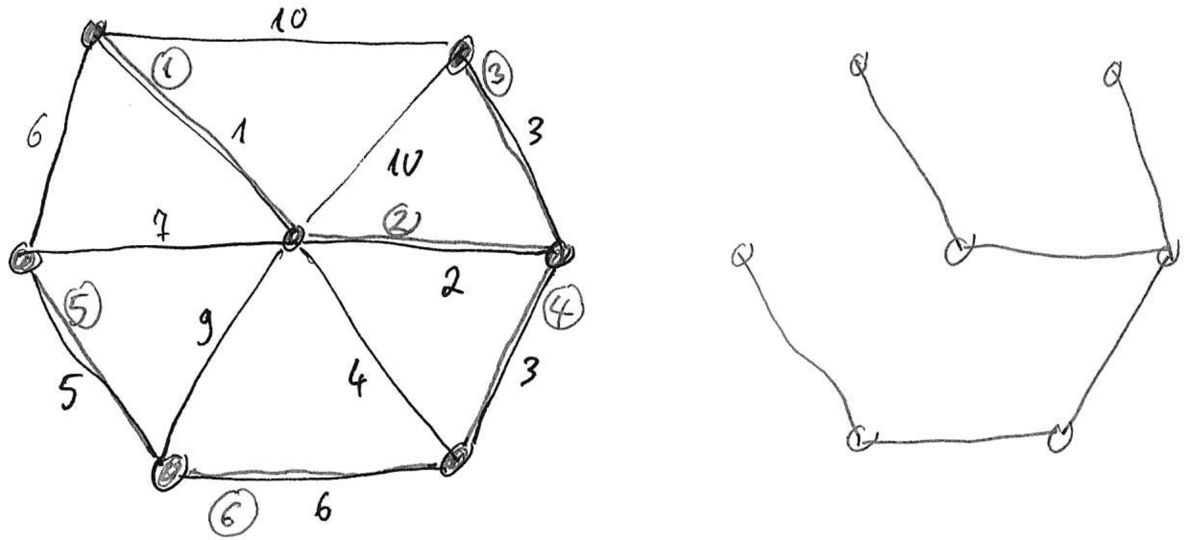
Spannbäume (Forts.)

Es sei $G = (V, E, f)$ ein gewichteter Graph.

Algorithmus (Kruskal)

- Initialisiere $B := \emptyset$.
- Füge sukzessive solche Kanten aus E zu B hinzu, deren Endknoten in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von (V, B) liegen, und unter allen solchen jeweils einen von minimalem Gewicht.
- Ist das nicht mehr möglich, dann ist (V, B) ein minimaler Spannbaum.

Beispiel



Spannbäume (Forts.)

Austauschlemma

Es seien (V, A) und (V, B) zwei Bäume mit derselben Knotenmenge V.

Für jedes $a \in A \setminus B$ gibt es ein $b \in B \setminus A$ so, dass $(V, B \cup \{a\} \setminus \{b\})$ auch ein Baum ist.

<u>Beweis</u> des Austauschlemmas: $|V| = n_G$

$|B| = n_G - 1$. Es sei $a \in A \setminus B$.

$(V, B \cup \{a\})$ kein Baum, da $|B \cup \{a\}| = n_G > n_G - 1$.

$(V, B \cup \{a\})$ enthält Kreis, der eine Kante $b \in B \setminus A$ enthält

(sonst hätte (V, A) einen Kreis)

$(V, (B \cup \{a\}) \setminus \{b\})$ ist zshgd., da b Teil eines Kreises

$|(B \cup \{a\}) \setminus \{b\}| = n_G - 1 \Rightarrow (V, (B \cup \{a\}) \setminus \{b\})$ ist Baum. $\blacksquare$

Beweis der Korrektheit von Kruskals Algorithmus: $n := n_G = |V|$

Es sei (V,A) der vom Algorithmus produzierte Spannbaum

Seien $a_1, \dots, a_{n-1}$ Kanten in A in der Reihenfolge des Alg.

Angenommen: (V,A) ist kein minimaler Spannbaum

Wähle minimalen Spannbaum (V,B) mit

$i_B := \max \{ 1 \leq j \leq n-1 \mid a_1, \dots, a_{j-1} \in B \text{ und } a_j \notin B \}$ ist maximal unter

allen minimalen Spannbäumen.

Sei $i := i_B$.

Nach Austauschlemma ex. $b \in B \setminus A$, so dass

$(V, (B \cup \{a_i\}) \setminus \{b\})$ ein Baum ist; das ist ein Spannbaum.

$(V, (B \cup \{a_i\}) \setminus \{b\})$ ist kein minimaler Spannbaum
(Wahl von i)

$\Rightarrow$ $f(a_i) > f(b)$ / weil a_i und b die einzigen Kanten sind, an denen sich (V, B) und $(V, (B \cup \{a_i\}) \setminus \{b\})$ unterscheiden.

$(V, \{a_1, \ldots, a_{i-1}, b\})$ kreisfrei, da Teilgraph von (V, B)

Alg. hätte im i-ten Schritt b statt a_i ausgewählt. $\blacksquare$