Lehrstuhl für Informatik 1
Prof. Dr. Gerhard Woeginger
Jan Böker, Tim Hartmann

WS 2018/19

Übung zur Vorlesung
Berechenbarkeit und Komplexität

Lösung Blatt 8

Tutoriumsaufgabe 8.1

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen primitiv rekursiv sind. Verwenden Sie dazu die Definition von primitiv rekursiven Funktionen, und bauen Sie die Funktionen aus konstanten Funktionen, Projektionen und Nachfolgerfunktion durch Komposition und primitive Rekursion zusammen. Sie dürfen die Funktionen add, mult, pred, sub aus der Vorlesung verwenden.

(a) $\boldsymbol{f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}}$ **mit** $\boldsymbol{f_1(x) = 2x + 1}$

$f_1(x) = \mathrm{succ}(\mathrm{add}(x, x))$.

(b) $\mathbf{sgn} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ **mit** $\mathbf{sgn}(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{x} \geq \mathbf{1}]$

sgn ist primitiv rekursiv mittels primitiver Rekursion:

$\mathrm{sgn}(0) = g() = 0$

$\mathrm{sgn}(m + 1) = h(m, \mathrm{sgn}(m)) = 1.$

(c) $\mathbf{leq} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ **mit** $\mathbf{leq}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = [\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}]$

$\mathrm{leq}(a, b)$ lässt sich primitiv rekursiv berechnen mit $\mathrm{sgn}(\mathrm{sub}(a, b + 1))$.

(d) $\boldsymbol{f_4 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}}$ **mit** $\boldsymbol{f_4(x, y) = x}$ **DIV** $\boldsymbol{y}$

Hilfsfunktion: $f_4'(m, x, y) = \max\{z \leq m \mid y \cdot z \leq x\}$ ist primitiv rekursiv da

$f_4'(0, x, y) = g(x, y) = 0,$

$f_4'(m+1, x, y) = \max\{f_4(m, x, y),\ [(m+1) \cdot y \leq x](m+1)\}$ ist primitiv rekursiv, da

$$\begin{aligned} f_4'(m + 1, x, y) &= h(m, f_4'(m, x, y), x, y) \\ &= [(m + 1) \cdot y \leq x](m + 1) + (1 - [(m + 1) \cdot y \leq x]) \cdot f_4'(m, x, y) \end{aligned}$$

und nach VL mult, pred primitiv rekursiv sind, und $[(m+1) \cdot y \leq x]$ primitiv rekursiv ist nach Aufgabe c).

Dann ist $f_4(x, y)$ primitiv rekursiv, da $f_4(x, y) = f_4(x, x, y)$, da $\max_z\{y \cdot z \leq x\} \leq x$.

Tutoriumsaufgabe 8.2

Wir betrachten die Funktion $\boldsymbol{f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}}$**, die durch** $\boldsymbol{f(x, y) = \binom{x+y+1}{2} + x}$ **festgelegt wird.**

(a) Zeigen Sie: f ist eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}^2$ und $\mathbb{N}$

Intuition: In der k-ten Diagonalen liegen k Zahlen. Vor der ersten Zahl der $(k+1)$-ten Diagonale kommen daher $1 + \cdots + k = \binom{k+1}{2}$ Zahlen (kleiner Gauß). Für (x, y) ist $x + y$ die Diagonale und x die Position innerhalb der Diagonalen.

Surjektivität:

Wir zeigen, dass für $n \in \mathbb{N}$ Werte $a, b \in \mathbb{N}$ gibt so dass $a + b = n$.

Sei $m := \text{argmax}_i \binom{i+1}{2} \leq n$ ("die Diagonale von n").

Sei $x := n - \binom{m+1}{2}$. Es gilt $0 \leq x \leq m$. Angenommen $x > m$. Dann folgt $n - \binom{m+1}{2} > m$ und $n > \binom{m+1}{2} + m = \binom{m+2}{2}$. Es folgt der Widerspruch $\text{argmax}_i \binom{i+1}{2} \geq m + 1$. Also gilt $x \leq m$.

Sei $y := m - x$. Es gilt $y \geq 0$, da $x \leq m$. Dann gilt

$$f(x, y) = \binom{x + y + 1}{2} + x = \binom{m + 1}{2} + \left(n - \binom{m + 1}{2}\right) = n$$

Injektivität: Angenommen $f(x, y) = f(x', y')$ mit $x + y \neq x' + y'$ ("Angenommen $f(x, y) = f(x', y')$ obwohl sie sogar in verschiedenen Diagonalen sein sollten".) O.B.d.A. sei $x + y = m$ und $x' + y' = m + k$ für ein $k \geq 1$. Dann folgt aus $f(x, y) = f(x', y')$

$$\frac{m^2 + m}{2} + x = \frac{m^2 + 2mk + m + k^2 + k}{2} + x'$$

$$\Rightarrow x = \frac{2mk + k^2 + k}{2} + x'$$

$$\Rightarrow x \geq m + 1 + x', \quad \text{da } k \geq 1$$

$$\Rightarrow x \geq x + y + 1 + x',$$

ein Widerspruch, da $x', y \geq 0$.

Falls $f(x, y) = f(x', y')$, dann gilt also $x + y = x' + y'$. Dann folgt

$$\binom{x + y + 1}{2} + x = \binom{x' + y' + 1}{2} + x' \quad \Rightarrow \quad x = x'.$$

Wegen $x + y = x' + y'$, folgt auch $y = y'$.

(b) Skizzieren Sie einen Algorithmus, der für eine gegebene natürliche Zahl n zwei natürliche Zahlen x und y mit $f(x, y) = n$ berechnet.

Berechne m, x, y, wie wir bei a) Surjektivität gezeigt haben:

Sei $m = 0$.

Solange $\binom{m+1}{2} \leq n$, erhöhe m um eins.

Sei $m := m - 1$.

Berechne x, y wie oben.

Tutoriumsaufgabe 8.3

(a) **Es sei $\boldsymbol{f : \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}}$ definiert durch $\boldsymbol{f(a,b,c,d) = (a^3 + ba^2 + ca) \dot{-} d}$. Bestimmen Sie die Funktion $\boldsymbol{\mu f}$. Welchen Wert hat $\boldsymbol{\mu f(3,1,5)}$?**

$\mu f(3,1,5) = \min\{a \mid f(a,3,1,5) = 0, \ \forall_{a'<a} \text{ gilt } f(a',3,1,5) \neq \perp\}$

$= \min\{a \mid (a^3 + 3a^2 + 1a) \dot{-} 5 = 0\} = 0$, da $(0^3 + 3 \cdot 0^2 + 0) \dot{-} 5 = 0$.

(b) **Welche wohlbekannte Funktionen $\boldsymbol{g}$ wird hier mit Hilfe des $\boldsymbol{\mu}$-Operators definiert?**

Die Funktion $\boldsymbol{f : \mathbb{N}^3 \to \{0,1\}}$ ist durch $\boldsymbol{f(x,y,z) = [\nexists w : wy + x = z]}$ festgelegt. Die Funktion $\boldsymbol{g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}}$ ist dann gegeben durch $\boldsymbol{g(y,z) = 0}$ falls $\boldsymbol{yz = 0}$ und $\boldsymbol{g(y,z) = \mu f(x,y,z)}$ andernfalls.

Für $yz \neq 0$ gilt

$g(y,z) = \mu f(x,y,z) = \min\{x \mid \exists w : wy + x = z\}$.

Es wird von allen $w, x \in \mathbb{N}$ mit $wy + x = z$ wird w, x mit minimalem x gesucht, also so dass $x < w$. Daher ist x der Rest der Division von z durch y. $g(y,z)$ berechnet also $y \mod z$.

(c) **Beweisen Sie unter Verwendung von Komposition, primitiver Rekursion und $\boldsymbol{\mu}$-Operator, dass die folgende Funktion $\boldsymbol{\mathbb{N} \to \mathbb{N}}$ $\boldsymbol{\mu}$-rekursiv sind. $\boldsymbol{f(a) = \max\{n \mid 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 < a\}}$**

Es gilt, dass $f(a) = \min\{n \mid 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 \geq a\} - 1$.

Wir können $f'(n) := 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ primitiv rekursiv berechnen mit

$f'(0) = g() = 0$,

$f'(n+1) = h(n, f'(n)) = (n+1)^2 + f'(n) = \text{add}(\text{mult}(n+1, n+1), \ f'(n))$.

Sei $f''(n,a) = 1 - [a \leq f'(n)]$ (alternativ $f''(n,a) = [a > f'(n)]$)). Die Funktion $f''(n,a)$ ist primitiv rekursiv, insbesondere nach Tutoraufgabe 8.1 c).

Dann gilt $f(a) = \mu f''(a) - 1$, und damit, dass $f(a)$ μ-rekursiv ist.