24.10.

Themen:

- Beschränktheit
- sup / inf
- Was ist $\mathbb{R}$?

<u>Bsp</u>: $M = \{\frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$

Eine obere Schranke ist 3, denn $3 > \frac{1}{n}$, $(3n > 1)$

-3718 alle $n \in \mathbb{N}$

Eine untere Schranke ist 0, denn $\frac{1}{n} > 0$, -3718

alle $n \in \mathbb{N}$

<u>Bsp</u>: K ang. Körper

$M = \{x \in K ; x \geq 0 \text{ und } x^2 < 2\}$

M ist nach unten beschränkt durch 0

M ist nach oben beschränkt durch $C = 2$,

denn aus $y > C$ folgt $\underset{(\geq 2)}{y^2 > C^2} = 4 > 2$,

also $y \notin M$.

Bemerkungen:

- $\sup M$ oder $\inf M$ müssen (a priori) nicht existieren

- Falls C ein Supremum von M ist, so ist C eindeutig bestimmt.

  Denn: Ist C^* auch Supremum von M, so gilt: (i) C^* ist obere Schranke, also $C^* \geq C$ (C sup)

  (ii) C ist obere Schranke, also $C \geq C^*$ (C^* sup)

  Also $C = C^*$

- $\max M$, $\min M$ müssen nicht existieren.

Bsp: $M = [0,1) \subset \mathbb{Q}$ $\quad \sup M = 1$; $\max M$ ex. nicht

$\inf M = \min M = 0$

4

Bsp: $M = \{x;\ x \geq 0 \text{ und } x^2 < 2\} \subset K$

(K ang. Körper)

(*) Falls $s = \sup M$ existiert, gilt $s^2 = 2$

(Also: Falls $K = \mathbb{Q}$, so existiert s nicht in $\mathbb{Q}$, denn es gibt keine rationale Zahl, deren Quadrat gleich 2 ist.)

Bew. (*):

1. Annahme: $s^2 < 2$.

Dann $\delta := 2 - s^2 > 0$

Sei $h > 0$; betrachte $(s+h)^2$:

$$(s+h)^2 = s^2 + h(2s+h) = 2 - (\delta - h(2s+h))$$

Idee: Finde $h_1 > 0$, so daß

(∗∗) $\delta - h_1\,(2s + h_1) > 0$

Daraus folgt $(s+h_1)^2 = 2 - (\underbrace{\delta - h_1(s+h_1)}_{>0}) < 2$

Damit Widerspruch zu „s obere Schranke",

wegen $s+h_1 > s$ und $s+h_1 \in M$

~~Zeige~~ zu (∗∗)! $h_1\,(2s+h_1) < \delta$

Es gilt $s<2$ (s.o.) und man kann $h_1 < 1$ annehmen.

Dann $h_1\,(2s+h_1) < h_1\,(2\cdot 2+1) = 5h_1$

Die Wahl $h_1 = \frac{\delta}{6}$ ✓ erfüllt nun ($5h_1 < \delta$!)

$h_1\,(2s+h_1) < 5\cdot h_1 = \frac{5}{6}\,\delta < \delta$,

wie gewünscht.

2. Annahme: $s^2 > 2$

Zeige: Dann ist s keine kleinste o.S., also Widerspruch.

Setze $\vartheta := s^2 - 2 > 0$

Ansatz für $h > 0$:

$$(s-h)^2 = \cancel{s^2} = s^2 - h(2s-h) = \vartheta + 2 - h(2s-h)$$

Bestimme h_2 so, daß $h_2(2s-h_2) < \vartheta$, also $(s-h_2)^2 > 2$

Insgesamt: $\left.\begin{array}{ll} s^2 < 2 & \text{ist falsch} \\ s^2 > 2 & \text{—\,"\,—} \end{array}\right\} \Rightarrow s^2 = 2$, falls s existiert.

7

<u>Bew.</u> (4.10)

$\mathbb{N} \neq \emptyset$, da $1 \in \mathbb{N}$.

Annahme: $\mathbb{N}$ nach oben beschränkt;

dann existiert $s = \sup \mathbb{N}$.

Es ist dann aber $s-1$ keine o.S. von $\mathbb{N}$;

d.h. es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $s-1 < m$

$\Rightarrow$ $s < m+1 \in \mathbb{N}$; Widerspruch zu

„s obere Schranke".

8

Bw. (4.11)

a) Nach (4.10) gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{b}{a} \overset{R2}{\Rightarrow} n \cdot a > b$

b) Annahme: $a \neq 0$, also $a > 0$.

Dann ex. $n \in \mathbb{N}$, so daß $n \cdot a > 1$ (Teil a) für $b = 1$)

$\overset{R2}{\Rightarrow} a > \frac{1}{n}$ $\lightning$, also Annahme falsch

c) gilt wie (3.7), da $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt.

Bw. (4.12)

(5)

Es ist $b - a > 0$, also ex. nach (4.11) ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot (b-a) > 1$ $\left(\Leftrightarrow \frac{1}{n} < b-a\right)$

<u>1. Fall:</u> $a > 0$. Betrachte

$M := \left\{ \frac{k}{n} ; k \in \mathbb{N}_0 \text{ und } \frac{k}{n} < \cancel{a}\,b \right\}$

Dann $0 \in M$ und $\cancel{a}\,b$ ist o.S. von M,

~~also existiert sup M. Weil M endlich~~,

ist $\sup M = \max M = \frac{m}{n}$; $m \in \mathbb{N}_0$ geeignet.

Es gilt dann $\frac{m}{n} < b$ und konstruktiv.

Weiter gilt $\frac{m-1}{n} > a$, annonek

$\frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} \leq a + \frac{1}{n}$

10

$$\cancel{\frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} \leq a + \frac{1}{n} < a + (b-a)} = b$$

~~inf~~ ~~Es existiert inf~~

1. Fall : $a > 0$: Dann ex. $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{k}{n} > a$

Also $M = \{k \in \mathbb{N} : \frac{k}{n} > a\} \neq \emptyset$ und nach unten beschränkt.

Damit existiert $\frac{m}{n} = \inf M = \min M$

Nach Konstruktion ~~existiert~~ gilt $q := \frac{m}{n} > a$.

Zeige noch $\frac{m}{n} < b$. Andernfalls

$\frac{m}{n} \geq b \Rightarrow \frac{m-1}{n} \geq b - \frac{1}{n} > a$,

also $\frac{m-1}{n} < \frac{m}{n}$ untere Schranke. ↯

<u>2. Fall</u> $a \leq 0$: Dann ex. $r \in \mathbb{N}$ mit

$a + r > 0$ (und $a + r < b + r$)

Nach Fall 1 ex. $\tilde{q} \in \mathbb{Q}$ mit

$a + r < \tilde{q} < b + r$

$\Rightarrow a < \underbrace{\tilde{q} - r}_{\in \mathbb{Q}} < b$

<u>Beweisidee</u> (4.13) für <u>Existenz</u>:

Setze $M := \{ z \in \mathbb{R} \, ; \, z \geq 0 \text{ und } z^n < x \}$

M ist nichtleer ($0 \in M$) und durch $\begin{cases} x & \text{für } x \geq 1 \\ 1 & \text{für } x < 1 \end{cases}$ nach oben beschränkt.

Also existiert $s = \sup M$ in $\mathbb{R}$

Führe die Annahmen $s^n < x$ bzw. $s^n > x$ zum Widerspruch; es bleibt nur $s^n = x$

<u>Beweis</u> für Eindeutigkeit in (4.13) per Widerspruch:

Annahme: y_1 und $y_2 \in \mathbb{R}_+$ erfüllen $y_1^n = x$ und $y_2^n = x$, aber $y_1 \neq y_2$.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit ⊛

Dann gilt (OE) $0 \le y_1 < y_2$,

damit nach §2: $y_1^n < y_2^n$

$\Rightarrow$ $x < x$ ↯

⊛ Fall $y_2 < y_1$ genau so (oder: Nummeriere um)

Bew. (4.14) a)

$$\left(\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}\right)^n = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{y}\right)^n$$

$$= x \cdot y$$

Andererseits

$$\left(\sqrt[n]{x \cdot y}\right)^n = x \cdot y$$

Eindeutigkeit in (4.13): $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$

c) $\left(\sqrt[n]{x^m}\right)^n = x^m$

$$\left(\left(\sqrt[n]{x}\right)^m\right)^n \underset{\S 2}{=} \left(\sqrt[n]{x}^{\,n}\right)^m = x^m$$

Eindeutigkeit in (4.13) $\Rightarrow$ Gleichheit.