LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. S. Walcher
Markus Hirshman, Dipl.-Gyml.
Niclas Kruff, M. Sc.

Aachen, den 23. November 2018

Übung 7 zur Vorlesung Analysis für Informatiker, WS 2018/2019

Abgabe bis Mittwoch, 28.11.2018, 12 Uhr

Präsenzaufgaben

Die folgenden Aufgaben werden in der Globalübung am 22.11.2018 bearbeitet und besprochen.

Präsenzaufgabe 3

Es sei $0 < x \leqslant 1/2$. Berechnen Sie $\sin(x)$ auf 10 Stellen genau.

Lösung

Mit der Vorlesung gilt für $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Damit ist die Folge $(a_k(x))_{k \in \mathbb{N}_0} := \left(\frac{(x)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge für alle $0 < x \leqslant 1/2$ und es gilt $a_k(x) > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Außerdem gilt für $0 < x \leqslant 1/2$, dass $x^2 \leqslant (1/2)^2$ ist. Wir zeigen nun, dass die Folge monoton fallend ist:

$$\frac{a_{k+1}(x)}{a_k(x)} = \frac{(x)^2}{(2k+3)(2k+2)} \leqslant \frac{(1/2)^2}{(2k+3)(2k+2)} = \frac{1}{4(2k+3)(2k+2)} \leqslant 1$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Daher ist die Folge monoton fallend. Nach dem Leibnizkriterium haben wir für $n \in \mathbb{N}_0$ die Abschätzung

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k a_k(x) \right| \leqslant a_n(x).$$

Wir schätzen also $a_n(x)$ nach oben gegen 10^{-10} ab. Zunächst sehen wir wieder, dass $a_n(x) \leqslant a_n(1/2)$ ist und damit reicht es $a_n(1/2)$ nach oben gegen 10^{-10} abzuschätzen.

$$a_n(1/2) = 1/(2^{2n+1} \cdot (2n+1)!) < 10^{-10}.$$

Diese Ungleichung ist ab $n = 5$ erfüllt. Damit ist

$$\sum_{k=0}^{4} (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

eine Approximation von $\sin(x)$ bis auf 10 Stellen.