Mathematische Logik - SS18

Lukas Glänzer

Inhaltsverzeichnis

1 Arbeitsweisen und Methoden 3
1.1 Strukturelle Induktion 3
1.2 Zeige funktionale Vollständigkeit 3
1.3 Markierungsalgorithmus 3
1.4 Kompaktheitssatz 3
1.5 Resolutionsmethode 4
1.6 Beweisbäume des Sequenzenkalküls 4
1.7 Korrektheit von Schlussregeln 4
1.8 Model-Checking 5
1.9 Gewinnregion bestimmen 5
1.10 Definierbarkeit zeigen/widerlegen 5
1.11 Starrheit zeigen/widerlegen 5
1.12 Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele 6
1.13 Axiomatisierbarkeit 6
1.14 Bisimilaritätsspiel 7
1.15 Ausdrückbarkeit in Modallogik 7

2 Aussagenlogik 7
2.1 Normalformen 8
2.2 Funktionale Vollständigkeit 8
2.3 Horn-Formeln 8
2.4 Resolutionen 8
2.5 Sequenzenkalkül 8

3 Prädikatenlogik 9
3.1 Strukturen 9
3.2 Semantik 9
3.3 Normalformen 10
3.3.1 Reduzierte Formeln 10
3.3.2 Negationsnormalform 10
3.3.3 Termreduzierte Formeln 10
3.3.4 Pränex-Normalform 10
3.3.5 Skolem-Normalform 11
3.4 Spieltheorie 11
3.5 Definierbarkeit 11
3.6 Axiomatisierbarkeit 11
3.7 Isomorphie 11
3.8 Elementare Äquivalenz 12
3.9 Ehrenfeucht-Fraïssé 12
3.10 Herbrandstrukturen 12
3.11 Hintikka-Mengen 13
3.12 Aussagen über Modellgrößen 14

4 Modallogik **14**
4.1 Zwei-Variablen-Fragment 14
4.2 Bisimulation 14
4.3 Äquivalenz 15
4.4 Baummodelleigenschaft 15

1 Arbeitsweisen und Methoden

1.1 Strukturelle Induktion

Bei der strukturellen Induktion wird über den rekursiv definierten Formelaufbau induziert. Die Vorgehensweise, um zu zeigen, dass alle Formeln die Eigenschaft E besitzen, ist stets:

1. Induktionsanfang: Zeige, dass jede atomare Formel die Eigenschaft E besitzt
2. Induktionsschritt: Zeige, dass für φ und ψ auch $\neg\varphi$ und $\varphi \circ \psi$ die Eigenschaft E besitzen, mit $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$. Bei FO-Formeln müssen zusätzlich noch die Quantoren $\forall$ und $\exists$ gezeigt werden.

1.2 Zeige funktionale Vollständigkeit

Soll gezeigt werden, dass eine Menge an Operatoren funktional vollständig ist, muss gezeigt werden, dass jeder Operator eines bereits bekannten Systems ableitbar ist. Bekannte Systeme sind $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \rightarrow\}$, $\{0, \rightarrow\}, \ldots$ Hier reicht es dann anzugeben, wie die bekannten Operatoren nachgebildet werden können.

Soll gezeigt werden, dass eine Menge an Operatoren nicht funktional vollständig ist, muss man zeigen, dass bestimmte Eigenschaften nicht nachbildbar sind. Beispiele sind:

- „Wenn man nur 0 einsetzt kommt immer 0 heraus“ *(analog mit 1)*
- „Die Operatoren sind monoton $\rightarrow$ Negation nicht möglich“
- ...

Beweis dieser Aussagen ggf. wieder über strukturelle Induktion.

1.3 Markierungsalgorithmus

Mit dem Markierungsalgorithmus wird die Erfüllbarkeit von Horn-Formeln überprüft:

1. Markiere alle Variablen X_i, die in einer Klausel $1 \rightarrow X_i$ auftauchen
2. Markiere alle Variablen X_i, die rechts in einer Klausel auftauchen, deren komplette linke Seite markiert ist
3. Wiederhole Schritt 2, bis entweder
   a) eine Klausel gefunden wird, deren komplette linke Seite markiert ist und die 0 impliziert $\rightarrow$ unerfüllbar

   oder

   b) keine weiteren Markierungen mehr möglich sind und a) nicht gilt $\rightarrow$ erfüllbar

Werden alle markierten Variablen auf 1 gesetzt und alle anderen auf 0, so erhält man auch das kleinste eindeutige Model der Horn-Formel.

1.4 Kompaktheitssatz

Um Formelmengen beliebiger Größe auf Erfüllbarkeit zu testen, bietet der Kompaktheitssatz eine Reduktion auf die Erfüllbarkeit endlicher Formelmengen:

(1) Φ ist erfüllbar genau dann, wenn jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar ist.

(2) $\Phi \models \psi$ genau dann, wenn eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ existiert, so dass $\Phi_0 \models \psi$.

1.5 Resolutionsmethode

Eine weitere Möglichkeit zu zeigen, dass eine gegebene Formel φ unerfüllbar ist, ist die Resolutionsmethode. Bilde die Klauselmenge K zu φ und bilde solange Resolventen, bis sich die leere Klausel $\Box$ ableiten lässt oder keine Resolventen mehr zu finden sind. Ist $\Box$ ableitbar, so ist φ unerfüllbar, sonst erfüllbar.

Der Algorithmus hat im worst case exponentielle Laufzeit.

Bei Horn-Formeln genügt es ausschließlich Resolutionen mit Einheitsresolventen zu finden. Damit hat dieses Teilproblem lineare Laufzeit.

1.6 Beweisbäume des Sequenzenkalküls

Jede Sequenz, die unter Verwendung der folgenden Schlussregeln abgeleitet werden kann, ist gültig, wenn alle Blätter des Baumes Axiome sind:

$$(\neg \Rightarrow)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma, \neg\psi \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \neg)\ \frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$$

$$(\vee \Rightarrow)\ \frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, \vartheta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \vee \vartheta \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \vee)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \vee \vartheta}$$

$$(\wedge \Rightarrow)\ \frac{\Gamma, \psi, \vartheta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \wedge \vartheta \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \wedge)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \vartheta}$$

$$(\rightarrow\Rightarrow)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Gamma, \vartheta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \rightarrow \vartheta \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\rightarrow)\ \frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \rightarrow \vartheta}$$

$$(=)\ \frac{\Gamma, t = t \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$(S \Rightarrow)\ \frac{\Gamma, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow S)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Gamma, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')}$$

$$(\exists \Rightarrow)\ \frac{\Gamma, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \exists)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)}$$

$$(\forall \Rightarrow)\ \frac{\Gamma, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \forall)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)}$$

Wird ein Baum gefunden, dessen Blätter Axiome sind, so ist die Sequenz ableitbar und gültig. Wird ein Baum gefunden, bei dem nicht alle Blätter Axiome sind, liefert er eine Interpretation, welche die Sequenz falsifiziert.

1.7 Korrektheit von Schlussregeln

Soll für eine gegebene Schlussregel geprüft werde, ob diese korrekt im Sinne des Sequenzenkalküls ist, lässt sich folgendes Schema anwenden:

- Setze vorraus, dass die oben stehenden Sequenzen gültig sind.
- Nehme an, dass eine Interpretation $\mathfrak{I}$ existiert, sodass $\mathfrak{I}$ Modell der unteren linken Seite ist
- Zeige durch Fallunterscheidungen, dass $\mathfrak{I}$ auch Modell der unteren rechten Seite ist
  - Ist dies der Fall, ist die Schlussregel korrekt
  - Wenn nicht, so ist die Regel nicht korrekt

Eine weitere Möglichkeit ist, durch Aufbauen eines Beweisbaumes von der unteren Sequenz zu der/den oberen zu gelangen.

1.8 Model-Checking

Model-Checking, $\mathrm{MC}(\mathfrak{A}, \psi)$, ist ein Spiel, um auf Erfüllbarkeit einer FO-Formel ψ durch eine Struktur $\mathfrak{A}$ zu testen. Die Spieler V (Verifiziererin) und F (Falsifizierer) ziehen abhängig von der Struktur von ψ. Vereinfacht wird ψ in Negationsnormalform angenommen. Positionen des Spiels sind (φ, β) mit φ als Unterformel und β als Belegung der freien Variablen:

- φ ist Literal $\rightarrow$ Das Spiel ist beendet
  - Bei $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$ gewinnt die Verifiziererin
  - ansonsten gewinnt der Falsifizierer
- φ von der Form $\vartheta \vee \eta$: V wählt ϑ oder η als neue Position
- φ von der Form $\vartheta \wedge \eta$: F wählt ϑ oder η als neue Position
- φ von der Form $\exists x \vartheta(x, \bar{b})$: V wählt $a \in A$ und ersetzt x durch a
- φ von der Form $\forall x \vartheta(x, \bar{b})$: F wählt $a \in A$ und ersetzt x durch a

1.9 Gewinnregion bestimmen

Um die Gewinnregion für einen Spieler σ zu bestimmen sind zwei Schritte notwendig:

1. W_σ^0 sind alle Endpositionen, bei denen Spieler σ gewinnt
2. W_σ^{n+1} sind alle Positionen bei denen
   - Spieler σ am Zug ist und mindstens ein Übergang zu einer Position aus W_σ^n existiert
   - Spieler $1 - \sigma$ am Zug ist und alle Übergänge zu Positionen aus W_σ^n gehen

1.10 Definierbarkeit zeigen/widerlegen

Soll gezeigt werden, dass eine Relation R bzw. Funktion f in einer Struktur $\mathfrak{A}$ elementar definierbar ist, so muss einfach eine definierende Formelmenge für R bzw. f angegeben werden.

Soll aber gezeigt werden, dass R bzw. f nicht elementar definierbar ist, kann man Automorphismen verwenden:

1. Finde einen Automorphismus π, der auf $\mathfrak{A}$ gilt
2. Zeige, dass durch Expandieren der Signatur von $\mathfrak{A}$ um R bzw. f π nicht erhalten bleibt.

$\rightarrow$ Wenn R bzw. f elementar definierbar wäre, so müsste π erhalten bleiben

1.11 Starrheit zeigen/widerlegen

Soll gezeigt werden, dass eine Struktur $\mathfrak{A}$ nicht starr ist, so kann man einfach einen nicht-trivialen Automorphismus von $\mathfrak{A}$ angeben.

Soll jedoch gezeigt werden, dass $\mathfrak{A}$ starr ist, gibt es mehrere Methoden:

- Man nehme an, dass es einen nicht-trivialen Automorphismus π gibt und zeigt, dass dieser eine enthaltene Relation/Funktion verletzt: „Es gibt ein $a \in A$ mit $\pi(a) \neq a$...“
  - Sobald $<$ elementar definierbar ist, lässt sich diese Relation leicht verletzen
  - Ggf. muss man Relationen ableiten, die dann verletzt werden
- Wenn jedes Element in $\mathfrak{A}$ elementar definierbar ist, dann ist $\mathfrak{A}$ starr

1.12 Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele

Das Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ basiert auf den beiden Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ und wird von den Spielern H (Herausforderer) und D (Duplikatorin) gespielt. Es werden m Züge gespielt. Der Spielablauf ist wie folgt:

- Im i-ten Zug wählt der Herausforderer ein Element $a_i \in A$ oder $b_i \in B$
- Die Duplikatorin wählt anschließend ein Element aus der **anderen** Struktur
- Nach m Zügen ist das Spiel vorbei
  - Ist $\{(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)\} \in \text{Loc}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gewinnt D
  - Ansonsten gewinnt H

Ein Spieler hat eine **Gewinnstrategie**, wenn er unter allen Umständen die Partie gewinnt. Ein Spieler gewinnt das Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, wenn er eine Gewinnstrategie besitzt, da nur einer von beiden eine solche besitzen kann.

Das Spiel $G(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ ist eine Variante, bei der der Herausforderer das m selbst wählt. Er gewinnt also genau dann, wenn es ein m gibt, sodass er eine Gewinnstrategie dafpr hat.

1.13 Axiomatisierbarkeit

Soll gezeigt werde, dass eine Klasse $\mathcal{K}$ (endlich) axiomatisierbar ist, so kann einfach ein (endliches) Axiomensystem angegeben werden.

Soll gezeigt werden, dass $\mathcal{K}$ weder endlich noch unendlich axiomatisierbar ist, so geht dies auf verschiedene Weisen:

1. Finde ein unendliches Axiomensystem Ψ für das Komplement von $\mathcal{K}$, sodass jede Teilmenge aus Ψ ein Modell in $\mathcal{K}$ besitzt.

$\Rightarrow$ Wäre Φ Axiomensystem von $\mathcal{K}$, dann wäre $\Phi \cup \Psi$ unerfüllbar. Nach Kompaktheitssatz gäbe es eine endliche unerfüllbare Teilmenge Φ_0. Nach Konstruktion von Ψ hat Φ_0 aber ein Modell. $\lightning$ $\mathcal{K}$ ist gar nicht axiomatisierbar.

2. Finde ein unendliches Axiomensystem Φ für $\mathcal{K}$.

$\Rightarrow$ Würde φ $\mathcal{K}$ axiomatisieren, so wäre das Modell von $\neg\varphi$ das Komplement von $\mathcal{K}$ und $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar. Nach Kompaktheitssatz gäbe es eine endliche unerfüllbare Teilmenge Φ_0. Gib ein Modell von Φ_0 an. $\lightning$ $\mathcal{K}$ ist nicht endlich axiomatisierbar.

3. Finde $(\mathfrak{A}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ und $\mathfrak{B} \notin \mathcal{K}$, sodass die Duplikatorin jedes Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gewinnt. Auch für konstante Folge mit $\mathfrak{A}_m := \mathfrak{A},\ m \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind nicht durch einen Satz unterscheidbar also ist $\mathcal{K}$ gar nicht axiomatisierbar.

4. Erzeuge Folgen $(\mathfrak{A}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ und $(\mathfrak{B}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ sodass $\mathfrak{A}_m \in \mathcal{K}$ und $\mathfrak{B}_m \notin \mathcal{K}$ für alle m und D jedes Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gewinnt

$\Rightarrow$ Nach Satz von Ehrenfeucht-Fraïsséwäre $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$ was ein Widerspruch ist, also kann $\mathcal{K}$ nicht endlich axiomatisierbar sein.

5. Beinhaltet $\mathcal{K}$ beliebig große endliche, aber keine unendlichen Modelle, so gilt der aufsteigende Satz von Löwenheim-Skolem.

$\Rightarrow$ Wäre Φ Axiomensystem von $\mathcal{K}$, so hätte es auch ein unendliches Modell. Es ist aber kein solches in $\mathcal{K}$. $\lightning$ $\mathcal{K}$ nicht axiomatisierbar.

6. $\mathcal{K}$ beinhaltet nur überabzählbare Modelle.

⇒ Nach absteigendem Satz von Löwenheim-Skolem hätte ein Axiomensystem auch ein abzählbares Modell. $\lightning$ $\mathcal{K}$ ist nicht axiomatisierbar.

7. $\mathcal{K}$ beinhaltet unendliche Strukturen mit maximaler Größe.

⇒ Nach aufsteigendm Satz von Löwenheim-Skolem hätte ein Axiomensystem auch ein noch größeres Modell. $\lightning$ $\mathcal{K}$ ist nicht axiomatisierbar.

8. Ist $\mathcal{K}$ endlich axiomatisierbar und man hat bereits ein unendliches Axiomensystem Φ gefunden.

⇒ Dann gibt es eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$, die ein Axiomensystem für $\mathcal{K}$ ist.

9. $\mathcal{K}$ und $\overline{\mathcal{K}}$ sind unendlich axiomatisierbar.

⇒ Dann sind auch beide bereits endlich axiomatisierbar.

1.14 Bisimilaritätsspiel

Gespielt wird mit zwei Spieler auf den Strukturen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$. Gestartet wird auf den Knoten $v \in V$ und $v' \in V'$ für die gezeigt werden soll, dass eine Bisimulation existiert. Die Schritte des Spiels sind:

- Für jede Position (w, w') wird geprüft, ob $w \in P_i \;\Leftrightarrow\; w' \in P_i$ für alle $i \in I$ gilt
  - Wenn nicht, dann gewinnt Spieler I
  - Wenn ja, geht es weiter
- Spieler I geht vom aktuellen Knoten in einer der beiden Strukturen entlang einer Transition $v \xrightarrow{a} w$ bzw. $v' \xrightarrow{a} w'$
- Spieler II muss in der anderen Struktur einen Zug $v' \xrightarrow{a} w'$ bzw. $v \xrightarrow{a} w$ machen, sodass die Position (w, w') gültig ist
- Ein Spieler verliert, wenn er keinen Zug machen kann

Wie in anderen Spielen bedeutet das Spiel zu gewinnen, dass der Spieler eine Gewinnstrategie für alle Partien hat. Wenn Spieler I gewinnt, gibt es keine Bisimulation zwischen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ von (v, v') aus. Wenn Spieler II gewinnt, bilden die gewählten Paare die Bisimulation Z.

1.15 Ausdrückbarkeit in Modallogik

Soll gezeigt werden, dass eine Aussage in Modallogik ausdrückbar ist, so wird die entsprechende Formel einfach angegeben.

Soll jedoch gezeigt werden, dass dies nicht möglich ist, helfen Bisimulationen. Man finde zwei Strukturen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$, sodass $\mathcal{K}$ die Aussage erfüllt und $\mathcal{K}'$ nicht. Existiert nun eine Bisimulation zwischen den beiden Strukturen, kann es keine Formel für die Aussage geben, da diese nicht zwischen den beiden Strukturen unterscheiden kann.

2 Aussagenlogik

Für eine Aussagenlogische Formel φ ist $\tau(\varphi)$ die Menge der vorkommenden Aussagenvariablen. Eine **Interpretation** ist eine Abbildung $\mathfrak{I} : \sigma \to \{0, 1\}$, die jeder Variable in σ einen Wert zuweist. $\mathfrak{I}$ ist **passend** für φ, wenn $\tau(\varphi) \subseteq \sigma$ ist.

Die Auswertung einer Formel unter einer Interpretation wird kurz als $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}}$ notiert. Gilt $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}} = 1$, so ist $\mathfrak{I}$ ein **Modell** von φ: $\mathfrak{I} \models \varphi$.

Es gilt $\varphi \equiv \psi$, wenn gilt: $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}} = [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}}$ für alle passenden Interpretationen. φ und ψ heißen **erfüllbarkeitsäquivalent**, wenn sie entweder beide erfüllbar oder beide nicht erfüllbar sind.

2.1 Normalformen

Eine Formel φ ist in **disjunktiver Normalform (DNF)**, wenn sie von der Form $\bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} (X_{ij}) \right)$ ist.

Eine Formel φ ist in **konjunktiver Normalform (KNF)**, wenn sie von der Form $\bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} (X_{ij}) \right)$ ist.

Jede Formel ψ ist äquivalent zu einer Formel in DNF und einer Formel in KNF.

2.2 Funktionale Vollständigkeit

Eine Menge Ω heißt **funktional vollständig**, wenn aus den in Ω enthaltenen Funktionen alle boolschen Funktionen aus B^n nachgebildet werden können.

2.3 Horn-Formeln

Horn-Formeln sind Formeln in KNF, die in jeder Disjunktion höchstens ein positives Literal enthält. Sie lassen sich umschreiben als:

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \neg X_1 \vee \cdots \vee \neg X_k \vee X \equiv X_1 \wedge \cdots \wedge X_k \to X \\
&(2)\ \neg X_1 \vee \cdots \vee \neg X_k \equiv X_1 \wedge \cdots \wedge X_k \to 0 \\
&(3)\ X \equiv 1 \to X
\end{aligned}
$$

Weitere besondere Eigenschaften von Horn-Formeln sind:

- Mit dem **Markierungsalgorithmus** kann die Erfüllbarkeit in polynomieller Zeit getestet werden.
- Jede Horn-Formel hat ein eindeutiges kleinstes Modell.
- Modelle von Horn-Formeln sind unter Schnitt abgeschlossen.

2.4 Resolutionen

Eine Formel in KNF kann auch als eine Klauselmenge K aufgefasst werden, in der ein Element (Klausel) einer Disjunktion der Formel entspricht.

Sind C_1 und C_2 Klauseln aus K mit $X \in C_1$ und $\neg X \in C_2$, dann ist $C = C_1 \setminus \{X\} \cup C_2 \setminus \{\neg X\}$ die **Resolvente** von C_1 und C_2. Außerdem gilt $K \equiv K \cup \{C\}$. Besteht eine der beiden Klauseln C_1 oder C_2 nur aus einer Variable, so ist C eine **Einheitsresolvente**.

Eine Formel φ ist genau dann unerfüllbar, wenn $Res^*(K)$. *siehe Resolutionsmethode*

2.5 Sequenzenkalkül

Sequenzen sind Ausdrücke der Form $\Gamma \Rightarrow \Delta$. Eine Sequenz ist **gültig**, wenn Jede Interpretation, die alle Formeln in Γ erfüllt auch mindestens eine Formel aus Δ erfüllt, d.h.:

- $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ist gültig $\Leftrightarrow \Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$
- $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ist falsifizierbar wenn Γ und Δ disjunkt sind
- $\Gamma \Rightarrow \varnothing$ ist gültig, wenn Γ unerfüllbar ist
- $\varnothing \Rightarrow \Delta$ ist gültig, wenn Δ eine Tautologie ist

Der Sequenzenkalkül ist korrekt und vollständig, d.h. es lassen sich Beweise konstruieren, die die Gültigkeit einer Sequenz nachweisen. Dies geht mittels der Beweisbäume des Sequenzenkalküls.

Übertragen auf Formeln und Formelmengen heißt das: ψ ist aus Φ ableitbar, $\Phi \vdash \psi$, wenn ein endliches $\Gamma \subseteq \Phi$ existiert mit $\Gamma \Rightarrow \psi$ ist im Sequenzenkalkül ableitbar. Insbesondere gilt $\vdash \psi$, wenn $\varnothing \Rightarrow \psi$ ableitbar ist.

Ist aus einer Menge Φ jeder Satz ableitbar, so heißt Φ **inkonsistent**. Der **Vollständigkeitssatz** sagt aus:

- $\Phi \models \psi \;\Leftrightarrow\; \Phi \vdash \psi$
- Φ ist konsistent $\;\Leftrightarrow\;$ Φ ist erfüllbar

3 Prädikatenlogik

3.1 Strukturen

Strukturen bestehen aus einem nicht leeren **Universum**, einer beliebigen Anzahl an Funktionen und einer beliebigen Anzahl an Relationen auf diesem Universum. Die vorhandenen Funktionen und Relationen einer Struktur werden in der **Signatur** τ festgelegt. Ist $\tau = \varnothing$, so ist die Struktur mit Universum A einfach die Menge A.
$\mathfrak{A}$ heißt **Substruktur** von $\mathfrak{B}$ bzw. ist $\mathfrak{B}$ die **Erweiterung** von $\mathfrak{A}$, auch $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, wenn:

- $A \subseteq B$
- Alle Relationen $R^{\mathfrak{A}}$ eingeschränkt auf A erhalten bleiben
- Alle Funktionen $f^{\mathfrak{A}}$ eingeschränkt auf A erhalten bleiben

Für $\sigma \subseteq \tau$ heißt $\mathfrak{B}|\sigma$ **Redukt** von $\mathfrak{B}$. Es werden einfach bestimmte Funktions- oder Relationssymbole weggelassen. $\mathfrak{B}$ heißt auch **Expansion** von $\mathfrak{B}|\sigma$.

3.2 Semantik

Neben den aussagenogischen Junktoren und Variablen werden nun noch All- und Existenzquantoren sowie „=“ hinzugenommen. Alle über diesem Alphabet erzeugbaren Ausdrücke heißen τ-Terme.

Grundterme sind τ-Terme, die keine Variablen enthalten. τ-Formeln sind rekursiv definierte zusammengesetzte τ-Terme.

Variablen, die in einer Unterformel eines Quantors vorkommen, heißen **gebunden**. Variablen, die in keiner Unterformel vorkommen heißen **frei**. Ein τ-Satz ist eine Formel ohne freie Variablen. Werden die freien Variablen $x_1, ..., x_n$ der Formel ψ, auch $\psi(x_1, ..., x_n)$ mit den Werten $a_1, ..., a_n$ belegt, so schreibt man $\psi(a_1, ..., a_n)$.

Eine τ-**Interpretation** ist ein Paar $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ aus Struktur und einer Funktion, die den Variablen der Struktur eine Belegung aus A zuweist. Terme erhalten einen Wert aus A und Formeln wie gewohnt einen Wahrheitswert. Auch das $\models$-Symbol wird weiterhin verwendet.

Ist Φ eine Menge von τ-Sätzen, so ist Mod(Φ) die **Modellklasse** und es gilt $\mathrm{Mod}(\Phi) = \{\mathfrak{A} \,:\, \mathfrak{A} \models \Phi\}$. Ist $\mathrm{Mod}(\Phi) = \mathcal{K}$ für eine Klasse $\mathcal{K}$, so heißt Mod(Φ) auch **Axiomensystem** von $\mathcal{K}$.

3.3 Normalformen

3.3.1 Reduzierte Formeln

τ-Formeln, in denen nur die logischen Junktoren $\vee, \neg$ und der Quantor $\exists$ vorkommen, heißen **reduzierte** Formeln. Aufgrund der funktionellen Vollständigkeit des Systems $\{\neg, \vee\}$ lassen sich:

- $\psi \wedge \varphi$ als $\neg(\neg\psi \vee \neg\varphi)$ und
- $\psi \rightarrow \varphi$ als $\neg\psi \vee \varphi$ darstellen.

Für den Allquantor $\forall$ gilt ebenfalls:

- $\forall x\psi$ lässt sich als $\neg\exists x\neg\psi$ darstellen.

Dadurch lässt sich jede τ-Formel in eine äquivalente reduzierte Form bringen.

3.3.2 Negationsnormalform

Bei τ-Formeln in Negationsnormalform tauchen keine Implikationen „$\rightarrow$“ auf und alle Negationen sind ausschließlich an Literalen zu finden. Mit Hilfe der DeMorganschen Regeln lassen sich Schritt für Schritt die Negationen nach innen ziehen. Dadurch lässt sich jede τ-Formel in eine äquivalente Formel in Negationsnormalform bringen.

3.3.3 Termreduzierte Formeln

Eine τ-Formel ist in **termreduzierter** Form, wenn alle darin auftauchenden Funktionen und Relationen maximal Tiefe 1 haben. Durch schrittweises Ersetzen von tieferen Ebenen durch neue Variablen kann jede τ-Formel in eine äquivalente termreduzierte Form gebracht werden.

3.3.4 Pränex-Normalform

Eine τ-Formel ist in Pränex-Normalform, wenn keine Variable frei und gebunden auftaucht und maximal einmal quantifiziert wird und alle Quantoren am Anfang der Formel stehen. Das **Bereinigen** der Formel erfolgt über Umbenennung der gebundenen Variablen. Die Quantoren können durch folgende äquivalente Umformungen nach vorn gezogen werden:

- $\exists x(\psi \vee \varphi) \equiv \exists x\psi \vee \exists x\varphi$ und $\forall x(\psi \vee \varphi) \equiv \forall x\psi \wedge \forall x\varphi$
- Falls x nicht in ψ vorkommt, gilt:
  - $\psi \vee \exists x\varphi \equiv \exists x(\psi \vee \varphi)$
  - $\psi \wedge \exists x\varphi \equiv \exists x(\psi \wedge \varphi)$
  - $\psi \vee \forall x\varphi \equiv \forall x(\psi \vee \varphi)$
  - $\psi \wedge \forall x\varphi \equiv \forall x(\psi \wedge \varphi)$
- $\neg\exists x\psi \equiv \forall x\neg\psi$ und $\neg\forall x\psi \equiv \exists x\neg\psi$
- $\exists x\exists y\psi \equiv \exists y\exists x\psi$ und $\forall x\forall y\psi \equiv \forall y\forall x\psi$

Jede τ-Formel kann durch diese Umformungen in eine äquivalente Pränex-Normalform gebracht werden.

3.3.5 Skolem-Normalform

Zu jedem τ-Satz ψ lässt sich ein τ-Satz φ finden mit:

- $\varphi = \forall y_1 \forall y_2, ..., \forall y_n \varphi'$, wobei φ' quantorenfrei ist
- $\varphi \models \psi$
- Jedes Modell von ψ lässt sich zu einem Modell von φ expandieren.

Zur Elimination der Existenzquantoren wird der jeweils erste Existenzquantor gestrichen und die quantifizierte Variable durch eine entsprechende Funktion ersetzt:

- $\psi = \forall x_1 \ldots \forall x_{k-1} \exists x_k \psi_k(x_1, \ldots, x_k)$ wird zu $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_{k-1} \psi_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, f x_1 \ldots x_{k-1})$

Zuerst wird ψ in Pränex-Normalform gebracht. Danach wird durch wiederholte Anwendung dieser Elimination eine **erfüllbarkeitsäquivalente** Formel φ erzeugt.

3.4 Spieltheorie

Durch spieltheoretische Ansätze lassen sich einige Algorithmen der FO-Logik veranschaulichen. Ein Beispiel ist das Model-Checking *(siehe oben)*. Generell lassen sich solche endlichen Spiele als Spielgraph darstellen. Die Knoten beschreiben die aktuelle Position und die Kanten die möglichen Züge. Durch die Form der Knoten wird oft angedeutet welcher Spieler am Zug ist.Ein Spieler hat genau dann verloren, wenn er am Zug ist aber nicht weiter ziehen kann.

Eine **Startegie** ist eine Funktion $f : \{v \in V_\sigma : vE \neq \varnothing\}$ die jeder möglichen Position einen Nachfolger für Spieler σ zuweist. Gewinnt Spieler σ ausgehend von Position v_0 jedes Spiel mit f, so heißt f **Gewinnstrategie** von v_0. Die Menge $W_\sigma = \{v :$ Spieler σ hat von v aus eine Gewinnstrategie $\}$ heißt **Gewinnregion** von Spieler σ. Wenn jede Position eine Gewinnstrategie für mindestens einen Spieler besitzt, heißt das Spiel **determiniert**. Ein Spiel, bei dem alle Partien endlich sind, heißt **funidert**.

3.5 Definierbarkeit

Eine Relation $R \subseteq A^r$ heißt **elementar definierbar** in der τ-Struktur $\mathfrak{A}$, wenn ein $\psi \in FO(\tau)$ existiert mit $R = \psi^{\mathfrak{A}}$. Eine Funktion $f : A^r \to A$ heißt **elementar definierbar** in der τ-Struktur $\mathfrak{A}$, wenn ihr Graph R_f elementar definierbar ist. Eine r-stellige Funktion wird also als eine $r+1$-stellige Relation aufgefasst.

Ist $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur und die Relation R oder die Funktion f elementar definierbar in $\mathfrak{A}$, so ist die Expansion von $\mathfrak{A}$ um R oder f gleichmächtig zu $\mathfrak{A}$.

3.6 Axiomatisierbarkeit

Sei $\mathcal{K} \subseteq (\tau)$ eine Klasse von FO-Strukturen. $\mathcal{K}$ heißt **axiomatisierbar**, wenn es eine Satzmenge Φ gibt, sodass $\mathcal{K}$ =Mod(Φ) gilt. Ist Φ endlich, so lässt sich Φ durch einen Satz darstellen und $\mathcal{K}$ heißt **endlich axiomatisierbar**.

3.7 Isomorphie

Zwei τ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind **isomorph**, $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, wenn ein Isomorphismus $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ existiert mit:

- Für $R \in \tau$ und $a_1, ..., a_n \in A$ gilt: $(a_1, ..., a_n) \in R^{\mathfrak{A}} \ \Leftrightarrow \ (\pi a_1, ..., \pi a_n) \in R^{\mathfrak{B}}$
- Für $f \in \tau$ und $a_1, ..., a_n \in A$ gilt: $\pi f^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., a_n) = f^{\mathfrak{B}}(\pi a_1, ..., \pi a_n)$

Isomorphismen werden auch durch $\pi : \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{B}$ gekennzeichnet.

Automorphismen sind Isomorphismen der Form $\pi : \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}$. Die Menge der Automorphismen einer Struktur ist Aut($\mathfrak{A}$). $\mathfrak{A}$ heißt **starr**, wenn Aut($\mathfrak{A}$) $= \{1_{\mathfrak{A}}\}$, also der triviale Automorphismus ist.

Da die Prädikatenlogik nur auf der Struktur selbst arbeitet, kann sie nicht zwischen zwei isomorphen Strukturen unterscheiden. Daher gilt für $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$:

- $\mathfrak{A} \models \psi(a_1, ..., a_n) \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{B} \models \psi(\pi a_1, ..., \pi a_n)$
- Für Sätze demnach: $\mathfrak{A} \models \psi \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{B} \models \psi$

Lokale/partielle Isomorphismen sind injektive Abbildungen p :dom$(p) \rightarrow B$, sodass die Eigenschaften der Relationen und Funktionen auf dom(p) erhalten bleiben. Die Menge der lokalen Isomorphismen wird notiert als Loc($\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$).

3.8 Elementare Äquivalenz

Eine **Theorie** ist eine erfüllbare und unter $\models$ abgeschlossene Menge $T \subseteq FO(\tau)$. Das heißt, dass für alle ψ mit $T \models \psi$ bereits $\psi \in T$ gilt. T heißt **vollständig**, wenn für alle Sätze $\varphi \in FO(\tau)$ gilt $\varphi \in T$ oder $\neg\varphi \in T$. Jede nicht-vollständige Theorie lässt sich zu einer solchen erweitern.

Mit $Th(\mathfrak{A}) = \{\psi : \mathfrak{A} \models \psi\}$ wird die Theorie der Struktur $\mathfrak{A}$ bezeichnet, welche per Definition schon vollständig ist. Die Theorie einer Strukturklasse ist der Schnitt aus allen Theorien der enthaltenen Strukturen.

Die τ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen **elementar äquivalent**, $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, wenn ihre Theorien gleich sind, also $Th(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{B})$. Die τ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen **m-äquivalent**, wenn für alle $\psi \in FO(\tau)$ mit Quantorenrang qr$(\psi) \leq m$ gilt: $\mathfrak{A} \models \psi \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{B} \models \psi$
Theorien sind vollständig, wenn alle Modelle der Theorie elementar äquivalent sind. Alle isomorphen Strukturen sind elementar äquivalent, aber nicht umgekehrt!!

3.9 Ehrenfeucht-Fraïssé

Die Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele (siehe oben) bieten eine Möglichkeit zwei Strukturen auf elementare Äquivalenz zu prüfen. Es gilt:

- $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \;\Leftrightarrow\;$ D gewinnt das Spiel $G(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$
- $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B} \;\Leftrightarrow\;$ D gewinnt das Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$

Einen Hinweis auf den Ausgang des Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiels bieten Formeln mit bestimmtem Quantorenrang. Hat ψ den Quantorenrang m und gilt $\mathfrak{A} \models \psi$ und $\mathfrak{B} \not\models \psi$, so hat Spieler H eine Gewinnstrategie für $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ und ψ ist eine **trennende** Formel.

3.10 Herbrandstrukturen

Eine Herbrandstruktur zu einer Signatur τ ist eine Struktur $\mathfrak{H} = (U, I)$ mit

- Alle Konstanten von τ sind inm Universum U
- Für alle n-stelligen Funktionen f und Terme $t_1, ..., t_n$ aus U ist auch $f(t_1, ..., t_n)$ in U
- Jeder Term ist durch sich selbst definiert
- Ist Σ eine Menge atomarer Sätze, dann liefert die Struktur $\mathfrak{H}(\Sigma)$ eine Interpretation für die Relationen durch
  - $R^{\mathfrak{H}(\Sigma)} = \{(t_1, ..., t_n) : Rt_1, ..., t_n \in \Sigma\}$

Eine **Kongruenzklasse** $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation, die zusätzlich noch mit den Funktionen und Relationen einer Struktur verträglich ist. $\mathfrak{A}/\!\sim$ ist die **Faktorstruktur**, also die Struktur $\mathfrak{A}$ eingeschränkt auf die Kongruenzklassen von $\sim$.

Um Gleichheiten aus der Struktur $\mathfrak{H}(\Sigma)$ herausfiltern zu können, muss Σ ggf. erweitert werden, sodass es unter **Substitution abgeschlossen** ist:

- Σ enthält nach Erweiterung die Gleichung $t = t$ für alle Grundterme t
- Σ enthält nach Erweiterung die Gleichung $\psi(t')$, wenn es schon $\psi(t)$ und $t = t'$ enthält

Sei $\sim$ nun die Kongruenzrelation mit $t \sim t'$ gdw. $t = t' \in \Sigma$. Damit lässt sich $\mathfrak{A} := \mathfrak{H}/\!\sim$ als das **kanonische Modell** von Σ definieren.

3.11 Hintikka-Mengen

Ziel ist es für Φ und eine nicht aus Φ ableitbare Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ein Modell zu finden. Dazu werden Γ und Δ zu einem allgemeinen kanonischen Modell erweitert. Man konstruiert Folgen $\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$ die ebenfalls nicht ableitbar sind und sich über die Schlussregeln aus den ursprünglichen Mengen ergeben. Iteriert wird mit:

0.) $\Gamma_0 := \Gamma$ und $\Delta_0 := \Delta$

1.) $\Gamma_1 := \Gamma_0$ in reduzierter Form und $\Delta_1 := \Delta_0$ in reduzierter Form

n+1.) Vorher werde eine Aufzählung festgelegt, um die nächste zu betrachtende Formel zu bestimmen
  a) $\varphi_n \in \Phi$ oder φ_n der Form $t = t$: $\Gamma_{n+1} := \Gamma_n, \varphi_n$ und $\Delta_{n+1} := \Delta_n$
  b) φ_n der Form $t = t'$. Wenn $\varphi_n \in \Gamma_n$ und m ex. sodass $\psi_m(t') \in \Gamma_n$ aber $\psi_m(t) \notin \Gamma_n$: Für das kleinste m setze $\Gamma_{n+1} := \Gamma_n, \psi_m(t)$ und $\Delta_{n+1} := \Delta_n$
  c) $\varphi_n = \neg\psi$. Befolge Sequenzregeln für $\neg$:
  ($\neg \Rightarrow$) $\varphi_n \in \Gamma_n$: Setze $\Gamma_{n+1} := \Gamma_n$ und $\Delta_{n+1} := \Delta_n, \psi$
  ($\Rightarrow \neg$) $\varphi_n \in \Delta_n$: Setze $\Gamma_{n+1} := \Gamma_n, \psi$ und $\Delta_{n+1} := \Delta_n$
  d) $\varphi_n = \psi \vee \vartheta$. Befolge Sequenzregeln für $\vee$:
  ($\vee \Rightarrow$) $\varphi_n \in \Gamma_n$: $\Gamma_{n+1} := \Gamma_n$ und ψ oder ϑ, sodass es nicht ableitbar ist und $\Delta_{n+1} := \Delta_n$
  ($\Rightarrow \vee$) $\varphi_n \in \Delta_n$: $\Gamma_{n+1 := \Gamma_n}$ und $\Delta_{n+1} := \Delta_n, \psi, \vartheta$
  e) $\varphi_n = \exists x \psi(x)$. Befolge Sequenzregeln für $\exists$:
  ($\exists \Rightarrow$) $\varphi_n \in \Gamma_n$: Wähle c mit $c \notin \Gamma_n$ und $c \notin \Delta_n$ und $\Gamma_{n+1} := \Gamma_n, \psi(c)$. Setze $\Delta_{n+1} := \Delta_n$
  ($\Rightarrow \exists$) $\varphi_n \in \Delta_n$: Setze $\Gamma_{n+1} := \Gamma_n$ und $\Delta_{n+1} := \Delta_n, \psi(t_n)$
  f) Sonst: $\Gamma_{n+1} := \Gamma_n$ und $\Delta_{n+1} := \Delta_n$

Diese Konstruktion liefert genau die Definition einer **Hintikka-Menge**, welche folgende Eigenschaften besitzt. Für zwei Satzmengen Γ^* und Δ^* gelte:

1. Γ^* und Δ^* sind disjunkt.
2. Γ^* ist unter Substitution abgeschlossen.
3. $\neg\psi \in \Gamma^* \implies \psi \in \Delta^*$
   $\neg\psi \in \Delta^* \implies \psi \in \Gamma^*$
4. $\psi \vee \vartheta \in \Gamma^* \implies \psi \in \Gamma^*$ oder $\vartheta \in \Gamma^*$
   $\psi \vee \vartheta \in \Delta^* \implies \psi, \vartheta \in \Delta^*$
5. $\exists x \psi(x) \in \Gamma^* \implies$ es gibt einen Grundterm t mit $\psi(t) \in \Gamma^*$
   $\exists x \psi(x) \in \Delta^* \implies$ für alle Grundterme t gilt $\psi(t) \in \Delta^*$

Dann ist $\Gamma^* \cup \neg\Delta^*$ eine Hintikka-Menge. Jede Hintikka-Menge besitzt ein Modell, *Modell-Existenzsatz*, und somit ist sie ein kanonisches Modell einer beliebigen Formelmenge Φ.

3.12 Aussagen über Modellgrößen

Die Menge der Formeln über einer abzählbaren Signatur ist selbst wieder abzählbar. Daraus folgt der **Absteigende Satz von Löwenheim-Skolem**:

- Jede erfüllbare, abzählbare Satzmenge hat ein abzählbares Modell.

Die Menge A ist *mindestens so mächtig* wie B, $|A| \geq |B|$, wenn es eine injektive Abbildung $f : B \to A$ gibt. A und B sind *gleichmächtig*, wenn f bijektiv ist. Weiter gilt, dass keine Menge existiert, mit $|\mathrm{Pot}(A)| = |A|$. Diese Eigenschaft führt zum **aufsteigenden Satz von Löwenheim-Skolem**:

- Wenn Φ beliebig große endliche Modelle besitzt, dann auch ein unendliches.
- Wenn Φ ein unendliches Modell besitzt, dann auch ein beliebig großes unendliches.

4 Modallogik

Die Modallogik ist eine Erweiterung der Aussagenlogik um ausschließlich einstellige Operatione bzw. Aktionen. Die Signatur eines **Transitionssystems** oder auch **Kripkestruktur** ist dann gegeben durch $\mathcal{K} = (V, (E_a)_{a\in A}, (P_i)_{i\in I})$. Alle Formeln werden aus der Sicht eines ausgewählten Knotens betrachtet.

Ist φ eine Formel aus ML, so gibt es die Erweiterungen $\langle a\rangle\varphi$ und $[a]\varphi$. Gibt es nur ein $a \in A$, so kann man auch $\Diamond\varphi$ und $\Box\varphi$ schreiben. $\langle a\rangle\varphi$ heißt: „Der aktuelle Knoten hat einen über eine a-Kante erreichbaren Nachbarn mit Eigenschaft φ“. $[a]\varphi$ heißt: „Alle über eine a-Kante erreichbaren Nachbarn haben Eigenschaft φ“. Erfüllt Knoten $v \in V$ eine Formel φ, so schreibt man $\mathcal{K}, v \models \varphi$. Für φ ist $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}} := \{v : K, v \models \varphi\}$ die Menge aller Knoten aus V, an denen φ gilt.

Auch für ML existieren Normalformen. Beispielsweise ist jede Formel in ML äquivalent zu einer Formel in Negationsnormalform.

4.1 Zwei-Variablen-Fragment

Die Modallogik ist auch als ein Fragment der Prädikatenlogik anzusehen. Jedes $\varphi \in \mathrm{ML}$ lässt sich in ein $\psi(x) \in \mathrm{FO}$ übersetzen. Es gilt sogar, dass es zu jedem $\varphi \in \mathrm{ML}$ ein $\psi^*(x) \in \mathrm{FO}^2$ finden lässt, wobei FO^2 die Menge der FO-Formeln mit ausschließlich zwei Variablen ist. Es gilt dann $\mathcal{K}, v \models \varphi \;\Leftrightarrow\; \mathcal{K} \models \psi^*(x)$.

4.2 Bisimulation

Eine Bisimulation zwischen zwei Transitionssystemen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ ist eine Relation $Z \subseteq V \times V$, sodass für alle $(v, v') \in Z$ gilt:

- $v \in P_i \;\Leftrightarrow\; v' \in P_i$, für alle $i \in I$
- Für alle $(v, w) \in E_a$ existiert ein $(v', w') \in E'_a$ und $(w, w') \in Z$
- Für alle $(v', w') \in E'_a$ existiert ein $(v, w) \in E_a$ und $(w, w') \in Z$

$\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ und $u \in V$ und $u' \in V'$ sind **bisimilar**, $(\mathcal{K}, u \sim \mathcal{K}', u')$, wenn eine Bisimulation Z zwischen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ existiert und $(u, u') \in Z$. Ob zwei Strukturen bisimilar sind, lässt sich mittels des Bisimilaritätsspiels (siehe oben) herausfinden.

Eine Variante ist das n-Bisimilaritätsspiel, bei dem nur n-Züge gespielt werden. Hat Spieler II für ein n eine Gewinnstrategie so gilt $\mathcal{K}, v \sim_n \mathcal{K}', v'$ und $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ heißen **n-bisimilar**. Wichtig zu beachten: $\mathcal{K}, v \sim \mathcal{K}', v' \;\Rightarrow\; \mathcal{K}, v \sim_n \mathcal{K}', v'$ für alle $n \in \mathbb{N}$ aber nicht umgekehrt!!

4.3 Äquivalenz

Ähnlich zum Quantorenrang der Prädikatenlogik wird die **Modaltiefe md** als die tiefste Schachtelung der Modaloperatoren definiert.

Ähnlich zur elementaren Äquivalenz der Prädikatenlogik wird auch in der Modallogik eine Äquivalenz zwischen Transisitonssystemen definiert:

- $\mathcal{K}, v \equiv_{ML} \mathcal{K}', v'$ bedeutet: $\mathcal{K}, v \models \psi \;\Leftrightarrow\; \mathcal{K}', v' \models \psi$ für alle $\psi \in$ ML
- $\mathcal{K}, v \equiv_{ML}^{n} \mathcal{K}', v'$ bedeutet: $\mathcal{K}, v \models \psi \;\Leftrightarrow\; \mathcal{K}', v' \models \psi$ für alle $\psi \in$ ML mit $\mathrm{md}(\psi) \leq n$

Durch die Definition der Bisimulation gilt:

- $\mathcal{K}, v \sim \mathcal{K}', v' \;\Rightarrow\; \mathcal{K}, v \equiv_{ML} \mathcal{K}', v'$ *Es gilt sogar Äquivalenz, wenn beide endlich verzweigt sind.*
- $\mathcal{K}, v \sim_n \mathcal{K}', v' \;\Rightarrow\; \mathcal{K}, v \equiv_{ML}^{n} \mathcal{K}', v'$

Die Aussage $\mathcal{K}, v \models \psi$ und $\mathcal{K}, v \sim \mathcal{K}', v'$ impliziert $\mathcal{K}', v' \models \psi$ heißt **Bisiumlationsinvarianz**.

4.4 Baummodelleigenschaft

Die **Baummodelleigenschaft** sagt aus, dass jede erfüllbare Formel der Logik ein Modell hat, welches ein Baum ist.

Die **Abwicklung** eines Transitionssystems $\mathcal{K}$ von v aus liefert eine solche Baumstruktur. Die Abwicklung ist definiert als $\mathcal{T}_{\mathcal{K},v} = (V^{\mathcal{T}}, (E_a^{\mathcal{T}})_{a \in A}, (P_i^{\mathcal{T}})_{i \in I})$ mit:

- $V^{\mathcal{T}} :=$ {Die Menge aller endlichen Pfade beginnend bei v}
- $E_a^{\mathcal{T}} := \{(\overline{v}, \overline{w}) \in V^{\mathcal{T}} \times V^{\mathcal{T}} : \overline{w} = \overline{v}aw \text{ für ein} w \in V^{\mathcal{K}}\}$
- $P_i^{\mathcal{T}} :=$ {Die Menge aller Pfade aus $V^{\mathcal{T}}$ deren Endknoten in $P_i^{\mathcal{K}}$ liegt}

Durch die Konstruktion gilt bereits $\mathcal{K}, v \sim \mathcal{T}_{\mathcal{K},v}, v$.