Übungsblatt 8

Diskrete Strukturen, Prof. Dr. Gerhard Hiß, WS 2018/19

Für Matrikelnummer: 399191
Abgabezeitpunkt: Fr 14 Dez 2018 14:00:00 CET
Dieses Blatt wurde erstellt: Mo 21 Jan 2019 13:08:49 CET

Die Lösungen der ersten drei Aufgaben sind online abzugeben.		
42	Beantworten Sie die Fragen. Falls nach einer Restklasse gefragt ist, so ist jeweils der kleinste nicht-negative Repräsentant dieser Klasse einzugeben (er ist eindeutig). Geben Sie '-' ein, falls es keine Restklasse wie gesucht gibt (z.B. falls keine Lösung oder kein Inverses existiert).	
	Sei $n = 91$. Ist $\overline{13}$ invertierbar in $\mathbb{Z}_n$?	◯ Ja / ◯ Nein
	Sei $n = 37$. Wie lautet das Inverse von $\overline{-18}$ in $\mathbb{Z}_n$?	______
	Was ist $\bar{3}^{1000}$ in $\mathbb{Z}_7$?	______
	Wieviele Einheiten besitzt $\mathbb{Z}_{51}$?	______
	Sei $n = 234567$. Ist $\overline{15}$ invertierbar in $\mathbb{Z}_n$?	◯ Ja / ◯ Nein
43	Es sei $f \in \mathbb{R}[X]$ gegeben durch $f = X^8 + X^7 - X^6 - 3X^5 - 7X^4 - 9X^3 - 7X^2 - 5X - 2$. Bestimmen Sie die Vielfachheit $m_{-1}(f)$.	______
	Ist $X^3 + X^2 + X + 2$ irreduzibel in $\mathbb{Z}_{13}[X]$?	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist $X^3 + 6X^2 - 2X + 1$ irreduzibel in $\mathbb{Z}_{13}[X]$?	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist $X^3 - 2X^2 + X + 4$ irreduzibel in $\mathbb{Z}_{11}[X]$?	◯ Ja / ◯ Nein
	Ist $X^4 + 2X^2 - 1$ irreduzibel in $\mathbb{Z}_5[X]$?	◯ Ja / ◯ Nein
44	Wir betrachten verschiedene Körper K und Polynome über K in der Unbestimmten X. Weiter betrachten wir zu jedem Polynom $f(X) = a_k X^k + \ldots + a_1 X + a_0$ und $c \in K$ die *Polynomfunktion* $K \to K$, $c \mapsto f(c) = a_k c^k + \ldots + a_1 c + a_0$. Geben Sie ein Ergebnis in einem endlichen Körper $\mathbb{Z}_n$ als ganze Zahl im Bereich von 0 bis $n-1$ an.	
	Sei $K = \mathbb{Z}_7$. Sind die Polynomfunktionen, die durch $X^8 + X^7 + 6X^2 + 6X$ und $X^8 + 6X^7 + 6X^2 + X$ beschrieben werden, gleich?	◯ Ja / ◯ Nein
	Sei $K = \mathbb{Z}_3$. Wieviele Polynome gibt es vom Grad 7 über K?	______
	Sei $K = \mathbb{Z}_5$ und $f(X) = X^5 - 3X^3 + 1$. Geben Sie die Summe $\sum_{c \in \mathbb{Z}_5} f(c)$ an.	______
	Sei $K = \mathbb{Z}_3$. Wieviele Polynomfunktionen $\mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ gibt es?	______
	Sei $K = \mathbb{R}$. Sind die Polynomfunktionen, die durch $X^8 + X^7 - 14X^6 - 14X^5 + 49X^4 + 49X^3 - 36X^2 - 36X$ und $X^8 - X^7 - 14X^6 + 14X^5 + 49X^4 - 49X^3 - 36X^2 + 36X$ beschrieben werden, gleich?	◯ Ja / ◯ Nein
45	Umfrage zur Bearbeitungszeit.	
	Wieviele Stunden haben Sie für die Lösung dieses Übungsblattes aufgewendet? (Bitte auf ganze Stunden runden und nur diese ganze Zahl eintragen.) Diese Angabe ist freiwillig. Es gibt keine Punkte für die Beantwortung.	______

Bitte werfen Sie Ihre Lösungen zu den schriftlich zu bearbeitenden Aufgaben in das Ihrer Gruppennummer entsprechende Fach im Abgabekasten des Lehrstuhl D für Mathematik (Flur 2.OG im Hauptgebäude, neben der Mathematischen Bibliothek).	
Denken Sie daran, dass Sie bei den schriftlichen Aufgaben Ihre Aussagen auch immer begründen.	
46	**(a)** Seien $n, d \in \mathbb{N}$ mit $0 < d < n$. Zeigen Sie, dass $\overline{d}$ genau dann ein Nullteiler in $\mathbb{Z}_n$ ist, wenn $\mathrm{ggT}(d, n) > 1$ ist. **(b)** Sei $n \in \mathbb{N}$ und $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$. Beweisen Sie, dass es immer $i, j \in \underline{n}$ mit $i \leq j$ gibt, so dass $\sum_{k=i}^{j} a_k$ durch n teilbar ist.
47	Erinnerung: Die *Eulersche* φ*-Funktion* ist definiert durch $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto \varphi(n) := \lvert\mathbb{Z}_n^\times\rvert$. Wenn $n, m \in \mathbb{N}$ teilerfremd sind, so gilt $\varphi(nm) = \varphi(n) \cdot \varphi(m)$ (das dürfen Sie ohne Beweis benutzen). **(a)** Zeigen Sie, dass für Primzahlen $p \in \mathbb{N}$ und beliebiges $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\varphi(p^k) = (p-1) \cdot p^{k-1}$. (Sie dürfen benutzen, dass sich natürliche Zahlen eindeutig als Produkt von Primzahlen schreiben lassen.) **(b)** Berechnen Sie $\varphi(n)$ für $100 \leq n \leq 121$. **(c)** Zeigen Sie, dass es für jedes $k \in \mathbb{N}$ nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $\varphi(n) = k$.
Abgabe bis spätestens Freitag, dem 14. Dezember 2018, 14 Uhr, sowohl am Abgabekasten als auch online.	