Wiederholung

- A Menge, $|A| = n$, $k \in \mathbb{N}$
  - k-Permutationen von A: $\{(a_1, \dots, a_k) \in A^k \mid a_i \neq a_j \text{ für } i \neq j\}$ $(k \leq n)$

    $$|\{k\text{-Permutationen von } A\}| = \frac{n!}{(n-k)!}$$
  - k-Kombinationen: k-elementige Teilmengen von A $(k \leq n)$

    $$|\{k\text{-Kombinationen von } A\}| = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
  - k-Tupel

    $$|\{k\text{-Tupel über } A\}| = n^k$$
  - Multimengen: Mengen mit Wiederholungen

    $\mathcal{X}$ k-Multimenge über $A = \{a_1, \dots, a_n\}$

    $\ell_{\mathcal{X}} = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbb{N}_0^n$, $\ell_i :=$ Vielfachheit von a_i in $\mathcal{X}$

    $$|\{k\text{-Multimengen über } A\}| = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

- $n, k \in \mathbb{N}_0$ $(k \leq n)$ $\quad \binom{n}{k} := \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ "n über k"

"n choose k"

$n, k \in \mathbb{N}_0$: $\quad \binom{n}{k} := \left| \{ k\text{-elem. Teilmengen von } \underline{n} \} \right|$

$\Rightarrow \binom{n}{k} = 0$ für $k > n$.

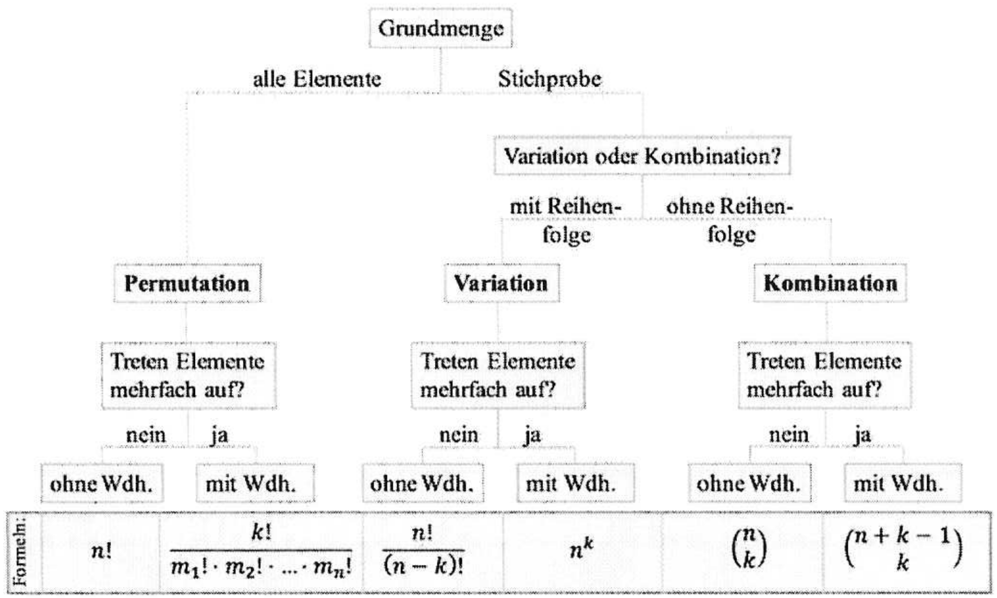
$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{1}{2} n(n-1)$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \binom{n}{k} \in \mathbb{N}, \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Pascal'sches Dreieck

n =													
							0						
0							1	1					
1						1		1	2				
2					1		2		1	3			
3				1		3		3		1	4		
4			1		4		6		4		1	5	
5		1		5		10		10		5		1	6
6	1		6		15		20		15		6		1

Die Auswahl der Kugeln ist als Ziehung einer Zufallsstichprobe des Umfangs k aus einer Grundgesamtheit mit n Elementen zu interpretieren. Wenn jede denkbare Stichprobe des Umfangs k mit gleicher Wahrscheinlichkeit realisiert wird, liegt eine einfache Zufallsstichprobe vor.



Zusammenfassung

Anzahl der Möglichkeiten, k Elemente aus einer n-elementigen Menge zu ziehen:

	geordnet	ungeordnet
ohne Zurücklegen	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$
mit Zurücklegen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$

Mehr Informationen:

`www.studyhelp.de/online-lernen/mathe/kombinatorik/`

Der binomische Lehrsatz

Es sei R ein kommutativer Ring.

Schreibweise
Für $a \in R$ und $z \in \mathbb{Z}$ schreiben wir

$$z.a := \begin{cases} \underbrace{a + a + \cdots + a}_{z \text{ Summanden}}, & \text{falls } z \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{falls } z = 0 \\ -(-z.a), & \text{falls } z < 0 \end{cases}$$

Meist lassen wir den Punkt weg, d.h. wir schreiben za statt $z.a$.

Bemerkung
Ist $z = xy$ für $x, y \in \mathbb{Z}$, dann gilt $z.a = x.(y.a)$ für alle $a \in R$.

Der binomische Lehrsatz (Forts.)

Binomischer Lehrsatz
Es sei R ein kommutativer Ring, $a, b \in R$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Korollar
Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Spezialfälle: $n = 1$: L.S. $a + b$

RS: $\binom{1}{0} b + \binom{1}{1} a = b + a = a+b$

$n = 2$: L.S. $(a+b)^2$

R.S. $\binom{2}{0} b^2 + \binom{2}{1} ab + \binom{2}{2} a^2 = b^2 + 2ab + a^2$

$n = 3$: $(a+b)^3 = a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3$.

Beweis des binomischen Lehrsatzes

Induktion über n: $\quad n = 1$: siehe vorhergeh. Folie

Induktionsschritt: $\quad n-1 \mapsto n \quad (n > 1)$

$$(a+b)^n = (a+b)^{n-1}(a+b)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-1-k} \right)(a+b)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{k+1} b^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k}$$

$$= a^n + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} a^{k+1} b^{n-(k+1)} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k} + b^n$$

$k' = k+1$ in 1. Summe

$$= a^n + \sum_{k'=1}^{n-1} \binom{n-1}{k'-1} a^{k'} b^{n-k'} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k} + b^n$$

$$= a^n + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right] a^k \cdot b^{n-k} + b^n$$

$$= a^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k} + b^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}. \qquad \blacksquare$$

Der binomische Lehrsatz (Forts.)

Schülers Traum

Es sei R ein Ring und p eine Primzahl mit $p.a = 0$ für alle $a \in R$ (z.B. $R = \mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elementen). Dann ist

$$(a+b)^p = a^p + b^p$$

für alle $a, b \in R$.

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)(p-k)!}{k!\ (p-k)!}$$

Beweis

Für $0 < k < p$ ist

$$\binom{p}{k} = \frac{p \cdot (p-1) \cdots (p-k+1)}{k!}$$

von der Form xp für ein $x \in \mathbb{N}$, also $\binom{p}{k}.a^k b^{p-k} = 0$.

$$(a+b)^p = a^p + \underbrace{\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k b^{p-k}}_{=0} + b^p$$

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}$$

$$\Rightarrow \quad p \mid \binom{p}{k} \cdot k!$$

$$\Rightarrow \quad p \mid \binom{p}{k} \quad \text{da} \quad p \nmid k! \quad (k < p)$$

[$a, b \in \mathbb{Z}$, $p \mid ab \Rightarrow p \mid a$ oder $p \mid b$

Rechnung im Körper $\mathbb{Z}_p = \mathbb{F}_p$:

$\bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \Rightarrow \bar{a} = 0$ oder $\bar{b} = 0$]

Kombinatorische Beweisprinzipien

Summenregel

Es sei $r \in \mathbb{N}$ und $A_1, \ldots, A_r$ paarweise disjunkte endliche Mengen. Dann ist

$$|\bigcup_{i=1}^{r} A_i| = \sum_{i=1}^{r} |A_i|.$$

$M = A \cup B \qquad A \cap B = \emptyset$

$\Rightarrow \quad |M| = |A| + |B|$

$\Rightarrow \quad |M| - |A| = |B|$

Kombinatorische Beweisprinzipien (Forts.)

Differenzregel

Es sei M endliche Menge, $A \subseteq M$. Dann ist

$$|M \setminus A| = |M| - |A|.$$

Beispiele

$10 - |\{n \in \underline{10} \mid n \in \mathbb{P}\}| =$

- $|\{n \in \underline{10} \mid n \notin \mathbb{P}\}| =$ $10 - |\{2, 3, 5, 7\}| = 10 - 4 = 6.$
- Anzahl der Lottoziehungen, bei denen 49 gezogen wird
- Anzahl der 3-Kombinationen aus $\underline{8}$, in denen 1 vorkommt

$\binom{8}{3} - \binom{7}{3} = 56 - 35 = 21;$ $\frac{21}{56} = \frac{3}{8}.$

$$\binom{49}{6} - \binom{48}{6} = \quad \ldots \quad 1\,712\,304$$

Kombinatorische Beweisprinzipien (Forts.)

Produktregel

Es sei $r \in \mathbb{N}$ und $A_1, \ldots, A_r$ endliche Mengen. Dann ist

$$|\bigtimes_{i=1}^{r} A_i| = \prod_{i=1}^{r} |A_i|.$$

$$\bigtimes_{i=1}^{r} A_i = \{ (a_1, \ldots, a_r) \mid a_i \in A_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq r \}.$$

Kombinatorische Beweisprinzipien (Forts.)

Satz

$\mathcal{A}$ eine Multimenge mit r verschiedenen Elementen $a_1, \ldots, a_r$.
Es sei $\ell_{\mathcal{A}} = (k_1, \ldots, k_r)$ und $k = k_1 + \cdots + k_r$.

Die Anzahl der Anordnungen von $\mathcal{A}$ ist

$$\frac{k!}{k_1! \cdots k_r!}.$$

Beispiel

Wieviele verschiedene Wörter kann man durch Anordnung der Buchstaben $\underset{1}{\mathtt{P}},\underset{2}{\mathtt{I}},\underset{3}{\mathtt{Z}},\mathtt{Z},\underset{4}{\mathtt{A}}$ gewinnen?

$k = 5, \quad k_1 = k_2 = k_4 = 1, \quad k_3 = 2$

$$\frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60.$$

Beweis des Satzes

$$A := \{(a_1,1),(a_1,2),\dots,(a_1,k_1),(a_2,1),\dots,(a_2,k_2),\dots,(a_r,k_r)\}$$

$|A| = k$, Anzahl der Anordnungen (= Permutationen) von A: $k!$

Sei i fest, $1 \le i \le r$.

Ersetze in jeder Permutation von A (a_i, j) durch a_i, $1 \le j \le k_i$.

$\Rightarrow$ genau $k_i!$ Permutationen von A werden gleich

Führe diese Ersetzung für jedes i durch:

$$|\{\text{Permutationen von } A\}| = k_1!\, k_2! \cdots k_r!\, |\{\text{Anordnungen von } \mathcal{A}\}|$$

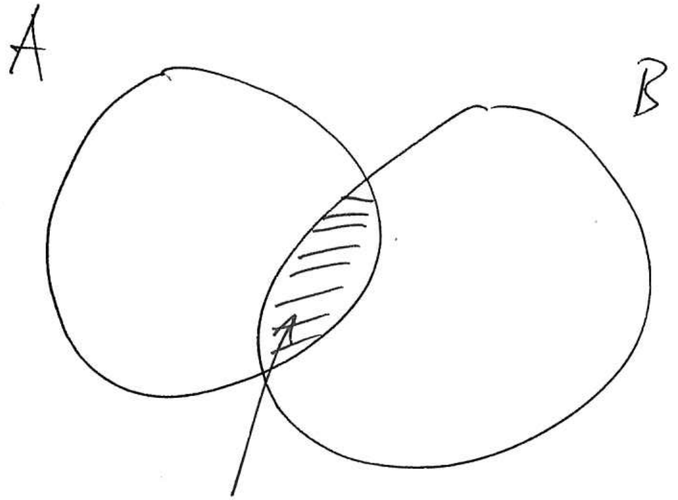
$\blacksquare$

Kombinatorische Beweisprinzipien (Forts.)

Prinzip

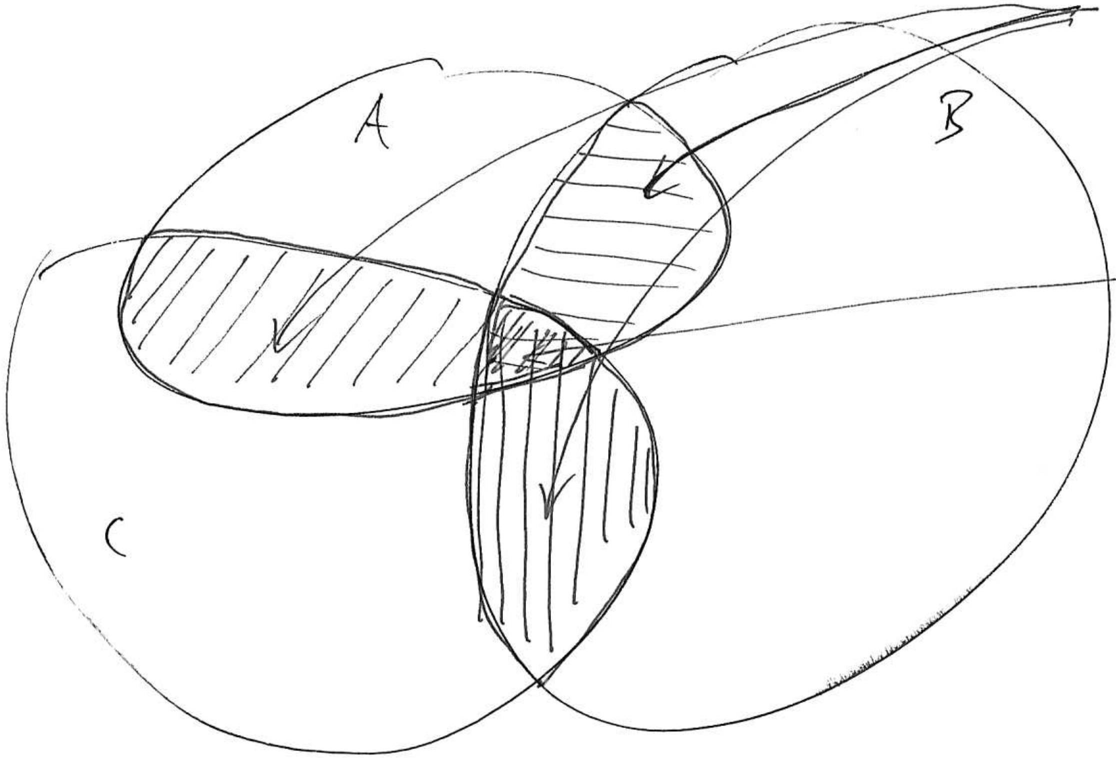
Für zwei beliebige endliche Mengen A und B gilt stets

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$



$|A \cap B|$ (in $|A| + |B|$ 2-mal gezählt)

$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|.$$



In $|A|+|B|+|C|$ je 2-mal gezählt.

In $|A|+|B|+|C|$ 3-mal gezählt,

in $-(|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|)$

3-mal abgezogen.

Kombinatorische Beweisprinzipien (Forts.)

Inklusions-Exklusionsprinzip

Es sei $r \in \mathbb{N}$ und $A_1, \ldots, A_r$ endliche Mengen. Dann gilt

$$|\bigcup_{k=1}^{r} A_k| = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subseteq \underline{r} \\ |I|=k}} |\bigcap_{i \in I} A_i|.$$

Beispiel

$|\{n \in \underline{100} \mid 2 \text{ teilt } n \text{ oder } 3 \text{ teilt } n \text{ oder } 5 \text{ teilt } n\}| =$

$A = \underline{100}, \quad A_k := \{ i \in \underline{100} \mid k \mid i \}, \; |A_k| = \lfloor \frac{100}{k} \rfloor$

$|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = |A_2| + |A_3| + |A_5| - (|A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3|$

$+ |A_2 \cap A_3 \cap A_5|$ *

$$= |A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_{15}| - |A_{10}| - |A_6| + |A_{30}| =$$

$$= 50 + 33 + 20 - 6 - 10 - 16 + 3 = 74.$$

Kombinatorische Beweisprinzipien (Forts.)

Schubfachprinzip (informell)

Verteilt man n Elemente auf m Schubladen und ist $n > m$, so enthält eine Schublade mindestens zwei Elemente.

Schubfachprinzip (mathematisch)

Es seien A, B endliche Mengen mit $|A| = n$ und $|B| = m$. Weiter sei $f\colon A \to B$ Abbildung.

Ist $n > m$, dann ist f nicht injektiv.

Beispiel

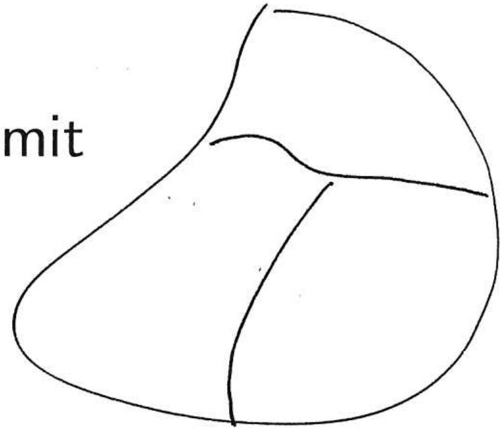
In jeder Menge von 13 Personen gibt es zwei, die im gleichen Monat Geburtstag haben.

Partitionen

Es sei A eine Menge und $k \in \mathbb{N}_0$.

Erinnerung

Eine Partition von A ist eine Teilmenge $\mathcal{P} \subseteq \mathrm{Pot}(A)$ mit



- $P \neq \emptyset$ für alle $P \in \mathcal{P}$;
- $P \cap P' = \emptyset$ für alle $P, P' \in \mathcal{P}$ mit $P \neq P'$;
- $A = \cup_{P \in \mathcal{P}} P$.

Definition

Eine *k-Partition von A* ist eine Partition $\mathcal{P}$ von A mit $|\mathcal{P}| = k$.

Beispiele

- $\{\{1,3,5,8\},\{2,7\},\{4,9\},\{6\}\}$ ist eine 4-Partition von $\underline{9}$.
- Eine 0-Partition von A existiert nur für $A = \emptyset$.

Stirlingzahlen

Es seien $n, k \in \mathbb{N}_0$.

Definition

$$S_{n,k} := \text{Anzahl der } k\text{-Partitionen von } \underline{n}$$

heißt *Stirling-Zahl zweiter Art*.

Beispiel

Die Anzahl der Möglichkeiten, n Studierende auf k nicht-leere Tutoriengruppen aufzuteilen, ist $S_{n,k}$.

Bemerkung

- $S_{n,n} = 1$, auch für $n = 0$
- $S_{n,0} = 0$ falls $n > 0$,
- $S_{n,k} = 0$ falls $k > n$.

Stirlingzahlen (Forts.)

Satz
Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ gilt

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}.$$

<u>Beweis des Satzes:</u> Klar für $n=1$ nach Bemerkung (selbst)

Sei also $n > 1$. $X := \{ k\text{-Partitionen von } n \}$

$Y := \{ P \in X \mid \{n\} \in P \}$, $Z := X - Y$

$|X| = |Y| + |Z|$

$|Y| = |\{ (k-1)\text{-Part. von } \underline{n-1} \}|$ Lasse $\{n\}$ weg.

$|Z| = |\{ k\text{-Part. von } \underline{n-1} \}| \cdot k$

$$\{P_1, \dots, P_k\} \to \begin{array}{l} \{P_1 \cup \{n\}, P_2, \dots, P_k\} \\ \{P_1, P_2 \cup \{n\}, \dots, P_k\} \\ \vdots \\ \{P_1, P_2, \dots, P_{k-1}, P_k \cup \{n\}\} \end{array}$$

Stirlingzahlen (Forts.)

Bemerkung

Die Zahlen $S_{n,k}$ lassen sich im sog. *Stirling-Dreieck zweiter Art* anordnen:

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
 & & & & & & & k= & 0 & & & & & & \\
n=0: & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
n=1: & & & & & & 0 & & 1 & & 2 & & & & \\
n=2: & & & & & 0 & & 1 & & 1 & & 3 & & & \\
n=3: & & & & 0 & & 1 & & 3 & & 1 & & 4 & & \\
n=4: & & & 0 & & 1 & & 7 & & 6 & & 1 & & 5 & \\
n=5: & & 0 & & 1 & & 15 & & 25 & & 10 & & 1 & & 6 \\
n=6: & 0 & & 1 & & 31 & & 90 & & 65 & & 15 & & 1 &
\end{array}
$$

Stirlingzahlen (Forts.)

Es seien $n, k \in \mathbb{N}_0$.

Definition

$$s_{n,k} := \text{Anzahl der Permutationen von } \underline{n} \text{ mit } \underbrace{k\text{-Zykeln}}_{\text{inklusive der 1-Zykel}}$$

heißt *Stirling-Zahl erster Art.*

Bemerkung

- $s_{n,n} = 1$,
- $s_{n,0} = 0$ falls $n > 0$,
- $s_{n,k} = 0$ falls $k > n$.

Stirlingzahlen (Forts.)

Satz

Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ gilt

$$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1)s_{n-1,k}.$$

Stirlingzahlen (Forts.)

Bemerkung

Die Zahlen $s_{n,k}$ lassen sich im sog. *Stirling-Dreieck erster Art* anordnen:

$n = 0$:	1						
$n = 1$:	0	1					
$n = 2$:	0	1	1				
$n = 3$:	0	2	3	1			
$n = 4$:	0	6	11	6	1		
$n = 5$:	0	24	50	35	10	1	
$n = 6$:	0	120	274	225	85	15	1