Lehrstuhl A für
Mathematik

Prof. Dr. S. Walcher
Niclas Kruff, M. Sc.
Dipl.-Gyml. Markus Hirshman

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Dezember 2018

Weihnachtsblatt zur Vorlesung Analysis für Informatiker

Die Aufgaben dieses Blattes dienen der Wiederholung des bereits behandelten Stoffs, eine Abgabe und Korrektur findet nicht statt.

Aufgabe 1 Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} \,.$$

Aufgabe 2 a) Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

$$a_n = \frac{2n^4 + 2n + 2}{(n^2+1)(n^2-2)}, \ n \in \mathbb{N} \qquad , \quad b_n = \frac{\cos(n^2)}{\sqrt{n}}, \ n \in \mathbb{N}$$

b) i) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass $\sin x < x$ für alle $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

ii) Wir definieren die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ rekursiv durch die Vorschrift

$$a_0 = 1 \quad , \quad a_{n+1} = \sin a_n \,.$$

Beweisen Sie, dass $(a_n)_n$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 3 (Konvergenz – oder doch nicht?) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie für die nachfolgenden Aussagen, ob diese äquivalent zur Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a sind, und geben Sie jeweils einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an:

(A) Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n > n_0$.

(B) Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| \leq \epsilon$ für alle $n \geq n_0$.

(C) Für alle $\epsilon \geq 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$.

(D) Es gibt ein $c > 0$, so dass es für alle $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n - a| < c\epsilon$ für alle $n \geq n_0$.

Aufgabe 4 Wir betrachten die Dirichletsche Sprungfunktion

$$D : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Weiter sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge.

Untersuchen Sie die Folge $b_n := D(a_n)$ auf Konvergenz.

Aufgabe 5 (a) Zeigen Sie, dass die folgende Reihe für alle $x \in (-1, 1)$ absolut konvergiert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}}.$$

(b) Untersuchen Sie die Reihe auf Konvergenz und absolute Konvergenz. Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Reihenwert bis auf einen Fehler von 10^{-1} und geben Sie das Ergebnis als vollständig gekürzten Bruch an

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3}.$$

Aufgabe 6 Zeigen Sie, dass die Funktion f mit

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{e^{-x}-1}{x}, & x \neq 0, \\ -1, & x = 0, \end{cases}$$

stetig ist.

Aufgabe 7 Zeigen oder widerlegen Sie:

a) Es existiert eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(\mathbb{Q}) = [0, 1]$.

b) Es existiert eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(\mathbb{Q}) = (0, 1)$.

c) Es existiert eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f([0, 1]) = \mathbb{Q}$.

d) Es existiert eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f((0,1)) = \mathbb{Q}$.

Aufgabe 8 Zeigen Sie, dass die folgende Funktion genau eine reelle Nullstelle hat

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = \exp(x) + x^3 - 2\,.$$

Aufgabe 9 Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion der folgenden Funktionen. Geben Sie insbesondere den Definitionsbereich D' der Ableitungsfunktion an.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 4x^6 - 2x^4 + x^3 + 5x^2 - 6x,$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin\left((x^2+1)\cos\left(e^{x^3-x}\right)\right),$

c) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x^3+x}\,\ln(x^2+1),$

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x\sqrt[5]{x^4+x^2+1},$

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \arctan(e^{3x}),$

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{1+\cos^2(x)},$

g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2}{4+x^2}.$

Knobelaufgaben

Die folgenden Aufgaben sind explizit als ***Knobel***aufgaben gestellt.

Aufgabe 10 Sei $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ein Polynom mit ganzzahligen, nichtnegativen Koeffizienten und $a_n \neq 0$. Es können beliebig viele Funktionswerte erfragt werden (d.h. Sie fragen nach dem Funktionswert an der Stelle t und eine göttliche Instanz liefert Ihnen das Ergebnis). Zeigen oder widerlegen Sie:

Es ist möglich allein aus der Kenntnis dieser erfragten Funktionswerte das Polynom eindeutig zu bestimmen. Falls dies möglich ist, was ist die maximale Anzahl an Funktionswerten die erfragt werden muss?

Aufgabe 11 Sei $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ sowie $a_n \neq 0$. Weiter seien $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $\operatorname{ggT}(p,q) = 1$, so dass $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$ ist.

a) Zeigen Sie: p teilt a_0 und q teilt a_n.

b) Was lässt sich im Spezialfall eines normierten Polynoms, d.h. $a_n = 1$ folgern?

c) Aus der Schule ist evtl. bekannt, dass man zur Nullstellenbestimmung eines Polynoms vom Grad 3 oder höher zunächst eine Nullstelle "raten" muss und anschließend eine Polynomdivision durchführt.Als mögliche Kandidaten werden oftmals $\pm 1, \pm 2$ gewählt. Geben Sie ein besseres Vorgehen an, um eine Nullstelle zu "raten" und bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f mit
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 9x^2 - 57x + 385.$$

Aufgabe 12 Analog zur *pq*-Formel existiert eine Lösungsformel zur Nullstellenbestimmung von Polynomen dritten Grades, welche als *Formel von Cardano* bekannt ist. Wir geben hier einen kurzen Abriss des Vorgehens an.

Für $a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ betrachte die Funktion f mit
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Alle Nullstellen von f lassen sich dann wie folgt bestimmen:

- Division durch a und anschließende Substitution von $x = z - \frac{b}{3a}$ liefert
$$z^3 + pz + q = 0.$$

- Weitere Substitution $z = u + v$ führt auf
$$z^3 = 3uvz + u^3 + v^3.$$
Ein Koeffizientenvergleich liefert dann ein (nicht lineares) Gleichungssystem
$$\begin{aligned} u^3 v^3 &= -\frac{p^3}{27} \\ u^3 + v^3 &= -q \end{aligned}$$

- Nach dem Satz von Vieta sind dann u^3 und v^3 die Nullstellen des (quadratischen) Polynoms $t \mapsto t^2 + qt - \frac{p^3}{27}$.

Insbesondere sind u^3 und v^3 nicht notwendigerweise reell, auch wenn alle Lösungen der Ursprungsgleichung reell sind.

a) Vollziehen Sie die Schritte des skizzierten Vorgehens nach.

b) Verwenden Sie das Vorgehen um alle Lösungen der Gleichung

$$z^3 - 6z + 4 = 0$$

zu bestimmen.

(Die Lösungen lassen sich hier auch ohne die Formel von Cardano etwa mit der Methode aus Aufgabe 10 bestimmen, die notwendigen Schritte werden aber bei diesen „einfachen Ergebnissen“ bereits sehr unschön weshalb wir uns mit dieser „einfachen“ Gleichung begnügen)

Hinweise zu b):

- Für alle $0 \neq z \in \mathbb{C}$ existiert ein eindeutig bestimmtes $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi} = |z| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)).$$

- Ist $0 \neq z \in \mathbb{C}$ mit $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$, so sind die n-ten Wurzeln aus z genau die komplexen Zahlen

$$z_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{\frac{i\varphi}{n} + k \cdot \frac{2\pi i}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

  Dies liefert je 3 Kandidaten für u bzw. v. Über $-3uv = p$ lassen sich die relevanten Paare (u_i, v_i) bestimmen, welche eine Lösung der Gleichung liefern werden.

- $\cos\left(\frac{19}{12}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{8}}$ und $\cos\left(\frac{11}{12}\pi\right) = \frac{-\sqrt{3}-1}{\sqrt{8}}$.

Aufgabe 13 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{n+k}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

Hinweise:

- Riemannsche Summen können helfen (siehe Seite 112-114 im Skript).
- Der Logarithmus eines Produkts ist eine Summe von Logarithmen.

Aufgabe 14 Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $Q(n)$ die **Quersumme**, d.h. es ist etwa

$$Q(6) = 6,\ Q(53) = 5 + 3 = 8,\ Q(2089) = 2 + 0 + 8 + 9 = 19.$$

Bestimmen Sie $Q(Q(Q(4444^{4444})))$.

Hinweise: Für $a, b, k \in \mathbb{Z}$ schreiben wir $a \equiv b \mod k$, falls k die Differenz $(a - b)$ teilt. Sie dürfen die folgenden Aussagen ohne Beweis verwenden:

- Ist $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $Q(n) \equiv n \mod 9$ (darauf basiert die aus der Schule bekannte Teilbarkeitsregel für die 9).
- Sind $a, \tilde{a}, b, \tilde{b}, k \in \mathbb{Z}$ mit

$$a \equiv \tilde{a} \mod k \quad \text{und} \quad b \equiv \tilde{b} \mod k,$$

  dann ist auch $a \cdot b \equiv \tilde{a} \cdot \tilde{b} \mod k$.
- Sind $a, \tilde{a}, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ mit $a \equiv a' \mod k$, dann ist auch $a^n \equiv \tilde{a}^n \mod k$.