Zusammenfassung

Anzahl der Möglichkeiten, k Elemente aus einer n-elementigen Menge zu ziehen:

	geordnet	ungeordnet
ohne Zurücklegen	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$
mit Zurücklegen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$

Mehr Informationen:

`www.studyhelp.de/online-lernen/mathe/kombinatorik/`

Der binomische Lehrsatz

Es sei R ein kommutativer Ring.

Schreibweise
Für $a \in R$ und $z \in \mathbb{Z}$ schreiben wir

$$z.a := \begin{cases} \underbrace{a + a + \cdots + a}_{z \text{ Summanden}}, & \text{falls } z \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{falls } z = 0 \\ -(-z.a), & \text{falls } z < 0 \end{cases}$$

Meist lassen wir den Punkt weg, d.h. wir schreiben za statt $z.a$.

Bemerkung
Ist $z = xy$ für $x, y \in \mathbb{Z}$, dann gilt $z.a = x.(y.a)$ für alle $a \in R$.

Der binomische Lehrsatz (Forts.)

Binomischer Lehrsatz

Es sei R ein kommutativer Ring, $a, b \in R$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Korollar

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Der binomische Lehrsatz (Forts.)

Schülers Traum

Es sei R ein Ring und p eine Primzahl mit $p.a = 0$ für alle $a \in R$ (z.B. $R = \mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elementen). Dann ist

$$(a+b)^p = a^p + b^p$$

für alle $a, b \in R$.

Beweis

Für $0 < k < p$ ist

$$\binom{p}{k} = \frac{p \cdot (p-1) \cdots (p-k+1)}{k!}$$

von der Form xp für ein $x \in \mathbb{N}$, also $\binom{p}{k}.a^k b^{p-k} = 0$.

Kombinatorische Beweisprinzipien

Summenregel

Es sei $r \in \mathbb{N}$ und $A_1, \ldots, A_r$ paarweise disjunkte endliche Mengen. Dann ist

$$|\bigcup_{i=1}^{r} A_i| = \sum_{i=1}^{r} |A_i|.$$

Kombinatorische Beweisprinzipien (Forts.)

Differenzregel

Es sei M endliche Menge, $A \subseteq M$. Dann ist

$$|M \setminus A| = |M| - |A|.$$

Beispiele

- $|\{n \in \underline{10} \mid n \notin \mathbb{P}\}| =$
- Anzahl der Lottoziehungen, bei denen 49 gezogen wird
- Anzahl der 3-Kombinationen aus $\underline{8}$, in denen 1 vorkommt

Kombinatorische Beweisprinzipien (Forts.)

Produktregel

Es sei $r \in \mathbb{N}$ und $A_1, \ldots, A_r$ endliche Mengen. Dann ist

$$|\bigtimes_{i=1}^{r} A_i| = \prod_{i=1}^{r} |A_i|.$$

Kombinatorische Beweisprinzipien (Forts.)

Satz

$\mathcal{A}$ eine Multimenge mit r verschiedenen Elementen $a_1, \ldots, a_r$.
Es sei $\ell_{\mathcal{A}} = (k_1, \ldots, k_r)$ und $k = k_1 + \cdots + k_r$.

Die Anzahl der Anordnungen von $\mathcal{A}$ ist

$$\frac{k!}{k_1! \cdots k_r!}.$$

Beispiel

Wieviele verschiedene Wörter kann man durch Anordnung der Buchstaben `P,I,Z,Z,A` gewinnen?

Kombinatorische Beweisprinzipien (Forts.)

Prinzip

Für zwei beliebige endliche Mengen A und B gilt stets

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Kombinatorische Beweisprinzipien (Forts.)

Inklusions-Exklusionsprinzip

Es sei $r \in \mathbb{N}$ und $A_1, \ldots, A_r$ endliche Mengen. Dann gilt

$$|\bigcup_{k=1}^{r} A_k| = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subseteq \underline{r} \\ |I|=k}} |\bigcap_{i \in I} A_i|.$$

Beispiel

$|\{n \in \underline{100} \mid 2 \text{ teilt } n \text{ oder } 3 \text{ teilt } n \text{ oder } 5 \text{ teilt } n\}| =$

Kombinatorische Beweisprinzipien (Forts.)

Schubfachprinzip (informell)

Verteilt man n Elemente auf m Schubladen und ist $n > m$, so enthält eine Schublade mindestens zwei Elemente.

Schubfachprinzip (mathematisch)

Es seien A, B endliche Mengen mit $|A| = n$ und $|B| = m$. Weiter sei $f : A \to B$ Abbildung.

Ist $n > m$, dann ist f nicht injektiv.

Beispiel

In jeder Menge von 13 Personen gibt es zwei, die im gleichen Monat Geburtstag haben.

Partitionen

Es sei A eine Menge und $k \in \mathbb{N}_0$.

Erinnerung

Eine Partition von A ist eine Teilmenge $\mathcal{P} \subseteq \mathrm{Pot}(A)$ mit

- $P \neq \emptyset$ für alle $P \in \mathcal{P}$;
- $P \cap P' = \emptyset$ für alle $P, P' \in \mathcal{P}$ mit $P \neq P'$;
- $A = \cup_{P \in \mathcal{P}} P$.

Definition

Eine *k-Partition von A* ist eine Partition $\mathcal{P}$ von A mit $|\mathcal{P}| = k$.

Beispiele

- $\{\{1,3,5,8\},\{2,7\},\{4,9\},\{6\}\}$ ist eine 4-Partition von $\underline{9}$.
- Eine 0-Partition von A existiert nur für $A = \emptyset$.

Stirlingzahlen

Es seien $n, k \in \mathbb{N}_0$.

Definition

$$S_{n,k} := \text{Anzahl der } k\text{-Partitionen von } \underline{n}$$

heißt *Stirling-Zahl zweiter Art*.

Beispiel

Die Anzahl der Möglichkeiten, n Studierende auf k nicht-leere Tutoriengruppen aufzuteilen, ist $S_{n,k}$.

Bemerkung

- $S_{n,n} = 1$,
- $S_{n,0} = 0$ falls $n > 0$,
- $S_{n,k} = 0$ falls $k > n$.

Stirlingzahlen (Forts.)

Satz

Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ gilt

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}.$$

Stirlingzahlen (Forts.)

Bemerkung

Die Zahlen $S_{n,k}$ lassen sich im sog. *Stirling-Dreieck zweiter Art* anordnen:

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
n = 0: & & & & & & & 1 & & & & & & \\
n = 1: & & & & & & 0 & & 1 & & & & & \\
n = 2: & & & & & 0 & & 1 & & 1 & & & & \\
n = 3: & & & & 0 & & 1 & & 3 & & 1 & & & \\
n = 4: & & & 0 & & 1 & & 7 & & 6 & & 1 & & \\
n = 5: & & 0 & & 1 & & 15 & & 25 & & 10 & & 1 & \\
n = 6: & 0 & & 1 & & 31 & & 90 & & 65 & & 15 & & 1
\end{array}
$$

Stirlingzahlen (Forts.)

Es seien $n, k \in \mathbb{N}_0$.

Definition

$$s_{n,k} := \text{Anzahl der Permutationen von } n \text{ mit } k\text{-Zykeln}$$

heißt *Stirling-Zahl erster Art*.

Bemerkung

- $s_{n,n} = 1$,
- $s_{n,0} = 0$ falls $n > 0$,
- $s_{n,k} = 0$ falls $k > n$.

Stirlingzahlen (Forts.)

Satz
Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ gilt

$$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1)s_{n-1,k}.$$

Stirlingzahlen (Forts.)

Bemerkung

Die Zahlen $s_{n,k}$ lassen sich im sog. *Stirling-Dreieck erster Art* anordnen:

$n = 0$:							1						
$n = 1$:						0		1					
$n = 2$:					0		1		1				
$n = 3$:				0		2		3		1			
$n = 4$:			0		6		11		6		1		
$n = 5$:		0		24		50		35		10		1	
$n = 6$:	0		120		274		225		85		15		1