Wdh $f: M \to N$, $g: N \to L$ Abb

Komposition: $g \circ f: M \to L$, $x \mapsto g(f(x))$

$h: L \to K$ Abb

assoziativ: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f: M \to K$, $x \mapsto h(g(f(x)))$

$\overset{!!}{=}$ $h \circ g \circ f$

$f: M \to N$ Abb, $g: N \to M$ ist

linksseit. Umkehrabb :$\Longleftrightarrow$ $g \circ f = id_M$ [g ex $\Leftrightarrow$ f inj]

rechtsseit " :$\Longleftrightarrow$ $f \circ g = id_N$ [g ex $\Leftrightarrow$ f surj]

Umkehrabb. :$\Longleftrightarrow$ $f \circ g = id_N$ und $g \circ f = id_M$ [g ex $\Leftrightarrow$ f bij]

$f: M \to N \quad , \quad g: N' \to L$

Def. $g \circ f$ <u>nur</u> wenn $\underline{\underline{N = N'}}$

Manchmal def für

$N \subseteq N'$, d.h.: $\iota^N: N \to N'$, $x \mapsto x$

$$\underline{\underline{g \circ \iota^N \circ f}}$$

Wenn g Umkehrabb. $\Rightarrow$ g eindeutig, $f^{-1} := g$

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

M, N Mengen

Def: M und N <u>gleichmächtig</u> $\Leftrightarrow$ es gibt Bij $M \to N$

<u>z.B.:</u> • $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ gleichmächtig

• Endl. Menge mit n Elementen ist gleichmächtig zu $\underline{n}$

• M Menge $\Rightarrow$ M und $\mathrm{Pot}(M)$ nicht gleichmächtig.

z.B.: $M = \mathbb{N}$: es gibt „mehr" Teilmengen von $\mathbb{N}$ als Elemente.

$f: M \to N$, M, N endliche Mengen, $|M| = |N|$

f inj $\Leftrightarrow$ f surj $\Leftrightarrow$ f bij.

1.5 Relationen

Es seien M und N Mengen.

Definition

- Eine *Relation zwischen M und N* ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times N$.
- Im Fall $M = N$ sagen wir: R ist *Relation auf M*.

Terminologie und Notation

Es sei $R \subseteq M \times N$ eine Relation zwischen M und N. Für $(x, y) \in R$ schreiben wir auch

$$x \, R \, y$$

und sagen

x *steht* bzgl. R in *Relation* zu y.

Relationen (Forts.)

Beispiele

- $<$ auf $\mathbb{N}$ — $x, y \in \mathbb{N}$, $x < y$, $(x, y) \in \, < \iff x < y$
- M Menge
  $\subseteq$ auf $\mathrm{Pot}(M)$ — $A, B \subseteq M$ $(A, B) \in \, \subseteq \iff A \subseteq B$
- M Menge
  $=$ auf M
- M Menge
  $M \times M$ auf M — x steht in Rel. zu y für alle $x, y \in M$
- $\{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3)\}$ auf $\{1, 2, 3\}$
- M, N, Mengen, $f : M \to N$ Abbildung.
  $\{(x, f(x)) \mid x \in M\}$.

Relationen (Forts.)

Beispiele

- A: Einwohner von Aachen

  für $a, b \in A$: $a \; N \; b$: a ist Nachkomme von b
- D: Studierende von *Diskrete Strukturen*

  für $s, t \in D$: $s \; E \; t$: s hat die gleichen Eltern wie t
  für $s, t \in D$: $s \; G \; t$: s hat den gleichen Geburtstag wie t
- P: farbige Glasperlen in einer Dose

  für $p, q \in P$: $p \; F \; q$: p hat die gleiche Farbe wie q

Eigenschaften

Definition

M Menge, R Relation auf M. Dann heißt R:

(R)	*reflexiv*:	für $x \in M$:	$x\,R\,x$
(S)	*symmetrisch*:	für $x, y \in M$:	$x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x$
(A)	*antisymmetrisch*:	für $x, y \in M$:	$x\,R\,y$ und $y\,R\,x \Rightarrow x = y$
(T)	*transitiv*:	für $x, y, z \in M$:	$x\,R\,y$ und $y\,R\,z \Rightarrow x\,R\,z$
(V)	*vollständig*:	für $x, y \in M$:	$x\,R\,y$ oder $y\,R\,x$

Eigenschaften (Forts.)

Beispiel

$<$ auf $\mathbb{N}$:

- transitiv
- nicht reflexiv
- nicht symmetrisch
- antisymmetrisch
- nicht vollständig

Eigenschaften (Forts.)

Beispiel

- R auf $\{1\}$ gegeben durch $R = \{(1,1)\}$

  R reflexiv
- R auf $\{1,2\}$ gegeben durch $R = \{(1,1)\}$

  R nicht reflexiv

Abschlüsse

Definition

M Menge, R Relation auf M

- *transitiver Abschluss* von R: Relation S auf M mit
  - S transitiv und $R \subseteq S$
  - für jede Relation T auf M: T transitiv und $R \subseteq T \Rightarrow S \subseteq T$
- *reflexiver Abschluss* von R: Relation S auf M mit
  - S reflexiv und $R \subseteq S$
  - für jede Relation T auf M: T reflexiv und $R \subseteq T \Rightarrow S \subseteq T$
- *symmetrischer Abschluss* von R: Relation S auf M mit
  - S symmetrisch und $R \subseteq S$
  - für jede Relation T auf M: T symmetrisch und $R \subseteq T \Rightarrow S \subseteq T$

Abschlüsse (Forts.)

Beispiel

R Relation auf $\{1, 2, 3\}$ gegeben durch $R = \{(1, 2), (2, 3)\}$

- ein transitiver Abschluss von R:

$$S = \{(1,2), (2,3), (1,3)\}$$

- ein reflexiver Abschluss von R:

$$S = \{(1,2), (2,3), (1,1), (2,2), (3,3)\}$$

- ein symmetrischer Abschluss von R:

$$S = \{(1,2), (2,3), (2,1), (3,2)\}$$

Abschlüsse (Forts.)

Proposition

M Menge, R Relation auf M

- es gibt genau einen transitiven Abschluss S von R
  für $x, y \in M$: $\quad x\,S\,y \Leftrightarrow$ es gibt $n \in \mathbb{N}$, $x_0, \ldots, x_n \in M$:

$x_0 R x_1 R \ldots R x_n$

und $x_n R x_{n+1} R \ldots R x_m$

$$x = x_0 \; R \; x_1 \; R \ldots R \; x_n = y$$

$\Rightarrow x_0 R x_1 R \ldots R x_n R x_{n+1} \ldots R x_m$ $\quad (\Rightarrow$ transitiv$)$

- es gibt genau einen reflexiven Abschluss S von R
  für $x, y \in M$: $\quad x\,S\,y \Leftrightarrow x\,R\,y$ oder $x = y$

- es gibt genau einen symmetrischen Abschluss S von R
  für $x, y \in M$: $\quad x\,S\,y \Leftrightarrow x\,R\,y$ oder $y\,R\,x$

Äquivalenzrelationen und Ordnungen

Es sei M eine Menge und R eine Relation auf M.

Definition

- R heißt *Äquivalenzrelation* auf M, falls R

$$(R), (S), (T)$$

  erfüllt.

- R heißt *(partielle) Ordnung* auf M, falls R

$$(R), (A), (T)$$

  erfüllt.

- R heißt *Totalordnung* auf M, falls R eine Ordnung ist und falls R vollständig ist.

Äquivalenzrelationen und Ordnungen (Forts.)

Es sei M eine Menge.

Beispiele

- „$\leq$" auf $\mathbb{R}$ ist Totalordnung. (R) klar, (A) $x \leq y$ und $y \leq x \Rightarrow x = y$
  (T) ✓, $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x \leq y$ oder $y \leq x$
- „$<$" auf $\mathbb{R}$ ist antisymmetrisch und transistiv, aber weder reflexiv noch symmetrisch.
- „$\subseteq$" auf $\mathrm{Pot}(M)$ ist Ordnung. (R) ✓ (A) $A \subseteq B$ und $B \subseteq A \Rightarrow A = B$
  (T) ✓
  Keine Totalordnung, falls $|M| \geq 2$.
- $M = \mathbb{Z}$ oder $M = \mathbb{N}$. Definiere *Teilbarkeitsrelation* „$|$" durch

„x teilt y"
$$x \mid y :\Leftrightarrow \text{Es existiert } z \in M \text{ mit } xz = y.$$

$xz = y$, $yz' = y'$, $= x(zz') = y' \Rightarrow x \mid y'$; $x \mid y$, $y \mid y'$

Dann ist „$|$" reflexiv und transitiv.
„$|$" ist Ordnung auf $\mathbb{N}$ aber keine Totalordnung.
„$|$" ist keine Ordnung auf $\mathbb{Z}$.

$xz = y$, $yz' = x \Rightarrow z \cdot z' = 1$

$x \mid -x$ für alle $x \in \mathbb{Z}$

$12 \nmid 15$, $15 \nmid 12$ $\quad 12, 15$

Äquivalenzrelationen und Ordnungen (Forts.)

Es sei M eine Menge.

Beispiele

- *Gleichheit* „$=$“ ist eine Äquivalenzrelation auf M.
- Es sei N eine Menge und $f : M \to N$ Abbildung.
  Die *Bildgleichheit* „R_f“ auf M ist definiert durch:

  $$xR_f x' :\Leftrightarrow f(x) = f(x').$$

  R_f ist Äquivalenzrelation auf M.
- $M = \mathbb{Z}$. Die *Paritätsrelation* „$\equiv_2$“ ist definiert durch

  $$x \equiv_2 y :\Leftrightarrow x - y \text{ gerade}.$$

  „$\equiv_2$“ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.

Äquivalenzrelationen (Forts.)

Weitere Beispiele

(T) $-(-x) = x$ (R) ✓ (S) ✓

- C auf $\mathbb{R}$:
  für $x, y \in \mathbb{R}$: $x \; C \; y \; :\Leftrightarrow x = y$ oder $x = -y$
- C auf $\{1, 2, 3, 4\}$

$$C = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1), (1,4), (4,1), (2,4), (4,2)\}$$

- D: Studierende von *Diskrete Strukturen*

  für $s, t \in D$: $s \; E \; t$: s hat die gleichen Eltern wie t Äquiv.rel.
  für $s, t \in D$: $s \; G \; t$: s hat den gleichen Geburtstag wie t "
- P: farbige Glasperlen in einer Dose

  für $p, q \in P$: $p \; F \; q$: p hat die gleiche Farbe wie q "

Äquivalenzrelationen (Forts.)

Definition

M Menge, C Äquivalenzrelation auf M, $x \in M$

Äquivalenzklasse von x in M bzgl. C:

$x \, C \, \tilde{x}$

$$[x] = [x]_C := \{\tilde{x} \in M \mid \tilde{x} \; C \; x\}$$

Terminologie:

- *Repräsentant* von $[x]_C$: $\quad x$

  auch: jedes $x' \in M$ mit $\quad x' \in [x]_C$, denn

$[x]_C = \{\tilde{x} \in M \mid \tilde{x} \, C x\} \ni x' \iff x' C x \underset{(S)}{\iff} x \, C x'$

$[x']_C \ni x \quad \iff$

Äquivalenzrelationen (Forts.)

Beispiele

- C auf $\mathbb{R}$:
  für $x, y \in \mathbb{R}$: $\quad x \; C \; y :\Leftrightarrow x = y$ oder $x = -y$

  für $x \in \mathbb{R}$: $\quad [x]_C = \{x, -x\}$ $\quad$ z.B.: $\{0\}$, $\{-1, 1\}$

  Repräsentanten für $[x]_C$: $\quad x$ oder $-x$

- $\equiv_2$ auf $\mathbb{Z}$:
  für $x, y \in \mathbb{Z}$: $\quad x \equiv_2 y \Leftrightarrow x - y$ gerade.

  $[0]_{\equiv_2} =$ gerade Zahlen in $\mathbb{Z}$ $\quad$ $[1]_{\equiv_2} =$ ungerade Zahlen.

  Repräsentanten für $[0]_{\equiv_2}$: jede gerade Zahl.

Äquivalenzrelationen (Forts.)

Beispiele

- C auf $\{1, 2, 3, 4\}$

$$C = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1), (1,4), (4,1), (2,4), (4,2)\}$$

$[1]_C = \{1, 2, 4\}$ $\qquad$ $[3]_C = \{3\}$

- M Menge, $=$ auf M

für $x \in M$: $\quad [x]_= = \{x\}$

Äquivalenzrelationen (Forts.)

Proposition

M Menge, C Äquivalenzrelation auf M

- Für $x \in M$ gilt: $x \in [x]_C$. wegen (R)
- Für $x, y \in M$ sind äquivalent:
  - (a) $[x]_C = [y]_C$
  - (b) $[x]_C \subseteq [y]_C$
  - (c) $x \, C \, y$

(a) $\Rightarrow$ (b) klar

(b) $\Rightarrow$ (c) : $x \in [x]_C \Rightarrow x \in [y]_C \Leftrightarrow x \, C \, y$

(c) $\Rightarrow$ (a) $x \, C y \Leftrightarrow x \in [y]_C$

$\Leftrightarrow y \, C x \Leftrightarrow y \in [x]_C$

Äquivalenzrelationen (Forts.)

Definition
M Menge, C Äquivalenzrelation auf M

Quotientenmenge von M modulo C:

$$M/C := \{[x]_C \mid x \in M\}$$

Terminologie und Notation:

- *Quotientenabbildung* von M/C:

$$\kappa : M \to M/C, \quad x \mapsto [x]_C$$

Quotientenmengen (Forts.)

Beispiel

C auf $\{1,2,3,4\}$

$$c = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(1,4),(4,1),$$
$$(2,4),(4,2)\} \quad \subseteq \{1,2,3,4\} \times \{1,2,3,4\}$$

$\{1,2,3,4\}/C = \quad \{\{1,2,4\}, \{3\}\}$

π : $1 \mapsto [1]_c \qquad 3 \mapsto [3]_c$

$2 \mapsto [1]_c = [2]_c$

$4 \mapsto [1]_c = [4]_c$