Effiziente Algorithmen (SS2015)

Kapitel 3
Matchings

Walter Unger

Lehrstuhl für Informatik 1

14:38 Uhr, den 22. November 2018

Inhalt I

Motivation und Anwendungen

- vielfältige Zuordnungsprobleme:

Motivation und Anwendungen

- vielfältige Zuordnungsprobleme:
    - Kunden auf Kundenberater

Motivation und Anwendungen

- vielfältige Zuordnungsprobleme:
  - Kunden auf Kundenberater
  - Anrufe im Callcenter auf Servicemitarbeiter

Motivation und Anwendungen

- vielfältige Zuordnungsprobleme:
  - Kunden auf Kundenberater
  - Anrufe im Callcenter auf Servicemitarbeiter
  - Heiratsvermittlung

Motivation und Anwendungen

- vielfältige Zuordnungsprobleme:
  - Kunden auf Kundenberater
  - Anrufe im Callcenter auf Servicemitarbeiter
  - Heiratsvermittlung
  - Jobs auf Maschinen

Motivation und Anwendungen

- vielfältige Zuordnungsprobleme:
  - Kunden auf Kundenberater
  - Anrufe im Callcenter auf Servicemitarbeiter
  - Heiratsvermittlung
  - Jobs auf Maschinen
  - Schwarzgeld auf Konten

Motivation und Anwendungen

- vielfältige Zuordnungsprobleme:
  - Kunden auf Kundenberater
  - Anrufe im Callcenter auf Servicemitarbeiter
  - Heiratsvermittlung
  - Jobs auf Maschinen
  - Schwarzgeld auf Konten
- Grundsätzliche Probleme:

Motivation und Anwendungen

- vielfältige Zuordnungsprobleme:
  - Kunden auf Kundenberater
  - Anrufe im Callcenter auf Servicemitarbeiter
  - Heiratsvermittlung
  - Jobs auf Maschinen
  - Schwarzgeld auf Konten
- Grundsätzliche Probleme:
  - Bestimme größtes Matching.

Motivation und Anwendungen

- vielfältige Zuordnungsprobleme:
  - Kunden auf Kundenberater
  - Anrufe im Callcenter auf Servicemitarbeiter
  - Heiratsvermittlung
  - Jobs auf Maschinen
  - Schwarzgeld auf Konten
- Grundsätzliche Probleme:
  - Bestimme größtes Matching.
  - Bestimme nicht erweiterbares Matching.

Motivation und Anwendungen

- vielfältige Zuordnungsprobleme:
  - Kunden auf Kundenberater
  - Anrufe im Callcenter auf Servicemitarbeiter
  - Heiratsvermittlung
  - Jobs auf Maschinen
  - Schwarzgeld auf Konten
- Grundsätzliche Probleme:
  - Bestimme größtes Matching.
  - Bestimme nicht erweiterbares Matching.
  - Bestimme größtes Matching mit Kantengewichten.

Motivation und Anwendungen

- vielfältige Zuordnungsprobleme:
  - Kunden auf Kundenberater
  - Anrufe im Callcenter auf Servicemitarbeiter
  - Heiratsvermittlung
  - Jobs auf Maschinen
  - Schwarzgeld auf Konten
- Grundsätzliche Probleme:
  - Bestimme größtes Matching.
  - Bestimme nicht erweiterbares Matching.
  - Bestimme größtes Matching mit Kantengewichten.
  - Bestimme günstigstes Matching (d.h. Kosten auf den Kanten) unter allen maximum Matchings.

Motivation und Anwendungen

- vielfältige Zuordnungsprobleme:
  - Kunden auf Kundenberater
  - Anrufe im Callcenter auf Servicemitarbeiter
  - Heiratsvermittlung
  - Jobs auf Maschinen
  - Schwarzgeld auf Konten
- Grundsätzliche Probleme:
  - Bestimme größtes Matching.
  - Bestimme nicht erweiterbares Matching.
  - Bestimme größtes Matching mit Kantengewichten.
  - Bestimme günstigstes Matching (d.h. Kosten auf den Kanten) unter allen maximum Matchings.
- Im Folgenden: $G = (V, E)$ zusammenhängend, $|V| = n$, $|E| = m$

Motivation und Anwendungen

- vielfältige Zuordnungsprobleme:
  - Kunden auf Kundenberater
  - Anrufe im Callcenter auf Servicemitarbeiter
  - Heiratsvermittlung
  - Jobs auf Maschinen
  - Schwarzgeld auf Konten
- Grundsätzliche Probleme:
  - Bestimme größtes Matching.
  - Bestimme nicht erweiterbares Matching.
  - Bestimme größtes Matching mit Kantengewichten.
  - Bestimme günstigstes Matching (d.h. Kosten auf den Kanten) unter allen maximum Matchings.
- Im Folgenden: $G = (V, E)$ zusammenhängend, $|V| = n$, $|E| = m$
- Im Folgenden: $G = (V, W, E)$ bipartit und zusammenhängend, $|V \cup W| = n$, $|E| = m$

Definitionen

$\delta_G(v) = |N_G(v)|$ $N_G(v) = \{w \in V(G) \mid \{v, w\} \in E(G)\}$

Definition (Matching)

Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Graph. $M \subseteq E$ heißt Matching:

$$\forall e, f \in M : e \cap f = \emptyset$$

D.h. $\forall v \in V : \delta_{G'}(v) \leqslant 1$ mit $G' = (V, M)$.

Definitionen

$\delta_G(v) = |N_G(v)|$ $N_G(v) = \{w \in V(G) \mid \{v, w\} \in E(G)\}$

Definition (Matching)

Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Graph. $M \subseteq E$ heißt Matching:

$$\forall e, f \in M : e \cap f = \emptyset$$

D.h. $\forall v \in V : \delta_{G'}(v) \leqslant 1$ mit $G' = (V, M)$.

Definitionen

$\delta_G(v) = |N_G(v)|$ $N_G(v) = \{w \in V(G) \mid \{v, w\} \in E(G)\}$

Definition (Matching)

Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Graph. $M \subseteq E$ heißt Matching:

$$\forall e, f \in M : e \cap f = \emptyset$$

D.h. $\forall v \in V : \delta_{G'}(v) \leqslant 1$ mit $G' = (V, M)$.

Definition ((inklusions-)maximales Matching)

Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Graph. $M \subseteq E$ heißt maximales Matching:

$$\forall M' : M \subsetneq M' \subset E : M' \text{ ist kein Matching.}$$

Definitionen

$\delta_G(v) = |N_G(v)|$ $N_G(v) = \{w \in V(G) \mid \{v, w\} \in E(G)\}$

Definition (Matching)

Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Graph. $M \subseteq E$ heißt Matching:

$$\forall e, f \in M : e \cap f = \emptyset$$

D.h. $\forall v \in V : \delta_{G'}(v) \leqslant 1$ mit $G' = (V, M)$.

Definition ((inklusions-)maximales Matching)

Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Graph. $M \subseteq E$ heißt maximales Matching:

$$\forall M' : M \subsetneq M' \subset E : M' \text{ ist kein Matching.}$$

Definitionen

$\delta_G(v) = |N_G(v)|$ $N_G(v) = \{w \in V(G) \mid \{v, w\} \in E(G)\}$

Definition (Matching)

Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Graph. $M \subseteq E$ heißt Matching:

$$\forall e, f \in M : e \cap f = \emptyset$$

D.h. $\forall v \in V : \delta_{G'}(v) \leqslant 1$ mit $G' = (V, M)$.

Definition ((inklusions-)maximales Matching)

Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Graph. $M \subseteq E$ heißt maximales Matching:

$$\forall M' : M \subsetneq M' \subset E : M' \text{ ist kein Matching.}$$

Definition (maximum Matching)

Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Graph. $M \subseteq E$ heißt maximum Matching:

$$\forall M' \subset E : |M| < |M'| : M' \text{ ist kein Matching.}$$

Beispiel

Beispiel

Beispiel

- Betrachte Graph:

Beispiel

- Betrachte Graph:
- $\{\{a, b\}\}$ Matching

Beispiel

- Betrachte Graph:
- $\{\{a, b\}\}$ Matching
- $\{\{a, b\}, \{b, c\}\}$ kein Matching

Beispiel

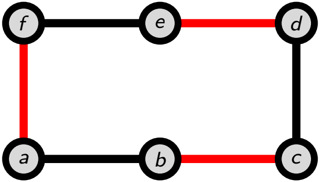
- Betrachte Graph:
- $\{\{a,b\}\}$ Matching
- $\{\{a,b\},\{b,c\}\}$ kein Matching
- $\{\{a,f\},\{c,d\}\}$ maximales Matching

Beispiel

- Betrachte Graph:
- $\{\{a, b\}\}$ Matching
- $\{\{a, b\}, \{b, c\}\}$ kein Matching
- $\{\{a, f\}, \{c, d\}\}$ maximales Matching
- $\{\{a, f\}, \{b, c\}, \{e, d\}\}$ maximum Matching

Beispiel

- Betrachte Graph:
- $\{\{a, b\}\}$ Matching
- $\{\{a, b\}, \{b, c\}\}$ kein Matching
- $\{\{a, f\}, \{c, d\}\}$ maximales Matching
- $\{\{a, f\}, \{b, c\}, \{e, d\}\}$ maximum Matching



Algorithmus (maximales Matching)

Idee: Greedy, d.h. solange es geht, wähle Kante für das Matching.

1. Gegeben $G = (V, E)$

Algorithmus (maximales Matching)

Idee: Greedy, d.h. solange es geht, wähle Kante für das Matching.

1. Gegeben $G = (V, E)$
2. $M = \emptyset$

Algorithmus (maximales Matching)

Idee: Greedy, d.h. solange es geht, wähle Kante für das Matching.

1. Gegeben $G = (V, E)$
2. $M = \emptyset$
3. Solange E nicht leer, mache:

Algorithmus (maximales Matching)

Idee: Greedy, d.h. solange es geht, wähle Kante für das Matching.

1. Gegeben $G = (V, E)$
2. $M = \emptyset$
3. Solange E nicht leer, mache:
    1. Wähle $e \in E$.

Algorithmus (maximales Matching)

Idee: Greedy, d.h. solange es geht, wähle Kante für das Matching.

1. Gegeben $G = (V, E)$
2. $M = \emptyset$
3. Solange E nicht leer, mache:
   1. Wähle $e \in E$.
   2. Setze $M = M \cup \{e\}$

Algorithmus (maximales Matching)

Idee: Greedy, d.h. solange es geht, wähle Kante für das Matching.

1. Gegeben $G = (V, E)$
2. $M = \emptyset$
3. Solange E nicht leer, mache:
    1. Wähle $e \in E$.
    2. Setze $M = M \cup \{e\}$
    3. Setze $E = \{e' \in E \mid e' \cap e = \emptyset\}$

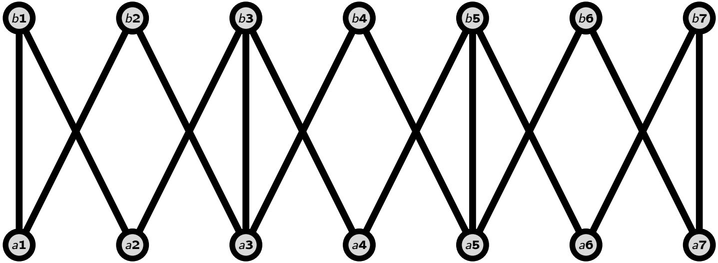
Algorithmus (maximales Matching)

Idee: Greedy, d.h. solange es geht, wähle Kante für das Matching.

1. Gegeben $G = (V, E)$
2. $M = \emptyset$
3. Solange E nicht leer, mache:
   1. Wähle $e \in E$.
   2. Setze $M = M \cup \{e\}$
   3. Setze $E = \{e' \in E \mid e' \cap e = \emptyset\}$
4. Ausgabe: M.

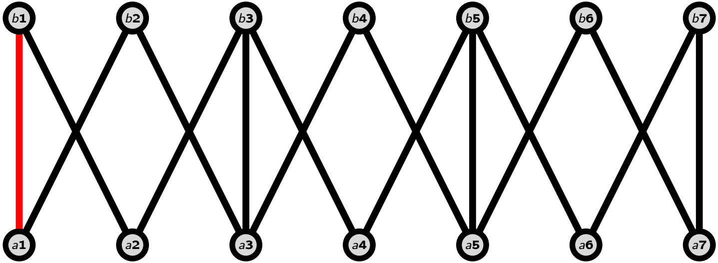
Beispiel

Idee: Greedy Algorithmus:



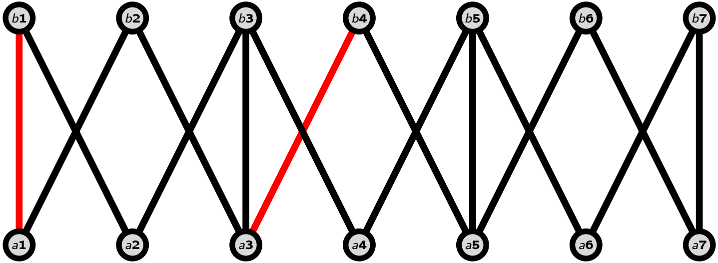
Beispiel

Idee: Greedy Algorithmus:



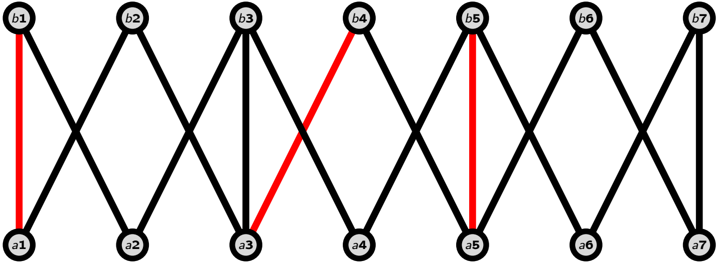
Beispiel

Idee: Greedy Algorithmus:



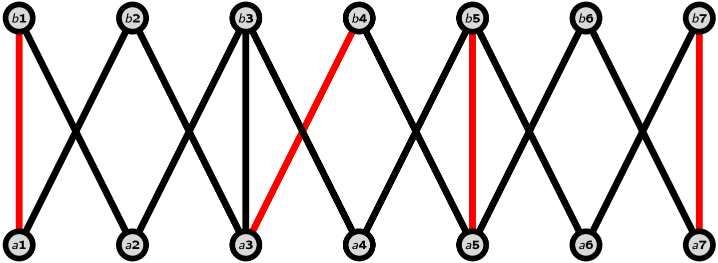
Beispiel

Idee: Greedy Algorithmus:



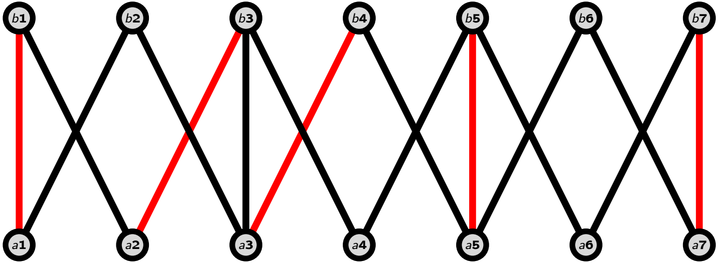
Beispiel

Idee: Greedy Algorithmus:



Beispiel

Idee: Greedy Algorithmus:



Probleme

Definition (Bipartites Matchingproblem)

Probleme

Definition (Bipartites Matchingproblem)

Gegeben: $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph.

Probleme

Definition (Bipartites Matchingproblem)

Gegeben: $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph.

Gesucht: Maximum Matching auf G.

Probleme

Definition (Bipartites Matchingproblem)

Gegeben: $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph.

Gesucht: Maximum Matching auf G.

Probleme

Definition (Bipartites Matchingproblem)

Gegeben: $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph.

Gesucht: Maximum Matching auf G.

Definition (Bipartites kostenminimales Matchingproblem)

Probleme

Definition (Bipartites Matchingproblem)

Gegeben: $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph.

Gesucht: Maximum Matching auf G.

Definition (Bipartites kostenminimales Matchingproblem)

Gegeben: $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph und Kostenfunktion $l : E \mapsto \mathbb{N}$.

Probleme

Definition (Bipartites Matchingproblem)

Gegeben: $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph.

Gesucht: Maximum Matching auf G.

Definition (Bipartites kostenminimales Matchingproblem)

Gegeben: $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph und Kostenfunktion $l : E \mapsto \mathbb{N}$.

Gesucht: Kostenminimales maximum Matching auf G.

Idee (bipartites Matching und Flüsse)

- Matching von V nach W entspricht "Transport".

Idee (bipartites Matching und Flüsse)

- Matching von V nach W entspricht “Transport”.
- Jeder Knoten kann eine Einheit transportieren.

Idee (bipartites Matching und Flüsse)

- Matching von V nach W entspricht “Transport”.
- Jeder Knoten kann eine Einheit transportieren.
- Jede Matchingkante kann eine Einheit transportieren.

Idee (bipartites Matching und Flüsse)

- Matching von V nach W entspricht "Transport".
- Jeder Knoten kann eine Einheit transportieren.
- Jede Matchingkante kann eine Einheit transportieren.
- Modelliere das durch Fluss, erweitere Graph:

Idee (bipartites Matching und Flüsse)

- Matching von V nach W entspricht "Transport".
- Jeder Knoten kann eine Einheit transportieren.
- Jede Matchingkante kann eine Einheit transportieren.
- Modelliere das durch Fluss, erweitere Graph:
  - Füge Quelle s ein und verbinde s zu jedem Knoten aus V.

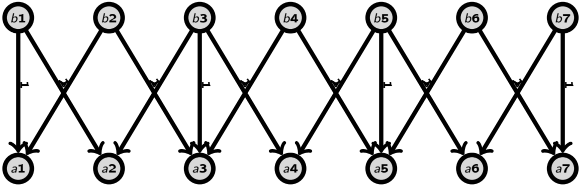
Idee (bipartites Matching und Flüsse)

- Matching von V nach W entspricht "Transport".
- Jeder Knoten kann eine Einheit transportieren.
- Jede Matchingkante kann eine Einheit transportieren.
- Modelliere das durch Fluss, erweitere Graph:
  - Füge Quelle s ein und verbinde s zu jedem Knoten aus V.
  - Füge Senke t ein und verbinde jeden Knoten aus W zu t.

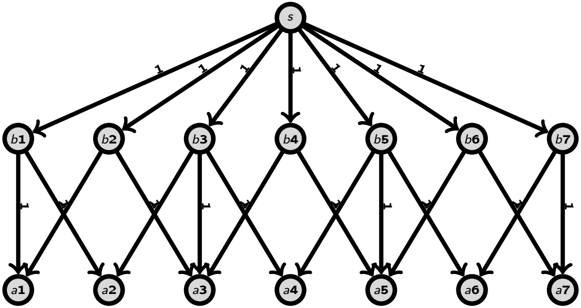
Idee (bipartites Matching und Flüsse)

- Matching von V nach W entspricht "Transport".
- Jeder Knoten kann eine Einheit transportieren.
- Jede Matchingkante kann eine Einheit transportieren.
- Modelliere das durch Fluss, erweitere Graph:
  - Füge Quelle s ein und verbinde s zu jedem Knoten aus V.
  - Füge Senke t ein und verbinde jeden Knoten aus W zu t.
  - Diese neuen Kanten können eine Einheit transportieren.

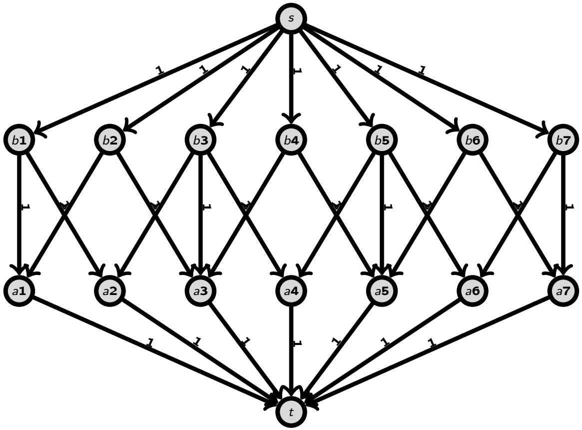
Bipartites Matching und Flüsse



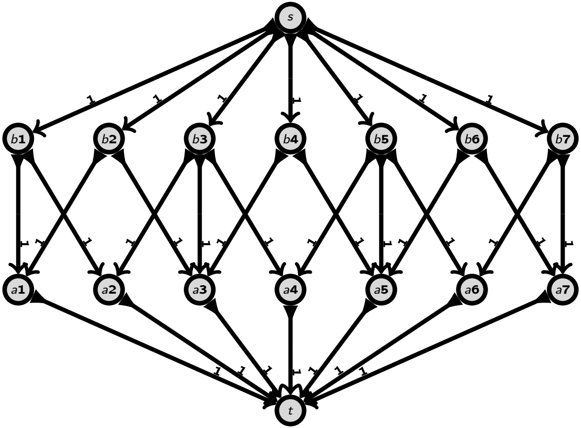
Bipartites Matching und Flüsse



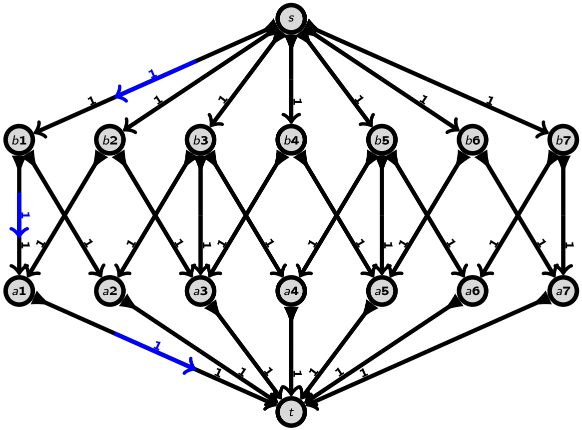
Bipartites Matching und Flüsse



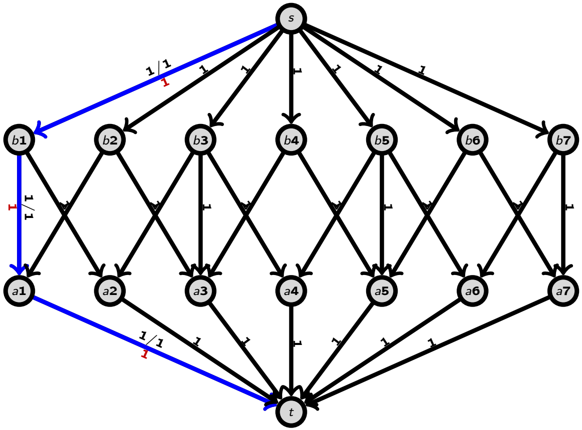
Bipartites Matching und Flüsse



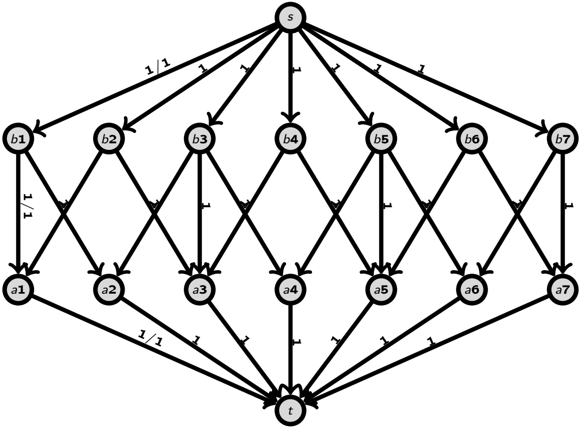
Bipartites Matching und Flüsse



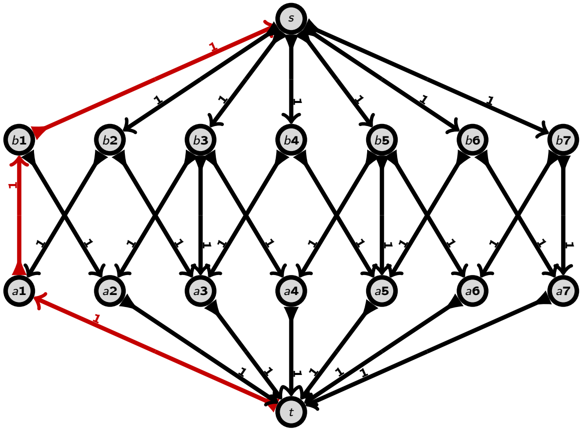
Bipartites Matching und Flüsse



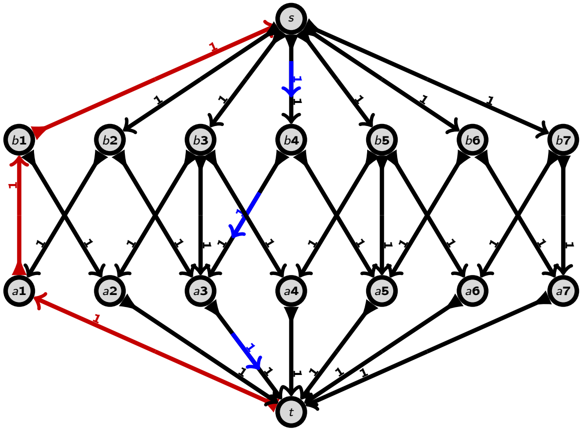
Bipartites Matching und Flüsse



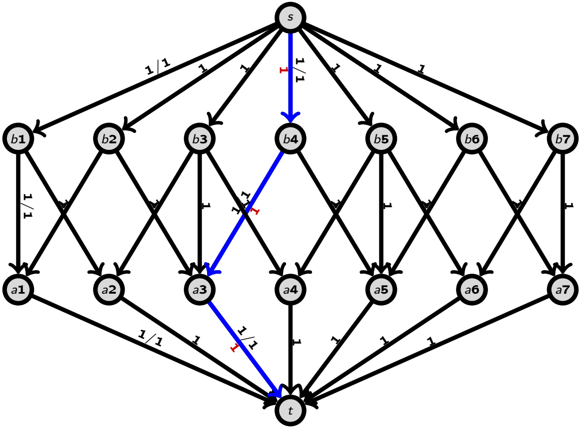
Bipartites Matching und Flüsse



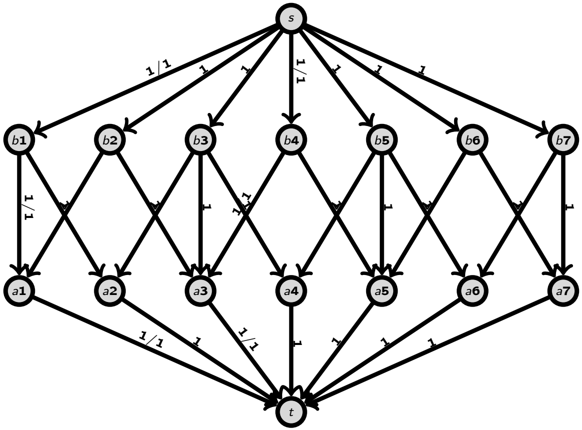
Bipartites Matching und Flüsse



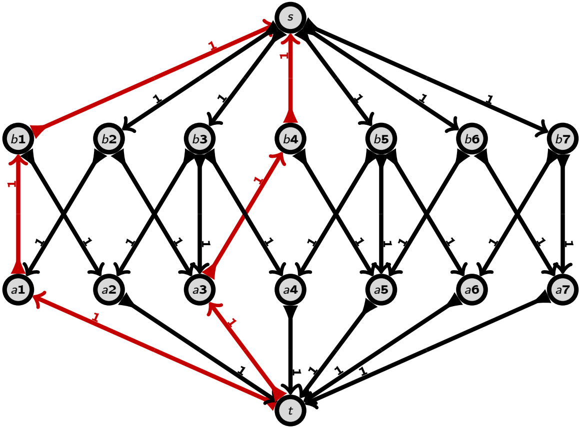
Bipartites Matching und Flüsse



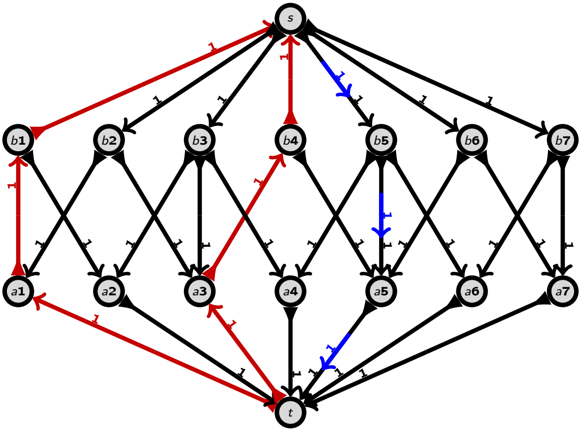
Bipartites Matching und Flüsse



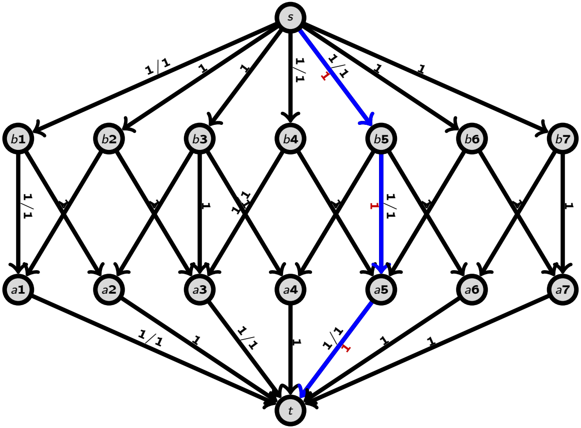
Bipartites Matching und Flüsse



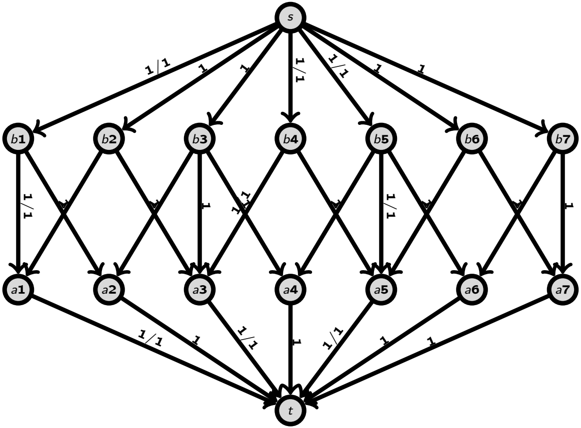
Bipartites Matching und Flüsse



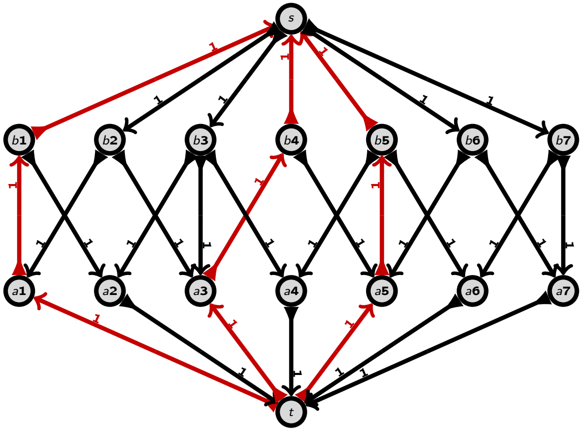
Bipartites Matching und Flüsse



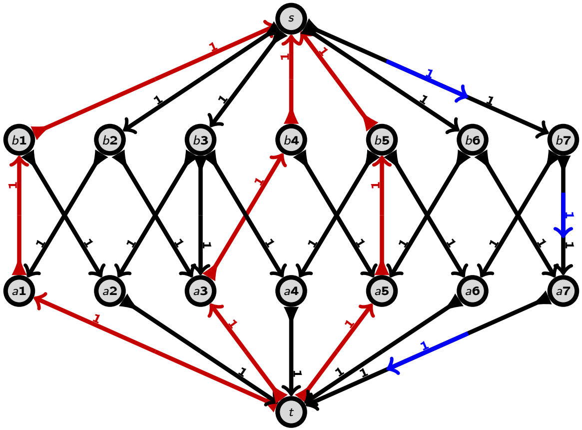
Bipartites Matching und Flüsse



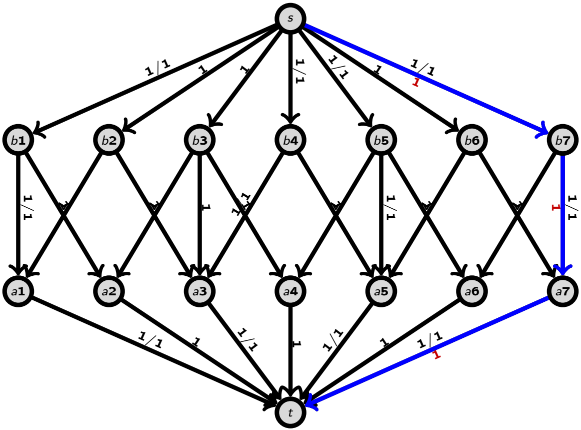
Bipartites Matching und Flüsse



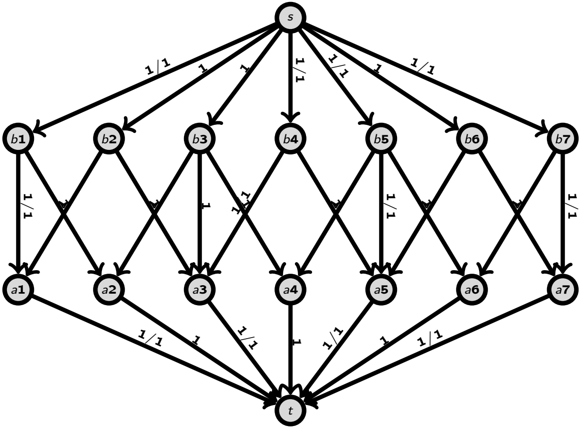
Bipartites Matching und Flüsse



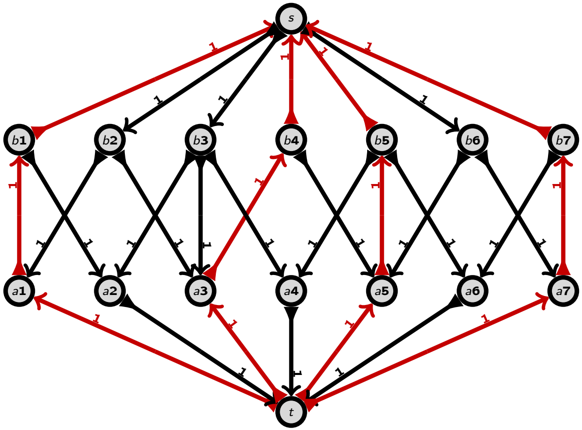
Bipartites Matching und Flüsse



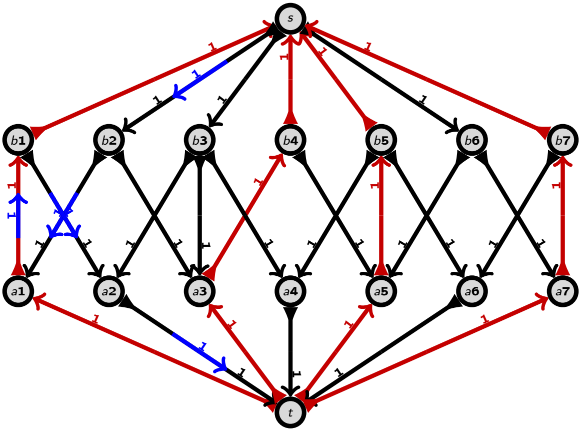
Bipartites Matching und Flüsse



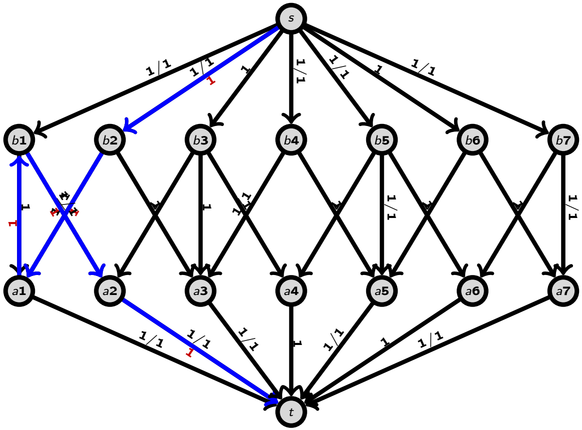
Bipartites Matching und Flüsse



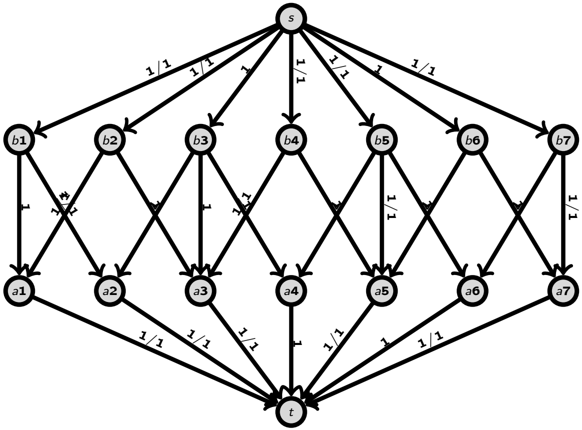
Bipartites Matching und Flüsse



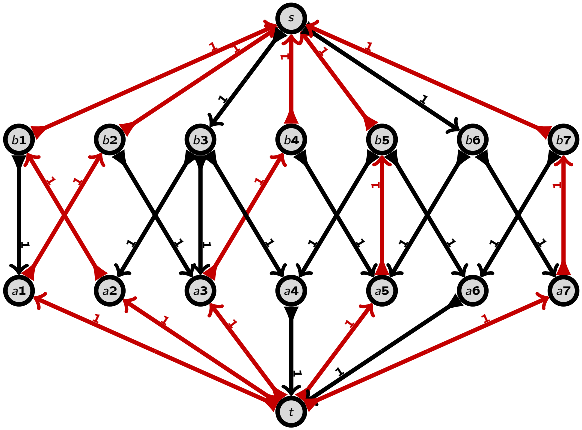
Bipartites Matching und Flüsse



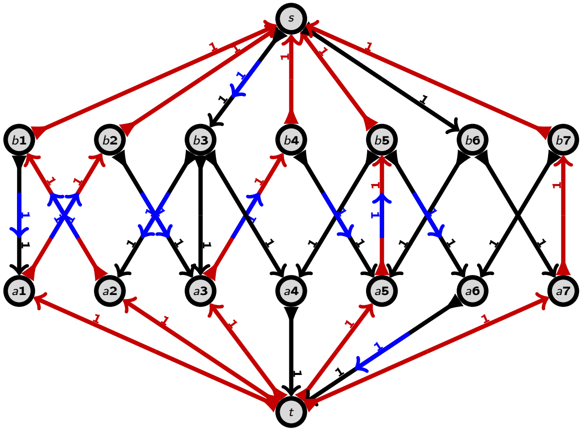
Bipartites Matching und Flüsse



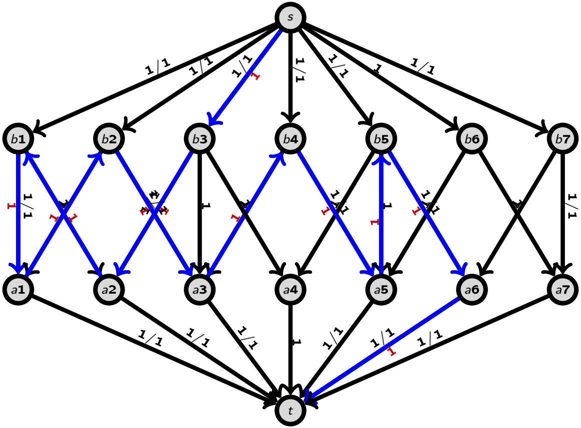
Bipartites Matching und Flüsse



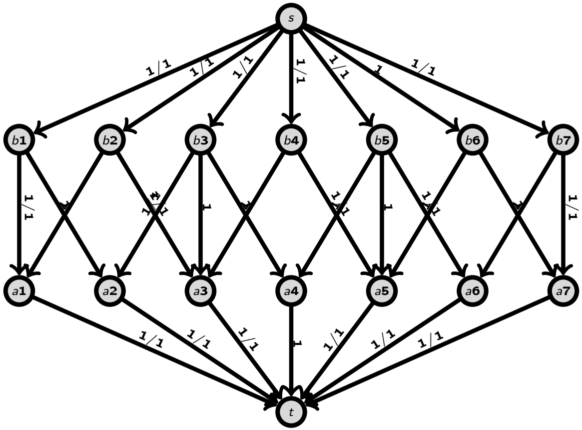
Bipartites Matching und Flüsse



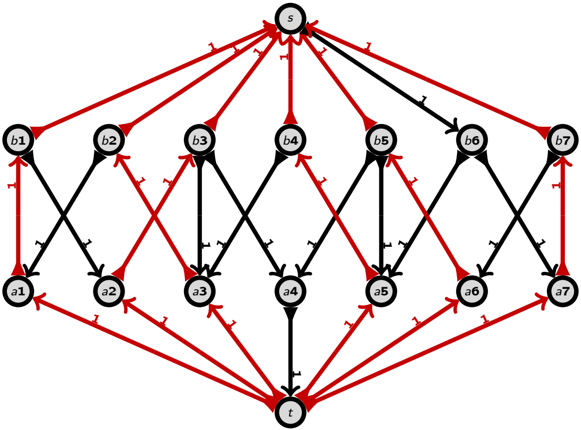
Bipartites Matching und Flüsse



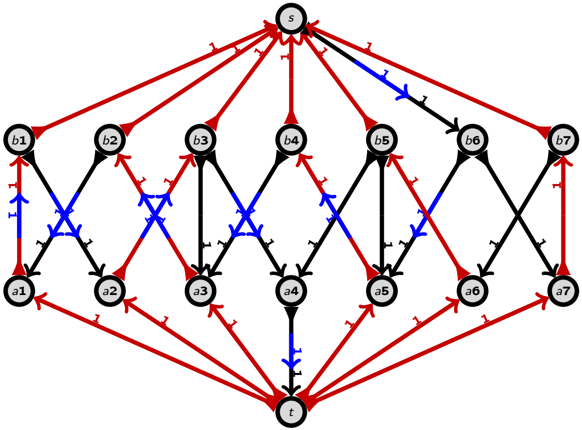
Bipartites Matching und Flüsse



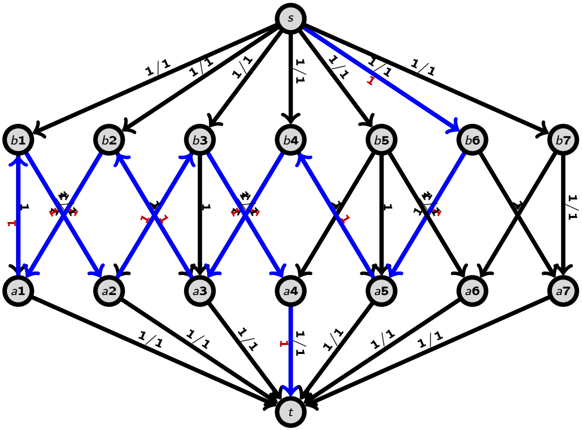
Bipartites Matching und Flüsse



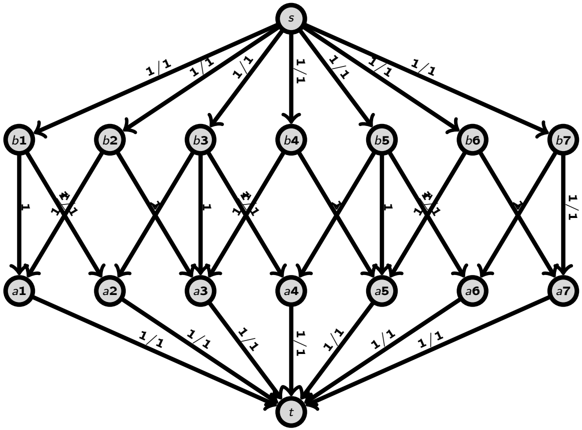
Bipartites Matching und Flüsse



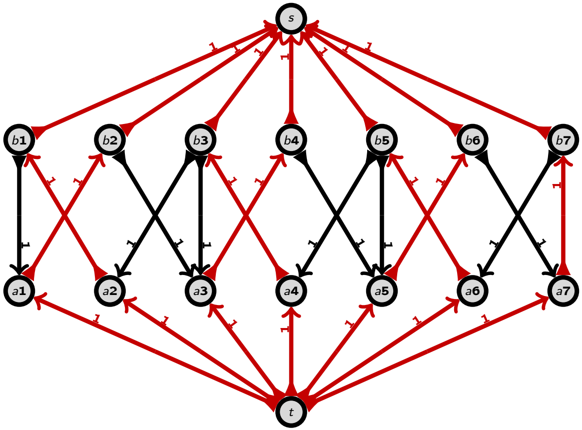
Bipartites Matching und Flüsse



Bipartites Matching und Flüsse



Bipartites Matching und Flüsse



Formale Transformation

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph.

Formale Transformation

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph.
- Bestimme $G' = (V \cup W \cup \{s, t\}, E')$ mit:

Formale Transformation

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph.
- Bestimme $G' = (V \cup W \cup \{s, t\}, E')$ mit:
  - $E' = E'' \cup E_s \cup E_t$

Formale Transformation

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph.
- Bestimme $G' = (V \cup W \cup \{s, t\}, E')$ mit:
  - $E' = E'' \cup E_s \cup E_t$
  - $E'' = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E \wedge v \in V \wedge w \in W\}$

Formale Transformation

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph.
- Bestimme $G' = (V \cup W \cup \{s, t\}, E')$ mit:
  - $E' = E'' \cup E_s \cup E_t$
  - $E'' = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E \wedge v \in V \wedge w \in W\}$
  - $E_s = \{(s, v) \mid v \in V\}$

Formale Transformation

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph.
- Bestimme $G' = (V \cup W \cup \{s, t\}, E')$ mit:
  - $E' = E'' \cup E_s \cup E_t$
  - $E'' = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E \wedge v \in V \wedge w \in W\}$
  - $E_s = \{(s, v) \mid v \in V\}$
  - $E_t = \{(w, t) \mid w \in W\}$

Formale Transformation

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph.
- Bestimme $G' = (V \cup W \cup \{s, t\}, E')$ mit:
  - $E' = E'' \cup E_s \cup E_t$
  - $E'' = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E \wedge v \in V \wedge w \in W\}$
  - $E_s = \{(s, v) \mid v \in V\}$
  - $E_t = \{(w, t) \mid w \in W\}$
- Setze $c : E' \mapsto \mathbb{N}$ mit $\forall e \in E' : c(e) = 1$.

Formale Transformation

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph.
- Bestimme $G' = (V \cup W \cup \{s, t\}, E')$ mit:
  - $E' = E'' \cup E_s \cup E_t$
  - $E'' = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E \wedge v \in V \wedge w \in W\}$
  - $E_s = \{(s, v) \mid v \in V\}$
  - $E_t = \{(w, t) \mid w \in W\}$
- Setze $c : E' \mapsto \mathbb{N}$ mit $\forall e \in E' : c(e) = 1$.

Formale Transformation

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph.
- Bestimme $G' = (V \cup W \cup \{s, t\}, E')$ mit:
  - $E' = E'' \cup E_s \cup E_t$
  - $E'' = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E \wedge v \in V \wedge w \in W\}$
  - $E_s = \{(s, v) \mid v \in V\}$
  - $E_t = \{(w, t) \mid w \in W\}$
- Setze $c : E' \mapsto \mathbb{N}$ mit $\forall e \in E' : c(e) = 1$.

Lemma

Das bipartite Matchingproblem kann in Zeit $O(n + m)$ auf das Flussproblem transformiert werden.
G hat Matching der Größe α genau dann, wenn $w(G') = \alpha$.

Formale Transformation

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph.
- Bestimme $G' = (V \cup W \cup \{s, t\}, E')$ mit:
  - $E' = E'' \cup E_s \cup E_t$
  - $E'' = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E \wedge v \in V \wedge w \in W\}$
  - $E_s = \{(s, v) \mid v \in V\}$
  - $E_t = \{(w, t) \mid w \in W\}$
- Setze $c : E' \mapsto \mathbb{N}$ mit $\forall e \in E' : c(e) = 1$.

Lemma

Das bipartite Matchingproblem kann in Zeit $O(n + m)$ auf das Flussproblem transformiert werden.
G hat Matching der Größe α genau dann, wenn $w(G') = \alpha$.

Formale Transformation

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph.
- Bestimme $G' = (V \cup W \cup \{s, t\}, E')$ mit:
  - $E' = E'' \cup E_s \cup E_t$
  - $E'' = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E \wedge v \in V \wedge w \in W\}$
  - $E_s = \{(s, v) \mid v \in V\}$
  - $E_t = \{(w, t) \mid w \in W\}$
- Setze $c : E' \mapsto \mathbb{N}$ mit $\forall e \in E' : c(e) = 1$.

Lemma

Das bipartite Matchingproblem kann in Zeit $O(n+m)$ auf das Flussproblem transformiert werden.
G hat Matching der Größe α genau dann, wenn $w(G') = \alpha$.

Theorem

Das maximum Matching Problem ist auf bipartiten Graphen in Zeit $O(n^3)$ lösbar.

Formale Transformation mit Kostenfunktion

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph und $l : E \mapsto \mathbb{Z}$.

Formale Transformation mit Kostenfunktion

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph und $l : E \mapsto \mathbb{Z}$.
- Bestimme $G' = (V \cup W \cup \{s, t\}, E')$ und $l' : E' \mapsto \mathbb{Z}$ mit:

Formale Transformation mit Kostenfunktion

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph und $l : E \mapsto \mathbb{Z}$.
- Bestimme $G' = (V \cup W \cup \{s, t\}, E')$ und $l' : E' \mapsto \mathbb{Z}$ mit:
  - $E' = E'' \cup E_s \cup E_t$

Formale Transformation mit Kostenfunktion

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph und $l : E \mapsto \mathbb{Z}$.
- Bestimme $G' = (V \cup W \cup \{s, t\}, E')$ und $l' : E' \mapsto \mathbb{Z}$ mit:
  - $E' = E'' \cup E_s \cup E_t$
  - $E'' = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E \wedge v \in V \wedge w \in W\}$

Formale Transformation mit Kostenfunktion

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph und $l : E \mapsto \mathbb{Z}$.
- Bestimme $G' = (V \cup W \cup \{s, t\}, E')$ und $l' : E' \mapsto \mathbb{Z}$ mit:
  - $E' = E'' \cup E_s \cup E_t$
  - $E'' = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E \wedge v \in V \wedge w \in W\}$
  - $E_s = \{(s, v) \mid v \in V\}$ und $E_t = \{(w, t) \mid w \in W\}$.

Formale Transformation mit Kostenfunktion

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph und $l : E \mapsto \mathbb{Z}$.
- Bestimme $G' = (V \cup W \cup \{s, t\}, E')$ und $l' : E' \mapsto \mathbb{Z}$ mit:
  - $E' = E'' \cup E_s \cup E_t$
  - $E'' = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E \wedge v \in V \wedge w \in W\}$
  - $E_s = \{(s, v) \mid v \in V\}$ und $E_t = \{(w, t) \mid w \in W\}$.
  - $\forall (v, w) \in E'' : l'(v, w) = l(v, w)$.

Formale Transformation mit Kostenfunktion

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph und $l : E \mapsto \mathbb{Z}$.
- Bestimme $G' = (V \cup W \cup \{s, t\}, E')$ und $l' : E' \mapsto \mathbb{Z}$ mit:
  - $E' = E'' \cup E_s \cup E_t$
  - $E'' = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E \wedge v \in V \wedge w \in W\}$
  - $E_s = \{(s, v) \mid v \in V\}$ und $E_t = \{(w, t) \mid w \in W\}$.
  - $\forall (v, w) \in E'' : l'(v, w) = l(v, w)$.
  - $\forall e \in E_s \cup E_t : l'(e) = 0$.

Formale Transformation mit Kostenfunktion

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph und $l : E \mapsto \mathbb{Z}$.
- Bestimme $G' = (V \cup W \cup \{s,t\}, E')$ und $l' : E' \mapsto \mathbb{Z}$ mit:
  - $E' = E'' \cup E_s \cup E_t$
  - $E'' = \{(v,w) \mid \{v,w\} \in E \wedge v \in V \wedge w \in W\}$
  - $E_s = \{(s,v) \mid v \in V\}$ und $E_t = \{(w,t) \mid w \in W\}$.
  - $\forall (v,w) \in E'' : l'(v,w) = l(v,w)$.
  - $\forall e \in E_s \cup E_t : l'(e) = 0$.
- Setze $c : E' \mapsto \mathbb{N}$ mit $\forall e \in E' : c(e) = 1$.

Formale Transformation mit Kostenfunktion

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph und $l : E \mapsto \mathbb{Z}$.
- Bestimme $G' = (V \cup W \cup \{s, t\}, E')$ und $l' : E' \mapsto \mathbb{Z}$ mit:
  - $E' = E'' \cup E_s \cup E_t$
  - $E'' = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E \land v \in V \land w \in W\}$
  - $E_s = \{(s, v) \mid v \in V\}$ und $E_t = \{(w, t) \mid w \in W\}$.
  - $\forall (v, w) \in E'' : l'(v, w) = l(v, w)$.
  - $\forall e \in E_s \cup E_t : l'(e) = 0$.
- Setze $c : E' \mapsto \mathbb{N}$ mit $\forall e \in E' : c(e) = 1$.

Formale Transformation mit Kostenfunktion

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph und $l : E \mapsto \mathbb{Z}$.
- Bestimme $G' = (V \cup W \cup \{s, t\}, E')$ und $l' : E' \mapsto \mathbb{Z}$ mit:
  - $E' = E'' \cup E_s \cup E_t$
  - $E'' = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E \wedge v \in V \wedge w \in W\}$
  - $E_s = \{(s, v) \mid v \in V\}$ und $E_t = \{(w, t) \mid w \in W\}$.
  - $\forall (v, w) \in E'' : l'(v, w) = l(v, w)$.
  - $\forall e \in E_s \cup E_t : l'(e) = 0$.
- Setze $c : E' \mapsto \mathbb{N}$ mit $\forall e \in E' : c(e) = 1$.

Lemma

Das bipartite Matchingproblem mit Kosten kann in Zeit $O(n + m)$ auf das Flussproblem mit Kosten transformiert werden.

Formale Transformation mit Kostenfunktion

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph und $l : E \mapsto \mathbb{Z}$.
- Bestimme $G' = (V \cup W \cup \{s, t\}, E')$ und $l' : E' \mapsto \mathbb{Z}$ mit:
  - $E' = E'' \cup E_s \cup E_t$
  - $E'' = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E \wedge v \in V \wedge w \in W\}$
  - $E_s = \{(s, v) \mid v \in V\}$ und $E_t = \{(w, t) \mid w \in W\}$.
  - $\forall (v, w) \in E'' : l'(v, w) = l(v, w)$.
  - $\forall e \in E_s \cup E_t : l'(e) = 0$.
- Setze $c : E' \mapsto \mathbb{N}$ mit $\forall e \in E' : c(e) = 1$.

Lemma

Das bipartite Matchingproblem mit Kosten kann in Zeit $O(n + m)$ auf das Flussproblem mit Kosten transformiert werden.

Formale Transformation mit Kostenfunktion

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph und $l : E \mapsto \mathbb{Z}$.
- Bestimme $G' = (V \cup W \cup \{s, t\}, E')$ und $l' : E' \mapsto \mathbb{Z}$ mit:
  - $E' = E'' \cup E_s \cup E_t$
  - $E'' = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E \wedge v \in V \wedge w \in W\}$
  - $E_s = \{(s, v) \mid v \in V\}$ und $E_t = \{(w, t) \mid w \in W\}$.
  - $\forall (v, w) \in E'' : l'(v, w) = l(v, w)$.
  - $\forall e \in E_s \cup E_t : l'(e) = 0$.
- Setze $c : E' \mapsto \mathbb{N}$ mit $\forall e \in E' : c(e) = 1$.

Lemma

Das bipartite Matchingproblem mit Kosten kann in Zeit $O(n + m)$ auf das Flussproblem mit Kosten transformiert werden.

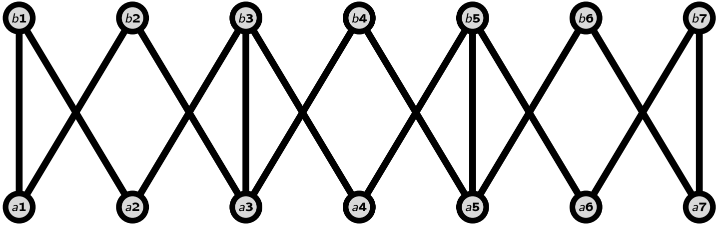
Theorem

G hat Matching der Größe α mit Kosten β genau dann, wenn $w(G') = \alpha$ und die Kosten des Flusses sind β.

Nochmal das Beispiel

Betrachte das Beispiel ohne die Knoten s und t:

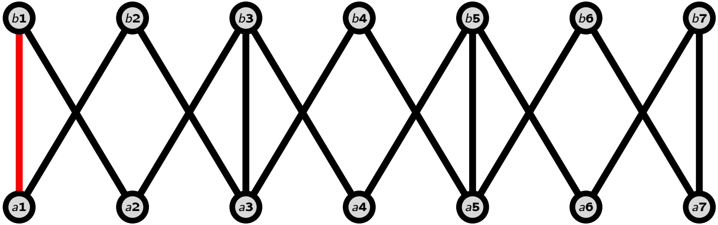
- Ein Fluss über eine Kante entspricht einer Matchingkante.



Nochmal das Beispiel

Betrachte das Beispiel ohne die Knoten s und t:

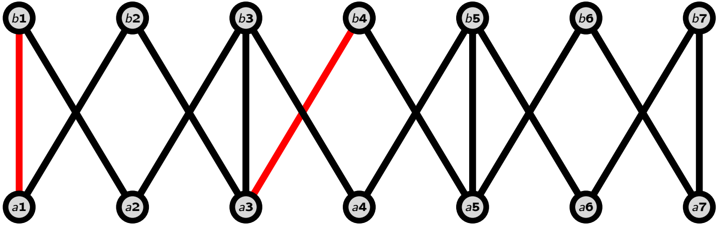
- Ein Fluss über eine Kante entspricht einer Matchingkante.



Nochmal das Beispiel

Betrachte das Beispiel ohne die Knoten s und t:

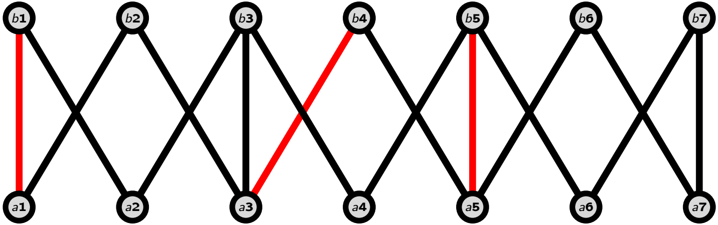
- Ein Fluss über eine Kante entspricht einer Matchingkante.



Nochmal das Beispiel

Betrachte das Beispiel ohne die Knoten s und t:

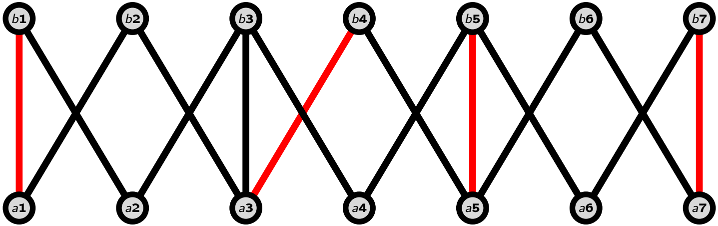
- Ein Fluss über eine Kante entspricht einer Matchingkante.



Nochmal das Beispiel

Betrachte das Beispiel ohne die Knoten s und t:

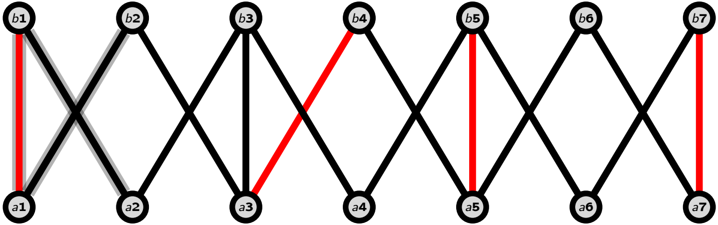
- Ein Fluss über eine Kante entspricht einer Matchingkante.



Nochmal das Beispiel

Betrachte das Beispiel ohne die Knoten s und t:

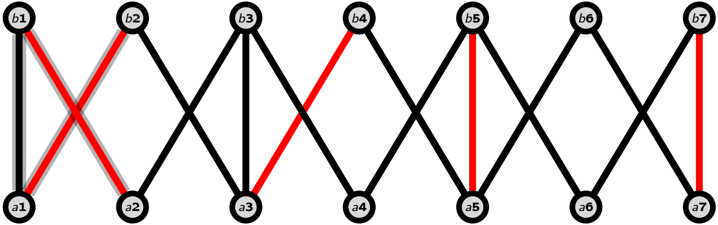
- Ein Fluss über eine Kante entspricht einer Matchingkante.
- Das Löschen einer Matchingkante entspricht einem Fluss über eine Rückwärtskante.



Nochmal das Beispiel

Betrachte das Beispiel ohne die Knoten s und t:

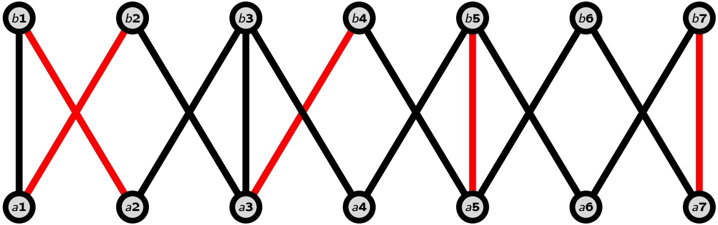
- Ein Fluss über eine Kante entspricht einer Matchingkante.
- Das Löschen einer Matchingkante entspricht einem Fluss über eine Rückwärtskante.
- Damit ein Fluss über eine Rückwärtskante fließt, muss er vorher und hinterher eine Vorwärtskante passieren.



Nochmal das Beispiel

Betrachte das Beispiel ohne die Knoten s und t:

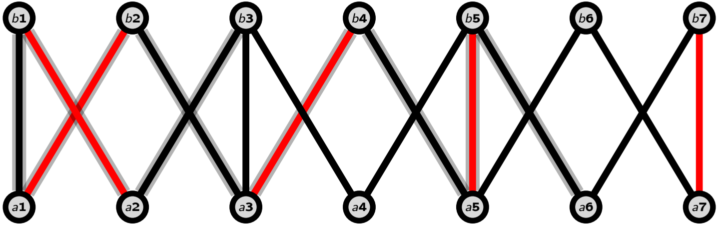
- Ein Fluss über eine Kante entspricht einer Matchingkante.
- Das Löschen einer Matchingkante entspricht einem Fluss über eine Rückwärtskante.
- Damit ein Fluss über eine Rückwärtskante fließt, muss er vorher und hinterher eine Vorwärtskante passieren.



Nochmal das Beispiel

Betrachte das Beispiel ohne die Knoten s und t:

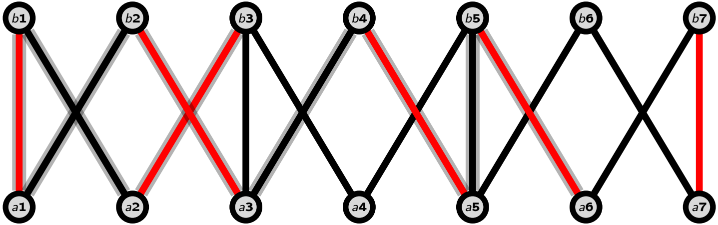
- Ein Fluss über eine Kante entspricht einer Matchingkante.
- Das Löschen einer Matchingkante entspricht einem Fluss über eine Rückwärtskante.
- Damit ein Fluss über eine Rückwärtskante fließt, muss er vorher und hinterher eine Vorwärtskante passieren.



Nochmal das Beispiel

Betrachte das Beispiel ohne die Knoten s und t:

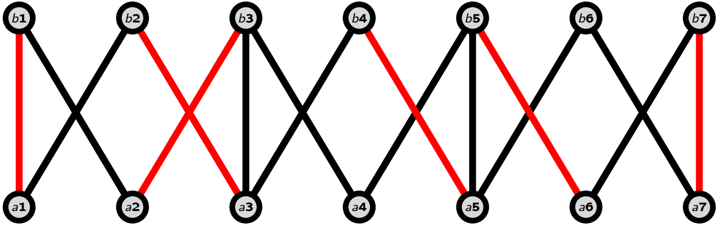
- Ein Fluss über eine Kante entspricht einer Matchingkante.
- Das Löschen einer Matchingkante entspricht einem Fluss über eine Rückwärtskante.
- Damit ein Fluss über eine Rückwärtskante fließt, muss er vorher und hinterher eine Vorwärtskante passieren.



Nochmal das Beispiel

Betrachte das Beispiel ohne die Knoten s und t:

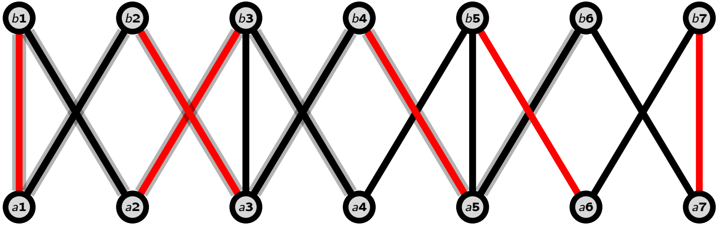
- Ein Fluss über eine Kante entspricht einer Matchingkante.
- Das Löschen einer Matchingkante entspricht einem Fluss über eine Rückwärtskante.
- Damit ein Fluss über eine Rückwärtskante fließt, muss er vorher und hinterher eine Vorwärtskante passieren.



Nochmal das Beispiel

Betrachte das Beispiel ohne die Knoten s und t:

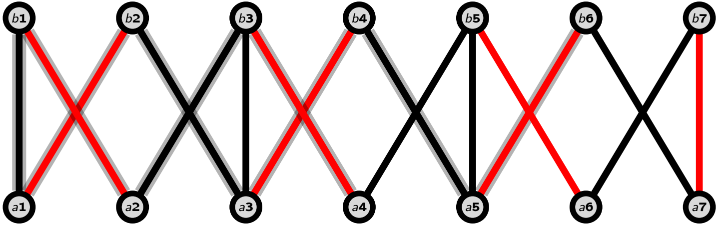
- Ein Fluss über eine Kante entspricht einer Matchingkante.
- Das Löschen einer Matchingkante entspricht einem Fluss über eine Rückwärtskante.
- Damit ein Fluss über eine Rückwärtskante fließt, muss er vorher und hinterher eine Vorwärtskante passieren.



Nochmal das Beispiel

Betrachte das Beispiel ohne die Knoten s und t:

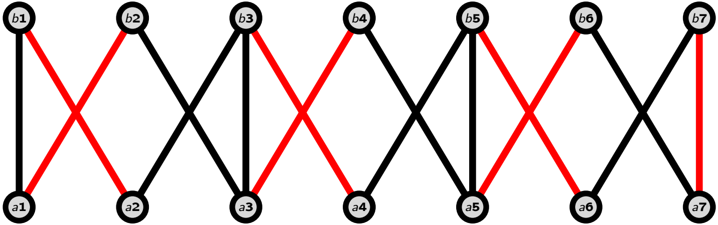
- Ein Fluss über eine Kante entspricht einer Matchingkante.
- Das Löschen einer Matchingkante entspricht einem Fluss über eine Rückwärtskante.
- Damit ein Fluss über eine Rückwärtskante fließt, muss er vorher und hinterher eine Vorwärtskante passieren.



Nochmal das Beispiel

Betrachte das Beispiel ohne die Knoten s und t:

- Ein Fluss über eine Kante entspricht einer Matchingkante.
- Das Löschen einer Matchingkante entspricht einem Fluss über eine Rückwärtskante.
- Damit ein Fluss über eine Rückwärtskante fließt, muss er vorher und hinterher eine Vorwärtskante passieren.



Idee der alternierende Pfade

- Damit arbeitet der Flussalgorithmus wie folgt:

Idee der alternierende Pfade

- Damit arbeitet der Flussalgorithmus wie folgt:
- Bestimme “erweiternden Pfad”:

Idee der alternierende Pfade

- Damit arbeitet der Flussalgorithmus wie folgt:
- Bestimme “erweiternden Pfad”:
  - Der Pfad startet an einem “freien” Knoten.

Idee der alternierende Pfade

- Damit arbeitet der Flussalgorithmus wie folgt:
- Bestimme "erweiternden Pfad":
  - Der Pfad startet an einem "freien" Knoten.
  - Der Pfad startet mit einer Vorwärtskante.

Idee der alternierende Pfade

- Damit arbeitet der Flussalgorithmus wie folgt:
- Bestimme “erweiternden Pfad”:
  - Der Pfad startet an einem “freien” Knoten.
  - Der Pfad startet mit einer Vorwärtskante.
  - Der Pfad geht alternierend über Vorwärts- und Rückwärtskanten.

Idee der alternierende Pfade

- Damit arbeitet der Flussalgorithmus wie folgt:
- Bestimme “erweiternden Pfad”:
  - Der Pfad startet an einem “freien” Knoten.
  - Der Pfad startet mit einer Vorwärtskante.
  - Der Pfad geht alternierend über Vorwärts- und Rückwärtskanten.
  - Der Pfad endet mit einer Vorwärtskante.

Idee der alternierende Pfade

- Damit arbeitet der Flussalgorithmus wie folgt:
- Bestimme “erweiternden Pfad”:
  - Der Pfad startet an einem “freien” Knoten.
  - Der Pfad startet mit einer Vorwärtskante.
  - Der Pfad geht alternierend über Vorwärts- und Rückwärtskanten.
  - Der Pfad endet mit einer Vorwärtskante.
  - Der Pfad endet an einem “freien” Knoten.

Idee der alternierende Pfade

- Damit arbeitet der Flussalgorithmus wie folgt:
- Bestimme “erweiternden Pfad”:
  - Der Pfad startet an einem “freien” Knoten.
  - Der Pfad startet mit einer Vorwärtskante.
  - Der Pfad geht alternierend über Vorwärts- und Rückwärtskanten.
  - Der Pfad endet mit einer Vorwärtskante.
  - Der Pfad endet an einem “freien” Knoten.
- Damit können wir einen weiteren Algorithmus angeben.

Alternierende Pfade

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

- Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Pfad und $M \subset E$ ein Matching.

Alternierende Pfade

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

- Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Pfad und $M \subset E$ ein Matching.
- Ein Knoten $v \in V$ heißt frei, falls $v \notin \cup_{e \in M} e$.

Alternierende Pfade

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

- Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Pfad und $M \subset E$ ein Matching.
- Ein Knoten $v \in V$ heißt frei, falls $v \notin \cup_{e \in M} e$.
- Ein Pfad $v_0, \{v_0, v_1\}, v_1, \{v_1, v_2\}, v_2, \{v_2, v_3\}, v_3, \ldots, v_{l-1}, \{v_{l-1}, v_l\}, v_l$ heißt alternierend, falls $\{v_{i-1}, v_i\} \in M \Leftrightarrow \{v_i, v_{i+1}\} \notin M$ $(0 < i < l)$.

Alternierende Pfade

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

- Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Pfad und $M \subset E$ ein Matching.
- Ein Knoten $v \in V$ heißt frei, falls $v \notin \cup_{e \in M} e$.
- Ein Pfad $v_0, \{v_0, v_1\}, v_1, \{v_1, v_2\}, v_2, \{v_2, v_3\}, v_3, \ldots, v_{l-1}, \{v_{l-1}, v_l\}, v_l$ heißt alternierend, falls $\{v_{i-1}, v_i\} \in M \Leftrightarrow \{v_i, v_{i+1}\} \notin M$ $(0 < i < l)$.

- Ein alternierender Pfad
  $v_0, \{v_0, v_1\}, v_1, \{v_1, v_2\}, v_2, \{v_2, v_3\}, v_3, \ldots, v_{l-1}, \{v_{l-1}, v_l\}, v_l$ heißt erweiternd, falls v_0, v_l frei sind.

Alternierende Pfade

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

- Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Pfad und $M \subset E$ ein Matching.
- Ein Knoten $v \in V$ heißt frei, falls $v \notin \cup_{e \in M} e$.
- Ein Pfad $v_0, \{v_0, v_1\}, v_1, \{v_1, v_2\}, v_2, \{v_2, v_3\}, v_3, \ldots, v_{l-1}, \{v_{l-1}, v_l\}, v_l$ heißt alternierend, falls $\{v_{i-1}, v_i\} \in M \Leftrightarrow \{v_i, v_{i+1}\} \notin M$ $(0 < i < l)$.

- Ein alternierender Pfad $v_0, \{v_0, v_1\}, v_1, \{v_1, v_2\}, v_2, \{v_2, v_3\}, v_3, \ldots, v_{l-1}, \{v_{l-1}, v_l\}, v_l$ heißt erweiternd, falls v_0, v_l frei sind.

- Bemerkung: eine Kante zwischen freien Knoten ist ein verbessernder Pfad.

Alternierende Pfade

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

- Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Pfad und $M \subset E$ ein Matching.
- Ein Knoten $v \in V$ heißt frei, falls $v \notin \cup_{e \in M} e$.
- Ein Pfad $v_0, \{v_0, v_1\}, v_1, \{v_1, v_2\}, v_2, \{v_2, v_3\}, v_3, \ldots, v_{l-1}, \{v_{l-1}, v_l\}, v_l$ heißt alternierend, falls $\{v_{i-1}, v_i\} \in M \Leftrightarrow \{v_i, v_{i+1}\} \notin M$ $(0 < i < l)$.

- Ein alternierder Pfad $v_0, \{v_0, v_1\}, v_1, \{v_1, v_2\}, v_2, \{v_2, v_3\}, v_3, \ldots, v_{l-1}, \{v_{l-1}, v_l\}, v_l$ heißt erweiternd, falls v_0, v_l frei sind.

- Bemerkung: eine Kante zwischen freien Knoten ist ein verbessernder Pfad.
- Damit arbeitet der Algorithmus wie folgt:

Alternierende Pfade

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

- Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Pfad und $M \subset E$ ein Matching.
- Ein Knoten $v \in V$ heißt frei, falls $v \notin \cup_{e \in M} e$.
- Ein Pfad $v_0, \{v_0, v_1\}, v_1, \{v_1, v_2\}, v_2, \{v_2, v_3\}, v_3, \ldots, v_{l-1}, \{v_{l-1}, v_l\}, v_l$ heißt alternierend, falls $\{v_{i-1}, v_i\} \in M \Leftrightarrow \{v_i, v_{i+1}\} \notin M$ $(0 < i < l)$.

- Ein alternierender Pfad $v_0, \{v_0, v_1\}, v_1, \{v_1, v_2\}, v_2, \{v_2, v_3\}, v_3, \ldots, v_{l-1}, \{v_{l-1}, v_l\}, v_l$ heißt erweiternd, falls v_0, v_l frei sind.

- Bemerkung: eine Kante zwischen freien Knoten ist ein verbessernder Pfad.
- Damit arbeitet der Algorithmus wie folgt:
  1. Setze $M = \emptyset$.

Alternierende Pfade

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

- Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Pfad und $M \subset E$ ein Matching.
- Ein Knoten $v \in V$ heißt frei, falls $v \notin \cup_{e \in M} e$.
- Ein Pfad $v_0, \{v_0, v_1\}, v_1, \{v_1, v_2\}, v_2, \{v_2, v_3\}, v_3, \ldots, v_{l-1}, \{v_{l-1}, v_l\}, v_l$ heißt alternierend, falls $\{v_{i-1}, v_i\} \in M \Leftrightarrow \{v_i, v_{i+1}\} \notin M$ $(0 < i < l)$.

- Ein alternierder Pfad $v_0, \{v_0, v_1\}, v_1, \{v_1, v_2\}, v_2, \{v_2, v_3\}, v_3, \ldots, v_{l-1}, \{v_{l-1}, v_l\}, v_l$ heißt erweiternd, falls v_0, v_l frei sind.

- Bemerkung: eine Kante zwischen freien Knoten ist ein verbessernder Pfad.
- Damit arbeitet der Algorithmus wie folgt:
  1. Setze $M = \emptyset$.
  2. Solange es erweiternden Pfad P gibt, mache:

Alternierende Pfade

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

- Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Pfad und $M \subset E$ ein Matching.
- Ein Knoten $v \in V$ heißt frei, falls $v \notin \cup_{e \in M} e$.
- Ein Pfad $v_0, \{v_0, v_1\}, v_1, \{v_1, v_2\}, v_2, \{v_2, v_3\}, v_3, \ldots, v_{l-1}, \{v_{l-1}, v_l\}, v_l$ heißt alternierend, falls $\{v_{i-1}, v_i\} \in M \Leftrightarrow \{v_i, v_{i+1}\} \notin M$ $(0 < i < l)$.

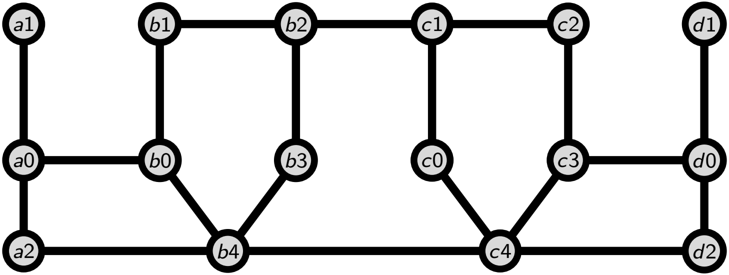
- Ein alternierender Pfad $v_0, \{v_0, v_1\}, v_1, \{v_1, v_2\}, v_2, \{v_2, v_3\}, v_3, \ldots, v_{l-1}, \{v_{l-1}, v_l\}, v_l$ heißt erweiternd, falls v_0, v_l frei sind.

- Bemerkung: eine Kante zwischen freien Knoten ist ein verbessernder Pfad.
- Damit arbeitet der Algorithmus wie folgt:
  1. Setze $M = \emptyset$.
  2. Solange es erweiternden Pfad P gibt, mache:
     1. Erweitere M, d.h. $M = M \oplus E(P)$.

Beispiel allgemeiner Graph

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

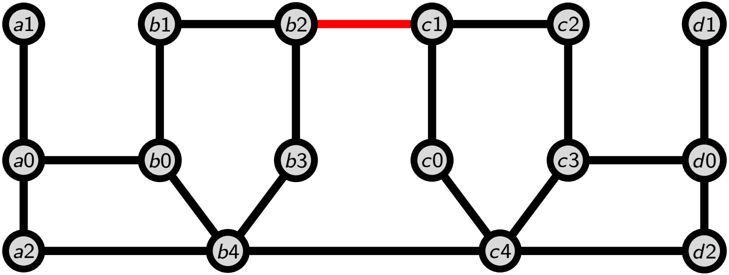
Versuche verbessernde Pfade auf allgemeinen Graphen:



Beispiel allgemeiner Graph

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

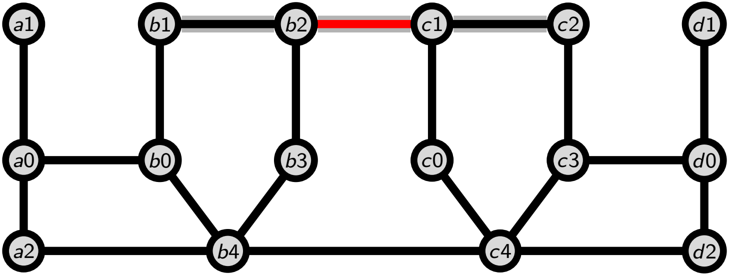
Versuche verbessernde Pfade auf allgemeinen Graphen:



Beispiel allgemeiner Graph

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

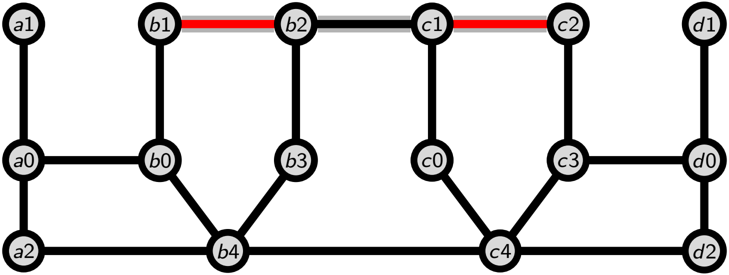
Versuche verbessernde Pfade auf allgemeinen Graphen:



Beispiel allgemeiner Graph

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

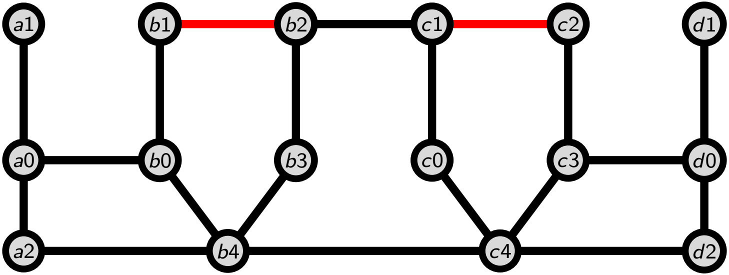
Versuche verbessernde Pfade auf allgemeinen Graphen:



Beispiel allgemeiner Graph

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

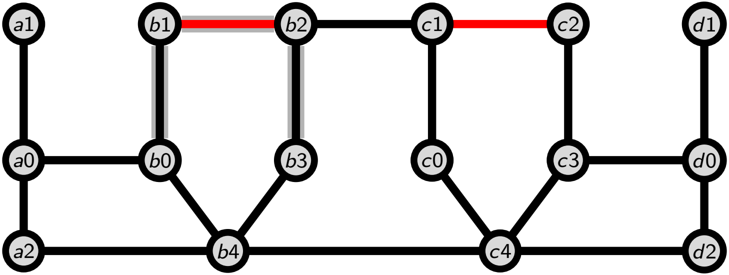
Versuche verbessernde Pfade auf allgemeinen Graphen:



Beispiel allgemeiner Graph

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

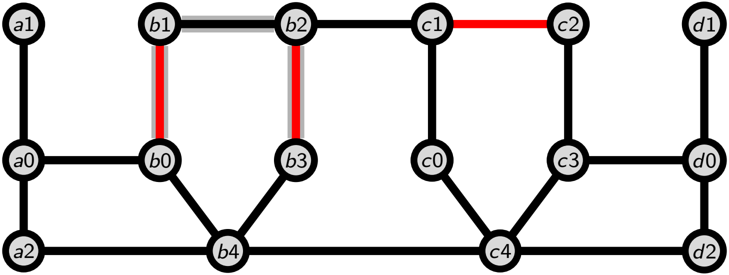
Versuche verbessernde Pfade auf allgemeinen Graphen:



Beispiel allgemeiner Graph

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

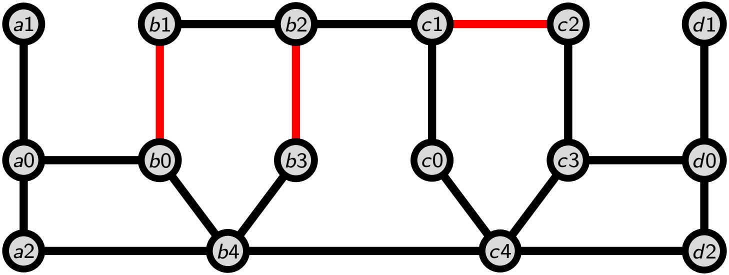
Versuche verbessernde Pfade auf allgemeinen Graphen:



Beispiel allgemeiner Graph

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

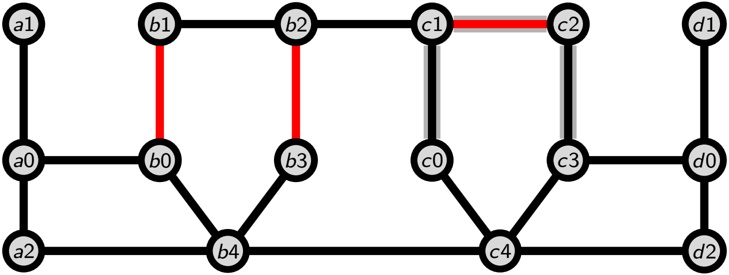
Versuche verbessernde Pfade auf allgemeinen Graphen:



Beispiel allgemeiner Graph

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

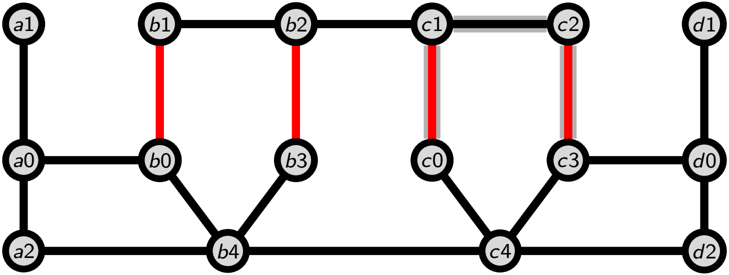
Versuche verbessernde Pfade auf allgemeinen Graphen:



Beispiel allgemeiner Graph

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

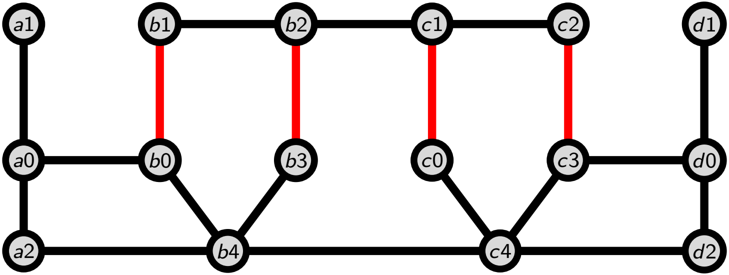
Versuche verbessernde Pfade auf allgemeinen Graphen:



Beispiel allgemeiner Graph

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

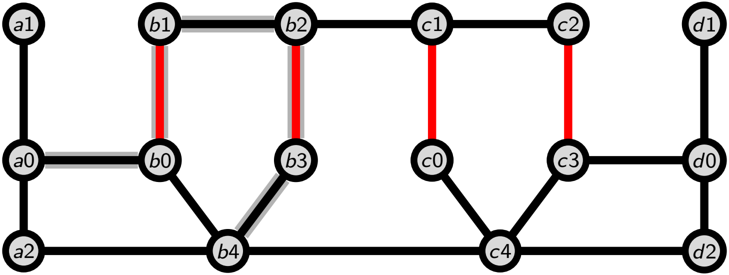
Versuche verbessernde Pfade auf allgemeinen Graphen:



Beispiel allgemeiner Graph

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

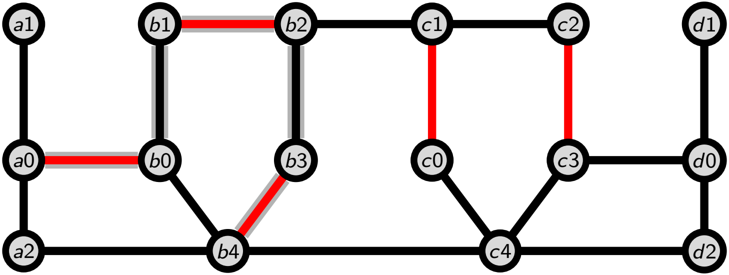
Versuche verbessernde Pfade auf allgemeinen Graphen:



Beispiel allgemeiner Graph

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

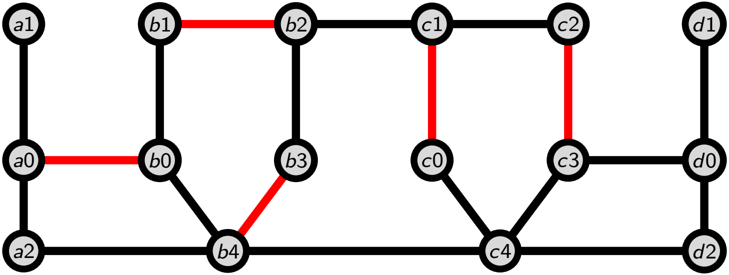
Versuche verbessernde Pfade auf allgemeinen Graphen:



Beispiel allgemeiner Graph

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

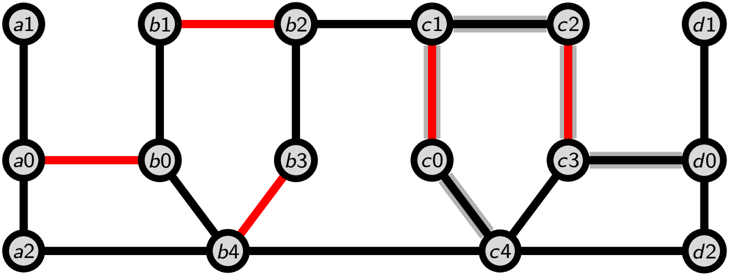
Versuche verbessernde Pfade auf allgemeinen Graphen:



Beispiel allgemeiner Graph

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

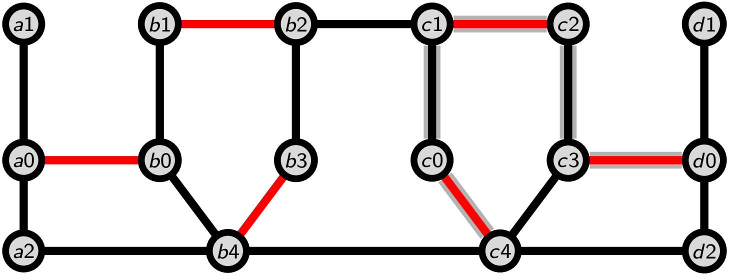
Versuche verbessernde Pfade auf allgemeinen Graphen:



Beispiel allgemeiner Graph

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

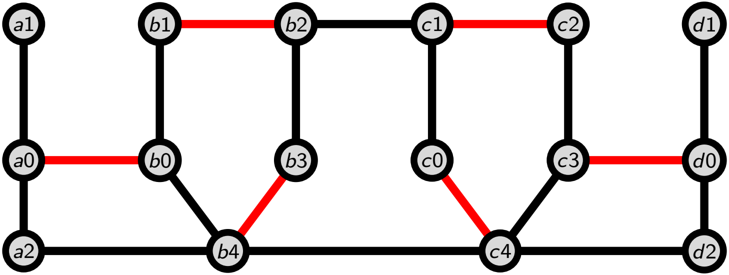
Versuche verbessernde Pfade auf allgemeinen Graphen:



Beispiel allgemeiner Graph

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

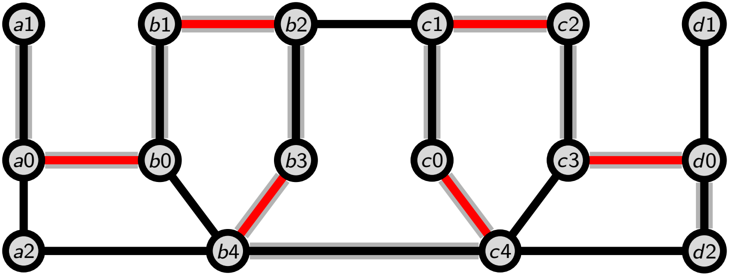
Versuche verbessernde Pfade auf allgemeinen Graphen:



Beispiel allgemeiner Graph

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Versuche verbessernde Pfade auf allgemeinen Graphen:

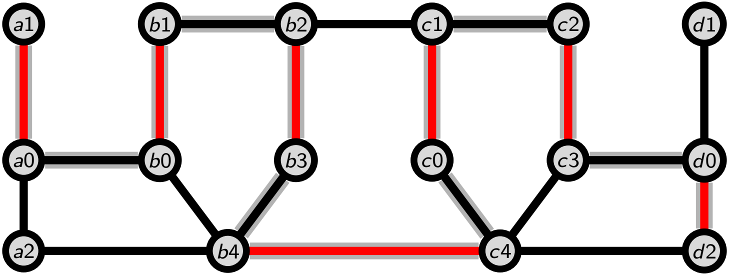


Ungerade Kreise können Probleme machen

Beispiel allgemeiner Graph

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Versuche verbessernde Pfade auf allgemeinen Graphen:

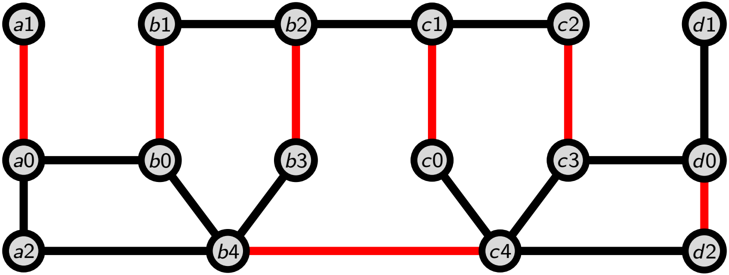


Ungerade Kreise können Probleme machen

Beispiel allgemeiner Graph

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Versuche verbessernde Pfade auf allgemeinen Graphen:

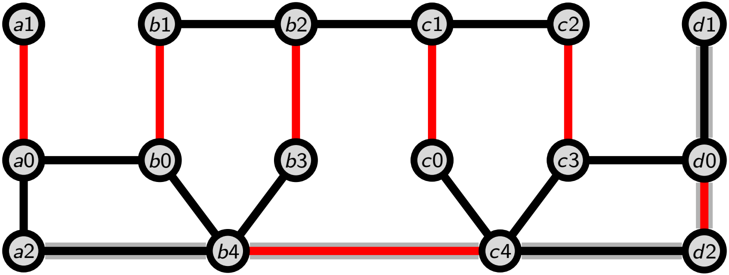


Ungerade Kreise können Probleme machen

Beispiel allgemeiner Graph

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Versuche verbessernde Pfade auf allgemeinen Graphen:

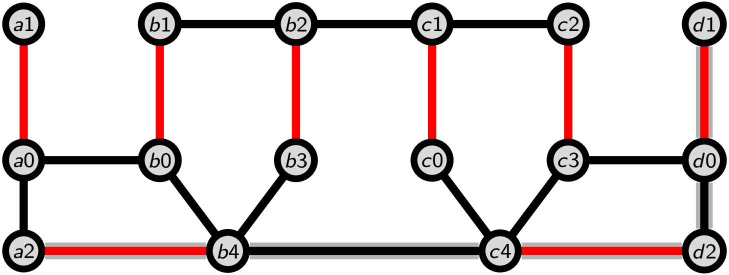


Ungerade Kreise können Probleme machen

Beispiel allgemeiner Graph

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Versuche verbessernde Pfade auf allgemeinen Graphen:

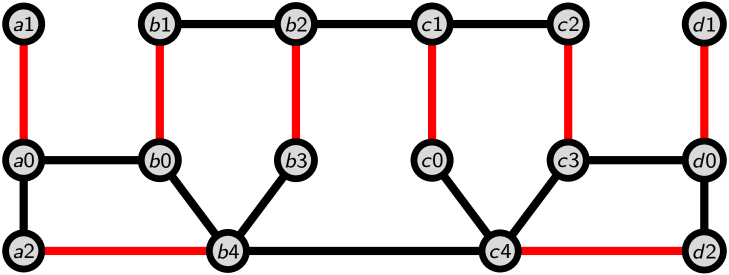


Ungerade Kreise können Probleme machen

Beispiel allgemeiner Graph

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Versuche verbessernde Pfade auf allgemeinen Graphen:



Ungerade Kreise können Probleme machen

Aussagen zu verbessernden Pfaden

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Lemma (ein verbessernder Pfad)

Sei $G = (V, E)$ Graph, M Matching und P verbessernder Pfad. Dann ist $M \oplus E(P)$ Matching mit $|M \oplus E(P)| = |M| + 1$.

Beweis:

Aussagen zu verbessernden Pfaden

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Lemma (ein verbessernder Pfad)

Sei $G = (V, E)$ Graph, M Matching und P verbessernder Pfad. Dann ist $M \oplus E(P)$ Matching mit $|M \oplus E(P)| = |M| + 1$.

Beweis:

- Sei $G' = (V, M)$ und $G'' = (V, M \oplus E(P))$.

Aussagen zu verbessernden Pfaden

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Lemma (ein verbessernder Pfad)

Sei $G = (V, E)$ Graph, M Matching und P verbessernder Pfad. Dann ist $M \oplus E(P)$ Matching mit $|M \oplus E(P)| = |M| + 1$.

Beweis:

- Sei $G' = (V, M)$ und $G'' = (V, M \oplus E(P))$.
- Sei v der Startknoten von P, dann gilt $\delta_{G'}(v) = 0$ und $\delta_{G''}(v) = 1$.

Aussagen zu verbessernden Pfaden

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Lemma (ein verbessernder Pfad)

Sei $G = (V, E)$ Graph, M Matching und P verbessernder Pfad. Dann ist $M \oplus E(P)$ Matching mit $|M \oplus E(P)| = |M| + 1$.

Beweis:

- Sei $G' = (V, M)$ und $G'' = (V, M \oplus E(P))$.
- Sei v der Startknoten von P, dann gilt $\delta_{G'}(v) = 0$ und $\delta_{G''}(v) = 1$.
- Sei w der Endknoten von P, dann gilt $\delta_{G'}(w) = 0$ und $\delta_{G''}(w) = 1$.

Aussagen zu verbessernden Pfaden

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Lemma (ein verbessernder Pfad)

Sei $G = (V, E)$ Graph, M Matching und P verbessernder Pfad. Dann ist $M \oplus E(P)$ Matching mit $|M \oplus E(P)| = |M| + 1$.

Beweis:

- Sei $G' = (V, M)$ und $G'' = (V, M \oplus E(P))$.
- Sei v der Startknoten von P, dann gilt $\delta_{G'}(v) = 0$ und $\delta_{G''}(v) = 1$.
- Sei w der Endknoten von P, dann gilt $\delta_{G'}(w) = 0$ und $\delta_{G''}(w) = 1$.
- Sei u ein Zwischenknoten auf P, dann gilt $\delta_{G'}(u) = \delta_{G''}(u) = 1$.

Aussagen zu verbessernden Pfaden

$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Lemma (ein verbessernder Pfad)

Sei $G = (V, E)$ Graph, M Matching und P verbessernder Pfad. Dann ist $M \oplus E(P)$ Matching mit $|M \oplus E(P)| = |M| + 1$.

Beweis:

- Sei $G' = (V, M)$ und $G'' = (V, M \oplus E(P))$.
- Sei v der Startknoten von P, dann gilt $\delta_{G'}(v) = 0$ und $\delta_{G''}(v) = 1$.
- Sei w der Endknoten von P, dann gilt $\delta_{G'}(w) = 0$ und $\delta_{G''}(w) = 1$.
- Sei u ein Zwischenknoten auf P, dann gilt $\delta_{G'}(u) = \delta_{G''}(u) = 1$.
- Es wird eine Kante mehr hinzugefügt als entfernt.

Aussagen zu verbessernden Pfaden

$\delta(G) = \cup_{v \in V(G)} \delta_G(v)$

Lemma (Differenz zweier Matchings)

Sei $G = (V, E)$ Graph, M, N Matchings mit $|M| < |N|$. Dann enthält $H = (V, M \oplus N)$ mindestens $|N| - |M|$ knotendisjunkte verbessernde Pfade bezüglich M in G.

Beweis:

Aussagen zu verbessernden Pfaden

$\delta(G) = \cup_{v \in V(G)} \delta_G(v)$

Lemma (Differenz zweier Matchings)

Sei $G = (V, E)$ Graph, M, N Matchings mit $|M| < |N|$. Dann enthält $H = (V, M \oplus N)$ mindestens $|N| - |M|$ knotendisjunkte verbessernde Pfade bezüglich M in G.

Beweis:

- Sei $G_M = (V, M)$ und $G_N = (V, N)$.

Aussagen zu verbessernden Pfaden

$\delta(G) = \cup_{v \in V(G)} \delta_G(v)$

Lemma (Differenz zweier Matchings)

Sei $G = (V, E)$ Graph, M, N Matchings mit $|M| < |N|$. Dann enthält $H = (V, M \oplus N)$ mindestens $|N| - |M|$ knotendisjunkte verbessernde Pfade bezüglich M in G.

Beweis:

- Sei $G_M = (V, M)$ und $G_N = (V, N)$.
- Es gilt: $\delta(G_M) \subset \{0, 1\}$ und $\delta(G_N) \subset \{0, 1\}$.

Aussagen zu verbessernden Pfaden

$\delta(G) = \cup_{v \in V(G)} \delta_G(v)$

Lemma (Differenz zweier Matchings)

Sei $G = (V, E)$ Graph, M, N Matchings mit $|M| < |N|$. Dann enthält $H = (V, M \oplus N)$ mindestens $|N| - |M|$ knotendisjunkte verbessernde Pfade bezüglich M in G.

Beweis:

- Sei $G_M = (V, M)$ und $G_N = (V, N)$.
- Es gilt: $\delta(G_M) \subset \{0, 1\}$ und $\delta(G_N) \subset \{0, 1\}$.
- Damit folgt: $\delta(H) \subset \{0, 1, 2\}$.

Aussagen zu verbessernden Pfaden

$\delta(G) = \cup_{v \in V(G)} \delta_G(v)$

Lemma (Differenz zweier Matchings)

Sei $G = (V, E)$ Graph, M, N Matchings mit $|M| < |N|$. Dann enthält $H = (V, M \oplus N)$ mindestens $|N| - |M|$ knotendisjunkte verbessernde Pfade bezüglich M in G.

Beweis:

- Sei $G_M = (V, M)$ und $G_N = (V, N)$.
- Es gilt: $\delta(G_M) \subset \{0, 1\}$ und $\delta(G_N) \subset \{0, 1\}$.
- Damit folgt: $\delta(H) \subset \{0, 1, 2\}$.
- Seien $G_i = (V, E_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant g)$ die Zusammenhangskomponenten von H.

Aussagen zu verbessernden Pfaden

$\delta(G) = \cup_{v \in V(G)} \delta_G(v)$

Lemma (Differenz zweier Matchings)

Sei $G = (V, E)$ Graph, M, N Matchings mit $|M| < |N|$. Dann enthält $H = (V, M \oplus N)$ mindestens $|N| - |M|$ knotendisjunkte verbessernde Pfade bezüglich M in G.

Beweis:

- Sei $G_M = (V, M)$ und $G_N = (V, N)$.
- Es gilt: $\delta(G_M) \subset \{0, 1\}$ und $\delta(G_N) \subset \{0, 1\}$.
- Damit folgt: $\delta(H) \subset \{0, 1, 2\}$.
- Seien $G_i = (V, E_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant g)$ die Zusammenhangskomponenten von H.
- Wegen $\delta(G_i) \subset \{0, 1, 2\}$ folgt:

Aussagen zu verbessernden Pfaden

$\delta(G) = \cup_{v \in V(G)} \delta_G(v)$

Lemma (Differenz zweier Matchings)

Sei $G = (V, E)$ Graph, M, N Matchings mit $|M| < |N|$. Dann enthält $H = (V, M \oplus N)$ mindestens $|N| - |M|$ knotendisjunkte verbessernde Pfade bezüglich M in G.

Beweis:

- Sei $G_M = (V, M)$ und $G_N = (V, N)$.
- Es gilt: $\delta(G_M) \subset \{0, 1\}$ und $\delta(G_N) \subset \{0, 1\}$.
- Damit folgt: $\delta(H) \subset \{0, 1, 2\}$.
- Seien $G_i = (V, E_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant g)$ die Zusammenhangskomponenten von H.
- Wegen $\delta(G_i) \subset \{0, 1, 2\}$ folgt:
  - G_i ist ein isolierte Knoten oder

Aussagen zu verbessernden Pfaden

$\delta(G) = \cup_{v \in V(G)} \delta_G(v)$

Lemma (Differenz zweier Matchings)

Sei $G = (V, E)$ Graph, M, N Matchings mit $|M| < |N|$. Dann enthält $H = (V, M \oplus N)$ mindestens $|N| - |M|$ knotendisjunkte verbessernde Pfade bezüglich M in G.

Beweis:

- Sei $G_M = (V, M)$ und $G_N = (V, N)$.
- Es gilt: $\delta(G_M) \subset \{0, 1\}$ und $\delta(G_N) \subset \{0, 1\}$.
- Damit folgt: $\delta(H) \subset \{0, 1, 2\}$.
- Seien $G_i = (V, E_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant g)$ die Zusammenhangskomponenten von H.
- Wegen $\delta(G_i) \subset \{0, 1, 2\}$ folgt:
  - G_i ist ein isolierte Knoten oder
  - G_i ist ein Kreis gerader Länge oder

Aussagen zu verbessernden Pfaden

$\delta(G) = \cup_{v \in V(G)} \delta_G(v)$

Lemma (Differenz zweier Matchings)

Sei $G = (V, E)$ Graph, M, N Matchings mit $|M| < |N|$. Dann enthält $H = (V, M \oplus N)$ mindestens $|N| - |M|$ knotendisjunkte verbessernde Pfade bezüglich M in G.

Beweis:

- Sei $G_M = (V, M)$ und $G_N = (V, N)$.
- Es gilt: $\delta(G_M) \subset \{0, 1\}$ und $\delta(G_N) \subset \{0, 1\}$.
- Damit folgt: $\delta(H) \subset \{0, 1, 2\}$.
- Seien $G_i = (V, E_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant g)$ die Zusammenhangskomponenten von H.
- Wegen $\delta(G_i) \subset \{0, 1, 2\}$ folgt:
  - G_i ist ein isolierte Knoten oder
  - G_i ist ein Kreis gerader Länge oder
  - G_i ist ein Pfad gerader Länge oder

Aussagen zu verbessernden Pfaden

$\delta(G) = \cup_{v \in V(G)} \delta_G(v)$

Lemma (Differenz zweier Matchings)

Sei $G = (V, E)$ Graph, M, N Matchings mit $|M| < |N|$. Dann enthält $H = (V, M \oplus N)$ mindestens $|N| - |M|$ knotendisjunkte verbessernde Pfade bezüglich M in G.

Beweis:

- Sei $G_M = (V, M)$ und $G_N = (V, N)$.
- Es gilt: $\delta(G_M) \subset \{0, 1\}$ und $\delta(G_N) \subset \{0, 1\}$.
- Damit folgt: $\delta(H) \subset \{0, 1, 2\}$.
- Seien $G_i = (V, E_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant g)$ die Zusammenhangskomponenten von H.
- Wegen $\delta(G_i) \subset \{0, 1, 2\}$ folgt:
  - G_i ist ein isolierte Knoten oder
  - G_i ist ein Kreis gerader Länge oder
  - G_i ist ein Pfad gerader Länge oder
  - G_i ist ein Pfad ungerader Länge.

Aussagen zu verbessernden Pfaden

$\delta(G) = \cup_{v \in V(G)} \delta_G(v)$

Lemma (Differenz zweier Matchings)

Sei $G = (V, E)$ Graph, M, N Matchings mit $|M| < |N|$. Dann enthält $H = (V, M \oplus N)$ mindestens $|N| - |M|$ knotendisjunkte verbessernde Pfade bezüglich M in G.

Beweis:

- Sei $G_M = (V, M)$ und $G_N = (V, N)$.
- Es gilt: $\delta(G_M) \subset \{0, 1\}$ und $\delta(G_N) \subset \{0, 1\}$.
- Damit folgt: $\delta(H) \subset \{0, 1, 2\}$.
- Seien $G_i = (V, E_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant g)$ die Zusammenhangskomponenten von H.
- Wegen $\delta(G_i) \subset \{0, 1, 2\}$ folgt:
  - G_i ist ein isolierte Knoten oder
  - G_i ist ein Kreis gerader Länge oder
  - G_i ist ein Pfad gerader Länge oder
  - G_i ist ein Pfad ungerader Länge.
- Die Kanten in G_i stammen alternierend aus M und N.

Fortsetzung

$\delta(G) = \cup_{v \in V(G)} \delta_G(v)$

- Setze $d(G_i) = |E_i \cap N| - |E_i \cap M|$.

Fortsetzung

$\delta(G) = \cup_{v \in V(G)} \delta_G(v)$

- Setze $d(G_i) = |E_i \cap N| - |E_i \cap M|$.
- Damit gilt: $d(G_i) \in \{-1, 0, 1\}$.

Fortsetzung

$\delta(G) = \cup_{v \in V(G)} \delta_G(v)$

- Setze $d(G_i) = |E_i \cap N| - |E_i \cap M|$.
- Damit gilt: $d(G_i) \in \{-1, 0, 1\}$.
- Damit gilt weiter: $d(G_i) = 1$ falls G_i verbessernder Pfad.

Fortsetzung

$\delta(G) = \cup_{v \in V(G)} \delta_G(v)$

- Setze $d(G_i) = |E_i \cap N| - |E_i \cap M|$.
- Damit gilt: $d(G_i) \in \{-1, 0, 1\}$.
- Damit gilt weiter: $d(G_i) = 1$ falls G_i verbessernder Pfad.
- $\sum_{i=1}^{g} d(G_i) = |N \setminus M| - |M \setminus N| = |N| - |M|$

Fortsetzung

$\delta(G) = \cup_{v \in V(G)} \delta_G(v)$

- Setze $d(G_i) = |E_i \cap N| - |E_i \cap M|$.
- Damit gilt: $d(G_i) \in \{-1, 0, 1\}$.
- Damit gilt weiter: $d(G_i) = 1$ falls G_i verbessernder Pfad.
- $\sum_{i=1}^{g} d(G_i) = |N \setminus M| - |M \setminus N| = |N| - |M|$
- Damit muss es mindestens $|N| - |M|$ Komponenten G_i geben mit $d(G_i) = 1$.

Fortsetzung

$\delta(G) = \cup_{v \in V(G)} \delta_G(v)$

- Setze $d(G_i) = |E_i \cap N| - |E_i \cap M|$.
- Damit gilt: $d(G_i) \in \{-1, 0, 1\}$.
- Damit gilt weiter: $d(G_i) = 1$ falls G_i verbessernder Pfad.
- $\sum_{i=1}^{g} d(G_i) = |N \setminus M| - |M \setminus N| = |N| - |M|$
- Damit muss es mindestens $|N| - |M|$ Komponenten G_i geben mit $d(G_i) = 1$.
- Zusammengefasst gibt es mindestens $|N| - |M|$ verbessernde Pfade.

Fortsetzung

$\delta(G) = \cup_{v \in V(G)} \delta_G(v)$

- Setze $d(G_i) = |E_i \cap N| - |E_i \cap M|$.
- Damit gilt: $d(G_i) \in \{-1, 0, 1\}$.
- Damit gilt weiter: $d(G_i) = 1$ falls G_i verbessernder Pfad.
- $\sum_{i=1}^{g} d(G_i) = |N \setminus M| - |M \setminus N| = |N| - |M|$
- Damit muss es mindestens $|N| - |M|$ Komponenten G_i geben mit $d(G_i) = 1$.
- Zusammengefasst gibt es mindestens $|N| - |M|$ verbessernde Pfade.
- Nach Definition der Komponenten sind diese knotendisjunkt.

Fortsetzung

$\delta(G) = \cup_{v \in V(G)} \delta_G(v)$

- Setze $d(G_i) = |E_i \cap N| - |E_i \cap M|$.
- Damit gilt: $d(G_i) \in \{-1, 0, 1\}$.
- Damit gilt weiter: $d(G_i) = 1$ falls G_i verbessernder Pfad.
- $\sum_{i=1}^{g} d(G_i) = |N \setminus M| - |M \setminus N| = |N| - |M|$
- Damit muss es mindestens $|N| - |M|$ Komponenten G_i geben mit $d(G_i) = 1$.
- Zusammengefasst gibt es mindestens $|N| - |M|$ verbessernde Pfade.
- Nach Definition der Komponenten sind diese knotendisjunkt.

Fortsetzung

$\delta(G) = \cup_{v \in V(G)} \delta_G(v)$

- Setze $d(G_i) = |E_i \cap N| - |E_i \cap M|$.
- Damit gilt: $d(G_i) \in \{-1, 0, 1\}$.
- Damit gilt weiter: $d(G_i) = 1$ falls G_i verbessernder Pfad.
- $\sum_{i=1}^{g} d(G_i) = |N \setminus M| - |M \setminus N| = |N| - |M|$
- Damit muss es mindestens $|N| - |M|$ Komponenten G_i geben mit $d(G_i) = 1$.
- Zusammengefasst gibt es mindestens $|N| - |M|$ verbessernde Pfade.
- Nach Definition der Komponenten sind diese knotendisjunkt.

Lemma

Sei $G = (V, E)$ und M Matching in G.
M ist maximum Matching genau dann, wenn keinen verbessernden Pfad bezüglich M gibt.

Algorithmus

1. Gegeben $G = (V, W, E)$

Algorithmus

1. Gegeben $G = (V, W, E)$
2. $M = \emptyset$

Algorithmus

1. Gegeben $G = (V, W, E)$
2. $M = \emptyset$
3. Solange es verbessernden Pfad P gibt, mache:

Algorithmus

1. Gegeben $G = (V, W, E)$
2. $M = \emptyset$
3. Solange es verbessernden Pfad P gibt, mache:
    1. Setze $M = M \oplus E(P)$

Algorithmus

1. Gegeben $G = (V, W, E)$
2. $M = \emptyset$
3. Solange es verbessernden Pfad P gibt, mache:
   1. Setze $M = M \oplus E(P)$
4. Ausgabe: M.

Algorithmus

1. Gegeben $G = (V, W, E)$
2. $M = \emptyset$
3. Solange es verbessernden Pfad P gibt, mache:
   1. Setze $M = M \oplus E(P)$
4. Ausgabe: M.

Algorithmus

1. Gegeben $G = (V, W, E)$
2. $M = \emptyset$
3. Solange es verbessernden Pfad P gibt, mache:
   1. Setze $M = M \oplus E(P)$
4. Ausgabe: M.

Theorem

Der obige Algorithmus hat eine Laufzeit von $O(n \cdot m)$.

Beweis:

Algorithmus

1. Gegeben $G = (V, W, E)$
2. $M = \emptyset$
3. Solange es verbessernden Pfad P gibt, mache:
    1. Setze $M = M \oplus E(P)$
4. Ausgabe: M.

Theorem

Der obige Algorithmus hat eine Laufzeit von $O(n \cdot m)$.

Beweis:

Algorithmus

1. Gegeben $G = (V, W, E)$
2. $M = \emptyset$
3. Solange es verbessernden Pfad P gibt, mache:
   1. Setze $M = M \oplus E(P)$
4. Ausgabe: M.

Theorem

Der obige Algorithmus hat eine Laufzeit von $O(n \cdot m)$.

Beweis:

- Wegen $|M| \leqslant \lfloor n/2 \rfloor$ gibt es höchstens $\lfloor n/2 \rfloor$ Schleifendurchläufe.

Algorithmus

1. Gegeben $G = (V, W, E)$
2. $M = \emptyset$
3. Solange es verbessernden Pfad P gibt, mache:
    1. Setze $M = M \oplus E(P)$
4. Ausgabe: M.

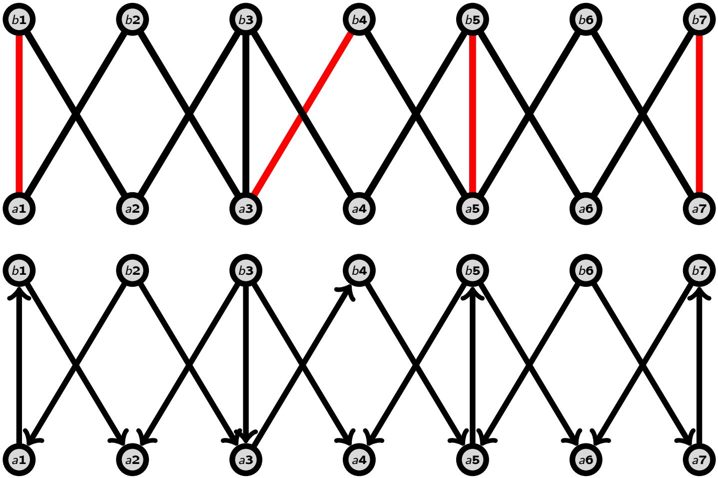
Theorem

Der obige Algorithmus hat eine Laufzeit von $O(n \cdot m)$.

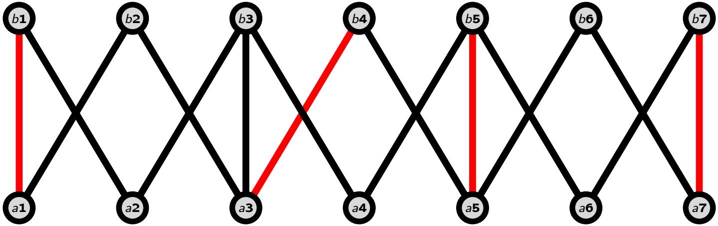
Beweis:

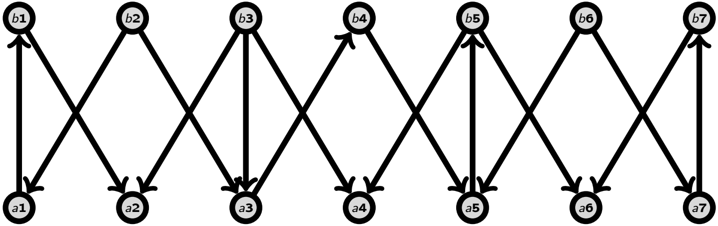
- Wegen $|M| \leqslant \lfloor n/2 \rfloor$ gibt es höchstens $\lfloor n/2 \rfloor$ Schleifendurchläufe.
- Jede Schleife kann in Zeit $O(m)$ ausgeführt werden.

Beispiel (Schleifendurchlauf)

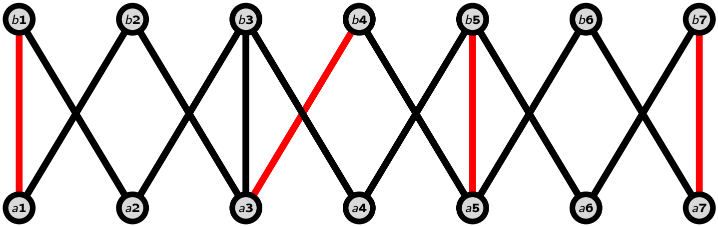


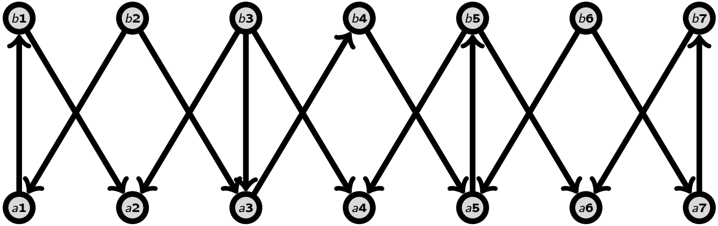
Beispiel (Schleifendurchlauf)



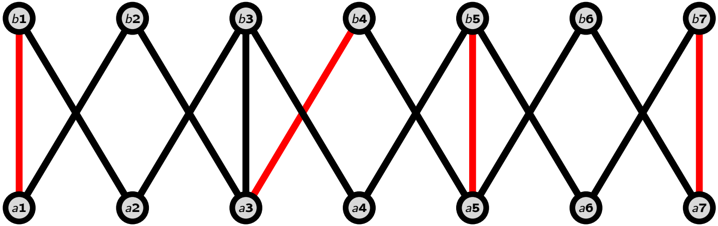


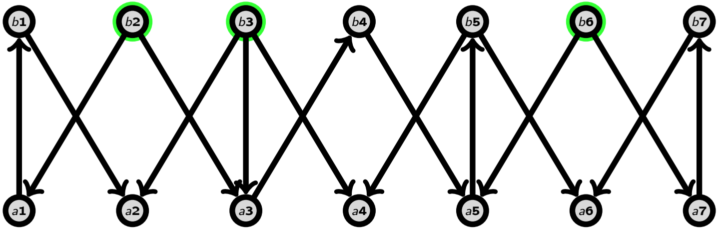
Beispiel (Schleifendurchlauf)



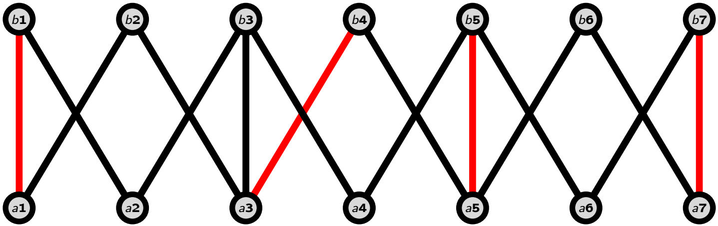


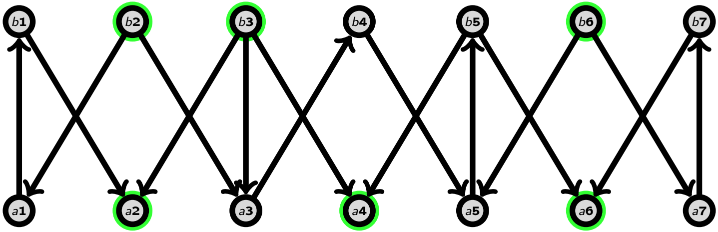
Beispiel (Schleifendurchlauf)





Beispiel (Schleifendurchlauf)





Schleifendurchlauf

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph und M Matching.

Schleifendurchlauf

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph und M Matching.
- Erzeuge $G' = (V \cup W, E' \cup E'')$ mit:

Schleifendurchlauf

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph und M Matching.
- Erzeuge $G' = (V \cup W, E' \cup E'')$ mit:
  - $E' = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E \setminus M \wedge v \in V \wedge w \in W\}$ und

Schleifendurchlauf

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph und M Matching.
- Erzeuge $G' = (V \cup W, E' \cup E'')$ mit:
  - $E' = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E \setminus M \wedge v \in V \wedge w \in W\}$ und
  - $E'' = \{(w, v) \mid \{v, w\} \in M \wedge v \in V \wedge w \in W\}$.

Schleifendurchlauf

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph und M Matching.
- Erzeuge $G' = (V \cup W, E' \cup E'')$ mit:
  - $E' = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E \setminus M \wedge v \in V \wedge w \in W\}$ und
  - $E'' = \{(w, v) \mid \{v, w\} \in M \wedge v \in V \wedge w \in W\}$.
- Damit wird die Suche nach einem verbessernden Pfad eine Suche in G':

Schleifendurchlauf

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph und M Matching.
- Erzeuge $G' = (V \cup W, E' \cup E'')$ mit:
  - $E' = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E \setminus M \wedge v \in V \wedge w \in W\}$ und
  - $E'' = \{(w, v) \mid \{v, w\} \in M \wedge v \in V \wedge w \in W\}$.
- Damit wird die Suche nach einem verbessernden Pfad eine Suche in G':
  - Von einem freien Knoten in V zu

Schleifendurchlauf

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph und M Matching.
- Erzeuge $G' = (V \cup W, E' \cup E'')$ mit:
  - $E' = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E \setminus M \wedge v \in V \wedge w \in W\}$ und
  - $E'' = \{(w, v) \mid \{v, w\} \in M \wedge v \in V \wedge w \in W\}$.
- Damit wird die Suche nach einem verbessernden Pfad eine Suche in G':
  - Von einem freien Knoten in V zu
  - einem freien Knoten in W.

Schleifendurchlauf

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph und M Matching.
- Erzeuge $G' = (V \cup W, E' \cup E'')$ mit:
  - $E' = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E \setminus M \wedge v \in V \wedge w \in W\}$ und
  - $E'' = \{(w, v) \mid \{v, w\} \in M \wedge v \in V \wedge w \in W\}$.
- Damit wird die Suche nach einem verbessernden Pfad eine Suche in G':
  - Von einem freien Knoten in V zu
  - einem freien Knoten in W.
- Damit ergibt sich eine Laufzeit von $O(m)$ durch Tiefensuche.

Idee

- Falls Kanten oft die Rolle (Matching,nicht Matching) wechseln, erhalten wir eine schlechte Laufzeit.

Idee

- Falls Kanten oft die Rolle (Matching,nicht Matching) wechseln, erhalten wir eine schlechte Laufzeit.
- Am Anfang besteht der verbessernde Pfad aus einer Kante.

Idee

- Falls Kanten oft die Rolle (Matching,nicht Matching) wechseln, erhalten wir eine schlechte Laufzeit.
- Am Anfang besteht der verbessernde Pfad aus einer Kante.
- Am Anfang sind die kürzesten verbessernden Pfade knotendisjunkt.

Idee

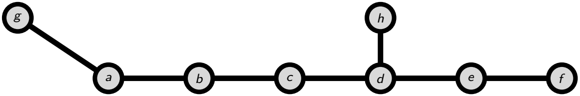
- Falls Kanten oft die Rolle (Matching,nicht Matching) wechseln, erhalten wir eine schlechte Laufzeit.
- Am Anfang besteht der verbessernde Pfad aus einer Kante.
- Am Anfang sind die kürzesten verbessernden Pfade knotendisjunkt.
- Idee: suche kürzeste verbessernde Pfade.

Idee

- Falls Kanten oft die Rolle (Matching,nicht Matching) wechseln, erhalten wir eine schlechte Laufzeit.
- Am Anfang besteht der verbessernde Pfad aus einer Kante.
- Am Anfang sind die kürzesten verbessernden Pfade knotendisjunkt.
- Idee: suche kürzeste verbessernde Pfade.
- Falls diese knotendisjunkt sind, können diese gleichzeitig gesucht werden.

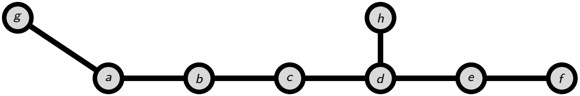
Idee

- Falls Kanten oft die Rolle (Matching,nicht Matching) wechseln, erhalten wir eine schlechte Laufzeit.
- Am Anfang besteht der verbessernde Pfad aus einer Kante.
- Am Anfang sind die kürzesten verbessernden Pfade knotendisjunkt.
- Idee: suche kürzeste verbessernde Pfade.
- Falls diese knotendisjunkt sind, können diese gleichzeitig gesucht werden.
- Beispiel:



Idee

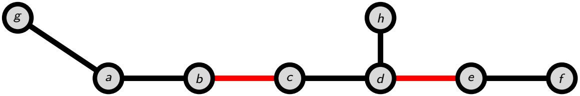
- Falls Kanten oft die Rolle (Matching,nicht Matching) wechseln, erhalten wir eine schlechte Laufzeit.
- Am Anfang besteht der verbessernde Pfad aus einer Kante.
- Am Anfang sind die kürzesten verbessernden Pfade knotendisjunkt.
- Idee: suche kürzeste verbessernde Pfade.
- Falls diese knotendisjunkt sind, können diese gleichzeitig gesucht werden.
- Beispiel:



  - Matching: $M = \{\{b, c\}, \{d, e\}\}$

Idee

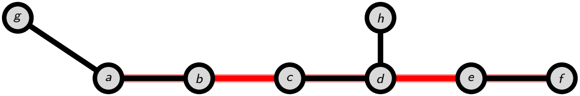
- Falls Kanten oft die Rolle (Matching,nicht Matching) wechseln, erhalten wir eine schlechte Laufzeit.
- Am Anfang besteht der verbessernde Pfad aus einer Kante.
- Am Anfang sind die kürzesten verbessernden Pfade knotendisjunkt.
- Idee: suche kürzeste verbessernde Pfade.
- Falls diese knotendisjunkt sind, können diese gleichzeitig gesucht werden.
- Beispiel:



  - Matching: $M = \{\{b, c\}, \{d, e\}\}$
  - Erster kürzester verbessernder Pfad: a, b, c, d, e, f

Idee

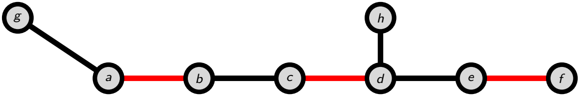
- Falls Kanten oft die Rolle (Matching,nicht Matching) wechseln, erhalten wir eine schlechte Laufzeit.
- Am Anfang besteht der verbessernde Pfad aus einer Kante.
- Am Anfang sind die kürzesten verbessernden Pfade knotendisjunkt.
- Idee: suche kürzeste verbessernde Pfade.
- Falls diese knotendisjunkt sind, können diese gleichzeitig gesucht werden.
- Beispiel:



  - Matching: $M = \{\{b, c\}, \{d, e\}\}$
  - Erster kürzester verbessernder Pfad: a, b, c, d, e, f

Idee

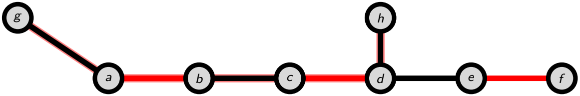
- Falls Kanten oft die Rolle (Matching,nicht Matching) wechseln, erhalten wir eine schlechte Laufzeit.
- Am Anfang besteht der verbessernde Pfad aus einer Kante.
- Am Anfang sind die kürzesten verbessernden Pfade knotendisjunkt.
- Idee: suche kürzeste verbessernde Pfade.
- Falls diese knotendisjunkt sind, können diese gleichzeitig gesucht werden.
- Beispiel:



  - Matching: $M = \{\{b, c\}, \{d, e\}\}$
  - Erster kürzester verbessernder Pfad: a, b, c, d, e, f

Idee

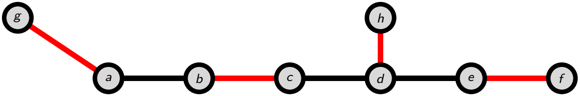
- Falls Kanten oft die Rolle (Matching,nicht Matching) wechseln, erhalten wir eine schlechte Laufzeit.
- Am Anfang besteht der verbessernde Pfad aus einer Kante.
- Am Anfang sind die kürzesten verbessernden Pfade knotendisjunkt.
- Idee: suche kürzeste verbessernde Pfade.
- Falls diese knotendisjunkt sind, können diese gleichzeitig gesucht werden.
- Beispiel:



  - Matching: $M = \{\{b, c\}, \{d, e\}\}$
  - Erster kürzester verbessernder Pfad: a, b, c, d, e, f
  - Zweiter kürzester verbessernder Pfad: g, a, b, c, d, h

Idee

- Falls Kanten oft die Rolle (Matching,nicht Matching) wechseln, erhalten wir eine schlechte Laufzeit.
- Am Anfang besteht der verbessernde Pfad aus einer Kante.
- Am Anfang sind die kürzesten verbessernden Pfade knotendisjunkt.
- Idee: suche kürzeste verbessernde Pfade.
- Falls diese knotendisjunkt sind, können diese gleichzeitig gesucht werden.
- Beispiel:



  - Matching: $M = \{\{b, c\}, \{d, e\}\}$
  - Erster kürzester verbessernder Pfad: a, b, c, d, e, f
  - Zweiter kürzester verbessernder Pfad: g, a, b, c, d, h
  - Widerspruch, da (g, a) noch kürzerer verbessernder Pfad.

Lemma 1

Lemma (kurzer Weg)

Sei M Matching in $G = (V, E)$ und P kürzester verbessernder Pfad in G bezüglich M. Sei weiter P' verbessernder Pfad bezüglich $M \oplus E(P)$, dann gilt:

$$|P'| \geqslant |P| + |P \cap P'|.$$

Beweis:

Lemma 1

Lemma (kurzer Weg)

Sei M Matching in $G=(V,E)$ und P kürzester verbessernder Pfad in G bezüglich M. Sei weiter P' verbessernder Pfad bezüglich $M \oplus E(P)$, dann gilt:

$$|P'| \geqslant |P| + |P \cap P'|.$$

Beweis:

Lemma 1

Lemma (kurzer Weg)

Sei M Matching in $G = (V, E)$ und P kürzester verbessernder Pfad in G bezüglich M. Sei weiter P' verbessernder Pfad bezüglich $M \oplus E(P)$, dann gilt:

$$|P'| \geqslant |P| + |P \cap P'|.$$

Beweis:

- Sei $N = (M \oplus P) \oplus P'$. Nach Lemma "ein verbessernder Pfad" gilt: $|N| = |M| + 2$.

Lemma 1

Lemma (kurzer Weg)

Sei M Matching in $G = (V, E)$ und P kürzester verbessernder Pfad in G bezüglich M. Sei weiter P' verbessernder Pfad bezüglich $M \oplus E(P)$, dann gilt:

$$|P'| \geqslant |P| + |P \cap P'|.$$

Beweis:

- Sei $N = (M \oplus P) \oplus P'$. Nach Lemma "ein verbessernder Pfad" gilt: $|N| = |M| + 2$.
- Nach Lemma "Differenz zweier Matchings" gibt es in $M \oplus N$ zwei knotendisjunkte verbessernde Pfade P_1, P_2.

Lemma 1

Lemma (kurzer Weg)

Sei M Matching in $G = (V, E)$ und P kürzester verbessernder Pfad in G bezüglich M. Sei weiter P' verbessernder Pfad bezüglich $M \oplus E(P)$, dann gilt:

$$|P'| \geqslant |P| + |P \cap P'|.$$

Beweis:

- Sei $N = (M \oplus P) \oplus P'$. Nach Lemma "ein verbessernder Pfad" gilt: $|N| = |M| + 2$.
- Nach Lemma "Differenz zweier Matchings" gibt es in $M \oplus N$ zwei knotendisjunkte verbessernde Pfade P_1, P_2.
- Wegen $|P_l| \geqslant |P|$ $(l \in \{1, 2\})$ gilt: $|M \oplus N| \geqslant 2 \cdot |P|$.

Lemma 1

Lemma (kurzer Weg)

Sei M Matching in $G=(V,E)$ und P kürzester verbessernder Pfad in G bezüglich M. Sei weiter P' verbessernder Pfad bezüglich $M \oplus E(P)$, dann gilt:

$$|P'| \geqslant |P| + |P \cap P'|.$$

Beweis:

- Sei $N=(M \oplus P) \oplus P'$. Nach Lemma "ein verbessernder Pfad" gilt: $|N|=|M|+2$.
- Nach Lemma "Differenz zweier Matchings" gibt es in $M \oplus N$ zwei knotendisjunkte verbessernde Pfade P_1, P_2.
- Wegen $|P_l| \geqslant |P|$ $(l \in \{1,2\})$ gilt: $|M \oplus N| \geqslant 2 \cdot |P|$.
- Nun folgt:

Fortsetzung

Zeige: $|P'| \geqslant |P| + |P \cap P'|$

- Sei $N = (M \oplus P) \oplus P'$. Nach Lemma “ein verbessernder Pfad” gilt: $|N| = |M| + 2$.

Fortsetzung

Zeige: $|P'| \geqslant |P| + |P \cap P'|$

- Sei $N = (M \oplus P) \oplus P'$. Nach Lemma "ein verbessernder Pfad" gilt: $|N| = |M| + 2$.
- Nach Lemma "Differenz zweier Matchings" gibt es in $M \oplus N$ zwei knotendisjunkte verbessernde Pfade P_1, P_2.

Fortsetzung

Zeige: $|P'| \geqslant |P| + |P \cap P'|$

- Sei $N = (M \oplus P) \oplus P'$. Nach Lemma "ein verbessernder Pfad" gilt: $|N| = |M| + 2$.
- Nach Lemma "Differenz zweier Matchings" gibt es in $M \oplus N$ zwei knotendisjunkte verbessernde Pfade P_1, P_2.
- Wegen $|P_l| \geqslant |P|$ ($l \in \{1, 2\}$) gilt: $|M \oplus N| \geqslant 2 \cdot |P|$.

Fortsetzung

Zeige: $|P'| \geqslant |P| + |P \cap P'|$

- Sei $N = (M \oplus P) \oplus P'$. Nach Lemma "ein verbessernder Pfad" gilt: $|N| = |M| + 2$.
- Nach Lemma "Differenz zweier Matchings" gibt es in $M \oplus N$ zwei knotendisjunkte verbessernde Pfade P_1, P_2.
- Wegen $|P_l| \geqslant |P|$ $(l \in \{1, 2\})$ gilt: $|M \oplus N| \geqslant 2 \cdot |P|$.
- Nun folgt:

$$M \oplus N \quad = \quad M \oplus ((M \oplus P) \oplus P')$$

Fortsetzung

Zeige: $|P'| \geqslant |P| + |P \cap P'|$

- Sei $N = (M \oplus P) \oplus P'$. Nach Lemma "ein verbessernder Pfad" gilt: $|N| = |M| + 2$.
- Nach Lemma "Differenz zweier Matchings" gibt es in $M \oplus N$ zwei knotendisjunkte verbessernde Pfade P_1, P_2.
- Wegen $|P_l| \geqslant |P|$ $(l \in \{1, 2\})$ gilt: $|M \oplus N| \geqslant 2 \cdot |P|$.
- Nun folgt:

$$M \oplus N = M \oplus ((M \oplus P) \oplus P')$$

Fortsetzung

Zeige: $|P'| \geqslant |P| + |P \cap P'|$

- Sei $N = (M \oplus P) \oplus P'$. Nach Lemma "ein verbessernder Pfad" gilt: $|N| = |M| + 2$.
- Nach Lemma "Differenz zweier Matchings" gibt es in $M \oplus N$ zwei knotendisjunkte verbessernde Pfade P_1, P_2.
- Wegen $|P_l| \geqslant |P|$ $(l \in \{1, 2\})$ gilt: $|M \oplus N| \geqslant 2 \cdot |P|$.
- Nun folgt:

$$\begin{aligned} M \oplus N &= M \oplus ((M \oplus P) \oplus P') \\ &= (M \oplus M) \oplus (P \oplus P') \end{aligned}$$

Fortsetzung

Zeige: $|P'| \geqslant |P| + |P \cap P'|$

- Sei $N = (M \oplus P) \oplus P'$. Nach Lemma "ein verbessernder Pfad" gilt: $|N| = |M| + 2$.
- Nach Lemma "Differenz zweier Matchings" gibt es in $M \oplus N$ zwei knotendisjunkte verbessernde Pfade P_1, P_2.
- Wegen $|P_l| \geqslant |P|$ ($l \in \{1, 2\}$) gilt: $|M \oplus N| \geqslant 2 \cdot |P|$.
- Nun folgt:

$$\begin{aligned} M \oplus N &= M \oplus ((M \oplus P) \oplus P') \\ &= (M \oplus M) \oplus (P \oplus P') \\ &= P \oplus P' \end{aligned}$$

Fortsetzung

Zeige: $|P'| \geqslant |P| + |P \cap P'|$

- Sei $N = (M \oplus P) \oplus P'$. Nach Lemma "ein verbessernder Pfad" gilt: $|N| = |M| + 2$.
- Nach Lemma "Differenz zweier Matchings" gibt es in $M \oplus N$ zwei knotendisjunkte verbessernde Pfade P_1, P_2.
- Wegen $|P_l| \geqslant |P|$ $(l \in \{1, 2\})$ gilt: $|M \oplus N| \geqslant 2 \cdot |P|$.
- Nun folgt:

$$\begin{aligned} M \oplus N &= M \oplus ((M \oplus P) \oplus P') \\ &= (M \oplus M) \oplus (P \oplus P') \\ &= P \oplus P' \\ \text{Damit gilt:} \quad |P \oplus P'| &\geqslant 2 \cdot |P| \end{aligned}$$

Fortsetzung

Zeige: $|P'| \geqslant |P| + |P \cap P'|$

- Sei $N = (M \oplus P) \oplus P'$. Nach Lemma "ein verbessernder Pfad" gilt: $|N| = |M| + 2$.
- Nach Lemma "Differenz zweier Matchings" gibt es in $M \oplus N$ zwei knotendisjunkte verbessernde Pfade P_1, P_2.
- Wegen $|P_l| \geqslant |P|$ $(l \in \{1, 2\})$ gilt: $|M \oplus N| \geqslant 2 \cdot |P|$.
- Nun folgt:

$$\begin{array}{lrcl} & M \oplus N & = & M \oplus ((M \oplus P) \oplus P') \\ & & = & (M \oplus M) \oplus (P \oplus P') \\ & & = & P \oplus P' \\ \text{Damit gilt:} & |P \oplus P'| & \geqslant & 2 \cdot |P| \\ \text{Betrachte:} & |P \oplus P'| & = & |P \cup P'| - |P \cap P'| \end{array}$$

Fortsetzung

Zeige: $|P'| \geqslant |P| + |P \cap P'|$

- Sei $N = (M \oplus P) \oplus P'$. Nach Lemma "ein verbessernder Pfad" gilt: $|N| = |M| + 2$.
- Nach Lemma "Differenz zweier Matchings" gibt es in $M \oplus N$ zwei knotendisjunkte verbessernde Pfade P_1, P_2.
- Wegen $|P_l| \geqslant |P|$ ($l \in \{1, 2\}$) gilt: $|M \oplus N| \geqslant 2 \cdot |P|$.
- Nun folgt:

$$\begin{array}{lrcl}
 & M \oplus N & = & M \oplus ((M \oplus P) \oplus P') \\
 & & = & (M \oplus M) \oplus (P \oplus P') \\
 & & = & P \oplus P' \\
\text{Damit gilt:} & |P \oplus P'| & \geqslant & 2 \cdot |P| \\
\text{Betrachte:} & |P \oplus P'| & = & |P \cup P'| - |P \cap P'| \\
 & & \leqslant & |P| + |P'| - |P \cap P'|
\end{array}$$

Fortsetzung

Zeige: $|P'| \geqslant |P| + |P \cap P'|$

- Sei $N = (M \oplus P) \oplus P'$. Nach Lemma "ein verbessernder Pfad" gilt: $|N| = |M| + 2$.
- Nach Lemma "Differenz zweier Matchings" gibt es in $M \oplus N$ zwei knotendisjunkte verbessernde Pfade P_1, P_2.
- Wegen $|P_l| \geqslant |P|$ ($l \in \{1,2\}$) gilt: $|M \oplus N| \geqslant 2 \cdot |P|$.
- Nun folgt:

$$\begin{array}{rrcl}
 & M \oplus N & = & M \oplus ((M \oplus P) \oplus P') \\
 & & = & (M \oplus M) \oplus (P \oplus P') \\
 & & = & P \oplus P' \\
\text{Damit gilt:} & |P \oplus P'| & \geqslant & 2 \cdot |P| \\
\text{Betrachte:} & |P \oplus P'| & = & |P \cup P'| - |P \cap P'| \\
 & & \leqslant & |P| + |P'| - |P \cap P'| \\
\text{Damit gibt:} & 2 \cdot |P| & \leqslant & |P| + |P'| - |P \cap P'|
\end{array}$$

Fortsetzung

Zeige: $|P'| \geqslant |P| + |P \cap P'|$

- Sei $N = (M \oplus P) \oplus P'$. Nach Lemma "ein verbessernder Pfad" gilt: $|N| = |M| + 2$.
- Nach Lemma "Differenz zweier Matchings" gibt es in $M \oplus N$ zwei knotendisjunkte verbessernde Pfade P_1, P_2.
- Wegen $|P_l| \geqslant |P|$ $(l \in \{1,2\})$ gilt: $|M \oplus N| \geqslant 2 \cdot |P|$.
- Nun folgt:

$$\begin{array}{rrcl}
 & M \oplus N & = & M \oplus ((M \oplus P) \oplus P') \\
 & & = & (M \oplus M) \oplus (P \oplus P') \\
 & & = & P \oplus P' \\
\text{Damit gilt:} & |P \oplus P'| & \geqslant & 2 \cdot |P| \\
\text{Betrachte:} & |P \oplus P'| & = & |P \cup P'| - |P \cap P'| \\
 & & \leqslant & |P| + |P'| - |P \cap P'| \\
\text{Damit gibt:} & 2 \cdot |P| & \leqslant & |P| + |P'| - |P \cap P'| \\
 & |P| + |P \cap P'| & \leqslant & |P'|
\end{array}$$

Idee und Situation

- Ziel: Suche viele kürzeste verbessernde Pfade.

Idee und Situation

- Ziel: Suche viele kürzeste verbessernde Pfade.
- Starte mit leerem Matching $M_0 = \emptyset$.

Idee und Situation

- Ziel: Suche viele kürzeste verbessernde Pfade.
- Starte mit leerem Matching $M_0 = \emptyset$.
- Im Schritt i sei P_i ein kürzester verbessernder Pfad bezüglich M_{i-1}.

Idee und Situation

- Ziel: Suche viele kürzeste verbessernde Pfade.
- Starte mit leerem Matching $M_0 = \emptyset$.
- Im Schritt i sei P_i ein kürzester verbessernder Pfad bezüglich M_{i-1}.
- Setze $M_i = M_{i-1} \oplus E(P_i)$.

Idee und Situation

- Ziel: Suche viele kürzeste verbessernde Pfade.
- Starte mit leerem Matching $M_0 = \emptyset$.
- Im Schritt i sei P_i ein kürzester verbessernder Pfad bezüglich M_{i-1}.
- Setze $M_i = M_{i-1} \oplus E(P_i)$.

Idee und Situation

- Ziel: Suche viele kürzeste verbessernde Pfade.
- Starte mit leerem Matching $M_0 = \emptyset$.
- Im Schritt i sei P_i ein kürzester verbessernder Pfad bezüglich M_{i-1}.
- Setze $M_i = M_{i-1} \oplus E(P_i)$.

Lemma (disjunkte kürzeste verbessernde Pfade)

Für $i, j \geqslant 1$ gilt:

Idee und Situation

- Ziel: Suche viele kürzeste verbessernde Pfade.
- Starte mit leerem Matching $M_0 = \emptyset$.
- Im Schritt i sei P_i ein kürzester verbessernder Pfad bezüglich M_{i-1}.
- Setze $M_i = M_{i-1} \oplus E(P_i)$.

Lemma (disjunkte kürzeste verbessernde Pfade)

Für $i, j \geqslant 1$ gilt:

1. $|P_i| \leqslant |P_{i+1}|$

Idee und Situation

- Ziel: Suche viele kürzeste verbessernde Pfade.
- Starte mit leerem Matching $M_0 = \emptyset$.
- Im Schritt i sei P_i ein kürzester verbessernder Pfad bezüglich M_{i-1}.
- Setze $M_i = M_{i-1} \oplus E(P_i)$.

Lemma (disjunkte kürzeste verbessernde Pfade)

Für $i, j \geqslant 1$ gilt:

1. $|P_i| \leqslant |P_{i+1}|$
2. $|P_i| = |P_j| \Longrightarrow P_i$ *und* P_j *sind knotendisjunkt.*

Idee und Situation

- Ziel: Suche viele kürzeste verbessernde Pfade.
- Starte mit leerem Matching $M_0 = \emptyset$.
- Im Schritt i sei P_i ein kürzester verbessernder Pfad bezüglich M_{i-1}.
- Setze $M_i = M_{i-1} \oplus E(P_i)$.

Lemma (disjunkte kürzeste verbessernde Pfade)

Für $i, j \geqslant 1$ gilt:

1. $|P_i| \leqslant |P_{i+1}|$
2. $|P_i| = |P_j| \Longrightarrow P_i$ *und* P_j *sind knotendisjunkt.*

Idee und Situation

- Ziel: Suche viele kürzeste verbessernde Pfade.
- Starte mit leerem Matching $M_0 = \emptyset$.
- Im Schritt i sei P_i ein kürzester verbessernder Pfad bezüglich M_{i-1}.
- Setze $M_i = M_{i-1} \oplus E(P_i)$.

Lemma (disjunkte kürzeste verbessernde Pfade)

Für $i, j \geqslant 1$ gilt:

1. $|P_i| \leqslant |P_{i+1}|$
2. $|P_i| = |P_j| \implies P_i$ *und* P_j *sind knotendisjunkt.*

Beweis

1. $|P_i| \leqslant |P_{i+1}|$ folgt aus Lemma "kurzer Weg".

Idee und Situation

- Ziel: Suche viele kürzeste verbessernde Pfade.
- Starte mit leerem Matching $M_0 = \emptyset$.
- Im Schritt i sei P_i ein kürzester verbessernder Pfad bezüglich M_{i-1}.
- Setze $M_i = M_{i-1} \oplus E(P_i)$.

Lemma (disjunkte kürzeste verbessernde Pfade)

Für $i, j \geqslant 1$ gilt:

1. $|P_i| \leqslant |P_{i+1}|$
2. $|P_i| = |P_j| \Longrightarrow P_i$ *und* P_j *sind knotendisjunkt.*

Beweis

1. $|P_i| \leqslant |P_{i+1}|$ folgt aus Lemma "kurzer Weg".
2. Folgt per Widerspruch:

Beweis (Teil 2)

- Sei $i < j$, $|P_i| = |P_j|$ und $V(P_i) \cap V(P_j) \neq \emptyset$.

Beweis (Teil 2)

- Sei $i < j$, $|P_i| = |P_j|$ und $V(P_i) \cap V(P_j) \neq \emptyset$.
- O.B.d.A.: $\forall k : i < k < j : \forall l \in \{i, j\} : V(P_l) \cap V(P_k) = \emptyset$.

Beweis (Teil 2)

- Sei $i < j$, $|P_i| = |P_j|$ und $V(P_i) \cap V(P_j) \neq \emptyset$.
- O.B.d.A.: $\forall k : i < k < j : \forall l \in \{i, j\} : V(P_l) \cap V(P_k) = \emptyset$.
- Damit folgt: P_j ist ein verbessernder Pfad bezüglich $M_i = M_{i-1} \oplus P_i$.

Beweis (Teil 2)

- Sei $i < j$, $|P_i| = |P_j|$ und $V(P_i) \cap V(P_j) \neq \emptyset$.
- O.B.d.A.: $\forall k : i < k < j : \forall l \in \{i, j\} : V(P_l) \cap V(P_k) = \emptyset$.
- Damit folgt: P_j ist ein verbessernder Pfad bezüglich $M_i = M_{i-1} \oplus P_i$.
- Wegen $V(P_i) \cap V(P_j) \neq \emptyset$ folgt: $E(P_i) \cap E(P_j) \neq \emptyset$.

Beweis (Teil 2)

- Sei $i < j$, $|P_i| = |P_j|$ und $V(P_i) \cap V(P_j) \neq \emptyset$.
- O.B.d.A.: $\forall k : i < k < j : \forall l \in \{i, j\} : V(P_l) \cap V(P_k) = \emptyset$.
- Damit folgt: P_j ist ein verbessernder Pfad bezüglich $M_i = M_{i-1} \oplus P_i$.
- Wegen $V(P_i) \cap V(P_j) \neq \emptyset$ folgt: $E(P_i) \cap E(P_j) \neq \emptyset$.
- Sei $v \in V(P_i) \cap V(P_j)$, genau die Matchingkante an v ist in $E(P_i) \cap E(P_j)$.

Beweis (Teil 2)

- Sei $i < j$, $|P_i| = |P_j|$ und $V(P_i) \cap V(P_j) \neq \emptyset$.
- O.B.d.A.: $\forall k : i < k < j : \forall l \in \{i, j\} : V(P_l) \cap V(P_k) = \emptyset$.
- Damit folgt: P_j ist ein verbessernder Pfad bezüglich $M_i = M_{i-1} \oplus P_i$.
- Wegen $V(P_i) \cap V(P_j) \neq \emptyset$ folgt: $E(P_i) \cap E(P_j) \neq \emptyset$.
- Sei $v \in V(P_i) \cap V(P_j)$, genau die Matchingkante an v ist in $E(P_i) \cap E(P_j)$.
- $|E(P_i) \cap E(P_j)| \geqslant 1$.

Beweis (Teil 2)

- Sei $i < j$, $|P_i| = |P_j|$ und $V(P_i) \cap V(P_j) \neq \emptyset$.
- O.B.d.A.: $\forall k : i < k < j : \forall l \in \{i, j\} : V(P_l) \cap V(P_k) = \emptyset$.
- Damit folgt: P_j ist ein verbessernder Pfad bezüglich $M_i = M_{i-1} \oplus P_i$.
- Wegen $V(P_i) \cap V(P_j) \neq \emptyset$ folgt: $E(P_i) \cap E(P_j) \neq \emptyset$.
- Sei $v \in V(P_i) \cap V(P_j)$, genau die Matchingkante an v ist in $E(P_i) \cap E(P_j)$.
- $|E(P_i) \cap E(P_j)| \geqslant 1$.
- Aus Lemma "kurzer Weg" folgt: $|P_j| \geqslant |P_i| + |P_i \cap P_j| \geqslant |P_i| + 1$.

Beweis (Teil 2)

- Sei $i < j$, $|P_i| = |P_j|$ und $V(P_i) \cap V(P_j) \neq \emptyset$.
- O.B.d.A.: $\forall k : i < k < j : \forall l \in \{i,j\} : V(P_l) \cap V(P_k) = \emptyset$.
- Damit folgt: P_j ist ein verbessernder Pfad bezüglich $M_i = M_{i-1} \oplus P_i$.
- Wegen $V(P_i) \cap V(P_j) \neq \emptyset$ folgt: $E(P_i) \cap E(P_j) \neq \emptyset$.
- Sei $v \in V(P_i) \cap V(P_j)$, genau die Matchingkante an v ist in $E(P_i) \cap E(P_j)$.
- $|E(P_i) \cap E(P_j)| \geqslant 1$.
- Aus Lemma "kurzer Weg" folgt: $|P_j| \geqslant |P_i| + |P_i \cap P_j| \geqslant |P_i| + 1$.
- Widerspruch.

Idee und Algorithmus

- Suche alle kürzesten verbessernden Pfade.

Idee und Algorithmus

- Suche alle kürzesten verbessernden Pfade.
- Je länger diese werden, um so weniger gibt es davon.

Idee und Algorithmus

- Suche alle kürzesten verbessernden Pfade.
- Je länger diese werden, um so weniger gibt es davon.
- Alle knotendisjunkten Pfade nutzen jeweils mindestens eine Kante des aktuellen Matchings.

Idee und Algorithmus

- Suche alle kürzesten verbessernden Pfade.
- Je länger diese werden, um so weniger gibt es davon.
- Alle knotendisjunkten Pfade nutzen jeweils mindestens eine Kante des aktuellen Matchings.
- Damit erhalten wir eine bessere Laufzeit.

Idee und Algorithmus

- Suche alle kürzesten verbessernden Pfade.
- Je länger diese werden, um so weniger gibt es davon.
- Alle knotendisjunkten Pfade nutzen jeweils mindestens eine Kante des aktuellen Matchings.
- Damit erhalten wir eine bessere Laufzeit.
- Der Algorithmus bestimmt in Runde i möglichst viele kürzeste verbessernden Pfade der Länge l_i.

Idee und Algorithmus

- Suche alle kürzesten verbessernden Pfade.
- Je länger diese werden, um so weniger gibt es davon.
- Alle knotendisjunkten Pfade nutzen jeweils mindestens eine Kante des aktuellen Matchings.
- Damit erhalten wir eine bessere Laufzeit.
- Der Algorithmus bestimmt in Runde i möglichst viele kürzeste verbessernden Pfade der Länge l_i.
- $l_1 < l_2 < l_3 < \ldots$.

Idee und Algorithmus

- Suche alle kürzesten verbessernden Pfade.
- Je länger diese werden, um so weniger gibt es davon.
- Alle knotendisjunkten Pfade nutzen jeweils mindestens eine Kante des aktuellen Matchings.
- Damit erhalten wir eine bessere Laufzeit.
- Der Algorithmus bestimmt in Runde i möglichst viele kürzeste verbessernden Pfade der Länge l_i.
- $l_1 < l_2 < l_3 < \ldots$.

Idee und Algorithmus

- Suche alle kürzesten verbessernden Pfade.
- Je länger diese werden, um so weniger gibt es davon.
- Alle knotendisjunkten Pfade nutzen jeweils mindestens eine Kante des aktuellen Matchings.
- Damit erhalten wir eine bessere Laufzeit.
- Der Algorithmus bestimmt in Runde i möglichst viele kürzeste verbessernden Pfade der Länge l_i.
- $l_1 < l_2 < l_3 < \ldots$.

Algorithmus:

1. Gegeben $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph.

Idee und Algorithmus

- Suche alle kürzesten verbessernden Pfade.
- Je länger diese werden, um so weniger gibt es davon.
- Alle knotendisjunkten Pfade nutzen jeweils mindestens eine Kante des aktuellen Matchings.
- Damit erhalten wir eine bessere Laufzeit.
- Der Algorithmus bestimmt in Runde i möglichst viele kürzeste verbessernden Pfade der Länge l_i.
- $l_1 < l_2 < l_3 < \dots$

Algorithmus:

1. Gegeben $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph.
2. Setze $M = \emptyset$

Idee und Algorithmus

- Suche alle kürzesten verbessernden Pfade.
- Je länger diese werden, um so weniger gibt es davon.
- Alle knotendisjunkten Pfade nutzen jeweils mindestens eine Kante des aktuellen Matchings.
- Damit erhalten wir eine bessere Laufzeit.
- Der Algorithmus bestimmt in Runde i möglichst viele kürzeste verbessernden Pfade der Länge l_i.
- $l_1 < l_2 < l_3 < \dots$.

Algorithmus:

1. Gegeben $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph.
2. Setze $M = \emptyset$
3. Solange es verbessernde Pfade gibt, mache:

Idee und Algorithmus

- Suche alle kürzesten verbessernden Pfade.
- Je länger diese werden, um so weniger gibt es davon.
- Alle knotendisjunkten Pfade nutzen jeweils mindestens eine Kante des aktuellen Matchings.
- Damit erhalten wir eine bessere Laufzeit.
- Der Algorithmus bestimmt in Runde i möglichst viele kürzeste verbessernden Pfade der Länge l_i.
- $l_1 < l_2 < l_3 < \ldots$.

Algorithmus:

1. Gegeben $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph.
2. Setze $M = \emptyset$
3. Solange es verbessernde Pfade gibt, mache:
    1. Bestimme l als die Länge des kürzesten verbessernden Pfads.

Idee und Algorithmus

- Suche alle kürzesten verbessernden Pfade.
- Je länger diese werden, um so weniger gibt es davon.
- Alle knotendisjunkten Pfade nutzen jeweils mindestens eine Kante des aktuellen Matchings.
- Damit erhalten wir eine bessere Laufzeit.
- Der Algorithmus bestimmt in Runde i möglichst viele kürzeste verbessernden Pfade der Länge l_i.
- $l_1 < l_2 < l_3 < \dots$.

Algorithmus:

1. Gegeben $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph.
2. Setze $M = \emptyset$
3. Solange es verbessernde Pfade gibt, mache:
    1. Bestimme l als die Länge des kürzesten verbessernden Pfads.
    2. Bestimme eine inklusions-maximale Menge von verbessernden Pfaden $P_1, P_2, \dots, P_i$ der Länge l.

Idee und Algorithmus

- Suche alle kürzesten verbessernden Pfade.
- Je länger diese werden, um so weniger gibt es davon.
- Alle knotendisjunkten Pfade nutzen jeweils mindestens eine Kante des aktuellen Matchings.
- Damit erhalten wir eine bessere Laufzeit.
- Der Algorithmus bestimmt in Runde i möglichst viele kürzeste verbessernden Pfade der Länge l_i.
- $l_1 < l_2 < l_3 < \dots$.

Algorithmus:

1. Gegeben $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph.
2. Setze $M = \emptyset$
3. Solange es verbessernde Pfade gibt, mache:
    1. Bestimme l als die Länge des kürzesten verbessernden Pfads.
    2. Bestimme eine inklusions-maximale Menge von verbessernden Pfaden $P_1, P_2, \dots, P_i$ der Länge l.
    3. $M = M \oplus P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \oplus \dots \oplus P_i$.

Anzahl der Schleifendurchläufe

Lemma (Pfadlänge)

Sei M' ein maximum Matching mit $s = |M'|$ und M ein nicht maximales Matching, dann gibt es einen M verbessernden Pfad der Länge höchstens

$$2 \cdot \left\lfloor \frac{|M|}{s - |M|} \right\rfloor + 1.$$

Beweis:

Anzahl der Schleifendurchläufe

Lemma (Pfadlänge)

Sei M' ein maximum Matching mit $s = |M'|$ und M ein nicht maximales Matching, dann gibt es einen M verbessernden Pfad der Länge höchstens

$$2 \cdot \left\lfloor \frac{|M|}{s - |M|} \right\rfloor + 1.$$

Beweis:

- Es gibt höchstens $s - |M|$ viele M-verbessernde Pfade.

Anzahl der Schleifendurchläufe

Lemma (Pfadlänge)

Sei M' ein maximum Matching mit $s = |M'|$ und M ein nicht maximales Matching, dann gibt es einen M verbessernden Pfad der Länge höchstens

$$2 \cdot \left\lfloor \frac{|M|}{s - |M|} \right\rfloor + 1.$$

Beweis:

- Es gibt höchstens $s - |M|$ viele M-verbessernde Pfade.
- Diese Pfade enthalten <u>zusammen</u> höchstens $|M|$ Kanten aus M.

Anzahl der Schleifendurchläufe

Lemma (Pfadlänge)

Sei M' ein maximum Matching mit $s = |M'|$ und M ein nicht maximales Matching, dann gibt es einen M verbessernden Pfad der Länge höchstens

$$2 \cdot \left\lfloor \frac{|M|}{s - |M|} \right\rfloor + 1.$$

Beweis:

- Es gibt höchstens $s - |M|$ viele M-verbessernde Pfade.
- Diese Pfade enthalten zusammen höchstens $|M|$ Kanten aus M.
- Damit gibt es einen Pfad, der höchstens $\lfloor \frac{|M|}{s-|M|} \rfloor$ Kanten aus M enthält. D.h. ein kürzester Pfad enthällt micht mehr als die Durchschnittsanzahl von Kanten aus M.

Anzahl der Schleifendurchläufe

Lemma (Pfadlänge)

Sei M' ein maximum Matching mit $s = |M'|$ und M ein nicht maximales Matching, dann gibt es einen M verbessernden Pfad der Länge höchstens

$$2 \cdot \left\lfloor \frac{|M|}{s - |M|} \right\rfloor + 1.$$

Beweis:

- Es gibt höchstens $s - |M|$ viele M-verbessernde Pfade.
- Diese Pfade enthalten <u>zusammen</u> höchstens $|M|$ Kanten aus M.
- Damit gibt es einen Pfad, der höchstens $\lfloor \frac{|M|}{s-|M|} \rfloor$ Kanten aus M enthält. D.h. ein kürzester Pfad enthällt micht mehr als die Durchschnittsanzahl von Kanten aus M.
- Dieser Pfad hat eine Länge von:

$$2 \cdot \left\lfloor \frac{|M|}{s - |M|} \right\rfloor + 1.$$

Anzahl der Schleifendurchläufe

M' **maximum Matching** $s = |M'|$ **und** $\mathbf{2} \cdot \left\lfloor \frac{|M|}{s-|M|} \right\rfloor + \mathbf{1}$

- Teile in zwei Phasen auf:

Anzahl der Schleifendurchläufe

M' **maximum Matching** $s = |M'|$ **und** $2 \cdot \left\lfloor \frac{|M|}{s-|M|} \right\rfloor + 1$

- Teile in zwei Phasen auf:
  - Phase 1 aktiv, solange $|M| \leqslant \lfloor s - \sqrt{s} \rfloor$ gilt.

Anzahl der Schleifendurchläufe

M' maximum Matching $s = |M'|$ und $2 \cdot \left\lfloor \frac{|M|}{s-|M|} \right\rfloor + 1$

- Teile in zwei Phasen auf:
  - Phase 1 aktiv, solange $|M| \leqslant \lfloor s - \sqrt{s} \rfloor$ gilt.
    - Maximale Pfadlänge dann:

$$2 \cdot \left\lfloor \frac{\lfloor s - \sqrt{s} \rfloor}{s - \lfloor s - \sqrt{s} \rfloor} \right\rfloor + 1 \leqslant 2 \cdot \frac{s - \lceil \sqrt{s} \rceil}{\lceil \sqrt{s} \rceil} + 1 \leqslant 2 \cdot \sqrt{s} + 1$$

Anzahl der Schleifendurchläufe

M' **maximum Matching** $s = |M'|$ **und** $2 \cdot \left\lfloor \frac{|M|}{s-|M|} \right\rfloor + 1$

- Teile in zwei Phasen auf:
  - Phase 1 aktiv, solange $|M| \leqslant \lfloor s - \sqrt{s} \rfloor$ gilt.
    - Maximale Pfadlänge dann:

$$2 \cdot \left\lfloor \frac{\lfloor s - \sqrt{s} \rfloor}{s - \lfloor s - \sqrt{s} \rfloor} \right\rfloor + 1 \leqslant 2 \cdot \frac{s - \lceil \sqrt{s} \rceil}{\lceil \sqrt{s} \rceil} + 1 \leqslant 2 \cdot \sqrt{s} + 1$$

    - Damit gilt in jeder Runde der ersten Phase: $l \leqslant 2 \cdot \sqrt{s} + 1$.

Anzahl der Schleifendurchläufe

M' **maximum Matching** $s = |M'|$ **und** $2 \cdot \left\lfloor \frac{|M|}{s-|M|} \right\rfloor + 1$

- Teile in zwei Phasen auf:
  - <u>Phase 1</u> aktiv, solange $|M| \leqslant \lfloor s - \sqrt{s} \rfloor$ gilt.
    - Maximale Pfadlänge dann:

$$2 \cdot \left\lfloor \frac{\lfloor s - \sqrt{s} \rfloor}{s - \lfloor s - \sqrt{s} \rfloor} \right\rfloor + 1 \leqslant 2 \cdot \frac{s - \lceil \sqrt{s} \rceil}{\lceil \sqrt{s} \rceil} + 1 \leqslant 2 \cdot \sqrt{s} + 1$$

    - Damit gilt in jeder Runde der ersten Phase: $l \leqslant 2 \cdot \sqrt{s} + 1$.
    - Da l in Zweierschritten wächst, gibt es höchsten $\sqrt{s}$ Iterationen in der ersten Phase.

Anzahl der Schleifendurchläufe

M' **maximum Matching** $s = |M'|$ **und** $2 \cdot \left\lfloor \frac{|M|}{s-|M|} \right\rfloor + 1$

- Teile in zwei Phasen auf:
  - Phase 1 aktiv, solange $|M| \leqslant \lfloor s - \sqrt{s} \rfloor$ gilt.
    - Maximale Pfadlänge dann:

$$2 \cdot \left\lfloor \frac{\lfloor s - \sqrt{s} \rfloor}{s - \lfloor s - \sqrt{s} \rfloor} \right\rfloor + 1 \leqslant 2 \cdot \frac{s - \lceil \sqrt{s} \rceil}{\lceil \sqrt{s} \rceil} + 1 \leqslant 2 \cdot \sqrt{s} + 1$$

    - Damit gilt in jeder Runde der ersten Phase: $l \leqslant 2 \cdot \sqrt{s} + 1$.
    - Da l in Zweierschritten wächst, gibt es höchsten $\sqrt{s}$ Iterationen in der ersten Phase.
  - Phase 2 aktiv, falls $|M| > \lfloor s - \sqrt{s} \rfloor$ gilt.

Anzahl der Schleifendurchläufe

M' **maximum Matching** $s = |M'|$ **und** $2 \cdot \left\lfloor \frac{|M|}{s-|M|} \right\rfloor + 1$

- Teile in zwei Phasen auf:
  - Phase 1 aktiv, solange $|M| \leqslant \lfloor s - \sqrt{s} \rfloor$ gilt.
    - Maximale Pfadlänge dann:

$$2 \cdot \left\lfloor \frac{\lfloor s - \sqrt{s} \rfloor}{s - \lfloor s - \sqrt{s} \rfloor} \right\rfloor + 1 \leqslant 2 \cdot \frac{s - \lceil \sqrt{s} \rceil}{\lceil \sqrt{s} \rceil} + 1 \leqslant 2 \cdot \sqrt{s} + 1$$

    - Damit gilt in jeder Runde der ersten Phase: $l \leqslant 2 \cdot \sqrt{s} + 1$.
    - Da l in Zweierschritten wächst, gibt es höchsten $\sqrt{s}$ Iterationen in der ersten Phase.
  - Phase 2 aktiv, falls $|M| > \lfloor s - \sqrt{s} \rfloor$ gilt.
    - Es fehlen $\sqrt{s}$ viele Kanten.

Anzahl der Schleifendurchläufe

M' **maximum Matching** $s = |M'|$ **und** $2 \cdot \left\lfloor \frac{|M|}{s-|M|} \right\rfloor + 1$

- Teile in zwei Phasen auf:
  - Phase 1 aktiv, solange $|M| \leqslant \lfloor s - \sqrt{s} \rfloor$ gilt.
    - Maximale Pfadlänge dann:

$$2 \cdot \left\lfloor \frac{\lfloor s - \sqrt{s} \rfloor}{s - \lfloor s - \sqrt{s} \rfloor} \right\rfloor + 1 \leqslant 2 \cdot \frac{s - \lceil \sqrt{s} \rceil}{\lceil \sqrt{s} \rceil} + 1 \leqslant 2 \cdot \sqrt{s} + 1$$

    - Damit gilt in jeder Runde der ersten Phase: $l \leqslant 2 \cdot \sqrt{s} + 1$.
    - Da l in Zweierschritten wächst, gibt es höchsten $\sqrt{s}$ Iterationen in der ersten Phase.
  - Phase 2 aktiv, falls $|M| > \lfloor s - \sqrt{s} \rfloor$ gilt.
    - Es fehlen $\sqrt{s}$ viele Kanten.
    - Die Phase endet nach maximal $\sqrt{s}$ Iterationen.

Laufzeit

Lemma

Die Bestimmung einer inklusions-maximalen Menge von kürzesten verbessernden Pfaden geht in Zeit $O(m)$

Beweis

Laufzeit

Lemma

Die Bestimmung einer inklusions-maximalen Menge von kürzesten verbessernden Pfaden geht in Zeit $O(m)$

Beweis

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph und M Matching.

Laufzeit

Lemma

Die Bestimmung einer inklusions-maximalen Menge von kürzesten verbessernden Pfaden geht in Zeit $O(m)$

Beweis

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph und M Matching.
- Erzeuge $G' = (V \cup W, E' \cup E'')$ mit:
  $E' = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E \setminus M \wedge v \in V \wedge w \in W\}$ und
  $E'' = \{(w, v) \mid \{v, w\} \in M \wedge v \in V \wedge w \in W\}$.

Laufzeit

Lemma

Die Bestimmung einer inklusions-maximalen Menge von kürzesten verbessernden Pfaden geht in Zeit $O(m)$

Beweis (Idee wird auch beim gewichteten Matching benutzt.)

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph und M Matching.
- Erzeuge $G' = (V \cup W, E' \cup E'')$ mit:
  $E' = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E \setminus M \wedge v \in V \wedge w \in W\}$ und
  $E'' = \{(w, v) \mid \{v, w\} \in M \wedge v \in V \wedge w \in W\}$.
- Damit wird die Suche nach einem verbessernden Pfad eine Suche in G': Von den freien Knoten in V zu den freien Knoten in W.

Laufzeit

Lemma

Die Bestimmung einer inklusions-maximalen Menge von kürzesten verbessernden Pfaden geht in Zeit $O(m)$

Beweis

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph und M Matching.
- Erzeuge $G' = (V \cup W, E' \cup E'')$ mit:
  $E' = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E \setminus M \wedge v \in V \wedge w \in W\}$ und
  $E'' = \{(w, v) \mid \{v, w\} \in M \wedge v \in V \wedge w \in W\}$.
- Damit wird die Suche nach einem verbessernden Pfad eine Suche in G': Von den freien Knoten in V zu den freien Knoten in W.
- Füge Quelle und Senke hinzu, damit entsteht G''.

Laufzeit

Lemma

Die Bestimmung einer inklusions-maximalen Menge von kürzesten verbessernden Pfaden geht in Zeit $O(m)$

Beweis

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph und M Matching.
- Erzeuge $G' = (V \cup W, E' \cup E'')$ mit:
  $E' = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E \setminus M \wedge v \in V \wedge w \in W\}$ und
  $E'' = \{(w, v) \mid \{v, w\} \in M \wedge v \in V \wedge w \in W\}$.
- Damit wird die Suche nach einem verbessernden Pfad eine Suche in G': Von den freien Knoten in V zu den freien Knoten in W.
- Füge Quelle und Senke hinzu, damit entsteht G''.
- Bestimme durch Breitensuche alle Kanten, die nicht auf einem kürzesten Pfad liegen.

Laufzeit

Lemma

Die Bestimmung einer inklusions-maximalen Menge von kürzesten verbessernden Pfaden geht in Zeit $O(m)$

Beweis

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph und M Matching.
- Erzeuge $G' = (V \cup W, E' \cup E'')$ mit:
  $E' = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E \setminus M \wedge v \in V \wedge w \in W\}$ und
  $E'' = \{(w, v) \mid \{v, w\} \in M \wedge v \in V \wedge w \in W\}$.
- Damit wird die Suche nach einem verbessernden Pfad eine Suche in G': Von den freien Knoten in V zu den freien Knoten in W.
- Füge Quelle und Senke hinzu, damit entsteht G''.
- Bestimme durch Breitensuche alle Kanten, die nicht auf einem kürzesten Pfad liegen.
- Damit entsteht ein Schichtennetzwerk G'''.

Laufzeit

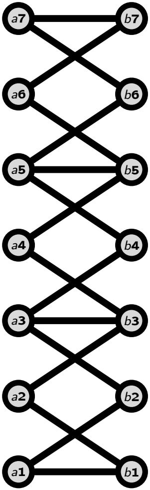
Lemma

Die Bestimmung einer inklusions-maximalen Menge von kürzesten verbessernden Pfaden geht in Zeit $O(m)$

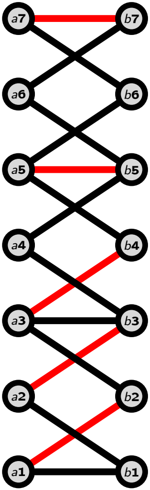
Beweis

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph und M Matching.
- Erzeuge $G' = (V \cup W, E' \cup E'')$ mit:
  $E' = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E \setminus M \wedge v \in V \wedge w \in W\}$ und
  $E'' = \{(w, v) \mid \{v, w\} \in M \wedge v \in V \wedge w \in W\}$.
- Damit wird die Suche nach einem verbessernden Pfad eine Suche in G': Von den freien Knoten in V zu den freien Knoten in W.
- Füge Quelle und Senke hinzu, damit entsteht G''.
- Bestimme durch Breitensuche alle Kanten, die nicht auf einem kürzesten Pfad liegen.
- Damit entsteht ein Schichtennetzwerk G'''.
- Damit ergibt sich eine Laufzeit von $O(m)$ durch Tiefensuche auf G'''.

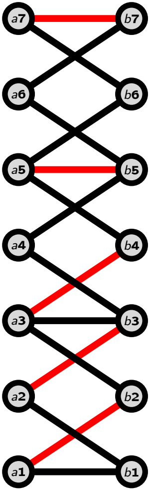
Beispiel (Bestimme G')

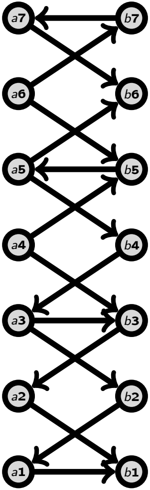


Beispiel (Bestimme G')

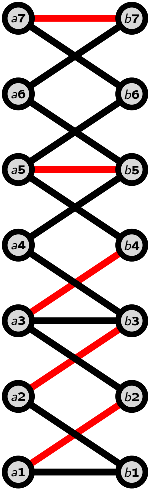


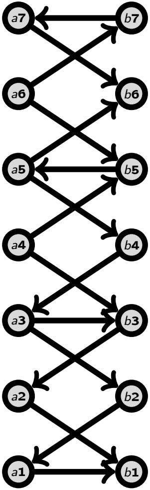
Beispiel (Bestimme G')



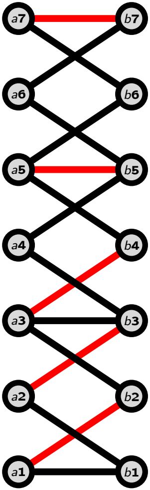


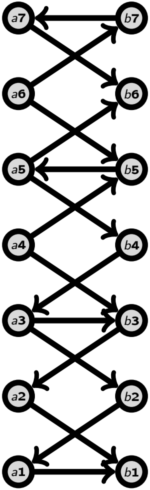
Beispiel (Bestimme G')



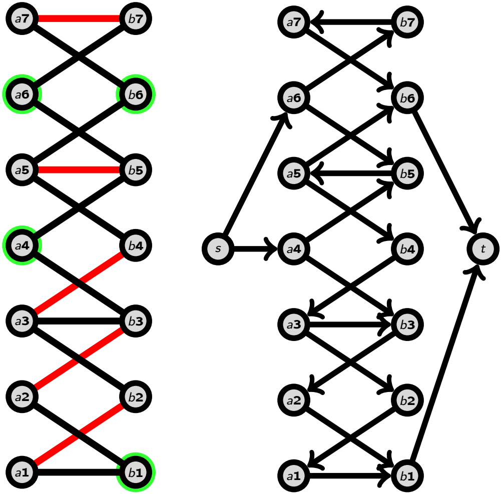


Beispiel (Bestimme G')

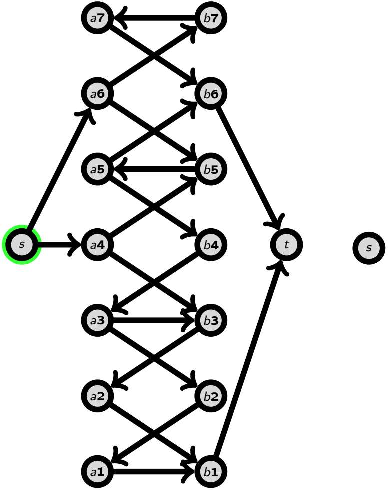




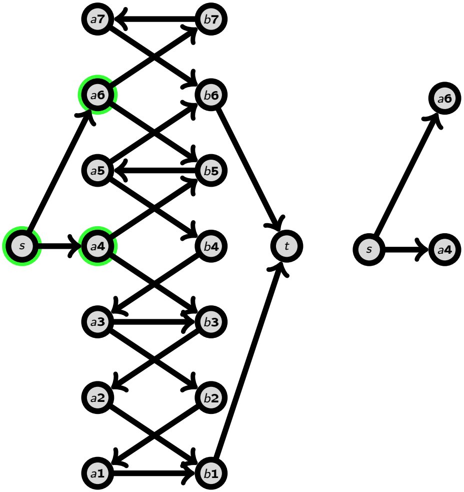
Beispiel (Bestimme G')



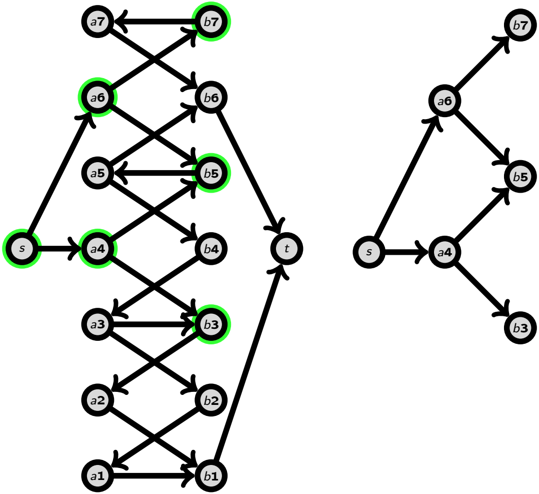
Beispiel (Breitensuche)



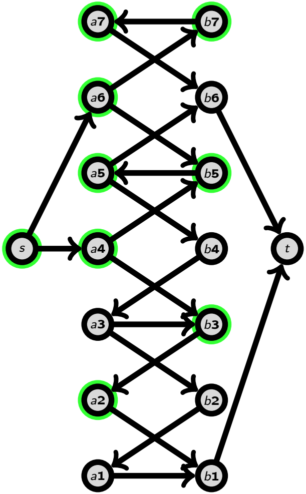
Beispiel (Breitensuche)

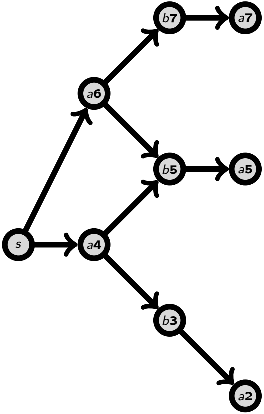


Beispiel (Breitensuche)

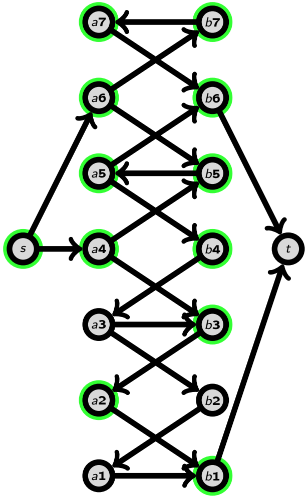


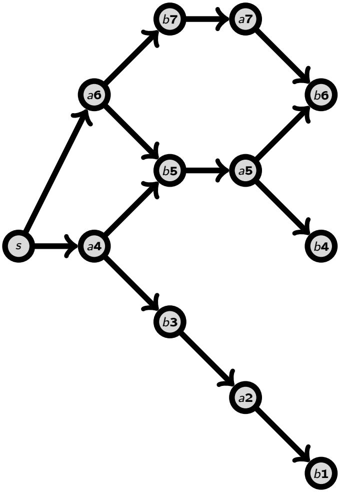
Beispiel (Breitensuche)



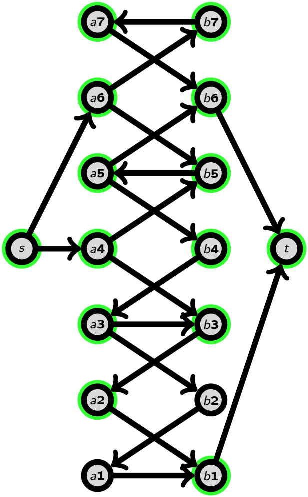


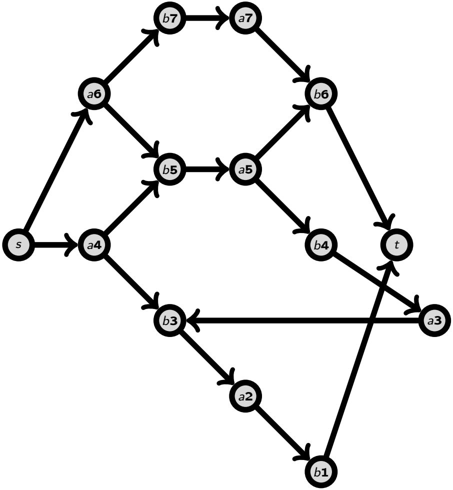
Beispiel (Breitensuche)



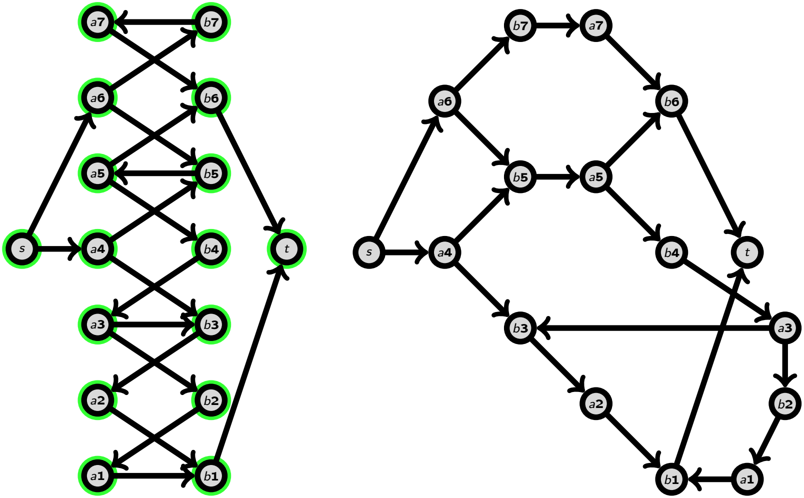


Beispiel (Breitensuche)

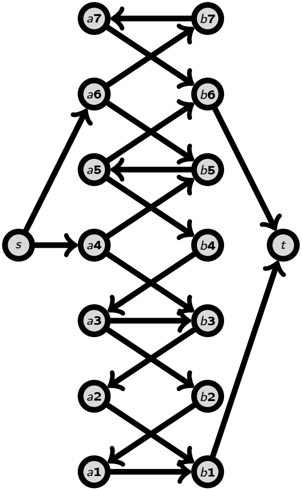


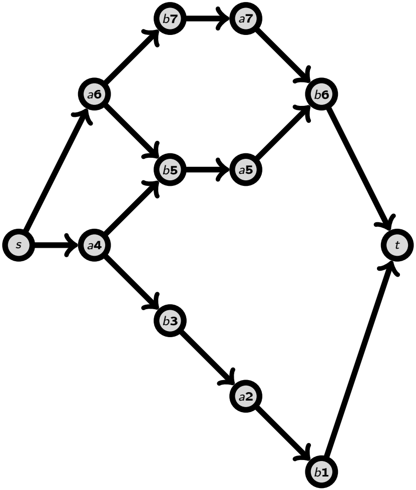


Beispiel (Breitensuche)

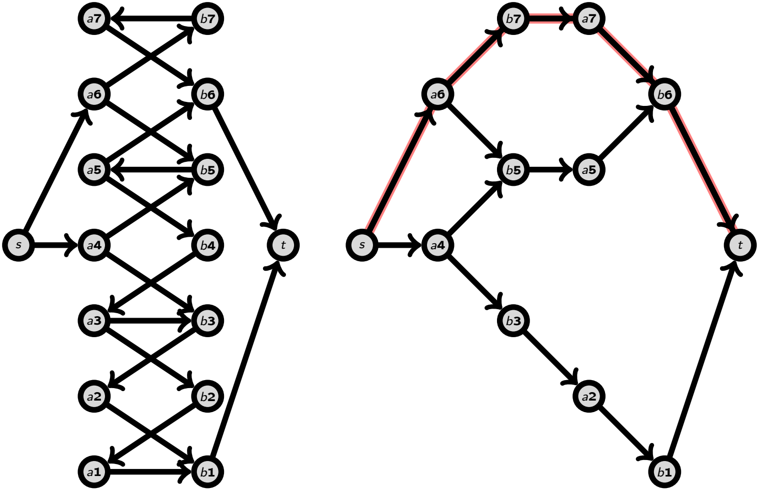


Beispiel (Tiefensuche)

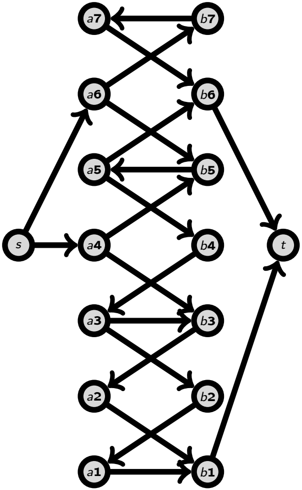


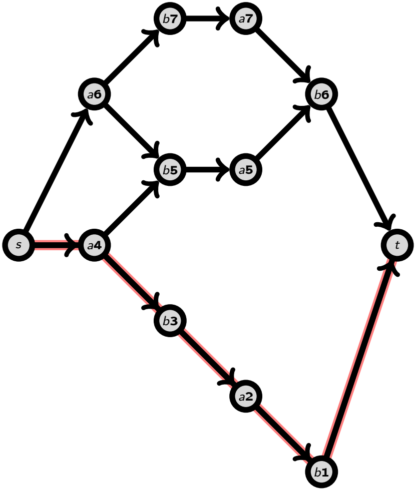


Beispiel (Tiefensuche)

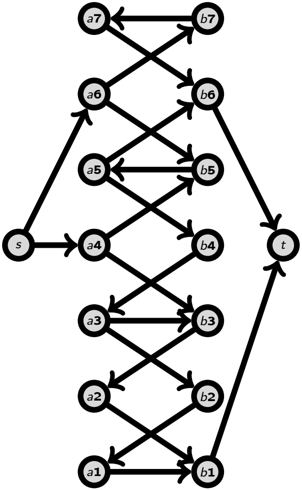


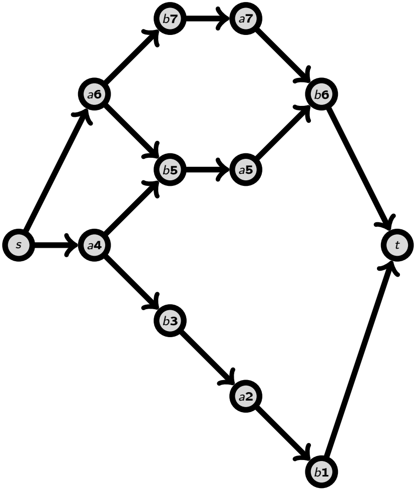
Beispiel (Tiefensuche)



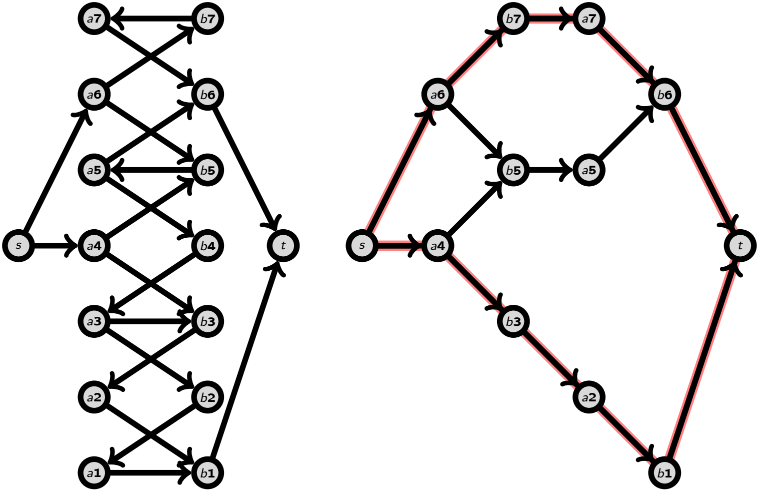


Beispiel (Verbessernde Pfade)

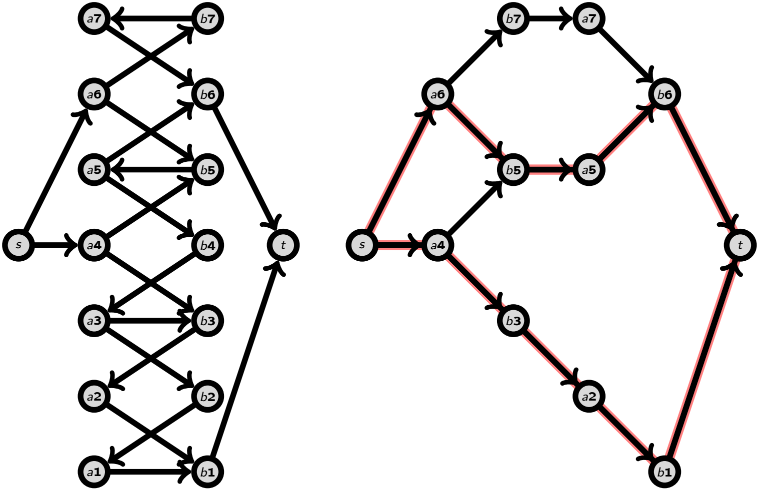




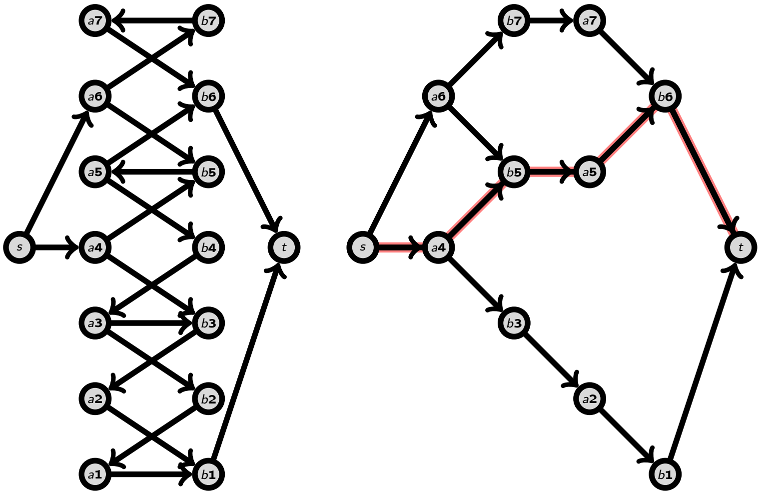
Beispiel (Verbessernde Pfade)



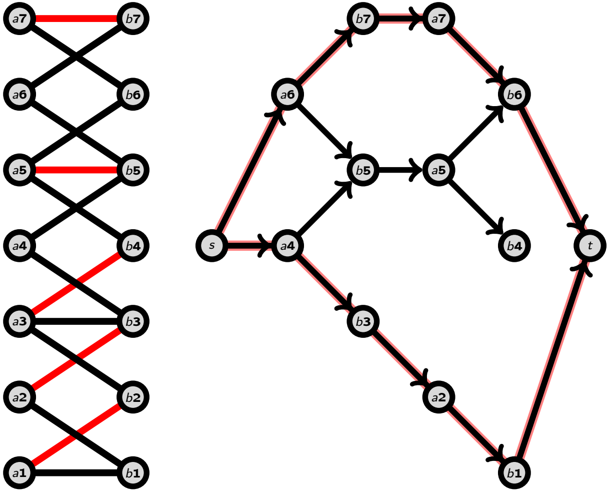
Beispiel (Verbessernde Pfade)



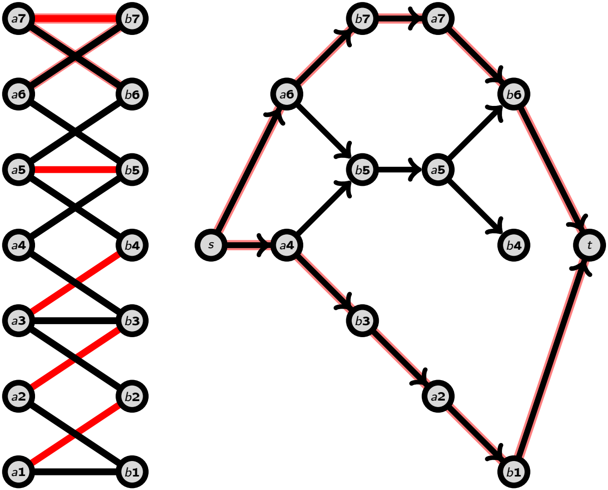
Beispiel (Verbessernde Pfade)



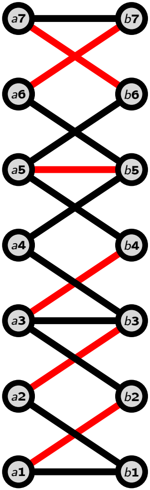
Beispiel

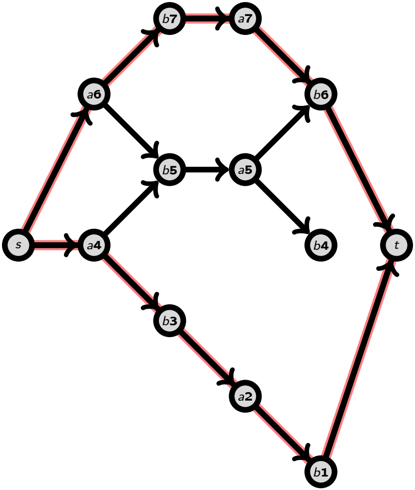


Beispiel

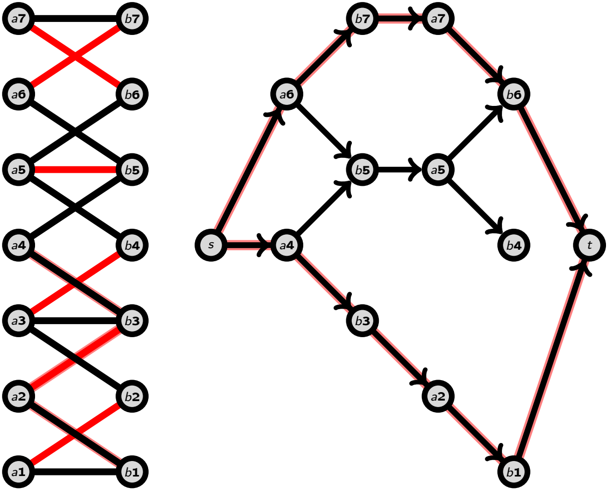

a7
b7
a6
b6
a5
b5
a4
b4
a3
b3
a2
b2
a1
b1
s
a4
a6
b7
a7
b6
b5
a5
b4
t
b3
a2
b1

Beispiel

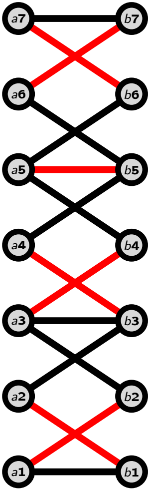

a7
b7
a6
b6
a5
b5
a4
b4
a3
b3
a2
b2
a1
b1

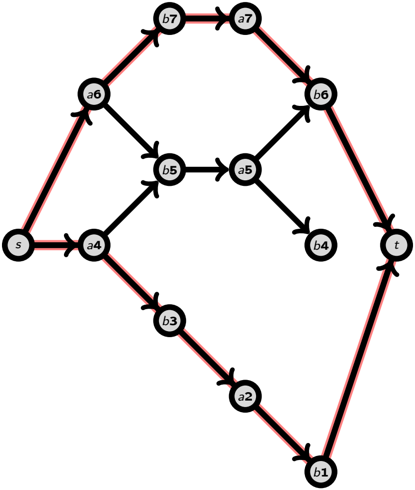

s
a4
a6
b7
a7
b6
b5
a5
b4
t
b3
a2
b1

Beispiel



Beispiel


a7
b7
a6
b6
a5
b5
a4
b4
a3
b3
a2
b2
a1
b1


s
a4
a6
b7
a7
b6
b5
a5
b4
t
b3
a2
b1

Laufzeit

Theorem

Das Maximum Matchingproblem auf bipartiten Graphen kann in Zeit $O(m\sqrt{n})$ gelöst werden.

Matching mit Kosten

$g(E) = \sum_{e \in E} g(e)$

Definition (maximum Matching)

Sei $G = (V, E)$ ungerichteter bipatiter Graph mit Kantenkosten $g : E \mapsto \mathbb{N}$.
$M \subseteq E$ ist gewichtsmaximales Matching:

$$\forall M' \subset E : M' \text{ ist Matching.} : g(M') \leqslant g(M)$$

Matching mit Kosten

$g(E) = \sum_{e \in E} g(e)$

Definition (maximum Matching)

Sei $G = (V, E)$ ungerichteter bipatiter Graph mit Kantenkosten $g : E \mapsto \mathbb{N}$.
$M \subseteq E$ ist gewichtsmaximales Matching:

$$\forall M' \subset E : M' \text{ ist Matching.} : g(M') \leqslant g(M)$$

- Idee suche erweiternden alternierenden Weg mit maximalen Kosten.

Matching mit Kosten

$g(E) = \sum_{e \in E} g(e)$

Definition (maximum Matching)

Sei $G = (V, E)$ ungerichteter bipatiter Graph mit Kantenkosten $g : E \mapsto \mathbb{N}$.
$M \subseteq E$ ist gewichtsmaximales Matching:

$$\forall M' \subset E : M' \text{ ist Matching.} : g(M') \leqslant g(M)$$

- Idee suche erweiternden alternierenden Weg mit maximalen Kosten.
- Verwende Idee von

Matching mit Kosten

$g(E) = \sum_{e \in E} g(e)$

Definition (maximum Matching)

Sei $G = (V, E)$ ungerichteter bipatiter Graph mit Kantenkosten $g : E \mapsto \mathbb{N}$.
$M \subseteq E$ ist gewichtsmaximales Matching:

$$\forall M' \subset E : M' \text{ ist Matching.} : g(M') \leqslant g(M)$$

- Idee suche erweiternden alternierenden Weg mit maximalen Kosten.
- Verwende Idee von
- Hier werden nun Wege maximalen Gewichts gesucht.

Matching mit Kosten

$g(E) = \sum_{e \in E} g(e)$

Definition (maximum Matching)

Sei $G = (V, E)$ ungerichteter bipatiter Graph mit Kantenkosten $g : E \mapsto \mathbb{N}$.
$M \subseteq E$ ist gewichtsmaximales Matching:

$$\forall M' \subset E : M' \text{ ist Matching.} : g(M') \leqslant g(M)$$

- Idee suche erweiternden alternierenden Weg mit maximalen Kosten.
- Verwende Idee von
- Hier werden nun Wege maximalen Gewichts gesucht.
  - Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph und M Matching.

Matching mit Kosten

$g(E) = \sum_{e \in E} g(e)$

Definition (maximum Matching)

Sei $G = (V, E)$ ungerichteter bipatiter Graph mit Kantenkosten $g : E \mapsto \mathbb{N}$.
$M \subseteq E$ ist gewichtsmaximales Matching:

$$\forall M' \subset E : M' \text{ ist Matching.} : g(M') \leqslant g(M)$$

- Idee suche erweiternden alternierenden Weg mit maximalen Kosten.
- Verwende Idee von
- Hier werden nun Wege maximalen Gewichts gesucht.
  - Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph und M Matching.
  - Erzeuge $G' = (V \cup W, E' \cup E'')$ mit:
    $E' = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E \setminus M \wedge v \in V \wedge w \in W\}$ und
    $E'' = \{(w, v) \mid \{v, w\} \in M \wedge v \in V \wedge w \in W\}$ und
    $\forall e \in E' : g_M(e) = g(e)$ und
    $\forall e \in E'' : g_M(e) = -g(e)$.

Matching mit Kosten

$g(E) = \sum_{e \in E} g(e)$

Definition (maximum Matching)

Sei $G = (V, E)$ ungerichteter bipatiter Graph mit Kantenkosten $g : E \mapsto \mathbb{N}$.
$M \subseteq E$ ist gewichtsmaximales Matching:

$$\forall M' \subset E : M' \text{ ist Matching.} : g(M') \leqslant g(M)$$

- Idee suche erweiternden alternierenden Weg mit maximalen Kosten.
- Verwende Idee von
- Hier werden nun Wege maximalen Gewichts gesucht.
  - Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph und M Matching.
  - Erzeuge $G' = (V \cup W, E' \cup E'')$ mit:
    $E' = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E \setminus M \wedge v \in V \wedge w \in W\}$ und
    $E'' = \{(w, v) \mid \{v, w\} \in M \wedge v \in V \wedge w \in W\}$ und
    $\forall e \in E' : g_M(e) = g(e)$ und
    $\forall e \in E'' : g_M(e) = -g(e)$.
  - Füge Quelle und Senke hinzu, damit entsteht G'.

Idee

$g(E) = \sum_{e \in E} g(e)$

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph, $g : E \mapsto \mathbb{N}$ und M Matching.

Idee

$g(E) = \sum_{e \in E} g(e)$

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph, $g : E \mapsto \mathbb{N}$ und M Matching.
- Erzeuge $G' = (V \cup W, E' \cup E'')$ mit:
  $E' = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E \setminus M \wedge v \in V \wedge w \in W\}$ und
  $E'' = \{(w, v) \mid \{v, w\} \in M \wedge v \in V \wedge w \in W\}$ und
  $\forall e \in E' : g_M(e) = g(e)$ und $\forall e \in E'' : g_M(e) = -g(e)$.

Idee

$g(E) = \sum_{e \in E} g(e)$

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph, $g : E \mapsto \mathbb{N}$ und M Matching.
- Erzeuge $G' = (V \cup W, E' \cup E'')$ mit:
  $E' = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E \setminus M \wedge v \in V \wedge w \in W\}$ und
  $E'' = \{(w, v) \mid \{v, w\} \in M \wedge v \in V \wedge w \in W\}$ und
  $\forall e \in E' : g_M(e) = g(e)$ und $\forall e \in E'' : g_M(e) = -g(e)$.
- Damit wird ein ungerichteter M-verbessender Pfad P bestimmt.

Idee

$g(E) = \sum_{e \in E} g(e)$

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph, $g : E \mapsto \mathbb{N}$ und M Matching.
- Erzeuge $G' = (V \cup W, E' \cup E'')$ mit:
  $E' = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E \setminus M \wedge v \in V \wedge w \in W\}$ und
  $E'' = \{(w, v) \mid \{v, w\} \in M \wedge v \in V \wedge w \in W\}$ und
  $\forall e \in E' : g_M(e) = g(e)$ und $\forall e \in E'' : g_M(e) = -g(e)$.
- Damit wird ein ungerichteter M-verbessender Pfad P bestimmt.
- Gewicht von P: $g_M(P) = \sum_{e \in P \setminus M} g(e) - \sum_{e \in P \cap M} g(e)$.

Idee

$g(E) = \sum_{e \in E} g(e)$

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph, $g : E \mapsto \mathbb{N}$ und M Matching.
- Erzeuge $G' = (V \cup W, E' \cup E'')$ mit:
  $E' = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E \setminus M \wedge v \in V \wedge w \in W\}$ und
  $E'' = \{(w, v) \mid \{v, w\} \in M \wedge v \in V \wedge w \in W\}$ und
  $\forall e \in E' : g_M(e) = g(e)$ und $\forall e \in E'' : g_M(e) = -g(e)$.
- Damit wird ein ungerichteter M-verbessender Pfad P bestimmt.
- Gewicht von P: $g_M(P) = \sum_{e \in P \setminus M} g(e) - \sum_{e \in P \cap M} g(e)$.
- Damit haben wir:

$$g(M \oplus P) = \sum_{e \in M} g(e) + \sum_{e \in P \setminus M} g(e) - \sum_{e \in P \cap M} g(e) = g(M) + g_M(P)$$

Idee

$g(E) = \sum_{e \in E} g(e)$

- Sei $G = (V, W, E)$ bipartiter Graph, $g : E \mapsto \mathbb{N}$ und M Matching.
- Erzeuge $G' = (V \cup W, E' \cup E'')$ mit:
  $E' = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E \setminus M \wedge v \in V \wedge w \in W\}$ und
  $E'' = \{(w, v) \mid \{v, w\} \in M \wedge v \in V \wedge w \in W\}$ und
  $\forall e \in E' : g_M(e) = g(e)$ und $\forall e \in E'' : g_M(e) = -g(e)$.
- Damit wird ein ungerichteter M-verbessender Pfad P bestimmt.
- Gewicht von P: $g_M(P) = \sum_{e \in P \setminus M} g(e) - \sum_{e \in P \cap M} g(e)$.
- Damit haben wir:

$$g(M \oplus P) = \sum_{e \in M} g(e) + \sum_{e \in P \setminus M} g(e) - \sum_{e \in P \cap M} g(e) = g(M) + g_M(P)$$

- Damit ergibt sich der folgende Algorithmus:

Algorithmus

$g(E) = \sum_{e \in E} g(e)$

1. Gegeben $G = (V, W, E)$, $g :\mapsto \mathbb{N}$

Algorithmus

$g(E) = \sum_{e \in E} g(e)$

1. Gegeben $G = (V, W, E)$, $g :\mapsto \mathbb{N}$
2. $M = \emptyset$ und $M_{opt} = \emptyset$

Algorithmus

$g(E) = \sum_{e \in E} g(e)$

1. Gegeben $G = (V, W, E)$, $g :\mapsto \mathbb{N}$
2. $M = \emptyset$ und $M_{opt} = \emptyset$
3. Solange es verbessernden Pfad P bezüglich M gibt, mache:

Algorithmus

$g(E) = \sum_{e \in E} g(e)$

1. Gegeben $G = (V, W, E)$, $g :\mapsto \mathbb{N}$
2. $M = \emptyset$ und $M_{opt} = \emptyset$
3. Solange es verbessernden Pfad P bezüglich M gibt, mache:
   1. $\forall e \in E' : g_M(e) = g(e)$ und $\forall e \in E'' : g_M(e) = -g(e)$

Algorithmus

$g(E) = \sum_{e \in E} g(e)$

1. Gegeben $G = (V, W, E)$, $g :\mapsto \mathbb{N}$
2. $M = \emptyset$ und $M_{opt} = \emptyset$
3. Solange es verbessernden Pfad P bezüglich M gibt, mache:
    1. $\forall e \in E' : g_M(e) = g(e)$ und $\forall e \in E'' : g_M(e) = -g(e)$
    2. Bestimme verbessernden Pfad P mit maximalen Gewicht bezüglich M und $g_M(e)$:

Algorithmus

$g(E) = \sum_{e \in E} g(e)$

1. Gegeben $G = (V, W, E)$, $g :\mapsto \mathbb{N}$
2. $M = \emptyset$ und $M_{opt} = \emptyset$
3. Solange es verbessernden Pfad P bezüglich M gibt, mache:
   1. $\forall e \in E' : g_M(e) = g(e)$ und $\forall e \in E'' : g_M(e) = -g(e)$
   2. Bestimme verbessernden Pfad P mit maximalen Gewicht bezüglich M und $g_M(e)$:
   3. Setze $M = M \oplus E(P)$

Algorithmus

$g(E) = \sum_{e \in E} g(e)$

1. Gegeben $G = (V, W, E)$, $g :\mapsto \mathbb{N}$
2. $M = \emptyset$ und $M_{opt} = \emptyset$
3. Solange es verbessernden Pfad P bezüglich M gibt, mache:
   1. $\forall e \in E' : g_M(e) = g(e)$ und $\forall e \in E'' : g_M(e) = -g(e)$
   2. Bestimme verbessernden Pfad P mit maximalen Gewicht bezüglich M und $g_M(e)$:
   3. Setze $M = M \oplus E(P)$
   4. Falls $g(M) > g(M_{opt})$, setze $M_{opt} = M$.

Algorithmus

$g(E) = \sum_{e \in E} g(e)$

1. Gegeben $G = (V, W, E)$, $g :\mapsto \mathbb{N}$
2. $M = \emptyset$ und $M_{opt} = \emptyset$
3. Solange es verbessernden Pfad P bezüglich M gibt, mache:
   1. $\forall e \in E' : g_M(e) = g(e)$ und $\forall e \in E'' : g_M(e) = -g(e)$
   2. Bestimme verbessernden Pfad P mit maximalen Gewicht bezüglich M und $g_M(e)$:
   3. Setze $M = M \oplus E(P)$
   4. Falls $g(M) > g(M_{opt})$, setze $M_{opt} = M$.
4. Ausgabe: M_{opt}.

Algorithmus

$g(E) = \sum_{e \in E} g(e)$

1. Gegeben $G = (V, W, E)$, $g :\mapsto \mathbb{N}$
2. $M = \emptyset$ und $M_{opt} = \emptyset$
3. Solange es verbessernden Pfad P bezüglich M gibt, mache:
   1. $\forall e \in E' : g_M(e) = g(e)$ und $\forall e \in E'' : g_M(e) = -g(e)$
   2. Bestimme verbessernden Pfad P mit maximalen Gewicht bezüglich M und $g_M(e)$:
   3. Setze $M = M \oplus E(P)$
   4. Falls $g(M) > g(M_{opt})$, setze $M_{opt} = M$.
4. Ausgabe: M_{opt}.

Algorithmus

$g(E) = \sum_{e \in E} g(e)$

1. Gegeben $G = (V, W, E)$, $g :\mapsto \mathbb{N}$
2. $M = \emptyset$ und $M_{opt} = \emptyset$
3. Solange es verbessernden Pfad P bezüglich M gibt, mache:
   1. $\forall e \in E' : g_M(e) = g(e)$ und $\forall e \in E'' : g_M(e) = -g(e)$
   2. Bestimme verbessernden Pfad P mit maximalen Gewicht bezüglich M und $g_M(e)$:
   3. Setze $M = M \oplus E(P)$
   4. Falls $g(M) > g(M_{opt})$, setze $M_{opt} = M$.
4. Ausgabe: M_{opt}.

Theorem

Der obige Algorithmus bestimmt gewichtsmaximales Matching und hat eine Laufzeit von $O(n^2 \cdot m)$.

Beweis

Lemma

Das im i-ten Schritt bestimmte Matching M_i ist das gewichtsmaximale Matching mit Kardinalität i.

Beweis per Induktion:

Beweis

Lemma

Das im i-ten Schritt bestimmte Matching M_i ist das gewichtsmaximale Matching mit Kardinalität i.

Beweis per Induktion:

Beweis

Lemma

Das im i-ten Schritt bestimmte Matching M_i ist das gewichtsmaximale Matching mit Kardinalität i.

Beweis per Induktion:

- Induktionsanfang $i = 0$ ist klar ($M_0 = \emptyset$), Induktionsschritt $i \to i + 1$ folgt.

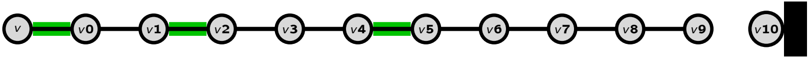
Beweis

Lemma

Das im i-ten Schritt bestimmte Matching M_i ist das gewichtsmaximale Matching mit Kardinalität i.

Beweis per Induktion:

- Induktionsanfang $i = 0$ ist klar ($M_0 = \emptyset$), Induktionsschritt $i \to i + 1$ folgt.
- Seien M_i die Machtings, die im i-ten Schritt bestimmt wurden.



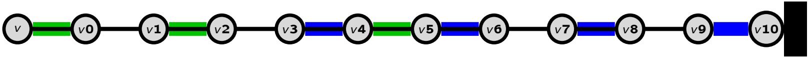
Beweis

Lemma

Das im i-ten Schritt bestimmte Matching M_i ist das gewichtsmaximale Matching mit Kardinalität i.

Beweis per Induktion:

- Induktionsanfang $i = 0$ ist klar ($M_0 = \emptyset$), Induktionsschritt $i \to i + 1$ folgt.
- Seien M_i die Machtings, die im i-ten Schritt bestimmt wurden.



- Sei M' ein Matching mit $|M'| = i + 1$ und maximalem Gewicht.

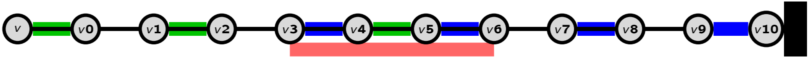
Beweis

Lemma

Das im i-ten Schritt bestimmte Matching M_i ist das gewichtsmaximale Matching mit Kardinalität i.

Beweis per Induktion:

- Induktionsanfang $i = 0$ ist klar ($M_0 = \emptyset$), Induktionsschritt $i \to i+1$ folgt.
- Seien M_i die Machtings, die im i-ten Schritt bestimmt wurden.



- Sei M' ein Matching mit $|M'| = i+1$ und maximalem Gewicht.
- Sei P ein verbessernde Pfad in $M_i \oplus M'$.

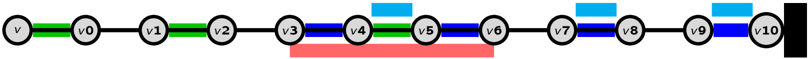
Beweis

Lemma

Das im i-ten Schritt bestimmte Matching M_i ist das gewichtsmaximale Matching mit Kardinalität i.

Beweis per Induktion:

- Induktionsanfang $i = 0$ ist klar ($M_0 = \emptyset$), Induktionsschritt $i \to i + 1$ folgt.
- Seien M_i die Machtings, die im i-ten Schritt bestimmt wurden.



- Sei M' ein Matching mit $|M'| = i + 1$ und maximalem Gewicht.
- Sei P ein verbessernde Pfad in $M_i \oplus M'$.
- Betrachte $M = M' \oplus P$, es gilt $|M| = i$.

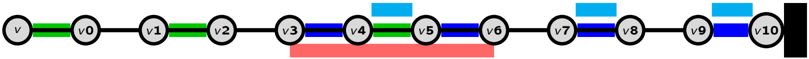
Beweis

Lemma

Das im i-ten Schritt bestimmte Matching M_i ist das gewichtsmaximale Matching mit Kardinalität i.

Beweis per Induktion:

- Induktionsanfang $i = 0$ ist klar ($M_0 = \emptyset$), Induktionsschritt $i \to i + 1$ folgt.
- Seien M_i die Machtings, die im i-ten Schritt bestimmt wurden.



- Sei M' ein Matching mit $|M'| = i + 1$ und maximalem Gewicht.
- Sei P ein verbessernde Pfad in $M_i \oplus M'$.
- Betrachte $M = M' \oplus P$, es gilt $|M| = i$.
- Es gilt damit: $P \cap M = P \setminus M' = P \cap M_i$.

Beweis

Lemma

Das im i-ten Schritt bestimmte Matching M_i ist das gewichtsmaximale Matching mit Kardinalität i.

Beweis per Induktion:

Beweis

Lemma

Das im i-ten Schritt bestimmte Matching M_i ist das gewichtsmaximale Matching mit Kardinalität i.

Beweis per Induktion:

- Induktionsanfang $i = 0$ ist klar ($M_0 = \emptyset$), Induktionsschritt $i \to i + 1$ folgt.

Beweis

Lemma

Das im i-ten Schritt bestimmte Matching M_i ist das gewichtsmaximale Matching mit Kardinalität i.

Beweis per Induktion:

- Induktionsanfang $i = 0$ ist klar ($M_0 = \emptyset$), Induktionsschritt $i \to i + 1$ folgt.
- Seien M_i die Machtings, die im i-ten Schritt bestimmt wurden.

Beweis

Lemma

Das im i-ten Schritt bestimmte Matching M_i ist das gewichtsmaximale Matching mit Kardinalität i.

Beweis per Induktion:

- Induktionsanfang $i = 0$ ist klar ($M_0 = \emptyset$), Induktionsschritt $i \to i + 1$ folgt.
- Seien M_i die Machtings, die im i-ten Schritt bestimmt wurden.
- Sei M' ein Matching mit $|M'| = i + 1$ und maximalem Gewicht.

Beweis

Lemma

Das im i-ten Schritt bestimmte Matching M_i ist das gewichtsmaximale Matching mit Kardinalität i.

Beweis per Induktion:

- Induktionsanfang $i = 0$ ist klar ($M_0 = \emptyset$), Induktionsschritt $i \to i + 1$ folgt.
- Seien M_i die Machtings, die im i-ten Schritt bestimmt wurden.
- Sei M' ein Matching mit $|M'| = i + 1$ und maximalem Gewicht.
- Sei P ein verbessernde Pfad in $M_i \oplus M'$.

Beweis

Lemma

Das im i-ten Schritt bestimmte Matching M_i ist das gewichtsmaximale Matching mit Kardinalität i.

Beweis per Induktion:

- Induktionsanfang $i = 0$ ist klar ($M_0 = \emptyset$), Induktionsschritt $i \rightarrow i + 1$ folgt.
- Seien M_i die Machtings, die im i-ten Schritt bestimmt wurden.
- Sei M' ein Matching mit $|M'| = i + 1$ und maximalem Gewicht.
- Sei P ein verbessernde Pfad in $M_i \oplus M'$.
- Betrachte $M = M' \oplus P$, es gilt $|M| = i$.

Beweis

Lemma

Das im i-ten Schritt bestimmte Matching M_i ist das gewichtsmaximale Matching mit Kardinalität i.

Beweis per Induktion:

- Induktionsanfang $i = 0$ ist klar ($M_0 = \emptyset$), Induktionsschritt $i \to i + 1$ folgt.
- Seien M_i die Machtings, die im i-ten Schritt bestimmt wurden.
- Sei M' ein Matching mit $|M'| = i + 1$ und maximalem Gewicht.
- Sei P ein verbessernde Pfad in $M_i \oplus M'$.
- Betrachte $M = M' \oplus P$, es gilt $|M| = i$.
- Es gilt damit: $P \cap M = P \setminus M' = P \cap M_i$.

Beweis

Lemma

Das im i-ten Schritt bestimmte Matching M_i ist das gewichtsmaximale Matching mit Kardinalität i.

Beweis per Induktion:

- Induktionsanfang $i = 0$ ist klar ($M_0 = \emptyset$), Induktionsschritt $i \to i + 1$ folgt.
- Seien M_i die Machtings, die im i-ten Schritt bestimmt wurden.
- Sei M' ein Matching mit $|M'| = i + 1$ und maximalem Gewicht.
- Sei P ein verbessernde Pfad in $M_i \oplus M'$.
- Betrachte $M = M' \oplus P$, es gilt $|M| = i$.
- Es gilt damit: $P \cap M = P \setminus M' = P \cap M_i$.
- Per Induktion gilt: $g(M_i) \geqslant g(M) = g(M') - g_M(P)$.

Beweis

Lemma

Das im i-ten Schritt bestimmte Matching M_i ist das gewichtsmaximale Matching mit Kardinalität i.

Beweis per Induktion:

- Induktionsanfang $i = 0$ ist klar ($M_0 = \emptyset$), Induktionsschritt $i \to i + 1$ folgt.
- Seien M_i die Machtings, die im i-ten Schritt bestimmt wurden.
- Sei M' ein Matching mit $|M'| = i + 1$ und maximalem Gewicht.
- Sei P ein verbessernde Pfad in $M_i \oplus M'$.
- Betrachte $M = M' \oplus P$, es gilt $|M| = i$.
- Es gilt damit: $P \cap M = P \setminus M' = P \cap M_i$.
- Per Induktion gilt: $g(M_i) \geqslant g(M) = g(M') - g_M(P)$.
- Und wir erhalten $g_M(P) = g_{M_i}(P) \leqslant g_{M_i}(P')$,
  wobei P' der Pfad ist, den der Algorithmus bestimmte.

Beweis

Lemma

Das im i-ten Schritt bestimmte Matching M_i ist das gewichtsmaximale Matching mit Kardinalität i.

Beweis per Induktion:

- Induktionsanfang $i = 0$ ist klar ($M_0 = \emptyset$), Induktionsschritt $i \to i + 1$ folgt.
- Seien M_i die Machtings, die im i-ten Schritt bestimmt wurden.
- Sei M' ein Matching mit $|M'| = i + 1$ und maximalem Gewicht.
- Sei P ein verbessernde Pfad in $M_i \oplus M'$.
- Betrachte $M = M' \oplus P$, es gilt $|M| = i$.
- Es gilt damit: $P \cap M = P \setminus M' = P \cap M_i$.
- Per Induktion gilt: $g(M_i) \geqslant g(M) = g(M') - g_M(P)$.
- Und wir erhalten $g_M(P) = g_{M_i}(P) \leqslant g_{M_i}(P')$,
  wobei P' der Pfad ist, den der Algorithmus bestimmte.
- Damit: $g(M') = g(M) + g_M(P) \leqslant g(M_i) + g_{M_i}(P') = g(M_{i+1})$.

Laufzeit

- Der Algorithmus bestimmt $\lfloor n/2 \rfloor$ mal einen verbessernden kostenmaximalen Weg.

Laufzeit

- Der Algorithmus bestimmt $\lfloor n/2 \rfloor$ mal einen verbessernden kostenmaximalen Weg.
- Wir setzen $l(e) = -g_M(e)$ für alle Kanten, damit haben wir:

Laufzeit

- Der Algorithmus bestimmt $\lfloor n/2 \rfloor$ mal einen verbessernden kostenmaximalen Weg.
- Wir setzen $l(e) = -g_M(e)$ für alle Kanten, damit haben wir:
- Der Algorithmus bestimmt $\lfloor n/2 \rfloor$ mal einen kürzesten Weg.

Laufzeit

- Der Algorithmus bestimmt $\lfloor n/2 \rfloor$ mal einen verbessernden kostenmaximalen Weg.
- Wir setzen $l(e) = -g_M(e)$ für alle Kanten, damit haben wir:
- Der Algorithmus bestimmt $\lfloor n/2 \rfloor$ mal einen kürzesten Weg.
- Dabei treten auch negative Gewichte auf.

Laufzeit

- Der Algorithmus bestimmt $\lfloor n/2 \rfloor$ mal einen verbessernden kostenmaximalen Weg.
- Wir setzen $l(e) = -g_M(e)$ für alle Kanten, damit haben wir:
- Der Algorithmus bestimmt $\lfloor n/2 \rfloor$ mal einen kürzesten Weg.
- Dabei treten auch negative Gewichte auf.
- Wegen des vorherigen Lemmas haben wir keine negativen Kreise bezüglich l.

Laufzeit

- Der Algorithmus bestimmt $\lfloor n/2 \rfloor$ mal einen verbessernden kostenmaximalen Weg.
- Wir setzen $l(e) = -g_M(e)$ für alle Kanten, damit haben wir:
- Der Algorithmus bestimmt $\lfloor n/2 \rfloor$ mal einen kürzesten Weg.
- Dabei treten auch negative Gewichte auf.
- Wegen des vorherigen Lemmas haben wir keine negativen Kreise bezüglich l.
    - Positive Kreise bezüglich g_M widersprächen der Optimalität von M_i:

Laufzeit

- Der Algorithmus bestimmt $\lfloor n/2 \rfloor$ mal einen verbessernden kostenmaximalen Weg.
- Wir setzen $l(e) = -g_M(e)$ für alle Kanten, damit haben wir:
- Der Algorithmus bestimmt $\lfloor n/2 \rfloor$ mal einen kürzesten Weg.
- Dabei treten auch negative Gewichte auf.
- Wegen des vorherigen Lemmas haben wir keine negativen Kreise bezüglich l.
  - Positive Kreise bezüglich g_M widersprächen der Optimalität von M_i:
- Damit kann nun mit dem Bellmann-Ford-Algorithmus von einer Quelle aus gearbeitet werden.

Laufzeit

- Der Algorithmus bestimmt $\lfloor n/2 \rfloor$ mal einen verbessernden kostenmaximalen Weg.
- Wir setzen $l(e) = -g_M(e)$ für alle Kanten, damit haben wir:
- Der Algorithmus bestimmt $\lfloor n/2 \rfloor$ mal einen kürzesten Weg.
- Dabei treten auch negative Gewichte auf.
- Wegen des vorherigen Lemmas haben wir keine negativen Kreise bezüglich l.
  - Positive Kreise bezüglich g_M widersprächen der Optimalität von M_i:
- Damit kann nun mit dem Bellmann-Ford-Algorithmus von einer Quelle aus gearbeitet werden.
- Dieser hat Laufzeit $O(nm)$.

Laufzeit

- Der Algorithmus bestimmt $\lfloor n/2 \rfloor$ mal einen verbessernden kostenmaximalen Weg.
- Wir setzen $l(e) = -g_M(e)$ für alle Kanten, damit haben wir:
- Der Algorithmus bestimmt $\lfloor n/2 \rfloor$ mal einen kürzesten Weg.
- Dabei treten auch negative Gewichte auf.
- Wegen des vorherigen Lemmas haben wir keine negativen Kreise bezüglich l.
  - Positive Kreise bezüglich g_M widersprächen der Optimalität von M_i:
- Damit kann nun mit dem Bellmann-Ford-Algorithmus von einer Quelle aus gearbeitet werden.
- Dieser hat Laufzeit $O(nm)$.
- Damit ist die Gesammtlaufzeit $O(n^2 m)$.

Idee

$l(e) = -g_M(e)$

- Nutze den Dijkstra-Algorithmus (Laufzeit $O(m + n \log n)$).

Idee

$l(e) = -g_M(e)$

- Nutze den Dijkstra-Algorithmus (Laufzeit $O(m + n \log n)$).
- Transformiere dazu die Längen, so dass keine negativen Werte auftreten.

Idee

$l(e) = -g_M(e)$

- Nutze den Dijkstra-Algorithmus (Laufzeit $O(m + n \log n)$).
- Transformiere dazu die Längen, so dass keine negativen Werte auftreten.
- Beachte: wir haben keine negativen Kreise.

Idee

$l(e) = -g_M(e)$

- Nutze den Dijkstra-Algorithmus (Laufzeit $O(m + n \log n)$).
- Transformiere dazu die Längen, so dass keine negativen Werte auftreten.
- Beachte: wir haben keine negativen Kreise.
- Verwende dazu eine Potentialfunkion $p : V \mapsto \mathbb{Z}$ mit:

$$\forall (v, w) = e \in E : l'(e) = l(e) - p(w) + p(v)$$

Idee

$l(e) = -g_M(e)$

- Nutze den Dijkstra-Algorithmus (Laufzeit $O(m + n \log n)$).
- Transformiere dazu die Längen, so dass keine negativen Werte auftreten.
- Beachte: wir haben keine negativen Kreise.
- Verwende dazu eine Potentialfunkion $p : V \mapsto \mathbb{Z}$ mit:

$$\forall (v, w) = e \in E : l'(e) = l(e) - p(w) + p(v)$$

- Die Berechnung so einer Potentialfunktion p im Rahmen der Suche nach dem Matching wird die Ungarische Methode genannt.

Transformation 1

$l(e) = -g_M(e)$

Lemma

Sei $G = (V, E)$ Graph mit Kantengewichten $l : E \mapsto \mathbb{Z}$ und $p : V \mapsto \mathbb{Z}$. Wenn G keine negativen Kreise enthält, dann setze:

$$\forall (v, w) = e \in E : l'(e) = l(e) - p(w) + p(v).$$

Dann gilt für jeden kürzesten Weg P von a nach b:

$$\mathrm{dist}_{l'}(a, b) = p(a) - p(b) + \mathrm{dist}_l(a, b).$$

Beweis:

Transformation 1

$l(e) = -g_M(e)$

Lemma

Sei $G = (V, E)$ Graph mit Kantengewichten $l : E \mapsto \mathbb{Z}$ und $p : V \mapsto \mathbb{Z}$. Wenn G keine negativen Kreise enthält, dann setze:

$$\forall (v, w) = e \in E : l'(e) = l(e) - p(w) + p(v).$$

Dann gilt für jeden kürzesten Weg P von a nach b:

$$\mathrm{dist}_{l'}(a, b) = p(a) - p(b) + \mathrm{dist}_l(a, b).$$

Beweis:

Transformation 1

$l(e) = -g_M(e)$

Lemma

Sei $G = (V, E)$ Graph mit Kantengewichten $l : E \mapsto \mathbb{Z}$ und $p : V \mapsto \mathbb{Z}$. Wenn G keine negativen Kreise enthält, dann setze:

$$\forall (v, w) = e \in E : l'(e) = l(e) - p(w) + p(v).$$

Dann gilt für jeden kürzesten Weg P von a nach b:

$$\mathrm{dist}_{l'}(a, b) = p(a) - p(b) + \mathrm{dist}_l(a, b).$$

Beweis:

$$\mathrm{dist}_{l'}(a, b) \quad = \quad \sum_{e \in P} l'(e)$$

Transformation 1

$l(e) = -g_M(e)$

Lemma

Sei $G = (V, E)$ Graph mit Kantengewichten $l : E \mapsto \mathbb{Z}$ und $p : V \mapsto \mathbb{Z}$. Wenn G keine negativen Kreise enthält, dann setze:

$$\forall (v, w) = e \in E : l'(e) = l(e) - p(w) + p(v).$$

Dann gilt für jeden kürzesten Weg P von a nach b:

$$\mathrm{dist}_{l'}(a, b) = p(a) - p(b) + \mathrm{dist}_l(a, b).$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}_{l'}(a, b) &= \textstyle\sum_{e \in P} l'(e) \\ &= \textstyle\sum_{(v,w)=e \in P} l(e) - p(w) + p(v) \end{aligned}$$

Transformation 1

$l(e) = -g_M(e)$

Lemma

Sei $G = (V, E)$ Graph mit Kantengewichten $l : E \mapsto \mathbb{Z}$ und $p : V \mapsto \mathbb{Z}$. Wenn G keine negativen Kreise enthält, dann setze:

$$\forall (v, w) = e \in E : l'(e) = l(e) - p(w) + p(v).$$

Dann gilt für jeden kürzesten Weg P von a nach b:

$$\mathrm{dist}_{l'}(a, b) = p(a) - p(b) + \mathrm{dist}_l(a, b).$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\mathrm{dist}_{l'}(a, b) &= \textstyle\sum_{e \in P} l'(e) \\
&= \textstyle\sum_{(v,w)=e \in P} l(e) - p(w) + p(v) \\
&= p(a) - p(b) + \textstyle\sum_{e \in P} l(e)
\end{aligned}$$

Transformation 1

$l(e) = -g_M(e)$

Lemma

Sei $G = (V, E)$ Graph mit Kantengewichten $l : E \mapsto \mathbb{Z}$ und $p : V \mapsto \mathbb{Z}$. Wenn G keine negativen Kreise enthält, dann setze:

$$\forall (v, w) = e \in E : l'(e) = l(e) - p(w) + p(v).$$

Dann gilt für jeden kürzesten Weg P von a nach b:

$$\mathrm{dist}_{l'}(a, b) = p(a) - p(b) + \mathrm{dist}_l(a, b).$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}_{l'}(a, b) &= \textstyle\sum_{e \in P} l'(e) \\ &= \textstyle\sum_{(v,w)=e \in P} l(e) - p(w) + p(v) \\ &= p(a) - p(b) + \textstyle\sum_{e \in P} l(e) \end{aligned}$$

Damit können die kürzesten Wege auch mit diesen neuen Kantengewichten bestimmt werden.

Transformation 2

$l(e) = -g_M(e)$

Lemma

Sei $G = (V, E)$ Graph mit Kantengewichten $l : E \mapsto \mathbb{Z}$ und $q \in V$. Wenn G keine negativen Kreise enthält, dann setze weiter $p : V \mapsto \mathbb{Z}$ mit $p(v) = \mathrm{dist}_l(q, v)$ und

$$\forall (v, w) = e \in E : l'(e) = l(e) - p(w) + p(v).$$

Dann gilt:

$$\forall e \in E : l'(e) \geqslant 0.$$

Beweis:

Transformation 2

$l(e) = -g_M(e)$

Lemma

Sei $G = (V, E)$ Graph mit Kantengewichten $l : E \mapsto \mathbb{Z}$ und $q \in V$. Wenn G keine negativen Kreise enthält, dann setze weiter $p : V \mapsto \mathbb{Z}$ mit $p(v) = \mathrm{dist}_l(q, v)$ und

$$\forall (v, w) = e \in E : l'(e) = l(e) - p(w) + p(v).$$

Dann gilt:

$$\forall e \in E : l'(e) \geqslant 0.$$

Beweis:

Transformation 2

$l(e) = -g_M(e)$

Lemma

Sei $G = (V, E)$ Graph mit Kantengewichten $l : E \mapsto \mathbb{Z}$ und $q \in V$. Wenn G keine negativen Kreise enthält, dann setze weiter $p : V \mapsto \mathbb{Z}$ mit $p(v) = \mathrm{dist}_l(q, v)$ und

$$\forall (v, w) = e \in E : l'(e) = l(e) - p(w) + p(v).$$

Dann gilt:

$$\forall e \in E : l'(e) \geqslant 0.$$

Beweis:

- Für jede Kante $e = (v, w)$ gilt: $\mathrm{dist}_l(q, w) \leqslant \mathrm{dist}_l(q, v) + l(e)$.

Transformation 2

$l(e) = -g_M(e)$

Lemma

Sei $G = (V, E)$ Graph mit Kantengewichten $l : E \mapsto \mathbb{Z}$ und $q \in V$. Wenn G keine negativen Kreise enthält, dann setze weiter $p : V \mapsto \mathbb{Z}$ mit $p(v) = \mathrm{dist}_l(q, v)$ und

$$\forall (v, w) = e \in E : l'(e) = l(e) - p(w) + p(v).$$

Dann gilt:

$$\forall e \in E : l'(e) \geqslant 0.$$

Beweis:

- Für jede Kante $e = (v, w)$ gilt: $\mathrm{dist}_l(q, w) \leqslant \mathrm{dist}_l(q, v) + l(e)$.
- Und damit:

$$l'(e) \quad = \quad l(e) - p(w) + p(v)$$

Transformation 2

$l(e) = -g_M(e)$

Lemma

Sei $G = (V, E)$ Graph mit Kantengewichten $l : E \mapsto \mathbb{Z}$ und $q \in V$. Wenn G keine negativen Kreise enthält, dann setze weiter $p : V \mapsto \mathbb{Z}$ mit $p(v) = \mathrm{dist}_l(q, v)$ und

$$\forall (v, w) = e \in E : l'(e) = l(e) - p(w) + p(v).$$

Dann gilt:

$$\forall e \in E : l'(e) \geqslant 0.$$

Beweis:

- Für jede Kante $e = (v, w)$ gilt: $\mathrm{dist}_l(q, w) \leqslant \mathrm{dist}_l(q, v) + l(e)$.
- Und damit:

$$l'(e) \quad = \quad l(e) - p(w) + p(v)$$

Transformation 2

$l(e) = -g_M(e)$

Lemma

Sei $G = (V, E)$ Graph mit Kantengewichten $l : E \mapsto \mathbb{Z}$ und $q \in V$. Wenn G keine negativen Kreise enthält, dann setze weiter $p : V \mapsto \mathbb{Z}$ mit $p(v) = \mathrm{dist}_l(q, v)$ und

$$\forall (v, w) = e \in E : l'(e) = l(e) - p(w) + p(v).$$

Dann gilt:

$$\forall e \in E : l'(e) \geqslant 0.$$

Beweis:

- Für jede Kante $e = (v, w)$ gilt: $\mathrm{dist}_l(q, w) \leqslant \mathrm{dist}_l(q, v) + l(e)$.
- Und damit:

$$\begin{aligned} l'(e) &= l(e) - p(w) + p(v) \\ &= l(e) - \mathrm{dist}_l(q, w) + \mathrm{dist}_l(q, v) \end{aligned}$$

Transformation 2

$l(e) = -g_M(e)$

Lemma

Sei $G = (V, E)$ Graph mit Kantengewichten $l : E \mapsto \mathbb{Z}$ und $q \in V$. Wenn G keine negativen Kreise enthält, dann setze weiter $p : V \mapsto \mathbb{Z}$ mit $p(v) = \mathrm{dist}_l(q, v)$ und

$$\forall (v, w) = e \in E : l'(e) = l(e) - p(w) + p(v).$$

Dann gilt:

$$\forall e \in E : l'(e) \geqslant 0.$$

Beweis:

- Für jede Kante $e = (v, w)$ gilt: $\mathrm{dist}_l(q, w) \leqslant \mathrm{dist}_l(q, v) + l(e)$.
- Und damit:

$$\begin{array}{rcl} l'(e) & = & l(e) - p(w) + p(v) \\ & = & l(e) - \mathrm{dist}_l(q, w) + \mathrm{dist}_l(q, v) \\ & \geqslant & l(e) - (\mathrm{dist}_l(q, v) + l(e)) + \mathrm{dist}_l(q, v) \quad = \quad 0 \end{array}$$

Transformation 2

$l(e) = -g_M(e)$

Lemma

Sei $G = (V, E)$ Graph mit Kantengewichten $l : E \mapsto \mathbb{Z}$ und $q \in V$. Wenn G keine negativen Kreise enthält, dann setze weiter $p : V \mapsto \mathbb{Z}$ mit $p(v) = \mathrm{dist}_l(q, v)$ und

$$\forall (v, w) = e \in E : l'(e) = l(e) - p(w) + p(v).$$

Dann gilt:

$$\forall e \in E : l'(e) \geqslant 0.$$

Beweis:

- Für jede Kante $e = (v, w)$ gilt: $\mathrm{dist}_l(q, w) \leqslant \mathrm{dist}_l(q, v) + l(e)$.
- Und damit:

$$\begin{aligned} l'(e) &= l(e) - p(w) + p(v) \\ &= l(e) - \mathrm{dist}_l(q, w) + \mathrm{dist}_l(q, v) \\ &\geqslant l(e) - (\mathrm{dist}_l(q, v) + l(e)) + \mathrm{dist}_l(q, v) \quad = \quad 0 \end{aligned}$$

Transformation 3

$l(e) = -g_M(e)$

Lemma

Sei $G = (V, E)$ Graph mit Kantengewichten $l : E \mapsto \mathbb{Z}$ und $q \in V$. Wenn G keine negativen Kreise enthält, dann setze weiter $p : V \mapsto \mathbb{Z}$ mit $p(v) = \mathrm{dist}_l(q, v)$ und

$$\forall (v, w) = e \in E : l'(e) = l(e) - p(w) + p(v).$$

Dann gilt für die Kanten e eines kürzsten Weg von q aus:

$$l'(e) = 0.$$

Beweis:

Transformation 3

$l(e) = -g_M(e)$

Lemma

Sei $G = (V, E)$ Graph mit Kantengewichten $l : E \mapsto \mathbb{Z}$ und $q \in V$. Wenn G keine negativen Kreise enthält, dann setze weiter $p : V \mapsto \mathbb{Z}$ mit $p(v) = \mathrm{dist}_l(q, v)$ und

$$\forall (v, w) = e \in E : l'(e) = l(e) - p(w) + p(v).$$

Dann gilt für die Kanten e eines kürzsten Weg von q aus:

$$l'(e) = 0.$$

Beweis:

Transformation 3

$l(e) = -g_M(e)$

Lemma

Sei $G = (V, E)$ Graph mit Kantengewichten $l : E \mapsto \mathbb{Z}$ und $q \in V$. Wenn G keine negativen Kreise enthält, dann setze weiter $p : V \mapsto \mathbb{Z}$ mit $p(v) = \mathrm{dist}_l(q, v)$ und

$$\forall (v, w) = e \in E : l'(e) = l(e) - p(w) + p(v).$$

Dann gilt für die Kanten e eines kürzsten Weg von q aus:

$$l'(e) = 0.$$

Beweis:

- Wegen $l'(e) = l(e) - p(w) + p(v)$ gilt für ein Kante $e = (q, v)$: $l'(e) = 0$.

Transformation 3

$l(e) = -g_M(e)$

Lemma

Sei $G = (V, E)$ Graph mit Kantengewichten $l : E \mapsto \mathbb{Z}$ und $q \in V$. Wenn G keine negativen Kreise enthält, dann setze weiter $p : V \mapsto \mathbb{Z}$ mit $p(v) = \text{dist}_l(q, v)$ und

$$\forall (v, w) = e \in E : l'(e) = l(e) - p(w) + p(v).$$

Dann gilt für die Kanten e eines kürzsten Weg von q aus:

$$l'(e) = 0.$$

Beweis:

- Wegen $l'(e) = l(e) - p(w) + p(v)$ gilt für ein Kante $e = (q, v)$: $l'(e) = 0$.
- Sei P ein kürzester Weg von q nach v.

Transformation 3

$l(e) = -g_M(e)$

Lemma

Sei $G = (V, E)$ Graph mit Kantengewichten $l : E \mapsto \mathbb{Z}$ und $q \in V$. Wenn G keine negativen Kreise enthält, dann setze weiter $p : V \mapsto \mathbb{Z}$ mit $p(v) = \text{dist}_l(q, v)$ und

$$\forall (v, w) = e \in E : l'(e) = l(e) - p(w) + p(v).$$

Dann gilt für die Kanten e eines kürzsten Weg von q aus:

$$l'(e) = 0.$$

Beweis:

- Wegen $l'(e) = l(e) - p(w) + p(v)$ gilt für ein Kante $e = (q, v)$: $l'(e) = 0$.
- Sei P ein kürzester Weg von q nach v.
- Dieser hat im Vergleich zu den ursprünglichen Kosten den aditiven Term $p(q) - p(v)$.

Transformation 3

$l(e) = -g_M(e)$

Lemma

Sei $G = (V, E)$ Graph mit Kantengewichten $l : E \mapsto \mathbb{Z}$ und $q \in V$. Wenn G keine negativen Kreise enthält, dann setze weiter $p : V \mapsto \mathbb{Z}$ mit $p(v) = \mathrm{dist}_l(q, v)$ und

$$\forall (v, w) = e \in E : l'(e) = l(e) - p(w) + p(v).$$

Dann gilt für die Kanten e eines kürzsten Weg von q aus:

$$l'(e) = 0.$$

Beweis:

- Wegen $l'(e) = l(e) - p(w) + p(v)$ gilt für ein Kante $e = (q, v)$: $l'(e) = 0$.
- Sei P ein kürzester Weg von q nach v.
- Dieser hat im Vergleich zu den ursprünglichen Kosten den aditiven Term $p(q) - p(v)$.
- Damit $p(q) - p(v) = \mathrm{dist}_l(q) - \mathrm{dist}_l(v) = -\mathrm{dist}_l(v)$.

Transformation 3

$l(e) = -g_M(e)$

Lemma

Sei $G = (V, E)$ Graph mit Kantengewichten $l : E \mapsto \mathbb{Z}$ und $q \in V$. Wenn G keine negativen Kreise enthält, dann setze weiter $p : V \mapsto \mathbb{Z}$ mit $p(v) = \mathrm{dist}_l(q, v)$ und

$$\forall (v, w) = e \in E : l'(e) = l(e) - p(w) + p(v).$$

Dann gilt für die Kanten e eines kürzsten Weg von q aus:

$$l'(e) = 0.$$

Beweis:

- Wegen $l'(e) = l(e) - p(w) + p(v)$ gilt für ein Kante $e = (q, v)$: $l'(e) = 0$.
- Sei P ein kürzester Weg von q nach v.
- Dieser hat im Vergleich zu den ursprünglichen Kosten den aditiven Term $p(q) - p(v)$.
- Damit $p(q) - p(v) = \mathrm{dist}_l(q) - \mathrm{dist}_l(v) = -\mathrm{dist}_l(v)$.
- Und weiter. $\mathrm{dist}_{l'}(v) = \mathrm{dist}_l(v) - \mathrm{dist}_l(v) = 0$.

Ungarische Methode

$l(e) = -g_M(e)$

1. Gegeben $G = (V, W, E)$, $g : E \mapsto \mathbb{N}$

Ungarische Methode

$l(e) = -g_M(e)$

1. Gegeben $G = (V, W, E)$, $g : E \mapsto \mathbb{N}$
2. $M = \emptyset$, $M_{opt} = \emptyset$ und für alle $v \in V$ setze $p(v) = 0$.

Ungarische Methode

$l(e) = -g_M(e)$

1. Gegeben $G = (V, W, E)$, $g : E \mapsto \mathbb{N}$
2. $M = \emptyset$, $M_{opt} = \emptyset$ und für alle $v \in V$ setze $p(v) = 0$.
3. Für alle $w \in W$ setze $p(w) = \min_{e \in E} l(e)$.

Ungarische Methode

$l(e) = -g_M(e)$

1. Gegeben $G = (V, W, E)$, $g : E \mapsto \mathbb{N}$
2. $M = \emptyset$, $M_{opt} = \emptyset$ und für alle $v \in V$ setze $p(v) = 0$.
3. Für alle $w \in W$ setze $p(w) = \min_{e \in E} l(e)$.
4. Wiederhole die folgenden Schritte:

Ungarische Methode

$l(e) = -g_M(e)$

1. Gegeben $G = (V, W, E)$, $g : E \mapsto \mathbb{N}$
2. $M = \emptyset$, $M_{opt} = \emptyset$ und für alle $v \in V$ setze $p(v) = 0$.
3. Für alle $w \in W$ setze $p(w) = \min_{e \in E} l(e)$.
4. Wiederhole die folgenden Schritte:
   1. Füge Knoten q zu V hinzu und Kanten (q, v) zu allen Knoten aus $v \in V \setminus V(M)$.

Ungarische Methode

$l(e) = -g_M(e)$

1. Gegeben $G = (V, W, E)$, $g : E \mapsto \mathbb{N}$
2. $M = \emptyset$, $M_{opt} = \emptyset$ und für alle $v \in V$ setze $p(v) = 0$.
3. Für alle $w \in W$ setze $p(w) = \min_{e \in E} l(e)$.
4. Wiederhole die folgenden Schritte:
   1. Füge Knoten q zu V hinzu und Kanten (q, v) zu allen Knoten aus $v \in V \setminus V(M)$.
   2. Bestimme Kantenlängen l_M mit Hilfe von g und M.

Ungarische Methode

$l(e) = -g_M(e)$

1. Gegeben $G = (V, W, E)$, $g : E \mapsto \mathbb{N}$
2. $M = \emptyset$, $M_{opt} = \emptyset$ und für alle $v \in V$ setze $p(v) = 0$.
3. Für alle $w \in W$ setze $p(w) = \min_{e \in E} l(e)$.
4. Wiederhole die folgenden Schritte:
   1. Füge Knoten q zu V hinzu und Kanten (q, v) zu allen Knoten aus $v \in V \setminus V(M)$.
   2. Bestimme Kantenlängen l_M mit Hilfe von g und M.
   3. Bestimme $p(v) = \mathrm{dist}_{l_M}(q, v)$ für alle erreichbaren Knoten v.

Ungarische Methode

$l(e) = -g_M(e)$

1. Gegeben $G = (V, W, E)$, $g : E \mapsto \mathbb{N}$
2. $M = \emptyset$, $M_{opt} = \emptyset$ und für alle $v \in V$ setze $p(v) = 0$.
3. Für alle $w \in W$ setze $p(w) = \min_{e \in E} l(e)$.
4. Wiederhole die folgenden Schritte:
   1. Füge Knoten q zu V hinzu und Kanten (q, v) zu allen Knoten aus $v \in V \setminus V(M)$.
   2. Bestimme Kantenlängen l_M mit Hilfe von g und M.
   3. Bestimme $p(v) = \mathrm{dist}_{l_M}(q, v)$ für alle erreichbaren Knoten v.
   4. Setze $l'(e) = l_M(e) + p(v) - p(w)$ für alle Kanten $e = (v, w)$.

Ungarische Methode

$l(e) = -g_M(e)$

1. Gegeben $G = (V, W, E)$, $g : E \mapsto \mathbb{N}$
2. $M = \emptyset$, $M_{opt} = \emptyset$ und für alle $v \in V$ setze $p(v) = 0$.
3. Für alle $w \in W$ setze $p(w) = \min_{e \in E} l(e)$.
4. Wiederhole die folgenden Schritte:
   1. Füge Knoten q zu V hinzu und Kanten (q, v) zu allen Knoten aus $v \in V \setminus V(M)$.
   2. Bestimme Kantenlängen l_M mit Hilfe von g und M.
   3. Bestimme $p(v) = \text{dist}_{l_M}(q, v)$ für alle erreichbaren Knoten v.
   4. Setze $l'(e) = l_M(e) + p(v) - p(w)$ für alle Kanten $e = (v, w)$.
   5. Falls es Pfad P mit $l'(P) = 0$ von q zu einem Knoten aus $W \setminus V(M)$ gibt, so setze $M = M \oplus E(P)$

Ungarische Methode

$l(e) = -g_M(e)$

1. Gegeben $G = (V, W, E)$, $g : E \mapsto \mathbb{N}$
2. $M = \emptyset$, $M_{opt} = \emptyset$ und für alle $v \in V$ setze $p(v) = 0$.
3. Für alle $w \in W$ setze $p(w) = \min_{e \in E} l(e)$.
4. Wiederhole die folgenden Schritte:
   1. Füge Knoten q zu V hinzu und Kanten (q, v) zu allen Knoten aus $v \in V \setminus V(M)$.
   2. Bestimme Kantenlängen l_M mit Hilfe von g und M.
   3. Bestimme $p(v) = \text{dist}_{l_M}(q, v)$ für alle erreichbaren Knoten v.
   4. Setze $l'(e) = l_M(e) + p(v) - p(w)$ für alle Kanten $e = (v, w)$.
   5. Falls es Pfad P mit $l'(P) = 0$ von q zu einem Knoten aus $W \setminus V(M)$ gibt, so setze $M = M \oplus E(P)$
   6. Falls es keinen solchen Pfad P gibt, so gebe M_{opt} aus und terminiere.

Ungarische Methode

$l(e) = -g_M(e)$

1. Gegeben $G = (V, W, E)$, $g : E \mapsto \mathbb{N}$
2. $M = \emptyset$, $M_{opt} = \emptyset$ und für alle $v \in V$ setze $p(v) = 0$.
3. Für alle $w \in W$ setze $p(w) = \min_{e \in E} l(e)$.
4. Wiederhole die folgenden Schritte:
   1. Füge Knoten q zu V hinzu und Kanten (q, v) zu allen Knoten aus $v \in V \setminus V(M)$.
   2. Bestimme Kantenlängen l_M mit Hilfe von g und M.
   3. Bestimme $p(v) = \mathrm{dist}_{l_M}(q, v)$ für alle erreichbaren Knoten v.
   4. Setze $l'(e) = l_M(e) + p(v) - p(w)$ für alle Kanten $e = (v, w)$.
   5. Falls es Pfad P mit $l'(P) = 0$ von q zu einem Knoten aus $W \setminus V(M)$ gibt, so setze $M = M \oplus E(P)$
   6. Falls es keinen solchen Pfad P gibt, so gebe M_{opt} aus und terminiere.
   7. Falls $g(M) > g(M_{opt})$, setze $M_{opt} = M$.

Laufzeit

$l(e) = -g_M(e)$

Theorem

Der obige Algorithmus bestimmt gewichtsmaximales Matching und hat eine Laufzeit von $O(n \cdot (m + n \log n))$.

Bemerkungen dazu (Nach Konstruktion gelten die vorherigen Ausagen):

Laufzeit

$l(e) = -g_M(e)$

Theorem

Der obige Algorithmus bestimmt gewichtsmaximales Matching und hat eine Laufzeit von $O(n \cdot (m + n \log n))$.

Bemerkungen dazu (Nach Konstruktion gelten die vorherigen Ausagen):

- Beim Übergang von M_i nach M_{i+1} werden nur Kanten e mit Kosten $l'(e) = 0$ gedreht.

Laufzeit

$l(e) = -g_M(e)$

Theorem

Der obige Algorithmus bestimmt gewichtsmaximales Matching und hat eine Laufzeit von $O(n \cdot (m + n \log n))$.

Bemerkungen dazu (Nach Konstruktion gelten die vorherigen Ausagen):

- Beim Übergang von M_i nach M_{i+1} werden nur Kanten e mit Kosten $l'(e) = 0$ gedreht.
- Damit vergrößert sich nicht der von q aus erreichbare Teil.

Laufzeit

$l(e) = -g_M(e)$

Theorem

Der obige Algorithmus bestimmt gewichtsmaximales Matching und hat eine Laufzeit von $O(n \cdot (m + n \log n))$.

Bemerkungen dazu (Nach Konstruktion gelten die vorherigen Ausagen):

- Beim Übergang von M_i nach M_{i+1} werden nur Kanten e mit Kosten $l'(e) = 0$ gedreht.
- Damit vergrößert sich nicht der von q aus erreichbare Teil.
- Sei $e = (v, w)$ so eine Kante vor der Drehung.

Laufzeit

$l(e) = -g_M(e)$

Theorem

Der obige Algorithmus bestimmt gewichtsmaximales Matching und hat eine Laufzeit von $O(n \cdot (m + n \log n))$.

Bemerkungen dazu (Nach Konstruktion gelten die vorherigen Ausagen):

- Beim Übergang von M_i nach M_{i+1} werden nur Kanten e mit Kosten $l'(e) = 0$ gedreht.
- Damit vergrößert sich nicht der von q aus erreichbare Teil.
- Sei $e = (v, w)$ so eine Kante vor der Drehung.
- Für die gedreht Kante $e' = (w, v)$ gilt:

$$l'_{M_{i+1}}(e') = l_{M_{i+1}}(e') - p(w) + p(v) = -l_{M_i}(e') - p(w) + p(v) = -l'_{M_i}(e) = 0.$$

Laufzeit

$l(e) = -g_M(e)$

Theorem

Der obige Algorithmus bestimmt gewichtsmaximales Matching und hat eine Laufzeit von $O(n \cdot (m + n \log n))$.

Bemerkungen dazu (Nach Konstruktion gelten die vorherigen Ausagen):

- Beim Übergang von M_i nach M_{i+1} werden nur Kanten e mit Kosten $l'(e) = 0$ gedreht.
- Damit vergrößert sich nicht der von q aus erreichbare Teil.
- Sei $e = (v, w)$ so eine Kante vor der Drehung.
- Für die gedreht Kante $e' = (w, v)$ gilt:

$$l'_{M_{i+1}}(e') = l_{M_{i+1}}(e') - p(w) + p(v) = -l_{M_i}(e') - p(w) + p(v) = -l'_{M_i}(e) = 0.$$

- Damit können wir im Schritt 5.4 den Dijkstra-Algorithmus anwenden.

Laufzeit

$l(e) = -g_M(e)$

Theorem

Der obige Algorithmus bestimmt gewichtsmaximales Matching und hat eine Laufzeit von $O(n \cdot (m + n \log n))$.

Bemerkungen dazu (Nach Konstruktion gelten die vorherigen Ausagen):

- Beim Übergang von M_i nach M_{i+1} werden nur Kanten e mit Kosten $l'(e) = 0$ gedreht.
- Damit vergrößert sich nicht der von q aus erreichbare Teil.
- Sei $e = (v, w)$ so eine Kante vor der Drehung.
- Für die gedreht Kante $e' = (w, v)$ gilt:

$$l'_{M_{i+1}}(e') = l_{M_{i+1}}(e') - p(w) + p(v) = -l_{M_i}(e') - p(w) + p(v) = -l'_{M_i}(e) = 0.$$

- Damit können wir im Schritt 5.4 den Dijkstra-Algorithmus anwenden.
- Weiterhin können wir die Potentiale in Schritt 5.2 mit Breitesuche bestimmen.

Laufzeit

$l(e) = -g_M(e)$

Theorem

Der obige Algorithmus bestimmt gewichtsmaximales Matching und hat eine Laufzeit von $O(n \cdot (m + n \log n))$.

Bemerkungen dazu (Nach Konstruktion gelten die vorherigen Ausagen):

- Beim Übergang von M_i nach M_{i+1} werden nur Kanten e mit Kosten $l'(e) = 0$ gedreht.
- Damit vergrößert sich nicht der von q aus erreichbare Teil.
- Sei $e = (v, w)$ so eine Kante vor der Drehung.
- Für die gedreht Kante $e' = (w, v)$ gilt:

$$l'_{M_{i+1}}(e') = l_{M_{i+1}}(e') - p(w) + p(v) = -l_{M_i}(e') - p(w) + p(v) = -l'_{M_i}(e) = 0.$$

- Damit können wir im Schritt 5.4 den Dijkstra-Algorithmus anwenden.
- Weiterhin können wir die Potentiale in Schritt 5.2 mit Breitesuche bestimmen.
- Damit $O(n)$ Iterationen mit Laufzeit $O(m + n \log n)$ plus $O(n + m)$.

Einleitung

$l(e) = -g_M(e)$

- Was passiert, wenn der obige Algorithmus auf ungerade Kreise stößt?

Einleitung

$l(e) = -g_M(e)$

- Was passiert, wenn der obige Algorithmus auf ungerade Kreise stößt?
- Es gibt ggf. mehr Möglichkeiten des Durchlaufs.

Einleitung

$l(e) = -g_M(e)$

- Was passiert, wenn der obige Algorithmus auf ungerade Kreise stößt?
- Es gibt ggf. mehr Möglichkeiten des Durchlaufs.
- Ausblick und Vorgehen:

Einleitung

$l(e) = -g_M(e)$

- Was passiert, wenn der obige Algorithmus auf ungerade Kreise stößt?
- Es gibt ggf. mehr Möglichkeiten des Durchlaufs.
- Ausblick und Vorgehen:
  - Untersuche die möglichen Situationen.

Einleitung

$l(e) = -g_M(e)$

- Was passiert, wenn der obige Algorithmus auf ungerade Kreise stößt?
- Es gibt ggf. mehr Möglichkeiten des Durchlaufs.
- Ausblick und Vorgehen:
  - Untersuche die möglichen Situationen.
  - Erkenne die Situationen, die kritisch für den Algorithmus sind.

Einleitung

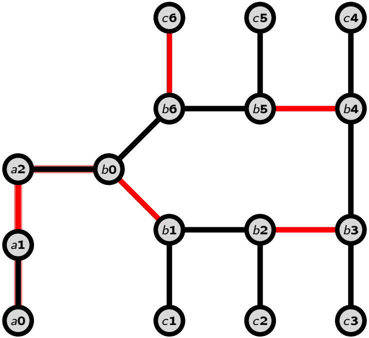
$l(e) = -g_M(e)$

- Was passiert, wenn der obige Algorithmus auf ungerade Kreise stößt?
- Es gibt ggf. mehr Möglichkeiten des Durchlaufs.
- Ausblick und Vorgehen:
  - Untersuche die möglichen Situationen.
  - Erkenne die Situationen, die kritisch für den Algorithmus sind.
  - Passe Algorithmus für diese Situationen an.

Erster unkritischer Fall

$l(e) = -g_M(e)$

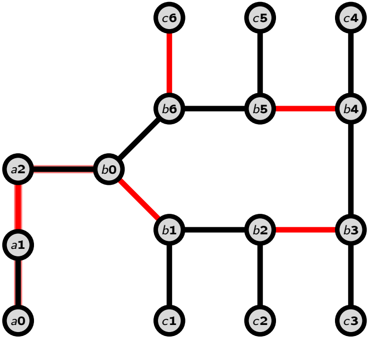
- Die Suche startet an a_0.



Erster unkritischer Fall

$l(e) = -g_M(e)$

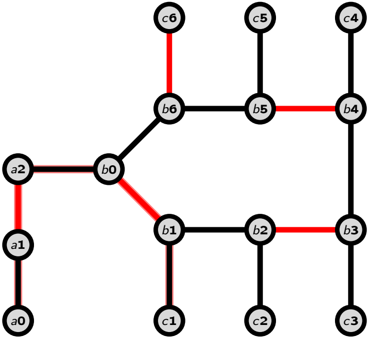
- Die Suche startet an a_0.
- Der Kreis $C = \{b_0, b_1, \ldots, b_6\}$ wird bei b_0 erreicht.



Erster unkritischer Fall

$l(e) = -g_M(e)$

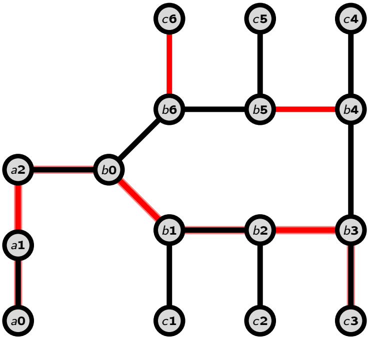
- Die Suche startet an a_0.
- Der Kreis $C = \{b_0, b_1, \ldots, b_6\}$ wird bei b_0 erreicht.
- Wegen $\{b_0, b_1\} \in M$ wird der Kreis in eindeutiger Richtung durchlaufen.



Erster unkritischer Fall

$l(e) = -g_M(e)$

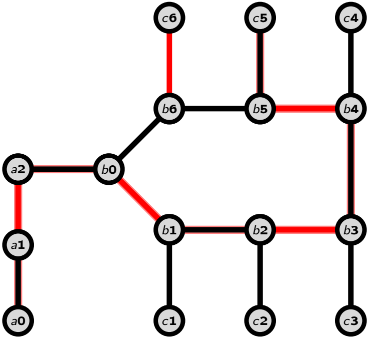
- Die Suche startet an a_0.
- Der Kreis $C = \{b_0, b_1, \ldots, b_6\}$ wird bei b_0 erreicht.
- Wegen $\{b_0, b_1\} \in M$ wird der Kreis in eindeutiger Richtung durchlaufen.
- Damit ist die Kante $\{b_0, b_6\}$ nicht mehr relevant.



Erster unkritischer Fall

$l(e) = -g_M(e)$

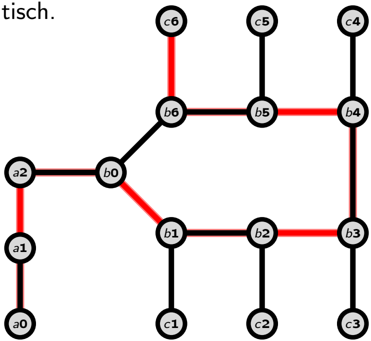
- Die Suche startet an a_0.
- Der Kreis $C = \{b_0, b_1, \ldots, b_6\}$ wird bei b_0 erreicht.
- Wegen $\{b_0, b_1\} \in M$ wird der Kreis in eindeutiger Richtung durchlaufen.
- Damit ist die Kante $\{b_0, b_6\}$ nicht mehr relevant.
- Die Suche sieht keinen Kreis.



Erster unkritischer Fall

$l(e) = -g_M(e)$

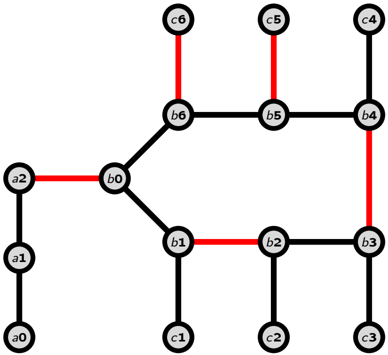
- Die Suche startet an a_0.
- Der Kreis $C = \{b_0, b_1, \ldots, b_6\}$ wird bei b_0 erreicht.
- Wegen $\{b_0, b_1\} \in M$ wird der Kreis in eindeutiger Richtung durchlaufen.
- Damit ist die Kante $\{b_0, b_6\}$ nicht mehr relevant.
- Die Suche sieht keinen Kreis.
- Der Fall ist unkritisch.



Zweiter unkritischer Fall

$l(e) = -g_M(e)$

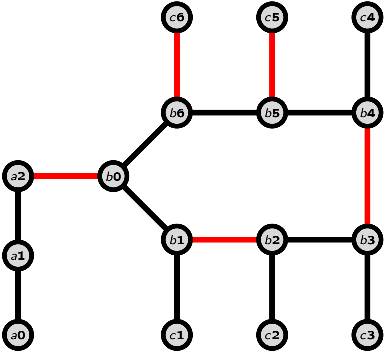
- Die Suche startet an a_1.



Zweiter unkritischer Fall

$l(e) = -g_M(e)$

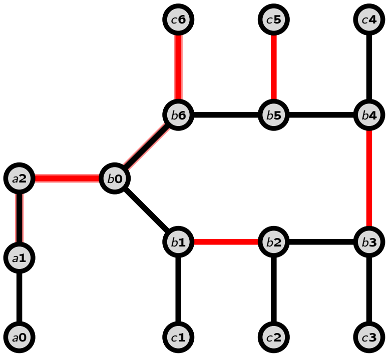
- Die Suche startet an a_1.
- Der Kreis $C = \{b_0, b_1, \ldots, b_6\}$ wird bei b_0 erreicht.



Zweiter unkritischer Fall

$l(e) = -g_M(e)$

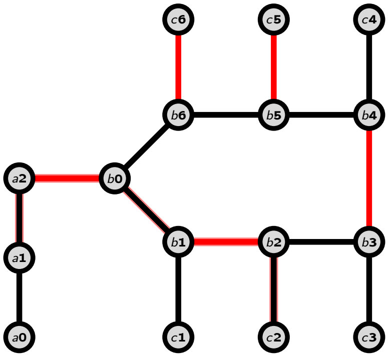
- Die Suche startet an a_1.
- Der Kreis $C = \{b_0, b_1, \ldots, b_6\}$ wird bei b_0 erreicht.
- Es gibt zwei Möglichkeiten, in den Kreis zu laufen.



Zweiter unkritischer Fall

$l(e) = -g_M(e)$

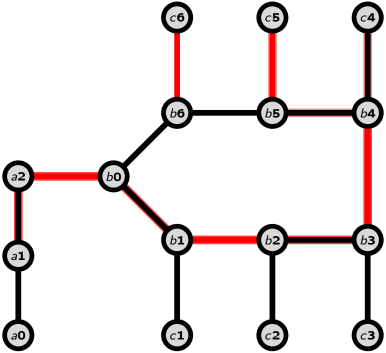
- Die Suche startet an a_1.
- Der Kreis $C = \{b_0, b_1, \ldots, b_6\}$ wird bei b_0 erreicht.
- Es gibt zwei Möglichkeiten, in den Kreis zu laufen.



Zweiter unkritischer Fall

$l(e) = -g_M(e)$

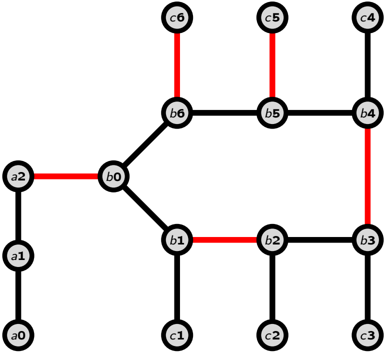
- Die Suche startet an a_1.
- Der Kreis $C = \{b_0, b_1, \ldots, b_6\}$ wird bei b_0 erreicht.
- Es gibt zwei Möglichkeiten, in den Kreis zu laufen.
- Diese sind unabhängig, da b_5 frei in $G|C$ ($\{b_5, b_6\}$ nicht relevant)



Zweiter unkritischer Fall

$l(e) = -g_M(e)$

- Die Suche startet an a_1.
- Der Kreis $C = \{b_0, b_1, \ldots, b_6\}$ wird bei b_0 erreicht.
- Es gibt zwei Möglichkeiten, in den Kreis zu laufen.
- Diese sind unabhängig, da b_5 frei in $G|C$ ($\{b_5, b_6\}$ nicht relevant)
- Der Fall ist unkritisch.



Beispiel

$l(e) = -g_M(e)$

Beispiel

$l(e) = -g_M(e)$

Beispiel

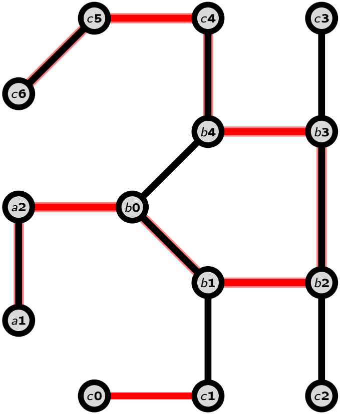
$l(e) = -g_M(e)$

- Problem mit ungeraden Kreisen.
- Wenn wir von a_1 starten, dann gibt es zwei Möglichkeiten.
  - über b_0 und b_1
    - nach c_2

Beispiel

$l(e) = -g_M(e)$

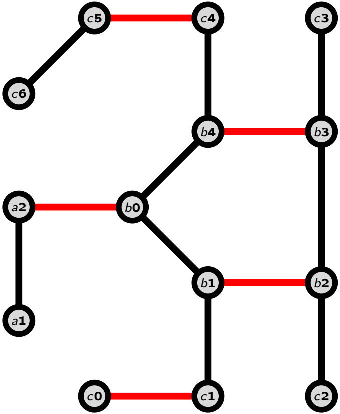
- Problem mit ungeraden Kreisen.
- Wenn wir von a_1 starten, dann gibt es zwei Möglichkeiten.
  - über b_0 und b_1
    - nach c_2
    - nach c_6



Beispiel

$l(e) = -g_M(e)$

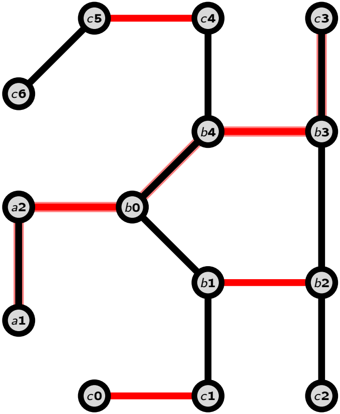
- Problem mit ungeraden Kreisen.
- Wenn wir von a_1 starten, dann gibt es zwei Möglichkeiten.
  - über b_0 und b_1
    - nach c_2
    - nach c_6



Beispiel

$l(e) = -g_M(e)$

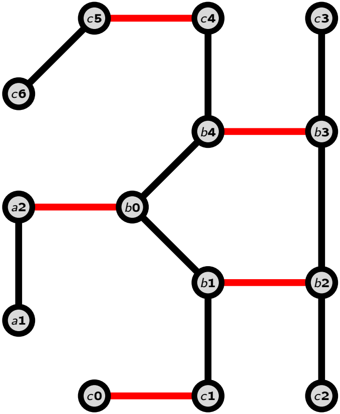
- Problem mit ungeraden Kreisen.
- Wenn wir von a_1 starten, dann gibt es zwei Möglichkeiten.
  - über b_0 und b_1
    - nach c_2
    - nach c_6
  - oder über b_0 und b_4
    - nach c_3



Beispiel

$l(e) = -g_M(e)$

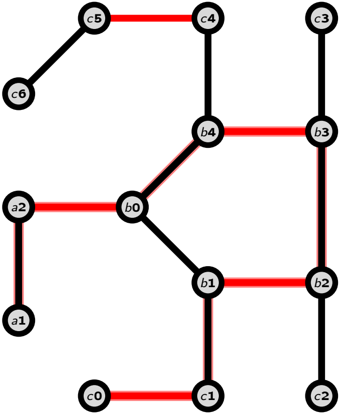
- Problem mit ungeraden Kreisen.
- Wenn wir von a_1 starten, dann gibt es zwei Möglichkeiten.
  - über b_0 und b_1
    - nach c_2
    - nach c_6
  - oder über b_0 und b_4
    - nach c_3



Beispiel

$l(e) = -g_M(e)$

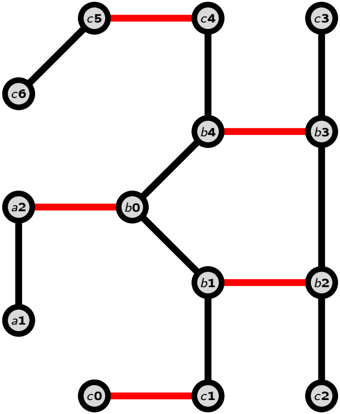
- Problem mit ungeraden Kreisen.
- Wenn wir von a_1 starten, dann gibt es zwei Möglichkeiten.
  - über b_0 und b_1
    - nach c_2
    - nach c_6
  - oder über b_0 und b_4
    - nach c_3
    - nach c_0



Beispiel

$l(e) = -g_M(e)$

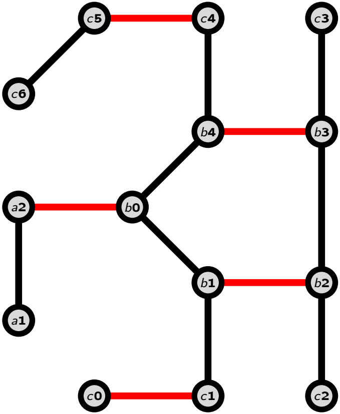
- Problem mit ungeraden Kreisen.
- Wenn wir von a_1 starten, dann gibt es zwei Möglichkeiten.
  - über b_0 und b_1
    - nach c_2
    - nach c_6
  - oder über b_0 und b_4
    - nach c_3
    - nach c_0



Beispiel

$l(e) = -g_M(e)$

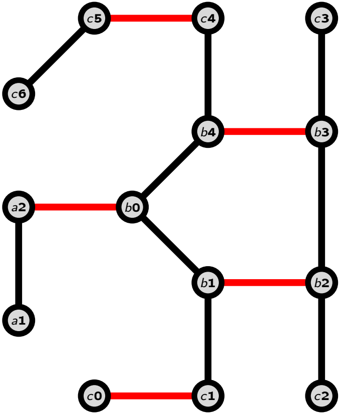
- Problem mit ungeraden Kreisen.
- Wenn wir von a_1 starten, dann gibt es zwei Möglichkeiten.
  - über b_0 und b_1
    - nach c_2
    - nach c_6
  - oder über b_0 und b_4
    - nach c_3
    - nach c_0
- Jeder Knoten aus dem Kreis ist erreichbar.



Beispiel

$l(e) = -g_M(e)$

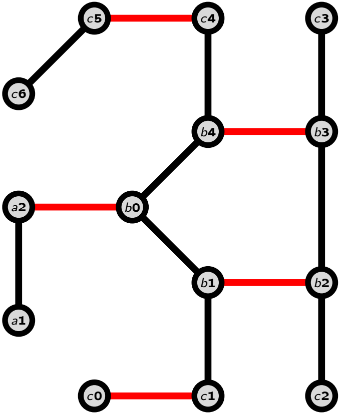
- Problem mit ungeraden Kreisen.
- Wenn wir von a_1 starten, dann gibt es zwei Möglichkeiten.
  - über b_0 und b_1
    - nach c_2
    - nach c_6
  - oder über b_0 und b_4
    - nach c_3
    - nach c_0
- Jeder Knoten aus dem Kreis ist erreichbar.
- Die ausgehende Kante bestimmt den Durchlauf durch den Kreis.



Beispiel

$l(e) = -g_M(e)$

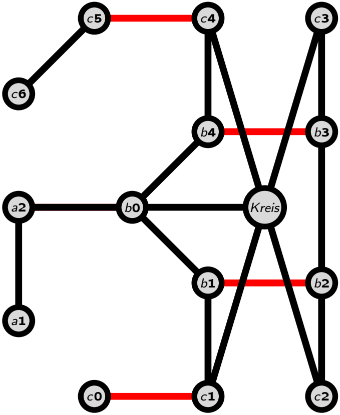
- Problem mit ungeraden Kreisen.
- Wenn wir von a_1 starten, dann gibt es zwei Möglichkeiten.
  - über b_0 und b_1
    - nach c_2
    - nach c_6
  - oder über b_0 und b_4
    - nach c_3
    - nach c_0
- Jeder Knoten aus dem Kreis ist erreichbar.
- Die ausgehende Kante bestimmt den Durchlauf durch den Kreis.
- Daher kann der Kreis durch einen Knoten ersetzt werden.



Beispiel

$l(e) = -g_M(e)$

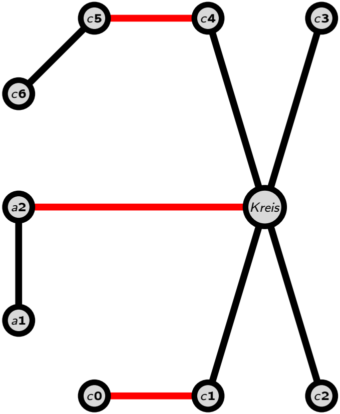
- Problem mit ungeraden Kreisen.
- Wenn wir von a_1 starten, dann gibt es zwei Möglichkeiten.
  - über b_0 und b_1
    - nach c_2
    - nach c_6
  - oder über b_0 und b_4
    - nach c_3
    - nach c_0
- Jeder Knoten aus dem Kreis ist erreichbar.
- Die ausgehende Kante bestimmt den Durchlauf durch den Kreis.
- Daher kann der Kreis durch einen Knoten ersetzt werden.



Beispiel

$l(e) = -g_M(e)$

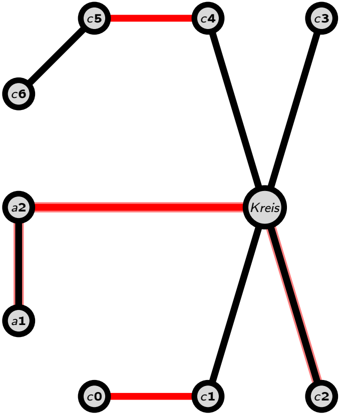
- Problem mit ungeraden Kreisen.
- Wenn wir von a_1 starten, dann gibt es zwei Möglichkeiten.
  - über b_0 und b_1
    - nach c_2
    - nach c_6
  - oder über b_0 und b_4
    - nach c_3
    - nach c_0
- Jeder Knoten aus dem Kreis ist erreichbar.
- Die ausgehende Kante bestimmt den Durchlauf durch den Kreis.
- Daher kann der Kreis durch einen Knoten ersetzt werden.



Beispiel

$l(e) = -g_M(e)$

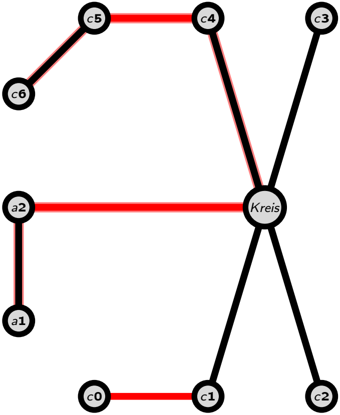
- Problem mit ungeraden Kreisen.
- Wenn wir von a_1 starten, dann gibt es zwei Möglichkeiten.
  - über b_0 und b_1
    - nach c_2
    - nach c_6
  - oder über b_0 und b_4
    - nach c_3
    - nach c_0
- Jeder Knoten aus dem Kreis ist erreichbar.
- Die ausgehende Kante bestimmt den Durchlauf durch den Kreis.
- Daher kann der Kreis durch einen Knoten ersetzt werden.



Beispiel

$l(e) = -g_M(e)$

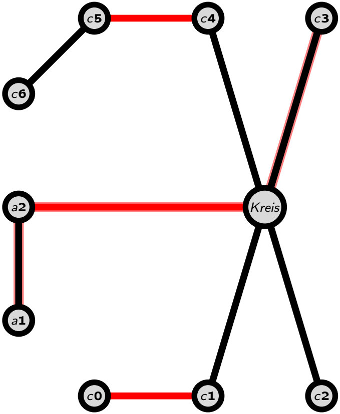
- Problem mit ungeraden Kreisen.
- Wenn wir von a_1 starten, dann gibt es zwei Möglichkeiten.
  - über b_0 und b_1
    - nach c_2
    - nach c_6
  - oder über b_0 und b_4
    - nach c_3
    - nach c_0
- Jeder Knoten aus dem Kreis ist erreichbar.
- Die ausgehende Kante bestimmt den Durchlauf durch den Kreis.
- Daher kann der Kreis durch einen Knoten ersetzt werden.



Beispiel

$l(e) = -g_M(e)$

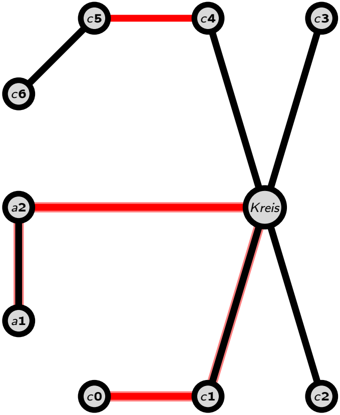
- Problem mit ungeraden Kreisen.
- Wenn wir von a_1 starten, dann gibt es zwei Möglichkeiten.
  - über b_0 und b_1
    - nach c_2
    - nach c_6
  - oder über b_0 und b_4
    - nach c_3
    - nach c_0
- Jeder Knoten aus dem Kreis ist erreichbar.
- Die ausgehende Kante bestimmt den Durchlauf durch den Kreis.
- Daher kann der Kreis durch einen Knoten ersetzt werden.



Beispiel

$l(e) = -g_M(e)$

- Problem mit ungeraden Kreisen.
- Wenn wir von a_1 starten, dann gibt es zwei Möglichkeiten.
  - über b_0 und b_1
    - nach c_2
    - nach c_6
  - oder über b_0 und b_4
    - nach c_3
    - nach c_0
- Jeder Knoten aus dem Kreis ist erreichbar.
- Die ausgehende Kante bestimmt den Durchlauf durch den Kreis.
- Daher kann der Kreis durch einen Knoten ersetzt werden.



Situation

$l(e) = -g_M(e)$

Definition (Blüte)

Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Graph und M Matching in G.
$C = \{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ heißt Blüte, falls

Situation

$l(e) = -g_M(e)$

Definition (Blüte)

Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Graph und M Matching in G.
$C = \{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ heißt Blüte, falls

- $G|C$ ist ein ungerader Kreis (d.h. k ist gerade).

Situation

$l(e) = -g_M(e)$

Definition (Blüte)

Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Graph und M Matching in G.
$C = \{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ heißt Blüte, falls

- $G|C$ ist ein ungerader Kreis (d.h. k ist gerade).
- $\{v_i, v_{i+1}\} \in M$ für $i \in \{1, 3, 5, \ldots, k-1\}$.

Situation

$l(e) = -g_M(e)$

Definition (Blüte)

Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Graph und M Matching in G.
$C = \{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ heißt Blüte, falls

- $G|C$ ist ein ungerader Kreis (d.h. k ist gerade).
- $\{v_i, v_{i+1}\} \in M$ für $i \in \{1, 3, 5, \ldots, k-1\}$.

Situation

$l(e) = -g_M(e)$

Definition (Blüte)

Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Graph und M Matching in G.
$C = \{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ heißt Blüte, falls

- $G|C$ ist ein ungerader Kreis (d.h. k ist gerade).
- $\{v_i, v_{i+1}\} \in M$ für $i \in \{1, 3, 5, \ldots, k-1\}$.

v_0 ist der Startknoten der Blüte C.
Definiere $S(G, C) = (V', E' \cup E'')$ mit:

- $V' = (V \setminus C) \dot{\cup} \{c\}$

Situation

$l(e) = -g_M(e)$

Definition (Blüte)

Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Graph und M Matching in G.
$C = \{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ heißt Blüte, falls

- $G|C$ ist ein ungerader Kreis (d.h. k ist gerade).
- $\{v_i, v_{i+1}\} \in M$ für $i \in \{1, 3, 5, \ldots, k-1\}$.

v_0 ist der Startknoten der Blüte C.
Definiere $S(G, C) = (V', E' \cup E'')$ mit:

- $V' = (V \setminus C)\dot{\cup}\{c\}$
- $E' = \{\{v, w\} \mid \{v, w\} \in E \wedge v, w \in V'\}$

Situation

$l(e) = -g_M(e)$

Definition (Blüte)

Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Graph und M Matching in G.
$C = \{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ heißt Blüte, falls

- $G|C$ ist ein ungerader Kreis (d.h. k ist gerade).
- $\{v_i, v_{i+1}\} \in M$ für $i \in \{1, 3, 5, \ldots, k-1\}$.

v_0 ist der Startknoten der Blüte C.
Definiere $S(G, C) = (V', E' \cup E'')$ mit:

- $V' = (V \setminus C)\dot{\cup}\{c\}$
- $E' = \{\{v, w\} \mid \{v, w\} \in E \land v, w \in V'\}$
- $E'' = \{\{v, c\} \mid \exists w \in C : \{v, w\} \in E\}$

Aufbau der Idee:

$l(e) = -g_M(e)$

- Starte mit einer normalen Suche nach verbessernden Pfaden.

Aufbau der Idee:

$l(e) = -g_M(e)$

- Starte mit einer normalen Suche nach verbessernden Pfaden.
- Falls eine Blüte C in ihrem Startknoten betreten wird, so mache:

Aufbau der Idee:

$l(e) = -g_M(e)$

- Starte mit einer normalen Suche nach verbessernden Pfaden.
- Falls eine Blüte C in ihrem Startknoten betreten wird, so mache:
  - Schrumpfe C zu einem Knoten,

Aufbau der Idee:

$l(e) = -g_M(e)$

- Starte mit einer normalen Suche nach verbessernden Pfaden.
- Falls eine Blüte C in ihrem Startknoten betreten wird, so mache:
  - Schrumpfe C zu einem Knoten,
  - d.h. setze Suche auf $S(G, C)$ fort.

Aufbau der Idee:

$l(e) = -g_M(e)$

- Starte mit einer normalen Suche nach verbessernden Pfaden.
- Falls eine Blüte C in ihrem Startknoten betreten wird, so mache:
  - Schrumpfe C zu einem Knoten,
  - d.h. setze Suche auf $S(G, C)$ fort.
  - Falls verbessernder Pfad gefunden wird, so übertrage diesen auf G.

Aufbau der Idee:

$l(e) = -g_M(e)$

- Starte mit einer normalen Suche nach verbessernden Pfaden.
- Falls eine Blüte C in ihrem Startknoten betreten wird, so mache:
  - Schrumpfe C zu einem Knoten,
  - d.h. setze Suche auf $S(G, C)$ fort.
  - Falls verbessernder Pfad gefunden wird, so übertrage diesen auf G.

Aufbau der Idee:

$l(e) = -g_M(e)$

- Starte mit einer normalen Suche nach verbessernden Pfaden.
- Falls eine Blüte C in ihrem Startknoten betreten wird, so mache:
  - Schrumpfe C zu einem Knoten,
  - d.h. setze Suche auf $S(G, C)$ fort.
  - Falls verbessernder Pfad gefunden wird, so übertrage diesen auf G.

Initialisiere:

1. Eingabe: $G = (V, E)$ und M Matching.

Aufbau der Idee:

$l(e) = -g_M(e)$

- Starte mit einer normalen Suche nach verbessernden Pfaden.
- Falls eine Blüte C in ihrem Startknoten betreten wird, so mache:
    - Schrumpfe C zu einem Knoten,
    - d.h. setze Suche auf $S(G, C)$ fort.
    - Falls verbessernder Pfad gefunden wird, so übertrage diesen auf G.

Initialisiere:

1. Eingabe: $G = (V, E)$ und M Matching.
2. Setze: $G' = (V, E')$ mit $E' = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E\}$.

Aufbau der Idee:

$l(e) = -g_M(e)$

- Starte mit einer normalen Suche nach verbessernden Pfaden.
- Falls eine Blüte C in ihrem Startknoten betreten wird, so mache:
  - Schrumpfe C zu einem Knoten,
  - d.h. setze Suche auf $S(G, C)$ fort.
  - Falls verbessernder Pfad gefunden wird, so übertrage diesen auf G.

Initialisiere:

1. Eingabe: $G = (V, E)$ und M Matching.
2. Setze: $G' = (V, E')$ mit $E' = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E\}$.
3. Für alle $\{v, w\} \in M$ setze: $P(v) = w$ und $P(w) = v$.

Aufbau der Idee:

$l(e) = -g_M(e)$

- Starte mit einer normalen Suche nach verbessernden Pfaden.
- Falls eine Blüte C in ihrem Startknoten betreten wird, so mache:
  - Schrumpfe C zu einem Knoten,
  - d.h. setze Suche auf $S(G, C)$ fort.
  - Falls verbessernder Pfad gefunden wird, so übertrage diesen auf G.

Initialisiere:

1. Eingabe: $G = (V, E)$ und M Matching.
2. Setze: $G' = (V, E')$ mit $E' = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E\}$.
3. Für alle $\{v, w\} \in M$ setze: $P(v) = w$ und $P(w) = v$.
4. Setze: $Z(v) =$ even für alle $v \in V$ mit $v \cap \cup_{e \in E} e \neq \emptyset$

Aufbau der Idee:

$l(e) = -g_M(e)$

- Starte mit einer normalen Suche nach verbessernden Pfaden.
- Falls eine Blüte C in ihrem Startknoten betreten wird, so mache:
  - Schrumpfe C zu einem Knoten,
  - d.h. setze Suche auf $S(G, C)$ fort.
  - Falls verbessernder Pfad gefunden wird, so übertrage diesen auf G.

Initialisiere:

1. Eingabe: $G = (V, E)$ und M Matching.
2. Setze: $G' = (V, E')$ mit $E' = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E\}$.
3. Für alle $\{v, w\} \in M$ setze: $P(v) = w$ und $P(w) = v$.
4. Setze: $Z(v) =$ even für alle $v \in V$ mit $v \cap \cup_{e \in E} e \neq \emptyset$
5. Setze: $Z(v) =$ away für alle $v \in V$ mit $v \cap \cup_{e \in E} e = \emptyset$

Algorithmus (Edmonds)

$l(e) = -g_M(e)$

Algorithmus (Edmonds)

$l(e) = -g_M(e)$

Algorithmus (Edmonds)

$l(e) = -g_M(e)$

1. Wiederhole: Wähle $(v, v') = e \in E'$ mit: $Z(v) =$ even und e ist noch nicht betrachtet worden.

Algorithmus (Edmonds)

$l(e) = -g_M(e)$

1. Wiederhole: Wähle $(v, v') = e \in E'$ mit: $Z(v) =$ even und e ist noch nicht betrachtet worden.
    1. Falls $Z(v') =$ odd, führe nichts aus (Fall 0).

Algorithmus (Edmonds)

$l(e) = -g_M(e)$

1. Wiederhole: Wähle $(v, v') = e \in E'$ mit: $Z(v) =$ even und e ist noch nicht betrachtet worden.
   1. Falls $Z(v') =$ odd, führe nichts aus (Fall 0).
   2. Falls $Z(v') =$ away, führe Fall 1 aus.

Algorithmus (Edmonds)

$l(e) = -g_M(e)$

1. Wiederhole: Wähle $(v, v') = e \in E'$ mit: $Z(v) =$ even und e ist noch nicht betrachtet worden.
   1. Falls $Z(v') =$ odd, führe nichts aus (Fall 0).
   2. Falls $Z(v') =$ away, führe Fall 1 aus.
   3. Falls $Z(v') =$ even und v und v' im selben Baum, führe Fall 2 aus.

Algorithmus (Edmonds)

$l(e) = -g_M(e)$

1. Wiederhole: Wähle $(v, v') = e \in E'$ mit: $Z(v) =$ even und e ist noch nicht betrachtet worden.
   1. Falls $Z(v') =$ odd, führe nichts aus (Fall 0).
   2. Falls $Z(v') =$ away, führe Fall 1 aus.
   3. Falls $Z(v') =$ even und v und v' im selben Baum, führe Fall 2 aus.
   4. Falls $Z(v') =$ even und v und v' nicht im selben Baum, führe Fall 3 aus.

Algorithmus (Edmonds)

$l(e) = -g_M(e)$

1. Wiederhole: Wähle $(v, v') = e \in E'$ mit: $Z(v) =$ even und e ist noch nicht betrachtet worden.
   1. Falls $Z(v') =$ odd, führe nichts aus (Fall 0).
   2. Falls $Z(v') =$ away, führe Fall 1 aus.
   3. Falls $Z(v') =$ even und v und v' im selben Baum, führe Fall 2 aus.
   4. Falls $Z(v') =$ even und v und v' nicht im selben Baum, führe Fall 3 aus.
2. bis Fall 3 eingetreten oder es gibt keine zu untersuchenden Kanten mehr.

Algorithmus (Edmonds)

$l(e) = -g_M(e)$

1. Wiederhole: Wähle $(v, v') = e \in E'$ mit: $Z(v) =$ even und e ist noch nicht betrachtet worden.
   1. Falls $Z(v') =$ odd, führe nichts aus (Fall 0).
   2. Falls $Z(v') =$ away, führe Fall 1 aus.
   3. Falls $Z(v') =$ even und v und v' im selben Baum, führe Fall 2 aus.
   4. Falls $Z(v') =$ even und v und v' nicht im selben Baum, führe Fall 3 aus.
2. bis Fall 3 eingetreten oder es gibt keine zu untersuchenden Kanten mehr.

- Fall 1:
- Fall 2:
- Fall 3:

Algorithmus (Edmonds)

$l(e) = -g_M(e)$

1. Wiederhole: Wähle $(v, v') = e \in E'$ mit: $Z(v) =$ even und e ist noch nicht betrachtet worden.
   1. Falls $Z(v') =$ odd, führe nichts aus (Fall 0).
   2. Falls $Z(v') =$ away, führe Fall 1 aus.
   3. Falls $Z(v') =$ even und v und v' im selben Baum, führe Fall 2 aus.
   4. Falls $Z(v') =$ even und v und v' nicht im selben Baum, führe Fall 3 aus.
2. bis Fall 3 eingetreten oder es gibt keine zu untersuchenden Kanten mehr.

- Fall 1:
  1. $Z(v') =$ odd und $Z(P(v')) =$ even.
- Fall 2:
- Fall 3:

Algorithmus (Edmonds)

$l(e) = -g_M(e)$

1. Wiederhole: Wähle $(v, v') = e \in E'$ mit: $Z(v) =$ even und e ist noch nicht betrachtet worden.
   1. Falls $Z(v') =$ odd, führe nichts aus (Fall 0).
   2. Falls $Z(v') =$ away, führe Fall 1 aus.
   3. Falls $Z(v') =$ even und v und v' im selben Baum, führe Fall 2 aus.
   4. Falls $Z(v') =$ even und v und v' nicht im selben Baum, führe Fall 3 aus.
2. bis Fall 3 eingetreten oder es gibt keine zu untersuchenden Kanten mehr.

- Fall 1:
  1. $Z(v') =$ odd und $Z(P(v')) =$ even.
  2. $p(v') = v$ und $p(P(v')) = v'$.
- Fall 2:
- Fall 3:

Algorithmus (Edmonds)

$l(e) = -g_M(e)$

1. Wiederhole: Wähle $(v, v') = e \in E'$ mit: $Z(v) =$ even und e ist noch nicht betrachtet worden.
   1. Falls $Z(v') =$ odd, führe nichts aus (Fall 0).
   2. Falls $Z(v') =$ away, führe Fall 1 aus.
   3. Falls $Z(v') =$ even und v und v' im selben Baum, führe Fall 2 aus.
   4. Falls $Z(v') =$ even und v und v' nicht im selben Baum, führe Fall 3 aus.
2. bis Fall 3 eingetreten oder es gibt keine zu untersuchenden Kanten mehr.

- Fall 1:
  1. $Z(v') =$ odd und $Z(P(v')) =$ even.
  2. $p(v') = v$ und $p(P(v')) = v'$.
- Fall 2:
  1. v'' sei nächster gemeinsamer Vorfahr.
- Fall 3:

Algorithmus (Edmonds)

$l(e) = -g_M(e)$

1. Wiederhole: Wähle $(v, v') = e \in E'$ mit: $Z(v) =$ even und e ist noch nicht betrachtet worden.
   1. Falls $Z(v') =$ odd, führe nichts aus (Fall 0).
   2. Falls $Z(v') =$ away, führe Fall 1 aus.
   3. Falls $Z(v') =$ even und v und v' im selben Baum, führe Fall 2 aus.
   4. Falls $Z(v') =$ even und v und v' nicht im selben Baum, führe Fall 3 aus.
2. bis Fall 3 eingetreten oder es gibt keine zu untersuchenden Kanten mehr.

- Fall 1:
  1. $Z(v') =$ odd und $Z(P(v')) =$ even.
  2. $p(v') = v$ und $p(P(v')) = v'$.
- Fall 2:
  1. v'' sei nächster gemeinsamer Vorfahr.
  2. Schrumpfe Blüte $v, v', \ldots, v'', \ldots, v$.
- Fall 3:

Algorithmus (Edmonds)

$l(e) = -g_M(e)$

1. Wiederhole: Wähle $(v, v') = e \in E'$ mit: $Z(v) =$ even und e ist noch nicht betrachtet worden.
   1. Falls $Z(v') =$ odd, führe nichts aus (Fall 0).
   2. Falls $Z(v') =$ away, führe Fall 1 aus.
   3. Falls $Z(v') =$ even und v und v' im selben Baum, führe Fall 2 aus.
   4. Falls $Z(v') =$ even und v und v' nicht im selben Baum, führe Fall 3 aus.
2. bis Fall 3 eingetreten oder es gibt keine zu untersuchenden Kanten mehr.

- Fall 1:
  1. $Z(v') =$ odd und $Z(P(v')) =$ even.
  2. $p(v') = v$ und $p(P(v')) = v'$.
- Fall 2:
  1. v'' sei nächster gemeinsamer Vorfahr.
  2. Schrumpfe Blüte $v, v', \dots, v'', \dots, v$.
  3. Passe dabei Daten p an.
- Fall 3:

Algorithmus (Edmonds)

$l(e) = -g_M(e)$

1. Wiederhole: Wähle $(v, v') = e \in E'$ mit: $Z(v) =$ even und e ist noch nicht betrachtet worden.
   1. Falls $Z(v') =$ odd, führe nichts aus (Fall 0).
   2. Falls $Z(v') =$ away, führe Fall 1 aus.
   3. Falls $Z(v') =$ even und v und v' im selben Baum, führe Fall 2 aus.
   4. Falls $Z(v') =$ even und v und v' nicht im selben Baum, führe Fall 3 aus.
2. bis Fall 3 eingetreten oder es gibt keine zu untersuchenden Kanten mehr.

- Fall 1:
  1. $Z(v') =$ odd und $Z(P(v')) =$ even.
  2. $p(v') = v$ und $p(P(v')) = v'$.
- Fall 2:
  1. v'' sei nächster gemeinsamer Vorfahr.
  2. Schrumpfe Blüte $v, v', \ldots, v'', \ldots, v$.
  3. Passe dabei Daten p an.
- Fall 3:
  1. Verbinde v und v'.

Algorithmus (Edmonds)

$l(e) = -g_M(e)$

1. Wiederhole: Wähle $(v, v') = e \in E'$ mit: $Z(v) =$ even und e ist noch nicht betrachtet worden.
   1. Falls $Z(v') =$ odd, führe nichts aus (Fall 0).
   2. Falls $Z(v') =$ away, führe Fall 1 aus.
   3. Falls $Z(v') =$ even und v und v' im selben Baum, führe Fall 2 aus.
   4. Falls $Z(v') =$ even und v und v' nicht im selben Baum, führe Fall 3 aus.
2. bis Fall 3 eingetreten oder es gibt keine zu untersuchenden Kanten mehr.

- Fall 1:
  1. $Z(v') =$ odd und $Z(P(v')) =$ even.
  2. $p(v') = v$ und $p(P(v')) = v'$.
- Fall 2:
  1. v'' sei nächster gemeinsamer Vorfahr.
  2. Schrumpfe Blüte $v, v', \ldots, v'', \ldots, v$.
  3. Passe dabei Daten p an.
- Fall 3:
  1. Verbinde v und v'.
  2. Verbessernder Pfad ist gefunden.

Beispiel

$l(e) = -g_M(e)$

Beispiel

$l(e) = -g_M(e)$

Beispiel

$l(e) = -g_M(e)$

- Wähle Kante v_0, v_4.

Beispiel

$l(e) = -g_M(e)$

- Wähle Kante v_0, v_4.
- Fall 2, Weg: v_0, v_4

Beispiel

$l(e) = -g_M(e)$

- Wähle Kante v_0, v_4.
- Fall 2, Weg: v_0, v_4
- Wähle Kante v_4, v_1.

Beispiel

$l(e) = -g_M(e)$

- Wähle Kante v_0, v_4.
- Fall 2, Weg: v_0, v_4
- Wähle Kante v_4, v_1.
- Fall 2, Weg: v_0, v_4, v_1

Beispiel

$l(e) = -g_M(e)$

- Wähle Kante v_0, v_4.
- Fall 2, Weg: v_0, v_4
- Wähle Kante v_4, v_1.
- Fall 2, Weg: v_0, v_4, v_1
- Wähle Kante v_1, v_2.

Beispiel

$l(e) = -g_M(e)$

- Wähle Kante v_0, v_4.
- Fall 2, Weg: v_0, v_4
- Wähle Kante v_4, v_1.
- Fall 2, Weg: v_0, v_4, v_1
- Wähle Kante v_1, v_2.
- Fall 2, Weg: v_0, v_4, v_1, v_2

Beispiel

$l(e) = -g_M(e)$

- Wähle Kante v_0, v_4.
- Fall 2, Weg: v_0, v_4
- Wähle Kante v_4, v_1.
- Fall 2, Weg: v_0, v_4, v_1
- Wähle Kante v_1, v_2.
- Fall 2, Weg: v_0, v_4, v_1, v_2
- Wähle Kante v_2, v_3.

Beispiel

$l(e) = -g_M(e)$

- Wähle Kante v_0, v_4.
- Fall 2, Weg: v_0, v_4
- Wähle Kante v_4, v_1.
- Fall 2, Weg: v_0, v_4, v_1
- Wähle Kante v_1, v_2.
- Fall 2, Weg: v_0, v_4, v_1, v_2
- Wähle Kante v_2, v_3.
- Fall 2, Weg: v_0, v_4, v_1, v_2, v_3

Beispiel

$l(e) = -g_M(e)$

- Wähle Kante v_0, v_4.
- Fall 2, Weg: v_0, v_4
- Wähle Kante v_4, v_1.
- Fall 2, Weg: v_0, v_4, v_1
- Wähle Kante v_1, v_2.
- Fall 2, Weg: v_0, v_4, v_1, v_2
- Wähle Kante v_2, v_3.
- Fall 2, Weg: v_0, v_4, v_1, v_2, v_3
- Wähle Kante v_3, v_7.

Beispiel

$l(e) = -g_M(e)$

- Wähle Kante v_0, v_4.
- Fall 2, Weg: v_0, v_4
- Wähle Kante v_4, v_1.
- Fall 2, Weg: v_0, v_4, v_1
- Wähle Kante v_1, v_2.
- Fall 2, Weg: v_0, v_4, v_1, v_2
- Wähle Kante v_2, v_3.
- Fall 2, Weg: v_0, v_4, v_1, v_2, v_3
- Wähle Kante v_3, v_7.
- Fall 0, v_3, v_7 ist betrachtet worden.

Beispiel

$l(e) = -g_M(e)$

- Wähle Kante v_0, v_4.
- Fall 2, Weg: v_0, v_4
- Wähle Kante v_4, v_1.
- Fall 2, Weg: v_0, v_4, v_1
- Wähle Kante v_1, v_2.
- Fall 2, Weg: v_0, v_4, v_1, v_2
- Wähle Kante v_2, v_3.
- Fall 2, Weg: v_0, v_4, v_1, v_2, v_3
- Wähle Kante v_3, v_7.
- Fall 0, v_3, v_7 ist betrachtet worden.
- Wähle Kante v_3, v_6.

Beispiel

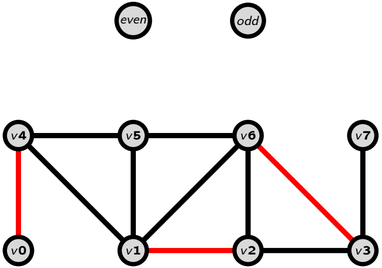
$l(e) = -g_M(e)$

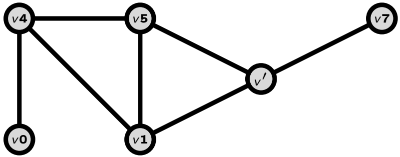
- Wähle Kante v_0, v_4.
- Fall 2, Weg: v_0, v_4
- Wähle Kante v_4, v_1.
- Fall 2, Weg: v_0, v_4, v_1
- Wähle Kante v_1, v_2.
- Fall 2, Weg: v_0, v_4, v_1, v_2
- Wähle Kante v_2, v_3.
- Fall 2, Weg: v_0, v_4, v_1, v_2, v_3
- Wähle Kante v_3, v_7.
- Fall 0, v_3, v_7 ist betrachtet worden.
- Wähle Kante v_3, v_6.
- Fall 2, es wird geschrumpft.

Beispiel

$l(e) = -g_M(e)$

- Wähle Kante v_0, v_4.
- Fall 2, Weg: v_0, v_4
- Wähle Kante v_4, v_1.
- Fall 2, Weg: v_0, v_4, v_1
- Wähle Kante v_1, v_2.
- Fall 2, Weg: v_0, v_4, v_1, v_2
- Wähle Kante v_2, v_3.
- Fall 2, Weg: v_0, v_4, v_1, v_2, v_3
- Wähle Kante v_3, v_7.
- Fall 0, v_3, v_7 ist betrachtet worden.
- Wähle Kante v_3, v_6.
- Fall 2, es wird geschrumpft.





Ergebnisse

$l(e) = -g_M(e)$

Theorem

Auf allgemeinen Graphen ist das Matchingproblem in Zeit $O(m\sqrt{n})$ lösbar.

Beweisidee:

Ergebnisse

$l(e) = -g_M(e)$

Theorem

Auf allgemeinen Graphen ist das Matchingproblem in Zeit $O(m\sqrt{n})$ lösbar.

Beweisidee:

Ergebnisse

$l(e) = -g_M(e)$

Theorem

Auf allgemeinen Graphen ist das Matchingproblem in Zeit $O(m\sqrt{n})$ lösbar.

Beweisidee:

- Kombiniere obigen Algorithmus mit der Suche nach kurzen verbessernden Pfaden.

Ergebnisse

$l(e) = -g_M(e)$

Theorem

Auf allgemeinen Graphen ist das Matchingproblem in Zeit $O(m\sqrt{n})$ lösbar.

Beweisidee:

- Kombiniere obigen Algorithmus mit der Suche nach kurzen verbessernden Pfaden.
- D.h. adaptiere obigen Algorithmus in eine Breitensuche.

Ergebnisse

$l(e) = -g_M(e)$

Theorem

Auf allgemeinen Graphen ist das Matchingproblem in Zeit $O(m\sqrt{n})$ lösbar.

Beweisidee:

- Kombiniere obigen Algorithmus mit der Suche nach kurzen verbessernden Pfaden.
- D.h. adaptiere obigen Algorithmus in eine Breitensuche.
- Verwalte dabei die Pfadlängen korrekt, d.h. beachte die Länge in den Blüten mit.

Ergebnisse

$l(e) = -g_M(e)$

Theorem

Auf allgemeinen Graphen ist das Matchingproblem in Zeit $O(m\sqrt{n})$ lösbar.

Beweisidee:

- Kombiniere obigen Algorithmus mit der Suche nach kurzen verbessernden Pfaden.
- D.h. adaptiere obigen Algorithmus in eine Breitensuche.
- Verwalte dabei die Pfadlängen korrekt, d.h. beachte die Länge in den Blüten mit.
- Die Pfadlänge in den Blüten ist abhängig von den Kanten, die wir zum Betreten und Verlassen nutzen.

Ergebnisse

$l(e) = -g_M(e)$

Theorem

Auf allgemeinen Graphen ist das gewichtete Matchingproblem in Zeit $O(n^3)$ lösbar.

Beweisidee:

Ergebnisse

$l(e) = -g_M(e)$

Theorem

Auf allgemeinen Graphen ist das gewichtete Matchingproblem in Zeit $O(n^3)$ lösbar.

Beweisidee:

Ergebnisse

$l(e) = -g_M(e)$

Theorem

Auf allgemeinen Graphen ist das gewichtete Matchingproblem in Zeit $O(n^3)$ lösbar.

Beweisidee:

- Suche verbessernde Pfade und

Ergebnisse

$l(e) = -g_M(e)$

Theorem

Auf allgemeinen Graphen ist das gewichtete Matchingproblem in Zeit $O(n^3)$ lösbar.

Beweisidee:

- Suche verbessernde Pfade und
- Suche kostenverbessernde alternierende Kreise.

Ergebnisse

$l(e) = -g_M(e)$

Theorem

Auf allgemeinen Graphen ist das gewichtete Matchingproblem in Zeit $O(n^3)$ lösbar.

Beweisidee:

- Suche verbessernde Pfade und
- Suche kostenverbessernde alternierende Kreise.
- Vorgehen wie bei kostenminimalen Flüssen.

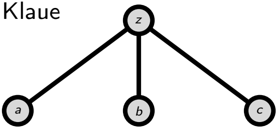
Claw-free

$N(v) = \{w \mid \{w, v\} \in E\}, \; N[v] = N(v) \cup \{v\}$

Claw-free

$N(v) = \{w \mid \{w, v\} \in E\}, \; N[v] = N(v) \cup \{v\}$

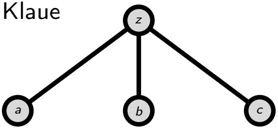
Klaue



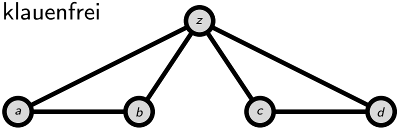
Claw-free

$N(v) = \{w \mid \{w, v\} \in E\}, \;\; N[v] = N(v) \cup \{v\}$

Klaue



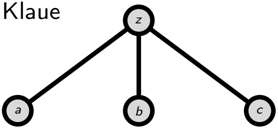
klauenfrei



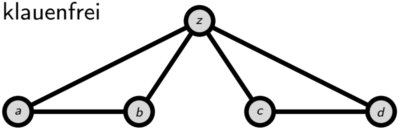
Claw-free

$N(v) = \{w \mid \{w, v\} \in E\}, \ \ N[v] = N(v) \cup \{v\}$

Klaue



klauenfrei



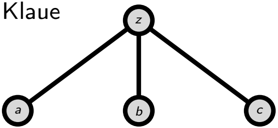
Definition (Claw-free (klauenfrei))

G heißt klauenfrei, falls kein knoteninduzierter Teilgraph eine Klaue ist.

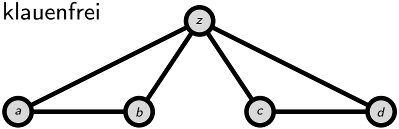
Claw-free

$N(v) = \{w \mid \{w, v\} \in E\}, \ \ N[v] = N(v) \cup \{v\}$

Klaue



klauenfrei



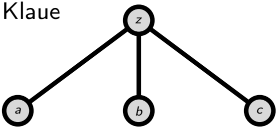
Definition (Claw-free (klauenfrei))

G heißt klauenfrei, falls kein knoteninduzierter Teilgraph eine Klaue ist.

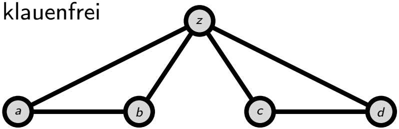
Claw-free

$N(v) = \{w \mid \{w, v\} \in E\}, \; N[v] = N(v) \cup \{v\}$

Klaue



klauenfrei



Definition (Claw-free (klauenfrei))

G heißt klauenfrei, falls kein knoteninduzierter Teilgraph eine Klaue ist.

- Ziel: Bestimme die größte stabile Menge (independent set) auf klauenfreien Graphen.

Claw-free

$N(v) = \{w \mid \{w, v\} \in E\}, \; N[v] = N(v) \cup \{v\}$

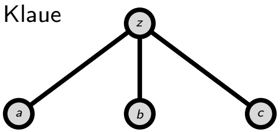
Definition (Claw-free (klauenfrei))

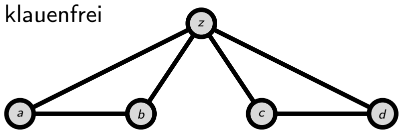
G heißt klauenfrei, falls kein knoteninduzierter Teilgraph eine Klaue ist.

- Ziel: Bestimme die größte stabile Menge (independent set) auf klauenfreien Graphen.
- Dazu betrachten wir eine Teilklasse der klauenfreien Graphen.

Claw-free

$N(v) = \{w \mid \{w, v\} \in E\}, \ N[v] = N(v) \cup \{v\}$





Definition (Claw-free (klauenfrei))

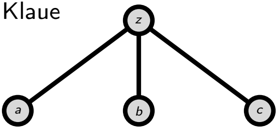
G heißt klauenfrei, falls kein knoteninduzierter Teilgraph eine Klaue ist.

- Ziel: Bestimme die größte stabile Menge (independent set) auf klauenfreien Graphen.
- Dazu betrachten wir eine Teilklasse der klauenfreien Graphen.
- Auf Kantengraphen entspricht das Bestimmen einer stabilen Menge einem Matching.

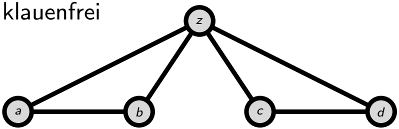
Claw-free

$N(v) = \{w \mid \{w, v\} \in E\}, \; N[v] = N(v) \cup \{v\}$

Klaue



klauenfrei



Definition (Claw-free (klauenfrei))

G heißt klauenfrei, falls kein knoteninduzierter Teilgraph eine Klaue ist.

- Ziel: Bestimme die größte stabile Menge (independent set) auf klauenfreien Graphen.
- Dazu betrachten wir eine Teilklasse der klauenfreien Graphen.
- Auf Kantengraphen entspricht das Bestimmen einer stabilen Menge einem Matching.
- Dann übertragen wir das Vorgehen “verbessernde Pfade” auf klauenfreie Graphen.

Kantengraphen

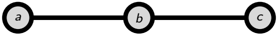
$N(v) = \{w \mid \{w, v\} \in E\}, \; N[v] = N(v) \cup \{v\}$

Definition (Kantengraph)

Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Graph. $L(G) = (E, E')$ heißt Kantengraph von G, falls

$$E' = \{\{e, e'\} \mid e, e' \in E \wedge e \cap e' \neq \emptyset\}.$$

Ein Graph H heißt Kantengraph, falls es einen Graphen G gibt, mit $L(G) = H$.



Kantengraphen

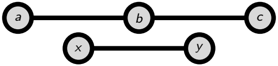
$N(v) = \{w \mid \{w, v\} \in E\}, \; N[v] = N(v) \cup \{v\}$

Definition (Kantengraph)

Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Graph. $L(G) = (E, E')$ heißt Kantengraph von G, falls

$$E' = \{\{e, e'\} \mid e, e' \in E \wedge e \cap e' \neq \emptyset\}.$$

Ein Graph H heißt Kantengraph, falls es einen Graphen G gibt, mit $L(G) = H$.



Kantengraphen

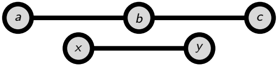
$N(v) = \{w \mid \{w, v\} \in E\}, \; N[v] = N(v) \cup \{v\}$

Definition (Kantengraph)

Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Graph. $L(G) = (E, E')$ heißt Kantengraph von G, falls

$$E' = \{\{e, e'\} \mid e, e' \in E \wedge e \cap e' \neq \emptyset\}.$$

Ein Graph H heißt Kantengraph, falls es einen Graphen G gibt, mit $L(G) = H$.



Kantengraphen

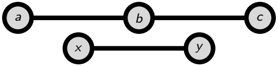
$N(v) = \{w \mid \{w, v\} \in E\}, \; N[v] = N(v) \cup \{v\}$

Definition (Kantengraph)

Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Graph. $L(G) = (E, E')$ heißt Kantengraph von G, falls

$$E' = \{\{e, e'\} \mid e, e' \in E \wedge e \cap e' \neq \emptyset\}.$$

Ein Graph H heißt Kantengraph, falls es einen Graphen G gibt, mit $L(G) = H$.



Kantengraphen

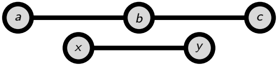
$N(v) = \{w \mid \{w, v\} \in E\}, \;\; N[v] = N(v) \cup \{v\}$

Definition (Kantengraph)

Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Graph. $L(G) = (E, E')$ heißt Kantengraph von G, falls

$$E' = \{\{e, e'\} \mid e, e' \in E \wedge e \cap e' \neq \emptyset\}.$$

Ein Graph H heißt Kantengraph, falls es einen Graphen G gibt, mit $L(G) = H$.



Lemma

Kantengraphen sind klauenfrei.

Kantengraphen

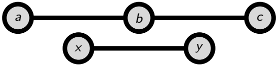
$N(v) = \{w \mid \{w, v\} \in E\}, \ N[v] = N(v) \cup \{v\}$

Definition (Kantengraph)

Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Graph. $L(G) = (E, E')$ heißt Kantengraph von G, falls

$$E' = \{\{e, e'\} \mid e, e' \in E \wedge e \cap e' \neq \emptyset\}.$$

Ein Graph H heißt Kantengraph, falls es einen Graphen G gibt, mit $L(G) = H$.



Lemma

Kantengraphen sind klauenfrei.

Kantengraphen

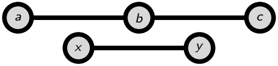
$N(v) = \{w \mid \{w,v\} \in E\}$, $N[v] = N(v) \cup \{v\}$

Definition (Kantengraph)

Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Graph. $L(G) = (E, E')$ heißt Kantengraph von G, falls

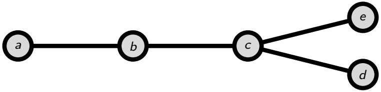
$$E' = \{\{e, e'\} \mid e, e' \in E \wedge e \cap e' \neq \emptyset\}.$$

Ein Graph H heißt Kantengraph, falls es einen Graphen G gibt, mit $L(G) = H$.

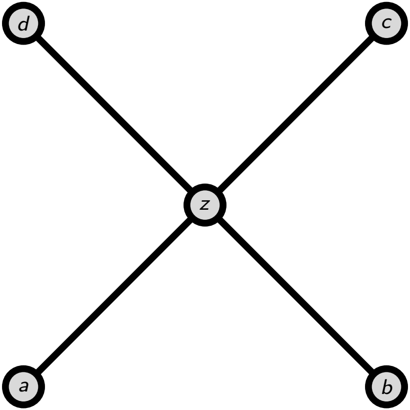


Lemma

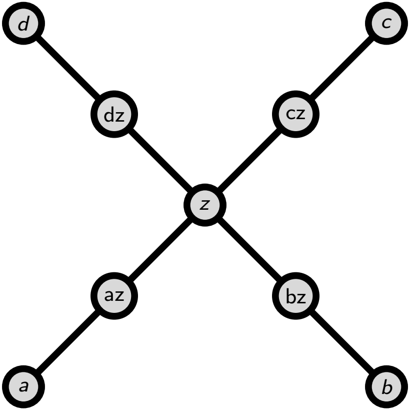
Kantengraphen sind klauenfrei.



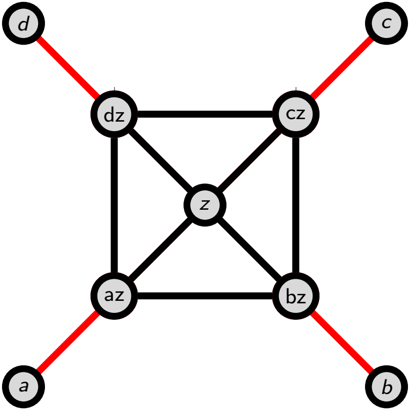
Beispiel 1



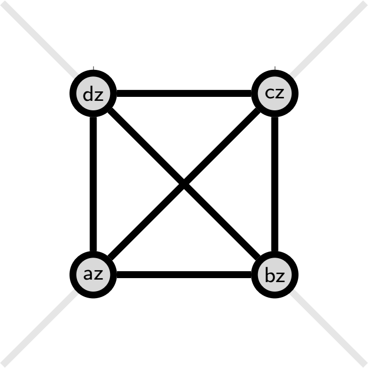
Beispiel 1



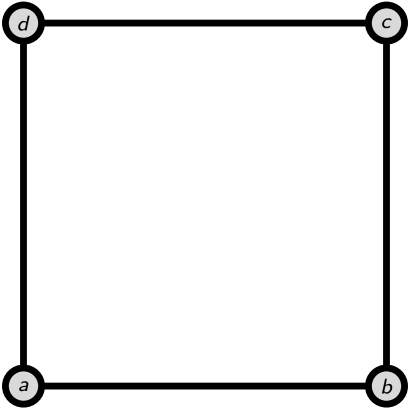
Beispiel 1



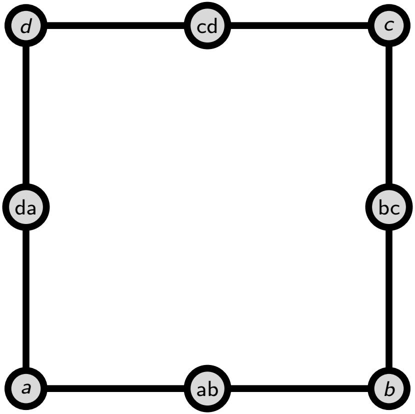
Beispiel 1



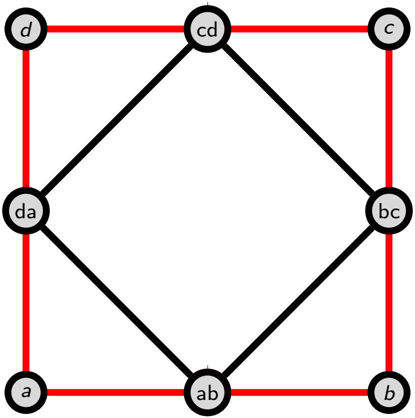
Beispiel 2



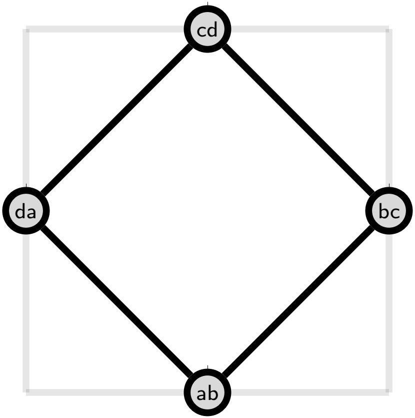
Beispiel 2



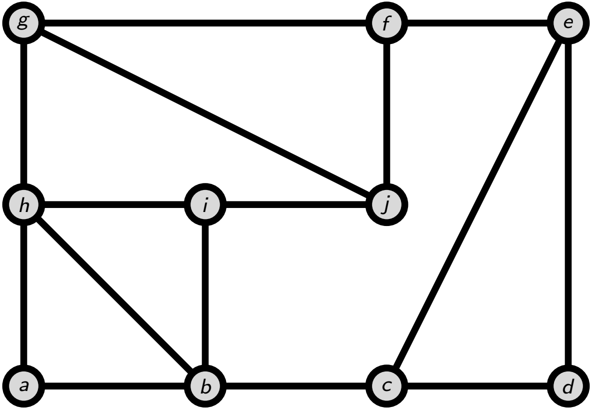
Beispiel 2



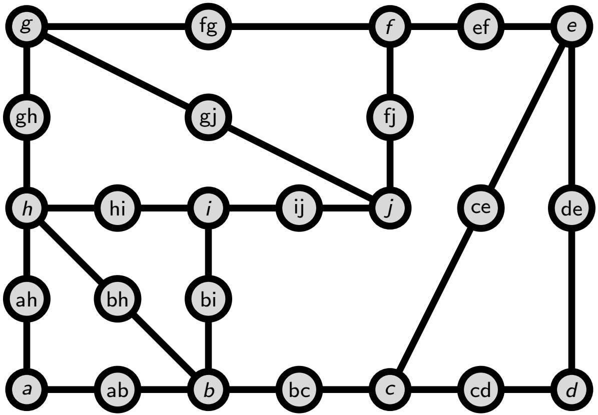
Beispiel 2



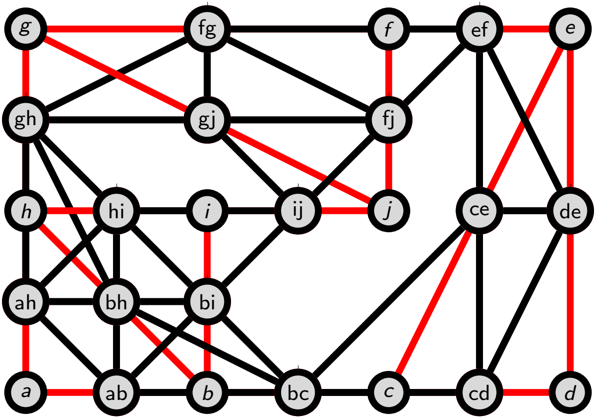
Beispiel 3



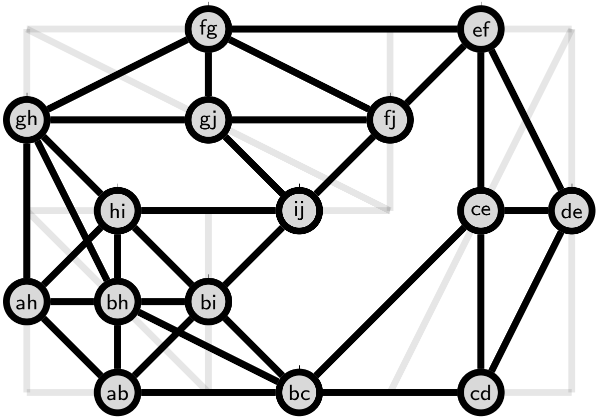
Beispiel 3



Beispiel 3



Beispiel 3



Aussagen

Lemma

Für Kantengraphen G kann, falls H mit $L(H) = G$ bekannt ist, eine größte stabile Menge in Zeit $O(m\sqrt{n})$ bestimmt werden.
(Das Erkennungsproblem für Kantengraphen ist in $\mathcal{P}$.)

Beweis: Übung.

Aussagen

Lemma

Für Kantengraphen G kann, falls H mit $L(H) = G$ bekannt ist, eine größte stabile Menge in Zeit $O(m\sqrt{n})$ bestimmt werden.
(Das Erkennungsproblem für Kantengraphen ist in $\mathcal{P}$.)

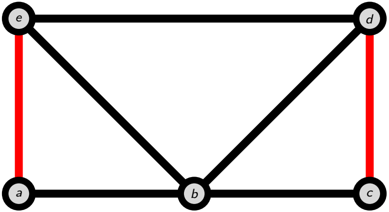
Beweis: Übung.

Aussagen

Lemma

Für Kantengraphen G kann, falls H mit $L(H) = G$ bekannt ist, eine größte stabile Menge in Zeit $O(m\sqrt{n})$ bestimmt werden.
(Das Erkennungsproblem für Kantengraphen ist in $\mathcal{P}$.)

Beweis: Übung.

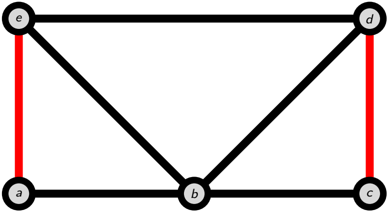


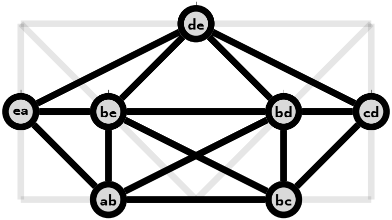
Aussagen

Lemma

Für Kantengraphen G kann, falls H mit $L(H) = G$ bekannt ist, eine größte stabile Menge in Zeit $O(m\sqrt{n})$ bestimmt werden.
(Das Erkennungsproblem für Kantengraphen ist in $\mathcal{P}$.)

Beweis: Übung.





Aussagen

$G|W = (W, \{e \mid e \in E \wedge e \setminus W = \emptyset\})$

Definition (Independent Set (Stabile Menge))

Sei $G = (V, E)$. Die Größe der größten stabilen Menge wird mit $\alpha(G)$ bezeichnet:

$$\alpha(G) = \max_{I \subset V \wedge E(G|I) = \emptyset} |I|$$

Aussagen

$G|W = (W, \{e \mid e \in E \wedge e \setminus W = \emptyset\})$

Definition (Independent Set (Stabile Menge))

Sei $G = (V, E)$. Die Größe der größten stabilen Menge wird mit $\alpha(G)$ bezeichnet:

$$\alpha(G) = \max_{I \subset V \wedge E(G|I) = \emptyset} |I|$$

Aussagen

$G|W = (W, \{e \mid e \in E \wedge e \setminus W = \emptyset\})$

Definition (Independent Set (Stabile Menge))

Sei $G = (V, E)$. Die Größe der größten stabilen Menge wird mit $\alpha(G)$ bezeichnet:

$$\alpha(G) = \max_{I \subset V \wedge E(G|I) = \emptyset} |I|$$

Lemma (Claw-free (klauenfrei))

$G = (V, E)$ ist klauenfrei, falls $\forall v \in V : \alpha(G|N[V]) \leqslant 2$.

Beweis: Übung:

Aussagen

$G|W = (W, \{e \mid e \in E \wedge e \setminus W = \emptyset\})$

Definition (Independent Set (Stabile Menge))

Sei $G = (V, E)$. Die Größe der größten stabilen Menge wird mit $\alpha(G)$ bezeichnet:

$$\alpha(G) = \max_{I \subset V \wedge E(G|I) = \emptyset} |I|$$

Lemma (Claw-free (klauenfrei))

$G = (V, E)$ ist klauenfrei, falls $\forall v \in V : \alpha(G|N[V]) \leqslant 2$.

Beweis: Übung:

Aussagen

$G|W = (W, \{e \mid e \in E \wedge e \setminus W = \emptyset\})$

Definition (Independent Set (Stabile Menge))

Sei $G = (V, E)$. Die Größe der größten stabilen Menge wird mit $\alpha(G)$ bezeichnet:

$$\alpha(G) = \max_{I \subset V \wedge E(G|I) = \emptyset} |I|$$

Lemma (Claw-free (klauenfrei))

$G = (V, E)$ ist klauenfrei, falls $\forall v \in V : \alpha(G|N[V]) \leqslant 2$.

Beweis: Übung:

Theorem

Für klauenfreie Graphen G ist das Bestimmen von $\alpha(G)$ in $\mathcal{P}$.

Idee

- Gegeben sei $G = (V, E)$ und S stabile Menge auf G.

Idee

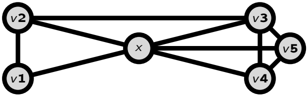
- Gegeben sei $G = (V, E)$ und S stabile Menge auf G.
- Vergrößere schrittweise S durch eine "alternierende Menge (Pfad)"

Idee

- Gegeben sei $G = (V, E)$ und S stabile Menge auf G.
- Vergrößere schrittweise S durch eine “alternierende Menge (Pfad)”
- Die Knoten aus S nennen wir “rote Knoten”, alle anderen sind “weiß”.

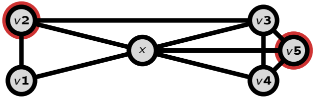
Idee

- Gegeben sei $G = (V, E)$ und S stabile Menge auf G.
- Vergrößere schrittweise S durch eine "alternierende Menge (Pfad)"
- Die Knoten aus S nennen wir "rote Knoten", alle anderen sind "weiß".
- Erste Klassifizierung der weißen Knoten



Idee

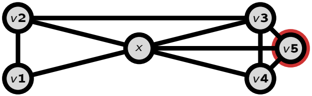
- Gegeben sei $G = (V, E)$ und S stabile Menge auf G.
- Vergrößere schrittweise S durch eine "alternierende Menge (Pfad)"
- Die Knoten aus S nennen wir "rote Knoten", alle anderen sind "weiß".
- Erste Klassifizierung der weißen Knoten



gebunden: benachbart mit zwei roten Knoten.

Idee

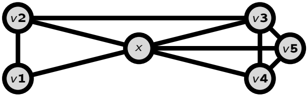
- Gegeben sei $G = (V, E)$ und S stabile Menge auf G.
- Vergrößere schrittweise S durch eine "alternierende Menge (Pfad)"
- Die Knoten aus S nennen wir "rote Knoten", alle anderen sind "weiß".
- Erste Klassifizierung der weißen Knoten



gebunden: benachbart mit zwei roten Knoten.
beweglich: benachbart mit einem roten Knoten.

Idee

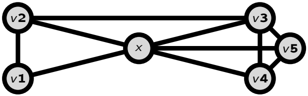
- Gegeben sei $G = (V, E)$ und S stabile Menge auf G.
- Vergrößere schrittweise S durch eine "alternierende Menge (Pfad)"
- Die Knoten aus S nennen wir "rote Knoten", alle anderen sind "weiß".
- Erste Klassifizierung der weißen Knoten



gebunden: benachbart mit zwei roten Knoten.
beweglich: benachbart mit einem roten Knoten.
frei: benachbart mit keinem roten Knoten.

Idee

- Gegeben sei $G = (V, E)$ und S stabile Menge auf G.
- Vergrößere schrittweise S durch eine “alternierende Menge (Pfad)”
- Die Knoten aus S nennen wir “rote Knoten”, alle anderen sind “weiß”.
- Erste Klassifizierung der weißen Knoten

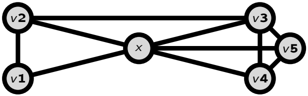


gebunden: benachbart mit zwei roten Knoten.
beweglich: benachbart mit einem roten Knoten.
frei: benachbart mit keinem roten Knoten.

- Knoten die frei sind, können wir sofort in die stabile Menge aufnehmen.

Idee

- Gegeben sei $G = (V, E)$ und S stabile Menge auf G.
- Vergrößere schrittweise S durch eine "alternierende Menge (Pfad)"
- Die Knoten aus S nennen wir "rote Knoten", alle anderen sind "weiß".
- Erste Klassifizierung der weißen Knoten

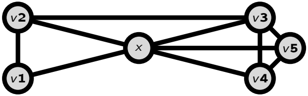


gebunden: benachbart mit zwei roten Knoten.
beweglich: benachbart mit einem roten Knoten.
frei: benachbart mit keinem roten Knoten.

- Knoten die frei sind, können wir sofort in die stabile Menge aufnehmen.
- D.h. im Folgenden keine freien Knoten.

Idee

- Gegeben sei $G = (V, E)$ und S stabile Menge auf G.
- Vergrößere schrittweise S durch eine "alternierende Menge (Pfad)"
- Die Knoten aus S nennen wir "rote Knoten", alle anderen sind "weiß".
- Erste Klassifizierung der weißen Knoten



gebunden: benachbart mit zwei roten Knoten.
beweglich: benachbart mit einem roten Knoten.
frei: benachbart mit keinem roten Knoten.

- Knoten die frei sind, können wir sofort in die stabile Menge aufnehmen.
- D.h. im Folgenden keine freien Knoten.
- Nun definieren wir das Analogon zu den alternierenden Pfaden.

Alternierende Mengen

Definition

Gegeben sei $G = (V, E)$ klauenfrei und $S \subset V$ stabile Menge. Eine Knotenmenge $P \subset V$ heißt alternierende Menge, falls die weißen Knoten von P eine stabile Menge in $G|P$ sind.

Alternierende Mengen

Definition

Gegeben sei $G = (V, E)$ klauenfrei und $S \subset V$ stabile Menge. Eine Knotenmenge $P \subset V$ heißt alternierende Menge, falls die weißen Knoten von P eine stabile Menge in $G|P$ sind.

Lemma

Eine alternierende Menge P auf einem klauenfreien Graphen ist ein Pfad oder ein Kreis. D.h. $\delta(G|V(P)) \leqslant 2$.

Alternierende Mengen

Definition

Gegeben sei $G = (V, E)$ klauenfrei und $S \subset V$ stabile Menge. Eine Knotenmenge $P \subset V$ heißt alternierende Menge, falls die weißen Knoten von P eine stabile Menge in $G|P$ sind.

Lemma

Eine alternierende Menge P auf einem klauenfreien Graphen ist ein Pfad oder ein Kreis. D.h. $\delta(G|V(P)) \leqslant 2$.

Alternierende Mengen

Definition

Gegeben sei $G = (V, E)$ klauenfrei und $S \subset V$ stabile Menge. Eine Knotenmenge $P \subset V$ heißt alternierende Menge, falls die weißen Knoten von P eine stabile Menge in $G|P$ sind.

Lemma

Eine alternierende Menge P auf einem klauenfreien Graphen ist ein Pfad oder ein Kreis. D.h. $\delta(G|V(P)) \leqslant 2$.

Beweis: $V(P) \cap S$ und $V(P) \cap (V \setminus S)$ sind stabile Mengen. Mit $\forall v \in V : \alpha(G|N[V]) \leqslant 2$ folgt die Behauptung.

Verbessernde Pfade

Definition (Verbessernder Pfad)

Falls eine alternierende Menge ein Pfad P ist, mit:

Verbessernde Pfade

Definition (Verbessernder Pfad)

Falls eine alternierende Menge ein Pfad P ist, mit:

- Die Endpunkte sind weiss.

Verbessernde Pfade

Definition (Verbessernder Pfad)

Falls eine alternierende Menge ein Pfad P ist, mit:

- Die Endpunkte sind weiss.
- Die Endpunkte sind nicht verbunden.

Verbessernde Pfade

Definition (Verbessernder Pfad)

Falls eine alternierende Menge ein Pfad P ist, mit:

- Die Endpunkte sind weiss.
- Die Endpunkte sind nicht verbunden.
- Es gibt keine Kanten zwischen weissen Knoten auf dem Pfad.

Verbessernde Pfade

Definition (Verbessernder Pfad)

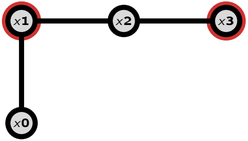
Falls eine alternierende Menge ein Pfad P ist, mit:

- Die Endpunkte sind weiss.
- Die Endpunkte sind nicht verbunden.
- Es gibt keine Kanten zwischen weissen Knoten auf dem Pfad.
  - Hier reicht es aus zu fordern: Keine Kanten zwischen weissen Knoten, die einen Abstand von zwei haben auf P.

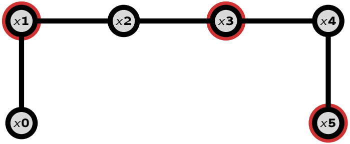
Einige hilfreiche Strukturen

Einige hilfreiche Strukturen

Einige hilfreiche Strukturen

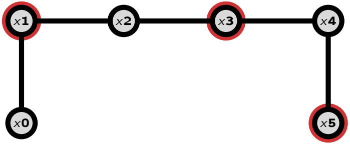


Einige hilfreiche Strukturen



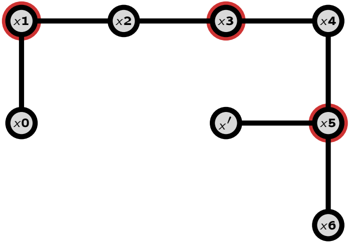
- Sei x_0 beweglicher Knoten.

Einige hilfreiche Strukturen



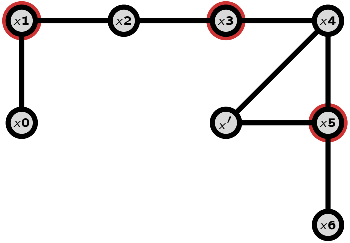
- Sei x_0 beweglicher Knoten.
- Dann ist x_1 eindeutig bestimmt.

Einige hilfreiche Strukturen



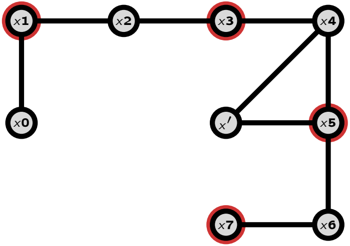
- Sei x_0 beweglicher Knoten.
- Dann ist x_1 eindeutig bestimmt.
- Das kann ggf. eindeutig weiter gehen.

Einige hilfreiche Strukturen



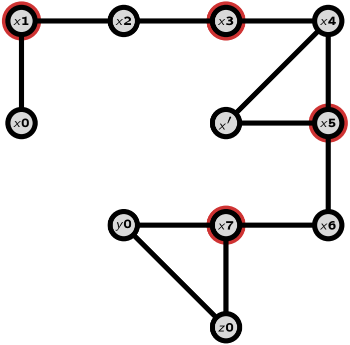
- Sei x_0 beweglicher Knoten.
- Dann ist x_1 eindeutig bestimmt.
- Das kann ggf. eindeutig weiter gehen.
- Aufteilung geht nur an einem roten Knoten (x_5).

Einige hilfreiche Strukturen



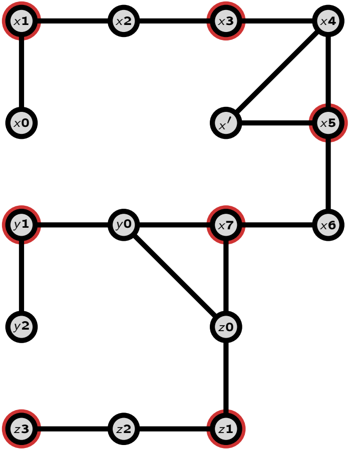
- Sei x_0 beweglicher Knoten.
- Dann ist x_1 eindeutig bestimmt.
- Das kann ggf. eindeutig weiter gehen.
- Aufteilung geht nur an einem roten Knoten (x_5).
- Dann gibt es Kante in $N(x_5)$.

Einige hilfreiche Strukturen



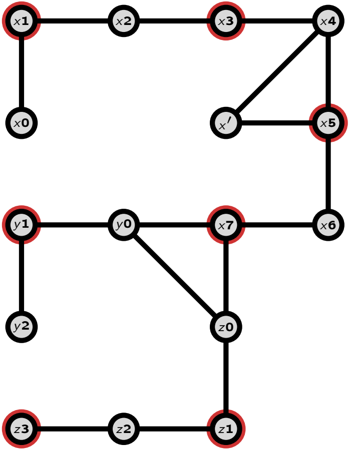
- Sei x_0 beweglicher Knoten.
- Dann ist x_1 eindeutig bestimmt.
- Das kann ggf. eindeutig weiter gehen.
- Aufteilung geht nur an einem roten Knoten (x_5).
- Dann gibt es Kante in $N(x_5)$.
- Dann geht der Weg eindeutig weiter: x_6, x_7.

Einige hilfreiche Strukturen



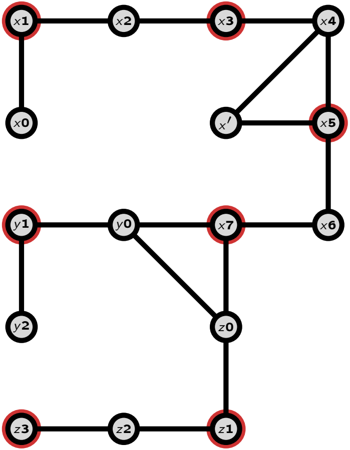
- Sei x_0 beweglicher Knoten.
- Dann ist x_1 eindeutig bestimmt.
- Das kann ggf. eindeutig weiter gehen.
- Aufteilung geht nur an einem roten Knoten (x_5).
- Dann gibt es Kante in $N(x_5)$.
- Dann geht der Weg eindeutig weiter: x_6, x_7.
- Andere Aufteilung an x_7.

Einige hilfreiche Strukturen



- Sei x_0 beweglicher Knoten.
- Dann ist x_1 eindeutig bestimmt.
- Das kann ggf. eindeutig weiter gehen.
- Aufteilung geht nur an einem roten Knoten (x_5).
- Dann gibt es Kante in $N(x_5)$.
- Dann geht der Weg eindeutig weiter: x_6, x_7.
- Andere Aufteilung an x_7.
- Jede Alternative ist möglich.

Einige hilfreiche Strukturen



- Sei x_0 beweglicher Knoten.
- Dann ist x_1 eindeutig bestimmt.
- Das kann ggf. eindeutig weiter gehen.
- Aufteilung geht nur an einem roten Knoten (x_5).
- Dann gibt es Kante in $N(x_5)$.
- Dann geht der Weg eindeutig weiter: x_6, x_7.
- Andere Aufteilung an x_7.
- Jede Alternative ist möglich.
- Algorithmisch ergibt sich aber eine einfache Verzweigungsstruktur.

Algorithmus

- Eine vollständige Untersuchung ergibt, dass das Suchen nach den verbessernden Pfaden möglich ist.

Algorithmus

- Eine vollständige Untersuchung ergibt, dass das Suchen nach den verbessernden Pfaden möglich ist.
- Wird hier nicht vorgeführt.

Algorithmus

- Eine vollständige Untersuchung ergibt, dass das Suchen nach den verbessernden Pfaden möglich ist.
- Wird hier nicht vorgeführt.
- Ist Graphentheorie.

Algorithmus

- Eine vollständige Untersuchung ergibt, dass das Suchen nach den verbessernden Pfaden möglich ist.
- Wird hier nicht vorgeführt.
- Ist Graphentheorie.
- Am Ende ergibt sich aber ein ähnlicher Algorithmus:

Algorithmus

- Eine vollständige Untersuchung ergibt, dass das Suchen nach den verbessernden Pfaden möglich ist.
- Wird hier nicht vorgeführt.
- Ist Graphentheorie.
- Am Ende ergibt sich aber ein ähnlicher Algorithmus:

Algorithmus

- Eine vollständige Untersuchung ergibt, dass das Suchen nach den verbessernden Pfaden möglich ist.
- Wird hier nicht vorgeführt.
- Ist Graphentheorie.
- Am Ende ergibt sich aber ein ähnlicher Algorithmus:

1. Gegeben $G = (V, E)$ klauenfreier Graph

Algorithmus

- Eine vollständige Untersuchung ergibt, dass das Suchen nach den verbessernden Pfaden möglich ist.
- Wird hier nicht vorgeführt.
- Ist Graphentheorie.
- Am Ende ergibt sich aber ein ähnlicher Algorithmus:

1. Gegeben $G = (V, E)$ klauenfreier Graph
2. $S = \emptyset$

Algorithmus

- Eine vollständige Untersuchung ergibt, dass das Suchen nach den verbessernden Pfaden möglich ist.
- Wird hier nicht vorgeführt.
- Ist Graphentheorie.
- Am Ende ergibt sich aber ein ähnlicher Algorithmus:

1. Gegeben $G = (V, E)$ klauenfreier Graph
2. $S = \emptyset$
3. Solange es verbessernden Pfad P gibt, mache:

Algorithmus

- Eine vollständige Untersuchung ergibt, dass das Suchen nach den verbessernden Pfaden möglich ist.
- Wird hier nicht vorgeführt.
- Ist Graphentheorie.
- Am Ende ergibt sich aber ein ähnlicher Algorithmus:

1. Gegeben $G = (V, E)$ klauenfreier Graph
2. $S = \emptyset$
3. Solange es verbessernden Pfad P gibt, mache:
    1. Setze $S = S \oplus V(P)$

Algorithmus

- Eine vollständige Untersuchung ergibt, dass das Suchen nach den verbessernden Pfaden möglich ist.
- Wird hier nicht vorgeführt.
- Ist Graphentheorie.
- Am Ende ergibt sich aber ein ähnlicher Algorithmus:

1. Gegeben $G = (V, E)$ klauenfreier Graph
2. $S = \emptyset$
3. Solange es verbessernden Pfad P gibt, mache:
   1. Setze $S = S \oplus V(P)$
4. Ausgabe: S.

Definition

- Gegeben vollständiger bipartiter Graph (A, B, E) mit $|A| = |B|$.

Definition

- Gegeben vollständiger bipartiter Graph (A, B, E) mit $|A| = |B|$.
- Eine Sympathieliste $L(A)$ ist eine totale Ordnung auf A: $a_1 < a_2 < \dots a_n$.

Definition

- Gegeben vollständiger bipartiter Graph (A, B, E) mit $|A| = |B|$.
- Eine Sympathieliste $L(A)$ ist eine totale Ordnung auf A: $a_1 < a_2 < \ldots a_n$.
- Für jedes $a \in A$ gibt es Sympathieliste $L_a(B)$

Definition

- Gegeben vollständiger bipartiter Graph (A, B, E) mit $|A| = |B|$.
- Eine Sympathieliste $L(A)$ ist eine totale Ordnung auf A: $a_1 < a_2 < \ldots a_n$.
- Für jedes $a \in A$ gibt es Sympathieliste $L_a(B)$
- Für jedes $b \in B$ gibt es Sympathieliste $L_b(A)$

Definition

- Gegeben vollständiger bipartiter Graph (A, B, E) mit $|A| = |B|$.
- Eine Sympathieliste $L(A)$ ist eine totale Ordnung auf A: $a_1 < a_2 < \ldots a_n$.
- Für jedes $a \in A$ gibt es Sympathieliste $L_a(B)$
- Für jedes $b \in B$ gibt es Sympathieliste $L_b(A)$
- Ziel: Bestimme stabile Paarung (perfektes Matching), mit:

Definition

- Gegeben vollständiger bipartiter Graph (A, B, E) mit $|A| = |B|$.
- Eine Sympathieliste $L(A)$ ist eine totale Ordnung auf A: $a_1 < a_2 < \ldots a_n$.
- Für jedes $a \in A$ gibt es Sympathieliste $L_a(B)$
- Für jedes $b \in B$ gibt es Sympathieliste $L_b(A)$
- Ziel: Bestimme stabile Paarung (perfektes Matching), mit:
  - Kein Paar a, b ist unzufrieden, d.h.

Definition

- Gegeben vollständiger bipartiter Graph (A, B, E) mit $|A| = |B|$.
- Eine Sympathieliste $L(A)$ ist eine totale Ordnung auf A: $a_1 < a_2 < \ldots a_n$.
- Für jedes $a \in A$ gibt es Sympathieliste $L_a(B)$
- Für jedes $b \in B$ gibt es Sympathieliste $L_b(A)$
- Ziel: Bestimme stabile Paarung (perfektes Matching), mit:
    - Kein Paar a, b ist unzufrieden, d.h.
    - $(a, b) \notin M$ und $(a, b') \in M$, $(a', b) \in M$ mit:

Definition

- Gegeben vollständiger bipartiter Graph (A, B, E) mit $|A| = |B|$.
- Eine Sympathieliste $L(A)$ ist eine totale Ordnung auf A: $a_1 < a_2 < \ldots a_n$.
- Für jedes $a \in A$ gibt es Sympathieliste $L_a(B)$
- Für jedes $b \in B$ gibt es Sympathieliste $L_b(A)$
- Ziel: Bestimme stabile Paarung (perfektes Matching), mit:
  - Kein Paar a, b ist unzufrieden, d.h.
  - $(a, b) \notin M$ und $(a, b') \in M$, $(a', b) \in M$ mit:
  - $b <_{L_a(B)} b'$, d.h. a bevorzugt b vor b' und

Definition

- Gegeben vollständiger bipartiter Graph (A, B, E) mit $|A| = |B|$.
- Eine Sympathieliste $L(A)$ ist eine totale Ordnung auf A: $a_1 < a_2 < \ldots a_n$.
- Für jedes $a \in A$ gibt es Sympathieliste $L_a(B)$
- Für jedes $b \in B$ gibt es Sympathieliste $L_b(A)$
- Ziel: Bestimme stabile Paarung (perfektes Matching), mit:
  - Kein Paar a, b ist unzufrieden, d.h.
  - $(a, b) \notin M$ und $(a, b') \in M$, $(a', b) \in M$ mit:
  - $b <_{L_a(B)} b'$, d.h. a bevorzugt b vor b' und
  - $a <_{L_b(A)} a'$, d.h. b bevorzugt a vor a'

Beispiel

$$
\begin{array}{lcllcl}
L_{a_1}(B) & = & (b_2, b_5, b_1, b_3, b_4) & L_{b_1}(A) & = & (a_5, a_1, a_4, a_2, a_3) \\
L_{a_2}(B) & = & (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) & L_{b_2}(A) & = & (a_4, a_5, a_2, a_1, a_3) \\
L_{a_3}(B) & = & (b_2, b_3, b_5, b_4, b_1) & L_{b_3}(A) & = & (a_1, a_4, a_2, a_3, a_5) \\
L_{a_4}(B) & = & (b_1, b_3, b_2, b_4, b_5) & L_{b_4}(A) & = & (a_3, a_2, a_4, a_1, a_5) \\
L_{a_5}(B) & = & (b_5, b_3, b_2, b_1, b_4) & L_{b_5}(A) & = & (a_4, a_2, a_3, a_5, a_1)
\end{array}
$$

- Paarung A: $(a_1, b_1)(a_2, b_3)(a_3, b_2)(a_4, b_4)(a_5, b_5)$

Beispiel

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
L_{a_1}(B) & = & (b_2, b_5, b_1, b_3, b_4) & L_{b_1}(A) & = & (a_5, a_1, a_4, a_2, a_3) \\
L_{a_2}(B) & = & (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) & L_{b_2}(A) & = & (a_4, a_5, a_2, a_1, a_3) \\
L_{a_3}(B) & = & (b_2, b_3, b_5, b_4, b_1) & L_{b_3}(A) & = & (a_1, a_4, a_2, a_3, a_5) \\
L_{a_4}(B) & = & (b_1, b_3, b_2, b_4, b_5) & L_{b_4}(A) & = & (a_3, a_2, a_4, a_1, a_5) \\
L_{a_5}(B) & = & (b_5, b_3, b_2, b_1, b_4) & L_{b_5}(A) & = & (a_4, a_2, a_3, a_5, a_1)
\end{array}
$$

- Paarung A: $(a_1, b_1)(a_2, b_3)(a_3, b_2)(a_4, b_4)(a_5, b_5)$
- Paarung B: $(a_1, b_1)(a_2, b_4)(a_3, b_5)(a_4, b_3)(a_5, b_2)$

Beispiel

$$
\begin{array}{lcllcl}
L_{a_1}(B) & = & (b_2, b_5, b_1, b_3, b_4) & L_{b_1}(A) & = & (a_5, a_1, a_4, a_2, a_3) \\
L_{a_2}(B) & = & (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) & L_{b_2}(A) & = & (a_4, a_5, a_2, a_1, a_3) \\
L_{a_3}(B) & = & (b_2, b_3, b_5, b_4, b_1) & L_{b_3}(A) & = & (a_1, a_4, a_2, a_3, a_5) \\
L_{a_4}(B) & = & (b_1, b_3, b_2, b_4, b_5) & L_{b_4}(A) & = & (a_3, a_2, a_4, a_1, a_5) \\
L_{a_5}(B) & = & (b_5, b_3, b_2, b_1, b_4) & L_{b_5}(A) & = & (a_4, a_2, a_3, a_5, a_1)
\end{array}
$$

- Paarung A: $(a_1, b_1)(a_2, b_3)(a_3, b_2)(a_4, b_4)(a_5, b_5)$
- Paarung B: $(a_1, b_1)(a_2, b_4)(a_3, b_5)(a_4, b_3)(a_5, b_2)$
- Paarung A ist nicht stabil: (a_1, b_2) sind unzufrieden.

Beispiel

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
L_{a_1}(B) & = & (b_2, b_5, b_1, b_3, b_4) & L_{b_1}(A) & = & (a_5, a_1, a_4, a_2, a_3) \\
L_{a_2}(B) & = & (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) & L_{b_2}(A) & = & (a_4, a_5, a_2, a_1, a_3) \\
L_{a_3}(B) & = & (b_2, b_3, b_5, b_4, b_1) & L_{b_3}(A) & = & (a_1, a_4, a_2, a_3, a_5) \\
L_{a_4}(B) & = & (b_1, b_3, b_2, b_4, b_5) & L_{b_4}(A) & = & (a_3, a_2, a_4, a_1, a_5) \\
L_{a_5}(B) & = & (b_5, b_3, b_2, b_1, b_4) & L_{b_5}(A) & = & (a_4, a_2, a_3, a_5, a_1)
\end{array}
$$

- Paarung A: $(a_1, b_1)(a_2, b_3)(a_3, b_2)(a_4, b_4)(a_5, b_5)$
- Paarung B: $(a_1, b_1)(a_2, b_4)(a_3, b_5)(a_4, b_3)(a_5, b_2)$
- Paarung A ist nicht stabil: (a_1, b_2) sind unzufrieden.
- Paarung B ist stabil.

Algorithmus (Gale und Shapley)

1. Setze $M = \emptyset$

Algorithmus (Gale und Shapley)

1. Setze $M = \emptyset$
2. Solange es noch einen $a_i \in A$ gibt, mit $a_i \notin \cup_{e \in M} e$, mache

Algorithmus (Gale und Shapley)

1. Setze $M = \emptyset$
2. Solange es noch einen $a_i \in A$ gibt, mit $a_i \notin \cup_{e \in M} e$, mache
   1. Sei b_j erstes Element in $L_{a_i}(B)$.

Algorithmus (Gale und Shapley)

1. Setze $M = \emptyset$
2. Solange es noch einen $a_i \in A$ gibt, mit $a_i \notin \cup_{e \in M} e$, mache
   1. Sei b_j erstes Element in $L_{a_i}(B)$.
   2. Lösche b_j aus $L_{a_i}(B)$.

Algorithmus (Gale und Shapley)

1. Setze $M = \emptyset$
2. Solange es noch einen $a_i \in A$ gibt, mit $a_i \notin \cup_{e \in M} e$, mache
   1. Sei b_j erstes Element in $L_{a_i}(B)$.
   2. Lösche b_j aus $L_{a_i}(B)$.
   3. Falls $b_j \notin \cup_{e \in M} e$ gilt, so setze: $M = M \cup \{a_i, b_j\}$.

Algorithmus (Gale und Shapley)

1. Setze $M = \emptyset$
2. Solange es noch einen $a_i \in A$ gibt, mit $a_i \notin \cup_{e \in M} e$, mache
    1. Sei b_j erstes Element in $L_{a_i}(B)$.
    2. Lösche b_j aus $L_{a_i}(B)$.
    3. Falls $b_j \notin \cup_{e \in M} e$ gilt, so setze: $M = M \cup \{a_i, b_j\}$.
    4. Falls $b_j \in \cup_{e \in M} e$ und sei $\{a_k, b_j\} \in M$ dann mache:

Algorithmus (Gale und Shapley)

1. Setze $M = \emptyset$
2. Solange es noch einen $a_i \in A$ gibt, mit $a_i \notin \cup_{e \in M} e$, mache
    1. Sei b_j erstes Element in $L_{a_i}(B)$.
    2. Lösche b_j aus $L_{a_i}(B)$.
    3. Falls $b_j \notin \cup_{e \in M} e$ gilt, so setze: $M = M \cup \{a_i, b_j\}$.
    4. Falls $b_j \in \cup_{e \in M} e$ und sei $\{a_k, b_j\} \in M$ dann mache:
        1. Falls $a_i <_{L_{b_j}(A)} a_k$, dann setze: $M = (M \setminus \{\{a_k, b_j\}\}) \cup \{a_i, b_j\}$.

Algorithmus (Gale und Shapley)

1. Setze $M = \emptyset$
2. Solange es noch einen $a_i \in A$ gibt, mit $a_i \notin \cup_{e \in M} e$, mache
    1. Sei b_j erstes Element in $L_{a_i}(B)$.
    2. Lösche b_j aus $L_{a_i}(B)$.
    3. Falls $b_j \notin \cup_{e \in M} e$ gilt, so setze: $M = M \cup \{a_i, b_j\}$.
    4. Falls $b_j \in \cup_{e \in M} e$ und sei $\{a_k, b_j\} \in M$ dann mache:
        1. Falls $a_i <_{L_{b_j}(A)} a_k$, dann setze: $M = (M \setminus \{\{a_k, b_j\}\}) \cup \{a_i, b_j\}$.

Algorithmus (Gale und Shapley)

1. Setze $M = \emptyset$
2. Solange es noch einen $a_i \in A$ gibt, mit $a_i \notin \cup_{e \in M} e$, mache
   1. Sei b_j erstes Element in $L_{a_i}(B)$.
   2. Lösche b_j aus $L_{a_i}(B)$.
   3. Falls $b_j \notin \cup_{e \in M} e$ gilt, so setze: $M = M \cup \{a_i, b_j\}$.
   4. Falls $b_j \in \cup_{e \in M} e$ und sei $\{a_k, b_j\} \in M$ dann mache:
      1. Falls $a_i <_{L_{b_j}(A)} a_k$, dann setze: $M = (M \setminus \{\{a_k, b_j\}\}) \cup \{a_i, b_j\}$.

Theorem (Gale und Shapley)

Der Algorithmus terminert nach $O(n^2)$ Runden mit einer stabilen Paarung.

Beispiel

$$
\begin{array}{lcllcl}
L_{a_1}(B) & = & (b_2, b_5, b_1, b_3, b_4) & L_{b_1}(A) & = & (a_5, a_1, a_4, a_2, a_3) \\
L_{a_2}(B) & = & (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) & L_{b_2}(A) & = & (a_4, a_5, a_2, a_1, a_3) \\
L_{a_3}(B) & = & (b_2, b_3, b_5, b_4, b_1) & L_{b_3}(A) & = & (a_1, a_4, a_2, a_3, a_5) \\
L_{a_4}(B) & = & (b_1, b_3, b_2, b_4, b_5) & L_{b_4}(A) & = & (a_3, a_2, a_4, a_1, a_5) \\
L_{a_5}(B) & = & (b_5, b_3, b_2, b_1, b_4) & L_{b_5}(A) & = & (a_4, a_2, a_3, a_5, a_1)
\end{array}
$$

Ablauf des Verfahrens:

- $M_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y aufgenommen.

$$
\begin{array}{lcl}
\text{Partner}(a_1) & = & b_2, b_2, b_5, b_5, b_1, b_3, b_4 \\
\text{Partner}(a_2) & = & b_1, b_1, b_2, b_2, b_3, b_4, b_5 \\
\text{Partner}(a_3) & = & b_2, b_3, b_3, b_5, b_4, b_1 \\
\text{Partner}(a_4) & = & b_1, b_1, b_3, b_2, b_4, b_5 \\
\text{Partner}(a_5) & = & b_5, b_5, b_3, b_2, b_1, b_4
\end{array}
$$

Beispiel

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
L_{a_1}(B) & = & (b_2, b_5, b_1, b_3, b_4) & L_{b_1}(A) & = & (a_5, a_1, a_4, a_2, a_3) \\
L_{a_2}(B) & = & (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) & L_{b_2}(A) & = & (a_4, a_5, a_2, a_1, a_3) \\
L_{a_3}(B) & = & (b_2, b_3, b_5, b_4, b_1) & L_{b_3}(A) & = & (a_1, a_4, a_2, a_3, a_5) \\
L_{a_4}(B) & = & (b_1, b_3, b_2, b_4, b_5) & L_{b_4}(A) & = & (a_3, a_2, a_4, a_1, a_5) \\
L_{a_5}(B) & = & (b_5, b_3, b_2, b_1, b_4) & L_{b_5}(A) & = & (a_4, a_2, a_3, a_5, a_1)
\end{array}
$$

Ablauf des Verfahrens:

- $M_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y aufgenommen.
- $F_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y angefragt.

$$
\begin{array}{lcl}
\text{Partner}(a_1) & = & M_2(b_2), b_2, b_5, b_5, b_1, b_3, b_4 \\
\text{Partner}(a_2) & = & b_1, b_1, b_2, b_2, b_3, b_4, b_5 \\
\text{Partner}(a_3) & = & b_2, b_3, b_3, b_5, b_4, b_1 \\
\text{Partner}(a_4) & = & b_1, b_1, b_3, b_2, b_4, b_5 \\
\text{Partner}(a_5) & = & b_5, b_5, b_3, b_2, b_1, b_4
\end{array}
$$

Beispiel

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
L_{a_1}(B) & = & (b_2, b_5, b_1, b_3, b_4) & L_{b_1}(A) & = & (a_5, a_1, a_4, a_2, a_3) \\
L_{a_2}(B) & = & (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) & L_{b_2}(A) & = & (a_4, a_5, a_2, a_1, a_3) \\
L_{a_3}(B) & = & (b_2, b_3, b_5, b_4, b_1) & L_{b_3}(A) & = & (a_1, a_4, a_2, a_3, a_5) \\
L_{a_4}(B) & = & (b_1, b_3, b_2, b_4, b_5) & L_{b_4}(A) & = & (a_3, a_2, a_4, a_1, a_5) \\
L_{a_5}(B) & = & (b_5, b_3, b_2, b_1, b_4) & L_{b_5}(A) & = & (a_4, a_2, a_3, a_5, a_1)
\end{array}
$$

Ablauf des Verfahrens:

- $M_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y aufgenommen.
- $F_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y angefragt.
- $S_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y gelöst.

$$
\begin{array}{lcl}
\text{Partner}(a_1) & = & M_2(b_2), b_2, b_5, b_5, b_1, b_3, b_4 \\
\text{Partner}(a_2) & = & M_3(b_1), b_1, b_2, b_2, b_3, b_4, b_5 \\
\text{Partner}(a_3) & = & b_2, b_3, b_3, b_5, b_4, b_1 \\
\text{Partner}(a_4) & = & b_1, b_1, b_3, b_2, b_4, b_5 \\
\text{Partner}(a_5) & = & b_5, b_5, b_3, b_2, b_1, b_4
\end{array}
$$

Beispiel

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
L_{a_1}(B) & = & (b_2, b_5, b_1, b_3, b_4) & L_{b_1}(A) & = & (a_5, a_1, a_4, a_2, a_3) \\
L_{a_2}(B) & = & (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) & L_{b_2}(A) & = & (a_4, a_5, a_2, a_1, a_3) \\
L_{a_3}(B) & = & (b_2, b_3, b_5, b_4, b_1) & L_{b_3}(A) & = & (a_1, a_4, a_2, a_3, a_5) \\
L_{a_4}(B) & = & (b_1, b_3, b_2, b_4, b_5) & L_{b_4}(A) & = & (a_3, a_2, a_4, a_1, a_5) \\
L_{a_5}(B) & = & (b_5, b_3, b_2, b_1, b_4) & L_{b_5}(A) & = & (a_4, a_2, a_3, a_5, a_1)
\end{array}
$$

Ablauf des Verfahrens:

- $M_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y aufgenommen.
- $F_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y angefragt.
- $S_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y gelöst.

$$
\begin{array}{lcl}
\text{Partner}(a_1) & = & M_2(b_2), b_2, b_5, b_5, b_1, b_3, b_4 \\
\text{Partner}(a_2) & = & M_3(b_1), b_1, b_2, b_2, b_3, b_4, b_5 \\
\text{Partner}(a_3) & = & F_4(b_2), b_3, b_3, b_5, b_4, b_1 \\
\text{Partner}(a_4) & = & b_1, b_1, b_3, b_2, b_4, b_5 \\
\text{Partner}(a_5) & = & b_5, b_5, b_3, b_2, b_1, b_4
\end{array}
$$

Beispiel

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
L_{a_1}(B) & = & (b_2, b_5, b_1, b_3, b_4) & L_{b_1}(A) & = & (a_5, a_1, a_4, a_2, a_3) \\
L_{a_2}(B) & = & (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) & L_{b_2}(A) & = & (a_4, a_5, a_2, a_1, a_3) \\
L_{a_3}(B) & = & (b_2, b_3, b_5, b_4, b_1) & L_{b_3}(A) & = & (a_1, a_4, a_2, a_3, a_5) \\
L_{a_4}(B) & = & (b_1, b_3, b_2, b_4, b_5) & L_{b_4}(A) & = & (a_3, a_2, a_4, a_1, a_5) \\
L_{a_5}(B) & = & (b_5, b_3, b_2, b_1, b_4) & L_{b_5}(A) & = & (a_4, a_2, a_3, a_5, a_1)
\end{array}
$$

Ablauf des Verfahrens:

- $M_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y aufgenommen.
- $F_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y angefragt.
- $S_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y gelöst.

$$
\begin{array}{lcl}
\text{Partner}(a_1) & = & M_2(b_2), b_2, b_5, b_5, b_1, b_3, b_4 \\
\text{Partner}(a_2) & = & M_3(b_1), b_1, b_2, b_2, b_3, b_4, b_5 \\
\text{Partner}(a_3) & = & F_4(b_2), M_5(b_3), b_3, b_5, b_4, b_1 \\
\text{Partner}(a_4) & = & b_1, b_1, b_3, b_2, b_4, b_5 \\
\text{Partner}(a_5) & = & b_5, b_5, b_3, b_2, b_1, b_4
\end{array}
$$

Beispiel

$$
\begin{aligned}
L_{a_1}(B) &= (b_2, b_5, b_1, b_3, b_4) & L_{b_1}(A) &= (a_5, a_1, a_4, a_2, a_3)\\
L_{a_2}(B) &= (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) & L_{b_2}(A) &= (a_4, a_5, a_2, a_1, a_3)\\
L_{a_3}(B) &= (b_2, b_3, b_5, b_4, b_1) & L_{b_3}(A) &= (a_1, a_4, a_2, a_3, a_5)\\
L_{a_4}(B) &= (b_1, b_3, b_2, b_4, b_5) & L_{b_4}(A) &= (a_3, a_2, a_4, a_1, a_5)\\
L_{a_5}(B) &= (b_5, b_3, b_2, b_1, b_4) & L_{b_5}(A) &= (a_4, a_2, a_3, a_5, a_1)
\end{aligned}
$$

Ablauf des Verfahrens:

- $M_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y aufgenommen.
- $F_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y angefragt.
- $S_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y gelöst.

$$
\begin{aligned}
\text{Partner}(a_1) &= M_2(b_2), b_2, b_5, b_5, b_1, b_3, b_4\\
\text{Partner}(a_2) &= M_3(b_1), S_6(b_1), b_2, b_2, b_3, b_4, b_5\\
\text{Partner}(a_3) &= F_4(b_2), M_5(b_3), b_3, b_5, b_4, b_1\\
\text{Partner}(a_4) &= M_6(b_1), b_1, b_3, b_2, b_4, b_5\\
\text{Partner}(a_5) &= b_5, b_5, b_3, b_2, b_1, b_4
\end{aligned}
$$

Beispiel

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
L_{a_1}(B) & = & (b_2, b_5, b_1, b_3, b_4) & L_{b_1}(A) & = & (a_5, a_1, a_4, a_2, a_3) \\
L_{a_2}(B) & = & (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) & L_{b_2}(A) & = & (a_4, a_5, a_2, a_1, a_3) \\
L_{a_3}(B) & = & (b_2, b_3, b_5, b_4, b_1) & L_{b_3}(A) & = & (a_1, a_4, a_2, a_3, a_5) \\
L_{a_4}(B) & = & (b_1, b_3, b_2, b_4, b_5) & L_{b_4}(A) & = & (a_3, a_2, a_4, a_1, a_5) \\
L_{a_5}(B) & = & (b_5, b_3, b_2, b_1, b_4) & L_{b_5}(A) & = & (a_4, a_2, a_3, a_5, a_1)
\end{array}
$$

Ablauf des Verfahrens:

- $M_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y aufgenommen.
- $F_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y angefragt.
- $S_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y gelöst.

$$
\begin{array}{lcl}
\text{Partner}(a_1) & = & M_2(b_2), S_7(b_2), b_5, b_5, b_1, b_3, b_4 \\
\text{Partner}(a_2) & = & M_3(b_1), S_6(b_1), M_7(b_2), b_2, b_3, b_4, b_5 \\
\text{Partner}(a_3) & = & F_4(b_2), M_5(b_3), b_3, b_5, b_4, b_1 \\
\text{Partner}(a_4) & = & M_6(b_1), b_1, b_3, b_2, b_4, b_5 \\
\text{Partner}(a_5) & = & b_5, b_5, b_3, b_2, b_1, b_4
\end{array}
$$

Beispiel

$$\begin{array}{lcllcl}
L_{a_1}(B) & = & (b_2, b_5, b_1, b_3, b_4) & L_{b_1}(A) & = & (a_5, a_1, a_4, a_2, a_3) \\
L_{a_2}(B) & = & (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) & L_{b_2}(A) & = & (a_4, a_5, a_2, a_1, a_3) \\
L_{a_3}(B) & = & (b_2, b_3, b_5, b_4, b_1) & L_{b_3}(A) & = & (a_1, a_4, a_2, a_3, a_5) \\
L_{a_4}(B) & = & (b_1, b_3, b_2, b_4, b_5) & L_{b_4}(A) & = & (a_3, a_2, a_4, a_1, a_5) \\
L_{a_5}(B) & = & (b_5, b_3, b_2, b_1, b_4) & L_{b_5}(A) & = & (a_4, a_2, a_3, a_5, a_1)
\end{array}$$

Ablauf des Verfahrens:

- $M_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y aufgenommen.
- $F_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y angefragt.
- $S_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y gelöst.

$$\begin{array}{lcl}
\text{Partner}(a_1) & = & M_2(b_2), S_7(b_2), M_8(b_5), b_5, b_1, b_3, b_4 \\
\text{Partner}(a_2) & = & M_3(b_1), S_6(b_1), M_7(b_2), b_2, b_3, b_4, b_5 \\
\text{Partner}(a_3) & = & F_4(b_2), M_5(b_3), b_3, b_5, b_4, b_1 \\
\text{Partner}(a_4) & = & M_6(b_1), b_1, b_3, b_2, b_4, b_5 \\
\text{Partner}(a_5) & = & b_5, b_5, b_3, b_2, b_1, b_4
\end{array}$$

Beispiel

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
L_{a_1}(B) & = & (b_2, b_5, b_1, b_3, b_4) & L_{b_1}(A) & = & (a_5, a_1, a_4, a_2, a_3) \\
L_{a_2}(B) & = & (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) & L_{b_2}(A) & = & (a_4, a_5, a_2, a_1, a_3) \\
L_{a_3}(B) & = & (b_2, b_3, b_5, b_4, b_1) & L_{b_3}(A) & = & (a_1, a_4, a_2, a_3, a_5) \\
L_{a_4}(B) & = & (b_1, b_3, b_2, b_4, b_5) & L_{b_4}(A) & = & (a_3, a_2, a_4, a_1, a_5) \\
L_{a_5}(B) & = & (b_5, b_3, b_2, b_1, b_4) & L_{b_5}(A) & = & (a_4, a_2, a_3, a_5, a_1)
\end{array}
$$

Ablauf des Verfahrens:

- $M_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y aufgenommen.
- $F_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y angefragt.
- $S_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y gelöst.

$$
\begin{array}{lcl}
\text{Partner}(a_1) & = & M_2(b_2), S_7(b_2), M_8(b_5), S_9(b_5), b_1, b_3, b_4 \\
\text{Partner}(a_2) & = & M_3(b_1), S_6(b_1), M_7(b_2), b_2, b_3, b_4, b_5 \\
\text{Partner}(a_3) & = & F_4(b_2), M_5(b_3), b_3, b_5, b_4, b_1 \\
\text{Partner}(a_4) & = & M_6(b_1), b_1, b_3, b_2, b_4, b_5 \\
\text{Partner}(a_5) & = & M_9(b_5), b_5, b_3, b_2, b_1, b_4
\end{array}
$$

Beispiel

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
L_{a_1}(B) & = & (b_2, b_5, b_1, b_3, b_4) & L_{b_1}(A) & = & (a_5, a_1, a_4, a_2, a_3) \\
L_{a_2}(B) & = & (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) & L_{b_2}(A) & = & (a_4, a_5, a_2, a_1, a_3) \\
L_{a_3}(B) & = & (b_2, b_3, b_5, b_4, b_1) & L_{b_3}(A) & = & (a_1, a_4, a_2, a_3, a_5) \\
L_{a_4}(B) & = & (b_1, b_3, b_2, b_4, b_5) & L_{b_4}(A) & = & (a_3, a_2, a_4, a_1, a_5) \\
L_{a_5}(B) & = & (b_5, b_3, b_2, b_1, b_4) & L_{b_5}(A) & = & (a_4, a_2, a_3, a_5, a_1)
\end{array}
$$

Ablauf des Verfahrens:

- $M_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y aufgenommen.
- $F_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y angefragt.
- $S_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y gelöst.

$$
\begin{array}{lcl}
\text{Partner}(a_1) & = & M_2(b_2), S_7(b_2), M_8(b_5), S_9(b_5), M_{10}(b_1), b_3, b_4 \\
\text{Partner}(a_2) & = & M_3(b_1), S_6(b_1), M_7(b_2), b_2, b_3, b_4, b_5 \\
\text{Partner}(a_3) & = & F_4(b_2), M_5(b_3), b_3, b_5, b_4, b_1 \\
\text{Partner}(a_4) & = & M_6(b_1), S_{10}(b_1), b_3, b_2, b_4, b_5 \\
\text{Partner}(a_5) & = & M_9(b_5), b_5, b_3, b_2, b_1, b_4
\end{array}
$$

Beispiel

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
L_{a_1}(B) & = & (b_2, b_5, b_1, b_3, b_4) & L_{b_1}(A) & = & (a_5, a_1, a_4, a_2, a_3) \\
L_{a_2}(B) & = & (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) & L_{b_2}(A) & = & (a_4, a_5, a_2, a_1, a_3) \\
L_{a_3}(B) & = & (b_2, b_3, b_5, b_4, b_1) & L_{b_3}(A) & = & (a_1, a_4, a_2, a_3, a_5) \\
L_{a_4}(B) & = & (b_1, b_3, b_2, b_4, b_5) & L_{b_4}(A) & = & (a_3, a_2, a_4, a_1, a_5) \\
L_{a_5}(B) & = & (b_5, b_3, b_2, b_1, b_4) & L_{b_5}(A) & = & (a_4, a_2, a_3, a_5, a_1)
\end{array}$$

Ablauf des Verfahrens:

- $M_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y aufgenommen.
- $F_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y angefragt.
- $S_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y gelöst.

$$\begin{array}{lcl}
\text{Partner}(a_1) & = & M_2(b_2), S_7(b_2), M_8(b_5), S_9(b_5), M_{10}(b_1), b_3, b_4 \\
\text{Partner}(a_2) & = & M_3(b_1), S_6(b_1), M_7(b_2), b_2, b_3, b_4, b_5 \\
\text{Partner}(a_3) & = & F_4(b_2), M_5(b_3), S_{11}(b_3), b_5, b_4, b_1 \\
\text{Partner}(a_4) & = & M_6(b_1), S_{10}(b_1), M_{11}(b_3), b_2, b_4, b_5 \\
\text{Partner}(a_5) & = & M_9(b_5), b_5, b_3, b_2, b_1, b_4
\end{array}$$

Beispiel

$$
\begin{array}{lclclcl}
L_{a_1}(B) & = & (b_2, b_5, b_1, b_3, b_4) & \quad & L_{b_1}(A) & = & (a_5, a_1, a_4, a_2, a_3) \\
L_{a_2}(B) & = & (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) & & L_{b_2}(A) & = & (a_4, a_5, a_2, a_1, a_3) \\
L_{a_3}(B) & = & (b_2, b_3, b_5, b_4, b_1) & & L_{b_3}(A) & = & (a_1, a_4, a_2, a_3, a_5) \\
L_{a_4}(B) & = & (b_1, b_3, b_2, b_4, b_5) & & L_{b_4}(A) & = & (a_3, a_2, a_4, a_1, a_5) \\
L_{a_5}(B) & = & (b_5, b_3, b_2, b_1, b_4) & & L_{b_5}(A) & = & (a_4, a_2, a_3, a_5, a_1)
\end{array}
$$

Ablauf des Verfahrens:

- $M_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y aufgenommen.
- $F_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y angefragt.
- $S_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y gelöst.

$$
\begin{array}{lcl}
\text{Partner}(a_1) & = & M_2(b_2), S_7(b_2), M_8(b_5), S_9(b_5), M_{10}(b_1), b_3, b_4 \\
\text{Partner}(a_2) & = & M_3(b_1), S_6(b_1), M_7(b_2), b_2, b_3, b_4, b_5 \\
\text{Partner}(a_3) & = & F_4(b_2), M_5(b_3), S_{11}(b_3), M_{12}(b_5), b_4, b_1 \\
\text{Partner}(a_4) & = & M_6(b_1), S_{10}(b_1), M_{11}(b_3), b_2, b_4, b_5 \\
\text{Partner}(a_5) & = & M_9(b_5), S_{12}(b_5), b_3, b_2, b_1, b_4
\end{array}
$$

Beispiel

$$\begin{aligned}
L_{a_1}(B) &= (b_2, b_5, b_1, b_3, b_4) & L_{b_1}(A) &= (a_5, a_1, a_4, a_2, a_3)\\
L_{a_2}(B) &= (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) & L_{b_2}(A) &= (a_4, a_5, a_2, a_1, a_3)\\
L_{a_3}(B) &= (b_2, b_3, b_5, b_4, b_1) & L_{b_3}(A) &= (a_1, a_4, a_2, a_3, a_5)\\
L_{a_4}(B) &= (b_1, b_3, b_2, b_4, b_5) & L_{b_4}(A) &= (a_3, a_2, a_4, a_1, a_5)\\
L_{a_5}(B) &= (b_5, b_3, b_2, b_1, b_4) & L_{b_5}(A) &= (a_4, a_2, a_3, a_5, a_1)
\end{aligned}$$

Ablauf des Verfahrens:

- $M_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y aufgenommen.
- $F_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y angefragt.
- $S_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y gelöst.

$$\begin{aligned}
\text{Partner}(a_1) &= M_2(b_2), S_7(b_2), M_8(b_5), S_9(b_5), M_{10}(b_1), b_3, b_4\\
\text{Partner}(a_2) &= M_3(b_1), S_6(b_1), M_7(b_2), b_2, b_3, b_4, b_5\\
\text{Partner}(a_3) &= F_4(b_2), M_5(b_3), S_{11}(b_3), M_{12}(b_5), b_4, b_1\\
\text{Partner}(a_4) &= M_6(b_1), S_{10}(b_1), M_{11}(b_3), b_2, b_4, b_5\\
\text{Partner}(a_5) &= M_9(b_5), S_{12}(b_5), F_{13}(b_3), b_2, b_1, b_4
\end{aligned}$$

Beispiel

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
L_{a_1}(B) & = & (b_2, b_5, b_1, b_3, b_4) & L_{b_1}(A) & = & (a_5, a_1, a_4, a_2, a_3) \\
L_{a_2}(B) & = & (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) & L_{b_2}(A) & = & (a_4, a_5, a_2, a_1, a_3) \\
L_{a_3}(B) & = & (b_2, b_3, b_5, b_4, b_1) & L_{b_3}(A) & = & (a_1, a_4, a_2, a_3, a_5) \\
L_{a_4}(B) & = & (b_1, b_3, b_2, b_4, b_5) & L_{b_4}(A) & = & (a_3, a_2, a_4, a_1, a_5) \\
L_{a_5}(B) & = & (b_5, b_3, b_2, b_1, b_4) & L_{b_5}(A) & = & (a_4, a_2, a_3, a_5, a_1)
\end{array}
$$

Ablauf des Verfahrens:

- $M_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y aufgenommen.
- $F_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y angefragt.
- $S_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y gelöst.

$$
\begin{array}{lcl}
\text{Partner}(a_1) & = & M_2(b_2), S_7(b_2), M_8(b_5), S_9(b_5), M_{10}(b_1), b_3, b_4 \\
\text{Partner}(a_2) & = & M_3(b_1), S_6(b_1), M_7(b_2), S_{14}(b_2), b_3, b_4, b_5 \\
\text{Partner}(a_3) & = & F_4(b_2), M_5(b_3), S_{11}(b_3), M_{12}(b_5), b_4, b_1 \\
\text{Partner}(a_4) & = & M_6(b_1), S_{10}(b_1), M_{11}(b_3), b_2, b_4, b_5 \\
\text{Partner}(a_5) & = & M_9(b_5), S_{12}(b_5), F_{13}(b_3), M_{14}(b_2), b_1, b_4
\end{array}
$$

Beispiel

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
L_{a_1}(B) & = & (b_2, b_5, b_1, b_3, b_4) & L_{b_1}(A) & = & (a_5, a_1, a_4, a_2, a_3) \\
L_{a_2}(B) & = & (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) & L_{b_2}(A) & = & (a_4, a_5, a_2, a_1, a_3) \\
L_{a_3}(B) & = & (b_2, b_3, b_5, b_4, b_1) & L_{b_3}(A) & = & (a_1, a_4, a_2, a_3, a_5) \\
L_{a_4}(B) & = & (b_1, b_3, b_2, b_4, b_5) & L_{b_4}(A) & = & (a_3, a_2, a_4, a_1, a_5) \\
L_{a_5}(B) & = & (b_5, b_3, b_2, b_1, b_4) & L_{b_5}(A) & = & (a_4, a_2, a_3, a_5, a_1)
\end{array}
$$

Ablauf des Verfahrens:

- $M_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y aufgenommen.
- $F_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y angefragt.
- $S_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y gelöst.

$$
\begin{array}{lcl}
\text{Partner}(a_1) & = & M_2(b_2), S_7(b_2), M_8(b_5), S_9(b_5), M_{10}(b_1), b_3, b_4 \\
\text{Partner}(a_2) & = & M_3(b_1), S_6(b_1), M_7(b_2), S_{14}(b_2), F_{15}(b_3), b_4, b_5 \\
\text{Partner}(a_3) & = & F_4(b_2), M_5(b_3), S_{11}(b_3), M_{12}(b_5), b_4, b_1 \\
\text{Partner}(a_4) & = & M_6(b_1), S_{10}(b_1), M_{11}(b_3), b_2, b_4, b_5 \\
\text{Partner}(a_5) & = & M_9(b_5), S_{12}(b_5), F_{13}(b_3), M_{14}(b_2), b_1, b_4
\end{array}
$$

Beispiel

$$
\begin{array}{lcllcl}
L_{a_1}(B) & = & (b_2, b_5, b_1, b_3, b_4) & L_{b_1}(A) & = & (a_5, a_1, a_4, a_2, a_3) \\
L_{a_2}(B) & = & (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) & L_{b_2}(A) & = & (a_4, a_5, a_2, a_1, a_3) \\
L_{a_3}(B) & = & (b_2, b_3, b_5, b_4, b_1) & L_{b_3}(A) & = & (a_1, a_4, a_2, a_3, a_5) \\
L_{a_4}(B) & = & (b_1, b_3, b_2, b_4, b_5) & L_{b_4}(A) & = & (a_3, a_2, a_4, a_1, a_5) \\
L_{a_5}(B) & = & (b_5, b_3, b_2, b_1, b_4) & L_{b_5}(A) & = & (a_4, a_2, a_3, a_5, a_1)
\end{array}
$$

Ablauf des Verfahrens:

- $M_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y aufgenommen.
- $F_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y angefragt.
- $S_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y gelöst.

$$
\begin{array}{lcl}
\text{Partner}(a_1) & = & M_2(b_2), S_7(b_2), M_8(b_5), S_9(b_5), M_{10}(b_1), b_3, b_4 \\
\text{Partner}(a_2) & = & M_3(b_1), S_6(b_1), M_7(b_2), S_{14}(b_2), F_{15}(b_3), M_{16}(b_4), b_5 \\
\text{Partner}(a_3) & = & F_4(b_2), M_5(b_3), S_{11}(b_3), M_{12}(b_5), b_4, b_1 \\
\text{Partner}(a_4) & = & M_6(b_1), S_{10}(b_1), M_{11}(b_3), b_2, b_4, b_5 \\
\text{Partner}(a_5) & = & M_9(b_5), S_{12}(b_5), F_{13}(b_3), M_{14}(b_2), b_1, b_4
\end{array}
$$

Beispiel

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
L_{a_1}(B) & = & (b_2, b_5, b_1, b_3, b_4) & L_{b_1}(A) & = & (a_5, a_1, a_4, a_2, a_3) \\
L_{a_2}(B) & = & (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) & L_{b_2}(A) & = & (a_4, a_5, a_2, a_1, a_3) \\
L_{a_3}(B) & = & (b_2, b_3, b_5, b_4, b_1) & L_{b_3}(A) & = & (a_1, a_4, a_2, a_3, a_5) \\
L_{a_4}(B) & = & (b_1, b_3, b_2, b_4, b_5) & L_{b_4}(A) & = & (a_3, a_2, a_4, a_1, a_5) \\
L_{a_5}(B) & = & (b_5, b_3, b_2, b_1, b_4) & L_{b_5}(A) & = & (a_4, a_2, a_3, a_5, a_1)
\end{array}
$$

Ablauf des Verfahrens:

- $M_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y aufgenommen.
- $F_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y angefragt.
- $S_x(y)$: in Runde x wird Matching mit y gelöst.

$$
\begin{array}{lcl}
\text{Partner}(a_1) & = & M_2(b_2), S_7(b_2), M_8(b_5), S_9(b_5), M_{10}(b_1), b_3, b_4 \\
\text{Partner}(a_2) & = & M_3(b_1), S_6(b_1), M_7(b_2), S_{14}(b_2), F_{15}(b_3), M_{16}(b_4), b_5 \\
\text{Partner}(a_3) & = & F_4(b_2), M_5(b_3), S_{11}(b_3), M_{12}(b_5), b_4, b_1 \\
\text{Partner}(a_4) & = & M_6(b_1), S_{10}(b_1), M_{11}(b_3), b_2, b_4, b_5 \\
\text{Partner}(a_5) & = & M_9(b_5), S_{12}(b_5), F_{13}(b_3), M_{14}(b_2), b_1, b_4
\end{array}
$$

Beweis

- Laufzeit:

Beweis

- Laufzeit:
  - Für jedes Paar $a, b \in A \times B$ wird höchstens eine Anfrage gemacht.

Beweis

- Laufzeit:
  - Für jedes Paar $a, b \in A \times B$ wird höchstens eine Anfrage gemacht.
- Korrektheit (Matching ist perfekt):

Beweis

- Laufzeit:
  - Für jedes Paar $a, b \in A \times B$ wird höchstens eine Anfrage gemacht.
- Korrektheit (Matching ist perfekt):
  - Jedes Element aus B bleibt in $\cup_{e \in M} e$, wenn es einmal aufgenommen wurde.

Beweis

- Laufzeit:
  - Für jedes Paar $a, b \in A \times B$ wird höchstens eine Anfrage gemacht.
- Korrektheit (Matching ist perfekt):
  - Jedes Element aus B bleibt in $\cup_{e \in M} e$, wenn es einmal aufgenommen wurde.
  - Falls am Ende ein Paar $a, b \notin \cup_{e \in M} e$, dann hat a nie eine Anfrage an b gemacht, Widerspruch.

Beweis

- Laufzeit:
  - Für jedes Paar $a, b \in A \times B$ wird höchstens eine Anfrage gemacht.
- Korrektheit (Matching ist perfekt):
  - Jedes Element aus B bleibt in $\cup_{e \in M} e$, wenn es einmal aufgenommen wurde.
  - Falls am Ende ein Paar $a, b \notin \cup_{e \in M} e$, dann hat a nie eine Anfrage an b gemacht, Widerspruch.
- Korrektheit (Matching ist stabil):

Beweis

- Laufzeit:
  - Für jedes Paar $a, b \in A \times B$ wird höchstens eine Anfrage gemacht.
- Korrektheit (Matching ist perfekt):
  - Jedes Element aus B bleibt in $\cup_{e \in M} e$, wenn es einmal aufgenommen wurde.
  - Falls am Ende ein Paar $a, b \notin \cup_{e \in M} e$, dann hat a nie eine Anfrage an b gemacht, Widerspruch.
- Korrektheit (Matching ist stabil):
  - Angenommen (a, b) sind unzufrieden: $(a, b) \notin M$ und $(a, b') \in M$, $(a', b) \in M$ mit: $b <_{L_a(B)} b'$ und $a <_{L_b(A)} a'$.

Beweis

- Laufzeit:
  - Für jedes Paar $a, b \in A \times B$ wird höchstens eine Anfrage gemacht.
- Korrektheit (Matching ist perfekt):
  - Jedes Element aus B bleibt in $\cup_{e \in M} e$, wenn es einmal aufgenommen wurde.
  - Falls am Ende ein Paar $a, b \notin \cup_{e \in M} e$, dann hat a nie eine Anfrage an b gemacht, Widerspruch.
- Korrektheit (Matching ist stabil):
  - Angenommen (a, b) sind unzufrieden: $(a, b) \notin M$ und $(a, b') \in M$, $(a', b) \in M$ mit: $b <_{L_a(B)} b'$ und $a <_{L_b(A)} a'$.
  - Falls a nie bei b angefragt hat (aber wohl bei b'), gilt $b' <_{L_a(B)} b$ (Widerspruch).

Beweis

- Laufzeit:
  - Für jedes Paar $a, b \in A \times B$ wird höchstens eine Anfrage gemacht.
- Korrektheit (Matching ist perfekt):
  - Jedes Element aus B bleibt in $\cup_{e \in M} e$, wenn es einmal aufgenommen wurde.
  - Falls am Ende ein Paar $a, b \notin \cup_{e \in M} e$, dann hat a nie eine Anfrage an b gemacht, Widerspruch.
- Korrektheit (Matching ist stabil):
  - Angenommen (a, b) sind unzufrieden: $(a, b) \notin M$ und $(a, b') \in M$, $(a', b) \in M$ mit: $b <_{L_a(B)} b'$ und $a <_{L_b(A)} a'$.
  - Falls a nie bei b angefragt hat (aber wohl bei b'), gilt $b' <_{L_a(B)} b$ (Widerspruch).
  - Falls a vor a' bei b angefragt hat, gilt $a =_{L_b(B)} a'$ (Widerspruch).

Beweis

- Laufzeit:
  - Für jedes Paar $a, b \in A \times B$ wird höchstens eine Anfrage gemacht.
- Korrektheit (Matching ist perfekt):
  - Jedes Element aus B bleibt in $\cup_{e \in M} e$, wenn es einmal aufgenommen wurde.
  - Falls am Ende ein Paar $a, b \notin \cup_{e \in M} e$, dann hat a nie eine Anfrage an b gemacht, Widerspruch.
- Korrektheit (Matching ist stabil):
  - Angenommen (a, b) sind unzufrieden: $(a, b) \notin M$ und $(a, b') \in M$, $(a', b) \in M$ mit: $b <_{L_a(B)} b'$ und $a <_{L_b(A)} a'$.
  - Falls a nie bei b angefragt hat (aber wohl bei b'), gilt $b' <_{L_a(B)} b$ (Widerspruch).
  - Falls a vor a' bei b angefragt hat, gilt $a =_{L_b(B)} a'$ (Widerspruch).
  - Falls a nach a' bei b angefragt hat, hätte a a' verdrängt (Widerspruch).

Literatur

- Cormen, Leiserson, Rives: Introduction to Algorithms, First Edition, MIT Press, 1990.

Literatur

- Cormen, Leiserson, Rives: Introduction to Algorithms, First Edition, MIT Press, 1990.
- Cormen, Leiserson, Rives: Introduction to Algorithms, Second Edition, MIT Press, 2001.

Literatur

- Cormen, Leiserson, Rives: Introduction to Algorithms, First Edition, MIT Press, 1990.
- Cormen, Leiserson, Rives: Introduction to Algorithms, Second Edition, MIT Press, 2001.
- Ottmann, Widmayer: Algorithmen und Datenstrukturen. BI-Wiss.-Verl. 1990.

Fragen(Matching)

- Wie kann man das bipartite Matching mit Flussalgorithmen lösen?

Fragen(Matching)

- Wie kann man das bipartite Matching mit Flussalgorithmen lösen?
- Welche Laufzeiten haben die verschiedenen Matchingprobleme?

Fragen(Matching)

- Wie kann man das bipartite Matching mit Flussalgorithmen lösen?
- Welche Laufzeiten haben die verschiedenen Matchingprobleme?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen verbessernden Pfaden und einem maximum Matching?

Fragen(Matching)

- Wie kann man das bipartite Matching mit Flussalgorithmen lösen?
- Welche Laufzeiten haben die verschiedenen Matchingprobleme?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen verbessernden Pfaden und einem maximum Matching?
- Wie ist die Vorgehensweise, um eine Laufzeit von $O(m\sqrt{n})$ für das Matchingproblem zu erhalten?

Fragen(Matching)

- Wie kann man das bipartite Matching mit Flussalgorithmen lösen?
- Welche Laufzeiten haben die verschiedenen Matchingprobleme?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen verbessernden Pfaden und einem maximum Matching?
- Wie ist die Vorgehensweise, um eine Laufzeit von $O(m\sqrt{n})$ für das Matchingproblem zu erhalten?
- Wie ist die Vorgehensweise, um das Matching auf allgemeinen Graphen zu bestimmen?