Analysis für Informatiker - WS16/17

Lukas Glänzer

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlegendes

Aus Trivialitätsgründen übersprungen

2 Zahlbereiche und mathematische Strukturen

2.1 Natürliche Zahlen, Induktion und Rekursion

2.1.1 Induktionsprinzip

- Das *Prinzip der vollständigen Induktion* → II(1.1)
    - Zeige $A(1)$ ist richtig → *Induktionsanfang*
    - Annahme: A gilt für ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ → *Induktionsvorraussetzung*
    - Für alle $n \geq 1$ gilt: Wenn $A(n)$ gilt, gilt auch $A(n+1)$ → *Induktionsschritt*

2.1.2 Rekursion

- Die Menge M sei nicht-leer und $b \in M$
- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $g_n : M \to M$ eine Abbildung
- Dann gibt es **genau eine** Abbildung $r : \mathbb{N} \to M$ mit → II(1.3)
    - $r(1) = b$
    - $r(n+1) = g_n(r(n))$
- Summen- und Produktdefinition →II(1.5)
  $\sum\limits_{k=1}^{1} a_k = a_1 \;\Big|\; \sum\limits_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1} \;\Big\|\; \prod\limits_{k=1}^{1} a_k = a_1 \;\Big|\; \prod\limits_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\prod\limits_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1}$
- *Fakultät*: $n! := \prod\limits_{k=1}^{n} k$ → II(1.9)
- *Binomialkoeffizient* für $k \leq n$: $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ → II(1.9)
- Es gilt: → II(1.10)
    - $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
    - $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$, falls $k > 0$
    - $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$
- *Binomische Formel* für $n \in \mathbb{N}_0$ und $a, b \in \mathbb{R}$ → II(1.11)
    - $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
    - Auch für komplexe Zahlen gültig

2.2 Rationale und reelle Zahlen

2.2.1 Körper

- Es gelten die Körperaxiome in $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ → II(2.1)
    - K.1: *Assotiativgesetz* mit $(a+b)+c = a+(b+c)$ und $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
    - K.2: *Kommutativgesetz* mit $a+b = b+a$ und $a \cdot b = b \cdot a$
    - K.3: *Existenz eines neutralen Elements* mit $a+0 = a$ und $a \cdot 1 = a$
    - K.4: *Existenz eines inversen Elements* mit $a+(-a) = 0$ und $a \cdot a^{-1} = 1$

- K.5: *Distributivgesetz* mit $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

- Weitere Rechenregeln $\rightarrow$ II(2.3)
  - Es existiert **genau ein** x mit $a + x = b \;\rightarrow\; x = b + (-a)$
  - $-0 = 0$ und die 0 ist eindeutig
  - $-(a + b) = (-a) + (-b)$
  - Aus $a + c = b + c$ folgt $a = b$
  - Für $a \neq 0$ existiert **genau ein** y mit $a \cdot y = b \;\rightarrow\; y = b \cdot a^{-1}$
  - $1^{-1} = 1$ und die 1 ist eindeutig
  - Aus $a \cdot c = b \cdot c$ und $c \neq 0$ folgt $a = b$
  - $a * 0 = 0$
  - $1 \neq 0$ und aus $a \cdot b = 0$ folgt $a = 0$ oder $b = 0$
  - $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$
  - $-(-a) = a$
  - $-1 \cdot (a) = -a$
  - $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$
  - Aus $a \neq 0$ und $b \neq 0$ folgt $a \cdot b \neq 0$
  - $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$
  - $(a^{-1})^{-1} = a$ mit $a^{-1} \neq 0$

2.2.2 Angeordnete Körper

- *Angeordnete Körper* haben (zusätzlich) folgende Eigenschaften $\rightarrow$ II(2.4) und II(2.5)
  - Für jedes $x \in K$ gilt **entweder** $x < 0$ **oder** $x = 0$ **oder** $x > 0$
  - Die Addition ist abgeschlossen
  - Die Multiplikation ist abgeschlossen
  - $a + b < b + c \;\Leftrightarrow\; a < b$
  - $a < b$ und $c \leq d \;\Rightarrow\; a + c < b + d$
  - $0 < a$ und $0 < b \;\Rightarrow\; 0 < ab$
  - $0 < a < b$ und $0 < c \leq d \;\Rightarrow\; ac < bd$
  - $0 < a < b \;\Rightarrow\; 0 < a^n < b^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
  - $a > 0$ und $b < 0 \;\Rightarrow\; ab < 0$
  - $a < 0$ und $b < 0 \;\Rightarrow\; ab > 0$
  - $0 \leq a^2$
  - $a > 0 \;\Leftrightarrow\; a^{-1} > 0$
  - $0 < a < b$ und $c < 0 \;\Rightarrow\; bc < ac < 0$
  - $a < b$ und $a \neq 0$ und $b \neq 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} a^{-1} < b^{-1}, & falls\ ab < 0 \\ b^{-1} < a^{-1}, & falls\ ab > 0 \end{cases}$

2.2.3 Betrag

- Der Betrag von x ist definiert als $|x| := \begin{cases} x, & falls\ x \geq 0 \\ -x, & falls\ x < 0 \end{cases}$ $\rightarrow$ II(2.6)
  - $|x| > 0$ wenn $x \neq$
  - $|x| = |-x|$ und $x \leq |x|$
  - $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
  - $|\frac{1}{y}| = \frac{1}{|y|}$ und $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$
  - $|x + y| \leq |x| + |y|$ (1. *Dreiecksungleichung*)
  - $|x + y| \geq ||x| - |y|| \leq |x| - |y|$ (2. *Dreiecksungleichung*)
  - $|x| \leq y \;\Leftrightarrow\; -y \leq x \leq y$

2.3 Gleichungen und Ungleichungen

- Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f, g, h : D \rightarrow \mathbb{R}$ $\rightarrow$ II(3.2)
  - $f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$
  - $f(x) = g(x) \;\Rightarrow^*\; f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x)$ $^* \Leftrightarrow$ wenn $h(x) \neq 0$
  - $f(x) < g(x) \;\Leftrightarrow\; f(x) + h(x) < g(x) + h(x)$
  - $f(x) \leq g(x) \;\Leftrightarrow\; f(x) + h(x) \leq g(x) + h(x)$
  - Für $h(x) \geq 0$ gilt: $f(x) \leq g(x) \;\Rightarrow^*\; f(x) \cdot h(x) \leq g(x) \cdot h(x)$ $^* \Leftrightarrow$ wenn $h(x) > 0$

2.3.1 Geometrische Summenformel

- *Geometrische Summenformel* für $n \in \mathbb{N}_0$ und $q \neq 1$ und $a \neq b$ $\rightarrow$ II(3.5)
  - $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
  - $\sum\limits_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$
  - Gilt auch für komplexe Zahlen

2.3.2 Bernoullische Ungleichung

- *Bernoullische Ungleichung* für $n \in \mathbb{N}_0$ und $a \geq -1$ $\rightarrow$ II(3.6)
  - $(1 + a)^n \geq 1 + na$
  - $(1 + a)^n = 1 + na$ wenn $n = 0$ oder $n = 1$ oder $a = 0$

2.4 Charakteristiken von Gleichungen und Ungleichungen

2.4.1 Beschränktheit

- M heißt *nach oben beschränkt*, falls $\exists C \in K \;:\; x \leq C \;\forall x \in M$ $\rightarrow$ II(4.1)
  - C heißt *obere Schranke*
- C heißt *Supremum* von M - $\sup M$ - wenn gilt: $\rightarrow$ II(4.3)
  - C ist obere Schranke von M
  - Für jede obere Schranke C' gilt $C \leq C'$
  - Ist $C \in M$ heißt C *Maximum* von M und ist eindeutig defineirt $\rightarrow$ II(4.4),II(4.6)
- M heißt *nach unten beschränkt*, falls $\exists c \in K \;:\; x \geq C \;\forall x \in M$ $\rightarrow$ II(4.1)

- c heißt *untere Schranke*

- c heißt *Infimum* von M - inf M - wenn gilt: $\rightarrow$ II(4.3)
  - c ist untere Schranke von M
  - Für jede untere Schranke c' gilt $c \geq c'$
  - Ist $c \in M$ heißt c *Mimimum* von M und ist eindeutig definiert $\rightarrow$ II(4.4), II(4.6)
- M heißt *beschränkt*, wenn M nach oben und unten beschränkt ist $\rightarrow$ II(4.1)
  - Ein Infimum oder Supremum muss aber nicht immer exisitieren!

2.4.2 Vollständigkeit

- $\mathbb{R}$ ist *vollständig* $\rightarrow$ II(4.7)
  - Jede nicht-leere und nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum
  - Jede nicht-leere und nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Infimum

2.4.3 Satz von Archimedes

- $\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschränkt $\rightarrow$ II(4.10)
- Für $a, b \in \mathbb{R}_+$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot a > b$ $\rightarrow$ II(4.11)
- Für $a \in \mathbb{R}_+$ mit $a < \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ folgt $a = 0$
- Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ existiert ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $a < q < b$ $\rightarrow$ II(4.12)
  - Man sagt: $\mathbb{Q}$ liegt *dicht* in $\mathbb{R}$

2.4.4 Wurzel

- Für $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}_+$ gibt es eine *Wurzel*, d.h. es gilt: $\rightarrow$ II(4.13)
  - Es gibt **genau eine** nicht-negative reelle Zahl $\sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}_+$ mit $(\sqrt[n]{x})^n = x$
  - $\sqrt[n]{x \cdot y} \; = \; \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$ $\rightarrow$ II(4.14)
  - $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \; \Leftrightarrow \; x < y$
  - $\sqrt[n]{x^m} \; = \; (\sqrt[n]{x})^m$
  - $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} \; = \; \sqrt[n \cdot m]{x}$
  - $x^{m/n} := \begin{cases} \sqrt[n]{x^m}, & falls \ m \in \mathbb{N}_0 \\ \frac{1}{\sqrt[n]{x^{-m}}}, & falls \ -m \in \mathbb{N} \end{cases}$ $\rightarrow$ II(4.15)

2.4.5 Potenzgesetze

- Es gelten die *Potenzgesetze*: $\rightarrow$ II(4.16)
  - $x^{r+s} \; = \; x^r \cdot x^s$
  - $x^{-r} \; = \; \frac{1}{x^r}$
  - $(x^r)^s \; = \; x^{r \cdot s}$

2.4.6 Abzählbarkeit

- M heißt *anzählbar*, wenn gilt: → II(5.1)
  - $M = \emptyset$
    oder
  - Es existiert eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$
  - Ist M abzählbar und unendlich heißt M *abzählbar unendlich*
  - Ist M nicht abzählbar heißt M *überabzählbar*
- $M \neq \emptyset$ ist **genau dann** abzählbar wenn $g : M \to \mathbb{N}$ und g injektiv existiert → II(5.2)
- Eine abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist abzählbar → II(5.5)
- $\mathbb{Q}$ ist abzählbar → II(5.6)
- Ist M abzählbar so auch $M^{(n)} = M \times M \times ... \times M$ → II(5.7)
- Die *Potenzmenge* $\text{Pot}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar → II(5.8)
- Die Menge $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ aller Abbildungen von $\mathbb{N}$ in $\{0,1\}$ ist überabzählbar → II(5.9)
- Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es **genau ein** Paar (m,l) mit $m \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq l \leq m+1$, → II(5.4)
  so dass $n = \frac{m(m+1)}{2} + l$
  - $\varphi(n) = \varphi\left(\frac{m(m+1)}{2} + l\right) = (l, m+2-l)$ ist eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
  - $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar

3 Folgen und Reihen

3.1 Reelle Folgen

- Eine *(reelle) Folge* ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto a_n$, kurz $(a_n)_{n\geq 1}$ → III(1.1)
  - Die *Wertemenge* der Folge ist $W = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$
  - Für $W \subset M$ heißt a_n *Folge in M*
  - Auch $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}, n \mapsto a_n$ ist eine Folge mit $(a_n)_{n\geq n_0}$ und $n_0 \in \mathbb{Z}$

3.1.1 Monotonie und Beschränktheit

- Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *monoton wachsend*, wenn $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ → III(1.3)
  - Gilt $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Folge *streng monoton wachsend*
- Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *monoton fallend*, wenn $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ → III(1.3)
  - Gilt $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Folge *streng monoton fallend*
- Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *nach oben beschränkt*, wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt,
  so dass $a_n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ → III(1.3)
- Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *nach unten beschränkt*, wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt,
  so dass $a_n \geq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ → III(1.3)

3.1.2 Konvergenz und Grenzwerte reeller Folgen

Allgemein: Alle, bis auf endlich viele Folgenglieder, haben höchstens den Abstand ε zu a

- Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *konvergent (gegen a)*, wenn ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, sodass gilt: → III(1.4)
  - Zu jedem $\varepsilon > 0$ exisitert ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$
- a heißt *Limes* oder *Grenzwert* der Folge und wird notiert als $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \overrightarrow{n \to \infty} a$
  - Ist $a = 0$ heißt die Folge *Nullfolge*
  - Konvergiert die Folge nicht heißt sie *divergent*
- Existiert der Grenzwert, so ist er eindeutig → III(1.6)
- Eine konvergente Folge ist beschränkt → III(1.6)
- Rechenregeln für Grenzwerte: → III(1.7)
  Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ gilt:
  - $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$ konvergiert mit $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$
  - $(c \cdot a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert mit $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a) = c \cdot a$
  - $(a_n \cdot b_n)_{n\geq 1}$ konvergiert mit $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
  - $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq 1}$ konvergiert mit $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$, falls $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b \neq 0$
- Wichtige Anwendungsbeispiele: → III(1.12)
  - $\lim\limits_{n\to\infty} (q^n) = 0$, wenn $|q| < 1$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$, wenn $q > 0$
- Die Folge $(a'_k)_{k\geq 1}$ heißt *Teilfolge* von $(a_n)_{n\geq 1}$, wenn es eine streng wachsende Folge $(n_k)_{k\geq 1}$ von Indizes in $\mathbb{N}$ gibt mit $a'_k = a_{n_k}$ für alle $k \geq 1$ → III(1.14)
  - Konvergiert a_n gegen a, so konvergiert auch jede Teilfolge gegen a → III(1.15)
- Ist $g : M \to M$ und $a_0 \in M$, dann ist durch $a_{n+1} := g(a_n)$ die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ rekursiv definiert → III(1.16)

3.1.3 Untersuche Folgen auf Konvergenz

- Die Folge $(a_n)_{n>1}$ konvergiert **genau dann** gegen a, wenn $(a_n - a)_{n>1}$ eine Nullfolge ist → III(1.10)
- Ist $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n\geq 1}$ eine beschränkte Folge, ist $(a_n b_n)_{n\geq 1}$ eine Nullfolge
- Sandwich-Lemma → III(1.11)
  - Es seien die Folgen a_n, b_n und c_n mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$.
    Gibt es ein n_0 mit $a_n \leq b_n \leq c_n$, für alle $n \geq n_0$, so konvergiert auch für b_n mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$
- Jede monotone und beschränkte Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit Wertemenge W ist beschränkt → III(2.2)
  - $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \sup W, & falls\ (a_n)_{n\geq 1}\ monoton\ wachsend\ ist \\ \inf W, & falls\ (a_n)_{n\geq 1}\ monoton\ fallend\ ist \end{cases}$
- Eine Folge heißt *Cauchy-Folge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass $|a_m - a_n| < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$ → III(2.4)

- Es ergibt sich das *Cauchy-Kriterium*: → III(2.5)
    - $((a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert$)$ $\Leftrightarrow$ $((a_n)_{n\geq 1}$ ist Cauchy-Folge$)$
- Ist $(a_n)_{n\geq 1}$ eine divergente Folge heißt sie *bestimmt divergent*
    - gegen ∞, wenn es für alle $M > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a_n \geq M$, für alle $n > n_0$

      $\sim \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$
    - gegen $-\infty$, wenn es für alle $M > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a_n \leq M$, für alle $n > n_0$

      $\sim \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$
    - Ansonsten heißt sie *unbestimmt divergent*

3.2 Reihen

- Eine *unendliche Reihe* ist ein Paar $((a_k)_{k\geq 1}, (s_n)_{n\geq 1})$ von Folgen mit: → III(3.1)
    - $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, für alle $n \in \mathbb{N}$
    - s_n wird die *n-te Partialsumme* genannt
    - Die Reihe selbst wird notiert als $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

3.2.1 Konvergenz von Reihen

- Eine Reihe konvergiert, wenn die Folge ihrer Partialsummen konvergiert → III(3.2)
    - $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = S \quad \to \quad \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = S \quad \to \quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = S$
- Eine Reihe konvergiert *absolut*, wenn die Reihe der Beträge konvergiert → III(3.14)
    - $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut, wenn $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert
    - Konvertiert die Reihe der Beträge nicht, so ist die Reihe *bedingt konvergent*
    - Absolute Konvergenz impliziert Konvergenz → III(3.16)
- Eine Reihe divergiert, wenn s_n divergiert → III(3.2)
    - Sie heißt bestimmt divergent, wenn s_n bestimmt divergent ist
- Nach den Grenzwertregeln konvergiert die Summe zweier Reihen gegen die Summe ihrer Grenzwerte (hier A und B): → III(3.7)
    - $\alpha \cdot \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \cdot \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \;=\; \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k + \beta \cdot b_k \;=\; \alpha \cdot A + \beta \cdot B$
- Wenn die Folge $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, dann ist $(a_k)_{k\geq 1}$ eine Nullfolge → III(3.9)
    - Ein notwendiges aber nicht hinreichendes Kriterium!

3.2.2 Geometrische Reihe

- Für alle $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ konvergiert die *geometrische Reihe* mit: → III(3.5)
    - $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k \;=\; \frac{1}{1-q}$

3.2.3 Harmonische Reihe

- Die *harmonische Reihe* mit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert bestimmt gegen ∞ → III(3.6)

3.2.4 Cauchy-Kriterium für Reihen

- Eine Reihe konvergiert **genau dann**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass: $|\sum\limits_{k=m}^{n} a_k| < \varepsilon$, für alle $n \leq m \leq n_0$ → III(3.8)

3.2.5 Monotoniekriterium

- Sei $(a_k)_{k\geq 1}$ eine Folge mit $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Ihre Reihe konvergiert **genau dann**, wenn $(s_n)_{n\geq 1}$ nach oben beschränkt ist → III(3.10)

3.2.6 Leibniz-Kriterium

- Ist $(a_k)_{k\geq 1}$ eine reelle, monoton fallende Nullfolge dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|\sum\limits_{k=n}^{\infty} (-1)^k a_k| \leq a_n$ → III(3.12)
  - Gilt auch für die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$
- Fehlerabschätzung des Grenzwertes auf $Fehler < f$:
  - $\sum\limits_{k=1}^{m-1} (-1)^k a_k$ mit $m := min\{l \mid a_l < f\}$

3.2.7 Minoranten- und Majorantenkriterium

- Es sei eine reelle Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k)_{k\geq 1}$
  - Existiert eine konvergente reelle Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ und ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_k| \leq c_k$, für alle $k \geq N$, dann ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent → III(3.17)

    $\sim \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ heißt *Majorante*
  - Existiert eine divergente reelle Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$ und ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_k| \geq d_k \geq 0$, für alle $k \geq N$, dann ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty}$ divergent → III(3.17)

    $\sim \sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$ heißt *Minorante*

3.2.8 Quotientenkriterium

- Sei eine reelle Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$. Existiert ein $N \in \mathbb{N}$ für das gilt: → Blatt 7

  $a_k \neq 0$ und $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \leq \delta < 1$ für alle $k \geq N$, dann ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent
- Sei eine reelle Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$. Exisitert ein $N \in \mathbb{N}$ für das gilt: → Blatt 7

  $b_k \neq 0$ für alle $k \geq N$ und $\lim\limits_{k\to\infty} |\frac{b_{k+1}}{b_k}| < 1$, dann ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent

3.2.9 Wichtiges Anwendungsbespiel

- Sei $(d_k)_{k\geq 1}$ eine Folge in $\{0,1\}$, dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k 2^{-k}$ → III(3.11)
- Zu jedem $x \in [0,1) \subset \mathbb{R}$ gibt es eine Folge $(c_k)_{k\geq 1}$ in $\{0,1\}$ mit $x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k 2^{-k}$ → III(3.11)
- Es ergibt sich: $\mathbb{R}$ ist überabzählbar

3.2.10 Die Exponentialreihe

- Die *Exponentialreihe exp*$(x) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} \cdot x^k\right)$ ist konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$ → III(3.18)
  - *Eulersche Exponentialfunktion* exp: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\exp(0) = 1$ und $\exp(1) = e$
    - $\sim$ Es gilt $\exp(x) = e^x$, für alle $x \in \mathbb{Q}$
- Es gilt die *Funktionalgleichung* $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ → III(3.19)
- Aus der Funktionalgleichung folgt: → III(3.20)
  - $\exp(x) \cdot \exp(-x) = 1$, für alle $x \in \mathbb{R}$
  - $\exp(x) > 0$, für alle $x \in \mathbb{R}$
  - Für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ gilt $\exp(x_1) < \exp(x_2)$
    - $\sim$ Die Funktionalgleichung ist streng monoton wachsend

4 Komplexe Zahlen und Zahlenfolgen

4.1 Komplexe Zahlen

- $\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ → IV(1.1)
- Für $z = x + iy$ heißt → IV(1.1)
  - x der *Realteil* von z mit $\mathrm{Re}(z) = x$
  - y der *Imaginärteil* von z mit $\mathrm{Im}(z) = y$
  - $\bar{z}$ die *konjugierte komplexe Zahl* zu z mit $\bar{z} = x - iy$
- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper mit → IV(1.2)
  - $0 + i \cdot 0$ als neutrales Element der Addition
  - $-z = -(x+iy)$ als inverses Element der Addition zu jedem $z = x + iy$
  - $1 + i \cdot 0$ als neutrales Element der Multiplikation
  - $z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} + i \cdot \frac{-y}{x^2+y^2}$ als inverses Element der Multiplikation zu jedem $z = x + iy$

4.1.1 Rechenregeln für komplexe Zahlen

Für $z = x + iy$ und $w = u + iv$ gilt:

- $(x+iy) + (u+iv) = (x+u) + i(y+v)$ → IV(1.2)
- $(x+iy) \cdot (u+iv) = (xu - yv) + i(xv + yu)$
- $\mathrm{Re}(z) = x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ → IV(1.4)
- $\mathrm{Im}(z) = y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
- $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

- $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$, wenn $w \neq 0$
- $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}_+$
- Gilt $z = \bar{z}$ gilt auch $z \in \mathbb{R}$

4.1.2 Beträge komplexer Zahlen

- Für $z = x + iy$ ist der *Betrag* von z definiert als $|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}$ → IV(1.5)
- $|Re(z)| \leq |z|,\ |Im(z)| \leq |z|,\ |z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|$ → IV(1.6)
- $|z| \geq 0$, aus $|z| = 0$ folgt $z = 0$
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
- $|z| = |\bar{z}|$
- $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$, wenn $w \neq 0$
- Bekannte Dreiecksungleichungen:
  - $|z + w| \leq |z| + |w|$
  - $||z| + |w|| \leq |z - w|$
- $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, falls $z \neq 0$

4.1.3 Fundamentalsatz der Algebra

- Jedes nicht-konstante Polynom in $\mathbb{C}$ besitzt eine Nullstelle → IV(1.7)
  - $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k = 0$, für $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$

4.2 Komplexe Folgen

- Eine komplexe Folge ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{C}, n \mapsto a_n$ kurz $(a_n)_{n \geq 1}$ → IV(2.1)
- $(a_n)_{n \geq 1}$ ist *beschränkt*, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $|a_n| \leq c$, für alle $n \in \mathbb{N}$
- Eine komplexe Folge ist **genau dann** beschränkt, wenn die Folgen der Real- und Imaginärteile beschränkt sind → IV(2.3)

4.2.1 Konvergenz komplexer Folgen

- Eine komplexe Folge heißt konvergent, wenn es ein a gibt, so dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ exisitiert mit $|a_n - a| < \varepsilon$, für alle $n \geq n_0$ → IV(2.2)
  - a ist der *Limes* oder *Grenzwert* und wird notiert als $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ oder $a_n \overrightarrow{n \to \infty}\, a$
  - Der Grenzwert ist eindeutig bestimmt → IV(2.4)
  - Die Rechenregeln für Grenzwerte gelten weiterhin
- Ist der Limes gleich 0, so ist $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Nullfolge
- Eine komplexe Folge konvergiert **genau dann**, wenn die reellen Folgen der Real- und Imaginärteile konvergieren → IV(2.3)
- Aus $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ folgt $\lim\limits_{n \to \infty} \bar{a}_n = \bar{a}$
- Eine konvergente Folge ist immer beschränkt → IV(2.4)

4.2.2 Komplexe Cauchy-Folgen

- $(a_n)_{n\geq 1}$ ist eine *Cauchy-Folge*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $|a_m - a_n| < \varepsilon$, für alle $m, n > n_0$ → IV(2.2)
- Eine komplexe Folge ist **genau dann** eine Cauchy-Folge, wenn die Folgen der Real- und Imaginärteile Cauchy-Folgen sind → IV(2.3)
- Eine komplexe Folge ist **genau dann** eine Cauchy-Folge, wenn sie konvergiert → IV(2.4)

4.3 Komplexe Reihen

- Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Folge, dann ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ eine komplexe unendliche Reihe → IV(2.5)

4.3.1 Konvergenz komplexer Reihen

- Eine komplexe Reihe ist konvergent, wenn die Folge der Partialsummen konvergiert. → IV(2.5)
  - Sie ist absolut konvergent, wenn die Reihe der Beträge mit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert
  - Absolute Konvergenz impliziert Konvergenz → IV(2.6)
- Sind die Reihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = A$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = B$ konvergent, so gilt auch: → IV(2.6)
  - $\alpha \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \;=\; \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) \;=\; \alpha A + \beta B$

4.3.2 Die Exponentialreihe in den komplexen Zahlen

- Für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ absolut mit Grenzwert $\exp(z)$ → IV(2.7)
- Es gilt weiterhin die *Funktionalgleichung* $\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$ → IV(2.7)
  - $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$ → IV(2.8)
  - $|\exp(ix)| = 1$

4.4 Trogonometrie

- $\cos(x) := \mathrm{Re}(\exp(ix))$ → IV(2.9)
  - Als Reihendarstellung: $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k}$ → IV(2.11)
- $\sin(x) := \mathrm{Im}(\exp(ix))$ → IV(2.9)
  - Als Reihendarstellung: $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}$ → IV(2.11)
- $e^{ix} = \cos x + i\cdot \sin x$ *(Euler-Identität)* → IV(2.10)

4.4.1 Rechenregeln der Trigonometrie

- $\cos(x + y) = \cos x\cdot \cos y - \sin x\cdot \sin y$ → IV(2.12)
- $\sin(x + y) = \cos x\cdot \sin y + \sin x\cdot \cos y$
- $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ → IV(2.13)
- $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$
- $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$ *(Satz des Pythagoras)*

Bekannte Werte für sin, cos und exp: $\rightarrow$ IV(2.14)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$x+2\pi$	$x+\pi$	$\frac{\pi}{2}-x$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	0	-1	0	$\sin(x)$	-$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1	$\cos(x)$	-$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\exp(ix)$	1	$\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)$	$\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$	i	-1	-i	1	-	-	-

5 Grundlegendes zu reellen Funktionen

5.1 Umgebungen

- Für $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ ist die $\varepsilon - Umgebung$ von x_0 definiert als $\rightarrow$ V(1.1)
  $U_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$
- Die Menge U heißt *Umgebung* von x_0, falls ein unabhängiges $\varepsilon > 0$ exisitiert mit $U_\varepsilon(x_0) \subset U$
- Für $M \subset \mathbb{R}$ heißt $x_0 \in M$ *innerer Punkt*, wenn M eine Umgebung von x_0 ist $\rightarrow$ V(1.2)
  - $\overset{\circ}{M}$ bezeichnet die Menge der inneren Punkte von M
  - Gilt $\overset{\circ}{M} = M$, so heißt M *offen*
  - Gilt $\mathbb{R} \setminus M$ ist offen, so heißt M *abgeschlossen*

5.2 Reelle Funktionen

- Eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ mit $A \subset \mathbb{R}$ und $B \subset \mathbb{R}$ heißt *reelle Funktion* $\rightarrow$ V(1.4)
  - $f(x)$ heißt *Funktionswert* von f an Stelle x
    - $\sim$ $f(x) = 0$ heißt *Nullstelle*

5.2.1 Rechenregeln für reelle Funktionen

Für $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt: $\rightarrow$ V(1.6)

- $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$
- $(\alpha \cdot f)(x) := \alpha \cdot f(x)$
- $(f \cdot g)(x) := f(x)\dot{g}(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$, falls $g(x) \neq 0$

5.2.2 Monotonie und Beschränktheit

Für $f : D \rightarrow E$ mit $D, E \subset \mathbb{R}$ gilt:

- f heißt *monoton steigend*, wenn für alle $x, y \in D$ mit $x \leq y$ stets $f(x) \leq f(y)$ gilt $\rightarrow$ V(1.7)
  - f heißt *streng monoton steigend*, wenn für $x < y$ stets $f(x) < f(y)$ gilt
- f heißt *monoton fallend*, wenn für alle $x, y \in D$ mit $x \geq y$ stets $f(x) \geq f(y)$ gilt $\rightarrow$ V(1.7)
  - f heißt *streng monoton fallend*, wenn für $x > y$ stets $f(x) > f(y)$ gilt
- Ist f streng monoton steigend/fallend, dann ist f injektiv und die Umkehrfunktion $\rightarrow$ V(1.9)
  $f^{-1} : W \rightarrow D$ auch streng monoton steigend/fallend
- f heißt *beschränkt*, wenn die Wertemenge $W = f(D)$ beschränkt ist $\rightarrow$ V(1.7)
  - Ist W nur nach oben/unten beschränkt, so ist auch f nur nach oben/unten beschränkt

5.2.3 Extrema

Für $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \in \mathbb{R}$ gilt: $\to$ V(1.10)

- x_0 heißt *Maximalstelle* und $f(x_0)$ heißt *Maximum* falls $f(x_0) \geq f(x), \forall x \in D$
  - x_0 heißt *relative/lokale Maximalstelle* und $f(x_0)$ heißt *relatives/lokales Maximum* falls es eine Umgebung U_δ mit $\delta > 0$ gibt, so dass x_0 Maximalstelle für $f|_{D \cap U_{delta}(x_0)}$ ist
- x_0 heißt *Minimalstelle* und $f(x_0)$ heißt *Minimum* falls $f(x_0) \leq f(x), \forall x \in D$
  - x_0 heißt *relative/lokale Minimalstelle* und $f(x_0)$ heißt *relatives/lokales Minimum* falls es eine Umgebung U_δ mit $\delta > 0$ gibt, so dass x_0 Minimalstelle für $f|_{D \cap U_{delta}(x_0)}$ ist

5.3 Polynome

- $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *reelles Polynom*, wenn $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ mit $\to$ V(2.1)
  $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$
- Die Menge der reellen Polynome heißt $\mathbb{R}[X]$
- Jede Restriktion eines Polynoms heißt *Polynomfunktion*
- Für $a_n \neq 0$ heißt n der *Grad* von p
  - Der Grad eines Polynoms ist eindeutig bestimmt $\to$ V(2.3)
- Ist $a_i = 0$ für alle $i \in [0, n] \subset \mathbb{N}$, so heißt p das *Nullpolynom*
- Ein Polynom vom Grad n hat höchstens n Nullstellen $\to$ V(2.2)
  - Zwei Polynome p, q vom Grad n sind gleich, wenn es mindestens $n+1$ verschiedene reelle Zahlen gibt, mit $p(x_i) = q(x_i)$ *(Identitätssatz für Polynome)* $\to$ V(2.3)
- Wachstumsabschätzung für Polynome $\to$ V(2.4)
  - Es exisitert ein $r \in \mathbb{R}_+$ mit $\frac{1}{2} \cdot a_n \cdot |x|^n \leq |p(x)| \leq 2 \cdot a_n \cdot |x|^n$, für alle $|x| \geq r$
  - Für $\varepsilon > 0$ gibt es ein $M > 0$ mit $|p(x)| \leq M \cdot |x|^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > \varepsilon$

5.4 Rationale Funktionen

- Eine rationale Funktion ist der Quotient zweier Polynomfunktionen $\to$ V(2.5)
  - Es seien $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[X]$ mit $q(x) \neq 0$ und $M := \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) = 0\}$
    - $\sim$ Eine rationale Funktion ist dann definiert als $\mathbb{R} \setminus M \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$
- Die Menge aller rationaler Funktionen heißt $\mathbb{R}(X)$

6 Grenzwerte und Stetigkeit

6.1 Häufungspunkt

- x_0 heißt *Häufungspunkt* von $D \subset \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\rho > 0$ ein $x \in U_\rho(x_0) \setminus \{x_0\}$ gibt. D.h.die Menge $(U_\rho(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap D$ ist nicht leer $\to$ VI(1.1)
  - Ist x_0 kein Häufungspunkt, so heißt er *isolierter Punkt*
- Oft gibt es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < x_0 < b$ und $(a, x_0) \cap (x_0, b) \subset D$, dann ist x_0 Häufungspunkt

6.2 Grenzwert

Für $f : D \to \mathbb{R}$ und x_0 als Häufungspunkt von D gilt: $\to$ VI(1.2)

- f ist konvergent gegen $L \in \mathbb{R}$ für $x \to x_0$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ existiert, so dass gilt:
  - $|f(x) - L| < \varepsilon$, für alle $x \in D$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$
  - L ist dann der Grenzwert von f und es gilt $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

    $\sim$ Der Grenzwert ist eindeutig bestimmt $\to$ VI(1.4)

6.2.1 Rechenregeln für Grenzwerte

- Mit Einbeziehung von Folgen gilt das *Folgenkriterium*: $\to$ VI(1.4)
  - $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ ist äquivalent zu
  - Für jede Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ in $D \setminus \{x_0\}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = L$
- Die Grenzwertregeln gelten weiterhin $\to$ VI(1.5)
- Für die Polynomfunktionen p, q gilt: $\to$ VI(1.6)
  - $\lim\limits_{x \to x_0} p(x) = p(x_0)$
  - Für alle $x_0 \in \{z \in \mathbb{R} \mid q(z) \neq 0\}$ ist $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)}$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \exp(x) = \exp(x_0)$ $\to$ VI(1.7)
- $\lim\limits_{x \to x_0} \sin(x) = \sin(x_0)$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \cos(x) = \cos(x_0)$

6.2.2 Grenzwerte im Unendlichen

- Die Grenzwertsätze gelten weiterhin $\to$ VI(1.13)

Für $f : D \to \mathbb{R}$ und ∞ als Häufungspunkt von D gilt:

- f ist konvergent gegen $L \in \mathbb{R}$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x_0 \in D$ existiert mit $|f(x) - L| < \varepsilon$ für alle $x > x_0$ $\to$ VI(1.10)
  - Es gilt $\lim\limits_{n \to \infty} f(x) = L$
- f ist *bestimmt divergent* gegen ∞, falls es zu jedem $M > 0$ ein $R \in D$ gibt mit $f(x) > M$, für alle $x > R$ $\to$ VI(1.14)
  - Man schreibt $\lim\limits_{n \to \infty} f(x) = \infty$
- f ist *bestimmt divergent* gegen $-\infty$, falls es zu jedem $M > 0$ ein $R \in D$ gibt mit $f(x) < -M$, für alle $x > R$ $\to$ VI(1.14)
  - Man schreibt $\lim\limits_{n \to \infty} f(x) = -\infty$

Für $f : D \to \mathbb{R}$ und $-\infty$ als Häufungspunkt von D gilt:

- f ist konvergent gegen $M \in \mathbb{R}$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x_0 \in D$ existiert mit $|f(x) - M| < \varepsilon$ für alle $x < x_0$ $\to$ VI(1.10)
  - Es gilt $\lim\limits_{n \to -\infty} f(x) = M$

- f ist *bestimmt divergent* gegen ∞, falls es zu jedem $M > 0$ ein $R \in D$ gibt mit $f(x) > M$, für alle $x < R$ → VI(1.14)
  - Man schreibt $\lim\limits_{n \to -\infty} f(x) = \infty$
- f ist *bestimmt divergent* gegen $-\infty$, falls es zu jedem $M > 0$ ein $R \in D$ gibt mit $f(x) < -M$, für alle $x < R$ → VI(1.14)
  - Man schreibt $\lim\limits_{n \to -\infty} f(x) = -\infty$

6.2.3 Einseitige Grenzwerte

Für $f : D \to \mathbb{R},\ D \in \mathbb{R}$ und x_0 als Häufungspunkt von D gilt: → VI(1.8)

- Sei $L_1 \in \mathbb{R}$ und $g_1 := f|_{D\cap(x_0,\infty)}$. Ist nun x_0 ein Häufungspunkt von $D \cap (x_0, \infty)$ und gilt $\lim\limits_{x\to x_0} g_1(x) = L_1$, dann ist f *rechtsseitig konvergent* gegen L_1 für $x \to x_0$
  - $L1$ ist der *rechtsseitige Grenzwert* und wird notiert als $\lim\limits_{x\downarrow x_0} f(x) = L_1$
- Sei $L_2 \in \mathbb{R}$ und $g_2 := f|_{D\cap(-\infty,x_0)}$. Ist nun x_0 ein Häufungspunkt von $D \cap (-\infty, x_0)$ und gilt $\lim\limits_{x\to x_0} g_2(x) = L_2$, dann ist f *linksseitig konvergent* gegen L_2 für $x \to x_0$
  - $L2$ ist der *linksseitige Grenzwert* und wird notiert als $\lim\limits_{x\uparrow x_0} f(x) = L_2$
- Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ und ist x_0 Häufungspunkt von $D \cap (x_0, \infty)$ und $D \cap (-\infty, x_0)$ so existieren auch die einseitigen Grenzwerte mit $\lim\limits_{x\downarrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x\uparrow x_0} f(x) = L$ → VI(1.10)
- Ist x_0 Häufungspunkt von $D \cap (x_0, \infty)$ und $D \cap (-\infty, x_0)$ und existieren $\lim\limits_{x\downarrow x_0} f(x) = L_1$ und $\lim\limits_{x\uparrow x_0} f(x) = L_2$, so existiert auch $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ **genau dann** wenn $L_1 = L_2$
- Ist x_0 Häufungspunkt von $D \cap (x_0, \infty)$, so ist f *rechtsseitig bestimmt divergent* gegen ∞ [*bzw.* $-\infty$] für $x \to x_0$, wenn es zu jedem $a \in D \cap (x_0, \infty)$ ein $M > 0$ gibt mit $f(x) > M$ [*bzw.* $f(x) < -M$], für alle $x \in D \cap (x_0, a)$ → VI(1.16)
  - $\lim\limits_{x\downarrow x_0} f(x) = \infty$ [*bzw.* $-\infty$]
- Ist x_0 Häufungspunkt von $D \cap (-\infty, x_0)$, so ist f *linksseitig bestimmt divergent* gegen ∞ [*bzw.* $-\infty$] für $x \to x_0$, wenn es zu jedem $b \in D \cap (-\infty, x_0)$ ein $M > 0$ gibt mit $f(x) > M$ [*bzw.* $f(x) < -M$], für alle $x \in D \cap (b, x_0)$ → VI(1.16)
  - $\lim\limits_{x\uparrow x_0} f(x) = \infty$ [*bzw.* $-\infty$]

6.3 Stetige Funktionen

Für $f : D \to \mathbb{R}$ gilt:

- Ist x_0 Häufungspunkt von D, so heißt f *stetig* in x_0, falls $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ → VI(2.1)
- Ist x_0 kein Häufungspunkt von D, so gilt f stetig in x_0 per Konvention
- f ist stetig auf einem Intervall, wenn f in jedem Punkt des Intervalls stetig ist
- f ist stetig, wenn f auf ganz D stetig ist
- Allgemein gilt: → VI(2.2)
  - Polynomfunktionen sind stetig auf $\mathbb{R}$
  - Rationale Funktionen sind stetig auf $\mathbb{R}$

- exp, sin, cos sind stetig auf $\mathbb{R}$

- Wieder gibt es ein *Folgenkriterium*: → VI(2.3)
  - Sei f stetig in x_0. **Genau dann** gilt für jede Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$:
  $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) = f(x_0)$

- Ist f stetig in x_0, so gibt es eine Umgebung U von x_0, so dass $f|_{D\cap U}$ beschränkt ist → VI(2.5)
  - d.h. es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leq c$, für alle $x \in D \cap U$
  - ist $f(x_0) > 0$, so gibt es ein $\rho > 0$ mit $f(x) > \rho$, für alle $c \in D \cap U$
  - ist $f(x_0) < 0$, so gibt es ein $\rho > 0$ mit $f(x) < -\rho$, für alle $c \in D \cap U$

- Ist f streng monoton und stetig auf einem Intervall I mit $W = f(I)$ gilt: → VI(2.6)
  - Die Umkehrfunktion $f^{-1} : W \to I$ ist auch stetig

- Ist f stetig nimmt f auf jedem Intervall $[a,b] \subset D$ Minimum und Maximum an → VI(2.8)
  - d.h. es gibt $x_{min}, x_{max} \in [a,b]$ mit $f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$, für alle $x \in [a,b]$

6.3.1 Verkettung stetiger Funktionen

Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$

- Für f und g stetig in $x_0 \in D \cap E$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt: → VI(2.5)
  - $\alpha \cdot f$ ist stetig
  - $f + g$ ist stetig
  - $f \cdot g$ ist stetig
  - $\frac{f}{g}$ ist stetig, wenn $g \neq 0$

- Für f stetig in x_0 und g stetig in $f(x_0)$ mit $f(D) \subset E$ gilt: → VI(2.5)
  - $g \circ f$ ist stetig

6.3.2 Zwischenwertsatz

Für $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $[a,b] \subset D$ gilt: → VI(2.9)

- Ist $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$, so hat f in (a,b) eine Nullstelle

- Ist $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$, so hat f in (a,b) eine Nullstelle

- Ist $m := min\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ und $M := max\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ dann ist $f([a,b]) = [m, M]$

- Es folgt: → VI(2.10)
  - Ist $p(X)$ ein reelles Polynom mit ungeradem Grad gibt es mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$

6.3.3 Die Exponentialfunktion

Die reelle Exponentialfunktion exp ist definiert als $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_+,\ x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ → VI(2.11)

- exp ist streng monoton wachsend, stetig und bijektiv

- exp wächst schneller als jedes Polynom

- Für ein reelles Polynom $P[X]$ gilt:
  - $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{P(x)}{\exp(x)} = \lim\limits_{x\to-\infty} P(x) \cdot \exp(x) = 0$

- Die Umkehrfunktion heißt *natürlicher Logarithmus* mit $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ $\to$ VI(2.12)
- Für den natürlichen Logarithmus gilt: $\to$ VI(2.13)
  - $\ln(\cdot y) = \ln x + \ln y$
  - $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln x$
  - $\exp(\ln x) = x$
  - $\ln(\exp x) = x$
  - $\ln 1 = 0$
  - $\ln e = 1$
  - $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$
  - $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$
- Über die Exponentialfunktion ist nun auch x^α mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ als $x^\alpha = \exp(\alpha \cdot \ln x)$ definiert

7 Differentialrechnung

7.1 Die Ableitung

Für $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und x_0 ein innerer Punkt von D gilt: $\to$ VII(1.1)

- f ist *differenzierbar*, wenn $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existiert.
- f heißt *einseitig differenzierbar*, wenn nur
  - $f'_+(x_0) := \lim\limits_{h\downarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existiert $\to$ VII(1.4)

    oder
  - $f'_-(x_0 :=) \lim\limits_{h\uparrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existiert
- Der Grenzwert heißt *Ableitung* von f in x_0 mit $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$
  - $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)\}$ ist die *Tangente* an f in $(x_0, f(x_0))$

    $\sim$ Die Tangente ist eine Approximation an f in der Nähe von $f(x)$
- Ist f differenzierbar in x_0 ist f auch stetig in x_0 $\to$ VII(1.3)
- Ist f differenzierbar in x_0, dann existieren $U_\delta(x_0) \subset D$ und $M > 0$ mit: $\to$ VII(1.3)
  - $|f(x) - f(x_0)| \leq M \cdot |x - x_0|$, für alle $x \in U_\delta(x_0)$

Enthält D keine isolierten Punkte gilt weiter: $\to$ VII(1.4)

- f heißt differenzierbar auf D, wenn f
  - in jedem inneren Punkt differenzierbar ist
  - in jedem Randpunkt einseitig differenzierbar ist
- Ist f differenzierbar, so heißt $f'(x)$ die *Ableitung* von f mit $f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f$

7.1.1 Rechenregeln für Ableitungen

Sind $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0, dann gilt: $\to$ VII(1.5)

- $\alpha \cdot f$ ist differenzierbar in x_0 mit $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$
- $f + g$ ist differenzierbar in x_0 mit $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- $f \cdot g$ ist differenzierbar in x_0 mit $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$ *(Produktregel)*
- $\frac{f}{g}$ ist differenzierbar in x_0 mit $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$, wenn $g(x_0) \neq 0$ *(Quotientenregel)*
- $g \circ f$ ist differenzierbar in x_0, wenn g differenzierbar in $f(x_0)$ mit $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$ *(Kettenregel)* $\to$ VII(1.8)

7.1.2 Weitere Eigenschaften

- Jedes reelle Polynom $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ ist in jedem Punkt differenzierbar mit: $\to$ VII(1.6)
  - $\frac{d}{dx} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$
- Jede rationale Funktion ist differenzierbar auf ihrem Definitionsbereich
- sin, cos und exp sind auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit: $\to$ VII(1.7)
  - $\sin' x = \cos x$, $\cos' x = -\sin x$, $\exp' x = \exp x$
- Ist f auf dem Intervall I stetig, injektiv und differenzierbar in $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) \neq 0$, dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $y_0 := f(x_0)$ mit $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$ $\to$ VII(1.10)
  - $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$ für $x > 0$ $\to$ VII(1.11)
  - $\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha - 1}$ für $x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$
- Die Ableitung einer Funktion auf einem inneren Punkt x_0 des Definitionsbereichs ist an relativen Extremstellen gleich 0 $\to$ VII(2.1)
  - $f'(x_0) = 0$ ist notwendiges Kriterium für Extrema $\to$ VII(2.2)
  - $f''(x_0) \neq 0$ ist hinreichendes Kriterium für Extrema $\to$ VII(2.8)
    - $\sim$ $f''(x_0) < 0$ $\to$ lokales Maximum
    - $\sim$ $f''(x_0) > 0$ $\to$ lokales Minimum
  - liegen keine relativen Extrema auf den inneren Punkten, müssen die Randpunkte getestet werden

Für die stetig differenzierbaren Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : I \to \mathbb{R}$ gilt: $\to$ VII(2.6)

- Ist $f'(x) = 0\ \forall x \in \mathring{I}$, so exisitiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = c\ \forall x \in I$
- Ist $f'(x) = g'(x)\ \forall x \in \mathring{I}$, so existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(x) + c\ \forall x \in I$
- f ist genau dann monoton wachsend, wenn $f'(x) \geq 0\ \forall x \in \mathring{I}$
  - Bei $f'(x) > 0\ \forall x \in \mathring{I}$ ist f streng monoton wachsend
- f ist genau dann monoton fallend, wenn $f'(x) \leq 0\ \forall x \in \mathring{I}$
  - Bei $f'(x) < 0\ \forall x \in \mathring{I}$ ist f streng monoton fallend

7.1.3 Satz von Rolle

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar mit $f(a) = f(b) = 0$ gilt: $\to$ VII(2.3)

- Es exisitiert mindestens ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$
  - Zwischen zwei Nullstellen einer differenzierbaren Funktion liegt stets eine Nullstelle der Ableitungsfunktion

7.1.4 Der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar mit $f(a) = f(b) = 0$ gilt: $\to$ VII(2.4)

- Es existiert mindestens ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

8 Stammfunktionen und Integrale

- F ist *Stammfunktion* von f, wenn gilt $F' = f$ $\to$ VIII(1.1)
  - Stamfunktionen sind nicht eindeutig und können sich um einen **konstanten** Summanden unterscheiden $\to$ VIII(1.2)
- Für ein *nichtausgeartetes* Intervall I und $f : I \to \mathbb{R}$ und Stammfunktion F definiert man das *bestimmte Integral* als: $\int\limits_a^b f(x)dx := F(b) - F(a) = F|_a^b$ $\to$ VIII(1.3)
- Stetige Funktionen auf nichtausgearteten Intervallen besitzen eine Stammfunktion $\to$ VIII(1.5)
- Das *unbestimmte Integral* $\int f(x)dx = F(x)$ erfüllt die Gleichung des bestimmten Integrals für alle Intervalle $[a, b]$ $\to$ VIII(1.6)

8.1 Rechenregeln für Integrale

Bekannte Stammfunktionen: $\to$ VIII(1.7)

- $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1},\ n \neq -1$
- $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|$
- $\int \sin x\, dx = -\cos x$
- $\int \cos x\, dx = \sin x$
- $\int \exp x\, dx = \exp x$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|$, für f stetig differenzierbar und $f(x) \neq 0\ \forall x$

8.1.1 Addition und Multiplikation

- $\int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx$ $\to$ VIII(1.4)
- $\int\limits_a^b \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)dx = \alpha \cdot \int\limits_a^b f(x)dx + \beta \cdot \int\limits_a^b g(x)dx$

8.1.2 Partielle Integration

Für stetig differenzierbare Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt: $\to$ VIII(1.8)

- $\int\limits_a^b f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x)|_a^b - \int\limits_a^b f'(x) \cdot g(x)dx$

8.1.3 Substitutionsregel

Für ein stetiges $f : D \to \mathbb{R}$ und stetig differenzierbares $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt: $\to$ VIII(1.9)

- $\int\limits_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$
- Ist φ streng monoton und ψ die Umkehrfunktion so gilt: $\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int\limits_{\psi(\varphi(a))}^{\psi(\varphi(b))} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx$

8.1.4 Uneigentliche Integrale

Eine stetige Funktion f heißt *uneigentlich integrierbar*, wenn gilt:

- Unbeschränktes Integral: $\to$ VIII(3.1)
  - $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ und $\lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$ existiert $\to \int\limits_a^\infty f(x)dx$
  - $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ und $\lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$ exisitiert $\to \int\limits_{-\infty}^b f(x)dx$
  - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ mit $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx := \int\limits_{-\infty}^c f(x)dx + \int\limits_c^\infty f(x)dx$
- Unbeschränkter Integrand: $\to$ VIII(3.4)
  - $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ und $\lim\limits_{\alpha\downarrow a} \int\limits_\alpha^b f(x)dx$ existiert $\to \int\limits_a^b f(x)dx$
  - $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ und $\lim\limits_{\beta\uparrow b} \int\limits_a^\beta f(x)dx$ existiert $\to \int\limits_a^b f(x)dx$

8.2 Differentialgleichungen

Für die nichtausgearteten Intervalle I, J mit stetigem $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$ gilt: $\to$ VIII(4.1)

- $y' = f(x) \cdot g(y)$ heißt *separierbare* Differentialgleichung
- $\varphi : I' \to \mathbb{R}$ heißt *Lösung* der Differentialgleichung, wenn gilt $\varphi'(x) = f(x) \cdot g(\varphi(x))$
- Ist $x_0 \in I'$ und $y_0 = \varphi(x_0)$ ist φ Lösung des *Anfangswertproblems* $y' = f(x) \cdot g(y),\ \ y(x_0) = y_0$

8.2.1 Lösen eines Anfangswertproblems

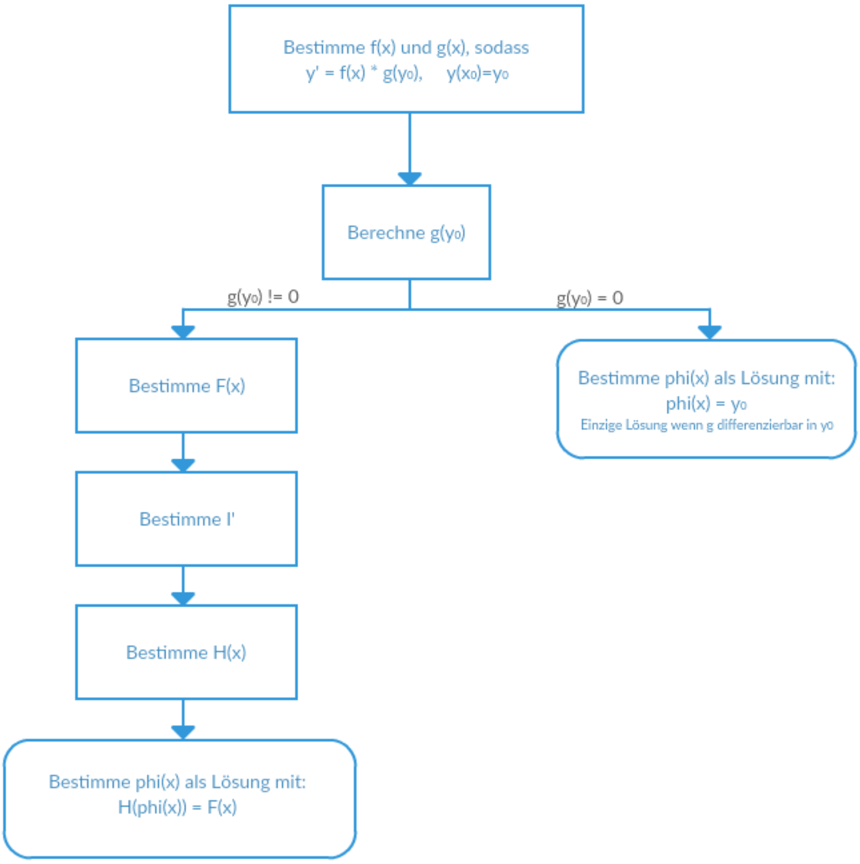
Für $y' = f(x) \cdot g(y),\ \ y(x_0) = y_0$ und $g(y_0) \neq 0$ gilt: $\to$ VIII(4.3)

- $F : I \to \mathbb{R}$ sei Stammfunktion zu f mit $F(x_0) = 0$, also $\int\limits_{x_0}^x f(t)dt$
- $J' \subset J$ mit $y_0 \in J'$ und $g(y) \neq 0\ \forall y \in J'$
- $H : J' \to \mathbb{R}$ sei Stammfunktion von $\frac{1}{g}$ mit $H(y_0) = 0$ also $\int\limits_{y_0}^y \frac{1}{g(s)}ds$
- Es exisitiert I' auf dem das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung φ hat:
  - $H(\varphi(x)) = F(x)\ \forall x \in I'$

Ist jedoch $g(y_0) = 0$, so gilt: $\to$ VIII(4.4)

- $\varphi : I \to \mathbb{R},\ \varphi(x) = y_0$
  - Ist g differenzierbar in y_0, so ist dies auch die einzige Lösung

8.2.2 Allgemeines Lösungsschema



8.2.3 Sonderfälle bei linearen Differentialgleichungen

Für ein nichtausgeartetes Intervall I und stetigem $f: I \to \mathbb{R}$ gilt: $\to$ VIII(4.6)

- Die homogene Gleichung mit $y' = f(x) \cdot y, \quad y(x_0) = y_0$ besitzt die Lösung:
  $\varphi(x) = y_0 \cdot \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt\right)$
- Die inhomogene Gleichung mit $y' = f(x) \cdot y + b(x, \quad y(x_0) = y_0)$ besitzt die Lösung:
  $\psi(x) = \varphi(x) \cdot u(x)$ mit:
  $\varphi(x) = \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt\right)$ und $u(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{\varphi(t)}dt$

9 Funktionen mehrerer Veränderlichen

- Matrizenrechnung wie gehabt $\to$ IX(1.1)
- Die *Determinante* einer 2x2-Matrix ist definiert als $\det A := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ $\to$ IX(1.2)

9.1 Kurven

Sei I ein nichtausgeartetes Intervall, $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $\Phi_1, ..., \Phi_n : I \to \mathbb{R}$: $\to$ IX(2.1)

- $\Phi: I \to \mathbb{R}^n, \ t \mapsto \begin{pmatrix} \Phi_1(t) \\ \vdots \\ \Phi_n(t) \end{pmatrix}$ heißt *Kurve* in $\mathbb{R}^n$
- Ist jede Komponente von Φ stetig oder differenzierbar, so heißt Φ stetig oder differenzierbar

- Die Ableitung von Φ ist definiert als: $\Phi'(t) := \begin{pmatrix} \Phi_1'(t) \\ \vdots \\ \Phi_n'(t) \end{pmatrix}$
  - Jedes $\Phi'(t_0)$ heißt *Tangentenvektor* der Kurve Φ an der Stelle $\Phi(t_0)$
- Das Bild $\Phi(I) = \{\Phi(t) \mid t \in I\}$ heißt *Spur* der Kurve Φ

9.2 Längenmessung

- Die *Norm* oder auch *Betrag* von $x \in \mathbb{R}^n$ ist definiert als $||x|| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$ → IX(3.1)
- $||x - y||$ ist der Abstand von x und y
- Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt: $||c \cdot x|| = |c| \cdot ||x||$ → IX(3.3)
- Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt: $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ → Dreiecksungleichung

9.2.1 Kreise und Kugeln

Für $a \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ ist: → IX(3.4)

- $K_r(a) := \{x \in \mathbb{R} \mid ||x - a|| < r\}$ eine offene Kugel mit Mittelpunkt a und Radius r
  - Für $n = 1$ ist dies äquivalent zu einem Intervall, Für $n = 2$ zu einer Kreisscheibe
- Eine Teilmenge U heißt Umgebung von a, wenn es ein $r > 0$ mit $K_r(a) \subset U$ gibt
  - a ist innerer Punkt von $M \subset \mathbb{R}^n$, wenn eine Umgebung U von a mit $U \subset M$ existiert
  - Ist jeder Punkt von M innerer Punkt, so heißt M offen

9.3 Stetigkeit

- f ist stetig in a, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für $||x - a|| < \delta$ stets $||f(x) - f(a)|| < \varepsilon$ gilt. → IX(4.1)
  - f ist stetig, wenn es in allen Punkten stetig ist

9.3.1 Rechenregeln für Stetigkeit

- f ist stetig, wenn jede Komponente stetig ist → IX(4.3)
- Jede Komposition von stetigen Funktionen bleibt stetig → IX(4.4)
- Die Verkettung von stetigen Funktionen bleibt stetig

9.3.2 Differentialrechnung

Für $D \subset \mathbb{R}^n$ mit $f : D \to \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt:

- Exisitiert $D_v f(a) := \lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(a + tv) - f(a))$, ist dies die *Richtungsableitung* von f im Punkt a in Richtung v (→ auch *Partielle Ableitung*) → IX(5.1)
- f heißt partiell differenzierbar in einer Koordinate k, wenn $D_k F(a) := \frac{\partial F}{\partial x_k}(a) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(a + te_k) - f(a))$ existiert → IX(5.3)
  - f ist partiell differenzierbar, wenn alle Komponenten partiell differenzierbar sind
  - Die Anordnung der partiellen Ableitungen in einer $m \times n$-Matrix heißt *Funktionalmatrix* oder *Jacobi-Matrix*
  - f ist stetig partiell differenzierbar, wenn alle partiellen Ableitungen stetig sind

9.3.3

-

9.3.4 Differentialgleichungen

-