Übungsblatt 10

Diskrete Strukturen, Prof. Dr. Gerhard Hiß, WS 2018/19

Für Matrikelnummer: 399191
Abgabezeitpunkt: Fr 11 Jan 2019 14:00:00 CET
Dieses Blatt wurde erstellt: Mo 21 Jan 2019 13:08:50 CET

Die Lösungen der ersten drei Aufgaben sind online abzugeben.

54 Gegeben sei die folgende Koeffizientenmatrix eines homogenen linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 39 & 12 & 6 & 15 \\ -8 & -22 & 8 & -36 & -10 \\ -4 & 208 & 16 & 132 & 70 \\ 0 & 45 & 0 & 36 & 15 \\ 12 & -57 & -12 & -18 & -15 \end{pmatrix}$$

In der Vorlesung haben wir die folgenden Zeilentransformationen definiert:
τ_{ij}: Vertausche die Zeilen i und j
$\alpha_{ij}(c)$ für $i \neq j$: Addiere das c-fache von Zeile j zu Zeile i
$\mu_i(c)$ für $c \neq 0$: Multipliziere Zeile i mit c
Wenden Sie die folgenden Operationen auf die Matrix an: $\tau_{15}, \alpha_{12}(1), \alpha_{13}(1), \alpha_{23}(-2), \mu_3(-1/4)$.
Sei $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 5}$ die resultierende Matrix.
Weiter sei Z eine Matrix in Zeilenstufenform, die aus A mit elementaren Zeilentransformationen berechnet wurde.

Wie lautet a_{12}?	__________
Wieviele 0-Zeilen enthält die Normalform der Matrix?	__________
Die Stufenzahl r von Z ist:	__________
Die Anzahl der freien Unbekannten in Z ist:	__________
Wie lautet a_{31}?	__________

55 Die Koeffizienten der Matrizen in dieser Aufgabe seien alle aus $\mathbb{R}$. Gelten die folgenden Aussagen?

Sei A in Zeilenstufenform. Addiert man die i-te zur j-ten Zeile, wobei $i > j$ ist, so erhält man eine Matrix, die wieder Zeilenstufenform hat.	◯ Ja / ◯ Nein
Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist in Zeilenstufenform.	◯ Ja / ◯ Nein
Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ lässt sich durch elementare Zeilentransformationen auf eine Zeilenstufenform mit zwei Nullzeilen bringen.	◯ Ja / ◯ Nein
Die Matrizen $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 6 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ gehen durch eine einzelne elementare Zeilenumformung auseinander hervor.	◯ Ja / ◯ Nein

	Die Matrix A sei in Zeilenstufenform und habe weniger Zeilen als Spalten. Dann kann A keine Nullzeile haben.	◯ Ja / ◯ Nein
56	Wir betrachten das homogene lineare Gleichungssystem mit $a_{ij} \in \mathbb{Q}$: $\begin{array}{ccccccccc} a_{11} & x_1 & + & a_{12} & x_2 & + \ldots + & a_{1n} & x_n & = & 0 \\ a_{21} & x_1 & + & a_{22} & x_2 & + \ldots + & a_{2n} & x_n & = & 0 \\ & & & & \vdots & & & & & \\ a_{m1} & x_1 & + & a_{m2} & x_2 & + \ldots + & a_{mn} & x_n & = & 0 \end{array}$ Gelten die folgenden Aussagen?	
	Wenn $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ Lösungen sind, ist auch $\begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ \vdots \\ b_n + c_n \end{pmatrix}$ eine Lösung.	◯ Ja / ◯ Nein
	Wenn $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ eine Lösung ist, ist $\begin{pmatrix} b_1 + 1 \\ \vdots \\ b_n + n \end{pmatrix}$ keine Lösung.	◯ Ja / ◯ Nein
	Wenn $m > n$ ist, hat das System keine Lösung.	◯ Ja / ◯ Nein
	Wenn $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ eine Lösung ist, ist auch $\begin{pmatrix} b_1 + 1 \\ \vdots \\ b_n + 1 \end{pmatrix}$ eine Lösung.	◯ Ja / ◯ Nein
	Wenn es eine von der Nulllösung $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ verschiedene Lösung gibt, gibt es auch eine von $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ verschiedene ganzzahlige Lösung.	◯ Ja / ◯ Nein
57	Umfrage zur Bearbeitungszeit.	
	Wieviele Stunden haben Sie für die Lösung dieses Übungsblattes aufgewendet? (Bitte auf ganze Stunden runden und nur diese ganze Zahl eintragen.) Diese Angabe ist freiwillig. Es gibt keine Punkte für die Beantwortung.	________________
Bitte werfen Sie Ihre Lösungen zu den schriftlich zu bearbeitenden Aufgaben in das Ihrer Gruppennummer entsprechende Fach im Abgabekasten des Lehrstuhl D für Mathematik (Flur 2.OG im Hauptgebäude, neben der Mathematischen Bibliothek).		
Denken Sie daran, dass Sie bei den schriftlichen Aufgaben Ihre Aussagen auch immer begründen.		

58	**(a)** Gegeben sei das folgende inhomogene lineare Gleichungssystems über dem Körper $\mathbb{Q}$. $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & -2x_2 & + & 5x_3 & = & -3 \end{array}$$ Bestimmen Sie die Lösungsmenge mit Hilfe des Gauß-Algorithmus. **(b)** Sei $a \in \mathbb{Q}$ eine beliebige Konstante. Für welche Werte von a ist das folgende inhomogene lineare Gleichungssystem über $\mathbb{Q}$ lösbar, für welche Werte von a ist es unlösbar? $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & (a-3)x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & -2x_2 & + & 5x_3 & = & -3 \end{array}$$ Falls nötig, können Sie bei der Berechnung eine geeignete Fallunterscheidung für a machen.
59	Wir betrachten das inhomogene LGS über $\mathbb{R}$ mit der erweiterten Koeffizientenmatrix $$(A,b) := \left(\begin{array}{cc\|c} a & a^2 & 1 \\ -1 & -1 & -a \\ 1 & a & a \end{array}\right)$$ und beliebiger Konstante $a \in \mathbb{R}$. Bringen Sie (A,b) auf Zeilenstufenform. *Tipp: Gehen Sie dabei am besten so vor, dass keine Fallunterscheidung für a erforderlich wird, keine Brüche auftreten, und die endgültige Form für alle Werte von a Zeilenstufenform hat.* Geben Sie an, für welche Werte von a das inhomogene LGS lösbar ist und für welche Werte von a es freie Unbekannte gibt.
Abgabe bis spätestens Freitag, dem 11. Januar 2019, 14 Uhr, sowohl am Abgabekasten als auch online.	