Kartesische Produkte

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und M_i eine Menge für alle $i \in \underline{n}$.
Wir setzen $M := \bigcup_{i \in \underline{n}} M_i$.

Definition

$M_1 \times \cdots \times M_n := \{f : \underline{n} \to M \mid f(i) \in M_i \text{ für alle } i \in \underline{n}\}$, und nennen $M_1 \times \cdots \times M_n$ das *kartesische Produkt* von $M_1, \ldots, M_n$.

Schreibweisen

- Für $f \in M_1 \times \cdots \times M_n$ schreiben wir $(x_1, \ldots, x_n)$ oder $(x_i)_{i \in \underline{n}}$ mit $x_i := f(i)$ für $1 \leq i \leq n$.
- $M_1 \times \cdots \times M_n$ ist also die Menge aller n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n) = (x_i)_{i \in \underline{n}} \in M^n$ mit $x_i \in M_i$ für $i \in \underline{n}$.

Familien

Es seien M, I Mengen.

Definition

Es seien I und M Mengen.
Eine Abbildung $f : I \to M$ wird gelegentlich auch mit $(x_i)_{i \in I}$ notiert, wobei $x_i := f(i)$ ist für $i \in I$.
In diesem Fall heißt $(x_i)_{i \in I}$ eine durch I indizierte *Familie* in M.

Beispiele

- Für $I = \mathbb{N}$ ist $(x_i)_{i \in I}$ eine Folge in M.
- Für $I = \underline{n}$ ist $(x_i)_{i \in I}$ ein n-Tupel in M.

Kartesische Produkte (Forts.)

Es sei I eine Menge und M_i eine Menge für alle $i \in I$.
Wir setzen $M := \cup_{i \in I} M_i$.

Definition
Die Menge

$$\prod_{i \in I} M_i := \{(x_i)_{i \in I} \in M^I \mid x_i \in M_i \text{ für alle } i \in I\}$$

heißt das *kartesische Produkt* der Mengen $M_i, i \in I$.

Beispiel
Sei $I = \mathbb{N}$ und $M_i := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq i\}$ für $i \in \mathbb{N}$.
$\prod_{i \in \mathbb{N}} M_i = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid x_i \leq i \text{ für alle } i \in \mathbb{N}\}$.

Bild und Urbild

Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung.

Definition

- $X \subseteq M$:

$$\begin{aligned} f(X) &:= \{f(x) \mid x \in X\} \\ &= \{y \in N \mid \text{es gibt ein } x \in M \text{ mit } y = f(x)\}. \end{aligned}$$

  Bild von X unter f.
- $f(M)$: *Bild* von f.
- $Y \subseteq N$:

$$f^{-1}(Y) := \{x \in M \mid f(x) \in Y\}$$

  Urbild von Y unter f.
- $f^{-1}(\{y\})$ mit $y \in N$: die *Fasern von* f.

Bild und Urbild (Forts.)

Beispiele

$f\colon \{1,2,3,4\} \to \{5,6,7,8,9\}$, $1 \mapsto 5$, $2 \mapsto 8$, $3 \mapsto 5$, $4 \mapsto 9$

- $f(\{1,2,3\}) =$
- Bild von $f =$
- $f^{-1}(\{5,9\}) =$
- $f^{-1}(\{5\}) =$
- Sei A die Menge der jetzt in diesem Hörsaal anwesenden Personen.
  Setzte $J := A \to \mathbb{Z}$, $p \mapsto$ Geburtsjahr von p.
  Die Faser $J^{-1}(\{2000\})$ ist die Menge der Personen aus A, die im Jahr 2000 geboren sind.

Bild und Urbild (Forts.)

Bemerkung

Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung.
Die nicht-leeren Fasern von f bilden eine Partition von M.

Injektive, surjektive und bijektive Abbbildungen

Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung.

Definition

- f heißt *surjektiv*, falls $f(M) = N$.
- f heißt *injektiv*, falls für alle $x, x' \in M$ gilt: $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.
- f heißt *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.

Injektive, surjektive und bijektive Abbbildungen (Forts.)

Beispiel

- $\{1,2,3\} \to \{4,5\}$, $1 \mapsto 4$, $2 \mapsto 4$, $3 \mapsto 5$
- $\{1,2\} \to \{4,5,6\}$, $1 \mapsto 4$, $2 \mapsto 5$
- $\{1,2,3\} \to \{4,5,6\}$, $1 \mapsto 5$, $2 \mapsto 6$, $3 \mapsto 4$
- $\{1,2,3\} \to \{4,5,6\}$, $1 \mapsto 5$, $2 \mapsto 6$, $3 \mapsto 5$

Injektive, surjektive und bijektive Abbbildungen (Forts.)

Beispiel

$f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto -2x + 3$ ist bijektiv.

Injektive, surjektive und bijektive Abbbildungen (Forts.)

Beispiel

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Abb}_{\mathrm{inj}}(\{1,2\},\{3,4,5\})\\
&= \{(1 \mapsto 3, 2 \mapsto 4), (1 \mapsto 3, 2 \mapsto 5), (1 \mapsto 4, 2 \mapsto 3),\\
&\qquad (1 \mapsto 4, 2 \mapsto 5), (1 \mapsto 5, 2 \mapsto 3), (1 \mapsto 5, 2 \mapsto 4)\}\\
&\mathrm{Abb}_{\mathrm{surj}}(\{1,2,3\},\{4,5\})\\
&= \{(1 \mapsto 4, 2 \mapsto 4, 3 \mapsto 5), (1 \mapsto 4, 2 \mapsto 5, 3 \mapsto 4),\\
&\qquad (1 \mapsto 4, 2 \mapsto 5, 3 \mapsto 5), (1 \mapsto 5, 2 \mapsto 4, 3 \mapsto 4),\\
&\qquad (1 \mapsto 5, 2 \mapsto 4, 3 \mapsto 5), (1 \mapsto 5, 2 \mapsto 5, 3 \mapsto 4)\}\\
&\mathrm{Abb}_{\mathrm{bij}}(\{1,2,3\},\{4,5,6\})\\
&= \{(1 \mapsto 4, 2 \mapsto 5, 3 \mapsto 6), (1 \mapsto 4, 2 \mapsto 6, 3 \mapsto 5),\\
&\qquad (1 \mapsto 5, 2 \mapsto 4, 3 \mapsto 6), (1 \mapsto 5, 2 \mapsto 6, 3 \mapsto 4),\\
&\qquad (1 \mapsto 6, 2 \mapsto 4, 3 \mapsto 5), (1 \mapsto 6, 2 \mapsto 5, 3 \mapsto 4)\}
\end{aligned}
$$

Injektive, surjektive und bijektive Abbbildungen (Forts.)

Beispiele

- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, z \mapsto 2z$ ist
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x$ ist
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist
- Hashfunktionen, z.B. md5 : $\{\text{Texte}\} \to \{0,1\}^{128}$
- Verschlüsselungsfunktionen, z.B. crypt : $\{0,1\}^k \to \{0,1\}^k$, sind injektiv