EFFIZIENTE ALGORITHMEN

Übungsblatt 6

Prof. Dr. Woeginger, PD Dr. Unger, Prof. Dr. Rossmanith
Dennis Fischer
Lehrstuhl für Informatik 1
RWTH Aachen

WS 18/19
22. November
Abgabe: 29. November 18:00

- Die Übungsblätter sollen in Gruppen von 3-5 Studierenden abgegeben werden.
- Die abgegebenen Lösungen mit Namen und Matrikelnummern aller Teammitglieder und der Übungsgruppe beschriften.
- Um zur Klausur zugelassen zu werden müssen 50% aller möglichen Übungspunkte erreicht werden.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Entwerfen Sie einen Algorithmus, der das folgende Problem in polynomieller Zeit löst:

Shortest-Cheapest-Path

Eingabe: Ein gewichteter Graph $G = (V, E, c)$ mit $c\colon E \to \mathbb{Q}_0^+$.

Frage: Ein Pfad von s nach t mit geringstem Gewicht w, so dass es keinen Pfad von s nach t mit Gewicht w gibt, der kürzer ist.

Beweisen Sie sowohl die Korrektheit als auch eine möglichst gute Laufzeitschranke ihrer Lösung.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Die „Flat-Rate-Kosten“ eines Flusses f sind $\sum_{e \in E, f(e) > 0} w(e)$. Gegeben ist folgendes Problem:

Flat-Rate

Eingabe: Ein s-t-Netzwerk $G = (V, E, s, t, c, w)$, eine Kostenfunktion $w\colon E \to \mathbb{Q}_0^+$, $a, b \in \mathbb{Q}_0^+$.

Frage: Gibt es einen Fluss von s nach t der Größe a mit „Flat-Rate-Kosten“ höchstens b?

Beweisen Sie, dass dieses Problem in P ist oder dass es NP-schwer ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es gibt auch verschiedene gewichtete Varianten des Matchingproblems, z.B.

i) MAXIMUM-WEIGHT MATCHING: Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ und Gewichte $w\colon E \to \mathbb{N}_0$, finde ein Matching mit maximalem Gewicht.

ii) MINIMUM-WHEIGHT PERFECT MATCHING: Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ und Gewichte $w\colon E \to \mathbb{N}_0$, finde ein perfektes Matching mit minimalem Gewicht oder entscheide, dass kein perfektes Matching existiert.

Gib polynomielle Reduktionen mit Laufzeit $O(n^2)$ zwischen diesen beiden Problemen an.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Eine Kantenmenge $C \subseteq E$ eines zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 2$ heißt *Edge-Cover*, wenn jeder Knoten in V von mindestens einer Kante aus C überdeckt ist. Sei C^* ein Edge-Cover mit minimaler Kardinalität und M^* ein Matching in G mit maximaler Kardinalität. Zeige: $|C^*| + |M^*| = |V|$.

Hinweis: Zeige $|C^*| + |M^*| \geq |V|$ und $|C^*| + |M^*| \leq |V|$.

Abgabefrist: Die Lösungen müssen bis zum **29. November 18:00** in der Vorlesung oder im Abgabekasten vor dem Lehrstuhl i1 abgegeben werden.