LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. S. Walcher
Markus Hirshman, Dipl.-Gyml.
Niclas Kruff, M. Sc.

Aachen, den 28. November 2018

Übung 5 zur Vorlesung Analysis für Informatiker, WS 2018/2019

Abgabe bis Mittwoch, 14.11.2018, 12 Uhr

Hausaufgabe 4*

Im Folgenden bezeichnen wir den Grenzwert der Folge $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, mit $e \in \mathbb{R}$, d.h.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Untersuchen Sie damit das Konvergenzverhalten der unten stehenden Folgen und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((1+1/n^2)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((1+1/n)^{m\cdot n+k})_{n\in\mathbb{N}}$ für feste, aber beliebige $m, k \in \mathbb{N}$.

(c) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((1+1/n)^{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$.

(d) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((1-1/n)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Lösung

(a) Es gilt $(1+1/n)^n \leqslant 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit folgt

$$b_n = (1+1/n^2)^n = [(1+1/n^2)^{n^2}]^{1/n} \leqslant 3^{1/n} = \sqrt[n]{3} \xrightarrow[n\to\infty]{1} .$$

Weiterhin gilt trivialerweise $b_n = (1+1/n^2)^n \geqslant 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, so dass mit dem Sandwich-Lemma insgesamt $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ folgt.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} c_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{mn+k} \\ &= \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^m \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^k \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{\text{Limitenregeln}} e^m \cdot 1^k = e^m. \end{aligned}$$

(c) Es gilt mit der Ungleichung von Bernoulli $(1+1/n)^n \geqslant 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit folgt

$$d_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^n \geqslant 2^n \xrightarrow[n\to\infty]{\infty},$$

so dass $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt gegen ∞ divergent ist.

(d) Wir wissen, dass $(1+1/n)^n \geqslant 2 > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(1+1/n)^n \to e \neq 0$ gilt. Mit den Limitenregeln folgt also

$$\frac{1}{(1+1/n)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e}.$$

Es ist aber

$$x_n := \frac{1}{(1+1/n)^n} = \left(\frac{1}{1+1/n}\right)^n = \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} x_n &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \\ &= \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Schließlich gilt:

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \cdot x_n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Die Folge $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$ konvergiert gegen 1 und mit den Limitenregeln folgt

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1/e$$

und damit erhalten wir auch

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = 1/e.$$