Lehrstuhl für Informatik 1
Prof. Dr. Woeginger, PD Dr. Unger, Prof. Dr. Rossmanith
Dennis Fischer
RWTH Aachen

WS 2018/2019
17.1.2019

Probeklausur
Effiziente Algorithmen

Name: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Studiengang: ....

Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihre Matrikelnummer.
- Die Klausur hat 18 Seiten. Bitte prüfen Sie Ihre Klausur auf Vollständigkeit.
- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben mit Unteraufgaben.
- Bitte achten Sie auf eine klare und mathematisch korrekte Darstellung.
- Benutzen Sie ausschließlich das zur Verfügung gestellte Papier. Gegebenenfalls können Sie auch noch zusätzliches Papier erfragen.
- Bitte schreiben Sie deutlich. Unleserliches wird nicht korrigiert und als fehlerhaft gewertet.
- Streichen Sie Konzeptrechnungen, die nicht gewertet werden sollen, durch oder machen Sie sie anderweitig kenntlich. Bei mehreren Lösungsversuchen pro Aufgabe wird der Schlechteste gewertet.
- Bitte verwenden Sie einen dokumentenechten Stift mit blauer oder schwarzer Tinte, und verwenden Sie keinen Tintenkiller oder Ähnliches.
- Bitte schalten Sie Ihre elektronischen Geräte aus!

Aufgabe Nr.:	1	2	3	4	5	6	**Summe**
Punktzahl:	20	20	20	20	30	10	120
Davon erreicht:							

1. Geben Sie (ohne weitere Begründung) die bestmögliche Anzahl von Vergleichen an, mit denen die folgenden Probleme **im Worst-Case** gelöst werden können. (Die Eingabe besteht jeweils aus paarweise verschiedenen positiven ganzen Zahlen, die in einem Array gespeichert sind.)

   (a) i. Bestimme das Minimum von 101 Zahlen: 2 Punkte

   i. ________________

   ii. Bestimme die zweitgrößte von 1024 Zahlen: 3 Punkte

   ii. ________________

   iii. Bestimme Minimum und Maximum von 200 Zahlen: 3 Punkte

   iii. ________________

(b) In einer Gruppe von $n = 6$ Personen ist jedes Personenpaar entweder miteinander befreundet oder mit einander verfeindet. Ein Soziologe will herausfinden, ob man diese Gruppe in zwei nicht-leere Teilgruppen A und B aufspalten kann, sodass jede Person in A mit jeder Person in B verfeindet ist. (Anmerkung: Feindschaften und Freundschaften innerhalb von A und B spielen dabei keine Rolle.) 12 Punkte

Bestimmen Sie die bestmögliche Anzahl von Fragen, mit denen der Soziologe sein Problem **im Worst-Case** lösen kann.

2. (a) Es sei $n = 2^q$ eine Zweierpotenz, und es seien ω^i mit $i = 0, \ldots, n-1$ die dazugehörigen n-ten Einheitswurzeln. 15 Punkte

Zeigen Sie, wie man in $O(n \log n)$ Zeit die Koeffizienten-Darstellung $\langle a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle$ des Polynoms $A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$ in die entsprechende Punkt-Wert-Darstellung $(x_0, y_0), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})$ mit $x_i = \omega^i$ für $i = 0, \ldots, n-1$ überführen kann.

(b) Bestimmen Sie die DFT des Vektors $a = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$ bezüglich der achten Einheitswurzel $\omega = e^{\pi/4}$. $\boxed{\text{5 Punkte}}$

3. In der Vorlesung wurde ein einfacher Algorithmus zum Bestimmen eines Maximalen Matchings auf bipartiten Graphen angegeben. Dessen Laufzeit von $O(n \cdot m)$ mit $n = |V|$ und $M = |E|$ wurde dann durch das Verfahren von Edmonds und Karp verbessert.

   (a) Beschreiben das Vorgehen des Verfahrens von Edmonds und Karp. Beschreiben Sie die Unterschiede zum einfachen Verfahren. 8 Punkte

(b) Geben Sie die Laufzeit des Verfahrens von Edmonds und Karp an. 1 Punkte

(b) ______________________

(c) Begründen Sie diese Laufzeit.

i. D.h. wie oft wird die äußere Schleife durchlaufen (mit Begründung der Aussage). 6 Punkte

ii. Und was ist der Aufwand bei jedem Schleifendurchlauf? $\boxed{\text{5 Punkte}}$

4. In der Vorlesung wurde folgender Algorithmus zum Bestimmen eines Schedules angegeben:

   1. Ein Orakel liefert $Z \in \mathbb{N}$, den Wert des optimalen Makespan.
   2. Phase 1:
      (a) Betrachte die großen Jobs: $G = \{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid p_i > \epsilon Z\}$.
      (b) Skaliere die Größe der Jobs aus G:
      $$p'_i = \left\lceil \frac{p_i}{\epsilon^2 Z} \right\rceil$$
      (c) Bestimme Schedule mit Jobgrößen p'_i mit Makespan
      $$Z' = \left\lfloor (1 + \epsilon) \frac{1}{\epsilon^2} \right\rfloor.$$
   3. Phase 2:
      (a) Betrachte die kleinen Jobs: $K = \{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid p_i \leq \epsilon Z\}$.
      (b) Verteile die Jobs aus K nach der LL Heuristik.

   (a) Geben Sie den Approximationsfaktor des obigen Algorithmus an. 1 Punkte

(a) ______________________

(b) Begründen Sie diesen Approximationsfaktor für die großen Jobs. 7 Punkte

(c) Begründen Sie diesen Faktor für die kleinen Jobs. 5 Punkte

(d) Beschreiben Sie das Vorgehen in Zeile 5 des Algorithmus, also wie bestimmt man einen Schedule für die Jobgrößen p_i' mit einem Makespan 7 Punkte

$$Z' = \left\lfloor (1+\epsilon)\frac{1}{\epsilon^2} \right\rfloor ?$$

5. Gegeben ist ein vollständiger metrischer Graph (die Kantengewichte sind positiv und die Dreiecksungleichung gilt für das Gewicht von Pfaden). Wir wollen das TSP-Problem mithilfe von Branch & Bound lösen.

   (a) Wie lässt sich der Suchraum in der Form $S_1, ..., S_n$ modellieren? 5 Punkte

   (b) Falls wir eine Teillösung in der Form eines Pfades haben, der noch nicht alle Kanten enthält, wie können wir schnell eine gute untere und obere Schranke für eine TSP-Tour berechnen, die die Teillösung beinhaltet? 8 Punkte

(c) Schlagen Sie eine möglichst gute Strategie für die Wahl des E-Knoten vor. Begründen Sie, warum sie eine gute Wahl ist. 7 Punkte

(d) Geben Sie einen entsprechenden Algorithmus in (sehr abstraktem) Pseudo-Code an. 10 Punkte

6. (a) Wie lässt sich mit einem fairen Würfel eine 1 aus 10 Entscheidung gleichverteilt treffen? **3 Punkte**

(b) Schätzen Sie mit dem Verfahren der Vorlesung grob ab, wie groß der Suchbaum in etwa ist, wenn wir das 10-Damen-Problem mit dem gewöhnlichen Backtrackingalgorithmus lösen. Dokumentieren Sie die einzelnen Schritte. Sie müssen die genaue Zahl nicht ausrechnen. Es reicht, wenn Sie das Ergebnis z.B. als Produkt von Zahlen oder ähnlich angeben. **7 Punkte**

Zusätzlicher Platz:

Zusätzlicher Platz: