Lehrstuhl für Informatik 1
Prof. Dr. Gerhard Woeginger
Jan Böker, Tim Hartmann

WS 2018/19

Übung zur Vorlesung
Berechenbarkeit und Komplexität

Lösung Blatt 2

Hausaufgabe 2.1 **(5 Punkte)**

Sei $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, B, q_0, \bar{q}, \delta)$ eine TM, welche nur Bandzellen zwischen einschließlich Positionen 0 und $s(n) - 1$ besucht. Zeigen Sie: Wenn M auf einer Eingabe w der Länge n hält, dann hält M auf w nach spätestens $|Q| \cdot |\Gamma|^{s(n)} \cdot s(n) + 1$ Schritten.

Eine TM M, welche nur Bandzellen zwischen einschließlich Positionen 0 und $s(n) - 1$ besucht, beschreibt die Beschriftung dieser $s(n)$ Bandzellen, sowie die Kopfposition und der Zustand eine Konfiguration. Demnach gibt es höchstens $|Q| \cdot |\Gamma|^{2s(n)} \cdot 2s(n)$ viele verschiedene Konfigurationen bestehend aus Bandbeschriftung, Kopfposition und Zustand. (bzw. $(|Q| - 1) \cdot \ldots$ Konfigurationen, falls man den Endzustand ausschließt.) Besucht die TM eine solche Konfiguration zum zweiten mal, so sind die nachfolgenden Konfigurationen gleich wie beim ersten mal. Die TM befindet sich in dem Fall in einer Endlosschleife und terminiert nicht.

Gegeben, dass M auf w hält, wird jede Konfiguration höchstens einmal besucht. Daher terminiert M auf w nach maximal $|Q| \cdot |\Gamma|^{2s(n)} \cdot 2s(n)$ Schritten.

In den folgenden Hausaufgaben ist es nicht notwendig, die Turingmaschinen explizit anzugeben. Eine Beschreibung ihrer Arbeitsweise und Laufzeit in den einzelnen Arbeitsschritten genügt.

Hausaufgabe 2.2 **(4 Punkte)**

Sei $L = \{w\#\overline{w} \mid w \in \{0,1\}^*\}$ (über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1, \#\}$), wobei $\overline{w}$ die bitweise Negation von w ist (zB. $\overline{1011} = 0100$).

Beschreiben Sie eine möglichst effiziente 2-Band-TM, die L entscheidet. Analysieren Sie den Zeit- und den Speicherplatzbedarf der von Ihnen entworfenen Maschine.

Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst, wie ein zweites Band die Erkennung eines Wortes in L schneller machen kann.

Die Idee besteht darin, die Eingabe zunächst auf das zweite Band zu kopieren. Dafür sind $\Theta(n)$ viele Schritte nötig. In einer zweiten Phase wird die Zeichenkette auf dem ersten Band bis zum Symbol $\#$ mit der Zeichenkette auf dem zweiten Band verglichen. Durch die Verwendung von 2 Bändern (mit 2 Schreib-/Lese-Köpfen) ist Phase 2 ebenfalls in Zeit $\Theta(n)$ möglich.

1) Falls die Eingabe kein #, terminiere mit NEIN.
2) Lies ein Zeichen auf Band 1, schreibe es im selben Schritt auf Band 2. Bewege Kopf 1 und Kopf 2 nach rechts.
3) Falls rechtes Ende der Eingabe noch nicht erreicht, gehe zu Schritt 2.
4) Bewege Kopf 1 an das linke Ende der Eingabe und Kopf 2 an die erste Position rechts vom # auf dem 2. Band.
5) Lies von Band 1 und Band 2 gleichzeitig. Falls auf Band 1 das Symbol # und auf Band 2 das Symbol B gelesen wird, terminiere mit JA. Falls die Symbole auf Band 1 und 2 aber ungleich und aus $\{0, 1\}$ sind, bewege den Kopf auf Band 1 nach rechts und den Kopf auf Band 2 nach rechts, und wiederhole Schritt 5. Ansonsten terminiere mit NEIN.

Der Speicherplatzbedarf ist $\mathcal{O}(n)$, da nur auf der Eingabe gearbeitet wird.

Hausaufgabe 2.3 **(5 Punkte)**

Eine TM mit einseitig unendlichem Band ist eine TM, die die Positionen $p < 0$ nie benutzt. Zeigen Sie, dass jede 1-Band-TM (mit Akzeptieren oder Verwerfen als Ausgabe) durch eine 1-Band-TM mit einseitig unendlichem Band simuliert werden kann. Geben Sie ein möglichst effiziente Simulation. Wie groß ist der Zeitverlust Ihrer Simulation?

Wir simulieren eine 1-Band-TM mit beidseitig unendlichem Band auf einer 1-Band-TM mit einseitig unendlichem Band. Dazu benutzen wir eine zweite Spur. Zugriffe auf Bandpositionen $p < 0$ werden auf Position $1 - p$ umgelenkt. An Position 0 der zweiten Spur steht ein Sonderzeichen, das sonst nicht verwendet wird, z.B. ein \$. Die Beschreibung der Zustandsübergangsfunktion wird dabei doppelt so groß, sie enthält nämlich einmal das ursprüngliche und unveränderte δ, und einmal ein gespiegeltes δ'. Wo δ ein L enthält, enthält δ' ein R, und umgekehrt.

Falls der Kopf auf einer Position $p > 0$ steht, verhält sich die neue TM wie die ursprüngliche TM, verwendet also die Übergänge aus δ, wobei die Symbole in Spur 2 ignoriert werden. Dasselbe gilt an Position 0, sofern der Kopf nach rechts oder gar nicht bewegt wird. Wenn die ursprüngliche TM aber nach links gehen würde und sich der Kopf an Position 0 befindet (was am \$ in Spur 2 zu erkennen ist), so findet stattdessen ein Schritt nach rechts statt und es wird bis zum nächsten Besuch der Position 0 die Übergangsfunktion δ' benutzt. δ' benutzt Spur 2 und ignoriert Spur 1.

Diese Simulation verändert die asymptotische Laufzeit nicht. Es gibt initial konstanten Aufwand um das § auf das Band zu schreiben, und sonst wird jeder Schritt von der ursprünglichen TM durch genau einen Schritt simuliert.

(Dieses Verfahren bezieht sich auf Turingmaschinen, die nur akzeptieren bzw. verwerfen. Wird ein Ausgabewort geschrieben, so müsste dies wieder "einspurig" hingeschrieben werden. Dabei ist der Zeitverlust quadratisch in der Größe des Ausgabewortes.)