Effiziente Algorithmen (SS2015)

Kapitel 5
Lineare Programme 2

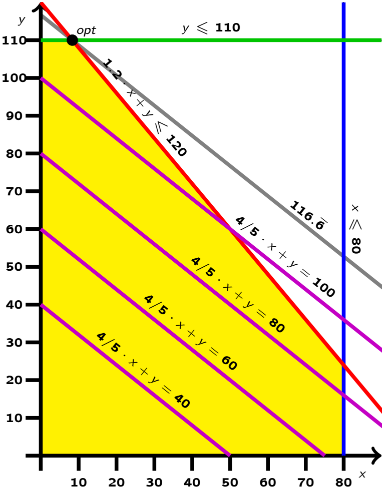
Walter Unger

Lehrstuhl für Informatik 1

14:06 Uhr, den 19. Dezember 2018

Inhalt I

Einfaches Beispiel



- Wir betrachten ein System von linearen Ungleichungen.
- Dabei ist eine "Zielfunktion" zu optimieren.
- Beispiel (Brotrezept):
  - x kg Weizenmehl
  - y kg Roggenmehl
  - Maximal 80 kg Weizenmehl.
  - Maximal 110 kg Roggenmehl.
  - Mischungsverhältnis: $1.2 \cdot x + y$.
  - Maximale Brotmenge: $1.2 \cdot x + y \leqslant 120$.
  - Zu optimieren: $f(x, y) = 4/5 \cdot x + y$.

Beispiel: Flussproblem

- Flussproblem:
  - Gegeben $G = (V, E, s, t, c)$ mit $c : E \mapsto \mathbb{N}$.
  - Maximiere den Fluss.
- als lineares Programm:
  - Variablen x_e für $e \in E$.
  - Maximiere

$$\sum_{e \in N_{out}(s) \in E} x_e.$$

  - unter Einhaltung der Bedingungen:
    - Für jeden Knoten $v \in V \setminus \{s, t\}$: $\sum_{e \in N_{in}(v)} x_e = \sum_{e \in N_{out}(v)} x_e$,
    - $\forall e \in E : x_e \leqslant c_e$, und
    - $\forall e \in E : x_e \geqslant 0$.

Beispiel: Relaxiertes Rucksackproblem

- Relaxiertes Rucksackproblem:
  - gegeben d teilbare Objekte mit Gewichten g_i und
  - die Gewichtsschranke G des Rucksacks.
  - Und v_i sei der Nutzen für $1 \leqslant i \leqslant d$.
  - Sei x_i der Anteil von Objekt i.
  - Fülle den Rucksack. Dabei soll der Nutzen maximal sein.
- Als lineares Programm:
  - Maximiere

$$\sum_{i=1}^{d} v_i \cdot x_i.$$

  - unter den Nebenbedingungen:
    - $\sum_{i=1}^{d} g_i \cdot x_i \leqslant G$,
    - $\forall i : 1 \leqslant i \leqslant d : x_i \leqslant 1$, und
    - $\forall i : 1 \leqslant i \leqslant d : x_i \geqslant 0$.

Beispiel: Routing und Wellenlängenzuweisung

- Routing und Wellenlängenzuweisung: bestimme die Wellenlängen in einem optischen Netzwerk. In dem Netzwerk gibt es Kommunikationsanfragen für Paare von Knoten.
  - N_E Endknoten.
  - N_R Router mit Konverter.
  - $n = N_E + N_R$.
  - Namen der Knoten: N_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.
  - m Anzahl der Lichtwege.
  - E: $(i,j) \in E \iff$ Kante von N_i nach N_j.
  - $src(k)$: ist Startknoten der k-ten Anfrage.
  - $dst(k)$: ist Endknoten der k-ten Anfrage.
  - Ω_{max}: Congestion des Netzwerks.
  - $X_{ij}^k \in \{0,1\}$ mit:

$$X_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{der } k\text{-te Weg nutzt Kante } (i,j) \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

  - Wegen $X_{ij}^k \in \{0,1\}$ ist dies hier ein "Integer Linerar Programm".

Routing und Wellenlängenzuweisung als ILP

$n = N_E + N_R$
$src(k) \longleftrightarrow dst(k) : (1 \leqslant k \leqslant m)$
X_{ij}^k : k-**te Weg nutzt Kante** (i, j)

- Minimiere Zielfunktion Ω_{max}.
- $\sum_{k=1}^{m} X_{ij}^k \leqslant \Omega_{max}, \forall (i,j) \in E$.
- Für alle $k : 1 \leqslant k \leqslant m$ und alle $i : 1 \leqslant i \leqslant n$:

$$\sum_{j:(i,j)\in E} X_{ij}^k - \sum_{j:(j,i)\in E} X_{ji}^k = \begin{cases} 1 & \text{falls } src(k) = i \\ -1 & \text{falls } dst(k) = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Dies ist eine korrekte Formulierung des Routen- und Wellenlängenzuweisungsproblems als ILP.
- Komplexität:
  - $m \cdot |E|$ Variablen der Form X_{ij}^k.
  - Eine Variable Ω_{max}.
  - Nebenbedingungen: $|E| + n \cdot m$.
  - Schon für relativ kleine Netzwerke zu aufwendig.

Routen- und Wellenlängenzuweisung

- N_E Endknoten; N_R Router ohne Konverter.
- $n = N_E + N_R$; Namen der Knoten: N_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.
- m Anzahl der Lichtwege; n_{ch} Anzahl der Wellenlängen.
- E: $(i,j) \in E \iff$ Kante von N_i nach N_j.
- $src(k)$: ist Startknoten der k-ten Anfrage.
- $dst(k)$: ist Endknoten der k-ten Anfrage.
- Ω_{max}: Congestion des Netzwerks.
- $X_{ij}^{wk} \in \{0,1\}$ mit:

$$X_{ij}^{wk} = \begin{cases} 1 & \text{der } k\text{-te Weg nutzt } (i,j) \in E \text{ und W.länge } w \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- $Y_w^k \in \{0,1\}$ mit:

$$Y_w^k = \begin{cases} 1 & \text{der } k\text{-te Weg nutzt Wellenlänge } w \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ILP:

$n = N_E + N_R$
$src(k) \longleftrightarrow dst(k) : (1 \leqslant k \leqslant m)$
X_{ij}^k : k**-te Weg nutzt Kante** (i,j)
Y_w^k : k**-te Weg nutzt Wellenlänge** w

- Minimiere Zielfunktion Ω_{max}:

$$\sum_{w=1}^{n_{ch}} \sum_{k=1}^{m} X_{ij}^{wk} \leqslant \Omega_{max}, \forall (i,j) \in E$$

- Für alle $k, w : 1 \leqslant k \leqslant m, 1 \leqslant w \leqslant n_{ch}$ und alle $i : 1 \leqslant i \leqslant n$:

$$\sum_{j:(i,j)\in E} X_{ij}^{wk} - \sum_{j:(j,i)\in E} X_{ji}^{wk} = \begin{cases} Y_w^k & \text{falls } src(k) = i \\ -Y_w^k & \text{falls } dst(k) = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Für alle $k : 1 \leqslant k \leqslant m$:

$$\sum_{w=1}^{n_{ch}} Y_w^k = 1$$

- Für alle $w : 1 \leqslant w \leqslant n_{ch}$ und alle $(i,j) \in E$:

$$\sum_{k=1}^{m} X_{ij}^{wk} \leqslant 1$$

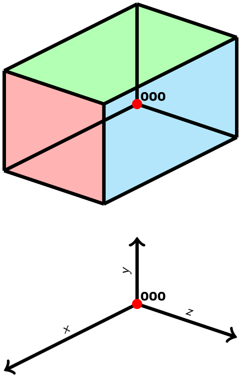
Kanonische Form eines LP

- Ein LP ist in kanonischer Form, falls:
  - Es gibt d Variablen $x_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$,
  - Werte $c_j \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant j \leqslant d$,
  - Werte $b_i \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant i \leqslant m$ und
  - Werte $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant j \leqslant d$ und $1 \leqslant i \leqslant m$.
  - Gesucht ist eine Belegung der Variablen $x_i \in \mathbb{R}$ mit:
    - Maximiere Zielfunktion $\sum_{j=1}^{d} c_j \cdot x_j$
    - unter den Nebenbedingungen:
    - $\sum_{j=1}^{d} a_{ij} \cdot x_j \leqslant b_j$ für $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ und
    - $x_j \geqslant 0$ für $j \in \{1, 2, \ldots, d\}$.
- Setze:
  - $x = (x_j)$, $c = (c_j)$, $b = (b_i)$ und $A = (a_{ij})$.
- Dann ist kurzgefasst die kanonische Form:
  - Maximiere $c^T \cdot x$ unter den Nebenbedingungen:
  - $A \cdot x \leqslant b$ und $x \geqslant 0$.

Umformungen zur kanonischen Form

- Minimierungsproblem in ein Maximierungsproblem:
  - $c^T \cdot x$ wird zu $-c^T \cdot x$.
- Eine Gleichung $a^T \cdot x = b$ wird ersetzt durch
  - $a^T \cdot x \leqslant b$ und
  - $a^T \cdot x \geqslant b$.
- Eine Gleichung $a^T \cdot x \geqslant b$ wird ersetzt durch
  - $-a^T \cdot x \leqslant -b$.
- Eine möglicherweise negative Variable $x \in \mathbb{R}$ wird ersetzt durch:
  - $x' - x''$ und den Nebenbedingungen:
  - $x' \geqslant 0$ und
  - $x'' \geqslant 0$.

Geometrische Interpretation



$$0 \leqslant x \leqslant t$$
$$0 \leqslant y \leqslant t$$
$$0 \leqslant z \leqslant t$$

- Eine Variablenbelegung $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ entspricht einem Punkt im d-dimensionalen Raum.
- Eine Nebenbedingung $a_i \cdot x \leqslant b_i$ definiert einen Halbraum.
- Die Grenze des Halbraums ist die Hyperebene $a_i \cdot x = b_i$.
- Der Schnitt aller Halbräume ist der Raum der zulässigen Lösungen.
- Ein LP wird als zulässig bezeichnet, wenn des zulässige Lösungen gibt.
- Schnittmengen von Halbräumen bilden ein Polyhedron.
- Damit bilden die zulässigen Lösungen ein Polyhedron.

Konvexität

P **Polyhedron**

Lemma

Ein Polyhedron P ist konvex.

Beweis:

- Konvex: $\forall a, b \in P : l(a, b) \in P$ mit:
- $l(a, b) = \{\lambda a + (1 - \lambda)b \mid 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$.
- Ein Halbraum ist konvex.
- Ein Polyhedron ist der Schnitt von Halbräumen.
- Zeige: Der Schnitt von konvexen Mengen ist konvex.
- D.h. aus A, B konvex folgt $A \cap B$ konvex.
- Damit gilt: $\forall a, b \in A : l(a, b) \in A$ und
- weiter $\forall a, b \in B : l(a, b) \in B$.
- Es folgt: $\forall a, b \in A \cap B : l(a, b) \in A \cap B$.

Lokales und globales Optimum

P **Polyhedron**

Lemma

Sei $z, x \in P$ und $c^T z > c^T x$.
Dann existiert für $\varepsilon > 0$ ein $y \in P$ mit: $||x - y|| \leqslant \varepsilon$ und $c^T y > c^T x$.

Beweis:

- P ist konvex, gilt $l(x, z) \in P$.
- Wähle $y \in l(x, z)$ mit $x \neq y$ und $||x - y|| \leqslant \varepsilon$.
- Nach Definition von l gibt $\lambda > 0$ mit: $y = \lambda x + (1 - \lambda)z$.
- Es folgt:

$$\begin{aligned} c^T y &= c^T(\lambda x + (1 - \lambda)z) \\ &= \lambda c^T x + (1 - \lambda)c^T z \\ &> \lambda c^T x + (1 - \lambda)c^T x \\ &= c^T x \end{aligned}$$

Lemma

Ein lokales Optimum ist auch ein globales Optimum.

Unterräume

P **Polyhedron**

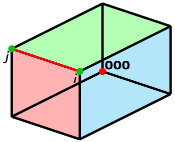
- Eine Hyperebene wird beschrieben durch:

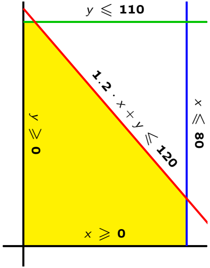
$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_d x_d = \beta.$$

  - Es sind $d - 1$ Variablen frei wählbar.
  - Der Wert der d-ten Variable ist dann festgelegt.
  - Der durch die Hyperebene beschriebene affine Unterraum ist ein Unterraum der Dimension $d - 1$.
  - Ein Unterraum, der als Schnittmenge von k linear unabhängigen Hyperräumen beschrieben wird, hat Dimension $d - k$.
- Falls mehr als d Nebenbedingungen (Hyperebenen) sich in einem Punkt treffen, so ist das LP degeneriert.
- Ein degeneriertes LP kann in ein nicht-degeneriertes LP umgeformt werden, ohne die Form (Zusammensetzung) der Lösung signifikant zu verändern.

Oberfläche eines Polyhedrons

P **Polyhedron**





- Die Oberfläche eines Polyhedrons besteht aus Facetten.
  - Sei P ein Polyhedron und H eine Hyperebene und sei P komplett auf einer Seite der Hyperebene H.
  - Falls $f = P \cap H$ nicht leer ist, so
  - ist f eine Facette von P.
- Eine Facette der Dimension $d - 1$ heißt Face.
- Eine Kante entspricht dem Schnitt von $d - 1$ Hyperebenen (Facette der Dimension 1).
- Ein Knoten entspricht dem Schnitt von d Hyperebenen (Facette der Dimension 0).
- Zwei Knoten sind benachbart, wenn sie durch eine Kante verbunden sind.
- Falls P unbeschränkt ist, so kann es unbeschränkte Kanten geben.
- Solche Kanten haben nur einen oder keinen Endpunkt.

Zielfunktion

- Die Zielfunktion $c^T x$ (Vektor) gibt eine Richtung in $\mathbb{R}^d$ vor.
- Falls die Nebenbedingungen den Zielwert nach oben beschränken, so wird das LP als beschränkt bezeichnet.
  - Falls der Zielwert nicht beschränkt ist, so heißt das LP unbeschränkt.
- Das Polyhedron muss dabei nur in der Richtung von $c^T x$ beschränkt sein.
- Ist das Polyhedron in alle Richtungen beschränkt (in einer Kugel enthalten), so wird es als Polytop bezeichnet.

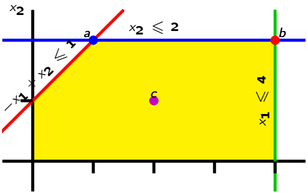
Geometrische Bestimmung des Optimums

- Betrachte beschränktes LP in kanonischer Form mit Lösungspolyhedron P und Zielfunktion $c^T x$,
- Sei $\mathcal{H}$ eine zum Vektor c orthogonale Hyperebene.
- Damit gibt es $t \in \mathbb{R}$ mit: $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T \cdot x = t\}$.
- Setze $\mathcal{H}_t = \{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T \cdot x = t\}$.
- Sei $\mathcal{H}$ so gewählt, dass $P \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$ gilt.
- Wähle z maximal mit $P \cap \mathcal{H}_z \neq \emptyset$.
- Ein beliebiger Punkt $x^* \in P \cap \mathcal{H}_z$ ist eine optimale Lösung des LPs.
- Beobachtungen:
  - $P \cap \mathcal{H}_z$ ist eine Facette f von P.
  - Falls f nicht in allen Richtungen unbeschränkt ist, so gibt es mindestens einen optimalen Knoten.

Algebraische Gleichungsform

- Gegeben sei ein Ungleichungssystem in kanonischer Form:
$$\text{Maximiere } {c'}^T x \text{ unter } A'x' \geqslant b' \text{ und } x' \geqslant 0.$$
- Dies kann unter Einführung von Schlupfvariablen in die folgende Form gebracht werden:
$$\text{Maximiere } c^T x \text{ unter } Ax = b \text{ und } x \geqslant 0.$$
- Dazu wird eine Ungleichung
$$a_i x \geqslant b_i \text{ mit } x \geqslant 0$$
- mit Hilfe der Schlupfvariablen s_i umgeformt zu:
$$a_i x - s_i = b_i \text{ mit } x \geqslant 0 \text{ und } s_i \geqslant 0.$$
- Falls das kanonische Ungleichungssystem d Variablen und m Ungleichungen hat,
- so hat das algebraische Gleichungsform $n = d + m$ Variablen und es gilt $\text{rang}(A) = m$.

Beispiel



- Punkt $(1,2)$ wird zum Punkt $(1,2,3,0,0)$.
- Punkt $(4,2)$ wird zum Punkt $(4,2,0,0,3)$.
- Punkt $(2,1)$ wird zum Punkt $(2,1,2,1,2)$.
- Durch Einsetzen in die letzten Gleichungen.

- Sei ein kanonisches Ungleichungssystem gegeben:

$$\begin{aligned} x_1 &\leqslant 4 & x_1 &\geqslant 0 \\ x_2 &\leqslant 2 & x_2 &\geqslant 0 \\ -x_1 + x_2 &\leqslant 1 \end{aligned}$$

- In der algebraischen Gleichungsform erhalten wir:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 4 & x_1 &\geqslant 0 & x_3 &\geqslant 0 \\ x_2 + x_4 &= 2 & x_2 &\geqslant 0 & x_4 &\geqslant 0 \\ -x_1 + x_2 + x_5 &= 1 & & & x_5 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

- Aufgelöst nach den Schlupfvariablen:

$$\begin{aligned} x_3 &= 4 - x_1 \\ x_4 &= 2 - x_2 \\ x_5 &= 1 + x_1 - x_2 \end{aligned}$$

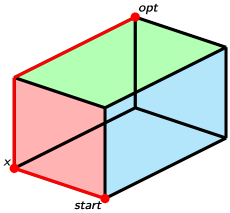
Basislösungen

- Gegeben sei ein LP in Gleichungsform.
- Sei $\delta : \{1, 2, \ldots, k\} \mapsto \{1, 2, \ldots, n\}$ eine geordnete Auswahl von k Spalten, d.h.
$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, k-1\} : \delta(i) < \delta(i+1).$$
- Sei A_δ die Matrix, die nur die Spalten aus δ enthält:
$$A_\delta = A_{\delta(1)}, A_{\delta(2)}, A_{\delta(3)}, \ldots, A_{\delta(k)}.$$
- Sei weiter:
$$\begin{aligned} x_\delta &= x_{\delta(1)}, x_{\delta(2)}, x_{\delta(3)}, \ldots, x_{\delta(k)} \\ b_\delta &= b_{\delta(1)}, b_{\delta(2)}, b_{\delta(3)}, \ldots, b_{\delta(k)} \end{aligned}$$
- Falls $k = d$, so wird δ als Basis bezeichnet. Dann ist A_δ invertierbar.
- Sei $\bar{\delta}$ die geordnete Auswahl der verbleibenden Spalten.
- Dann hat das Gleichungssystem die Gestalt: $A_\delta x_\delta + A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}} = b$.
- Mit $x_{\bar{\delta}} = 0$ hat das Gleichungssystem die eindeutige Lösung
$$x_\delta = A_\delta^{-1} b.$$
- Die Lösung $(A_\delta^{-1} b, 0)$ wird als Basislösung zur Basis δ bezeichnet.

Interpretation

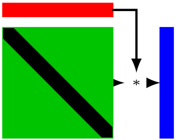
- In der kanonischen Form entsprechen die Basislösungen den Schnittpunkten von d Hyperebenen der Nebenbedingungen.
- Betrachte dazu:
  - In der Basislösung sind $n - m = d$ Variablen Null.
  - Das sind entweder Schlupfvariablen oder Variablen der kanonischen Form.
  - Zu jeder der Variablen haben wir eine Hyperebene in der kanonischen Form.
  - Eine Basislösung ist zulässig, falls die Variablen nicht negativ sind.
  - Dann entspricht die zulässige Basislösung einem Knoten des Lösungspolyhedrons.
  - Falls eine der Basisvariablen Null ist, so schneiden sich mehr als d Hyperebenen an einem Punkt und das LP ist degeneriert.

Einleitung

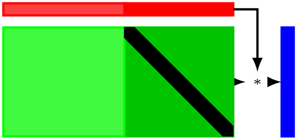


- Zwei Methoden, um in einem Polyhedron das Optimum bezüglich einer Zielfunktion zu finden:
- “Laufe” auf der Oberfläche über Knoten und Kanten “bergauf” in Richtung Optimum.
  - Starte an einem beliebigen Knoten.
  - Suche “verbessernde” Kante.
  - Gehe über diese Kante zu neuem Knoten.
  - Wiederhole bis das Optimum gefunden ist.
- Suche im Inneren des Polyhedrons einen Punkt und versuche das Optimum zu “sehen”.
  - Suche Punkt im Polyhedron.
  - Grenze Polyhedron mittels Hyperebene orthogonal zum Zielvektor ein.
  - Führe Halbierungssuche durch.

Vergleich Simplex zu Gauß



Um die Idee des Simplexverfahren (vorallem das Schema) zu verstehen, betrachten wir zuerst einmal das Eliminationsschema nach Gauß. Hier soll eine quadratische Matrix mit einem unbekannten Vektor zu einem Zielvektor multipliziert werden. Dazu werden so lange Umformungen gemacht, bis nur auf der Hauptdiagonalen der Matrix Einsen stehen. Nun kann im Zielvektor die Lösung für den Vektor abgelesen werden.

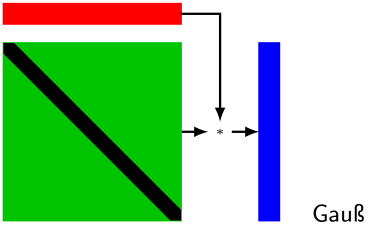


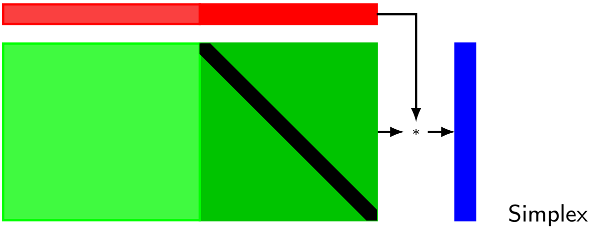
Beim Simplexverfahren haben wir keine quadratische Matrix. Daher wird immer so umgeformt, daß in einer quadratischen Teilmatrix nur auf der Hauptdiagonalen Einsen stehen. Die zugehörigen Variablen des Vektors können nun im Zielvektor abgelesen werden. Alle anderen Variablen des Vektors werden auf Null gesetzt. Die Variablen des Vektors, die nicht Null sind, nennen wir Basislösung. Eine Verbesserung der Zielfunktion wird nun durch einen Wechsel der Basislösung vorgenommen. Dazu wird nach einer beliebigen Variablen des Vektors gesucht, die die Zielfunktion verbessert. Der dann stattfindende Austausch wird Pivotschritt genannt.

Einleitung

- Vorgestellt 1951 von Dantzig.
- In der Praxis das erfolgreichste Verfahren.
- Eingabe:
  - nicht-degeneriertes (ggf. unbeschränkt) LP
  - Sei das Lösungspolyhedron P.
- Verfahren
  1. Bestimme beliebigen Knoten p auf P.
  2. Solange es eine verbessernde Kante $e = (p, p')$ gibt:
     1. Setze $p = p'$.
  3. Gebe p aus.
- Der Wechsel über die Kante (p, p') heißt Pivotschritt.

Vereinfachter Vergleich Simplex zu Gauß





Erinnerung

- Ungleichungssystem:

$$\text{Maximiere } {c'}^T x \text{ unter } A'x' \leqslant b' \text{ und } x' \geqslant 0.$$

- Algebraische Gleichungsform (mit Schlupfvariablen):

$$\text{Maximiere } c^T x \text{ unter } Ax = b \text{ und } x \geqslant 0.$$

- Neue Gestalt durch Spaltenauswahl: $A_\delta x_\delta + A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}} = b$.
- Mit $x_{\bar{\delta}} = 0$ hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung. Dies ist eine Basislösung von der Algebraischen Gleichungsform.

$$x_\delta = A_\delta^{-1} b.$$

- Beachte A_δ ist invertierbar.

Umformungen

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

- Situation:
  - $Ax = b$, $x \geqslant 0$ und maximiere $c^T x$.
  - A_δ invertierbar, der Form $A_\delta x_\delta + A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}} = b$.
- Multiplikation mit A_δ^{-1} von links ergibt:

$$\begin{aligned}
A_\delta x_\delta + A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}} &= b \\
A_\delta^{-1} \cdot A_\delta x_\delta + A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}} &= A_\delta^{-1} \cdot b \\
x_\delta + A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}} &= A_\delta^{-1} \cdot b \\
x_\delta &= A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}} \\
x_\delta &= A_\delta^{-1} \cdot b - \hat{A} x_{\bar{\delta}} \\
x_\delta &= \hat{b} - \hat{A} x_{\bar{\delta}}
\end{aligned}$$

- Da für die Basislösung $x_{\bar{\delta}} = 0$ gilt, erhalten wir:

$$x_\delta = A_\delta^{-1} \cdot b = \hat{b}.$$

- Die Zielfunktion hat dann den Wert $c^T \cdot A_\delta^{-1} \cdot b = c^T \cdot \hat{b}$.

Optimalität

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar\delta} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar\delta} x_{\bar\delta}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

- Versuche nun, von einer Basislösung aus eine Kante zu finden:
  - Basislösung: $x_\delta = \hat{b} = \hat{b} - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar\delta} x_{\bar\delta}$ mit $x_{\bar\delta} = 0$.
  - Zielfunktionswert: $c^T \cdot \hat{b}$.
- Um von der Basislösung abzuweichen, ist $x_{\bar\delta}$ zu verändern.
- Wir können die Variablen der Basis als Funktion der Nichtbasisvariablen auffassen.
- Auch kann der Zielfunktionswert als Funktion von $x_{\bar\delta}$ aufgefasst werden.

$$\begin{aligned}
c^T \cdot x &= c_\delta^T \cdot x_\delta + c_{\bar\delta}^T \cdot x_{\bar\delta} \\
&= c_\delta^T \cdot (\hat{b} - \hat{A} x_{\bar\delta}) + c_{\bar\delta}^T \cdot x_{\bar\delta} \\
&= c_\delta^T \cdot \hat{b} - c_\delta^T \cdot \hat{A} x_{\bar\delta} + c_{\bar\delta}^T \cdot x_{\bar\delta} \\
&= c_\delta^T \cdot \hat{b} + (c_{\bar\delta}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}) \cdot x_{\bar\delta}
\end{aligned}$$

- Der Vektor $c_{\bar\delta}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ wird als Vektor der reduzierten Kosten bezeichnet.
- Für jeden Eintrag des Vektors der reduzierten Kosten gilt:
  - Der Eintrag zeigt an, wie sich die Zielfunktion ändert.
  - Falls der Eintrag positiv ist, verbessert sich die Zielfunktion.
  - Dazu ist die zugehörige Komponente (Eintrag) zu ändern.

Kriterium zur Optimalität

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$ $[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$ $c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

Theorem

Falls der Vektor der reduzierten Kosten zu einer Basis δ keine positiven Einträge hat, so ist zugehörige Lösung x_δ optimal.

Beweis:

- Es gelte: $c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A} \leqslant 0$.
- Sei $x' \in P$ beliebige zulässige Lösung.
- Damit gilt $x' \geqslant 0$ und
- weiter gilt $x'_{\bar{\delta}} \geqslant 0$.
- Damit erhalten wir:

$$c^T \cdot x' = c_\delta^T \cdot \hat{b} + (c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}) \cdot x'_{\bar{\delta}} \leqslant x_\delta^T \cdot \hat{b}.$$

- Der Basisvektor x_δ hat den Zielfunktionswert $x_\delta^T \hat{b}$.
- Damit ist er optimal.

Folgerung

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar\delta} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar\delta} x_{\bar\delta}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar\delta}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

- Falls der Vektor $y = c_{\bar\delta}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ der reduzierten Kosten keine positiven Einträge hat, so terminiert das Verfahren.
- Anderenfalls suchen wir eine verbessernde Basislösung:
  - Sei x_j eine Nichtbasisvariable mit positiven reduzierten Kosten. D.h.

$$c_j - \sum_{k=1}^{m} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0.$$

  - Wir verändern nun <u>nur</u> x_j.
  - Eine Vergrößerung von x_j vergrößert auch
    - die Zielfunktion $c_\delta^T \cdot \hat{b} + (c_{\bar\delta}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}) \cdot x_{\bar\delta}$ und
    - verändert die Gleichung $x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar\delta}$, d.h.
    - für jede Komponente gilt: $x_{\delta(i)} = \hat{b}_i - \hat{a}_{i,j}x_j$.
    - Beachte dabei, Variablen $x_{\bar\delta(k)}$ $k \neq j$ sind fixiert und $x_{\bar\delta(k)} = 0$.
    - Falls die Lösung beschränkt ist, so
    - vergrößere x_j, solange $x_{\delta(i)} = \hat{b}_i - \hat{a}_{i,j}x_j \geqslant 0$ gilt.

Verfeinertes Simplexverfahren

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

1. Problem: Maximiere ${c'}^T x$ unter $A'x' \geqslant b'$ und $x' \geqslant 0$.
2. Forme um zu: Maximiere $c^T x$ unter $Ax = b$ und $x \geqslant 0$.
3. Bestimme beliebigen Knoten p auf P, d.h.
   - Bestimme $x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b$ als Basislösung.
   - Bestimme Vektor der reduzierten Kosten: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$.
4. Solange r einen positiven Eintrag r_j hat, wiederhole:
   1. Falls für alle $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ gilt $\hat{a}_{i,j} \leqslant 0$, so
      - kann der Wert x_j beliebig erhöht werden.
      - Damit gebe aus: "die Lösung ist unbeschränkt".
   2. Wähle nun aus: $i = \text{argmin}_{1 \leqslant k \leqslant m}\{\frac{\hat{b}_k}{\hat{a}_{k,j}} \mid \hat{a}_{k,j} > 0\}$.
   3. Setze $x_j = \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{i,j}}$ und bestimme dadurch neues x_δ:
      1. Ersetze Spalte $\hat{A}_{\delta(i)}$ durch Spalte $\hat{A}_j$.
   4. Bestimme neu: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$.
5. Gebe x_δ aus.

Details zur Rechnung

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A} x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$
$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

- A_j wird Eingangspivotspalte genannt.
- $A_{\delta(i)}$ wird Ausgangspivotspalte genannt.
- Das "Austauschen" von $A_{\delta(i)}$ durch A_j entspricht dem Verfolgen einer Kante.
- Es sollte danach aber wieder die Gleichung $\hat{A} \cdot x = \hat{b}$ so umgeformt werden, dass $\hat{A}_\delta$ eine Einheitsmatrix ist.
- Verfahre dazu analog wie im Verfahren von Gauß:
  1. Zeile $(\hat{a}_i, \hat{b}_i)$ wird mit $1/\hat{a}_{i,j}$ multipliziert. Danach gilt $\hat{a}_{i,j} = 1$.
  2. Für $k \neq i$ multipliziere die neue i-te Zeile mit $-\hat{a}_{k,j}$ und addiere sie zur Zeile $(\hat{a}_k, \hat{b}_k)$. Danach gilt $\hat{a}_{k,j} = 0$.

Beispiel

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A}x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$

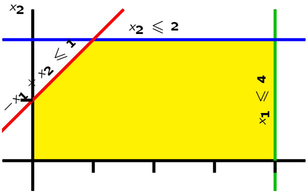
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



Gleichungssystem als Tabelle:

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
0	1	0	1	0	2
−1	1	0	0	1	1

- Sei ein kanonisches Ungleichungssystem gegeben:

$$\begin{aligned} x_1 &\leqslant 4 & x_1 &\geqslant 0 \\ x_2 &\leqslant 2 & x_2 &\geqslant 0 \\ -x_1 + x_2 &\leqslant 1 \end{aligned}$$

- In der algebraische Gleichungsform erhalten wir:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 4 & x_1 &\geqslant 0 & x_3 &\geqslant 0 \\ x_2 + x_4 &= 2 & x_2 &\geqslant 0 & x_4 &\geqslant 0 \\ -x_1 + x_2 + x_5 &= 1 & & & x_5 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

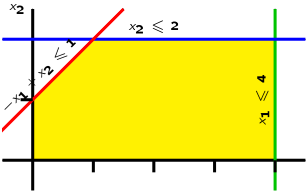
- Aufgelöst nach den Schlupfvariablen:

$$\begin{aligned} x_3 &= 4 - x_1 \\ x_4 &= 2 - x_2 \\ x_5 &= 1 + x_1 - x_2 \end{aligned}$$

Beispiel zum Pivotschritt

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



Gleichungssystem als Tabelle:

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
0	1	0	1	0	2
-1	1	0	0	1	1

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A} x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$

[$x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b$]

$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$\sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

- Die Spalten $3, 4, 5$ bilden eine Basis.
- D.h. $\delta(\{1, 2, 3\}) = \{3, 4, 5\}$.
- Damit ist die Matrix A_δ eine Einheitsmatrix.
- Die zugehörige Basislösung $x_\delta = b$ ist zulässig, da $x_\delta \geqslant 0$.
- Damit haben wir eine Startlösung.
- Weiter gilt: $c_\delta = (0, 0, 0)$.
- Nun müssen wir die reduzierten Kosten: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ betrachten.
- Betrachte Spalte 2, d.h. $\hat{A}_{\bar{\delta}(2)}$:
  $c_{\bar{\delta}(2)} - c_\delta \cdot \hat{A}_\delta \to c_2 = 2$.
- Spalte 2 ist die Eingangspivotspalte.
- Der Term $\hat{b}_i / \hat{a}_{i,2}$ mit $\hat{a}_{i,2} > 0$ wird minimiert für $i = 3$.

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A} x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$

$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1}^m (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
0	1	0	1	0	2
−1	1	0	0	1	1

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
1	0	0	1	−1	1
−1	1	0	0	1	1

- Der Term $\hat{b}_i / \hat{a}_{i,2}$ mit $\hat{a}_{i,2} > 0$ wurde minimiert für $i = 3$.
- Damit ist die Ausgangspivotspalte $\hat{A}_{\delta(3)} = \hat{A}_5$.
- Der Pivotschritt tauscht damit $\hat{A}_5$ durch $\hat{A}_2$ aus:
  1. Dividiere 3. Zeile durch $\hat{a}_{3,2}$.
  2. Addiere diese Zeile multipliziert mit $-\hat{a}_{1,2} = 0$ zur 1. Zeile .
  3. Addiere diese Zeile multipliziert mit $-\hat{a}_{2,2} = -1$ zur 2. Zeile .
- Neue Basis: $\delta(\{1, 2, 3\}) = \{3, 4, 2\}$.

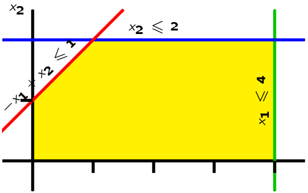
Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A} x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$

$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



Gleichungssystem als Tabelle:

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
1	0	0	1	-1	1
-1	1	0	0	1	1

- Neue Basis: $\delta(\{1,2,3\}) = \{3,4,2\}$. $c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$
- Damit $c_\delta = (0,0,2)$. $c_j - \sum_{k=1}^{m} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$
- Nun müssen wir die reduzierten Kosten: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ betrachten.
- Betrachte Spalte 1, d.h. $\hat{A}_{\bar{\delta}(1)}$:
  $c_{\bar{\delta}(1)} - c_\delta \cdot \hat{A}_\delta \to c_1 = (-1) - 2 \cdot (-1) = 1$.
- Spalte 1 ist die Eingangspivotspalte.
- Der Term $\hat{b}_i / \hat{a}_{i,1}$ mit $\hat{a}_{i,1} > 0$ wird minimiert für $i = 2$.

Beispiel zum Pivotschritt

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
1	0	1	0	0	4
1	0	0	1	-1	1
-1	1	0	0	1	1

$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
0	0	1	-1	1	3
1	0	0	1	-1	1
0	1	0	1	0	2

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A} x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$

$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1}^{m} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

- Der Term $\hat{b}_i / \hat{a}_{i,1}$ mit $\hat{a}_{i,1} > 0$ wurde minimiert für $i = 2$.
- Damit ist die Ausgangspivotspalte $\hat{A}_{\delta(2)} = \hat{A}_4$.
- Der Pivotschritt tauscht damit $\hat{A}_4$ durch $\hat{A}_1$ aus:
  1. Dividiere 2. Zeile durch $\hat{a}_{2,1}$.
  2. Addiere diese Zeile multipliziert mit $-\hat{a}_{1,1} = -1$ zur 1. Zeile .
  3. Addiere diese Zeile multipliziert mit $-\hat{a}_{3,1} = 1$ zur 3. Zeile .
- Neue Basis: $\delta(\{1, 2, 3\}) = \{3, 1, 2\}$.

Beispiel zum Pivotschritt

$x_\delta = \hat{b} - \hat{A} x_{\bar{\delta}} = A_\delta^{-1} \cdot b - A_\delta^{-1} \cdot A_{\bar{\delta}} x_{\bar{\delta}}$

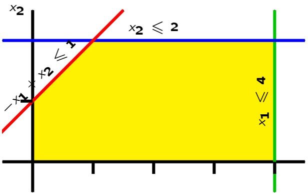
$[x_\delta = \hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b]$

$c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$

$c_j - \sum_{k=1}^{m} (c_\delta)_k \cdot \hat{a}_{k,j} > 0$

Maximiere: $-x_1 + 2 \cdot x_2$.

$c = (-1, 2, 0, 0, 0)$



$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	$\hat{A}_3$	$\hat{A}_4$	$\hat{A}_5$	$\hat{b}$
0	0	1	-1	1	3
1	0	0	1	-1	1
0	1	0	1	0	2

- Basis ist nun: $\delta(\{1,2,3\}) = \{3,1,2\}$.
- Damit gilt: $c_\delta = (0, -1, 2)$.
- Nun müssen wir die reduzierten Kosten: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_\delta^T \cdot \hat{A}$ betrachten.
- Alle reduzierten Kosten sind negativ.
- Verfahren terminiert.
- Lösung: $x = (1, 2, 3, 0, 0)$.
- Verlauf des Verfahrens:
  1. $(\hat{A}_3, \hat{A}_4, \hat{A}_5)$ entspricht: $(0, 0)$.
  2. $(\hat{A}_3, \hat{A}_4, \hat{A}_2)$ entspricht: $(0, 1)$.
  3. $(\hat{A}_3, \hat{A}_1, \hat{A}_2)$ entspricht: $(1, 2)$.

Bestimme initiale Basislösung

- Raum der zulässigen Lösungen ist beschrieben durch (o.B.d.A.: $b \geqslant 0$): $A \cdot x \leqslant b$ mit $x \geqslant 0$.
- Die Zielfunktion können wir hier ignorieren.
- Wir erzeugen Hilfsvariablen $h_1, h_2, \ldots, h_m$
- und ersetzten die i-te Nebenbedingung $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j \leqslant b_i$ durch

$$\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j + h_i = b_i.$$

- Die neue Zielfunktion ist: minimiere $\sum_{k=1}^{m} h_k$.
- Für dieses Hilfs-LP gibt es die Basislösung: $x = 0$.
- Damit kann $\sum_{k=1}^{m} h_k$ minimiert werden.
- Für die optimale Lösung sind zwei Fälle möglich:
  - $\sum_{k=1}^{m} h_k = 0$: Da dann $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j + h_i = \sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j = b_i$ gilt, ist diese Basislösung auch für das ursprüngliche LP eine Basislösung.
  - $\sum_{k=1}^{m} h_k > 0$: Es gilt keine Basislösung mit $h_i = 0$ ($i \in \{1, \ldots, m\}$) und dann auch keine Basislösung für das ursprüngliche LP.

Das Verfahren bisher

- Problem: Maximiere ${c'}^T x$ unter $A'x' \geqslant b'$ und $x' \geqslant 0$.
- Forme um zu: Maximiere $c^T x$ unter $Ax = b$ und $x \geqslant 0$.
- Bestimme beliebigen Knoten p auf P, d.h.
  - Ersetze: $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j = b_i$ durch $\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot x_j + h_i = b_i$.
  - Neue Zielfunktion: minimiere $\sum_{k=1}^{m} h_k$.
  - Starte mit der direkten Basislösung: $x = 0$ und löse rekursiv.
  - Falls $\sum_{k=1}^{m} h_k = 0$ gilt, dann sind x_i Werte eine Basislösung.
  - Falls $\sum_{k=1}^{m} h_k > 0$ gilt, dann ende mit der Meldung "Keine Lösung".
- Bestimme Vektor der reduzierten Kosten: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_{\delta}^T \cdot \hat{A}$.
- Solange r einen positiven Eintrag x_j hat, wiederhole:
  - Falls für alle $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ gilt $\hat{a}_{i,j} \leqslant 0$, so
    - kann der Wert x_j beliebig erhöht werden. Gebe aus: "die Lösung ist unbeschränkt".
  - Wähle nun aus: $i = \mathrm{argmin}_{1 \leqslant k \leqslant m} \{ \frac{\hat{b}_k}{\hat{a}_{k,j}} \mid \hat{a}_{k,j} > 0 \}$.
  - Setze $x_j = \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{i,j}}$ und bestimme dadurch neues x_δ:
    - Ersetze Spalte $\hat{A}_{\delta(i)}$ durch Spalte $\hat{A}_j$.
  - Bestimme neu: $r = c_{\bar{\delta}}^T - c_{\delta}^T \cdot \hat{A}$.
- Gebe x_δ aus.

Einleitung

- Ein Pivotschritt und die zugehörigen Transformationen können mit $O(n \cdot m)$ algebraischen Rechenoperationen durchgeführt werden.
- Da die Eingabegröße $\Omega(n \cdot m)$ ist, wäre somit die Laufzeit linear, falls wir algebraischen Rechenoperationen in $O(1)$ durchführen könnten.
- Nun wachsen aber die Zahlen während der Schritte.
- Damit müssen wir besser abschätzen.
- Der Algorithmus stellt daher alle Werte als gekürzten Bruch dar.
- Nenner und Zähler werden binär kodiert.
- Wir können davon ausgehen, dass die Zahlen aus der Eingabe ganze Zahlen sind.

Zahlendarstellung

Lemma

Sei α der größte absolute Wert über alle Eingabezahlen des LPs in Gleichungsform.

1. *Sei β der größte absolute Wert über alle Nenner und Zähler aus den Matrizen $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$, $A' = A_\delta^{-1}$ und dem Vektor $\hat{b} = A_\delta^{-1} b$. Dann gilt: $\beta \leqslant (\alpha \cdot m)^m$.*
2. *Sei γ der größte absolute Wert über alle Nenner und Zähler der Zielfunktionswerte $c^T x$ über alle Basislösungen x. Dann gilt: $\gamma \leqslant (\alpha \cdot m)^{m+1}$.*

Beweisüberblick:

- Nutze die Cramersche Regel.
- Schätze damit die Größe der Elemente ab.
- Nutze dann diese Abschätzung zum Beweis.

Cramersche Regel

Theorem (Cramersche Regel)

Sei M eine invertierbare $k \times k$-Matrix, und sei b ein k-Vektor. Sodann bezeichne M_i die i-te Spalte von M. Sei weiter x die eindeutige Lösung von $M \cdot x = b$, d.h. $x = M^{-1} \cdot b$. Dann gilt:

$$x_i = \frac{\det(M_1, \ldots, M_{i-1}, b, M_{i+1} \ldots, M_k)}{\det(M)}.$$

Lemma

Sei α der größte absolute Wert aus M. Es gilt: $|x_i| \leqslant (\alpha \cdot k)^k$.

Beweis:

- Determinante besteht aus Summe von $k!$ vielen Produkten von k Matrixeinträgen.
- Damit gilt: $|x_i| \leqslant k! \cdot \alpha^k \leqslant (\alpha \cdot k)^k$.

Beweis (Abschätzungen) und Theorem

$x = M^{-1} \cdot b$, $|x_i| \leqslant k! \cdot \alpha^k \leqslant (\alpha \cdot k)^k$

- Zeige: $\beta \leqslant (\alpha \cdot m)^m$.
  - Werte aus: $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$, $A' = A_\delta^{-1}$ und dem Vektor $\hat{b} = A_\delta^{-1} b$.
  - Auf $\hat{b} = A_\delta^{-1} b$ kann obiges Lemma direkt angewendet werden.
  - Auf $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$ kann das Lemma auf die Zeilen von $\hat{A}$ und passenden Spalten von A angewendet werden.
  - Analoge Anwendung für $A' = A_\delta^{-1} \cdot E_m$ liefert die Behauptung.
- Zeige: $\gamma \leqslant (\alpha \cdot m)^{m+1}$.
  - Werte aus: $c^T x$.
    - Die Werte in x sind durch β beschränkt.
    - Die Werte in c sind durch α beschränkt.
    - In $c^T x$ sind damit die Nenner durch $\leqslant (\alpha \cdot m)^m$ beschränkt,
    - und die Zähler durch $(\alpha \cdot m)^{m+1}$.

Laufzeit eines Pivotschrittes

$x = M^{-1} \cdot b$, $|x_i| \leqslant k! \cdot \alpha^k \leqslant (\alpha \cdot k)^k$

Theorem

Die Laufzeit eines Pivotschrittes ist polynomiell beschränkt in der Eingabelänge.

Beweis:

- Die Laufzeit ergibt sich nicht durch die absoluten Werte in den Brüchen,
- sondern durch die Größe in der Darstellung dieser Zahlen.
- Sei l die maximale Länge der Darstellung der Zahlen aus der Eingabe.
- Dann gilt: $l = \Theta(\log \alpha)$.
- Die in der Rechnung auftretenden Zahlen sind dann wie folgt beschränkt:
  - $l' = O(\log((\alpha \cdot m)^{m+1})) = O(m \cdot (\log m + \log \alpha)) = O(m \cdot \log m + m \cdot l)$.
- Das sind insgesamt $O(n \cdot m)$ Rechenoperationen auf Werten der Größe $O(m \cdot \log m + m \cdot l)$.

Aussage

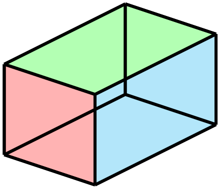
Theorem

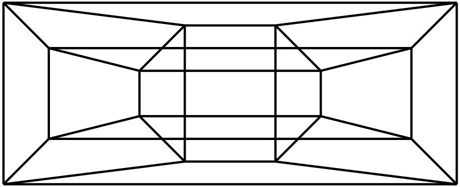
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein LP in kanonischer Form mit n Variablen und $2 \cdot n$ Koeffizienten aus $\{-4, -3, \ldots, 3, 4\}$, so das die Simplexmethode $2^n - 1$ viele Pivotschritte benötigt.

Beweisidee:

- Grundmuster des LPs:
  - Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
  - Zielfunktion: Maximiere x_n.
  - Nebenbedingungen: $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ ($i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
- Das entspricht dem n- dimensionalen Hypercube.
- Die Basislösungen sind aus $\{0, 1\}^n$.
- Zum Beweis verformen wir diesen Hypercube.

Hypercube

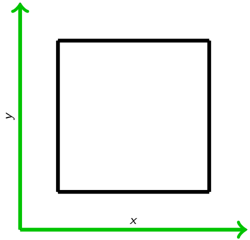




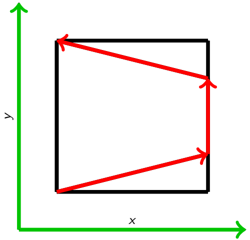
- Formale Definition des Hypercube-Graphen der Dimension d:
- $V = \{0,1\}^n$ und $E = \{\{w0w', w1w'\} \mid \{w0w'\} \in \{0,1\}^n\}$.
- Ein Hypercube enthält einen Hamiltonkreis (Gray-Code).

Idee (Schiefer Hypercube)

Ziel: Maximiere y



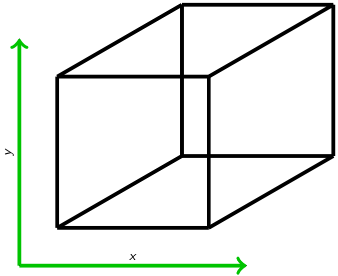
$$\begin{aligned} 0 &\leqslant x \leqslant 1 \\ 0 &\leqslant y \leqslant 1 \end{aligned}$$

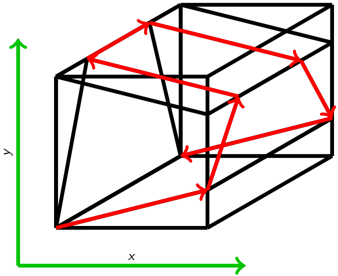


$$\begin{aligned} 0 &\leqslant x \leqslant 1 \\ \varepsilon \cdot x &\leqslant y \leqslant 1 - \varepsilon \cdot x \end{aligned}$$

Idee (Schiefer Hypercube in 3 Dimensionen)

Ziel: Maximiere z





$$\begin{array}{rcl} 0 & \leqslant x \leqslant & 1 \\ 0 & \leqslant y \leqslant & 1 \\ 0 & \leqslant z \leqslant & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 0 & \leqslant x \leqslant & 1 \\ \varepsilon \cdot x & \leqslant y \leqslant & 1 - \varepsilon \cdot x \\ \varepsilon \cdot y & \leqslant z \leqslant & 1 - \varepsilon \cdot y \end{array}$$

Beweis

- Aus der Idee ergibt sich das folgende Ungleichungssystem:
  - Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
  - Gegeben sei weiter $0 < \varepsilon \leqslant 1/4$.
  - Zielfunktion: Maximiere x_n.
  - Nebenbedingungen:
    - $0 \leqslant x_{\mathbf{1}} \leqslant 1$
    - $\varepsilon \cdot x_{i-\mathbf{1}} \leqslant x_i \leqslant 1 - \varepsilon \cdot x_{i-\mathbf{1}}$ ($i \in \{2, 3, \ldots, n\}$.
- Beweis für $\varepsilon \leqslant 1/4$ führen wir hier nicht.
- Danach ergibt sich die Behauptung.

Bisher zur Laufzeit bekannt

- Die Laufzeit kann exponentiell sein.
- Gute Wahl des Pivotschrittes kann Laufzeit verbessern.
- Bisher aber nur bekannt:
  - Randomisierte Pivotregeln: $m^{O(\sqrt{m})}$.
  - Offen: Gibt es einen Weg mit polynomieller Länge zum Optimum.
  - Vermutung von Hirsch (1957) für ein n-dimensionales Polytrop mit m Facetten: der Weg hat maximale Länge $n + m$.
  - Bisher nur gezeigt: Weg hat maximale Länge von $m^{\log_2 n+2}$.
  - Verfahren ist aber für praktische Verfahren gut.
  - Für zufällige Eingaben ist polynomielle Laufzeit bewiesen.

Problem bei Degenerierten LPs

- Falls das LP degeneriert ist, so treffen sich mehr als d Hyperebenen an einem Punkt.
- Damit kann es sein, dass eine Hyperebene ausgetauscht wird, ohne das eine Verbesserung stattfindet.
- Es könnten schlimmstenfalls Zyklen auftreten.
- Um dies zu verhindern, kann man anwenden:
  - Blands Pivotregel:
    - Wähle j minimal, danach wähle $\delta(i)$ minimal.
    - Dann treten (ohne Beweis) keine Zyklen auf.
    - Regel ist einfach, aber legt Reihenfolge fest.
  - Wähle Kante mit [größter] Steigung.
  - Perturbierung (siehe folgende Folien).
  - Symbolische Perturbierung (siehe die danach folgende Folien).

Idee

Maximiere $c^T x$, **beachte dabei** $A \cdot x = b$

- Falls sich mehr als d Hyperebenen im LP LP in einem Punkt treffen,
- so verschieben wir diese:
  - Um ein kleines Epsilon.
  - Für jede Hyperebene ein anders Epsilon.
  - Ohne das Polyhedron zu verkleinern.
- In der Tat: definiere neues $LP(\varepsilon)$:
  - $A \cdot x = \hat{b}$ mit $\hat{b} = b + \vec{\varepsilon}$.
  - Mit $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots, \varepsilon^m)^T$.

Aussagen

Theorem

Es gibt ein $\gamma > 0$, so dass für jedes $\varepsilon \in (0, \gamma)$ gilt:

1. *Das LP $LP(\varepsilon)$ ist nicht-degeneriert.*
2. *Jede zulässige Basis für $LP(\varepsilon)$ ist eine zulässige Basis für LP.*
3. *Jede optimale Basis für $LP(\varepsilon)$ ist eine optimale Basis für LP.*

Beweis (Zeige dritte Aussage):

- Eine optimale Basis ist zulässig,
- und der Vektor der reduzierten Kosten hat keinen positiven Eintrag.
- In LP und $LP(\varepsilon)$ sind die Vektoren der reduzierten Kosten gleich.
- Damit folgt die dritte Aussage aus der zweiten.

Zeige erste Aussage

- Sei δ eine Basis.
- Damit gilt: $x_\delta = A_\delta^{-1} \cdot (b + \vec{\varepsilon}) = A_\delta^{-1} \cdot b + A_\delta^{-1} \cdot \vec{\varepsilon}$.
- Setze $\hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b$ und $A' = A_\delta^{-1}$.
- Damit gilt nun: $x_i = \hat{b}_i + \sum_{j=1}^{m} {a'}_{i,j} \cdot \varepsilon^j$.
- Damit wird x_i durch das Polynom $p_{\delta,i}(s) = \hat{b}_i + \sum_{j=1}^{m} {a'}_{i,j} \cdot s^j$ bestimmt.
- Da A' invertierbar, gibt es für jedes i ein j mit $a_{i,j} \neq 0$.
- Nun betrachten wir die Nullstellen von $p_{\delta,i}$:
  - Setze $\gamma_{\delta,i} = \infty$ falls $p_{\delta,i}$ keine positiven Nullstellen hat.
  - Anderenfalls sei $\gamma_{\delta,i}$ die kleinste positive Nullstelle von $p_{\delta,i}$.
- Setze $\gamma = \min(\gamma_{\delta,i})$.
- Für jede Basis δ, für jede Basisvariable x_j und für $\varepsilon < \gamma$ sind nun alle $p_{\delta,j}(\varepsilon) \neq 0$.
- Damit sind alle Basisvariablen $x_j > 0$.

Zeige zweite Aussage

- Sei x^* die Basislösung zur Basis δ.
- Damit gilt $x^* \geqslant 0$.
- Für die Basisvariablen gilt:

$$x_i^* = \hat{b} + \sum_{j=1}^{m} a'_{i,j} \cdot \varepsilon^j > 0.$$

- Wir zeigen nun $\hat{b}_i > 0$.
  - Angenommen es gelte für ein j: $\hat{b}_j < 0$.
  - Damit folgt: $p_{\delta,j}(0) < 0$.
  - Es gilt aber auch: $p_{\delta,j}(\varepsilon) > 0$.
  - Widerspruch zur Wahl von γ und der Stetigkeit von p.
- Damit ist die Behauptung beweisen, denn $x_\delta = \hat{b}$ ist Basislösung für LP.

Wahl von ε

- Wähle ε kleiner als die kleinste positive Nullstelle von $p(s) = \sum_{i=0}^{m} \beta_i \cdot s^i$.
- Wir können o.B.d.A. annehmen: $\beta_0 > 0$.
  - Kann durch Verändern von p immer erreicht werden:
  - durch Teilen mit s und ggf. multiplizieren mit -1.
  - Die Nullstellen bleiben dabei unverändert.
- Sei weiter β größer als die Nenner und Zähler der β_i.
- Für jedes $\rho \in (0, \frac{1}{2\cdot\beta^2})$ gilt nun:

$$
\begin{array}{rcl}
|p(\rho)| & = & |\sum_{i=0}^{m} \beta_i \cdot \rho^i| \\
& \geqslant & \beta_0 - \sum_{i=1}^{m} |\beta_i| \cdot \rho^i \\
& \geqslant & \frac{1}{\beta} - \sum_{i=1}^{m} \beta(\frac{1}{2\cdot\beta^2})^i \\
& \geqslant & \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}(\frac{1}{2})^i > 0.
\end{array}
$$

- Wähle also: $\varepsilon = \frac{1}{2\cdot\beta^2}$.

Laufzeit

- Wir müssen noch untersuchen, wie sich die Größe der Zahlen ändert, durch die Perturbierung.
- Sei α der größte absolute Wert über alle Eingabezahlen des LPs in Gleichungsform.
- Damit gilt $\beta \leqslant (\alpha \cdot m)^m$.
- Es kann damit $\varepsilon = \frac{1}{2}(\alpha \cdot m)^{-2 \cdot m}$ gesetzt werden.
- Sei l die maximale Länge der Darstellung der Zahlen aus der Eingabe.
- Damit genügen $O(m \cdot (l + \log m)$ Bits zur Darstellung von ε.
- Zur Darstellung von $b_i + \varepsilon$ reichen daher $O(m^2 \cdot (l + \log m)$ Bits.

Theorem

Die Laufzeit eines Pivotschrittes ist polynomiell beschränkt in der Eingabelänge.

Symbolische Perturbierung

- Die Perturbierung vergrößert die Laufzeit doch erheblich.
- Daher führen wird die Perturbierung symbolisch durch.
- Sei $A' = A_\delta^{-1}$, $\hat{A} = A_\delta^{-1} \cdot A$, und $\hat{b} = A_\delta^{-1} \cdot b$.
- Sei j der Index der Eingangspivotspalte.
- $\delta(i)$ soll die Ausgangspivotspalte werden. Wähle diese wie folgt:

$$\begin{aligned} i &= \operatorname{argmin}_{1 \leqslant k \leqslant m} \left\{ \frac{\hat{b}_k + \sum_{t=1}^{m} a'_{i,t} \cdot \varepsilon^t}{\hat{a}_{k,j}} \mid \hat{a}_{k,j} > 0 \right\} \\ &= \operatorname{argmin}_{1 \leqslant k \leqslant m} \left\{ \frac{p_{\delta,k}(\varepsilon)}{\hat{a}_{k,j}} \mid \hat{a}_{k,j} > 0 \right\}. \end{aligned}$$

- Nutze dazu ein $\varepsilon \in (0, \gamma)$.
- Zur Bestimmung der Ausgangspivotspalte wählen wir:

$$i = \lim_{\varepsilon \to 0} \operatorname{argmin}_{1 \leqslant k \leqslant m} \left\{ \frac{p_{\delta,k}(\varepsilon)}{\hat{a}_{k,j}} \mid \hat{a}_{k,j} > 0 \right\}.$$

- Das kleinste der Polynome kann nun über Koeffizientenvergleich ausgewählt werden.
- Bei dieser Methode muss zusätzlich die Matrix A' mitgeführt werden.

Idee

Die Idee zur Ellipsoidmethode ist eine einfache Halbierungssuche. Wenn man annimmt, man hat schon einen Punkt im Polyhedron gefunden, so kann man mit einer Halbebene, die orthogonal zur Zielfunktion liegt, den Raum des Polyhedrons einschränken. Damit kann man durch sukzesives Bestimmen eines Punktes und Einschränkung des Polyhedron die optimale Lösung bestimmen.

Verbleibt das Problem, einen Punkt im Polyhedron zu finden. Dazu wird zuerst ein das Polyhedron umfassendes Objekt bestimmt, in diesem Fall eine ausreichend große Kugel (also Spezialform eines Ellipsoids). Der Mittelpunkt dieses Ellipsoids wird als möglicher Kandidat für einen Punkt im Polyhedron gewählt. Ist der Mittelpunkt nicht im Polyhedron vorhanden, so kann eine Halbebene durch den Mittelpunkt gewählt werden, so daß dieser das Ellipsoid in zwei Teile trennt. Das wird so gemacht, daß genau eine Hälfte des Ellipsoid als Lösung ausgeschlossen werden kann. Für die andere Häflte suchen wir ein volumenminimales umfassendes Ellipsoid. Erneut können wir mit Halbierungssuche nach einem Punkt im Polyhedron suchen.

Damit dieses Verfahren sicher terminiert, wird mittels Pertubierung sichergestellt, daß ein nichtleerer Lösungsraum eine Mindestgröße hat.

Überblick

Maximiere $c^T x$, **beachte dabei** $A \cdot x = b$

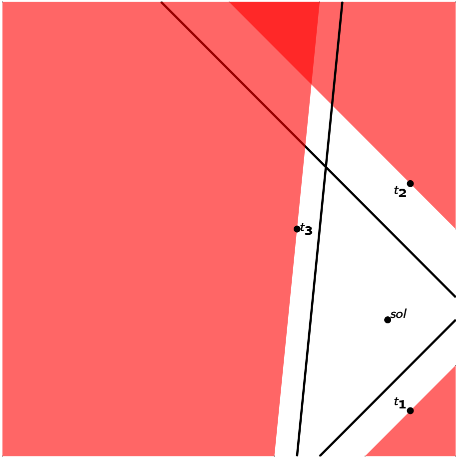
- Fragen:
  - Falls man einen Punkt im Polyhedron hat,
  - Kann man dann mit Halbierungssuche das Optimum lokalisieren?
  - Wie kann man einen Punkt im Polyhedron finden?
  - Wie stellt man fest, dass das Polyhedron leer ist?
- Antworten hier:
  - Obige Probleme sind in $\mathcal{P}$ lösbar.
  - Verwende dabei Halbierungssuche.
  - Schätze Lösungsraum ab, d.h.
    - stelle sicher, dass ein nichtleeres Polyhedron eine Mindestgröße hat.
- Die Ellipsoidmethode ist eine Methode zum Finden eines Punktes im Polyhedron.

Idee

- Wir versuchen eine Halbierungssuche zur Lösung des LPs.
- D.h. wir werden mit einer Hyperebene versuchen, das Polyhedron zu halbieren.
- Danach setzen wir die Suche in dem Teil fort, der die optimale Lösung enthält.
- Folgende Probleme können auftreten:
  - Das Polyhedron ist leer. Es gibt keine Lösung.
  - Die Lösung ist unbeschränkt.
  - Wenn wir das Polyhedron P teilen wollen, so brauchen wir einen Punkt in P.
- Im Folgenden wird die Lösung des dritten Punktes den Ansatz liefern, alle Punkte zu lösen.
- Das Verfahren ist die Ellipsoidmethode von Leonid Khachiyan (1979).
- Hier können wir zeigen, dass die Laufzeit polynomiell beschränkt ist.

Idee Zulässigkeit

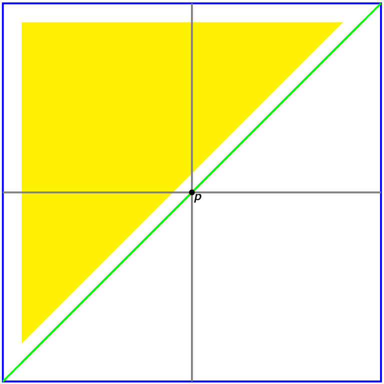
Maximiere $c^T x$, **beachte dabei** $A \cdot x = b$



- Suche einen Punkt wie folgt:
- Teste, ob Punkt t_1 im Polyhedron ist.
- Falls nicht, so gibt es eine Ungleichung, die verletzt wird.
- Damit wird ein Halbraum ausgeschlossen.
- Wiederhole diese Schritte.

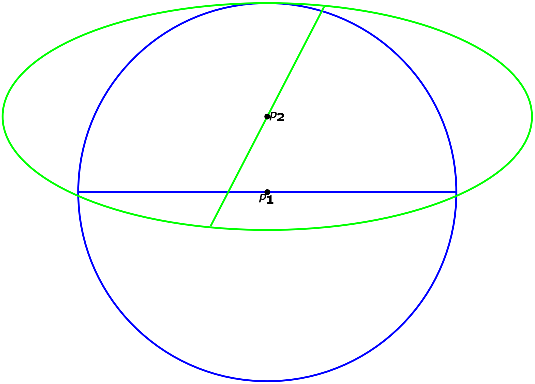
Idee (Halbierungssuche mit Rechtecken)

Maximiere $c^T x$, **beachte dabei** $A \cdot x = b$



- Das Polyhedron sei in dem blauen Quadrat.
- Teste, ob Punkt p im Polyhedron ist.
- Falls nicht, so ist das Rechteck zu halbieren.
- Falls das Polyhedron "schlecht" liegt, so ergibt die Halbierung kein Rechteck mehr.
- Ein gekipptes umfassendes Rechteck hat im Beispiel sogar den gleichen Flächeninhalt.
- Daher ersetzen wir die Rechtecke durch Ellipsoide.

Idee finde Lösung



Maximiere $c^T x$, **beachte dabei** $A \cdot x = b$

- Das Polyhedron sei im blauen Kreis.
- Teste, ob Punkt p im Polyhedron ist.
- Falls nicht, so ist der Kreis zu "halbieren".
- Das grüne Ellipsoid umfasst immer noch die Lösung bei kleinerem Flächeninhalt.
- Fahre danach rekursiv fort.

Vorbereitung zur Beschreibung der Methode

- Eingabe: lineare Ungleichungen $A \cdot x \leqslant b$.
- Lösungsraum: Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ die Menge der zulässigen Lösungen.
- Kugel: Sei $K_r(x)$ die Kugel mit Radius r in $\mathbb{R}^n$ mit Mittelpunkt x.
  - $K_r(0^d) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x^T \cdot x \leqslant r\}$.
  - $K_r(y) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (x-y)^T \cdot (x-y) \leqslant r\}$.
- Sei $u \in \mathbb{R}$ mit: $S \subset K_u(0^n)$.
  - Damit haben wir eine umschließende Kugel.
- Sei $l \in \mathbb{R}$ mit: falls $S \neq \emptyset$, dann existiert $y \in \mathbb{R}^n$ mit $K_l(y) \subset S$.
  - Damit hat der Lösungsraum eine Mindestgröße.
- Ein Ellipsoid entsteht aus einer Kugel durch eine affine Abbildung:
  - Sei Q eine invertierbare $n \times n$ Matrix.
  - Sei $t \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt im $\mathbb{R}^n$.
  - Affine Abbildung: $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ mit $T(x) = Q \cdot x + t$.

Ellipsoidmethode

1. Eingabe: lineare Ungleichungen $A \cdot x \leqslant b$.
2. Setze $E = K_u(0)$.
3. Wiederhole solange $|E| \geqslant |K_l(0)|$:
   1. Sei z der Mittelpunkt von E.
   2. Falls $A \cdot z \leqslant b$ gilt, so gibt $z \in S$ aus.
   3. Wähle eine Hyperebene H' aus, die z nicht erfüllt.
   4. Verschiebe diese parallel zu H, so dass $z \in H$.
   5. Sei $\hat{H}$ der Halbraum von H mit $z \notin \hat{H}$.
   6. Bestimme Ellipsoid E' von kleinstem Volumen mit $E' \supset E \cap \hat{H}$.
   7. $E = E'$
4. Gebe aus: $S = \emptyset$.

Transformation

Lemma

Ein lineares Ungleichungssystem G der Eingabelänge L kann in polynomieller Zeit in ein lineares Ungleichungssystem G' umgewandelt werden mit den folgenden Eigenschaften:

- *G' hat eine Lösung genau dann, wenn G eine Lösung hat.*
- *Der Lösungsraum von G' ist in einer Kugel $K_r(0)$ mit: $r \in 2^{O(L^2)}$.*
- *Falls der Lösungsraum S' von G' nicht leer ist, dann gibt es y mit $K_r(y) \subset S'$ mit $r \in 2^{-O(L^4)}$.*
- *Die Eingabelänge von G' ist $O(L^2)$.*

Beweis:

- G werde durch $A \cdot x \leqslant b$ beschrieben.
- G bestehe aus m Nebenbedingungen.
- G enthalte n Variablen.
- Sei weiter α der größte Absolutwert über alle Eingabezahlen.

Beweis

Maximiere $c^T x$, beachte dabei $A \cdot x = b$

- Wir fügen die folgenden Nebenbedingungen hinzu:
  - $x_i \leqslant (\alpha \cdot m)^m$ und
  - $x_i \geqslant -(\alpha \cdot m)^m$ für $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
- Das neue System nennen wir G' mit $A' \cdot x \leqslant b'$.
- G' enthält $m' = m + 2 \cdot n$ Nebenbedingungen.
- Die Absolutwerte sind durch $\alpha' = (\alpha \cdot m)^m$ beschränkt.
- Nun perturbieren wir in G' die ursprünglichen Ungleichungen (wie schon beschrieben).
  - Ersetze b'_i durch $b'_i + \vec{\varepsilon}_i$, mit $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^m)^T$ und $\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot (\alpha' \cdot m')^{-2 \cdot m'}$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Beweis

$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot (\alpha' \cdot m')^{-2 \cdot m'}$
$\alpha' = (\alpha \cdot m)^m$
$m' = m + 2 \cdot n$

- Zeige: Die Eingabelänge von G' ist $O(L^2)$.
  - Beachte: $O(\log \alpha') = O(\log(\alpha \cdot m)^m) = O(m \cdot \log m + m \cdot \log \alpha) = O(L^2)$.
  - Durch die Perturbierung bleibt dies erhalten.
- Zeige: G' hat eine Lösung genau dann, wenn G eine Lösung hat.
  - Ein Ungleichungssystem hat eine Lösung genau dann, wenn es eine zulässige Basislösung gibt.
  - Falls G eine zulässige Basislösung hat, so gilt $|x_i| \leqslant (\alpha \cdot m)^m$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
  - Damit ist x zulässig für G'.
  - Falls es keine zulässige Basislösung für G gibt, so gibt es auch keine für G'.

Beweis

$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot (\alpha' \cdot m')^{-2 \cdot m'}$ $\quad \alpha' = (\alpha \cdot m)^m$ $\quad m' = m + 2 \cdot n$

- Zeige: Der Lösungsraum von G' ist in einer Kugel $K_r(0)$ mit: $r \in 2^{O(L^2)}$.
  - Nach den ersten Schritten gilt $|x_i| \leqslant (\alpha \cdot m)^m$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.
  - Damit ist der Lösungsraum Teil eines Hyperwürfels.
  - Dieser Hyperwürfel ist in der Kugel $K_r(0)$ eingeschlossen mit: $r = \sqrt{n} \cdot (\alpha \cdot m)^m = 2^{O(\log n + m \cdot \log m + m \cdot \log \alpha)} = 2^{O(L^2)}$
- Zeige: Falls der Lösungsraum S' von G' nicht leer ist, dann gibt es y mit $K_r(y) \subset S'$ mit $r \in 2^{-O(L^4)}$.
  - Betrachte $a_i' \cdot x \leqslant b_i$ und $a_i' \cdot x \leqslant b_i + \varepsilon^i$ für ein beliebiges i.
  - Der Abstand zwischen den Hyperebenen $a_i' \cdot x = b_i$ und $a_i' \cdot x = b_i + \varepsilon^i$ für ein beliebiges i ist mindestens $\frac{\varepsilon^i}{\sqrt{n} \cdot \alpha'}$.
  - Beachte: $\frac{\varepsilon^i}{\sqrt{n} \cdot \alpha'} \geqslant 2^{-O(L^4)}$ (siehe nächste Folie).
  - Falls der Lösungsraum von G' nicht leer ist, so gibt es zulässige Lösung x für G', mit $a_i' \cdot x \leqslant b_i$.
  - Der Abstand von x zur Hyperebene $a_i' \cdot x \leqslant b_i + \varepsilon^i$ ist mindestens $2^{-O(L^4)}$.
  - Damit ist die Kugel $K_{2^{-O(L^4)}}(x)$ im Lösungsraum enthalten.

Beweis

$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot (\alpha' \cdot m')^{-2 \cdot m'}$
$\alpha' = (\alpha \cdot m)^m$
$m' = m + 2 \cdot n$

- Zeige $\frac{\varepsilon^i}{\sqrt{n} \cdot \alpha'} \geqslant 2^{-O(L^4)}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon^i}{\sqrt{n} \cdot \alpha'} &\geqslant \frac{(\frac{1}{2} \cdot (\alpha' \cdot m')^{-2 \cdot m'})^i}{\sqrt{n} \cdot \alpha'} \\
&= \frac{(\frac{1}{2} \cdot (\alpha' \cdot (m+2 \cdot n))^{-2 \cdot (m+2 \cdot n)})^i}{\sqrt{n} \cdot \alpha'} \\
&= \frac{(\frac{1}{2} \cdot (\alpha \cdot m)^m \cdot (m+2 \cdot n))^{-2 \cdot (m+2 \cdot n)})^i}{\sqrt{n} \cdot \alpha \cdot m)^m} \\
&= \frac{1}{(\frac{1}{2} \cdot (\alpha \cdot m)^m \cdot (m+2 \cdot n))^{2 \cdot (m+2 \cdot n)})^i \cdot \sqrt{n} \cdot (\alpha \cdot m)^m} \\
&= 2^{-O(m \cdot (m+n)^2 \cdot \log(\alpha \cdot m))} \\
&= 2^{-O(L^4)}
\end{aligned}$$

Ellipsoidmethode

$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot (\alpha' \cdot m')^{-2 \cdot m'}$
$\alpha' = (\alpha \cdot m)^m$
$m' = m + 2 \cdot n$

1. Eingabe: lineare Ungleichungen $A \cdot x \leqslant b$.
2. Perturbiere das System zu $A \cdot x \leqslant b + (\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^m)$.
3. Sei α der größte Absolutwert über alle Eingabezahlen.
4. Füge hinzu: $x_i \leqslant (\alpha \cdot m)^m$ und $x_i \geqslant -(\alpha \cdot m)^m$ für $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
5. Setze $u = \sqrt{n} \cdot (\alpha \cdot m)^m$ und $l = \frac{\varepsilon^i}{\sqrt{n} \cdot (\alpha \cdot m)^m}$.
6. Setze $E = K_u(0)$.
7. Wiederhole solange $|E| \geqslant |K_l(0)|$:
   1. Sei z der Mittelpunkt von E.
   2. Falls $A \cdot z \leqslant b$ gilt, so gibt $z \in S$ aus.
   3. Wähle eine Hyperebene H' aus, die z nicht erfüllt.
   4. Verschiebe diese parallel zu H, so dass $z \in H$.
   5. Sei $\hat{H}$ der Halbraum von H mit $z \notin \hat{H}$.
   6. Bestimme Ellipsoid E' von kleinstem Volumen mit $E' \supset E \cap \hat{H}$.
   7. $E = E'$
8. Gebe aus: $S = \emptyset$.

Volumenreduktion

volumen$(X) = |X|$

Lemma

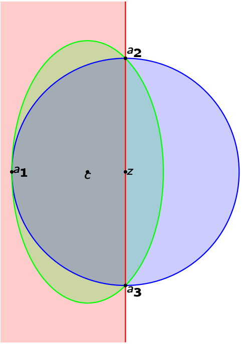
Sei E das Ellipsoid am Anfang eines Schleifendurchlaufes und sei E' das Ellipsoid welches neu bestimmt wird. Dann gilt:

$$|E'| \leqslant \frac{|E|}{2^{\frac{1}{2\cdot(n+1)}}}.$$

Beweis:

- Wir zeigen die Behauptung nur für $d = 2$.
- D.h. wir betrachten Ellipsen.
- Vorgehen:
  - Betrachte erst einfachen Spezialfall.
  - Führe den allgemeinen Fall auf den Spezialfall zurück.
  - Nutze dazu flächenverhältniserhaltende Transformation.

Spezialfall



- Sei E der Kreis mit Radius $r = 1$.
- Sei die rote Linie der Rand die Hyperebene H.
- Dann sind die Punkte a_1, a_2, a_3 Extrempunkte von $H \cap E$.
- Damit sollte der Rand der Ellipse E' genau diese Punkte berühren.
- Es sind damit Werte a, b, c zu finden mit:

$$E' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ((x - c)/a)^2 + (y/b)^2 \leqslant 1\}.$$

- Dabei muss gelten:
- $a > 0,\ b > 0,\ -1 < c < 0$ und $a = 1 + c$.
- $-1 < c < 0$ (wegen $2 \cdot a \geqslant 1$).
- $(c/(1 + c))^2 + (1/b)^2 = 1$ (Beachte Punkt $a_2 = (0, 1)$).
- Also $b = (1 + c)/\sqrt{1 + 2 \cdot c}$.

Spezialfall

$E' = \{(x, y \in \mathbb{R}^2 \mid ((x-c)/a)^2 + (y/b)^2 \leqslant 1\}$
$a = 1 + c$
$b = (1+c)/\sqrt{1 + 2 \cdot c}$

- Flächeninhalt von E': $\pi \cdot a \cdot b = \pi(1-c)^2/\sqrt{1+2\cdot c}$.
- Dieser wird minimiert für $c = -\frac{1}{3}$.
- Damit erhalten wir: $a = \frac{2}{3}$ und $b = \frac{2}{\sqrt{3}}$.
- Wir zeigen nun, dass ein beliebiger Punkt aus $E \cap H$ in E' liegt.
  - Es gilt $(x, y) \in E \cap H$, falls $x^2 + y^2 \leqslant 1$ und $x \leqslant 0$.
- Betrachte $x^2 + x \leqslant 0$ im Folgenden:

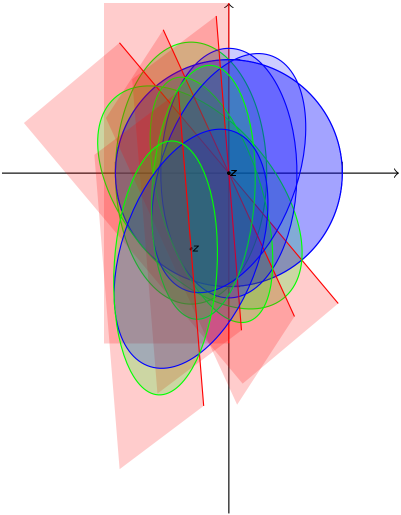
$$\begin{aligned}
\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= \frac{(x+1/3)^2}{(2/3)^2} + \frac{y^2}{(\frac{2}{\sqrt{3}})^2} \\
&= \frac{9}{4} \cdot (x+1/3)^2 + \frac{3}{4} \cdot y^2 \\
&= \frac{6}{4} \cdot x^2 + \frac{3}{2} \cdot x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(x^2 + y^2) \\
&\leqslant \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(x^2 + y^2) \leqslant 1
\end{aligned}$$

- Aus $|E| = \pi$ und $|E'| = \pi \cdot (2/3)^2 \cdot \sqrt{1/3}$ folgt:

$$\frac{|E'|}{|E|} = \frac{(2/3)^2}{\sqrt{1/3}} = \frac{4\sqrt{3}}{9} = 0.67\ldots < 0.89\ldots = 2^{-1/6} = 2^{-1/(2\cdot(n+1))}.$$

Allgemeiner Fall

$$E' = \{(x, y \in \mathbb{R}^2 \mid ((x-c)/a)^2 + (y/b)^2 \leqslant 1\}$$
$$a = 1 + c$$
$$b = (1+c)/\sqrt{1 + 2 \cdot c}$$



- Verschiebe den Raum so, dass z im Ursprung liegt.
- Drehe das Koordinatensystem so, dass die Achsen von E parallel zum Koordinatensystem laufen.
- Skaliere die Achsen so, dass E ein Kreis mit Radius 1 wird.
- Drehe das Koordinatensystem so, dass H der y-Achse entspricht.
- Bestimme E'.
- Wende die obigen Schritte in umgekehrter Reihenfolge an.
- Alle Operationen waren flächenverhältniserhaltend.

Laufzeit

- Das erste Ellipsoid hat einen Radius von $u = 2^{O(L^2)}$.
- Das vorletzte Ellipsoid hat einen Radius von $l = 2^{-O(L^4)}$.
- Damit hat das Volumen sich um einen Faktor von höchstens $(u/l)^n$ reduziert.
- Pro Iteration nimmt das Volumen mindestens um den Faktor $2^{1/2(n+1)}$ ab.
- Sei T die Anzahl der Iterationen, dann gilt:

$$2^{\frac{T-1}{2\cdot(n+1)}} \leqslant \left(\frac{u}{l}\right)^n.$$

- Damit gilt:

$$T \leqslant 2 \cdot n \cdot (n+1) \cdot \log_2(u/l) + 1 = O(n^2 \cdot L^4).$$

Theorem

Die Ellipsoidmethode terminiert nach $O(n^2 \cdot L^4)$ Iterationen.

Bemerkungen zur Laufzeit

- Man kann sogar eine Schranke von $O(n^2 \cdot L)$ Iterationen beweisen.
- Problem ist aber immer die numerische Stabilität:
  - Es müssen Wurzeln gezogen werden.
  - Die Ergebnisse können damit irrational werden.
  - Man kann aber die Ergebnisse auf eine polynomielle Anzahl von Bits runden, ohne die polynomielle Laufzeit zu verlieren.

Idee

- Für die Lösung z des LPs $A \cdot x \leqslant b$ gilt:
  - Falls wir $c^T \cdot x \geqslant z$ zu $A \cdot x \leqslant b$ so gibt es immer noch eine zulässige Lösung.
  - Dabei können wir z maximieren.
- Damit können wir nun eine Binärsuche machen:
  - Sei L die Größe der Eingabe.
  - Aus den bisherigen Überlegungen kann man schließen:
  - Es gilt: $-2^{poly(L)} \leqslant z \leqslant 2^{poly(L)}$.
  - Versuche bis auf einen additiven Fehler von δ das z zu bestimmen.
  - Die Anzahl der Schritte ist dann:
    $O(\log(2^{poly(L)}/\delta)) = O(poly(L) + \log(1/\delta))$.
  - Mit $\delta = O(2^{-poly(L)})$ ergibt sich polynomielle Laufzeit.

Vorbereitung

α **der größte absolute Wert über alle Eingabezahlen**
Gleichungsform: maximiere $c^T x$, $Ax = b$, $x > \mathbf{0}$

Lemma

Seien x und y zwei Basislösungen mit $c^T \cdot x \neq c^T \cdot y$, dann gilt:
$|c^T \cdot x - c^T \cdot y| \geqslant (\alpha \cdot m)^{-2 \cdot (m+1)}$.

Beweis:

- Schon bekannt: Zahlen in $c^T \cdot x$ und $c^T \cdot y$ sind durch $(\alpha \cdot m)^{m+1}$ beschränkt.
- Seien nun a, b, c, d solch beschränkte Zahlen.
- Dann gilt:

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right| = \left|\frac{ad - bc}{bd}\right| \leqslant \frac{1}{|bd|} \leqslant (\alpha \cdot m)^{-2 \cdot (m+1)}.$$

Aussage

α der größte absolute Wert über alle Eingabezahlen
Gleichungsform: maximiere $c^T x$, $Ax = b$, $x > \mathbf{0}$

Lemma

Falls es einen polynomiellen Algorithmus gibt, der entscheidet, ob ein Ungleichungssystem eine Lösung hat, so gibt es einen polynomiellen Algorithmus, der das LP löst.

Beweis:

- Sei $\mathcal{A}$ ein polynomieller Algorithmus gibt, der entscheidet, ob ein Ungleichungssystem eine Lösung hat.
- Wir konstruieren einen Algorithmus $\mathcal{B}$, der das LP löst.

Algorithmus

α der größte absolute Wert über alle Eingabezahlen
Gleichungsform: maximiere $c^T x$, $Ax = b$, $x > 0$
$x^* =$ optimale Lösung

- Problem: maximiere $c^T x$, $Ax = b$ $x \geqslant 0$.
- Falls $\mathcal{A}(A \cdot x \geqslant b, A \cdot x \leqslant b, x \geqslant 0) = \emptyset$, gebe aus: "Keine Lösung".
- Falls $\mathcal{A}(A \cdot x \geqslant b, A \cdot x \leqslant b, x \geqslant 0, c^T \cdot x \geqslant (\alpha \cdot m)^{m+1} + 1) \neq \emptyset$, gebe aus: "unbeschränktes Gleichungssystem".
- Setze $\tau = (\alpha \cdot m)^{-2 \cdot (m+1)}$.
- Bestimme mit Binärsuche ein $K \in \mathbb{N}$ so, dass gilt: $\tau \cdot K \leqslant c^T \cdot x^* < \tau \cdot (K + 1)$.
  - Rufe dazu A für verschiedene K auf: $\mathcal{A}(A \cdot x \geqslant b, A \cdot x \leqslant b, x \geqslant 0, c^T \cdot x \geqslant \tau \cdot K)$
- Setze $S = \emptyset$ und $m' = 0$.
- Für i von 1 bis n mache:
  - Falls $\mathcal{A}(A \cdot x \geqslant b, A \cdot x \leqslant b, x \geqslant 0, c^T \cdot x \geqslant \tau \cdot K, x_{j \in S \cup \{i\}} \leqslant 0) \neq \emptyset$,
  - so setze $S = S \cup \{i\}$, $m' = m' + 1$, und $\bar{\delta}(m') = i$.
- Bestimme δ aus $\bar{\delta}$ und Basislösung durch $x_\delta = A_\delta^{-1} b$.

Details zum Algorithmus

α der größte absolute Wert über alle Eingabezahlen
Gleichungsform: maximiere $c^T x$, $Ax = b$, $x > 0$
$x^* =$ optimale Lösung

Problem: maximiere $c^T x$, $Ax = b$ $x \geqslant \mathbf{0}$.
Falls $\mathcal{A}(A \cdot x \geqslant b, A \cdot x \leqslant b, x \geqslant \mathbf{0}) = \emptyset$, **gebe aus: "Keine Lösung".**
Falls $\mathcal{A}(A \cdot x \geqslant b, A \cdot x \leqslant b, x \geqslant \mathbf{0}, c^T \cdot x \geqslant (\alpha \cdot m)^{m+1} + 1) \neq \emptyset$, **gebe aus: "unbeschränktes Gl.sys.".**
Setze $\tau = (\alpha \cdot m)^{-2 \cdot (m+1)}$.
Bestimme mit Binärsuche ein $K \in \mathbb{N}$ **so, dass gilt:** $\tau \cdot K \leqslant c^T \cdot x^* < \tau \cdot (K + 1)$.
  Rufe für verschiedene K **auf:** $\mathcal{A}(A \cdot x \geqslant b, A \cdot x \leqslant b, x \geqslant \mathbf{0}, c^T \cdot x \geqslant \tau \cdot K)$
Setze $S = \emptyset$ **und** $m' = \mathbf{0}$.
Für i **von 1 bis** n **mache:**
  Falls $\mathcal{A}(A \cdot x \geqslant b, A \cdot x \leqslant b, x \geqslant \mathbf{0}, c^T \cdot x \geqslant \tau \cdot K, x_{j \in S \cup \{i\}} \leqslant \mathbf{0}) \neq \emptyset$, **so setze** $S = S \cup \{i\}$, $m' = m' + \mathbf{1}$, **und** $\bar{\delta}(m') = i$.
Bestimme δ **aus** $\bar{\delta}$ **und Basislösung durch** $x_\delta = A_\delta^{-1} b$.

- Die binäre Kodierung von $(\alpha \cdot m)^{m+1} + 1$ ist $O(m \cdot \log(\alpha \cdot m)) = O(L^2)$.
- Damit die Größe des Ungleichungssystem polymomiell in der Eingabelänge des LPs.
- Hat das neue Ungleichungssystem eine Lösung, so ist das LP unbeschränkt.
- Beachte, ein beschränktes LP hat einen Zielfunktionswert kleiner als $(\alpha \cdot m)^{m+1}$.

Details zum Algorithmus

α **der größte absolute Wert über alle Eingabezahlen**
Gleichungsform: maximiere $c^T x$, $Ax = b$, $x > 0$
$x^* =$ **optimale Lösung**

Problem: maximiere $c^T x$, $Ax = b$ $x \geqslant \mathbf{0}$.
Falls $\mathcal{A}(A \cdot x \geqslant b, A \cdot x \leqslant b, x \geqslant \mathbf{0}) = \emptyset$, **gebe aus: "Keine Lösung".**
Falls $\mathcal{A}(A \cdot x \geqslant b, A \cdot x \leqslant b, x \geqslant \mathbf{0}, c^T \cdot x \geqslant (\alpha \cdot m)^{m+1} + 1) \neq \emptyset$, **gebe aus: "unbeschränktes Gl.sys.".**
Setze $\tau = (\alpha \cdot m)^{-2\cdot(m+1)}$.
Bestimme mit Binärsuche ein $K \in \mathbb{N}$ **so, dass gilt:** $\tau \cdot K \leqslant c^T \cdot x^* < \tau \cdot (K+1)$.
  Rufe für verschiedene K **auf:** $\mathcal{A}(A \cdot x \geqslant b, A \cdot x \leqslant b, x \geqslant \mathbf{0}, c^T \cdot x \geqslant \tau \cdot K)$
Setze $S = \emptyset$ **und** $m' = 0$.
Für i **von 1 bis** n **mache:**
  Falls $\mathcal{A}(A \cdot x \geqslant b, A \cdot x \leqslant b, x \geqslant \mathbf{0}, c^T \cdot x \geqslant \tau \cdot K, x_{j \in S \cup \{i\}} \leqslant 0) \neq \emptyset$, **so setze** $S = S \cup \{i\}$, $m' = m' + 1$, **und** $\bar{\delta}(m') = i$.
Bestimme δ **aus** $\bar{\delta}$ **und Basislösung durch** $x_\delta = A_\delta^{-1} b$.

- Wegen $c^T \cdot x \geqslant (\alpha \cdot m)^{m+1} + 1$ gilt $|K| \leqslant (\alpha \cdot m)^{m+1}/\tau = (\alpha \cdot m)^{3\cdot(m+1)}$.
- Damit ist die Anzahl der Aufrufe bei der Binärsuche beschränkt durch:

$$O(\log((\alpha \cdot m)^{3\cdot(m+1)})) = O(m \cdot \log m + m \log \alpha) = O(L^2).$$

Details zum Algorithmus

α der größte absolute Wert über alle Eingabezahlen
Gleichungsform: maximiere $c^T x$, $Ax = b$, $x > 0$
$x^* =$ optimale Lösung

Problem: maximiere $c^T x$, $Ax = b$ $x \leqslant 0$.
Falls $\mathcal{A}(A \cdot x \geqslant b, A \cdot x \leqslant b, x \geqslant 0) = \emptyset$, **gebe aus: "Keine Lösung".**
Falls $\mathcal{A}(A \cdot x \geqslant b, A \cdot x \leqslant b, x \geqslant 0, c^T \cdot x \geqslant (\alpha \cdot m)^{m+1} + 1) \neq \emptyset$, **gebe aus: "unbeschränktes Gl.sys.".**
Setze $\tau = (\alpha \cdot m)^{-2 \cdot (m+1)}$.
Bestimme mit Binärsuche ein $K \in \mathbb{N}$ **so, dass gilt:** $\tau \cdot K \leqslant c^T \cdot x^* < \tau \cdot (K+1)$.
  Rufe für verschiedene K **auf:** $\mathcal{A}(A \cdot x \geqslant b, A \cdot x \leqslant b, x \geqslant 0, c^T \cdot x \geqslant \tau \cdot K)$
Setze $S = \emptyset$ **und** $m' = 0$.
Für i **von 1 bis** n **mache:**
  Falls $\mathcal{A}(A \cdot x \geqslant b, A \cdot x \leqslant b, x \geqslant 0, c^T \cdot x \geqslant \tau \cdot K, x_{j \in S \cup \{i\}} \leqslant 0) \neq \emptyset$, **so setze** $S = S \cup \{i\}$, $m' = m' + 1$, **und** $\bar{\delta}(m') = i$.
Bestimme δ **aus** $\bar{\delta}$ **und Basislösung durch** $x_\delta = A_\delta^{-1} b$.

- Falls $m' = m$ gilt, erhalten wir über $x_\delta = A_\delta^{-1} b$ die Basislösung.
- Falls $m' > m$ gilt, so können wir $x_\delta = A_\delta^{-1} b$ zu einer Basislösung erweitern.

Aussage

α der größte absolute Wert über alle Eingabezahlen
Gleichungsform: maximiere $c^T x$, $Ax = b$, $x > 0$
$x^* =$ optimale Lösung

Problem: maximiere $c^T x$, $Ax = b$ $x \geqslant 0$.
Falls $\mathcal{A}(A \cdot x \geqslant b, A \cdot x \leqslant b, x \geqslant 0) = \emptyset$, gebe aus: "Keine Lösung".
Falls $\mathcal{A}(A \cdot x \geqslant b, A \cdot x \leqslant b, x \geqslant 0, c^T \cdot x \geqslant (\alpha \cdot m)^{m+1} + 1) \neq \emptyset$, gebe aus: "unbeschränktes Gl.sys.".
Setze $\tau = (\alpha \cdot m)^{-2 \cdot (m+1)}$.
Bestimme mit Binärsuche ein $K \in \mathbb{N}$ so, dass gilt: $\tau \cdot K \leqslant c^T \cdot x^* < \tau \cdot (K+1)$.
  Rufe für verschiedene K auf: $\mathcal{A}(A \cdot x \geqslant b, A \cdot x \leqslant b, x \geqslant 0, c^T \cdot x \geqslant \tau \cdot K)$
Setze $S = \emptyset$ und $m' = 0$.
Für i von 1 bis n mache:
  Falls $\mathcal{A}(A \cdot x \geqslant b, A \cdot x \leqslant b, x \geqslant 0, c^T \cdot x \geqslant \tau \cdot K, x_{j \in S \cup \{i\}} \leqslant 0) \neq \emptyset$, so setze $S = S \cup \{i\}$, $m' = m' + 1$, und $\bar{\delta}(m') = i$.
Bestimme δ aus $\bar{\delta}$ und Basislösung durch $x_\delta = A_\delta^{-1} b$.

Theorem

Mit Hilfe der Ellipsoidmethode und einer Halbierungssuche kann ein LP in Polynomzeit gelöst werden.

Literatur

- B. Korte, J. Vygen. Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms, 2nd Edition, Springer, 2002.
- E. Lawler. Combinatorial Optimization: Networks and Matroids. Dover Publications, 1976.
- C. Papadimitriou und K. Steiglitz. Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity. Prentice Hall, 1982.
- A. Schrijver. Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency. Springer, 2003.

Fragen

- Wie ist die Idee der Simplexmethode?
- Welche Laufzeit erhalten wir bei der Simplexmethode?
- Wie ist die Idee der Ellipsoidmethode?
- Welche Laufzeit erhalten wir bei der Simplexmethode?
- Wie arbeitet die Perturbierung?