Matrixmultiplikation (Forts.)

Proposition

$A, A' \in R^{m\times n},\ B, B' \in R^{n\times l},\ C \in R^{l\times k}$

- $A(BC) = (AB)C$
- $\mathrm{E}_m A = A\mathrm{E}_n = A$
- $(A + A')B = AB + A'B$
  $A(B + B') = AB + AB'$
- $(cA)B = A(cB) = c(AB)$

Matrixmultiplikation (Forts.)

Korollar

$R^{n \times n}$ wird ein Ring mit:

- Multiplikation:
- Eins:

Bemerkung

$R^{n \times n}$ ist nicht kommutativ für $n \geq 2$.

Matrixmultiplikation (Forts.)

Definition

Allgemeine lineare Gruppe vom Grad n über R:

$$\mathrm{GL}_n(R) := (R^{n\times n})^\times$$

Beispiel

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ mit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Transposition von Matrizen

Definition

$A \in R^{m \times n}$

Transponierte von A:

$$A^t =$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}^t =$$

Transposition von Matrizen (Forts.)

Proposition

$A, B \in R^{m\times n}$, $C \in R^{n\times l}$, $D \in \mathrm{GL}_n(R)$

- $(A^t)^t = A$
- $(A+B)^t = A^t + B^t$
- $(AC)^t = C^t A^t$
- $\mathrm{E}_n^t = \mathrm{E}_n$
- $D^t \in \mathrm{GL}_n(R)$ mit $(D^t)^{-1} = (D^{-1})^t$

13. Dezember 2018

Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme

Setup

- K Körper
- $m, n \in \mathbb{N}$

Lineare Gleichungssysteme (Forts.)

Ein lineares Gleichungssystem (LGS) aus m Gleichungen und n Unbekannten x_j für $j \in \underline{n}$ über K:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & & & & & & & \vdots & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

wobei $a_{ij}, b_i \in K$ für $i \in \underline{m}$, $j \in \underline{n}$.

Kurz:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$$

für alle $i \in \underline{m}$.

Lineare Gleichungssysteme (Forts.)

Definition

Gegeben sie ein LGS über K wie oben.

Eine *Lösung* des LGS ist ein n-Tupel $\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in K^n$ $(= K^{n\times 1})$ mit

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} s_j = b_i$$

für alle $i \in \underline{n}$.

Matrix-Formulierung für LGS

Gegeben sie ein LGS über K wie oben.

Definition

- $A := (a_{ij}) \in K^{m \times n}$: *Koeffizientenmatrix* des LGS
- $b := (b_i) \in K^m$: *rechte Seite* des LGS
- $(A, b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in K^{m \times (n+1)}$: *erweiterte Koeffizientenmatrix*
- Lösungsmenge: $\mathbb{L}(A, b) \subseteq K^n$
- Das LGS heißt *homogen*, falls $b = 0 \in K^m$.
- Das LGS heißt *inhomogen*, falls $b \neq 0 \in K^m$.

Matrix-Formulierung für LGS (Forts.)

Bemerkung

$\mathbb{L}(A, b) = \{s \in K^n \mid As = b\}$

Matrix-Formulierung für LGS (Forts.)

Schreibweise

Schreiben LGS mit erweiterter Koeffizientenmatrix (A, b) formal:

$$Ax = b.$$

Beispiel

Das LGS

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 5 \\ x_1 & - & x_2 & & & = & 1 \end{array}$$

wird als Matrixgleichung geschrieben:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}}_{b}.$$

Matrix-Formulierung für LGS (Forts.)

Es sei $A \in K^{m \times n}$ und $b \in K^m$.

Definition

$$\varphi_A : K^n \to K^m, \qquad v \mapsto Av$$

Bemerkung

- Für jedes $s \in \mathbb{L}(A, b)$ gilt

$$\mathbb{L}(A, b) = s + \mathbb{L}(A, 0) := \{s + u \mid u \in \mathbb{L}(A, 0)\}.$$

- Bild von φ_A: $\varphi_A(K^n) = \{b \in K^m \mid Ax = b \text{ lösbar}\}$.
- Faser von φ_A zu $b \in K^m$:

$$\varphi_A^{-1}(\{b\}) = \{s \in K^n \mid As = b\} = \mathbb{L}(A, b).$$

Lineare Gleichungssysteme (Forts.)

Beispiel

$K = \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -2x_1 & + & 2x_2 & - & 6x_3 & - & 10x_4 & = & -24 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 9x_3 & - & 7x_4 & = & -15 \\ x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4 & = & -4 \end{array}$$

Lösungen sind z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Wie findet man alle Lösungen?

Lineare Gleichungssysteme (Forts.)

Beispiele

Es sei $K = \mathbb{R}$ und $m = n = 2$. Nehme x, y statt x_1, x_2.

- $$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x + y &= 0 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 3x + 3y &= 6 \end{aligned}$$

Lineare Gleichungssysteme (Forts.)

Satz

Die Lösungsmenge eines LGS ändert sich nicht, wenn

- zwei Gleichungen vertauscht werden, oder
- das c-fache ($c \in K$) einer Gleichung zu einer anderen addiert wird, oder
- eine Gleichung mit einem $c \in K$ ($c \neq 0$) multipliziert wird.

Definition

Die Umformungen aus dem Satz heißen *Äquivalenzumformungen*.

Lineare Gleichungssysteme (Forts.)

Beispiel

Es sei $K = \mathbb{R}$ und $m = n = 2$. Nehme x, y statt x_1, x_2.

$$x + y = 2$$
$$x - y = 0$$

Lineare Gleichungssysteme (Forts.)

Das LGS

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & & & + & 3x_4 & = & 5 \\ & & & & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \end{array}$$

hat die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 5}.$$

Die Äquivalenzumformungen des LGS können an dieser Matrix durchgeführt werden.

Elementare Transformationen

Definition

Eine *elementare Zeilentransformation* ist eine Abbildung

$$t : K^{m \times n} \to K^{m \times n}, \quad A \mapsto t(A),$$

von einem der drei Typen τ, α, μ, wobei $1 \leq i, j \leq m$ und $c \in K$:

- τ_{ij}: vertauscht die i-te und j-te Zeile von A.
- $\alpha_{ij}(c), i \neq j$: addiert das c-fache der j-ten Zeile zur i-ten Zeile von A.
- $\mu_i(c)$ mit $c \neq 0$: multipliziert die i-te Zeile von A mit c.

Schreibweise

$A \rightsquigarrow B$, falls $B \in K^{m \times n}$ aus $A \in K^{m \times n}$ durch eine endliche Folge elementarer Zeilentransformationen hervorgeht.

Elementare Transformationen (Forts.)

Beispiel

$K = \mathbb{Q}, m = 3, n = 4.$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \overset{\tau_{23}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\alpha_{12}(2)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 13 & 16 \\ -1 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\mu_2(-1)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 13 & 16 \\ 1 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Elementare Transformationen (Forts.)

Bemerkung

Es seien $(A, b), (A', b') \in K^{m \times (n+1)}$ erweiterte Koeffizientenmatrizen von LGS.

Ist $(A, b) \rightsquigarrow (A', b')$, dann ist

$$\mathbb{L}(A, b) = \mathbb{L}(A', b').$$

Zeilenstufenform

Definition
Es sei $A \in K^{m \times n}$.

- z_i sei die i-te Zeile von A, $i = 1, \ldots, m$.
- $k_i \in \underline{n+1}$: (Anzahl der führenden Nullen von z_i) $+ 1$.
- A hat *Zeilenstufenform*, wenn gilt:

$$k_1 < k_2 < \cdots < k_r < k_{r+1} = \cdots = k_m = n + 1$$

  für ein $0 \leq r \leq m$.
- In diesem Fall: r: *Stufenzahl*, $k_1, \ldots, k_r$: *Stufenindizes* von A.

Bemerkung
Die Nullmatrix hat Zeilenstufenform (Fall $r = 0$).

Zeilenstufenform

A hat genau dann Zeilenstufenform, wenn A die Gestalt hat:

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccccccccccc}
0 & \cdots & 0 & \blacksquare & \star & \cdots & \star & \star & \star & \cdots & \star & \star & \cdots & \star \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \blacksquare & \star & \cdots & \star & \star & \cdots & \star \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & & \vdots & & & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & & \star & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \blacksquare & \star & \cdots & \star \\
\hline
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & & 0 & 0 & \cdots & & 0 & & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & & 0 & 0 & \cdots & & 0 & & \cdots & 0
\end{array}\right)
$$

$\blacksquare$ und $\star$ sind beliebige Elemente aus K, aber $\blacksquare \neq 0$;
$\blacksquare$ steht in der i-ten Zeile genau an der Stelle k_i.

Zeilenstufenform (Forts.)

Satz

$A \in K^{m \times n}$ kann durch eine Folge elementarer Transformationen auf Zeilenstufenform gebracht werden.

Zeilenstufenform (Forts.)

Algorithmus (Gauß)

Eingabe: $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$.
Ausgabe: $A' \in K^{m \times n}$ mit $A \rightsquigarrow A'$ und A' hat Zeilenstufenform.

Für $j = 1, \ldots, n$ bezeichne s_j die j-te Spalte von A.

1. Ist A die Nullmatrix oder eine $(1 \times n)$-Matrix, dann Stopp.
2. Setze $k := \min\{1 \leq j \leq n \mid s_j \neq 0\}$.
3. Wähle ein i mit $a_{ik} \neq 0$ und wende τ_{1i} an. (τ_{11} ist erlaubt.)
4. Für jedes $i = 2, \ldots, m$ wende $\alpha_{i1}(-\frac{a_{ik}}{a_{1k}})$ an.
5. Führe 1. – 5. rekursiv mit $(a_{ij})_{\substack{2 \leq i \leq m \\ k < j \leq n}} \in K^{(m-1) \times (n-k)}$ aus.

(Nach den Schrittten 3. und 4. wird die **transformierte** Matrix wieder mit (a_{ij}) bezeichnet.)