

Übung zur Vorlesung

BERECHENBARKEIT UND KOMPLEXITÄT

Blatt 6

Tutoriumsaufgabe 6.1

Zeigen Sie, dass weder $\overline{H} \leq H$ noch $H \leq \overline{H}$ gilt.

Tutoriumsaufgabe 6.2

Sei $H_{\text{never}} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ hält auf keiner Eingabe}\}$. Zeigen Sie mittels Reduktion, dass H_{never} nicht rekursiv aufzählbar ist.

Tutoriumsaufgabe 6.3

(a) Entscheiden Sie die folgenden PCP-Instanzen:

$$K_1 = \left\{ \left[\frac{a}{abb} \right], \left[\frac{ab}{b} \right], \left[\frac{ab}{ba} \right], \left[\frac{aba}{ba} \right] \right\}$$
$$K_2 = \left\{ \left[\frac{a}{b} \right], \left[\frac{b}{aa} \right], \left[\frac{b}{ba} \right], \left[\frac{bb}{ba} \right], \left[\frac{aab}{b} \right] \right\}$$

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: Das PCP über dem Alphabet $\{0, 1\}$ ist unentscheidbar.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie: Das PCP über dem unären Alphabet $\{0\}$ ist entscheidbar.

Hausaufgabe 6.1**(3 Punkte)**

Betrachte Sprachen A, B für die gilt, $A \leq B$, $B \leq \overline{A}$ und dass B rekursiv aufzählbar ist. Zeigen oder widerlegen Sie, dass A entscheidbar ist.

Hausaufgabe 6.2**(4 Punkte)**

Sei $L = \{\langle M \rangle \mid M \text{ verwirft alle Eingaben}\}$. Zeigen Sie mittels Reduktion, dass L nicht rekursiv aufzählbar ist.

Hausaufgabe 6.3**(3+4 Punkte)**

Zeigen oder widerlegen Sie, welche der folgenden Varianten des PCPs entscheidbar sind.

- (a) Eingabe: Nicht-leere Wörter x_1, \dots, x_k und y_1, \dots, y_k über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

Frage: Gibt es eine Folge $\langle i_1, \dots, i_n \rangle$ von Indizes in $\{1, \dots, k\}$, sodass das Wort $x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_n}$ jeden Buchstaben in Σ genau gleich oft enthält wie das Wort $y_{i_1}y_{i_2} \dots y_{i_n}$?

- (b) Das PCP beschränkt auf Dominos, wo das obere und das untere Wort verschieden lang sind.

Hausaufgabe 6.4**(3 Bonuspunkte)**

Sei $L := \{w_i \mid \text{jede der TM } M_1, \dots, M_i \text{ verwirft } w_i\}$. Zeigen oder Widerlegen Sie, dass L entscheidbar ist.