15.11. ①

Heute:

Was ~~ist~~ $\mathbb{C}$? Gibt es $\mathbb{C}$? Ja.

Wie geht man mit $\mathbb{C}$ um ?

Nachtrag Mi, 14.11:

$$\exp(-1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k}{k!} + \text{Rest}$$

Leibniz: $|\text{Rest}| \leq \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$

$$= 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{3}{8} = 0.375$$

(Am 14.11.: $1 - \exp(-1)$ berechnet!)

$$(x+iy)(u+iv) = xu + i\cdot xv + iyu + \underbrace{i^2}_{=-1}\cdot yv$$

$$= (xu - yv) + i(xv + yu)$$

Bem: ▷ $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ via $x \mapsto x + i\cdot 0$

▷ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist Körper.

Neutrales Elt. „$\cdot$": $1 \; (= 1 + 0\cdot i)$

Inverses Elt. „$\cdot$" zu $x+iy \neq 0$

$$\frac{x}{x^2+y^2} + i\cdot\frac{-y}{x^2+y^2}$$

▷ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ kann nicht zu einem angeordneten Körper gemacht werden: $i^2 = -1$ und -1 kann nicht positiv sein

Bsp

$$(1+2i)\cdot(11-4i)$$
$$= (1\cdot 11 - 2\cdot(-4)) + i\,(2\cdot 11 + 1\cdot(-4))$$
$$= 19 + 18i$$

$\triangleright$ $(1+2i)^{-1} = \frac{1}{1^2+2^2} + \frac{(-2)}{1^2+2^2}\, i = \frac{1}{5} - \frac{2}{5} i$

$\triangleright$ $\overline{(1+2i)} = 1 - 2i$

$\triangleright$ $i^2 = -1$, $i^3 = i\cdot i^2 = -i$, $i^4 = i^2\cdot i^2 = 1$,
$i^5 = i$, $i^6 = -1$, $i^7 = -i$, $i^8 = 1$

Allgemein

$$i^{4\cdot n} = 1,\quad i^{4n+1} = i,\quad i^{4n+2} = -1,\quad i^{4n+3} = -i$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$.

$\triangleright$ $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + i\cdot 2\cdot \frac{1}{2} = i$

Bw. (1.4) c) & d): $\frac{1}{2}(z+\bar{z}) = \frac{1}{2}\left((x+iy)+(x-iy)\right)$ (4)

$= x = \operatorname{Re} z$

zu d): $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \operatorname{Re} z \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$

$\Leftrightarrow \frac{z}{2} = \frac{\bar{z}}{2} \Leftrightarrow z = \bar{z}$.

b) , zweite Aussage:

$z \cdot w = (xu - yv) + i(xv + yu)$

$\Rightarrow \overline{z \cdot w} = (xu - yv) - i(xv + yu)$

Andererseits

$\bar{z} \cdot \bar{w} = (x - iy)(u - iv) = (xu - (-y)(-v)) + i(x \cdot (-v) + (-y) \cdot u)$

Vergleiche!

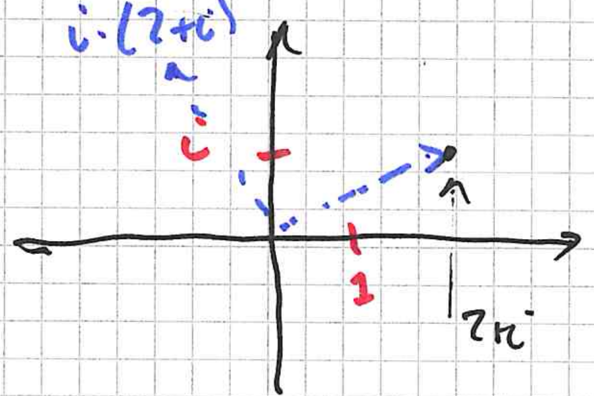
vierte Aussage: ~~$\overline{z\left(\frac{z}{w}\right)} = \bar{z}$.~~

$\overline{w \cdot \left(\frac{z}{w}\right)} \overset{\text{s.o.}}{=} \bar{w} \cdot \overline{\left(\frac{z}{w}\right)}$

$= \overline{\left(\frac{w \cdot z}{w}\right)} = \bar{z}$

Einschub: Geometrie mit $\mathbb{C}$

$$\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longleftrightarrow x+iy \in \mathbb{C}$$



Addition und Multiplikation mit reellen Zahlen laufen in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$ analog.

z.B. Multiplikation mit i: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$x+iy \mapsto -y+ix$$

Geometrisch: Drehung um $90°$.

(Erste Antwort auf Frage „Gibt es $\mathbb{C}$"?

Gauß, „Zahlenebene".)

<u>Bw.</u> (1.6): Setze $\cancel{z}$ $z = x+iy$, $w = u+iv$

a) $|\operatorname{Re} z| = |x|$; $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

Also: $|\operatorname{Re} z| \leq |z| \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$

$\Leftrightarrow x^2 \leq x^2+y^2$ ✓

$|\operatorname{Im} z| \leq |z|$: analog

Weiter

$$|z|^2 = x^2+y^2 \leq |x|^2 + 2|x|\cdot|y| + |y|^2$$
$$= (|x|+|y|)^2 = (|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|)^2$$

$\Rightarrow |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$

b) ✓.

c) $\cancel{z}$ Zeige erst: $|\bar{z}| = |z|$: $\sqrt{x^2+(-y)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$

Damit: $|z\cdot w|^2 = \cancel{|z\cdot w|\cdot|z\cdot w|}$

$$= (z\cdot w)\cdot(\overline{z\cdot w}) = z\cdot w\cdot\bar{z}\cdot\bar{w}$$
$$= (z\cdot\bar{z})\cdot(w\cdot\bar{w}) = |z|^2\cdot|w|^2$$

Weil $|w|\left|\frac{z}{w}\right| = \left|w\cdot\frac{z}{w}\right| = |z|$

$$\Rightarrow \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \quad ✓$$

d) $(|z|+|w|)^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2$

$$\Rightarrow (|z|+|w|)^2 - |z+w|^2 = (|z|+|w|)^2 - (z+w)\overline{(z+w)}$$

$$= \cancel{|z|^2} + \cancel{|w|^2} + 2|z||w| - \cancel{|z|^2} - \cancel{|w|^2} - (z\bar{w} + \bar{z}w)$$

$$= 2\left(|zw| - \mathrm{Re}(z\bar{w})\right) = 2\left(|z\bar{w}| - \mathrm{Re}(z\bar{w})\right) \geq 0$$

Zweite Dreiecksungl. folgt wie in Kap. II aus der ersten

e) $z\cdot\bar{z} = |z|^2 \overset{z\neq 0}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Was ist die algebraische Besonderheit von $\mathbb{C}$?

▷ Jede quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit reellen Koeffizienten ist in $\mathbb{C}$ lösbar

Setze $D = p^2 - 4q$

Für $D > 0$: $x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{p^2-4q}\right) \in \mathbb{R}$

Für $D = 0$: $x_1 \; (= x_2) = -\frac{p}{2}$

Für $D < 0$: $x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-p \pm i\sqrt{\underbrace{4q-p^2}_{>0}}\right)$

▷ Es gilt sogar viel mehr:

Jede Gleichung ← „Fundamentalsatz der Algebra"

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots a_{n-1} x + a_n = 0$$

vom Grad n mit komplexen(!) Koeffizienten $a_1, \dots, a_n$ hat eine Lösung in $\mathbb{C}$.

Folgen und Reihen in $\mathbb{C}$:

Was ist nicht von reellen auf komplexe Folge übertragbar?

▷ Monotonie ($\mathbb{C}$ läßt sich nicht anordnen)

▷ „nach oben / unten beschränkt“ (— " —)

Bew (2.3) a) „$\Rightarrow$": Es sei (a_n) konv. gegen a.

Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

$$\overset{(1.6)a)}{\Longrightarrow} \quad |\overset{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}}(a_n - a)| \leq |a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

$$\| \qquad\qquad$$

$$|\overset{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}}\, a_n - \overset{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}}\, a|$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} (\overset{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}}\, a_n) = \overset{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}}\, a$$

„$\Leftarrow$": Sei $\varepsilon > 0$. Dann ex. $n_1 = n_1(\varepsilon)$ so,

daß $|\mathrm{Re}\, a_n - \mathrm{Re}\, a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_1$

und $n_2 = n_2(\varepsilon)$ so, daß

$$|\mathrm{Im}\, a_n - \mathrm{Im}\, a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq n_2.$$

$$\overset{1.6\,a)}{\Longrightarrow} \quad |a_n - a| \leq |\mathrm{Re}\, a_n - \mathrm{Re}\, a| + |\mathrm{Im}\, a_n - \mathrm{Im}\, a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$

(11)

b) direkt aus a): $\mathrm{Re}(a_n) \to \mathrm{Re}(a)$ und $\mathrm{Im}(a_n) \to \mathrm{Im}(a)$

$\mathrm{Re}(\bar{a}_n) \to \mathrm{Re}(\bar{a})$

$\Rightarrow -\mathrm{Im}(a_n) \to -\mathrm{Im}(a)$

$\mathrm{Im}(\bar{a}_n) \to \mathrm{Im}(\bar{a})$ $\Rightarrow$ Bel.

d) „$\Rightarrow$": Nach Voraussetzung ist $|a_n| \leq C$ für ein $C \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$\overset{1.6\,a)}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{l} |\mathrm{Re}\, a_n| \leq |a_n| \leq C \\ \text{und } |\mathrm{Im}\, a_n| \leq C \end{array}\right\} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

„$\Leftarrow$": Nach Voraussetzung existieren $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ so, daß

$|\mathrm{Re}\, a_n| \leq c_1$ und $|\mathrm{Im}\, a_n| \leq c_2$

für alle $n \in \mathbb{N}$

Setze $C := 2 \cdot \max\{c_1, c_2\}$.

Dann $|a_n| \overset{1.6\,a)}{\leq} |\mathrm{Re}\, a_n| + |\mathrm{Im}\, a_n| \leq c_1 + c_2 \leq C$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bw (7.4) a) Die Aussage ist für die reellen Folge $(\operatorname{Re} a_n)$ und $(\operatorname{Im} a_n)$ bekanntlich richtig.

Mit (7.3) a) Anfang.

b) Aussage bekannt für Real- und Imaginärteile. Mit (7.3) c) & d) Anfang.

c) siehe (7.3) a) & c)

d) (ii) Setze $a_n = x_n + i y_n$, $a = x + iy$

$b_n = u_n + i v_n$, $b = u + iv$

Dann $a_n \cdot b_n = (x_n u_n - y_n v_n) + i(x_n v_n + y_n u_n)$

Weil $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$, $\lim u_n = u$, $\lim v_n = v$, gilt mit Grenzwertregeln für reelle Folgen:

$$\lim(\operatorname{Re}(a_n \cdot b_n)) = \lim(x_n \cdot u_n - y_n \cdot v_n) = \lim(x_n \cdot u_n) - \lim(y_n \cdot v_n)$$

$$= \cancel{x \cdot y - y u} \quad xu - yv = \operatorname{Re}(ab)$$

Analog für Imaginärteile

(ii) $\lim \alpha \cdot a_n = \alpha \cdot \lim a_n$: Aus (ii) mit konst. Folge $(\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$.

Für Summen: Direkt nachrechnen & GW-Regeln

(iii) Zu zeigen ist nur $\lim \left(\frac{1}{b_n}\right) = \frac{1}{b}$ (Rest folgt mit (ii)).

Mit $b_n = u_n + i v_n$: $\frac{1}{b_n} = \frac{u_n - i v_n}{u_n^2 + v_n^2}$ R

$$= \frac{u_n}{u_n^2 + v_n^2} - i \cdot \frac{v_n}{u_n^2 + v_n^2}$$

Mit reellen GW-Regeln: $u_n^2 + v_n^2 \to u^2 + v^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_n^2 + v_n^2} \to \frac{1}{u^2 + v^2}$$

$$\Rightarrow \frac{u_n}{u_n^2 + v_n^2} \to \frac{u}{u^2 + v^2} \quad \text{etc.}$$

Bem: Ist (a_n) eine konvergente komplexe Folge mit Grenzwert a, dann ist auch jede ihrer Teilfolgen konvergent, mit Grenzwert a.

Bsp Definiere zu $q \in \mathbb{C}^*$ rekursiv:

$$a_0 := q \quad ; \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{q}{a_n} \right)$$

Falls (a_n) wohldefiniert (d.h. alle $a_n \neq 0$) und konvergent, so erfüllt der Grenzwert a:

$$a^2 = q$$

Denn:

$$a = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teilfolge}}}{\lim} a_{n+1} = \lim \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{q}{a_n}\right)$$

$$\overset{\text{GW-Regeln}}{=} \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} \frac{q}{a} \iff a = \frac{q}{a} \iff a^2 = q$$