EFFIZIENTE ALGORITHMEN

Übungsblatt 5

Prof. Dr. Woeginger, PD Dr. Unger, Prof. Dr. Rossmanith
Dennis Fischer
Lehrstuhl für Informatik 1
RWTH Aachen

WS 18/19
15. November 2018
Abgabe: 22. November 18:00

- Die Übungsblätter sollen in Gruppen von 3-5 Studierenden abgegeben werden.
- Die abgegebenen Lösungen mit Namen und Matrikelnummern aller Teammitglieder und der Übungsgruppe beschriften.
- Um zur Klausur zugelassen zu werden müssen 50% aller möglichen Übungspunkte erreicht werden.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Sei $G = (V, E, s, t, c)$ ein Flussnetzwerk. Für einen Fluss (oder eine Zirkulation) f sei $G(f) = (V, E')$ mit $E' = \{e \in E \mid f(e) > 0\}$ der durch f induzierte Flussgraph. Es ist $n = |V|, m = |E'|$.

(a) Zeige oder widerlege: Wenn f durch die Ford-Fulkerson-Methode mit Breitensuche berechnet wurde, so ist $G(f)$ ein kreisfreier Graph (DAG).

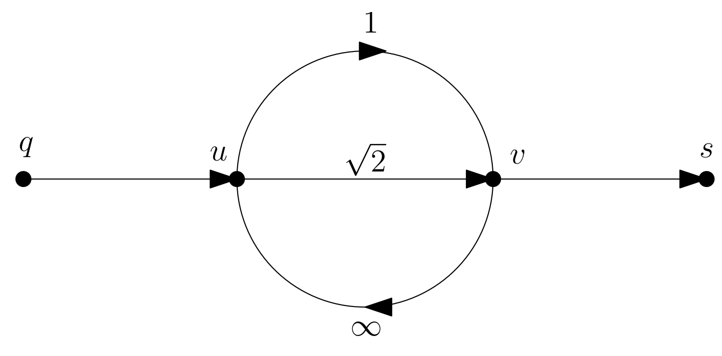
(b) Entwerfe einen Algorithmus, der für jede Zirkulation f' in Zeit $O(nm)$ eine Kreiszerlegung, von f' aus maximal m Kreisen berechnet, so dass die Summe dieser Kreisflüsse den Gesamtfluss ergeben.

(c) Entwerfe einen Algorithmus, der für jeden Fluss f in Zeit $O(nm)$ eine Pfad-Kreiszerlegung von f mit insgesamt höchstens m Kreisen und Pfaden berechnet, so dass die Summe dieser s-t-Pfadflüsse und Kreisflüsse den Gesamtfluss ergeben.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Zeige, dass es ein Flussnetzwerk mit Kapazitäten aus $\mathbb{R}$ und eine unendliche Sequenz von Fv-Wegen (Flussvergrößernde Wege) gibt, so dass der Gesamtfluss nicht gegen den maximalen Fluss konvergiert.

(a) Betrachte dazu den folgenden Graphen:



Dieser Graph ist auf Grund der Multikanten zunächst noch keine zulässige Eingabe für das Flussproblem. Dennoch lässt sich die Definition des Flusses und von Fv-Wegen einfach übertragen. Zeige zunächst, dass es in diesem Graphen eine unendliche Sequenz von Fv-Wegen gibt, die gegen den maximalen Fluss konvergiert, ohne ihn zu erreichen.

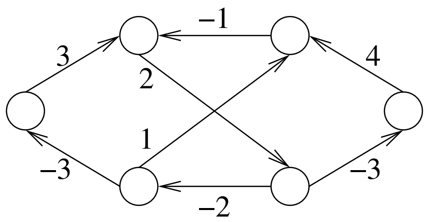
Hinweis: Die Fv-Wege sind von der Form $q \to u \to v \to u \to v \to s$.

(b) Erweitere die Konstruktion so, dass es keine Multikanten mehr gibt und es nicht mehr nötig ist, Knoten auf Fv-Wegen doppelt zu besuchen. Trotzdem soll eine unendliche Sequenz von Flussvergrößerungen erhalten bleiben.

(c) Gib ein ähnliches Beispiel an, bei dem der berechnete Fluss nicht gegen den maximalen Fluss konvergiert.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Im Folgenden betrachten wir den unten abgebildeten Graphen. Eine Zahl neben einer Kante entspricht deren Kosten. Wir beobachten zunächst, dass die Kosten eines Min-Mean-Cycle gleich 0 sind.



Bestimme, wie in der Vorlesung beschrieben, die Knotenpotentiale $p(v)$ und berechne die veränderte Kantenkosten $l'(e)$. Dann verändern sich die Kosten von Kreisen nicht, und alle Kantenkosten sind nicht negativ.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Gegeben sei eine positive reelle Matrix $M \in \mathsf{R}_{\geq 0}^{a \times b}$ mit Zeilensummen α_i, $i \in \{1, \dots, a\}$, und Spaltensummen β_j, $j \in \{1, \dots, b\}$. Wir möchten nun jeden Eintrag m_{ij} aus M und jede Zeilen- und Spaltensumme x so auf eine ganze Zahl $\overline{m_{ij}} \in \{\lfloor m_{ij} \rfloor, \lceil m_{ij} \rceil\}$ bzw. $\bar{x} \in \{\lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil\}$ runden, dass die Zeilen- und Spaltensummen der gerundeten Elemente genau den gerundeten Zeilen- und Spaltensummen entsprechen.

(Das Auf- und Abrunden von Werten unterliegt dabei keiner weiteren Einschränkung. Es kann also z.B. durchaus der Eintrag 4.2 aufgerundet werden, während der nächste Eintrag 2.9 abgerundet wird.)

Gib einen Algorithmus für dieses Problem an, indem du es auf eine Variante des Flussproblems zurückführst.

Abgabefrist: Die Lösungen müssen bis zum **22. November 18:00** in der Vorlesung oder im Abgabekasten vor dem Lehrstuhl i1 abgegeben werden.