Lehrstuhl für Informatik 1
Prof. Dr. Gerhard Woeginger
Jan Böker, Tim Hartmann

WS 2018/19
07.12.2018

Übung zur Vorlesung
Berechenbarkeit und Komplexität

Blatt 8

Tutoriumsaufgabe 8.1

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen primitiv rekursiv sind. Verwenden Sie dazu die Definition von primitiv rekursiven Funktionen, und bauen Sie die Funktionen aus konstanten Funktionen, Projektionen und Nachfolgerfunktion durch Komposition und primitive Rekursion zusammen. Sie dürfen die Funktionen $\mathrm{add}, \mathrm{mult}, \mathrm{pred}, \mathrm{sub}$ aus der Vorlesung verwenden.

(a) $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f_1(x) = 2x + 1$

(b) $\mathrm{sgn} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\mathrm{sgn}(x) = [x \geq 1]$

(c) $\mathrm{leq} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $\mathrm{leq}(a, b) = [a \leq b]$

(d) $f_4 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $f_4(x, y) = x \text{ DIV } y$

Tutoriumsaufgabe 8.2

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, die durch $f(x, y) = \binom{x+y+1}{2} + x$ festgelegt wird.

(a) Zeigen Sie: f ist eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}^2$ und $\mathbb{N}$

(b) Skizziern Sie einen Algorithmus, der für eine gegebene natürliche Zahl n zwei natürliche Zahlen x und y mit $f(x, y) = n$ berechnet.

Tutoriumsaufgabe 8.3

(a) Es sei $f : \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}$ definiert durch $f(a, b, c, d) = (a^3 + ba^2 + ca) \dot{-} d$. Bestimmen Sie die Funktion μf. Welchen Wert hat $\mu f(3, 1, 5)$?

(b) Welche wohlbekannte Funktionen g wird hier mit Hilfe des μ-Operators definiert?

Die Funktion $f : \mathbb{N}^3 \to \{0, 1\}$ ist durch $f(x, y, z) = [\nexists w : wy + x = z]$ festgelegt. Die Funktion $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ ist dann gegeben durch $g(y, z) = 0$ falls $yz = 0$ und $g(y, z) = \mu f(x, y, z)$ andernfalls.

(c) Beweisen Sie unter Verwendung von Komposition, primitiver Rekursion und μ-Operator, dass die folgende Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ μ-rekursiv sind. $f(a) = \max\{n \mid 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 < a\}$

— BITTE WENDEN —

Hausaufgabe 8.1 **(2+2 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen primitiv rekursiv sind. Verwenden Sie dazu die Definition von primitiv rekursiven Funktionen, und bauen Sie die Funktionen aus konstanten Funktionen, Projektionen und Nachfolgerfunktion durch Komposition und primitive Rekursion zusammen. Sie dürfen die Funktionen aus der Tutoraufgabe 8.1 und $\mathrm{add}, \mathrm{mult}, \mathrm{pred}, \mathrm{sub}$ aus der Vorlesung verwenden.

(a) $f_5(x, y) = x \mod y$.

(b) $f_6(x, y) = \mathrm{ggT}(x, y)$, wobei $\mathrm{ggT}(x, y)$ der größte gemeinsame Teiler von x und y ist.

Hausaufgabe 8.2 **(2+3 Punkte)**

Zeigen Sie unter Verwendung von primitiv rekursiven Funktionen und dem μ-Operator, dass die folgenden Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ alle μ-rekursiv sind.

(a) $f_7(x) = 1$ falls x Quadratzahl, und andernfalls $f_7(x) = \perp$

(b) $f_8(x) = 1$ falls x keine Quadratzahl, und andernfalls $f_8(x) = \perp$

Hausaufgabe 8.3 **(4 Punkte)**

Sei $L = \{\langle M_1 \rangle \langle M_2 \rangle \mid L(M_1) \cap L(M_2) \neq \Sigma^*\}$. Zeigen Sie mittels Reduktion, dass L nicht rekursiv aufzählbar ist.

Abgabe bis Mittwoch, den 19.12.2018 um 12:15 Uhr
im Sammelkasten am Lehrstuhl i1, in Ihrem Tutorium oder am Anfang der Globalübung.