Lehrstuhl für Informatik 1
Prof. Dr. Gerhard Woeginger
Jan Böker, Tim Hartmann

WS 2018/19

Übung zur Vorlesung
Berechenbarkeit und Komplexität
Lösung Blatt 6

Hausaufgabe 6.1 **(3 Punkte)**

Betrachte Sprachen A, B für die gilt, $A \leq B$, $B \leq \overline{A}$ und dass B rekursiv aufzählbar ist. Zeigen oder widerlegen Sie, dass A entscheidbar ist.

Um zu zeigen, dass A entscheidbar ist, reicht es zu zeigen, dass A und $\overline{A}$ rekursiv aufzählbar sind.

Da $A \leq B$ und B rekursiv aufzählbar ist folgt, dass A rekursiv aufzählbar ist.

Aus der Transitivität von $\leq$ folgt mit $A \leq B \leq \overline{A}$, dass $A \leq \overline{A}$. Aus Tutoriumsaufgabe 5.4b), folgt damit $\overline{A} \leq A$. Da $\overline{A} \leq A$ und A rekursiv aufzählbar folgt, dass auch $\overline{A}$ rekursiv aufzählbar ist.

Hausaufgabe 6.2 **(4 Punkte)**

Sei $L = \{\langle M \rangle \mid M$ verwirft alle Eingaben $\}$. Zeigen Sie mittels Reduktion, dass L nicht rekursiv aufzählbar ist.

Wir zeigen, dass $H_{all} \leq L$. Da H_{all} nicht rekursiv aufzählbar ist, folgt, dass auch L nicht rekursiv aufzählbar ist.

Konstruktion f: Falls die Eingabe nicht die Form $\langle M \rangle$ hat, gib eine TM M' aus, die immer akzeptiert. Sonst, sei für TM M die TM M^* die TM, die sich wie M verhält, aber immer verwirft. Gib $\langle M^* \rangle$ aus.

Die Konstruktion ist berechenbar, insbesondere ist $\langle M^* \rangle$ gegeben $\langle M \rangle$ berechenbar.

Korrektheit: Wir zeigen, dass $w \in M_{all}$ gdw. $f(w) \in L$.

($\Rightarrow$) Falls $w \in M_{all}$, dann hat w die Form $\langle M \rangle$ und M hält auf allen Eingaben. Dann hält auch M^* auf allen Eingaben und verwirft sie. Daher gilt $f(w) = \langle M^* \rangle \in L$.

und $f(w) = \langle M^* \rangle$.

($\Leftarrow$) Falls $w \notin M_{all}$, dann hat entweder (1) w nicht die Form $\langle M \rangle$ oder (2) $w = \langle M \rangle$ mit es gibt eine Eingabe x auf der M nicht hält. Bei (1) ist $f(w) = M'$, die immer akzeptiert, also $f(w) \notin L$. Bei (2) gibt es eine Eingabe x auf der TM M nicht terminiert. Dann terminiert auch M^* auf Eingabe x nicht. Insbesondere verwirft M^* die Eingabe nicht. Somit gilt $f(w) = \langle M^* \rangle \notin L$.

Hausaufgabe 6.3 **(3 Bonuspunkte +4 Punkte)**

Ziegen oder widerlegen Sie, welche der folgenden Varianten des PCPs entscheidbar sind.

(a) **Eingabe: Nicht-leere Wörter $x_1, \dots, x_k$ und $y_1, \dots, y_k$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.**

Frage: Gibt es eine Folge $\langle i_1, \dots, i_n \rangle$ von Indizes in $\{1, \dots, k\}$, sodass das Wort $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}$ jeden Buchstaben in Σ genau gleich oft enthält wie das Wort $y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_n}$?

Entscheidbar.

Für $i \in \{1, \dots, n\}$ sei a_i die Anzahl a oben minus die Anzahl a unten von Domino i. Für $i \in \{1, \dots, n\}$ sei b_i die Anzahl b oben minus die Anzahl b unten von Domino i.

Um das Problem zu entscheiden, reicht es die Häufigkeiten der Dominos in einer Lösungs-Reihenfolge zu suchen. Die Reihenfolge der Dominos ist dabei irrelevant. Für gegebene Häufigkeiten $c_1, \dots, c_k$ der Dominos kann leicht überprüft werden, ob die Differenz von a (bzw. b) oben und unten gleich 0 ist.

Suche ganzzahlige $c_1, \dots, c_k$ so dass es

$c_1 a_1 + \dots + c_n a_k = 0$

$c_1 b_1 + \dots + c_k b_k = 0,$

$c_1 + \dots + c_n \geq 1$ und

$c_1 \geq 0, \dots, c_k \geq 0.$

Es reicht für dieses lineare Gleichungssystem eine rationale Lösung $c = (\frac{c_1'}{c_1''} \dots \frac{c_k'}{c_k''}) \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^k \setminus 0^k$ zu finden. Skaliert um $c_1'' c_2'' \dots c_k''$ ergibt dies eine ganzzahlige Lösung.

Es bleibt zu zeigen, wie entschieden werden kann, ob ein solches lineares Gleichungssystem eine Lösung hat.

(Wie man z.B. in der Vorlesung Effiziente Algorithmen lernt, können lineare Gleichungssysteme effizient gelöst werden. Das Problem ist daher entscheidbar.)

(b) **Das PCP beschränkt auf Dominos, wo das obere und das untere Wort verschieden lang sind.**

Sei PCP' das PCP beschränkt auf Dominos wo das obere und das untere Wort verschieden lang sind Unentscheidbar, da $PCP \leq PCP'$.

Konstruktion:

Für $i \in \{1, \dots, n\}$ ersetze das ursprünglich i-te Domino $\left[\frac{a_1 \dots a_\ell}{b_1 \dots b_{\ell'}}\right]$ mit $\ell, \ell' \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_\ell, b_1, \dots, b_{\ell'} \in \Sigma$ durch die Dominos

$\left[\frac{a_1 \#\# \dots \#\# a_\ell}{\#\# b_1 \#\# \dots \#\# b_{\ell'} \#\#}\right]$ (als i-tes Domino),

$\left[\frac{\#\# a_1 \#\# \dots \#\# a_\ell \#\#}{b_1 \#\# \dots \#\# b_{\ell'}}\right]$ (als $k + i$-tes Domino) und

$\left[\frac{a_1 \#\# \dots \#\# a_\ell}{b_1 \#\# \dots \#\# b_{\ell'} \#\#}\right]$ (als $2k + i$-tes Domino). Verwende zusätzlich die Dominos $\left[\frac{\#\#\$}{\$}\right]$ und $\left[\frac{\$}{\#\#\$}\right]$ (als $3k + 1$ und $3k + 2$-te Domino).

Wir behaupten, dass jedes konstruierte Domino oben und unten unterschiedlich lang sind: Für ein Domino mit Länge oben $\ell \in \mathbb{N}$ und unten $\ell' \in \mathbb{N}$ werden Dominos mit folgenden Längen oben,unten konstruiert: $3k - 2, 3\ell' + 2$; $3\ell + 2, 3\ell' - 2$ und $3\ell, 3\ell' - 2$; Die Länge oben, unten sind modulo 3 also $-2, 2$; $2, -2$ und $-2, 0$; also oben und unten unterschiedlich lang.

Korrektheit: Wir zeigen, dass die ursprüngliche PCP-Instanz eine Lösung hat gdw. die konstruierte PCP-Instanz eine Lösung hat.

($\Rightarrow$) Sei die ursprüngliche PCP-Instanz lösbar mit der Indexfolge $I := i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, k\}$ mit Wort oben $x_1, \ldots, x_n$ und Wort unten $y_1, \ldots, y_n$. Betrachte die Wörter die der konstruierte PCP-Instanz durch die Indexfolge $2k + i_1, k + i_2, i_3, k + i_4, \ldots, (n \bmod 2)k + i_n$. Oben und unten steht an jeder 2ten und 3ten Stelle modulo 3 das Zeichen #. Oben bzw. unten steht an jeder $1 + 3i$-ten Stelle für $i \in \{1, \ldots, \frac{n}{3}\}$ das Zeichen x_i bzw. y_i. Also ist die Indexfolge I eine Lösung für die konstruierte Instanz.

($\Leftarrow$) Sei $I := i_1, \ldots, i_n$ eine Lösung der konstruierten PCP'-Instanz mit Wort oben v und Wort unten w. Seien v' bzw. w' die aus v bzw. w entstehen, wenn man alle Vorkommen von # und \$ löscht. Es gilt weiterhin, dass $v' = w'$. Entfernt man aus einem Domino der PCP'-Instanz alle # und \$ so erhält man ein Domino aus der ursprünglichen PCP-Instanz (bis auf für die Dominos End-Dominos). Sei J die Indexfolge der Dominos $i_1, \ldots, i_n$ ohne # und ohne \$ (und weggelassenen End-Dominos). Dann ist J eine Lösung der ursprünglichen PCP-Instanz.

Hausaufgabe 6.4 (3 Bonuspunkte)

Sei $L := \{w_i \mid$ jede der TM $M_1, \ldots, M_i$ verwirft $w_i\}$. Zeigen oder Widerlegen Sie, dass L entscheidbar ist.

Entscheidbar: Sei M_j eine TM, die jede Eingabe akzeptiert.
Für $i \geq j$ gilt, dass TM M_j die Eingabe w_i nicht verwirft, also dass nicht jede TM $M_1, \ldots, M_k$ die Eingabe w_i verwirft
Daher gilt für alle $i \geq j$, dass $w_i \notin L$. Die Sprache L ist also endlich und damit entscheidbar.