Effiziente Algorithmen (SS2015)
Kapitel 7
Approximation II

Walter Unger

Lehrstuhl für Informatik 1

14:11 Uhr, den 19. Dezember 2018

Inhalt I

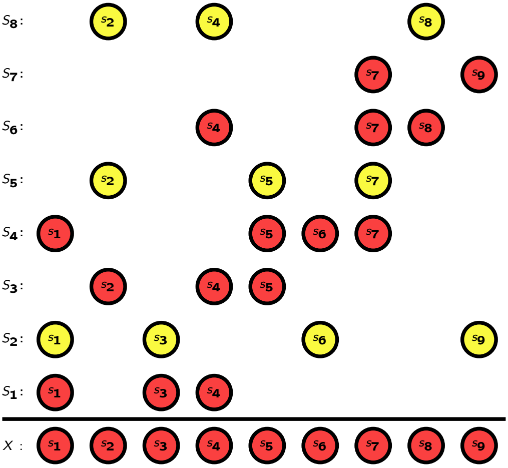
Definition

Definition (Set-Cover-Problem)

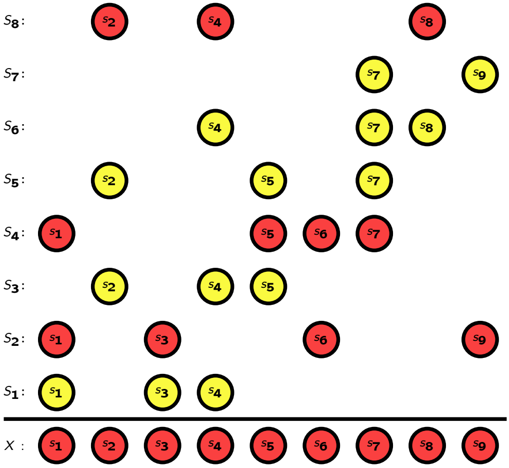
- Grundmenge X mit n Elementen.
- m Teilmengen $S_1, S_2, \ldots, S_m$ mit $\cup_{i \in \{1,2,\ldots,m\}} S_i = X$.
- Für jede Menge S_i einen Kostenwert $c_i \in \mathbb{Q}$.
- Gesucht ist:
  - $A \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ mit
  - $\cup_{i \in A} S_i = X$ und
  - $\mathrm{cost}(A) = \sum_{i \in A} c_i$ ist minimal.

- Grundmenge soll also kostengünstig überdeckt werden.
- Beispiel: Kostengünstiges Arbeitsteam, welche alle nötigen Fähigkeiten hat.
- Entspricht dem Vertex-Cover-Problem auf Hypergraphen (Hitting-Set-Problem).

Beispiel (Kosten: 5)



Beispiel nochmal (Kosten: 3)

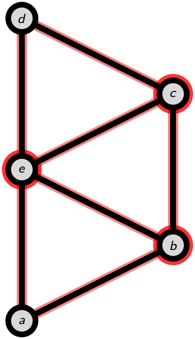


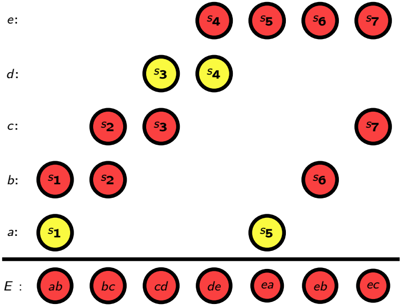
Komplexität

Theorem

Die Entscheidungsvariante vom Set-Cover-Problem ist in $\mathcal{NPC}$.

Beweis: Einfache Reduktion vom Vertex-Cover-Problem:





Idee zum Set-Cover-Problem

Das Set-Cover-Problem ist, wie man sieht, eine Verallgemeinerung des Vertex-Cover Problems. Diesmal gibt es aber kein hilfreiches Analogon zu einem Matching.

Daher versuchen wir einen Greedy-Ansatz. Wir werden dabei nur einen Approximationsfaktor von H_n (n-te Harmonische Zahl) erreichen. Aber das ist auch das Beste, was man für das Set-Cover-Problem erreichen kann.

Bei dem Greedy-Verfahren wählt man die Menge, die möglichst geringe Kosten pro neu überdecktes Element hat.

Eine möglichst schlechte Eingabe für dieses Greedy-Verfahren erhält man, indem man für jedes Element der Grundmenge eine einelementige Überdeckungsmenge wählt und eine Überdeckungsmenge, die gleich der Grundmenge ist.

Die einelementigen Überdeckungsmengen haben die folgenden Kosten $1/n, 1/(n-1), 1/(n-1), \dots, 1/3, 1/2, 1$. Die vollständige Überdeckungsmenge hat Kosten > 1. Damit werden vom Greedy-Verfahren alle einelementigen Überdeckungsmengen gewählt.

Aufbau der Idee

- Das Set-Cover-Problem hat wenig Struktur, die man nutzen könnte.
- Einzige Idee: versuche viele Elemente kostengünstig abzudecken.
- Oder: versuche die Kosten pro Element klein zu halten.
- Also werden wir einen Greedy-Algorithmus entwickeln.
- Auswahl der Menge S_i über:

$$\frac{\text{Kosten von } S_i}{\text{Anzahl der von } S_i \text{ neu überdeckten Elemente}}$$

- Wähle Menge S_i, wo obiger Ausdrucke minimal ist.

Greedy-Algorithmus

1. Eingabe $X, S_1, S_2, \ldots S_m$.
2. Setze $A = \emptyset$.
3. Solange $\cup_{j \in A} S_j \neq X$ wiederhole:
   1. Bestimme für alle $i \in \{1, 2, \cdots, m\} \setminus A$:
   $$r_A(i) = \frac{c_i}{|S_i \setminus \cup_{j \in A} S_j|}.$$
   2. Wähle i mit $r_A(i)$ minimal.
   3. Setze $A = A \cup \{i\}$.

Analyse

- Verteile die Kosten bei der Wahl einer Menge S_i auf die Elemente, die durch S_i neu überdeckt werden.
- D.h. in jeder Schleife erhält jedes dieser Elemente den folgenden Wert zugeordnet:

$$\frac{c_i}{|S_i \setminus \cup_{j \in A} S_j|} = r_A(i)$$

- Nun betrachten wir einzeln die hinzugefügten Elemente.
- Sei also für $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ x_k das k-te Element.
- Seien weiter $c(x_k)$ die relativen Kosten, die x_k zugeordnet worden sind.

Lemma

Für $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ gilt $c(x_k) \leqslant opt/(n-k+1)$, wobei opt die Kosten eines optimalen Set-Covers sind.

Beweis

- Sei A die Auswahl, die vorher gewählt wurde.
- Sei weiter $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ der Index der Menge S_i, die x_k erstmalig abdeckt.
- Nun schätzen wir *opt* ab:
  - Für $j \in \{1, 2, \cdots, n\} \setminus A$ gilt: $r_A(j) \geqslant r_A(i)$.
  - Setze: $X' = X \setminus \cup_{j \in A} S_j$, d.h. X' ist noch nicht abgedeckt.
  - Kein Element $j \in X'$ kann mit relativen Kosten kleiner als $r_A(i)$ abgedeckt werden.
  - Damit ist die Summe der relativen Kosten von X' mindestens: $(n-k+1) \cdot r_A(i)$.
  - Jede mögliche Auswahl, die X' abdeckt, hat damit Kosten von mindestens: $(n-k+1) \cdot r_A(i)$.
- Damit gilt: $opt \geqslant (n-k+1) \cdot r_A(i) = (n-k+1) \cdot c(x_k)$ und

$$c(x_k) \leqslant opt/(n-k+1).$$

Güte der Approximation

$c(x_k) \leqslant opt/(n - k + 1)$

Theorem

Der Greedy Algorithmus hat einen Approximationsfaktor von höchstens H_n.

- H_n ist die n-te Harmonische Zahl.
- $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.
- Es gilt: $\log(n+1) \leqslant H_n \leqslant \log n + 1$.
- Beweis des Theorems:
    - Bilde Summe über alle Elemente.
    - Nutze obiges Lemma:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{opt}{n-i+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{opt}{i} = opt \cdot H_n.$$

Frage: wie gut ist die Abschätzung

- Suche ein schlechtes Beispiel für obigen Algorithmus.
- Erinnerung: $r_A(i) = \frac{c_i}{|S_i \setminus \cup_{j \in A} S_j|}$.
- Fehler soll möglichst groß sein:
  - Greedy Lösung: $A = \{1, 2, \ldots, m-1\}$
  - Optimale Lösung $opt = \{m\}$
  - Daher $S_m = \{1, 2, \ldots, n\}$ und $S_i = \{i\}$ für $1 \leqslant i \leqslant n$ $(m = n+1)$.
- Nun sind noch die Kosten zu wählen:
- Setze $c_m = 1$.
- Damit gilt: $r_\emptyset(m) = \frac{1}{|S_i \setminus \cup_{i \in A} S_i|} = \frac{1}{|\{1,2,\ldots,n\}|} = \frac{1}{n}$.
- Damit der Algorithmus S_1 wählt, muss gelten: $r_\emptyset(1) < \frac{1}{n}$.
- Damit gilt: $r_{\{1\}}(m) = \frac{1}{|S_i \setminus \cup_{i \in A} S_i|} = \frac{1}{|\{2,3,\ldots,n\}|} = \frac{1}{n-1}$.
- Damit der Algorithmus S_2 wählt, muss gelten: $r_{\{1\}}(2) < \frac{1}{n-1}$.
- Damit gilt: $r_{\{1,2\}}(m) = \frac{1}{|S_i \setminus \cup_{i \in A} S_i|} = \frac{1}{|\{3,4,\ldots,n\}|} = \frac{1}{n-2}$.
- Damit der Algorithmus S_3 wählt, muss gelten: $r_{\{1,2\}}(3) < \frac{1}{n-2}$.
- Zur Vereinfachung wählen wir im Folgenden: $c_m = 1 + \varepsilon$.

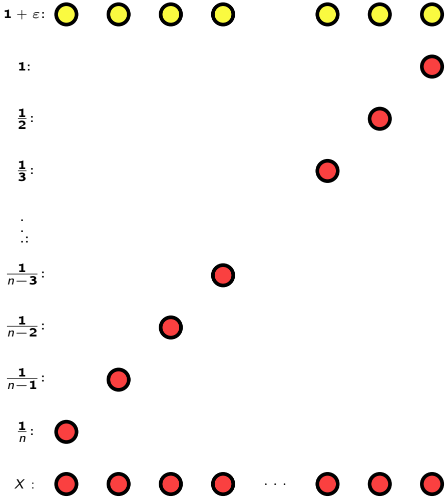
Frage: wie gut ist die Abschätzung

- Suche ein schlechtes Beispiel für obigen Algorithmus.
- Erinnerung: $r_A(i) = \frac{c_i}{|S_i \setminus \cup_{j\in A} S_j|}$.
- Fehler soll möglichst groß sein:
  - Greedy Lösung: $A = \{1, 2, \ldots, m-1\}$
  - Optimale Lösung $opt = \{m\}$
  - Daher $S_m = \{1, 2, \ldots, n\}$ und $S_i = \{i\}$ für $1 \leqslant i \leqslant n$ $(m = n+1)$.
- Nun sind noch die Kosten zu wählen:
- Setze $c_m = 1{+}\varepsilon$.
- Damit gilt: $r_\emptyset(m) = \frac{1}{|S_i \setminus \cup_{i\in A} S_i|} = \frac{1}{|\{1,2,\ldots,n\}|} = \frac{1+\varepsilon}{n}$.
- Damit der Algorithmus S_1 wählt, muss gelten: $r_\emptyset(1) \leqslant \frac{1}{n}$.
- Damit gilt: $r_{\{1\}}(m) = \frac{1}{|S_i \setminus \cup_{i\in A} S_i|} = \frac{1}{|\{2,3,\ldots,n\}|} = \frac{1+\varepsilon}{n-1}$.
- Damit der Algorithmus S_2 wählt, muss gelten: $r_{\{1\}}(2) \leqslant \frac{1}{n-1}$.
- Damit gilt: $r_{\{1,2\}}(m) = \frac{1}{|S_i \setminus \cup_{i\in A} S_i|} = \frac{1}{|\{3,4,\ldots,n\}|} = \frac{1+\varepsilon}{n-2}$.
- Damit der Algorithmus S_3 wählt, muss gelten: $r_{\{1,2\}}(3) \leqslant \frac{1}{n-2}$.

Beispiel zur Abschätzung der Güte

- Damit erhalten wir das folgende schlechte Beispiel für obigen Algorithmus:
  - $X = \{1, 2, \ldots, n\}$
  - $S_m = \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $m = n + 1$.
  - $S_i = \{i\}$ für $1 \leqslant i \leqslant n$.
  - Setze $c_m = 1 + \varepsilon$.
  - Setze $c_i = \frac{1}{n-i+1}$.
- Damit gilt für dieses Beispiel:
  - Der Greedy Algorithmus wird nacheinander die Mengen $S_1, S_2, \ldots, S_n$ wählen.
  - Die optimale Lösung beinhaltet nur S_m.

Beispiel zur Güte



- $r_A(i) = \frac{c_i}{|S_i \setminus \cup_{i \in A} S_i|}$.
- $r_C(i+1) = \frac{1+\varepsilon}{n-|C|} = \frac{1}{n-|C|} + \delta$.
- $r_\emptyset(1) = \frac{1/n}{1} = \frac{1}{n}$
- $r_1(2) = \frac{1/(n-1)}{1} = \frac{1}{n-1}$
- $r_{1,2}(3) = \frac{1/(n-2)}{1} = \frac{1}{n-2}$
- $r_{1,2,3}(4) = \frac{1/(n-3)}{1} = \frac{1}{n-3}$
- $r_{1,2,\ldots,n-3}(n-2) = \frac{1/3}{1} = \frac{1}{3}$
- $r_{1,2,\ldots,n-2}(n-1) = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$
- $r_{1,2,\ldots,n-1}(n) = \frac{1}{1} = 1$

Güte der Approximation

Theorem

Der Greedy Algorithmus hat einen Approximationsfaktor von höchstens H_n.

Theorem

Es gibt eine Instanz, worauf der Greedy Algorithmus einen Approximationsfaktor von $(1-\varepsilon) \cdot H_n$ erreicht (für $\varepsilon > 0$).

Theorem (Feige 1995)

Es gibt keinen Algorithmus mit Approximationsfaktor $(1-\varepsilon) \cdot H_n$ für das Set-Cover-Problem, es sei denn $\mathcal{NP} = TIME(n^{O(\log\log n)})$.

Folgerung:

Damit ist dieser einfache Greedy Algorithmus der beste, der möglich ist.

Motivation

- Verteilung von Aufgaben
- Aufgaben sind nicht teilbar (ansonsten wäre es zu einfach).
- Alle Aufgaben sollen möglichst schnell fertig werden.
- Beispiel
  - Vor einer Party gibt es viele Arbeiten zu machen.
  - Wenn jemand eine Arbeit hat, gibt er sie nicht mehr her.
  - Erst wenn alle Arbeiten erledigt sind, fängt die Party an.

Definition

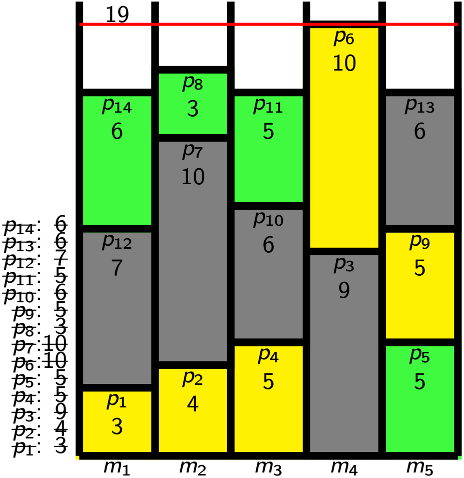
Definition (Scheduling auf identischen Maschinen)

Das Makespan Scheduling Problem auf identischen Maschinen:

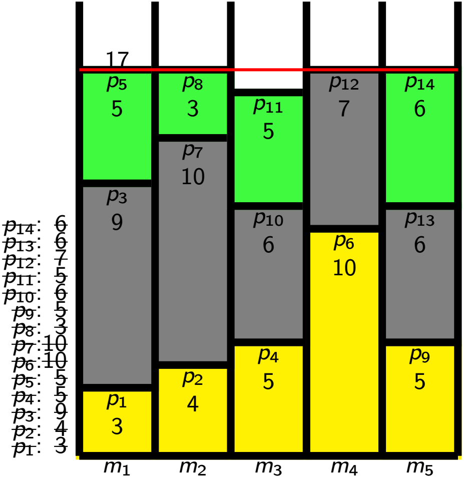
- Gegeben:
  - $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$ (d.h. n Jobs der Länge p_i).
  - $m \in \mathbb{N}$ (d.h. m identische Maschinen).
- Gesucht:
  - $f : \{1, 2, \ldots, n\} \mapsto \{1, 2, \ldots, m\}$,
    (d.h. Zuweisung der Jobs auf Maschinen).
  - Mit $\max_{j \in \{1,2,\ldots,m\}} \sum_{i \in \{1,2,\ldots,n\} \wedge f(i)=j} p_i$ ist minimal.

- Die Funktion f gibt den Ablaufplan (Schedule) an.
- Da die Jobs keine Fertigstellungszeit (Deadline) haben, ist die Abarbeitungsfolge der Jobs auf einer Maschine beliebig.
- O.B.d.A.: $n > m$.

Einfaches Beispiel



Zweiter Versuch am einfachen Beispiel



Komplexität

- Das Problem ist in $\mathcal{NPC}$. Einfache Reduktion von Subset-Sum-Problem:
  - Gegeben: b_i für $1 \leqslant i \leqslant n$.
  - Frage: $\exists I \subset \{1, 2, \ldots n\}$ mit: $\sum_{i \in I} b_i = \sum_{i \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus I} b_i$.
- Das ist das Makespan Scheduling Problem für zwei identische Maschinen.
- Gesucht ist ein Makespan von $\sum_{i \in \{1,2,\ldots,n\}} b_i/2$.

Erste Ideen

Wir werden zuerst zwei einfache Ideen zur Approximation des Scheduling Problems betrachten. Dabei werden wir sehen, daß diese schon gute Approximationsfaktoren abliefern.

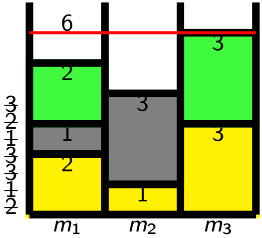
Das erste Verfahren verteilt die Jobs in einer beliebigen Reihenfolge auf die Maschine, die aktuell die jeweils kleinste Last hat. Hier erkennt man recht schnell einen Approximationsfaktor von 2. Dabei wird als untere Schanke die Größe des größten Jobs verwendet.

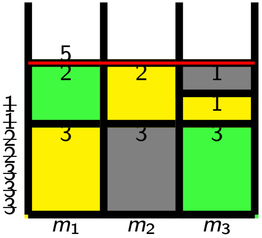
Danach verteilen wir die Jobs absteigend sortiert nach ihrer Größe auf die Maschine mit der aktuell geringsten Last. Hier sieht man recht schnell, daß das Verfahren optimal ist, solange maximal zwei Jobs auf jeder Maschine zugewiesen werden. Hier wird als untere Schranke nun die durchschnittliche Belastung einer Maschine genutzt. Da das Verfahren optimal ist, solange maximal zwei Jobs auf jeder Maschine zugewiesen werden und die Jobs in absteigender Reihenfolge zugewiesen werden, wird der Approximationsfaktor durch einen der großen verbleibenden Jobs bestimmt. Hier erkennt man recht schnell, ein Job der Größe von maximal $1/3$ von Optimum bestimmt den maximalen Approximationsfaktor $(4/3)$.

Heuristik 1

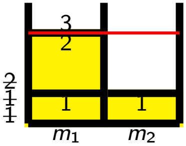
Heuristik: Least Loaded (LL)

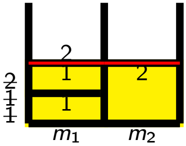
1. Wähle die Maschine, die bisher die kleinste Last hat:
2. Für k von 1 bis n mache:
   1. Wähle j mit $\sum_{i \in \{1,2,\ldots,k-1\} \wedge f(i)=j} p_i$ ist minimal.
   2. Setze $f(k) = j$.

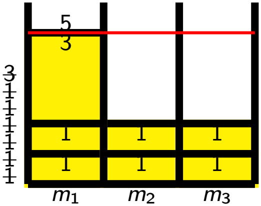


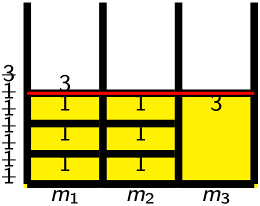


Beispiel zu Heuristik 1 (2,3 Maschinen)

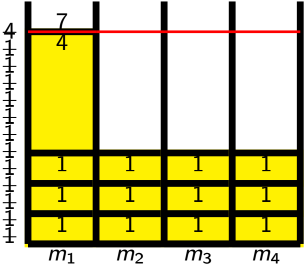


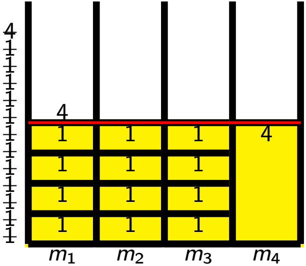






Beispiel zu Heuristik 1 (4 Maschinen)





Das Beispiel formal

- Konstruiere allgemeines Beispiel:
  - Setze $n = m \cdot (m-1) + 1$.
  - Für $i \in \{1, 2, \ldots, m \cdot (m-1)\}$ setze: $p_i = 1$.
  - Setze weiter: $p_{m \cdot (m-1)+1} = m$.
- Die obigen Beispiele zeigen:
  - Optimale Makespan ist m.
    - Auf $m-1$ Maschinen brauchen Jobs $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ Zeit m.
    - Der Job n braucht auf Maschine m auch m Zeit.
  - Die LL-Heuristik liefert einen Makespan von $2 \cdot m - 1$.
    - Auf m Maschinen brauchen $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ Zeit $m-1$.
    - Der Job n braucht auf einer Maschine noch zusätzlich m Zeit.
- Damit ist der Approximationsfaktor von der LL-Heuristik bestenfalls:

$$\frac{2 \cdot m - 1}{m} = 2 - \frac{1}{m}.$$

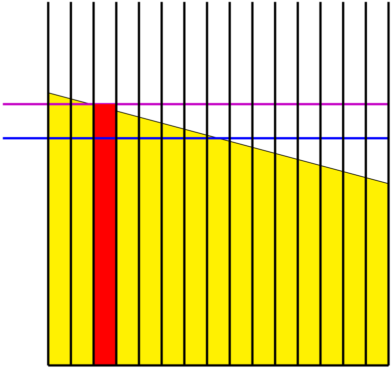
Approximationsgüte von Heuristik 1

Theorem

Die LL-Heuristik hat einen Approximationsfaktor von $(2 - 1/m)$.

Beweis:

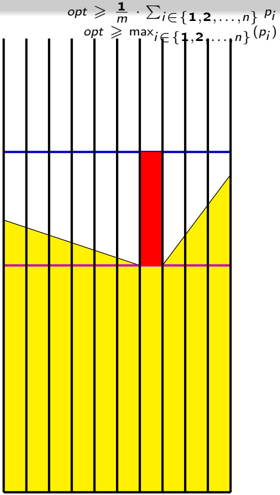
- Die folgenden einfachen Schranken gelten:
  - $opt \geqslant \max_{i \in \{1,2,\ldots,n\}}(p_i)$.
  - $opt \geqslant \frac{1}{m} \cdot \sum_{i \in \{1,2,\ldots,n\}} p_i$.
- Betrachte nun den Job, der als letzter fertig wird und
- die Situation, bevor er verteilt wurde.



Approximationsgüte von Heuristik 1

- Sei i' der Job, der als letzter fertig wird und $j' = f(i')$.
- Als der Job i' auf j' gelegt wurde, war aktuelle Last von j' minimal.
- Die Last war höchstens: $1/m \sum_{i \in \{1,2,\ldots,i'-1\}} p_i$.
- Damit kann der Makespan wie folgt abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}
& p_{i'} + \frac{1}{m} \sum_{i \in \{1,2,\ldots,i'-1\}} p_i \\
= \quad & (1 - \tfrac{1}{m}) \cdot p_{i'} + \frac{1}{m} \cdot \sum_{i \in \{1,2,\ldots,i'\}} p_i \\
\leqslant \quad & (1 - \tfrac{1}{m}) \cdot opt + opt \\
\leqslant \quad & (2 - \tfrac{1}{m}) \cdot opt.
\end{aligned}$$

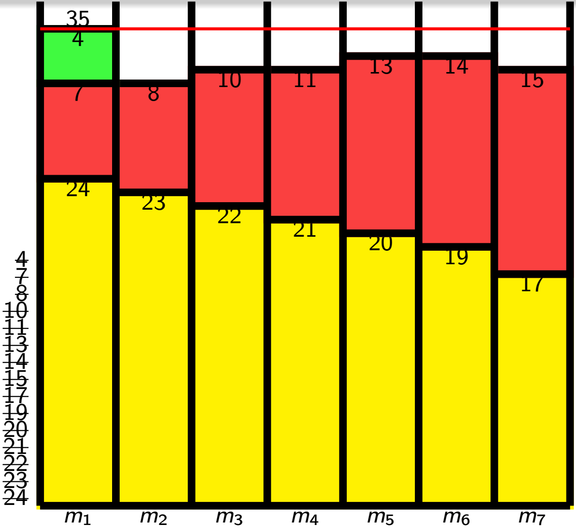


Heuristik 2

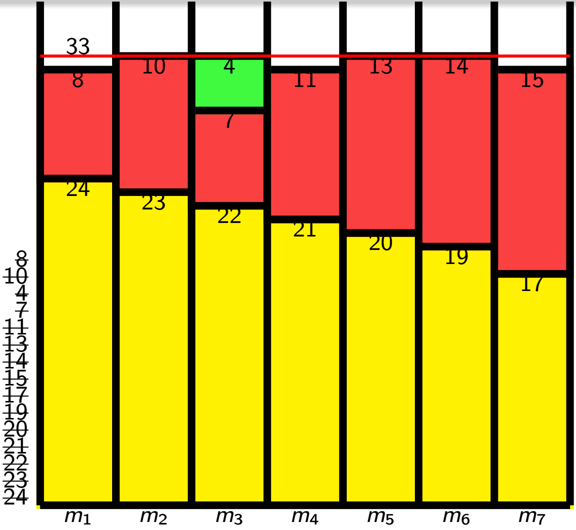
Heuristik: Longest Processing Time (LPT)

1. Wähle für den längsten Job die Maschine, die bisher die kleinste Last hat:
2. Sei $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_n$.
3. Für k von 1 bis n mache:
   1. Wähle j mit $\sum_{i \in \{1,2,\ldots,k-1\} \wedge f(i)=j} p_i$ ist minimal.
   2. Setze $f(k) = j$.

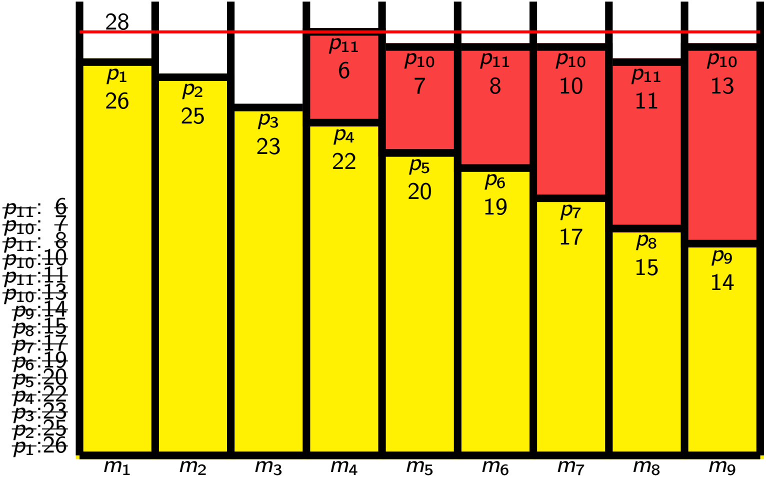
Beispiel zu Heuristik 2



Bessere Lösung des Beispiels



Beispiel zu Heuristik 2 (Nur zwei Jobs pro Maschine)



Approximation Heuristik 2

Theorem (Graham 1969)

Die LPT Heuristik hat einen Approximationsfaktor von $4/3$.

Beweis durch Widerspruch:

- Angenommen, es gibt Eingabeinstanz $p_1, p_2, \ldots, p_n$ auf m Maschinen, mit einem Makespan von $\tau > 4/3 \cdot opt$ und n minimal gewählt.
- Seien $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_n$.
- Da n minimal gewählt wurde, ist n der Job, der als letzter fertig wird.
- Der Job n wurde auf die am wenigsten belastete Maschine platziert.
- Zu diesem Zeitpunkt war die Last der Maschine höchstens:

$$\frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} p_i \leqslant opt.$$

- Damit nun im nächsten Schritt ein Faktor von τ auftritt muss gelten:

$$p_n > 1/3 \cdot opt.$$

Beweis

$p_n > \frac{1}{3} \cdot opt$

- Wegen der Sortierung der Jobs gilt damit: $\forall i : p_i > \frac{1}{3} \cdot opt$.
- Also passen höchstens zwei Jobs auf jede Maschine.
- Es gibt daher auch höchstens $n \leqslant 2 \cdot m$ Jobs.
- Damit ist aber folgende Platzierung optimal:
- Platziere Job i für $i \leqslant m$ auf Maschine i.
- Platziere Job i für $i > m$ auf Maschine $2 \cdot m - i + 1$.
- Das ist aber die Platzierung von der LPT Heuristik.
- Widerspruch.

Überblick zur Idee

Unser Ziel ist es, für das Scheduling auf identischen Maschinen einen besseren Approximationsfaktor zu erzielen. Die Idee wird sein, die Anzahl möglicher Joblängen zu reduzieren. Dazu werden einige Jobs künstlich länger gemacht. Damit wir nach dem Vereinheitlichen der Joblängen eine optimale Lösung effizient berechnen können, betrachten wir als Zwischenproblem das Bin Packing.

Hier ist eine endliche Anzahl von Joblängen in der Eingabe. Weiterhin ist die maximale Laufzeit auch bekannt. Und wir bestimmen nun die minimale Anzahl von Maschinen, für die es eine Lösung gibt. Da wir nur eine endliche Anzahl von Joblängen in der Eingabe haben, können wir die Eingabe und die Lösungen auf einer Maschine durch einen endlichen Vektor modellieren. Eine minimale Anzahl von Maschinen zum Scheduling der Jobs wird nun mittels dynamischer Programierung bestimmt.

Motivation und Definition

- Im nächsten Abschnitt soll das Scheduling auf identischen Maschinen mit einem beliebigen konstanten Faktor approximiert werden.
- Dabei wird die Lösung des folgenden Problems hilfreich sein.
- Bemerkung vorweg: Bin Packing entspricht einem Scheduling, bei der es eine Schranke b für den Makespan gibt.

Motivation und Definition

Definition (Bin Packing mit eingeschränkten Gewichten)

- Gegeben:
  - n Objekte: $\{1, 2, \ldots, n\}$.
  - $w_1, w_2, \ldots, w_n$ mit $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\} \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$.
  - Zwei Zahlen $m, b \in \mathbb{N}$ mit: $m \geqslant 1$ und $b \geqslant k$.
- Gesucht:
  - $z : \{1, 2, \ldots, n\} \mapsto \{1, 2, \ldots, m\}$ mit:
  - $\forall i \in \{1, 2, \ldots, m\} : \sum_{j \in \{1,2,\ldots,n\}: z(j)=i} w_j \leqslant b$.

- Die w_i sind die Gewichte der Objekte.
- Die Funktion z ist die Verteilung der Objekte auf m Bins.
- Jeder Bin kann maximal b aufnehmen.

Aussage

Theorem

Das Bin Packing Problem mit eingeschränkten Gewichten kann in Zeit $O((n+1)^k \cdot (b+1)^k/k!)$ gelöst werden.

- Die k möglichen Gewichte schränken das Problem ein.
- Zwei Objekte mit dem gleichen Gewicht sind austauschbar.
- Daher untersuche nur Lösungen nach der Anzahl der Objekte vom gleichen Gewicht.
- Nutze dynamische Programmierung.
- Untersuche die Anzahl der notwendigen Bins für n_i Objekte mit Gewicht w_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$.

Dynamische Programmierung

$O((n+\mathbf{1})^k \cdot (b+\mathbf{1})^k / k!)$

- Sei $f(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ die minimale Anzahl von Bins der Größe b, die n_i Objekte mit Gewicht w_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ aufnehmen können.
- Setze $Q = \{(q_1, q_2, \ldots, q_k) \mid f(q_1, q_2, \ldots, q_k) = 1\}$, d.h. die Gewichtskombinationen, die in einen Bin passen.
- Damit kann f rekursiv beschrieben werden:

$$f(n_1, n_2, \ldots, n_k) = 1 + \min_{(q_{\mathbf{1}}, q_{\mathbf{2}}, \ldots, q_k) \in Q} f(n_1 - q_1, n_2 - q_2, \ldots, n_k - q_k).$$

- Im Weiteren wird gezeigt, wie diese Werte bestimmt werden.
- Sei vorher: $c_i = |\{j \mid j \in \{1, 2, \ldots, n\} \wedge w(j) = i\}|$.
  D.h. c_i ist die Anzahl der Objekte mit Gewicht i.
- Das Bin Packing Problem mit eingeschränkten Gewichten hat eine Lösung genau dann, wenn:

$$f(c_1, c_2, \ldots, c_k) \leqslant m.$$

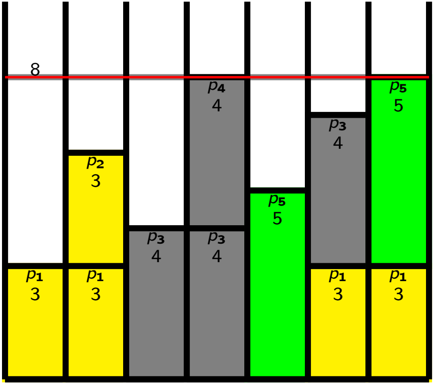
Beispiel

$O((n+1)^k \cdot (b+1)^k / k!)$

- Eingabe: $m=3,\ b=8,\ p_1=3,\ p_2=3,\ p_3=4,\ p_4=4,\ p_5=5,\ p_6=5.$
- D.h. $c_1=0, c_2=0, c_3=2,\ c_4=2,\ c_5=2.$

$$Q' = \{ (0,0,1,0,0), (0,0,2,0,0), (0,0,0,1,0), (0,0,0,2,0), (0,0,0,0,1), (0,0,1,1,0), (0,0,1,0,1) \}$$

$$Q = \{ (1,0,0),(2,0,0), (0,1,0),(0,2,0), (0,0,1),(1,1,0), (1,0,1) \}$$



Beispiel

$O((n+1)^k \cdot (b+1)^k / k!)$

- Eingabe: $m = 3$, $b = 8$, $c_3 = 2$, $c_4 = 2$, $c_5 = 2$.
- $Q = \{(1,0,0), (2,0,0), (0,1,0), (0,2,0), (0,0,1), (1,1,0), (1,0,1)\}$.

$$f(2,2,2) = 1 + \min \begin{cases} f(1,2,2) & \lceil (1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 2\cdot 5)/8 \rceil = 3 \\ f(0,2,2) & \lceil (0\cdot 3 + 2\cdot 4 + 2\cdot 5)/8 \rceil = 3 \\ f(2,1,2) & \lceil (2\cdot 3 + 1\cdot 4 + 2\cdot 5)/8 \rceil = 3 \\ f(2,0,2) & \lceil (2\cdot 3 + 0\cdot 4 + 2\cdot 5)/8 \rceil = 2 \\ f(2,2,1) = 3 & \lceil (2\cdot 3 + 2\cdot 4 + 1\cdot 5)/8 \rceil = 3 \\ f(1,1,2) & \lceil (1\cdot 3 + 1\cdot 4 + 2\cdot 5)/8 \rceil = 3 \\ f(1,2,1) & \lceil (1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 1\cdot 5)/8 \rceil = 2 \end{cases}$$

- Damit gilt $f(2,2,2) \leqslant 4$.
- Und weiter $3 \leqslant f(2,2,2) \leqslant 4$.
- Untersuche nun ob $f(2,0,2) = 2$ gilt.
- Nur wenn $f(2,0,2) \geqslant 3$ gilt, dann untersuche auch $f(1,2,1)$.

Beispiel

$O((n+1)^k \cdot (b+1)^k / k!)$

- Eingabe: $m=3,\ b=8,\ c_3=2,\ c_4=2,\ c_5=2$.
- $Q=\{(1,0,0),(2,0,0),(0,1,0),(0,2,0),(0,0,1),(1,1,0),(1,0,1)\}$.
- $f(2,2,2)=1+\min\{3, f(2,0,2), f(1,2,1)\}$

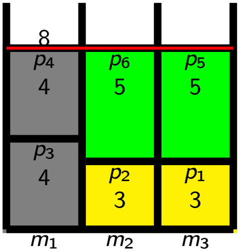
$$f(2,0,2)=1+\min\begin{cases} f(1,0,2) & \lceil(1\cdot 3+2\cdot 5)/8\rceil = 2\\ f(0,0,2) & \lceil(0\cdot 3+2\cdot 5)/8\rceil = 2\\ f(2,0,2) & \text{Keine Lösung}\\ f(2,0,2) & \text{Keine Lösung}\\ f(2,0,1) & \lceil(1\cdot 3+1\cdot 5)/8\rceil = 2\\ f(1,0,2) & \lceil(1\cdot 3+2\cdot 5)/8\rceil = 2\\ f(1,0,1)=1 & \lceil(1\cdot 3+1\cdot 5)/8\rceil = 1 \end{cases}$$

- Damit gilt $f(2,0,2)=2$.
- Und damit auch $f(2,2,2)=3$.

Beispiel

$O((n+1)^k \cdot (b+1)^k / k!)$

- Eingabe: $m = 3,\ b = 8,\ c_3 = 2,\ c_4 = 2,\ c_5 = 2.$
- $p_1 = 3,\ p_2 = 3,\ p_3 = 4,\ p_4 = 4,\ p_5 = 5,\ p_6 = 5.$
- $Q = \{(1,0,0),(2,0,0),(0,1,0),(0,2,0),(0,0,1),(1,1,0),(1,0,1)\}.$
- $f(2,2,2) = 1 + \min\{3, f(2,0,2), f(1,2,1)\}$
- $f(2,0,2) = 1 + \min\{2, f(1,0,1)\}$
- $f(1,0,1) = 1$



Dynamische Programmierung

$O((n+\mathbf{1})^k \cdot (b+\mathbf{1})^k/k!)$

- Parameter für f sind alle Tupel aus $\{0,1,\ldots,n\}^k$.
- Speichere Werte für f in einer Tabelle der Größe $(n+1)^k$.
- Löse mittels Dynamischer Programmierung.
- Laufzeitanalyse:
  - Es sind $(n+1)^k$ viele Tabelleneinträge zu berechnen.
  - Jeder Tabelleneintrag kostet Zeit $O(|Q|)$.
  - Falls $(q_1, q_2, \ldots, q_k) \in Q$, dann gilt $q_i \in \{0,1,\ldots,\lfloor b/i \rfloor\}$ für $i \in \{1,2,\ldots k\}$.
  - Damit passen auch nicht mehr als $\lfloor b/i \rfloor$ Objekte in dieselbe Box.
  - Daraus folgt: $|Q| \leqslant (b+1)^k/k!$.

Motivation

- Bisher zwei gute einfache Heuristiken
- Frage: wie gut können wir das Scheduling Problem auf identischen Maschinen approximieren?
- Frage: gibt es da ggf. eine untere Schranke, oder kommen wir beliebig nah an das Optimum heran?
- Antwort: wir kommen beliebig nah an das Optimum, d.h.:
  - Gegeben sei ein beliebiges kleines konstantes Epsilon ε.
  - Dann gibt es einen Polynomzeit-Algorithmus, der bis auf einen Faktor von $1 + \varepsilon$ approximiert.
  - Wichtig hier: die Laufzeit hängt von ε ab.

Definition

Definition (PTAS)

Ein Optimierungsproblem Π hat ein polynomielles Approximationsschema, falls es für jedes konstante $\varepsilon > 0$ eine $(1+\varepsilon)$-Approximation in polynomieller Zeit berechnet werden kann (Bei einem Maximierungsproblem: $(1-\varepsilon)$).

Definition (FPTAS)

Ein Optimierungsproblem Π hat ein voll polynomielles Approximationsschema, falls es für jedes konstante $\varepsilon > 0$ eine $(1+\varepsilon)$-Approximation in polynomieller Zeit in der Eingabegröße und $1/\varepsilon$ berechnet werden kann (Bei einem Maximierungsproblem: $(1-\varepsilon)$).

- Das Makespan Scheduling Problem ist stark $\mathcal{NP}$-hart.
- Daher kann das Makespan Scheduling Problem kein FPTAS haben.

Idee

Um das vorgestellte spezielle Binpacking zu nutzen, muss eine Eingabeinstanz von Schelduling umgeformt werden. Damit müssen Eingabewerte p_i von einem Bereich $1, \ldots, \max_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i$ auf einen Bereich $1, \ldots, k$ abgebildet werden.

Daher müssen wir die p_i abbilden auf $p_i' = p_i \cdot k / \max_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i$. Diese p_i' Werte sind dann aber keine ganzen Zahlen, also sollten wir besser p_i abbilden auf $p_i' = \lceil p_i \cdot k / \max_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i \rceil$.

Wir können aber direkt $k / \max_{1 \leqslant i \leqslant n} p_i$ als Faktor nutzen, denn bei diesem PTAS wollen wir den optimalen Makespan um einen Faktor $1 + \varepsilon$ approximieren (Siehe Folie: 48).

Bei dieser Skalierung treten aber noch zwei Probleme auf:

- Der genutzte Faktor ist vom optimalen Makespan abhängig.
- Wenn die sehr kleinen Jobs auch skaliert werden, dann tritt ein zu großer relativer Fehler auf.

Daher wird das optimale Makespan per Binärsuche eingegrenzt, und die sehr kleinen Jobs werden gesondert behandelt.

Aufbau der Idee

- Teile die Jobs in große und kleine Jobs auf: G und K.
- Die Gewichte der großen Jobs werden verändert.
  - Herunterskaliert und geringfügig vergrößert.
  - Dabei wird ein Fehler von ε in Kauf genommen.
  - Dadurch wird der obige Algorithmus für Bin Packing anwendbar.
- Die kleinen Jobs aus K werden in der zweiten Phase mittels Heuristik verteilt.
  - Da diese klein sind, werden sie nur einen kleinen Fehler erzeugen.
- Problem dabei:
  - Aufteilung nutzt das optimale Makespan.
  - Skalierung nutzt das optimale Makespan.
- Lösung: Approximiere das optimale Makespan mittels Binärsuche.

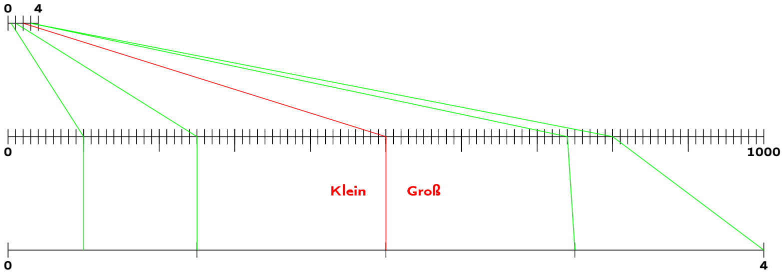
Algorithmus

1. Ein Orakel liefert Z, den Wert des optimalen Makespan.
2. Phase 1:
   1. Betrachte die großen Jobs: $G = \{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid p_i > \varepsilon Z\}$.
   2. Skaliere die Größe der Jobs aus G:
   $$p'_i = \left\lceil \frac{p_i}{\varepsilon^2 Z} \right\rceil$$
   3. Bestimme Schedule mit Jobgrößen p'_i mit Makespan
   $$Z' = \left\lfloor (1+\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon^2} \right\rfloor.$$
3. Phase 2:
   1. Betrachte die kleinen Jobs: $K = \{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid p_i \leqslant \varepsilon Z\}$.
   2. Verteile die Jobs aus K nach der LL Heuristik.

Beispiel zur Skalierung (1/2)

Klein: $p_i \leqslant \varepsilon Z$
Groß: $p_i > \varepsilon Z$
Skalierung: $\lceil p_i/(\varepsilon^2 Z) \rceil$

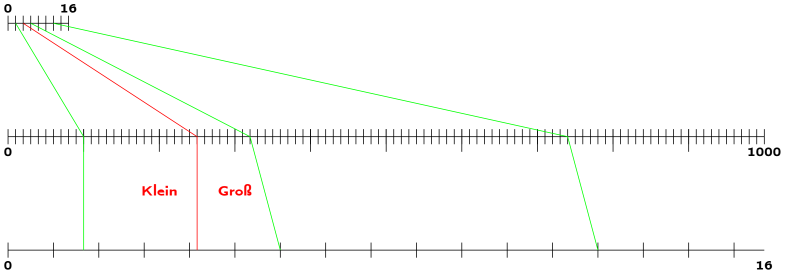
- $Z = 1000$ und $\varepsilon = 1/2$.
- Skalierung: $\{0, \ldots, 1000\} \mapsto \{0, \ldots, 4\}$



Beispiel zur Skalierung (1/4)

Klein: $p_i \leqslant \varepsilon Z$
Groß: $p_i > \varepsilon Z$
Skalierung: $\lceil p_i/(\varepsilon^2 Z) \rceil$

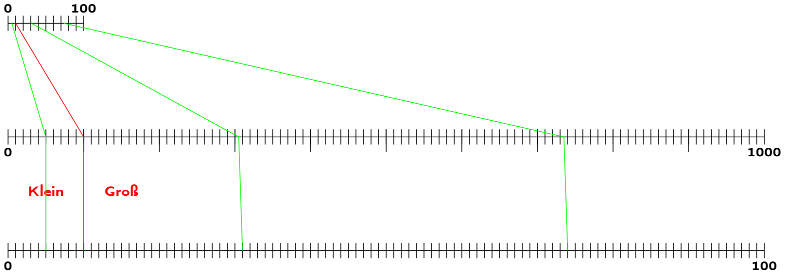
- $Z = 1000$ und $\varepsilon = 1/4$.
- Skalierung: $\{0, \ldots, 1000\} \mapsto \{0, \ldots, 16\}$



Beispiel zur Skalierung (1/10)

Klein: $p_i \leqslant \varepsilon Z$
Groß: $p_i > \varepsilon Z$
Skalierung: $\lceil p_i/(\varepsilon^2 Z) \rceil$

- $Z = 1000$ und $\varepsilon = 1/10$.
- Skalierung: $\{0, \ldots, 1000\} \mapsto \{0, \ldots, 100\}$



Phase 1 (Beispiel zur Skalierung)

$p_i' = \lceil p_i/(\varepsilon^2 Z) \rceil$

- Sei $Z = 1000$ und $\varepsilon = 0.1$.
- Dann ist $p_i'' = \frac{p_i}{\varepsilon^2 Z} = \frac{p_i}{\varepsilon^2 1000} = \frac{p_i}{10}$.
- Dann ist $p_i' = \left\lceil \frac{p_i}{\varepsilon^2 Z} \right\rceil = \left\lceil \frac{p_i}{\varepsilon^2 1000} \right\rceil = \left\lceil \frac{p_i}{10} \right\rceil$.
- Sei beispielsweise $p_i = 101$.
  - Beispiel: $p_i'' = \frac{101}{\varepsilon^2 Z} = \frac{101}{10} = 10.1$.
  - Beispiel: $p_i' = \left\lceil \frac{101}{\varepsilon^2 Z} \right\rceil = \left\lceil \frac{101}{10} \right\rceil = \lceil 10.1 \rceil = 11$.
- Damit ist für dieses Beispiel der relative Rundungsfehler:

$$\frac{p_i' - p_i''}{p_i''} = \frac{11 - 10.1}{10.1} = \frac{0.9}{10.1} \leqslant 0.08911 \leqslant \varepsilon$$

- Das folgende Lemma zeigt, dass das im Allgemeinen gilt.

Phase 1 (Beweis zur Skalierung)

$p'_i = \lceil p_i/(\varepsilon^2 Z) \rceil$

Lemma

Der relative Rundungsfehler $\frac{p'_i - p''_i}{p''_i}$ *ist höchstens* ε.

Beweis

- Sei $i \in G$ ein großer Job, d.h. $p_i \geqslant \varepsilon Z$.
- Damit gilt:

$$p''_i \geqslant \frac{\varepsilon Z}{\varepsilon^2 Z} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

- Daraus und wegen $p'_i - p''_i \leqslant 1$ folgt nun:

$$\frac{p'_i - p''_i}{p''_i} \leqslant \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon.$$

Folgerung:

Das Aufrunden der skalierten Größen verändert diese um maximal einen Faktor von $1 + \varepsilon$.

Phase 1 (Beweis der Existenz eines Schedule)

$Z' = \lfloor (1+\varepsilon)/(\varepsilon^2) \rfloor, \quad p_i' = \lceil p_i/(\varepsilon^2 Z) \rceil$

Lemma

Auch für die veränderten Werte p_i' und Z' gibt es ein korrektes Schedule.

Beweis:

- Für p_i und Z gibt es ein Schedule.
- Damit gibt es auch ein Schedule für:

$$p_i'' = p_i/(\varepsilon^2 Z) \text{ und } Z'' = Z/(\varepsilon^2 Z) = 1/\varepsilon^2.$$

- Durch das Aufrunden erhöht sich der Makespan höchstens um einen Faktor von $(1+\varepsilon)$. Also gibt es ein Schedule für:

$$p_i' = \lceil p_i/(\varepsilon^2 Z) \rceil \text{ und } Z'' = (1+\varepsilon)/\varepsilon^2.$$

- Durch das Aufrunden $p' = \lceil p'' \rceil$ ist der Makespan ganzzahlig.
- Damit gibt es ein Schedule für:

$$p_i' = \lceil p_i/(\varepsilon^2 Z) \rceil \text{ und } Z' = \lfloor (1+\varepsilon)/\varepsilon^2 \rfloor.$$

Phase 1 (Anwendung von Bin Packing)

$Z' = \lfloor (1+\varepsilon)/(\varepsilon^2) \rfloor, \quad p'_i = \lceil p_i/(\varepsilon^2 Z) \rceil$

Lemma

Die Werte k und b für die Anwendung des Bin Packing Algorithmus sind:

$$k = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rceil \text{ und } b = Z' = \left\lfloor \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon^2} \right\rfloor .$$

Beweis:

- Die maximale Jobgröße ist Z.
- Damit ist die maximale Größe nach der Skalierung: $\lceil Z/(\varepsilon^2 Z) \rceil = \lceil 1/\varepsilon^2 \rceil$.
- Dass $b = Z'$ gilt, ist klar.

Folgerung

Die Laufzeit ist: $O((n+1)^k \cdot (b+1)^k / k!) = O(n^{\lceil 1/\varepsilon^2 \rceil})$.

Approximationsfaktor

$Z' = \lfloor (\mathbf{1} + \varepsilon)/(\varepsilon^{\mathbf{2}}) \rfloor, \quad p'_i = \lceil p_i/(\varepsilon^{\mathbf{2}} Z) \rceil$

Lemma

Der obige Algorithmus bestimmt eine $(1+\varepsilon)$-Approximation für einen minimalen Makespan.

Beweis:

- Betrachte Jobs aus G (Phase 1):
  - Der Makespan Z' kann höchstens um einen Faktor von $\varepsilon^2 \cdot Z$ größer sein.
  - Damit ist der Makespan für die Jobs aus G:

$$Z' \cdot \varepsilon^2 \cdot Z = \left\lfloor \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon^2} \right\rfloor \cdot \varepsilon^2 \cdot Z \leqslant (1+\varepsilon)Z.$$

  - Das ist eine $(1+\varepsilon)$-Approximation.
- Betrachte Jobs aus K (Phase 2) auf der nächsten Folie.

Approximationsfaktor

$Z' = \lfloor (1+\varepsilon)/(\varepsilon^2) \rfloor, \quad p_i' = \lceil p_i/(\varepsilon^2 Z) \rceil$

Lemma

Der obige Algorithmus bestimmt eine $(1+\varepsilon)$-Approximation für einen minimalen Makespan.

Beweis:

- Jobs aus G (Phase 1) sind abgeschätzt.
- Betrachte Jobs aus K (Phase 2):
  - Falls die Jobs aus K den Makespan nicht erhöhen, gilt die Behauptung.
  - Sei i der Job, der einen erhöhten Makespan von L erzeugt.
  - Wegen der LL Heuristik haben nach der Platzierung von K alle Maschinen eine Last von mindestens $L - p_i$.
  - Damit gilt für den optimalen Makespan: $Z \geqslant L - p_i$.
  - Folglich: $L \leqslant Z + p_i \leqslant (1+\varepsilon) \cdot Z$.

Das Orakel (Erinnerung und Vorüberlegungen)

$Z' = \lfloor(1+\varepsilon)/(\varepsilon^2)\rfloor, \quad p_i' = \lceil p_i/(\varepsilon^2 Z)\rceil$

1. Ein Orakel liefert Z, den Wert des optimalen Makespan.
2. Phase 1, die großen Jobs $G = \{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid p_i > \varepsilon Z\}$:
   1. Skaliere die Größe der Jobs aus G: $p_i' = \lceil p_i/(\varepsilon^2 Z)\rceil$.
   2. Bestimme Schedule mit Jobgrößen p_i' mit Makespan

$$Z' = \lfloor(1+\varepsilon)/\varepsilon^2\rfloor.$$

3. Phase 2, die kleinen Jobs: $K = \{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid p_i \leqslant \varepsilon Z\}$:
   1. Verteile die Jobs aus K nach der LL Heuristik.

- Kann es das obige Orakel geben?
- Nein, denn dann könnten wir das Scheduling Problem effizient lösen.
- Da wir ja schon approximieren, brauchen wir auch Z auch nicht genau zu bestimmen.
- Idee: versuche Halbierungssuche mit Hilfe des obigen Algorithmus.

Das Orakel (Aufbau der Idee)

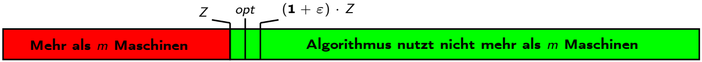
$Z' = \lfloor (1+\varepsilon)/(\varepsilon^2) \rfloor, \quad p_i' = \lceil p_i/(\varepsilon^2 Z) \rceil$

1. Ein Orakel liefert Z, den Wert des optimalen Makespan.
2. Phase 1, die großen Jobs $G = \{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid p_i > \varepsilon Z\}$:
   1. Skaliere die Größe der Jobs aus G: $p_i' = \lceil p_i/(\varepsilon^2 Z) \rceil$.
   2. Bestimme Schedule mit Jobgrößen p_i' mit Makespan

$$Z' = \lfloor (1+\varepsilon)/\varepsilon^2 \rfloor.$$

3. Phase 2, die kleinen Jobs: $K = \{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid p_i \leqslant \varepsilon Z\}$:
   1. Verteile die Jobs aus K nach der LL Heuristik.

- Es gibt $Z^* \leqslant opt$:
  das Bin Packing ist lösbar, falls $Z \geqslant Z^*$ gewählt wurde.



- Modifiziere Algorithmus so, dass er zu kleine Werte für Z erkennt.
- Falls Z aber zu groß ist, verlieren wir unseren Approximationsfaktor.
- Für eine $(1+\varepsilon)$-Approximation muss gelten: $Z^* \leqslant Z \leqslant opt$.

Das Orakel (Halbierungssuche)

$Z' = \lfloor (1+\varepsilon)/(\varepsilon^2) \rfloor, \quad p_i' = \lceil p_i/(\varepsilon^2 Z) \rceil$

- Suche Z^* mit Binärsuche:
  - Starte mit $S = \sum_{i=1}^{n} p_i$ (Obere Schranke für Makespan).
  - Damit ist der Wertebereich für die Binärsuche: $\{1, 2, \ldots, S\}$.
  - Anzahl der Aufrufe vom Algorithmus: $O(\log S)$.
  - Sei N die Länge der Eingabe in Bits. Dann gilt: $\log S \leqslant N$.
  - Anzahl der Aufrufe vom Algorithmus: $O(N)$.
  - Gesamtlaufzeit: $O(N \cdot n^{\lceil 1/\varepsilon^2 \rceil})$

Theorem

Es gibt ein PTAS für das Makespan-Scheduling-Problem auf identischen Maschinen.

Definitionen

Definition (Scheduling auf Maschinen mit Geschwindigkeiten)

Das Makespan Scheduling Problem auf Maschinen mit Geschwindigkeiten:

- Gegeben:
  - $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$ (d.h. n Jobs der Länge p_i).
  - $s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{N}$ (d.h. m Maschinen mit Geschwindigkeit s_i).
- Gesucht:
  - $f : \{1, 2, \ldots, n\} \mapsto \{1, 2, \ldots, m\}$, (d.h. Zuweisung der Jobs auf Maschinen).
  - Mit $\max_{j \in \{1,2,\ldots,m\}} \sum_{i \in \{1,2,\ldots,n\} \wedge f(i)=j} \frac{p_i}{s_j}$ ist minimal.

Bemerkung:

Das Scheduling auf Maschinen mit Geschwindigkeiten kann analog wie das Makespan-Scheduling-Problem auf identischen Maschinen gelöst werden.

Definitionen

Definition (Scheduling auf allgemeinen Maschinen)

Das Makespan Scheduling Problem auf allgemeinen Maschinen:

- Gegeben:
  - n Jobs und m Maschinen mit Laufzeiten:
  - $p_{i,j}$ für $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ und $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$.
  - D.h. Job i hat auf Maschine j eine Laufzeit von $p_{i,j}$.
- Gesucht:
  - $f : \{1, 2, \ldots, n\} \mapsto \{1, 2, \ldots, m\}$, (d.h. Zuweisung der Jobs auf Maschinen).
  - Mit $\max_{j \in \{1,2,\ldots,m\}} \sum_{i \in \{1,2,\ldots,n\} \wedge f(i)=j} p_{i,j}$ ist minimal.

Bei diesem Problem können wir nun nicht mehr den Ansatz von oben nutzen. Auch können wir nicht mehr hoffen, ein PTAS angeben zu können. Dazu sind die Einflüsse durch die unterschiedlichen Laufzeiten für die Jobs auf den verschiedenen Maschinen zu groß. Hier wählen wir daher zur Approximation einen anderen Ansatz.

Dieser Ansatz ist eine oft verwendete Standartmethode. Viele Probleme lassen sich als Gleichungssystem darstellen. Dabei muss aber der Lösungsvektor über den natürlichen Zahlen sein. Denn das Aufteilen von einem Job auf verschiedene Maschinen ist nicht gestattet. Zur Approximation ist das aber als Zwischenschritt möglich. Gleichzeitig erhält man durch das Verteilen einzelner Jobs auf verschieden Maschinen eine Lösung, die als untere Schranke dient. Aus dieser nicht statthaften Zwischenlösung berechnen wir eine Approximation, inden wir die aufgebrochenen Jobs auf genau eine der beteiligten Maschinen zuweisen. Dazu berechnen wir ein Matching.

Hier können wir auf einen Approximationsfaktor von 2 hoffen. Zum Einen haben wir die nichtgebrochenen Jobs aus dem Gleichungssystem und zum Anderen die gebrochenen Jobs, die per Machting korrigiert wurden. Dazu müssen wir aber sicher sein, daß keiner dieser Jobs auf der zugewiesenen Maschine eine Laufzeit hat, die größer ist als das Optimum. Da wir das aber nicht kennen, bestimmen wir das analog wie beim PTAS mit Halbierungssuche und schließen jeweils Paarungen aus, wo die Laufzeit länger ist als das Optimum.

ILP Formulierung

- Wir stellen das Problem als Gleichungssystem dar.
- Die Werte sind aber nicht aus $\mathbb{R}$ sondern aus $\mathbb{N}$.
- So ein Gleichungssystem wird ILP (Integer Linear Programm) genannt.
  - Variablen $x_{i,j}$ für $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ und $j \in \{1,2,\ldots,m\}$.
  - Variable $t \in \mathbb{N}$.
  - Notwendige Bedingungen (Nebenbedingungen)

$$\begin{array}{ll}
\forall i \in \{1,2,\ldots,n\}: & \sum_{j\in\{1,2,\ldots,m\}} x_{i,j} \geqslant 1 \\
\forall j \in \{1,2,\ldots,m\}: & \sum_{i\in\{1,2,\ldots,n\}} x_{i,j} \cdot p_{i,j} \leqslant t \\
\forall i \in \{1,2,\ldots,n\}, j \in \{1,2,\ldots,m\}: & x_{i,j} \in \{0,1\}
\end{array}$$

  - Ziel: minimiere t.
- So ein Gleichungssystem kann nicht in Polynomzeit gelöst werden, unter der Annahme $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.
- Aber ein relaxierte Variante ist in Polynomzeit lösbar:

$$\forall i \in \{1,2,\ldots,n\}, j \in \{1,2,\ldots,m\} : 0 \leqslant x_{i,j} \leqslant 1.$$

- Diese Variante kann aber schlecht zu einer guten Approximation führen.
- In der relaxierten Variante gilt: $n = 1 \wedge p_{1,j} = 1 \Longrightarrow t = 1/m$.

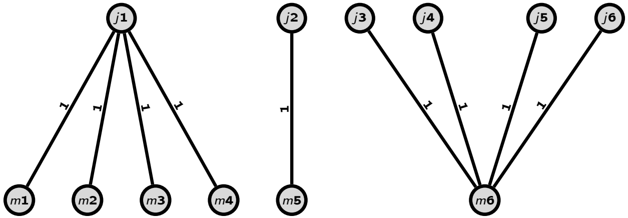
Alternative ILP Formulierung

- Falls der optimale Makespan Z bekannt ist (Idee mit dem Orakel), erhalten wir ein besseres Gleichungssystem.
- Definiere $S_Z = \{(i,j) \in \{1,2,\ldots,n\} \times \{1,2,\ldots,m\} \mid p_{i,j} \leqslant Z\}$.
- Damit erhalten wir folgendes relaxiertes Gleichungssystem:
  - Variablen $x_{i,j}$ für $(i,j) \in S_Z$.
  - Notwendige Bedingungen (Nebenbedingungen)

$$\begin{array}{ll} \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}: & \sum_{j:(i,j)\in S_Z} x_{i,j} \geqslant 1 \\ \forall j \in \{1,2,\ldots,m\}: & \sum_{i:(i,j)\in S_Z} x_{i,j} \cdot p_{i,j} \leqslant Z \\ \forall (i,j) \in S_Z: & x_{i,j} \geqslant 0 \end{array}$$

  - Ziel: finde eine Lösung.

Situation



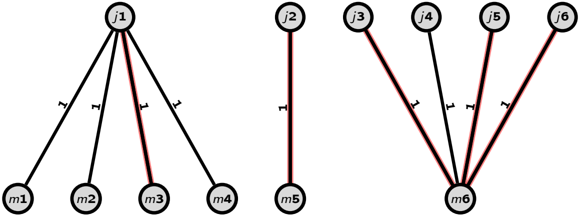
- Ein Job kann aufgespalten und mehreren Maschinen zugeteilt werden (siehe j_1).
- Ein Job kann vollständig auf eine Maschine zugeteilt werden (siehe j_2).
- Eine Maschine kann vollständige und aufgespaltene Jobs bekommen (siehe m_6).
- Im Folgenden müssen diese "halben" Jobs eindeutig auf eine Maschine zugewiesen werden.

Algorithmus (Überblick)

1. Eingabe: $p_{i,j}$ für $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ und $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$.
2. Orakel bestimmt Z
3. Bestimme Alternative ILP Formulierung $ILP(Z)$.
4. Relaxiere $ILP(Z)$ zu $LP(Z)$.
5. Bestimme eine zulässige Basislösung B für $LP(Z)$.
6. Aus der Basislösung B bestimme durch geeignetes Auf- und Abrunden eine Lösung mit Approximationsfaktor 2.

- Das Bestimmen der Basislösung B für $LP(Z)$ erfolgt in Polymonzeit mit Hilfe der so genannten Elliqsoidmethode.

Situation



- Ein Job i mit $x_{i,j} = 1$ kann eindeutig auf m_j zugewiesen werden.
- Ein Job i mit $0 < x_{i,j} < 1$ kann ggf. auf m_j zugewiesen werden.
- Wird Job i mit $0 < x_{i,j} < 1$ auf m_j zugewiesen, so kann i nicht mehr an $m_{j'} \neq m_j$ mit $0 < x_{i,j'} < 1$ zugewiesen werden.

Anzahl der Variablen $x_{i,j}$ mit $x_{i,j} = 0$

Lemma

In der Basislösung B für $LP(Z)$ haben höchstens $n + m$ Variablen $x_{i,j}$ einen Wert $x_{i,j} > 0$.

Beweis:

- Sei D die Anzahl der Variablen in $LP(Z)$.
- Sei C die Anzahl der Nebenbedingungen (Ungleichungen) in $LP(Z)$.
- Dann gilt:
$$D = |S_Z| \leqslant m \cdot n \text{ und } C = D + n + m.$$
- In der Basislösung B sind mindestens D der Nebenbedingungen exakt erfüllt.
- Also sind $C - D = n + m$ viele Nebenbedingungen nicht exakt erfüllt.
- Also sind höchsten $n + m$ der Nebenbedingungen der Form $x_{i,j} \geqslant 0$ nicht exakt erfüllt.
- Damit haben alle, bis auf höchstens $n + m$ Variablen, den Wert 0.

Allokationsgraph

Definition (Allokationsgraph)

Seien $x_{i,j}$ die Werte der Lösung für das $ILP(Z)$. Dann ist $G = (J, M, E)$ der Allokationsgraph für $ILP(Z)$, falls:

- $J = \{v_i \mid i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$,
- $M = \{w_j \mid j \in \{1, 2, \ldots, m\}\}$ und
- $E = \{(v_i, w_j) \mid x_{i,j} > 0\}$.

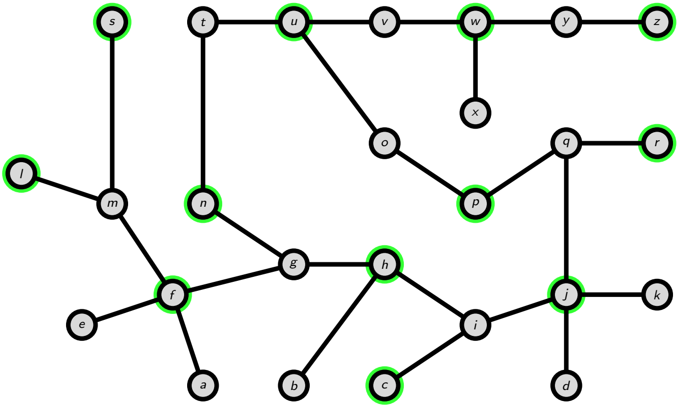
Lemma

Sei G der Allokationsgraph für $ILP(Z)$ und sei G zusammenhängend. Dann ist G ein Baum oder $G - e$ ist ein Baum für geeignetes e.

Beweis:

- G hat $m + n$ viele Knoten und höchstens $m + n$ viele Kanten.
- Ein Baum mit k Knoten hat höchstens $k - 1$ viele Kanten.
- D.h. G enthält höchstens einen Kreis.

Beispiel



Allokationsgraph

Lemma

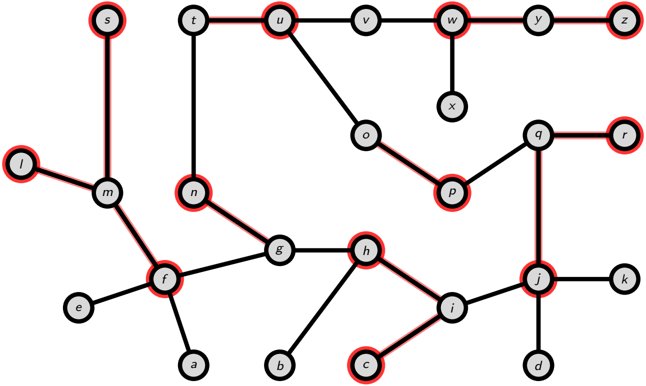
Sei $G = (V, J, M)$ der Allokationsgraph für $ILP(Z)$ und sei G' Zusammenhangskomponente von G. Dann ist G' ein Baum oder $G' - e$ ist ein Baum für ein geeignetes e.

Beweis:

- Sei $G' = (V', W', E')$ eine beliebige Zusammenhangskomponente von G.
- Das Tupel (V', W') definiert ein eingeschränktes Scheduling Problem.
- Sei nun $LP'(Z)$ die Relaxierung dieses eingeschränkten Problems.
- Wird Basislösung B auf die Variablen aus $V' \cup W'$ eingeschränkt, so erhalten wir eine Lösung für $LP'(Z)$.
- Nach obigen Lemma gilt nun:
  - G' ein Baum oder $G' - e$ ist eine Baum für geeignetes e.

Beispiel (Jobs sind die rot markierten Knoten)

$l \rightarrow m$
$s \rightarrow m$
$z \rightarrow y$
$r \rightarrow q$
$c \rightarrow i$
$f \rightarrow m$
$w \rightarrow y$
$n \rightarrow g$
$h \rightarrow i$
$j \rightarrow q$
$p \rightarrow o$
$u \rightarrow t$



Rot: $x_{i,j} = 1$ Blau: $0 < x_{i,j} < 1$ Cyan: $0 < x_{i,j} < 1$

Runden mit Hilfe des Allokationsgraphen

- Gegeben sei $G = (J, M, E)$ der Allokationsgraph für $ILP(Z)$ und Variablenwerte $x_{i,j}$ aus der Basislösung.
- Betrachte ungeteilte Jobs, d.h. $x_{i,j} = 1$:
  - Setze $f(i) = j$ und
  - setze $G = G|(J \setminus \{v_i\}) \cup M$.
- Nachdem alle ungeteilten Jobs zugewiesen worden sind, hat der verbleibende Graph G keine Blätter aus J.
- Betrachte geteilte Jobs, d.h. $0 < x_{i,j} < 1$:
  - Berechne einseitig perfektes Matching für M.
  - Falls w_j ein isolierter Knoten ist, entferne ihn aus G.
  - Falls $w_j \in M$ ein Blatt (Knoten vom Grad 1) ist und v_i der eindeutige Nachbar von w_j, dann setze:
    - Setze $f(i) = j$ und
    - setze $G = G|(J \setminus \{v_i\}) \cup (M \setminus \{w_j\})$.
  - Falls $G = (J, M, E)$ einen Kreis C von Knoten vom Grad 2 enthält, dann bestimme perfektes Matching M auf C.
  - Setze für $(v_i, w_j) \in M : f(i) = j$ und entferne C aus G.

Approximation

Theorem

Der obige Algorithmus bestimmt eine 2-Approximation für das allgemeine Makespan Scheduling Problem.

Beweis:

- Die Verteilung der ungeteilten Jobs erzeugt auf jeder Maschine eine Last von höchstens Z.
- Für die geteilten Jobs gilt:
  - $x_{i,j} > 0$ und damit $(i,j) \in S_Z$.
  - Damit gilt: $p_{i,j} \leqslant Z$.
  - Jede Maschine erhält höchstens einen ungeteilten Job zugewiesen.
  - Damit ergibt sich eine maximale Lastzunahme von Z für jede Maschine.

Nichtapproximierbarkeit

- Die folgenden Probleme sind MAX-SNP schwer:
  - Vertex Cover
  - Zentrumsproblem
  - Δ-TSP
  - Steiner-Baum
- D.h. für diese gibt es kein PTAS.

Fragen

- Wie kann das Problem Set-Cover approximiert werden? Welche untere Schranken sind dazu bekannt?
- Wie arbeitet die LL Heuristik?
- Wie arbeitet die LPT Heuristik?
- Wie ist die Güte der LL Heuristik? Wie ist der Beweis?
- Wie ist die Güte der LPT Heuristik? Wie ist der Beweis?
- Wie arbeitet das Approximationsschema für Makespan Scheduling? Wie ist die Beweisidee?
- Wie kann des Makespan Problem auf allgemeinen Maschinen approximiert werden? Wie ist die Beweisidee?

Legende

n : Nicht relevant

g : Grundlagen, die implizit genutzt werden

i : Idee des Beweises oder des Vorgehens

s : Struktur des Beweises oder des Vorgehens

w : Vollständiges Wissen