LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. S. Walcher
Markus Hirshman, Dipl.-Gyml.
Niclas Kruff, M. Sc.

Aachen, den 3. Dezember 2018

Übung 6 zur Vorlesung Analysis für Informatiker, WS 2018/2019

Abgabe bis Mittwoch, 21.11.2018, 12 Uhr

Hausaufgabe 4*

Zeigen Sie:

(a) Für alle $(d_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \{0,1\}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k 2^{-k}$$

gegen ein $x \in [0,1]$.

(b) Falls es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $d_k = d_{k+m}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt, so ist $x \in \mathbb{Q}$.

Lösung

(a) Es gilt:

$$0 \leqslant d_k 2^{-k} \leqslant 2^{-k}.$$

Da $2 > 1$ ist, gilt $0 < 1/2 < 1$ und mit der geometrischen Reihe erhalten wir:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1/2)^k = \left(\frac{1}{1-1/2} - 1\right) = 1$$

Mit dem Majorantenkriterium gilt nun, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k 2^{-k}$$

absolut konvergent ist mit

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} d_k 2^{-k} \leqslant 1.$$

(b) Jedes $x \in [0,1]$ hat eine 2-adische (dyadische) Darstellung. Wir ehalten durch die Periodizität und der Konvergenz (Umsortierung der Summanden):

$$x = \sum_{i=1}^{m} d_i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-i-m\cdot k} = \sum_{i=1}^{m} d_i \cdot 2^{-i} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-m\cdot k}.$$

Der Ausdruck $\sum_{i=1}^{m}(d_i \cdot 2^{-i})$ liegt per Konstruktion (endliche Summe rationaler Zahlen) in $\mathbb{Q}$. Mit der geometrischen Reihe gilt weiter:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-mk} = 1/(1-(1/2)^m) \in \mathbb{Q}.$$

Also folgt:

$$x \in \mathbb{Q}.$$