

## residuez

TF formu (Transfer Function) aşağıdaki gibi TF-negative formu ile verildiğinde

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}$$

H(z)'nin basit kesirlere açılması:

$$H(z) = \frac{r_0}{1 - p_0 z^{-1}} + \dots + \frac{r_{-1}}{1 - p_{-1} z^{-1}} + k_0 + k_1 z^{-1} + k_2 z^{-2} + \dots$$

Eğer tekrar eden kökler varsa, bu durumda H(z) aşağıdaki gibi terimlere sahip olacaktır:

$$H(z) = \frac{r_i}{(1 - p_i z^{-1})} + \frac{r_{i+1}}{(1 - p_i z^{-1})^2} + \dots + \frac{r_{i+n-1}}{(1 - p_i z^{-1})^n}$$

Bu fonksiyon z'nin "negative" kuvvetli polinomları içindir. Eğer z'nin "positive" kuvvetli polinomları için kullanacaksanız **residuez** yerine **rezidue** fonksiyonunu kullanınız.

```
In [11]: # Öncelikle gerekli kütüphaneleri yükleyiniz
```

```
import numpy as np
import scipy.signal as sgnl
```

## Örnek-1

Aşağıda verilen transfer fonksiyonu basit kesirlere açılacaktır:

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

a ve b vektörlerini bu bilgiler ışığında elde edelim:

```
In [12]: b = np.array([1, 2, 1])
a = np.array([1, -3/2, 1/2])
z, p, k = sgnl.residuez(b, a)
print("kesir katsayıları, z:", z)
print("kutuplar, p:", p)
print("polinom, k:", k)
```

```
kesir katsayıları, z: [-9.  8.]
kutuplar, p: [0.5  1. ]
polinom, k: [2.]
```

residuez fonksiyonunun ürettiği z vektörü katsayıları, p vektörü kutupları, k ise k(z) polinomunu verecektir. Bu bilgiler ışığında aşağıda kırmızı ile gösterilen basit kesirlere açılımını doğrudan üretebilirsiniz.

$$H(z) = 2 + \frac{-9}{(1 - 0.5z^{-1})} + \frac{8}{(1 - 1.0z^{-1})}$$

$$= 2 - \frac{9}{(1 - 0.5z^{-1})} + \frac{8}{(1 - z^{-1})}$$

Bu aşamadan sonra ROC dikkate alınarak tarz z dönüşümü kolaylıkla elde edilebilir.

## Örnek-2

Aşağıda verilen transfer fonksiyonu basit kesirlere açılacaktır:

$$H(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}$$

$H(z)$ , ZPK-negative formunda verildiğinden, öncelikle TF-negative formuna çevrilmelidir.

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}$$

a ve b vektörlerini bu bilgiler ışığında elde edelim:

```
In [13]: b = np.array([1])
a = np.array([1, -3/4, 1/8])
z, p, k = signal.residuez(b, a)
print("kesir katsayıları, z:", z)
print("kutuplar, p:", p)
print("polinom, k:", k)
```

```
kesir katsayıları, z: [-1.  2.]
kutuplar, p: [0.25 0.5 ]
polinom, k: []
```

residuez fonksiyonunun ürettiği z vektörü katsayıları, p vektörü kutupları, k ise k(z) polinomunu verecektir. Bu bilgiler ışığında aşağıda kırmızı ile gösterilen basit kesirlere açılımını doğrudan üretebilirsiniz.

$$H(z) = 0 + \frac{-1}{(1 - 0.25z^{-1})} + \frac{2}{(1 - 0.5z^{-1})}$$

$$= \frac{-1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} + \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}$$

Bu aşamadan sonra ROC dikkate alınarak tarz z dönüşümü kolaylıkla elde edilebilir.

## Örnek-3

Aşağıda verilen transfer fonksiyonu basit kesirlere açılacaktır:

$$H(z) = \frac{3z^{-3} + 4z^{-2} + z^{-1} + 5}{1 - 3z^{-1}}$$

$H(z)$  öncelikle (standart) TF-negative formuna çevrilmelidir. Bu örnekte her ne kadar pay z'nin negatif kuvvetlerine sahipse de ilk önce  $z^0$ 'ın katsayısı gelmemektedir. Standart formda pay ve

paydada öncelikle  $z^0$ 'ın katsayısı (ya da mutlak değer olarak bakıldığında en küçük kuvvet) yer almalıdır.

$$H(z) = \frac{5 + z^{-1} + 4z^{-2} + 3z^{-3}}{1 - 3z^{-1}}$$

a ve b vektörlerini bu bilgiler ışığında elde edelim:

```
In [14]: b = np.array([5,1, 4, 3])
a = np.array([1, -3])
z, p, k = sgnl.residuez(b, a)
print("kesir katsayıları, z:", z)
print("kutuplar, p:", p)
print("polinom, k:", k)
```

```
kesir katsayıları, z: [5.88888889]
kutuplar, p: [3.]
polinom, k: [-0.88888889 -1.66666667 -1.          ]
```

residuez fonksiyonunun ürettiği z vektörü katsayıları, p vektörü kutupları, k ise k(z) polinomunu verecektir. Bu bilgiler ışığında aşağıda kırmızı ile gösterilen basit kesirlere açılımını doğrudan üretebilirsiniz.

$$\begin{aligned} H(z) &= -0.88889 - 1.66667z^{-1} - z^{-2} + \frac{5.88889}{(1 - 3z^{-1})} \\ &= -z^{-2} - \frac{5}{3}z^{-1} - \frac{8}{9} + \frac{\frac{53}{9}}{(1 - 3z^{-1})} \end{aligned}$$

Bu aşamadan sonra ROC dikkate alınarak tarz z dönüşümü kolaylıkla elde edilebilir.

## Örnek-4

Aşağıda verilen transfer fonksiyonu basit kesirlere açılacaktır:

$$H(z) = \frac{-11 + 16z^{-1} - 7z^{-2}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}$$

$H(z)$  öncelikle TF-negative formuna çevrilmelidir.

$$H(z) = \frac{-11 + 16z^{-1} - 7z^{-2}}{1 - \frac{4}{3}z^{-1} + \frac{7}{12}z^{-2} - \frac{1}{12}z^{-3}}$$

a ve b vektörlerini bu bilgiler ışığında elde edelim:

```
In [15]: b = np.array([-11, 16, -7])
a = np.array([1, -4/3, 7/12, -1/12])
z, p, k = sgnl.residuez(b, a)
print("kesir katsayıları, z:", z)
print("kutuplar, p:", p)
print("polinom, k:", k)
```

```
kesir katsayıları, z: [-104.+0.j  114.+0.j -21.+0.j]
kutuplar, p: [0.33333333+0.j 0.5      +0.j 0.5      +0.j]
polinom, k: []
```

residuez fonksiyonunun ürettiği z vektörü katsayıları, p vektörü kutupları, k ise k(z) polinomunu

verecektir. Bu bilgiler ışığında aşağıda kırmızı ile gösterilen basit kesirlere açılımını doğrudan üretebilirsiniz. Bu örnekte p'de  $z=0.5$ 'te birbirinin aynı iki kutup olduğuna dikkat ediniz.

$$H(z) = 0 + \frac{-104}{(1 - 0.33333z^{-1})} + \frac{114}{(1 - 0.5z^{-1})} + \frac{-21}{(1 - 0.5z^{-1})^2}$$

$$= \frac{-104}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})} + \frac{114}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} - \frac{21}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2}$$

Bu aşamadan sonra ROC dikkate alınarak  $z$  dönüşümü kolaylıkla elde edilebilir.

## Örnek-5

Aşağıda verilen transfer fonksiyonu basit kesirlere açılacaktır:

$$H(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2(1 + \frac{1}{4}z^{-1})}$$

$H(z)$  öncelikle TF-negative formuna çevrilmelidir.

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{16}z^{-3}}$$

a ve b vektörlerini bu bilgiler ışığında elde edelim:

```
In [16]: b = np.array([1])
a = np.array([1, -3/4, 0, 1/16])
z, p, k = signal.residuez(b, a)
print("kesir katsayıları, z:", z)
print("kutuplar, p:", p)
print("polinom, k:", k)
```

```
kesir katsayıları, z: [0.11111111 0.22222222 0.66666667]
kutuplar, p: [-0.25  0.5   0.5 ]
polinom, k: []
```

residuez fonksiyonunun ürettiği  $z$  vektörü katsayıları,  $p$  vektörü kutupları,  $k$  ise  $k(z)$  polinomunu verecektir. Bu bilgiler ışığında aşağıda kırmızı ile gösterilen basit kesirlere açılımını doğrudan üretebilirsiniz. Bu örnekte p'de  $z=0.5$ 'te birbirinin aynı iki kutup olduğuna dikkat ediniz.

$$H(z) = 0 + \frac{0.1111}{(1 + 0.25z^{-1})} + \frac{0.2222}{(1 - 0.5z^{-1})} + \frac{0.66667}{(1 - 0.5z^{-1})^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{9}}{(1 + \frac{1}{4}z^{-1})} + \frac{\frac{2}{9}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} + \frac{\frac{2}{3}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2}$$

## Ödev

Aşağıda verilen transfer fonksiyonu önce el ile sonra bilgisayar yardımıyla basit kesirlere açıp karşılaştırınız.

$$H(z) = \frac{z^2}{(z + 1)(z - 1)^2}$$

## Örnek-6

Aşağıda verilen transfer fonksiyonu basit kesirlere açılacaktır. TF-positive olarak verilen form ilk olarak TF-negative'e çevirilir:

$$H(z) = \frac{5z^2 + 5z + 1.25}{z^3 - \frac{7}{12}z^2 + \frac{1}{12}z}$$
$$= \frac{0 + 5z^{-1} + 5z^{-2} + 1.25z^{-3}}{1 - \frac{7}{12}z^{-1} + \frac{1}{12}z^{-2}}$$

TF-negative formunda pay kısmında ilk ifade  $z^{-1}$  ile başladığından,  $b_0 = 0$  olduğuna dikkat çekmek için "0+" eklenmiştir.

a ve b vektörlerini bu bilgiler ışığında elde edelim:

```
In [17]: b = np.array([0, 5, 5, 1.25])
a = np.array([1, -7/12, 1/12])
z, p, k = signal.residuez(b, a)
print("kesir katsayıları, z:", z)
print("kutuplar, p:", p)
print("polinom, k:", k)
```

```
kesir katsayıları, z: [-540.  375.]
kutuplar, p: [0.25      0.33333333]
polinom, k: [165.  15.]
```

residuez fonksiyonunun ürettiği z vektörü katsayıları, p vektörü kutupları, k ise k(z) polinomunu verecektir. Bu bilgiler ışığında aşağıda kırmızı ile gösterilen basit kesirlere açılımını doğrudan üretebilirsiniz.

$$H(z) = 2 + \frac{-9}{(1 - 0.5z^{-1})} + \frac{8}{(1 - 1.0z^{-1})}$$
$$= 2 - \frac{9}{(1 - 0.5z^{-1})} + \frac{8}{(1 - z^{-1})}$$

Bu aşamadan sonra ROC dikkate alınarak terz z dönüşümü kolaylıkla elde edilebilir.