GTU ELM367 Sayısal İşaret İşlemenin Temelleri

zpk2tf

$$H(z) = K \frac{\prod_{m=1}^{M}(1 - c_m z^{-1})}{\prod_{n=1}^{N}(1 - d_n z^{-1})}$$

formu ZPK-negative formu olarak adlandırılır: Zero-Pole-K (gain).

Bu form sistemin kutuplarını ve sıfırlarını görmek için ideal bir formdur. Ancak, M=N olmadığı durumlarda bu form yerine aşağıdaki ZPK-positive formu tercih edilmelidir:

$$H(z) = K \frac{\prod_{m=1}^{M}(z - c_m)}{\prod_{n=1}^{N}(z - d_n)}$$

ZPK form yerine bazen TF formu (Transfer Function) olarak adlandırılan aşağıdaki TF-positive form kullanılır:

$$H(z) = \frac{b_0 z^M + b_1 z^{(M-1)} + \cdots + b_M}{a_0 z^N + a_1 z^{(N-1)} + \cdots + a_N}$$

Bu form z'nin pozitif kuvvetlerinden oluşur ve genellikle kontrol mühendisliği alanında kullanılır. Sayısal işaret işleme alanında ise aşağıda gösterilen z'nin negatif kuvvetlerinden oluşan TF-negative formun kullanımı daha yaygındır.:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}}$$

M=N olmadığı durumlarda ZPK eğer z'nin pozitif kuvvetleri formu olarak verilmediyse öncelikle ZPK-pozitive formuna dönüştürülmelidir. Bu sayede, sistemin sıfırları ve kutupları doğru şekilde tespit edilebilecektir.

zpk2tf fonksiyonu, ZPK formundan TF formuna dönüştürmek içindir.

In [1]:

```
# Öncelikle gerekli kütüphaneleri yükleyiniz

import numpy as np
import scipy.signal as sgnl
```

Örnek-1

Aşağıdaki örneği dikkatlice inceleyiniz. Bu örnekte şunu göceksiniz: aşağıdaki (z'nin negatif kuvvetleri olan) birinci ifadeyi kullanırsanız sıfırları ve kutupları belirlerken hata yapma olasılığınız yüksektir; örneğin z=0'da bir kutup olmasına rağmen bunu göremeyebilir ve z=0'da bir sıfır olduğunu düşünebilirsiniz. Bir altta verildiği gibi (z'nın pozitif kuvvetleri olan) bir formda yazıldığında ise sıfırları ve kutupları hatasız belirlemek daha kolaydır.

$$X(z) = 5\frac{z^{-1}(1+0.5z^{-1})^2}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}$$
$$= 5\frac{(z+0.5)^2}{z(z-\frac{1}{3})(z-\frac{1}{4})}$$

Burada iki sıfır ve üç tane de kutup mevcuttur. z ve p vektörlerini bu bilgiler ışığında elde edelim:

In [2]:
```
k = 5                                   # kazanç bu sistem fonksiyonu için 5'tir
z = np.array([-0.5, -0.5])              # iki sıfır (zero)   @ z= -1/2, -1/2
p = np.array([0, 1.0/3, 1.0/4])         # üç kutup (pole) @ z=0, 1/3, 1/4
b, a = sgnl.zpk2tf(z, p, k)
print("pay, b:", b)
print("payda: a:", a)
```

```
pay, b: [5.   5.   1.25]
payda: a: [ 1.         -0.58333333  0.08333333  0.        ]
```

zpk2tf fonksiyonunun ürettiği b vektörü payın katsayılarını, a vektörü ise paydanın katsayılarını verecektir. b'nin son elemanı z^0'ın katsayısını, sondan ikinci elemanı z^1'in katsayısını, vd. verecektir. Benzer şekilde, a'nın son elemanı z^0'ın katsayısını, sondan ikinci elemanı z^1'in katsayısını, vd. verecektir. Bu bilgiler ışığında aşağıda kırmızı ile gösterilen sonucu doğrudan üretebilirsiniz. Aşağıdaki diğer satırlar ise yukarıda verilen $X(z)$'nin kırmızı satırda gösterilen ve zpk2tf() fonksiyonu ile elde edilen sonuca eşit olduğunu göstermek için verilmektedir. Burada dikkat edilmesi gereken husus şudur: zpk2tf() fonksiyonunu doğru kullanabilmek için giriş transfer fonksiyonu mavi satırdaki forma sahip olmalı, fonksiyonun ürettiği b ve a vektörlerinden ise kırmızı satırdaki forma uygun bir transfer fonksiyonu üretilmelidir. Diğer satırlar ihtiyaca göre el ile üretilebilir. zpk2tf() fonksiyonunun en sonda verilen z'nin negatif kuvvetleri formuna uygun katsayı üretmediğine dikkat ediniz!

$$X(z) = 5\frac{z^{-1}(1+0.5z^{-1})^2}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}$$

$$= 5\frac{(z+0.5)^2}{z(z-\frac{1}{3})(z-\frac{1}{4})}$$

$$= 5\frac{z^2+z+\frac{1}{5}}{z(z^2-\frac{7}{12}z+\frac{1}{12})}$$
$$= \frac{5z^2+5z+1.25}{z(z^2-\frac{7}{12}z+\frac{1}{12})}$$

$$= \frac{5.0z^2+5.0z+1.25z^0}{1z^3-0.583333z^2+0.083333z^1+0.0z^0}$$

$$= \frac{5.0z^{-1}+5.0z^{-2}+1.25z^{-3}}{1-0.583333z^{-1}+0.083333z^{-2}}$$
$$= \frac{5.0z^{-1}+5.0z^{-2}+1.25z^{-3}}{1-\frac{7}{12}z^{-1}+\frac{1}{12}z^{-2}}$$

Örnek-2

$$X(z) = 5\frac{z^{-1}}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$$
$$= \frac{5}{(z-\frac{1}{3})}$$

Burada hiç sıfır yok ve bir tane kutup mevcuttur. z ve p vektörlerini bu bilgiler ışığında elde edelim:

In [3]:
```
k = 5                         # kazanç bu sistem fonksiyonu için 5'tir
z = np.array([])              # hiç sıfır yok
p = np.array([1.0/3])         # bir kutup (pole) @ z= 1/3
b, a = sgnl.zpk2tf(z, p, k)
print("pay, b:", b)
print("payda: a:", a)
```

```
pay, b: [5.]
payda: a: [ 1.         -0.33333333]
```

zpk2tf fonksiyonunun ürettiği a ve b vektörlerinden yola çıkarak $X(z)$'yi üretelim:

$$X(z) = \frac{5}{z-0.33333}$$
$$= \frac{5}{z-\frac{1}{3}}$$

Örnek-3

$$X(z) = 5\frac{z^{-2}}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$$
$$= 5\frac{1}{z(z-\frac{1}{3})}$$

Burada hiç sıfır yok ve iki tane kutup mevcuttur. z ve p vektörlerini bu bilgiler ışığında elde edelim:

In [4]:
```
k = 5                         # kazanç bu sistem fonksiyonu için 5'tir
z = np.array([])              # hiç sıfır yok
p = np.array([0, 1.0/3])      # iki kutup (pole) @ z= 0 ve 1/3
b, a = sgnl.zpk2tf(z, p, k)
print("pay, b:", b)
print("payda: a:", a)
```

```
pay, b: [5.]
payda: a: [ 1.         -0.33333333  0.        ]
```

zpk2tf fonksiyonunun ürettiği a ve b vektörlerinden yola çıkarak $X(z)$'yi üretelim:

$$X(z) = \frac{5}{z^2-0.33333z+0.0}$$
$$= \frac{5}{z^2-\frac{1}{3}z}$$

Örnek-4

$$X(z) = 5\frac{z^{-2}(1-\frac{1}{2}z^{-1})}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$$
$$= 5\frac{(z-\frac{1}{2})}{z^2(z-\frac{1}{3})}$$

Burada bir sıfır ve üç tane kutup mevcuttur. z ve p vektörlerini bu bilgiler ışığında elde edelim:

In [5]:
```
k = 5                                # kazanç bu sistem fonksiyonu için 5'tir
z = np.array([1.0/2])                # bir sıfır @ z= 1/2
p = np.array([0, 0, 1.0/3])          # üç kutup @ z= 0, 0, 1/3
b, a = sgnl.zpk2tf(z, p, k)
print("pay, b:", b)
print("payda: a:", a)
```

```
pay, b: [ 5.  -2.5]
payda: a: [ 1.         -0.33333333  0.          0.        ]
```

zpk2tf fonksiyonunun ürettiği a ve b vektörlerinden yola çıkarak $X(z)$'yi üretelim:

$$X(z) = \frac{5z-2.5}{z^3-0.33333z^2+0.0z^1+0.0}$$
$$= \frac{5z-\frac{5}{2}}{z^3-\frac{1}{3}z^2}$$

Örnek-5

$$X(z) = 5\frac{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{7}z^{-1})}$$
$$= 5\frac{z(z-\frac{1}{2})}{(z-\frac{1}{3})(z-\frac{1}{7})}$$

Burada iki sıfır ve iki tane kutup mevcuttur. z ve p vektörlerini bu bilgiler ışığında elde edelim:

In [6]:
```
k = 5                                    # kazanç bu sistem fonksiyonu için 5'tir
z = np.array([0, 1.0/2])                 # iki sıfır @ z= 0, 1/2
p = np.array([1.0/3, 1.0/7])             # iki kutup @ z= 1/3, 1/7
b, a = sgnl.zpk2tf(z, p, k)
print("pay, b:", b)
print("payda: a:", a)
```

```
pay, b: [ 5.  -2.5  0. ]
payda: a: [ 1.         -0.47619048  0.04761905]
```

zpk2tf fonksiyonunun ürettiği a ve b vektörlerinden yola çıkarak $X(z)$'yi üretelim:

$$X(z) = \frac{5z^2-2.5z+0.0}{z^2-0.47619048z+0.04761905}$$
$$= \frac{5z^2-\frac{5}{2}z}{z^2-\frac{10}{21}z+\frac{1}{21}}$$