

Anotações MS211
Aulas ministradas pela
Prof^a Dr^a Kelly Cristina Poldi

Eduardo M. F. de Souza

31 de março de 2020

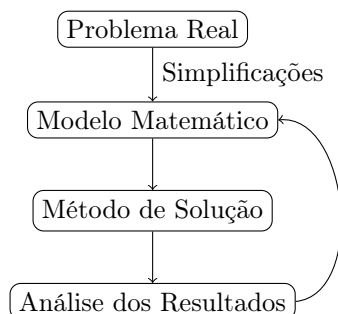
Sumário

1	Erros em processos Numéricos	2
1.1	Introdução	2
1.2	Representação dos Números	2
1.3	Conversão de Números nos Sistemas decimal e binário	2
1.3.1	Mudança da base decimal para a base binária	3
1.3.2	Mudança da base binária para base decimal:	3
1.4	Aritmética de Ponto Flutuante	4
1.5	Erros	5
1.5.1	Erros de Arredondamento e Truncamento	5
1.5.2	Teorema de Taylor	6
1.6	Zeros reais de funções reais	8
1.6.1	Fase 1: Localizar raízes de $f(x)$	8
1.6.2	Fase 2: Refinamento	9
1.6.3	Método da Bissecção	9
1.6.4	Método do Ponto Fixo	12
1.6.5	Método de Newton	15

1 Erros em processos Numéricos

1.1 Introdução

Em diversas áreas científicas, os métodos numéricos podem ser usados para resolução de problemas. A resolução de problemas envolve várias fases:



Uma vez resolvido um problema, pode ocorrer que a solução obtida não seja a esperada. Isto porque durante o processo de resolução pode ter ocorrido:

1. Erros de modelagem matemáticas;
2. Erro de parâmetros;
3. Erros associados aos sistema de numeração utilizado;
4. Erros resultantes das operações efetuadas;
5. Entre outros;

1.2 Representação dos Números

A representação de um número depende da base escolhida (ou disponível na máquina utilizada) e o número de dígitos usados na sua representação.

Exemplo: calcular a área de uma circunferência:

$$\begin{aligned}r &= 1000m \\A &\cong 31400m^2 \\A &\cong 31416m^2 \\A &\cong 31415,92m^2\end{aligned}$$

Quanto maior o número de dígitos utilizados, maior será a precisão obtida! Além disso, um número pode ter representação finita em uma base e não finita em outra. Por exemplo:

$$(0,2)_{10} = (0,0011\overline{0011}\dots)_2$$

1.3 Conversão de Números nos Sistemas decimal e binário

Sistema posicional:

$$\begin{aligned}(6)_{10} &= 6 \times 10^0 \\(347)_{10} &= 3 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 7 \times 10^0 \\(10111)_2 &= 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\&= (23)_{10}\end{aligned}$$

De forma geral, um número n na base β é:

$$\begin{aligned}(a_j a_{j-1} \dots a_2 a_1 a_0)_\beta, \text{ com } 0 \leq a_k \leq \beta - 1, \text{ e } k = 1 \dots j \\(n)_\beta = a_j \beta^j + a_{j-1} \beta^{j-1} + \dots + a_2 \beta^2 + a_1 \beta^1 + a_0 \beta^0\end{aligned}$$

1.3.1 Mudança da base decimal para a base binária

1. Parte inteira (Divisões sucessivas):

$$\begin{aligned}
 (6)_{10} &= (?)_2 \\
 6 \bmod 2 = \boxed{0} &\rightarrow (6)_{10} = (? \dots \boxed{0})_2 \\
 \lfloor 6 \div 2 \rfloor &= 3 \\
 3 \bmod 2 = \boxed{1} &\rightarrow (6)_{10} = (? \dots \boxed{1}0)_2 \\
 \lfloor 3 \div 2 \rfloor &= 1 \\
 1 \bmod 2 = \boxed{1} &\rightarrow (6)_{10} = (? \dots \boxed{1}10)_2 \\
 \lfloor 1 \div 2 \rfloor &= 0 \quad \textbf{(Pare!)} \\
 (6)_{10} &= (110)_2
 \end{aligned}$$

2. Parte fracionária (Multiplicações sucessivas)

$$\begin{aligned}
 (0,1875)_{10} &= (?)_2 \\
 0,1875 \times 2 = \boxed{0},375 &\rightarrow (0,1875)_{10} = (0.\boxed{0} \dots ?)_2 \\
 0,375 - \lfloor 0,375 \rfloor &= 0,375 \\
 0,375 \times 2 = \boxed{0},75 &\rightarrow (0,1875)_{10} = (0.0\boxed{0} \dots ?)_2 \\
 0,75 - \lfloor 0,75 \rfloor &= 0,75 \\
 0,75 \times 2 = \boxed{1},5 &\rightarrow (0,1875)_{10} = (0.00\boxed{1} \dots ?)_2 \\
 1,5 - \lfloor 1,5 \rfloor &= 0,5 \\
 0,5 \times 2 = \boxed{1},0 &\rightarrow (0,1875)_{10} = (0.001\boxed{1} \dots ?)_2 \\
 \textbf{(Pare!)} & \quad (0,1875)_{10} = (0.0011)_2
 \end{aligned}$$

Obs: Alguns números não têm representação finita na base binária — um ciclo de multiplicações passa a ocorrer. O fato de um número não ter uma representação finita no sistema binário (usado nos computadores) pode acarretar na ocorrência de erros.

$$\begin{aligned}
 (0,1)_{10} &= (?)_2 \\
 0,1 \times 2 = \boxed{0},2 &\rightarrow (0,1)_{10} = (0.\boxed{0} \dots ?)_2 \\
 0,2 \times 2 = \boxed{0},4 &\rightarrow (0,1)_{10} = (0.0\boxed{0} \dots ?)_2 \\
 0,4 \times 2 = \boxed{0},8 &\rightarrow (0,1)_{10} = (0.00\boxed{0} \dots ?)_2 \\
 0,8 \times 2 = \boxed{1},6 &\rightarrow (0,1)_{10} = (0.0001\boxed{1} \dots ?)_2 \\
 0,6 \times 2 = \boxed{1},2 &\rightarrow (0,1)_{10} = (0.0001\boxed{1} \dots ?)_2 \\
 0,2 \times 2 = \boxed{0},4 &\rightarrow (0,1)_{10} = (0.00011\boxed{0} \dots ?)_2 \\
 0,4 \times 2 = \boxed{0},8 &\rightarrow (0,1)_{10} = (0.000110\boxed{0} \dots ?)_2 \\
 &\vdots \\
 (0,1)_{10} &= (0,000110011\overline{0011} \dots)_2
 \end{aligned}$$

1.3.2 Mudança da base binária para base decimal:

1. Parte inteira: expoentes positivos da direita para a esquerda

$$\begin{aligned}
 (10011)_2 &= 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\
 &= 8 + 0 + 2 + 1 \\
 &= (11)_{10}
 \end{aligned}$$

2. Parte fracionária: expoentes negativos da esquerda para direita

$$\begin{aligned}(0.101)_2 &= 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} \\ &= 0,5 + 0,125 \\ &= (0,625)_{10}\end{aligned}$$

Exercício: escreva $(1101.011)_2$ na base decimal:

$$\begin{aligned}(1101.011)_2 &= 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + \\ &\quad + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} \\ &= 8 + 4 + 0 + 1 + 0 + 0,25 + 0,125 \\ &= (13,375)_{10}\end{aligned}$$

1.4 Aritmética de Ponto Flutuante

Um número real pode ser representado no sistema de ponto flutuante como:

$$\begin{aligned}x &= m \times \beta^e, \text{ em que:} \\ m &= \pm 0, d_1 d_2 \dots d_n, \quad n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Em que:

- m é a mantissa;
- n é o número de dígitos na mantissa;
- β é a base do sistema;
- e é o expoente, $e \in \mathbb{Z} : l \leq e \leq u$, sendo que l e u são inteiros fixos;
- d_j é o j -ésimo dígito da mantissa, sendo que $0 \leq d_j \leq (\beta - 1)$, com $j = 1, \dots, n$;
- $d_1 \neq 0$;

A reunião de todos os números reais em ponto flutuante mais o zero constitui o **sistema de ponto flutuante**, denotado por $F(\beta, n, l, u)$. Nesse sistema, o menor número, em valor absoluto, é $(0, 1) \times \beta^l$ e o maior valor, em valor absoluto, é $0, (\beta - 1)(\beta - 1) \dots (\beta - 1) \times \beta^u$.

Considere o conjunto dos números reais \mathbb{R} e o seguinte conjunto:

$$G = \{x \in \mathbb{R} : \beta^l \leq |x| < \beta^u\}$$

Dado um número real x , três situações podem ocorrer (Exemplos com o caso $F(10, 5, -5, 5)$):

1. $x \in G$: nesse caso, pode-se encontrar valor aproximado de x , $\bar{x} \in F$.
Exemplo: $x = 235.89 = 0.23589 \times 10^3$
2. $|x| < 0.1\beta^l$: x está na condição de *underflow*.
Exemplo: $x = 0.325 \times 10^{-7}$ ($-7 < l = -5$)
3. $|x| \geq 0.(\beta - 1)(\beta - 1) \dots (\beta - 1) \times \beta^u$: x está na condição de *overflow*.
Exemplo: $x = 0.875 \times 10^9$ ($9 \geq u = 5$)

Exemplo: $F(\beta = 10, n = 4, l = -5, u = 5)$

- menor (abs): 0.1×10^{-5}
- maior (abs): 0.9999×10^5

$$G = \{x \in \mathbb{R} | 10^{-6} \leq x \leq 99990\}$$

Outros exemplos:

- Truncamento: $x = 423.5 \boxed{7} = 0.4235 \times 10^3$
- Arredondamento: $x = 423.5 \boxed{7} = 0.4236 \times 10^3$
- Underflow: $x = 0.5 \times 10^{-9}$ ($-9 < l = -5$)
- Overflow: $x = 0.3 \times 10^8$ ($8 \geq u = 5$)

1.5 Erros

Definimos o Erro Absoluto como EA_x e o Erro Relativo como ER_x :

$$EA_x = |x - \bar{x}|$$

$$ER_x = \frac{EA_x}{|\bar{x}|} = \frac{|x - \bar{x}|}{|\bar{x}|}$$

1.5.1 Erros de Arredondamento e Truncamento

Considere um sistema de ponto flutuante com n dígitos e base 10. Podemos escrever x como:

$$x = f_x \times 10^e + g_x \times 10^{e-n} \mid 0.1 \leq f_x < 1, 0 \leq g_x < 1$$

Exemplo com $x = 234,57$ e $n = 4$:

$$\begin{aligned} x &= 234,57 \\ &= 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 4 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1} + 7 \times 10^{-2} \\ &= (2 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-2} + 4 \times 10^{-3} + 5 \times 10^{-4}) \times 10^3 + (7 \times 10^{-1}) \times 10^{-1} \\ &= 0.2345 \times 10^3 + 0.7 \times 10^{-1} \end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos:

$$\begin{aligned} f_x &= 0.2345 & e &= 3 \\ g_x &= 0.7 \times 10^{-1} & e - n &= -1 \end{aligned}$$

Para representar x nesse sistema, podemos usar dois critérios:

- **Truncamento:** $\bar{x} = f_x \times 10^e$ e $g_x \times 10^{e-n}$ é desprezado;

$$\begin{aligned} |EA_x| &< 10^{e-n} \\ |ER_x| &< 10^{-n+1} \end{aligned}$$

$$\text{Ex: } \bar{x} = 0.2345 \times 10^3$$

- **Arredondamento:** $\bar{x} = \begin{cases} f_x \times 10^e, & \text{se } |g_x| < \frac{1}{2} \\ f_x \times 10^e + 10^{e-n}, & \text{se } |g_x| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

$$\begin{aligned} |EA_x| &< \frac{1}{2} \times 10^{e-n} \\ |ER_x| &< \frac{1}{2} \times 10^{-n+1} \end{aligned}$$

$$\text{Ex: } \bar{x} = 0.23456 \times 10^3$$

Dessa forma, temos $|EA_x|$ e $|ER_x|$ como:

$$\begin{aligned} |EA_x| &= |x - \bar{x}| \\ &= |f_x \times 10^e + g_x \times 10^{e-n} - f_x \times 10^e| \\ &= |g_x \times 10^{e-n}| \\ 10^{e-n} &> |g_x \times 10^{e-n}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ER_x &= \frac{EA_x}{|\bar{x}|} \\
&= \frac{|x - \bar{x}|}{|\bar{x}|} \\
&= \frac{|f_x \times 10^e + g_x \times 10^{e-n} - f_x \times 10^e|}{|f_x \times 10^e|} \\
&= \frac{g_x}{f_x} \times \frac{10^{e-n}}{10^e} \\
&= \frac{g_x}{f_x} \times 10^{-n}
\end{aligned}$$

Como g_x é dez vezes menor que f_x , temos que:

$$10^{-n+1} > \frac{g_x}{f_x} \times 10^{-n}$$

1.5.2 Teorema de Taylor

Suponha $f \in C^n[a, b]$. f^{n-1} existe em $[a, b]$ e $x_0 \in [a, b]$ e $\forall x \in [a, b], \exists \xi(x)$ entre x e x_0 com $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, onde:

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + f^{(2)}(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!} \\
&= \sum_{k=0}^n f^{(k)}(x_0) \times \frac{(x - x_0)^k}{k!} \\
R_n(x) &= f^{(n+1)}(\xi(x)) \times \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

$P_n(x)$ é chamado de polinômio de Taylor de ordem n para f em torno de x_0 e $R_n(x)$ é o resto (erro de truncamento) associado à $P_n(x)$.

Obs: A série infinita obtida fazendo-se o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$ é chamada de série de Taylor de f em torno de x_0 . No caso $x_0 = 0$, chamamos de polinômio de McLaurin (e série de McLaurin). Por exemplo, para calcular o valor de $e^{0.5}$:

$$f(x) = e^x, \quad f^{(1)}(x) = e^x, \quad f^{(2)}(x) = e^x, \quad \dots$$

Série de Taylor ($x_0 = 0$):

$$\begin{aligned}
&= f(0) + f^{(1)}(0)(x - 0) + f^{(2)}(0)\frac{(x - 0)^2}{2!} + f^{(3)}(0)\frac{(x - 0)^3}{3!} + \dots + f^{(n)}(0)\frac{(x - 0)^n}{n!} \\
&= e^0 + e^0(x) + \frac{e^0(x)^2}{2!} + \frac{e^0(x)^3}{3!} + \dots + \frac{e^0 x^n}{n!} + \dots \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots
\end{aligned}$$

Para o cálculo de $e^{0.5}$, precisamos truncar a série, usando apenas um número finito de termos da série. Por exemplo, usando os seis primeiros termos ($n = 5$), como aproximação:

$$\begin{aligned}
e^x &\cong 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \\
e^{0.5} &\cong 1 + 0.5 + \frac{0.5^2}{2} + \frac{0.5^3}{6} + \frac{0.5^4}{24} + \frac{0.5^5}{120} \\
&= 1.5 + 0.125 + 0.0208333 + 0.002604166 + 0.00026041666 \\
&= 1.648697
\end{aligned}$$

O erro de truncamento é dado por:

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= f^{(n+1)}(\xi_x) \times \frac{(x - x_0)^{n_1}}{(n+1)!} \\
&= f^{(6)}(\alpha) \times \frac{(x - 0)^6}{6!}
\end{aligned}$$

Neste caso:

$$\frac{\alpha^6}{6!}, \text{ com } 0 \leq \alpha \leq 0.5$$

Estimativa para o erro, faço $\alpha = 0.5$:

$$\begin{aligned}
R_n(x) &\leq \gamma = \frac{0.5^6}{720} \\
&= 0.217 \times 10^{-6}
\end{aligned}$$

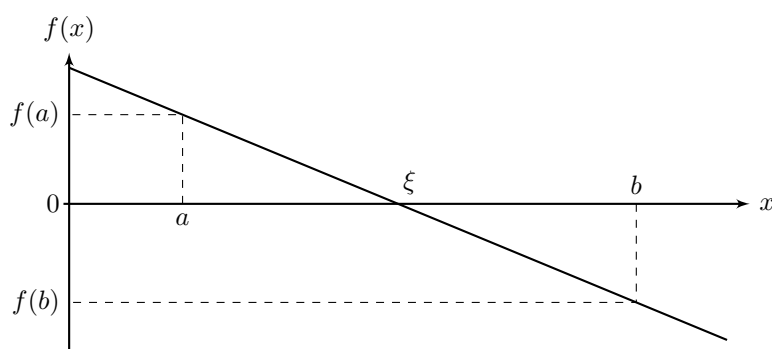
1.6 Zeros reais de funções reais

Definição: um número real ξ é um zero da função $f(x)$ ou uma raiz da equação $f(x) = 0$ se $f(\xi) = 0$. Para calcularmos raízes reais, os métodos numéricos geralmente são de duas fases:

1. **Determinar uma aproximação inicial:** localizar ou isolar as raízes (ou seja, determinar um intervalo que contenha a raiz);
2. **Refinamento:** melhorar essa aproximação usando métodos iterativos (obter aproximações dentro de uma precisão ε fixada);

1.6.1 Fase 1: Localizar raízes de $f(x)$

Teorema: Seja $f(x)$ contínua em $[a, b]$. Se $f(a) \times f(b) < 0$, então pelo menos temos um ponto ξ tal que $f(\xi) = 0$



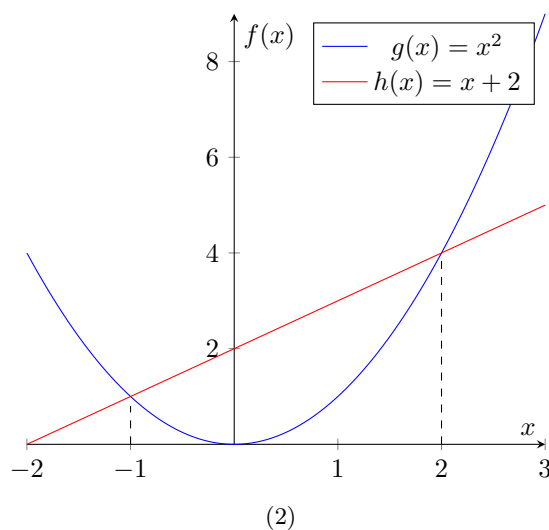
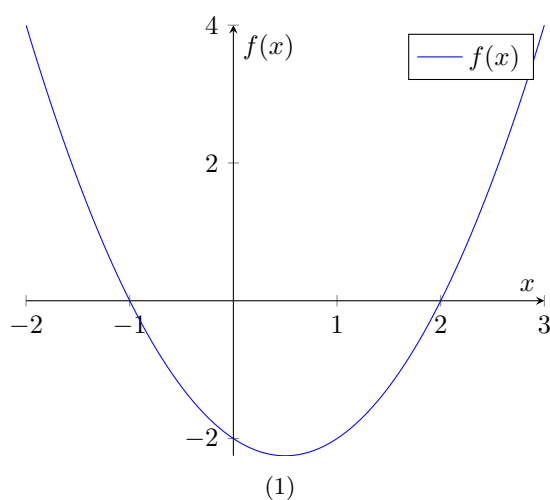
Método gráfico

Pode ser utilizado para obter uma aproximação inicial para a raiz. Ela consiste em uma das seguintes alternativas:

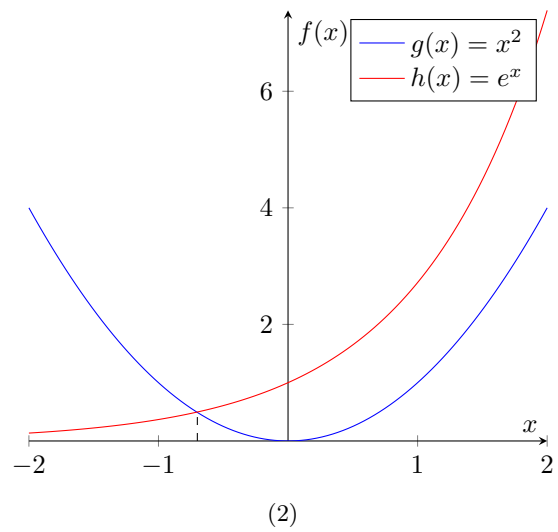
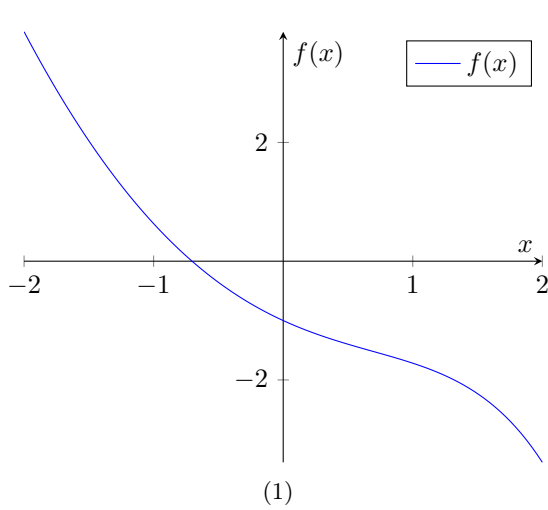
1. Ou construir o gráfico de $y = f(x)$ e obter sua intersecção com o eixo \vec{Ox} ;
2. Ou escrever $f(x)$ na forma $g(x) = h(x)$ e obter a intersecção dos gráficos $g(x) - h(x) = 0 = f(x)$;

Exemplos:

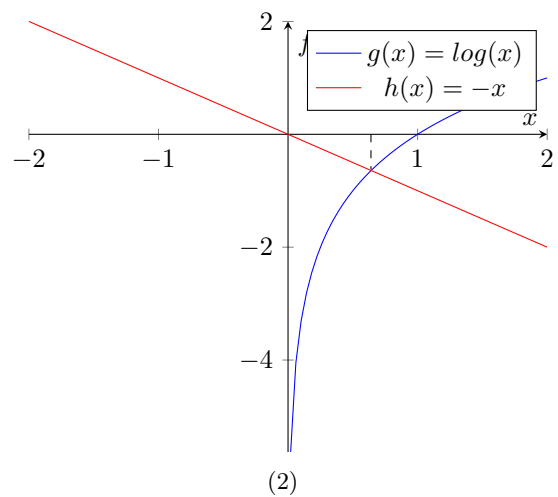
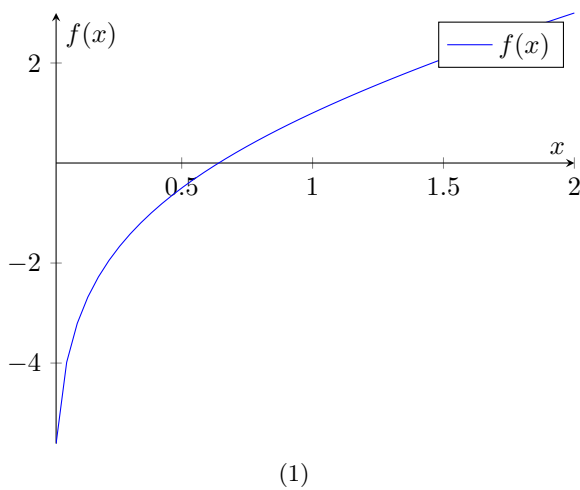
(a) $f(x) : x^2 - x - 2 = 0$



(b) $f(x) : x^2 - e^x = 0$



(c) $f(x) : \log x + x = 0$



1.6.2 Fase 2: Refinamento

Métodos iterativos para se obter zeros de funções:

- ponto inicial;
- sequência de instruções (iterações);
- critério de parada;

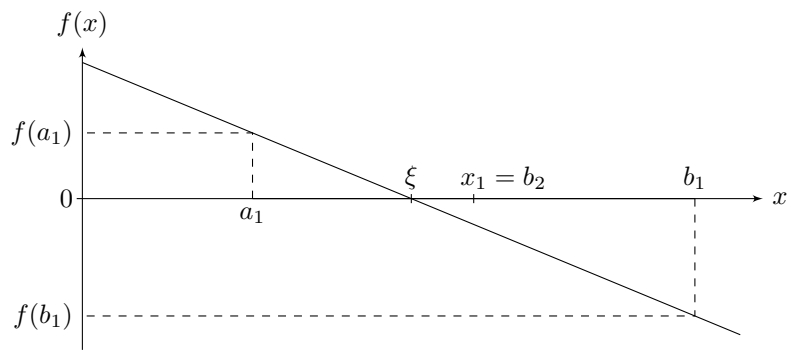
$$|f(x)| < \varepsilon$$

$$|x_{k-1} - x_k| < \varepsilon$$

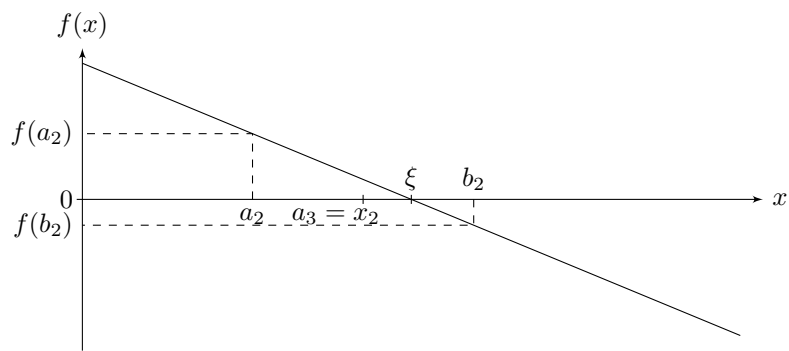
1.6.3 Método da Bissecão

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e suponha $f(a) \times f(b) < 0$ (ou seja, existe raiz real). Para simplificar, vamos supor que existe uma única raiz real em $[a, b]$. O método da bissecão consiste em determinar uma sequência de intervalos $[a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \dots$ de tal forma que $[a_i, b_i]$ sempre contenha a raiz.

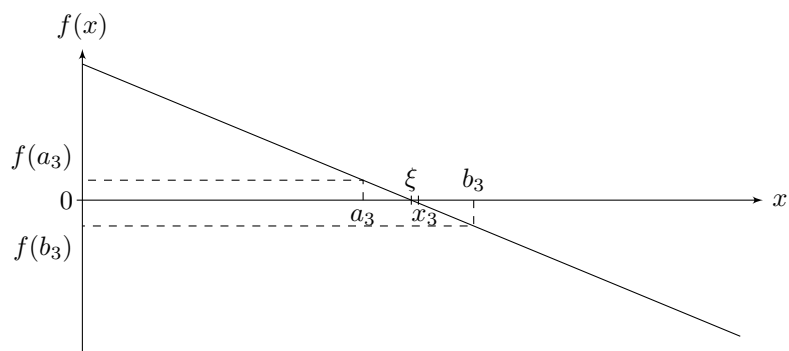
1ª iteração



2ª iteração



3ª iteração



De forma geral:

$$x_i = \frac{a_i + b_i}{2}$$

$$f(a_i) \times f(x_i) = \begin{cases} < 0, & \text{então} \begin{cases} a_{i+1} = a_i \\ b_{i+1} = x_i \end{cases} \\ > 0, & \text{então} \begin{cases} a_{i+1} = x_i \\ b_{i+1} = b_i \end{cases} \end{cases}$$

Critério de Parada: $|b_k - a_k| < \varepsilon$

Estimativa para o número de iterações

Na iteração k , temos que:

$$\begin{aligned}b_k - a_k &= \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} \\ &= \frac{b_0 - a_0}{2^k}\end{aligned}$$

Queremos saber o valor de k tal que $b_k - a_k < \varepsilon$, ou seja:

$$\begin{aligned}\frac{b_0 - a_0}{2^k} &< \varepsilon \\ 2^k \varepsilon &> b_0 - a_0 \\ 2^k &> \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} \\ k \times \log 2 &> \log(b_0 - a_0) - \log \varepsilon \\ \boxed{k > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log \varepsilon}{\log 2}}\end{aligned}$$

Exemplo: $f(x) : x^3 + 3x - 1 = 0$, com $[a, b] = [0, 1]$ e $\varepsilon = 10^{-1}$

$$\begin{array}{ll}f(a = a_1) = f(0) & f(b = b_1) = f(1) \\ f(0) = -1 & f(1) = 3 \\ -1 < 0 & 3 > 0\end{array}$$

$$f(a) \times f(b) < 0 \rightarrow \text{Ok!}$$

$$\begin{array}{lll}k = 1 & x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} & b_2 = 0,5 \\ & = 0,5 & f(b_2) = 0,625 \\ & & 0,625 > 0\end{array}$$

$$\begin{aligned}\xi &\in [0, 0.5] \\ |b_2 - a_2| &= 0,5 > \varepsilon\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}k = 2 & x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} & a_3 = 0,25 \\ & = 0,25 & f(a_3) = -0,23437 \\ & & -0,23437 < 0\end{array}$$

$$\begin{aligned}\xi &\in [0.25, 0.5] \\ |b_3 - a_3| &= 0,25 > \varepsilon\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
k = 3 & x_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} & a_4 = 0,375 \\
& = 0,375 & f(a_4) = -0,1777
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\xi \in [0.375, 0.5] \\
|b_4 - a_4| = 0,125 > \varepsilon
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
k = 3 & x_4 = \frac{a_4 + b_4}{2} & a_5 = 0,3125 \\
& = 0,375 & f(a_5) = -0,0319824
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\xi \in [0.3125, 0.5] \\
|b_5 - a_5| = \boxed{0,0625 < \varepsilon}
\end{array}$$

Pare!

Estimativa para o número de iterações: $\begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \end{cases}, \varepsilon = 0,1.$

$$k > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log(\varepsilon)}{\log 2}$$

$$k > \frac{\log(1 - 0) - \log(0,1)}{\log 2}$$

$$k > \frac{\log(1) - \log(10^{-1})}{\log 2}$$

$$k > \frac{\log(1) + \log(10)}{\log 2}$$

$$k > 1,5$$

Sobre a convergência

A convergência está garantida, visto que $a_i \leq x_i \leq b_i$, sendo a_i crescente (não-decrescente) e b_i decrescente (não-crescente).

Porém, ela é muito lenta: se o intervalo iniciar $a_0 - a_0 \ll \varepsilon$ e ε for muito pequeno, o número de iterações tende a ser muito grande. Exemplo:

$$\left. \begin{array}{l} |b_0 - a_0| = 3 \\ \varepsilon = 10^{-7} \end{array} \right\} \rightarrow k > \frac{\log(3) - \log(10^{-7})}{\log(2)}$$

$$k \approx 24,8384$$

$$k = 25 \text{ iterações}$$

1.6.4 Método do Ponto Fixo

Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$ e existe pelo menos uma raiz ξ neste intervalo. O método consiste em transformar esta equação em uma equação equivalente $x = \varphi(x)$ e, a partir de uma aproximação inicial x_0 , gerar uma sequência de aproximações $\{x_k\}$ para ξ , usando a relação: $x_{k+1} = \varphi(x_k)$.

A função $\varphi(x)$ é tal que $f(\xi) = 0$ se e somente se $\varphi(\xi) = \xi$. Assim, encontrar um zero de $f(x)$ é equivalente a encontrar um ponto fixo para $\varphi(x)$.

Uma função que satisfaz essa condição é chamada de função de iteração para a equação $f(x) = 0$.

Exemplos: $f(x) : x^2 + x - 6 = 0$. São funções de iteração:

$$(a) \quad x = 6 - x^2 \rightarrow \varphi_1(x) = 6 - x^2$$

$$(b) \quad \begin{array}{l} x^2 = 6 - x \\ x = \pm\sqrt{6-x} \end{array} \rightarrow \varphi_2(x) = \pm\sqrt{6-x}$$

$$(c) \quad \begin{array}{l} x(x+1) - 6 = 0 \\ x = \frac{6}{x+1} \end{array} \rightarrow \varphi_3(x) = \frac{6}{x+1}$$

Obs: Podem existir infinitas funções de iteração $\varphi(x)$ para uma $f(x) = 0$.

A forma geral das funções de iteração se dá por:

$$\varphi(x) = x + A(x) \cdot f(x)$$

com a condição de que, em ξ , ponto fixo de $\varphi(x)$, se tenha $A(\xi) \neq 0$.

Mostremos que $f(\xi) = 0 \iff \varphi(\xi) = \xi$:

(\Rightarrow) Seja ξ tal que $f(\xi) = 0$.

$$\varphi(\xi) = \xi + A(\xi) \cdot f(\xi)$$

$$\varphi(\xi) = \xi + A(\xi) \cdot 0$$

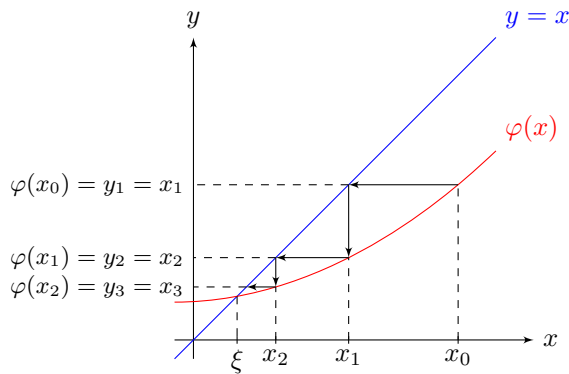
$$\varphi(\xi) = \xi$$

(\Leftarrow) Seja $\varphi(\xi) = \xi$. Assim,

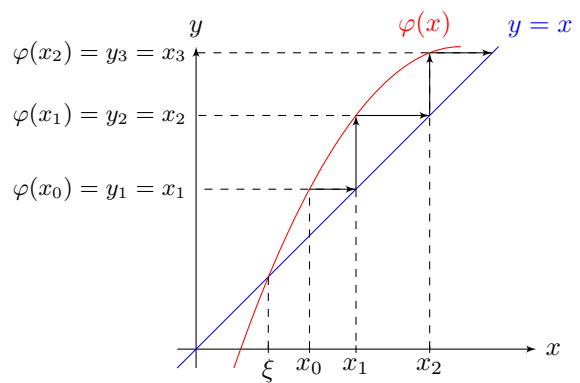
$$\left. \begin{array}{l} \varphi(\xi) = \xi + A(\xi) \cdot f(\xi) \\ \varphi(\xi) = \xi \end{array} \right\} \Rightarrow A(\xi) \cdot f(\xi) = 0$$

Como $A(\xi) \neq 0$, temos que $f(\xi) = 0$. \square

Interpretação Geométrica: Graficamente, uma raiz da equação $x = \varphi(x)$ é a abscissa do ponto de intersecção da reta $y = x$ e da curva $y = \varphi(x)$.



$\{x_k\} \rightarrow \xi$ quando $k \rightarrow \infty$



Para certas $\varphi(x)$, o processo pode gerar uma sequência $\{x_k\}$ que diverge de ξ

Exemplos:

$$(a) \quad \xi = 2, \varphi_1(x) = 6 - x^2, x_0 = 1,5$$

$$x_1 = \varphi_2(x_0) = 3,75$$

$$x_2 = \varphi_2(x_1) = -8,0625$$

$$x_3 = \varphi_2(x_2) = -59,003906$$

$\{x_k\}$ não está convergindo para $\xi = 2$.

(b) $\xi = 2, \varphi_2(x) = \sqrt{6-x}, x_0 = 1,5$

$$x_1 = \varphi_2(x_0) = 2,12132$$

$$x_2 = \varphi_2(x_1) = 1,96944$$

$$x_3 = \varphi_2(x_2) = 2,00763$$

$$x_4 = \varphi_2(x_3) = 1,99809$$

$$x_5 = \varphi_2(x_4) = 2,0048$$

$\{x_k\}$ está convergindo para $\xi = 2$.

Teorema: Seja ξ uma raiz de $f(x) = 0$ isolada em um intervalo I centrado em ξ . Seja $\varphi(x)$ uma função de iteração para $f(x) = 0$.

Se:

(i) φ e $\varphi'(x)$ são contínuas em I .

(ii) $|\varphi'(x)| \leq M \leq 1, \forall x \in I$.

(iii) $x_0 \in I$.

Então, a sequência $\{x_k\}$ gerada pelo processo iterativo $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ converge para ξ .

Demonstração: Ver Ruggiero, página 59.

1º Mostra que se $x_0 \in I \Rightarrow x_k \in I, \forall k$

2º Mostra que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi$

Exemplo: $f(x) = x^2 + x - 6, \xi = 2$

1. $\varphi_1(x) = 6 - x^2$
 $\varphi'_1(x) = -2x$
 $\varphi_1(x)$ e $\varphi'_1(x)$ são contínuas em \mathbb{R} .

$$|\varphi'_1(x)| < 1 \iff |-2x| < 1 \iff -1 < -2x < 1$$

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} > x > -\frac{1}{2}$$

\nexists intervalo I centrado em $\xi = 2$ tal que $|\varphi'_1(x)| < 1, \forall x \in I$.

$\therefore \varphi_1(x)$ não satisfaz o item (ii) do teorema. Então não há convergência.

2. $\varphi_2(x) = (6 - x)^{\frac{1}{2}}$
 $\varphi'_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{6-x}} \varphi_2(x)$ é contínua em $S = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 6\}$
 $\varphi'_2(x)$ é contínua em $S' = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 6\}$

$$|\varphi'_2(x)| < 1 \iff \left| \frac{1}{2\sqrt{6-x}} \right| < 1 \iff \frac{1}{2\sqrt{6-x}} < 1$$

$$x < 5,75$$

\therefore é impossível obter um intervalo I centrado em $\xi = 2$ tais que as condições do teorema são satisfeitas.

Critério de Parada para o MPF:

- $|x_k - x_{k-1}| = |\varphi(x_{k-1}) - x_{k-1}| < \varepsilon$ (erro absoluto)
- $|f(x_k)| < \varepsilon$

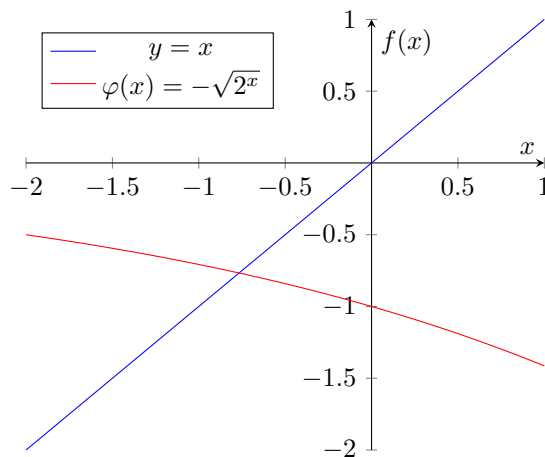
Exercício: Determinar uma raiz de $x^2 - 2^x = 0$ pelo MPF, com erro absoluto inferior a $\varepsilon = 0.6 \times 10^{-3}$, no intervalo $[-1, 0]$. $\xi = -0.76658$

$$\begin{aligned}x^2 - 2^x &= 0 \\x^2 &= 2^x \\x &= \pm\sqrt{2^x}\end{aligned}$$

$\varphi(x) = -\sqrt{2^x}$: Função de iteração $-\sqrt{}$ pois sabe-se que a raiz é negativa (intervalo vai de -1 a 0).

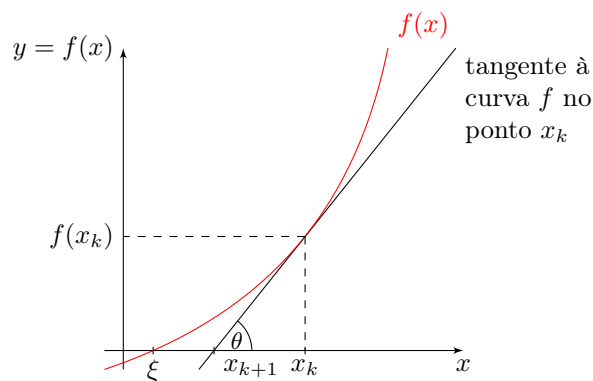
$x_0 = -0.5$	
$x_1 = \varphi(x_0) = -\sqrt{2^{-0.5}} = -0.84089$	$\varepsilon = -0.84089 - (-0.5) = 0.34089$
$x_2 = \varphi(x_1) = -\sqrt{2^{-0.84089}} = -0.74719$	$\varepsilon = -0.74719 - (-0.84089) = 0.0937$
$x_3 = \varphi(x_2) = -\sqrt{2^{-0.74719}} = -0.77185$	$\varepsilon = -0.77185 - (-0.74719) = 0.02466$
$x_4 = \varphi(x_3) = -\sqrt{2^{-0.77185}} = -0.76528$	$\varepsilon = -0.76528 - (-0.77185) = 0.00657$
$x_5 = \varphi(x_4) = -\sqrt{2^{-0.76528}} = -0.76703$	$\varepsilon = -0.76703 - (-0.76528) = 0.00175$
$x_6 = \varphi(x_5) = -\sqrt{2^{-0.76703}} = -0.76656$	$\varepsilon = -0.76656 - (-0.76703) = 0.0004$
	$\varepsilon = \boxed{0.0004 < 0.0006} \text{ (Pare!)}$

Uma das raízes de $x^2 - 2^x = 0$ é $x = -0.76656$.



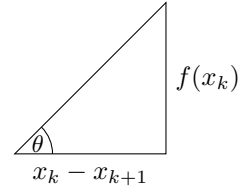
Visualização gráfica das funções $x = y$ e $\varphi(x) = -\sqrt{2^x}$

1.6.5 Método de Newton



Sabemos que a derivada é a inclinação da reta tangente:

$$\tan \theta = f'(x)$$



Por outro lado, no triângulo, temos:

$$\tan \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}}$$

Então, temos:

$$\begin{aligned} \tan \theta = f'(x_k) &= \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}} \\ x_k - x_{k+1} &= \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ x_k &= x_{k+1} - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Dedução como um Método de Ponto Fixo: Visto que a função de iteração é dada por:

$$\varphi(x) = x + A(x).f(x)$$

com $A(\xi) \neq 0$ e com ξ ponto fixo de $\phi(x)$.

A função de iteração ideal satisfaz a condição $\varphi'(\xi) = 0$. Assim,

$$\varphi(x) = x + A(x).f(x)$$

Aplicando a regra do produto na derivada:

$$\varphi'(x) = 1 + A'(x).f(x) + A(x).f'(x)$$

Vimos que MPF tem convergência garantida para

$$|\varphi(x)| < 1, \quad \forall x \in I \text{ centrado na raiz}$$

A convergência é mais rápida quanto menor for $|\varphi'(\xi)|$. Assim, se escolhermos $A(x)$ tal que $\varphi'(\xi) = 0$, teremos garantia de convergência.

Assim:

$$\begin{aligned} \varphi'(\xi) &= 0 \\ 1 + A'(\xi).f(\xi) + A(\xi).f'(\xi) &= 0 \\ 1 + A(\xi).f'(\xi) &= 0 \\ A(\xi) &= \frac{-1}{f'(\xi)} \end{aligned}$$

Então, a função A é dada por: $A(x) = \frac{-1}{f'(x)}$ e a função da iteração correspondente é:

$$\varphi(x) = x - \frac{1}{f'(x)}.f(x) = \boxed{x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$$

e a sequência de aproximações x_k é gerada por:

$$\boxed{x_{k+1} = \varphi(x_k) \iff x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

Por série de Taylor: Série de Taylor de $f(x)$ em torno do ponto $x = a$

$$\begin{aligned} f(x) &\simeq f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n \end{aligned}$$

para $a = 0$ temos série de MacLaurin.

A partir de um ponto inicial x_0 , a cada iteração k , construímos a aproximação de f por série de Taylor, em torno de x_k :

$$f(\underline{x}) \sim r(\underline{x}) = f(x_k) + f'(x_k) \cdot (\underline{x} - x_k)$$

O próximo novo ponto é obtido tal que

$$\begin{aligned} r(x_{k+1}) = 0 &\iff f(x_k) + f'(x_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) = 0 \\ &\iff f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = -f(x_k) \\ &\iff (x_{k+1} - x_k) = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ &\iff \boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}} \end{aligned}$$

Algoritmo do Método de Newton

Teorema: Sejam f , f' e f'' contínuas em um intervalo I que contém a raiz ξ de f . Supor $f'(\xi) \neq 0$.

Então existe um intervalo $I_2 \subset I$, contendo a raiz ξ , tal que: Para $x_0 \in I_2$, a sequência x_k gerada pelo método de Newton ($x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$) converge para a raiz.

Taxa de convergência quadrática: Para $k \rightarrow \infty$, a sequência gerada pelo Método de Newton converge para a raiz ξ , então:

$$|x_{k+1} - \xi| < C \times |x_k - \xi|^2 \rightarrow (\text{convergência quadrática})$$

em que C é uma constante real positiva. Essa propriedade é assintótica e, no limite, os dígitos corretos das aproximações praticamente dobram de uma iteração para a outra.

Exemplo: Use o Método de Newton para calcular o valor de $\sqrt{2}$ com erro $\varepsilon = 10^{-6}$, partindo de $x_0 = 1.4$

$$x = \sqrt{2} \iff x^2 - 2 = 0 \iff f(x) = x^2 - 2 = 0$$

$$\sqrt{2} \cong 1.414213562373$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2 \\ f'(x) &= 2x \end{aligned}$$

Método de Newton:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{(x_k^2 - 2)}{2x_k} = \frac{x_k^2 + 2}{2x_k}$$

$$x_0 = 1.4$$

$$x_1 = \frac{x_0^2 + 2}{2x_0} = \frac{1.4^2 + 2}{2 \times 1.4} = 1.41428571429 \quad \varepsilon_1 = |x_1 - x_0| = 0.01928571429$$

$$x_2 = \frac{1.41428571429^2 + 2}{2 \times 1.41428571429} = 1.41421356421 \quad \varepsilon_2 = |x_2 - x_1| = 0.00007215$$

$$x_3 = \frac{1.41421356421^2 + 2}{2 \times 1.41421356421} = 1.41421356237 \quad \varepsilon_3 = |x_3 - x_2| = 2.7 \times 10^{-9} < \varepsilon$$

Exercícios: Determine o ponto inicial pelo método gráfico e considere $\varepsilon = 0.001$. (Atenção! Calculadora em radianos)

(a) $f(x) = x - e^{-x} = 0$

(b) $f(x) = \cos(x) - x = 0$