Anotações MS211

Aulas ministradas pela
Prof$^{\underline{a}}$ Dr$^{\underline{a}}$ Kelly Cristina Poldi

Eduardo M. F. de Souza

30 de março de 2020

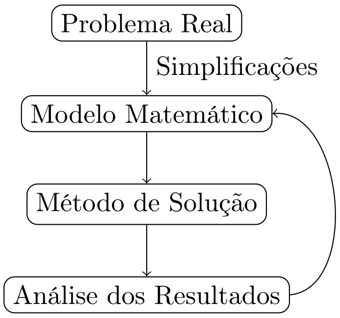
Sumário

1 Erros em processos Numéricos **2**
1.1 Introdução . . . 2
1.2 Representação dos Números . . . 2
1.3 Conversão de Números nos Sistemas decimal e binário . . . 2
1.3.1 Mudança da base decimal para a base binária . . . 3
1.3.2 Mudança da base binária para base decimal: . . . 3
1.4 Aritmética de Ponto Flutuante . . . 4
1.5 Erros . . . 5
1.5.1 Erros de Arredondamento e Truncamento . . . 5
1.5.2 Teorema de Taylor . . . 6
1.6 Zeros reais de funções reais . . . 8
1.6.1 Fase 1: Localizar raízes de $f(x)$ . . . 8
1.6.2 Fase 2: Refinamento . . . 9
1.6.3 Método da Bisseção . . . 9
1.6.4 Método do Ponto Fixo . . . 12
1.6.5 Método de Newton . . . 15

1 Erros em processos Numéricos

1.1 Introdução

Em diversas áreas científicas, os métodos numéricos podem ser usados para resolução de problemas. A resolução de problemas envolve várias fases:



Uma vez resolvido um problema, pode ocorrer que a solução obtida não seja a esperada. Isto porque durante o processo de resolução pode ter ocorrido:

1. Erros de modelagem matemáticas;
2. Erro de parâmetros;
3. Erros associados aos sistema de numeração utilizado;
4. Erros resultantes das operações efetuadas;
5. Entre outros;

1.2 Representação dos Números

A representação de um número depende da base escolhida (ou disponível na máquina utilizada) e o número de dígitos usados na sua representação.

Exemplo: calcular a área de uma circunferência:

$$\begin{aligned} r &= 1000m \\ A &\cong 31400m^2 \\ A &\cong 31416m^2 \\ A &\cong 31415,92m^2 \end{aligned}$$

Quanto maior o número de dígitos utilizados, maior será a precisão obtida! Além disso, um número pode ter representação finita em uma base e não finita em outra. Por exemplo:

$$(0,2)_{10} = (0,0011\overline{0011}\ldots)_2$$

1.3 Conversão de Números nos Sistemas decimal e binário

Sistema posicional:

$$\begin{aligned} (6)_{10} &= 6 \times 10^0 \\ (347)_{10} &= 3 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 7 \times 10^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (10111)_2 &= 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= (23)_{10} \end{aligned}$$

De forma geral, um número n na base β é:

$$(a_j aj - 1a_{j-2} \cdots a_2 a_1 a_0)_\beta, \text{ com } 0 \leq a_k \leq \beta - 1, \text{ e } k = 1 \ldots j$$
$$(n)_\beta = a_j\beta^j + a_{j-1}\beta^{j-1} + \cdots + a_2\beta^2 + a_1\beta^1 + a_0\beta^0$$

1.3.1 Mudança da base decimal para a base binária

1. Parte inteira (Divisões sucessivas):

$$
\begin{aligned}
& && (6)_{10} = (?)_2 \\
6 \bmod 2 &= \boxed{0} \to && (6)_{10} = (? \ldots \boxed{0})_2 \\
\lfloor 6 \div 2 \rfloor &= 3 && \\
3 \bmod 2 &= \boxed{1} \to && (6)_{10} = (? \ldots \boxed{1}0)_2 \\
\lfloor 3 \div 2 \rfloor &= 1 && \\
1 \bmod 2 &= \boxed{1} \to && (6)_{10} = (? \ldots \boxed{1}10)_2 \\
\lfloor 1 \div 2 \rfloor &= \underline{0} && \quad \textbf{(Pare!)} \\
& && (6)_{10} = (110)_2
\end{aligned}
$$

2. Parte fracionária (Multiplicações sucessivas)

$$
\begin{aligned}
& && (0,1875)_{10} = (?)_2 \\
0,1875 \times 2 &= \boxed{0},375 \to && (0,1875)_{10} = (0.\boxed{0} \ldots ?)_2 \\
0,375 - \lfloor 0,375 \rfloor &= 0,375 && \\
0,375 \times 2 &= \boxed{0},75 \to && (0,1875)_{10} = (0.0\boxed{0} \ldots ?)_2 \\
0,75 - \lfloor 0,75 \rfloor &= 0,75 && \\
0,75 \times 2 &= \boxed{1},5 \to && (0,1875)_{10} = (0.00\boxed{1} \ldots ?)_2 \\
1,5 - \lfloor 1,5 \rfloor &= 0,5 && \\
0,5 \times 2 &= \boxed{1},\underline{0} \to && (0,1875)_{10} = (0.001\boxed{1} \ldots ?)_2 \\
\textbf{(Pare!)} & && (0,1875)_{10} = (0.0011)_2
\end{aligned}
$$

Obs: Alguns números não têm representação finita na base binária — um ciclo de multiplicações passa a ocorrer. O fato de um número não ter uma representação finita no sistema binário (usado nos computadores) pode acarretar na ocorrência de erros.

$$
\begin{aligned}
& && (0,1)_{10} = (?)_2 \\
0,1 \times 2 &= \boxed{0},2 \to && (0,1)_{10} = (0.\boxed{0} \ldots ?)_2 \\
0,2 \times 2 &= \boxed{0},4 \to && (0,1)_{10} = (0.0\boxed{0} \ldots ?)_2 \\
0,4 \times 2 &= \boxed{0},8 \to && (0,1)_{10} = (0.00\boxed{0} \ldots ?)_2 \\
0,8 \times 2 &= \boxed{1},6 \to && (0,1)_{10} = (0.0001\boxed{1} \ldots ?)_2 \\
0,6 \times 2 &= \boxed{1},2 \to && (0,1)_{10} = (0.0001\boxed{1} \ldots ?)_2 \\
0,2 \times 2 &= \boxed{0},4 \to && (0,1)_{10} = (0.00011\boxed{0} \ldots ?)_2 \\
0,4 \times 2 &= \boxed{0},8 \to && (0,1)_{10} = (0.000110\boxed{0} \ldots ?)_2 \\
& && \vdots \\
& && (0,1)_{10} = (0,0001100110\overline{0011} \ldots)_2
\end{aligned}
$$

1.3.2 Mudança da base binária para base decimal:

1. Parte inteira: expoentes positivos da direita para a esquerda

$$
\begin{aligned}
(10011)_2 &= 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\
&= 8 + 0 + 2 + 1 \\
&= (11)_{10}
\end{aligned}
$$

2. Parte fracionária: expoentes negativos da esquerda para direita

$$\begin{aligned}(0.101)_2 &= 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} \\ &= 0,5 + 0,125 \\ &= (0,625)_{10}\end{aligned}$$

Exercício: escreva $(1101.011)_2$ na base decimal:

$$\begin{aligned}(1101.011)_2 = &\ 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + \\ &+ 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} \\ = &\ 8 + 4 + 0 + 1 + 0 + 0,25 + 0,125 \\ = &\ (13,375)_{10}\end{aligned}$$

1.4 Aritmética de Ponto Flutuante

Um número real pode ser representado no sistema de ponto flutuante como:

$$x = m \times \beta^e, \text{ em que:}$$
$$m = \pm\, 0, d_1 d_2 \ldots\ d_n,\ n \in \mathbb{N}$$

Em que:

- m é a mantissa;
- n é o número de dígitos na mantissa;
- β é a base do sistema;
- e é o expoente, $e \in \mathbb{Z}:\ l \leq\ e \leq\ u$, sendo que l e u são inteiros fixos;
- d_j é o j-ésimo digito da mantissa, sendo que $0 \leq\ d_j \leq\ (\beta - 1),$ com $j = 1,\ \ldots\ ,\ n;$
- $d_1 \neq 0;$

A reunião de todos os números reais em ponto flutuante mais o zero constitui o **sistema de ponto flutuante**, denotado por $F(\beta, n, l, u)$. Nesse sistema, o menor número, em valor absoluto, é $(0,1) \times \beta^e$ e o maior valor, em valor absoluto, é $0,(\beta-1)(\beta-1)\ldots(\beta-1) \times \beta^u$.

Considere o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e o seguinte conjunto:

$$G = \{x \in \mathbb{R} : \beta^l \leq |x| < \beta^u\}$$

Dado um número real x, três situações podem ocorrer (Exemplos com o caso $F(10, 5, -5, 5)$):

1. $x \in G$: nesse caso, pode-se encontrar valor aproximado de x, $\overline{x} \in F$.
   Exemplo: $x = 235.89 = 0.23589 \times 10^3$
2. $|x| < 0.1\beta^l$: x está na condição de *underflow*.
   Exemplo: $x = 0.325 \times 10^{-7}$ $(-7 < l = -5)$
3. $|x| \geq 0.(\beta-1)(\beta-1)\ \ldots\ (\beta-1) \times \beta^u$: x está na condição de *overflow*.
   Exemplo: $x = 0.875 \times 10^{\underline{9}}$ $(9 \geq u = 5)$

Exemplo: $F(\beta = 10, n = 4, l = -5, u = 5)$

- menor (abs): 0.1×10^{-5}
- maior (abs): 0.9999×10^5

$$G = \{x \in \mathbb{R} | 10^{-6} \leq x \leq 99990\}$$

Outros exemplos:

- Truncamento: $x = 423.5\boxed{7} = 0.4235 \times 10^3$
- Arredondamento: $x = 423.5\boxed{7} = 0.4236 \times 10^3$
- Underflow: $x = 0.5 \times 10^{-9}$ $(-9 < l = -5)$
- Overflow: $x = 0.3 \times 10^8$ $(8 \geq u = 5)$

1.5 Erros

Definimos o Erro Absoluto como EA_x e o Erro Relativo como ER_x:

$$EA_x = |x - \overline{x}|$$
$$ER_x = \frac{EA_x}{|\overline{x}|} = \frac{|x - \overline{x}|}{|\overline{x}|}$$

1.5.1 Erros de Arredondamento e Truncamento

Considere um sistema de ponto flutuante com n dígitos e base 10. Podemos escrever x como:

$$x = f_x \times 10^e + g_x \times 10^{e-n} \mid 0.1 \leq f_x < 1,\ 0 \leq g_x < 1$$

Exemplo com $x = 234,57$ e $n = 4$:

$$\begin{aligned} x &= 234,57 \\ &= 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 4 \times 10^0 + 5 \times^{-1} + 7 \times 10^{-2} \\ &= (2 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-2} + 4 \times 10^{-3} + 5 \times 10^{-4}) \times 10^3 + (7 \times 10^-1) \times 10^{-1} \\ &= 0.2345 \times 10^3 + 0.7 \times 10^{-1} \end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos:

$$f_x = 0.2345 \qquad e = 3$$
$$g_x = 0.7 \times 10^{-1} \qquad e - n = -1$$

Para representar x nesse sistema, podemos usar dois critérios:

- **Truncamento:** $\overline{x} = f_x \times 10^e$ e $g_x \times 10^{e-n}$ é desprezado;

$$|EA_x| < 10^{e-n}$$
$$|ER_x| < 10^{-n+1}$$

Ex: $\overline{x} = 0.2345 \times 10^3$

- **Arredondamento:** $\overline{x} = \begin{cases} f_x \times 10^e, & \text{se } |g_x| < \frac{1}{2} \\ f_x \times 10^e + 10^{e-n}, & \text{se } |g_x| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

$$|EA_x| < \frac{1}{2} \times 10^{e-n}$$
$$|ER_x| < \frac{1}{2} \times 10^{-n+1}$$

Ex: $\overline{x} = 0.23456 \times 10^3$

Dessa forma, temos $|EA_x|$ e $|ER_x|$ como:

$$\begin{aligned} |EA_x| &= |x - \overline{x}| \\ &= |f_x \times 10^e + g_x \times 10^{e-n} - f_x \times 10^e| \\ &= |g_x \times 10^{e-n}| \\ 10^{e-n} &> |g_x \times 10^{e-n}| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
ER_x &= \frac{EA_x}{|\overline{x}|} \\
&= \frac{|x - \overline{x}|}{|\overline{x}|} \\
&= \frac{|f_x \times 10^e + g_x \times 10^{e-n} - f_x \times 10^e|}{|f_x \times 10^e|} \\
&= \frac{g_x}{f_x} \times \frac{10^{e-n}}{10^e} \\
&= \frac{g_x}{f_x} \times 10^{-n}
\end{aligned}
$$

Como g_x é dez vezes menor que f_x, temos que:

$$10^{-n+1} > \frac{g_x}{f_x} \times 10^{-n}$$

1.5.2 Teorema de Taylor

Suponha $f \in C^n[a,b]$. f^{n-1} existe em $[a,b]$ e $x_0 \in [a,b]$ e $\forall x \in [a,b], \exists\ \xi(x)$ entre x e x_0 com $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, onde:

$$
\begin{aligned}
P_n(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + f^{(2)}(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} \\
= \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0) \times \frac{(x-x_0)^k}{k!} \\
R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi(x)) \times \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}
$$

$P_n(x)$ é chamado de polinômio de taylor de ordem n para f em torno de x_0 e $R_n(x)$ é o resto (erro de truncamento) associado à $P_n(x)$.

Obs: A série infinita obtida fazendo-se o limite $\lim_{n\to\infty} P_n(x)$ é chamada de série de Taylor de f em torno de x_0. No caso $x_0 = 0$, chamamos de polinômio de McLaurin (e série de McLaurin). Por exemplo, para calcular o valor de $e^{0.5}$:

$$f(x) = e^x,\ f^{(1)}(x) = e^x,\ f^{(2)}(x) = e^x,\ \ldots$$

Série de Taylor ($x_0 = 0$):

$$
\begin{aligned}
&= f(0) + f^{(1)}(0)(x-0) + f^{(2)}(0)\frac{(x-0)^2}{2!} + f^{(3)}(x)\frac{(x-0)^3}{3!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{(x-0)^n}{n!} \\
&= e^0 + e^0(x) + \frac{e^0(x)^2}{2!} + \frac{e^0(x)^3}{3!} + \cdots + \frac{e^0 x^n}{n!} + \cdots \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots
\end{aligned}
$$

Para o cálculo de $e^{0.5}$, precisamos <u>truncar</u> a série, usando apenas um número finito de termos da série. Por exemplo, usando os <u>seis primeiros termos</u> ($n = 5$), como aproximação:

$$
\begin{aligned}
e^x &\approxeq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \\
e^{0.5} &\approxeq 1 + 0.5 + \frac{0.5^2}{2} + \frac{0.5^3}{6} + \frac{0.5^4}{24} + \frac{0.5^5}{120} \\
&= 1.5 + 0.125 + 0.0208333 + 0.002604166 + 0.00026041666 \\
&= 1.648697
\end{aligned}
$$

O erro de truncamento é dado por:

$$
\begin{aligned}
R_n(x) &= f^{(n+1)}(\xi_x) \times \frac{(x - x_0)^{n_1}}{(n+1)!} \\
&= f^{(6)}(\alpha) \times \frac{(x - 0)^6}{6!}
\end{aligned}
$$

Neste caso:

$$
\frac{\alpha^6}{6!}, \text{ com } 0 \leq \alpha \leq 0.5
$$

Estimativa para o erro, faço $\alpha = 0.5$:

$$
\begin{aligned}
R_n(x) \leq \gamma &= \frac{0.5^6}{720} \\
&= 0.217 \times 10^{-6}
\end{aligned}
$$

1.6 Zeros reais de funções reais

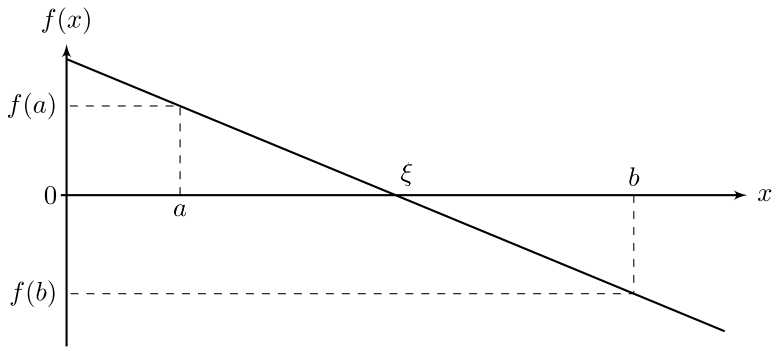
Definição: um número real ξ é um zero da função $f(x)$ ou uma raíz da equação $f(x) = 0$ se $f(\xi) = 0$.

Para calcularmos raízes reais, os métodos numéricos geralmente são de duas fases:

1. **Determinar uma aproximação inicial:** localizar ou isolar as raízes (ou seja, determinar umintervalo que contenha a raiz);
2. **Refinamento:** melhorar essa aproximação usando métodos iterativos (obter aproximações dentro de uma precisão ε fixada);

1.6.1 Fase 1: Localizar raízes de $f(x)$

Teorema: Seja $f(x)$ contínua em $[a, b]$. Se $f(a) \times f(b) < 0$, então pelo menos temos um ponto ξ tal que $f(\xi) = 0$



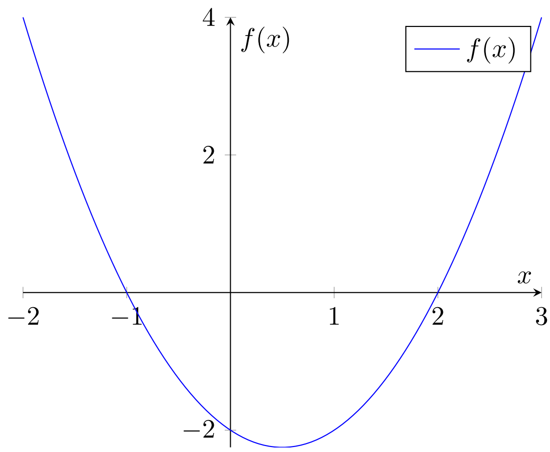
Método gráfico

Pode ser utilizado para obter uma aproximação inicial para a raiz. Ela consiste em <u>uma</u> das seguintes alternativas:

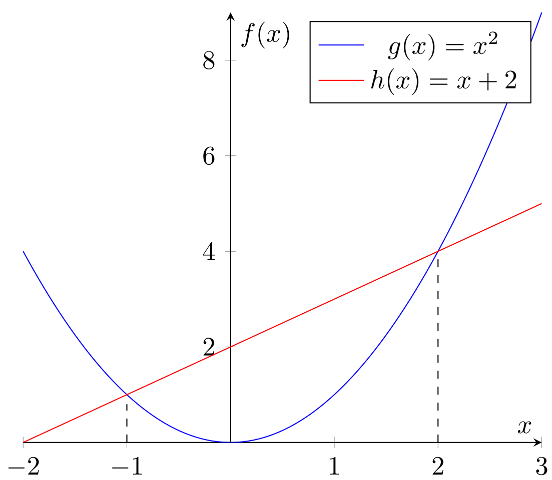
1. Ou construir o gráfico de $y = f(x)$ e obter sua intersecção com o eixo $\vec{Ox}$;
2. Ou escrever $f(x)$ na forma $g(x) = h(x)$ e obter a intersecção dos gráficos $g(x) - h(x) = 0 = f(x)$;

Exemplos:

(a) $f(x) : x^2 - x - 2 = 0$

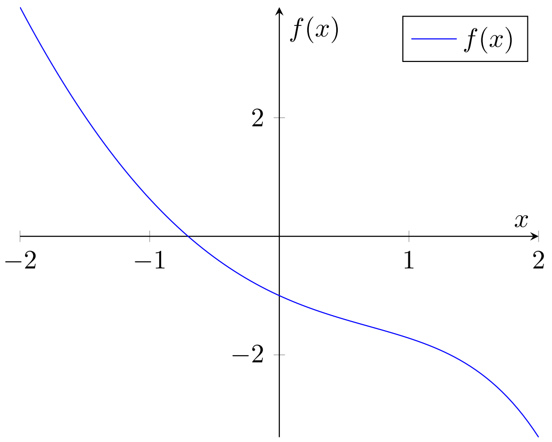


(1)

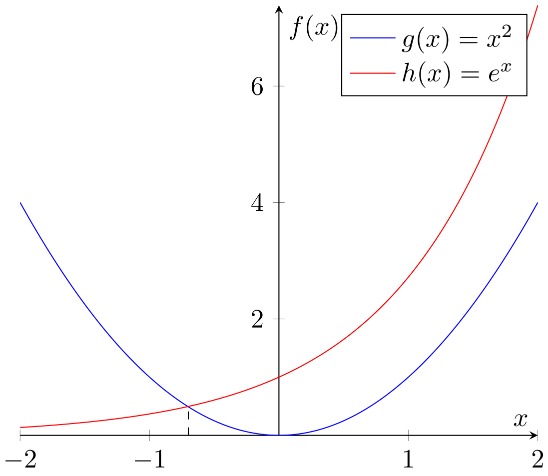


(2)

(b) $f(x) : x^2 - e^x = 0$

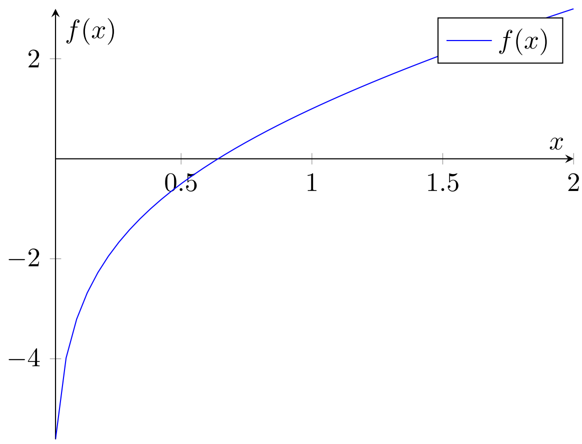


(1)

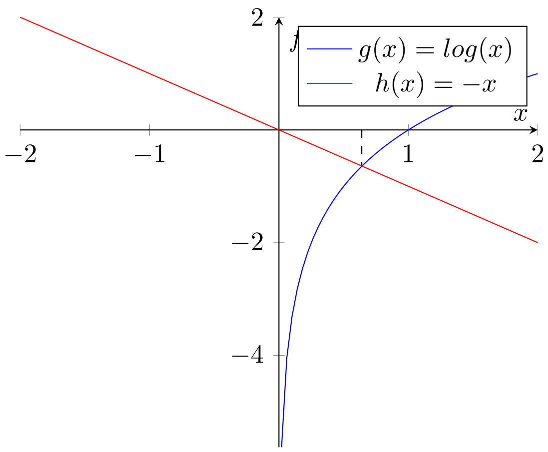


(2)

(c) $f(x) : \log x + x = 0$



(1)



(2)

1.6.2 Fase 2: Refinamento

Métodos iterativos para se obter zeros de funções:

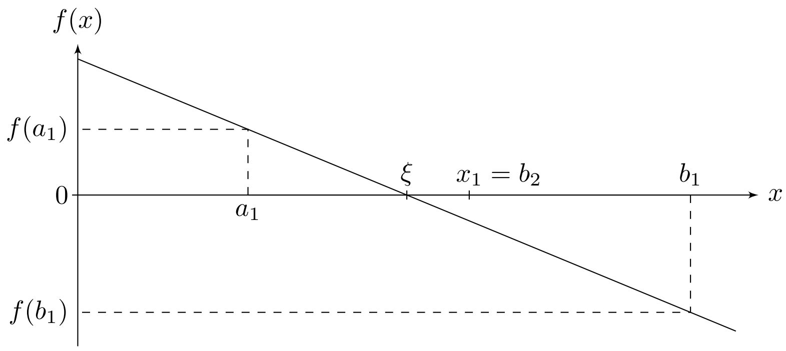
- ponto inicial;
- sequência de instruções (iterações);
- critério de parada;

$$|-f(x)| < \varepsilon$$
$$|x_{k-1} - x_k| < \varepsilon$$

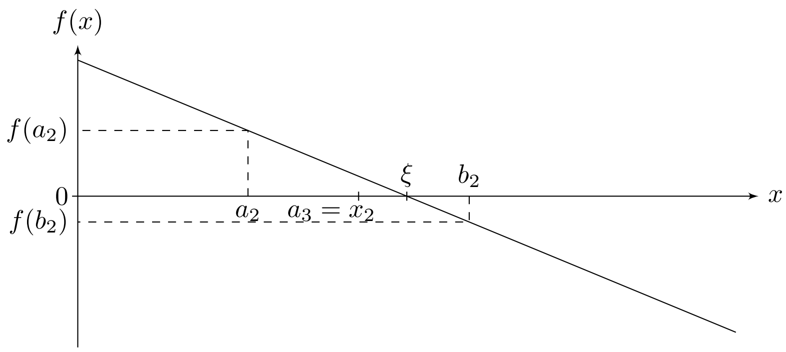
1.6.3 Método da Bisseção

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e suponha $f(a) \times f(b) < 0$ (ou seja, existe raiz real). Para simplificar, vamos supor que existe uma única raíz real em $[a, b]$. O método da bisseção consistem em determinar uma sequência de intervalos $[a_i, b_i],\ i = 1,\ 2,\ \ldots$ de tal forma que $[a_i, b_i]$ sempre contenha a raíz.

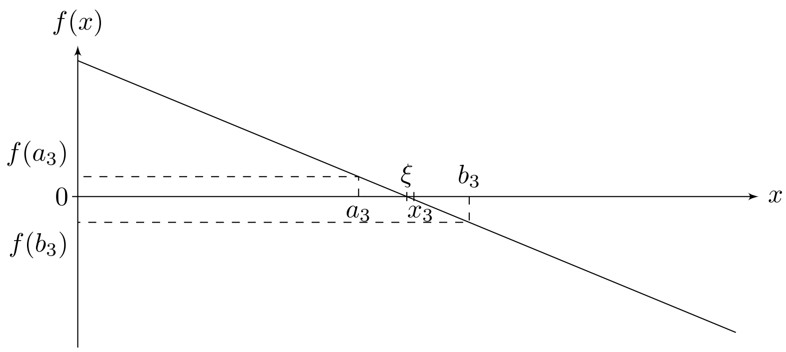
1ª iteração



2ª iteração



3ª iteração



De forma geral:

$$x_i = \frac{a_i + b_i}{2}$$

$$f(a_i) \times f(x_i) = \begin{cases} < 0, \quad \text{então} \begin{cases} a_{i+1} = a_i \\ b_{i+1} = x_i \end{cases} \\ > 0, \quad \text{então} \begin{cases} a_{i+1} = x_i \\ b_{i+1} = b_i \end{cases} \end{cases}$$

Critério de Parada: $|b_k - a_k| < \varepsilon$

Estimativa para o número de iterações

Na iteração k, temos que:

$$\begin{aligned} b_k - a_k &= \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} \\ &= \frac{b_0 - a_0}{2^k} \end{aligned}$$

Queremos saber o valor de k tal que $b_k - a_k < \varepsilon$, ou seja:

$$\begin{gathered} \frac{b_0 - a_0}{2^k} < \varepsilon \\ 2^k \varepsilon > b_0 - a_0 \\ 2^k > \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} \\ k \times \log 2 > \log (b_0 - a_0) - \log \varepsilon \\ \boxed{k > \frac{\log (b_0 - a_0) - \log \varepsilon}{\log 2}} \end{gathered}$$

Exemplo: $f(x) : x^3 + 3x - 1 = 0$, com $[a, b] = [0, 1]$ e $\varepsilon = 10^{-1}$

$$\begin{gathered} f(a = a_1) = f(0) \\ f(0) = -1 \\ -1 < 0 \end{gathered} \qquad \qquad \begin{gathered} f(b = b_1) = f(1) \\ f(1) = 3 \\ 3 > 0 \end{gathered}$$

$$f(a) \times f(b) = 0 \rightarrow \text{Ok!}$$

$$k = 1 \qquad \begin{aligned} x_1 &= \frac{a_1 + b_1}{2} \\ &= 0,5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} b_2 &= 0,5 \\ f(b_2) &= 0,625 \\ 0,625 &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi &\in [0, 0.5] \\ |b_2 - a_2| &= 0,5 > \varepsilon \end{aligned}$$

$$k = 2 \qquad \begin{aligned} x_2 &= \frac{a_2 + b_2}{2} \\ &= 0,25 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_3 &= 0,25 \\ f(a_3) &= -0,23437 \\ -0,23437 &< 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi &\in [0.25, 0.5] \\ |b_3 - a_3| &= 0,25 > \varepsilon \end{aligned}$$

$$k = 3 \qquad x_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} = 0,375 \qquad a_4 = 0,375 \quad f(a_4) = -0,1777$$

$$\xi \in [0.375, 0.5]$$
$$|b_4 - a_4| = 0,125 > \varepsilon$$

$$k = 3 \qquad x_4 = \frac{a_4 + b_4}{2} = 0,375 \qquad a_5 = 0,3125 \quad f(a_5) = -0,0319824$$

$$\xi \in [0.3125, 0.5]$$
$$|b_5 - a_5| = \boxed{0,0625 < \varepsilon}$$

Pare!

Estimativa para o número de iterações: $\begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \end{cases}$, $\varepsilon = 0,1$.

$$k > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log(\varepsilon)}{\log 2}$$
$$k > \frac{\log(1 - 0) - \log(0,1)}{\log 2}$$
$$k > \frac{\log(1) - \log(10^{-1})}{\log 2}$$
$$k > \frac{\log(1) + \log(10)}{\log 2}$$
$$k > 1,5$$

Sobre a convergência

A convergência está garantida, visto que $a_i/leqx_i \leq b_i$, sendo a_i crescente (não-decrescente) e b_i decrescente (não-crescente).

Porém, ela é muito lenta: se o intervalo iniciar $a_0 - a_0 \ll \varepsilon$ e ε for muito pequeno, o número de iterações tende a ser muito grande. Exemplo:

$$\left.\begin{array}{r} |b_0 - a_0| = 3 \\ \varepsilon = 10^{-7} \end{array}\right\} \rightarrow k > \frac{\log(3) - \log(10^{-7})}{\log(2)}$$
$$k \approxeq 24,8384$$
$$k = 25 \text{ iterações}$$

1.6.4 Método do Ponto Fixo

Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$ e existe pelo menos uma raiz ξ neste intervalo. O método consiste em transformar esta equação em uma equação equivalente $x = \varphi(x)$ e, a partir de uma aproximação inicial x_0, gerar uma sequência de aproximações $\{x_k\}$ para ξ, usando a relação: $x_{k+1} = \varphi(x_k)$.

A função $\varphi(x)$ é tal que $f(\xi) = 0$ se e somente se $\varphi(\xi) = \xi$. Assim, encontrar um zero de $f(x)$ é equivalente a encontrar um ponto fixo para $\varphi(x)$.

Uma função que satisfaz essa condição é chamada de <u>função de iteração</u> para a equação $f(x) = 0$.

Exemplos: $f(x) : x^2 + x - 6 = 0$. São funções de iteração:

(a) $x = 6 - x^2 \rightarrow \varphi_1(x) = 6 - x^2$

(b) $\begin{array}{r} x^2 = 6 - x \\ x = \pm\sqrt{6-x} \end{array} \rightarrow \varphi_2(x) = \pm\sqrt{6-x}$

(c) $\begin{array}{r} x(x+1) - 6 = 0 \\ x = \frac{6}{x+1} \end{array} \rightarrow \varphi_3(x) = \frac{6}{x+1}$

Obs: Podem existir infinitas funções de iteração $\varphi(x)$ para uma $f(x) = 0$.

A forma geral das funções de iteração se dá por:

$$\varphi(x) = x + A(x).f(x)$$

com a condição de que, em ξ, ponto fixo de $\varphi(x)$, se tenha $A(\xi) \neq 0$.

Mostremos que $f(\xi) = 0 \iff \varphi(\xi) = \xi$:

($\Rightarrow$) Seja ξ tal que $f(\xi) = 0$.

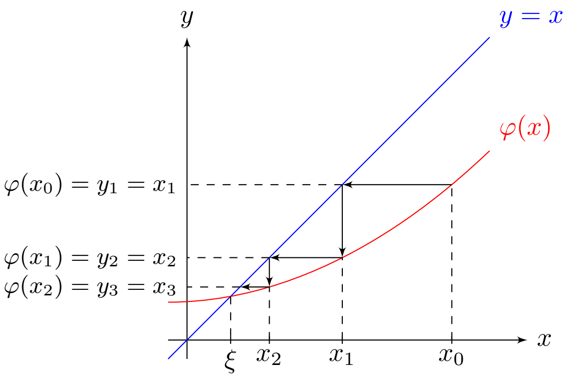
$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \xi + A(\xi).f(\xi) \\ \varphi(\xi) &= \xi + A(\xi).0 \\ \varphi(\xi) &= \xi \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Seja $\varphi(\xi) = \xi$. Assim,

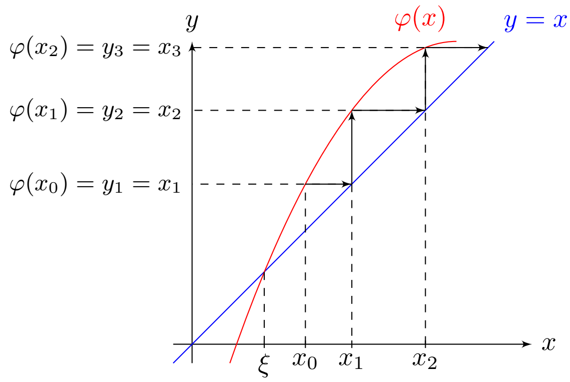
$$\left.\begin{array}{l} \varphi(\xi) = \xi + A(\xi).f(\xi) \\ \varphi(\xi) = \xi \end{array}\right\} \Rightarrow A(\xi).f(\xi) = 0$$

Como $A(\xi) \neq 0$, temos que $f(\xi) = 0$. $\square$

Interpretação Geométrica: Graficamente, uma raiz da equação $x = \varphi(x)$ é a abscissa do ponto de intersecção da reta $y = x$ e da curva $y = \varphi(x)$.



$\{x_k\} \rightarrow \xi$ quando $k \rightarrow \infty$



Para certas $\varphi(x)$, o processo pode gerar uma sequência $\{x_k\}$ que diverge de ξ

Exemplos:

(a) $\xi = 2$, $\varphi_1(x) = 6 - x^2$, $x_0 = 1,5$

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_2(x_0) = 3,75 \\ x_2 &= \varphi_2(x_1) = -8,0625 \\ x_3 &= \varphi_2(x_2) = -59,003906 \end{aligned}$$

$\{x_k\}$ não está convergindo para $\xi = 2$.

(b) $\xi = 2$, $\varphi_2(x) = \sqrt{6-x}$, $x_0 = 1,5$

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_2(x_0) = 2,12132 \\ x_2 &= \varphi_2(x_1) = 1,96944 \\ x_3 &= \varphi_2(x_2) = 2,00763 \\ x_4 &= \varphi_2(x_3) = 1,99809 \\ x_5 &= \varphi_2(x_4) = 2,0048 \end{aligned}$$

$\{x_k\}$ está convergindo para $\xi = 2$.

Teorema: Seja ξ uma raiz de $f(x) = 0$ isolada em um intervalo I centrado em ξ. Seja $\varphi(x)$ uma função de iteração para $f(x) = 0$.

Se:

(i) φ e $\varphi'(x)$ são contínua em I.

(ii) $\varphi'(x)| \leq M \leq 1, \ \forall x \in I$.

(iii) $x_0 \in I$.

Então, a sequência $\{x_k\}$ gerada pelo processo iterativo $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ converge para ξ.

Demonstração: Ver Ruggiero, página 59.

1º Mostra que se $x_0 \in I \Rightarrow x_k \in I, \ \forall k$

2º Mostra que $\lim_{k\to\infty} x_k = \xi$

Exemplo: $f(x) = x^2 + x - 6$, $\xi = 2$

1. $\varphi_1(x) = 6 - x^2$
   $\varphi_1'(x) = -2x$
   $\varphi_1(x)$ e $\varphi_1'(x)$ são contínuas em $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} |\varphi_1'(x)| < 1 \iff |-2x| < 1 \iff & -1 < -2x < 1 \\ & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ & \frac{1}{2} > x > -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

   $\nexists$ intervalo I centrado em $\xi = 2$ tal que $|\varphi_1'(x)| < 1, \ \forall x \in I$.
   $\therefore \varphi_1(x)$ não satisfaz o item (ii) do teorema. Então não há convergência.

2. $\varphi_2(x) = (6-x)^{\frac{1}{2}}$
   $\varphi_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{6-x}}$ $\varphi_2(x)$ é contínua em $S = \{x \in \mathbb{R}/x \leq 6\}$
   $\varphi_2'(x)$ é contínua em $S' = \{x \in \mathbb{R}/x6\}$

$$\begin{aligned} |\varphi_2'(x)| < 1 \iff |\frac{1}{2\sqrt{6-x}}| < 1 \iff & \frac{1}{2\sqrt{6-x}} < 1 \\ & x < 5,75 \end{aligned}$$

   $\therefore$ é impossível obter um intervalo I centrado em $\xi = 2$ tais que as condição do teorema são satisfeitas.

Critério de Parada para o MPF:

- $|x_k - x_{k-1} = |\varphi(x_{k-1}) - x_{k-1}| < \varepsilon$ (erro absoluto)
- $|f(x_k)| < \varepsilon$

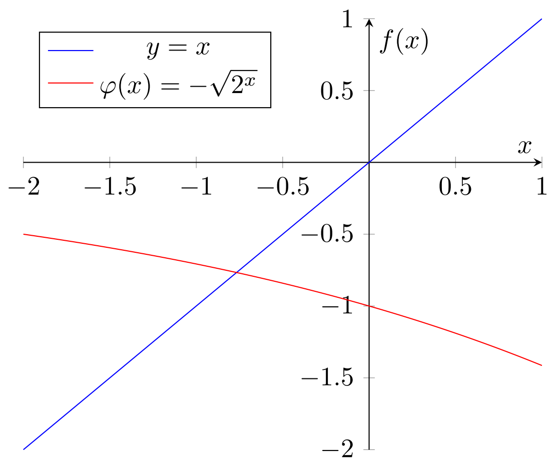
Exercício: Determinar uma raiz de $x^2 - 2^x = 0$ pelo MPF, com erro absoluto inferior a $\varepsilon = 0.6 \times 10^{-3}$, no intervalo $[-1, 0]$. $\xi = -0.76658$

$$x^2 - 2^x = 0$$
$$x^2 = 2^x$$
$$x = \pm\sqrt{2^x}$$

$\varphi(x) = -\sqrt{2^x}$: Função de iteração $-\surd$ pois sabe-se que a raíz é negativa (intervalo vai de -1 a 0).

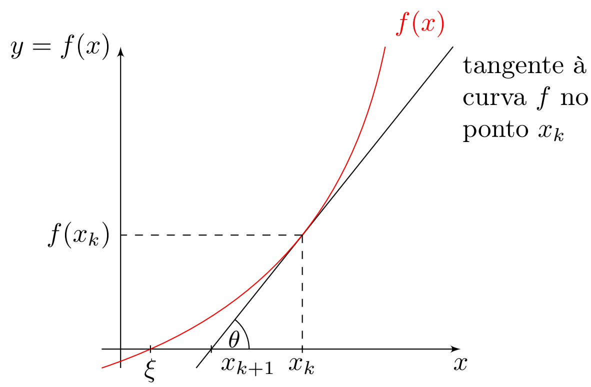
$$x_0 = -0.5$$
$$x_1 = \varphi(x_0) = -\sqrt{2^{-0.5}} = -0.84089 \qquad \varepsilon = |-0.84089 - (-0.5)| = 0.34089$$
$$x_2 = \varphi(x_1) = -\sqrt{2^{-0.84089}} = -0.74719 \qquad \varepsilon = |-0.74719 - (-0.84089)| = 0.0937$$
$$x_3 = \varphi(x_2) = -\sqrt{2^{-0.74719}} = -0.77185 \qquad \varepsilon = |-0.77185 - (-0.74719)| = 0.02466$$
$$x_4 = \varphi(x_3) = -\sqrt{2^{-0.77185}} = -0.76528 \qquad \varepsilon = |-0.76528 - (-0.77185)| = 0.00657$$
$$x_5 = \varphi(x_4) = -\sqrt{2^{-0.76528}} = -0.76703 \qquad \varepsilon = |-0.76703 - (-0.76528)| = 0.00175$$
$$x_6 = \varphi(x_5) = -\sqrt{2^{-0.76703}} = -0.76656 \qquad \varepsilon = |-0.76656 - (-0.76703)| = 0.0004$$
$$\varepsilon = \boxed{0.0004 < 0.0006} \ \textbf{(Pare!)}$$

Uma das raizes de $x^2 - 2^x = 0$ é $x = -0.76656$.

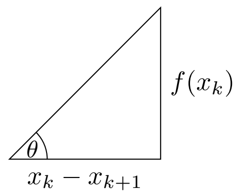


Visualização gráfica das funções $x = y$ e $\varphi(x) = -\sqrt{2^x}$

1.6.5 Método de Newton



Sabemos que a derivada é a inclinação da reta tangente:



$$\tan\theta = f'(x)$$

Por outro lado, no triângulo, temos:

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}}$$

Então, temos:

$$\tan\theta = f'(x_k) = \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}}$$

$$x_k - x_{k+1} = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$x_k = x_{k+1} - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Dedução como um Método de Ponto Fixo: Visto que a função de iteração é dada por:

$$\varphi(x) = x + A(x).f(x)$$

com $A(\xi) \neq 0$ e com ξ ponto fixo de $\phi(x)$.

A função de iteração ideal satisfaz a condição $\varphi'(\xi) = 0$. Assim,

$$\varphi(x) = x + A(x).f(x)$$

Aplicando a regra do produto na derivada:

$$\varphi'(x) = 1 + A'(x).f(x) + A(x).f'(x)$$

Vimos que MPF tem convergência garantida para

$$|\varphi(x)| < 1,\ \forall x \in I \text{ centrado na raiz}$$

Aconvergência é mais rápida quanto menor for $|\varphi'(\xi)|$. Assim, se escolhermos $A(x)$ tal que $\varphi'(\xi) = 0$, teremos garantia de convergência.

Assim:

$$\varphi'(\xi) = 0$$

$$1 + A'(\xi).f(\xi) + A(\xi).f'(\xi) = 0$$

$$1 + A(\xi).f'(\xi) = 0$$

$$A(\xi) = \frac{-1}{f'(\xi)}$$

Então, a função A é dada por: $A(x) = \frac{-1}{f'(x)}$ e a função da iteração correspondente é:

$$\varphi(x) = x - \frac{1}{f'(x)}.f(x) = \boxed{x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$$

e a sequência de aproximações x_k é gerada por:

$$\boxed{x_{k+1} = \varphi(x_k) \iff x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

Por série de Taylor: Série de taylor de $f(x)$ em torno do ponto $x = a$

$$\begin{aligned} f(x) &\simeq f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \overset{\prime}{\underset{\prime}{}} f(a)2!(x-a)^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.(x-a)^n \end{aligned}$$

para $a = 0$ temos séried e MacLaurin.

A partir de um ponto inicial x_0, a cada iteração k, construímos a aproximação de f por série de Taylor, em torno de x_k:

$$f(\underline{x}) \sim r(\underline{x}) = f(x_k) + f'(x_k).(\underline{x} - x_k)$$

O próximo novo ponto é obtido tal que

$$\begin{aligned} r(x_{k+1}) = 0 &\iff f(x_k) + f'(x_k).(x_{k+1} - x_k) = 0 \\ &\iff f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = -f(x_k) \\ &\iff (x_{k+1} - x_k) = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ &\iff \boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}} \end{aligned}$$

Algoritmo do Método de Newton

Teorema: Sejam f, f' e f'' contínuas em um intervalo I que contém a raiz ξ de f. Supor $f'(\xi) \neq 0$.

Então existe um intervalo $I_2 \subset I$, contendo a raiz ξ, tal que: Para $x_0 \in I_2$, a sequência x_k gerada pelo método de Newton ($x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$) converge para a raiz.

Taxa de convergência quadrática: Para $k \to \infty$, a sequência gerada pelo Método de Newton converge para a raiz ξ, então:

$$|x_{k+1} - \xi| < C \times |x_k - \xi|^{\underline{2}} \to \textit{(convergência quadrática)}$$

em que C é uma constante real positiva. Essa propriedade é assintótica e, no limite, os dígitos corretos dasa aproximações praticamente dobram de uma iteração para a outra.

Exemplo: Use o Método de Newton para calcular o valor de $\sqrt{2}$ com erro $\varepsilon = 10^{-6}$, partindo de $x_0 = 1.4$

$$x = \sqrt{2} \iff x^2 - 2 = 0 \iff f(x) = x^2 - 2 = 0$$

$$\sqrt{2} \cong 1.414213562373$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2 \\ f'(x) &= 2x \end{aligned}$$

Método de Newton:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{-f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{(x_k{}^2 - 2)}{2x_k} = \frac{x_k{}^2 + 2}{2x_k}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= 1.4 \\ x_1 &= \frac{x_0{}^2 + 2}{2x_0} = \frac{1.4^2 + 2}{2 \times 1.4} = 1.41428571429 && \varepsilon_1 = |x_1 - x_0| = 0.01928571429 \\ x_2 &= \frac{1.41428571429^2 + 2}{2 \times 1.41428571429} = 1.41421356421 && \varepsilon_2 = |x_2 - x_1| = 0.00007215 \\ x_3 &= \frac{1.41421356421^2 + 2}{2 \times 1.41421356421} = 1.41421356237 && \varepsilon_3 = |x_3 - x_2| = 2.7 \times 10^{-9} < \varepsilon \end{aligned}$$

Exercícios: Determine o ponto inicial pelo método gráfico e considere $\varepsilon = 0.001$. (Atenção! Calculadora em radianos)

(a) $f(x) = x - e^{-x} = 0$

(b) $f(x) = \cos(x) - x = 0$