Anotações MC658

Eduardo M. F. de Souza

17 de março de 2020

Sumário

1 Classes de Complexidade

1.1 Características

- São classes que contém problemas, e, problemas que contém determinadas características em comum;
- A maior parte dos algoritmos vistos até então têm tempo polinomial — $O(n^k)$ onde k é constante e n é o tamanho da entrada;
- Nem todo problema admite um algoritmo polinomial para resolvê-lo.

  Exemplo: problema da parada, no qual sequer admite um algoritmo, independente do tempo; programa para predizer se um algoritmo pode entrar em *deadlock* ou não em uma máquina genérica;

  - É **tratável** se admite um algoritmo polinomial;
  - E **intratável** se não admitir um algoritmo polinomial (pode admitir um algoritmo exponencial);

1.2 P, NP e NP-Completo (NPC)

- **P:** Classe em que os problemas que possuem algoritmos que os resolvem em tempo polinomial;
- **NP:** Classe em que os problemas admitem um algoritmo polinomial que verifiquem instâncias do problema.

  Um exemplo é o Ciclo Hamiltoniano:

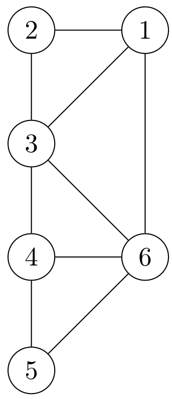
  Entrada: Grafo simples $G = (V, E)$.

  Saída: Existe ou não um ciclo que passa por cada vértice exatamente uma vez.

  Verificação:

  (1,2,3,6,4,5) $\rightarrow$ não é uma solução válida;

  (1,2,3,4,5,6) $\rightarrow$ é uma solução válida;

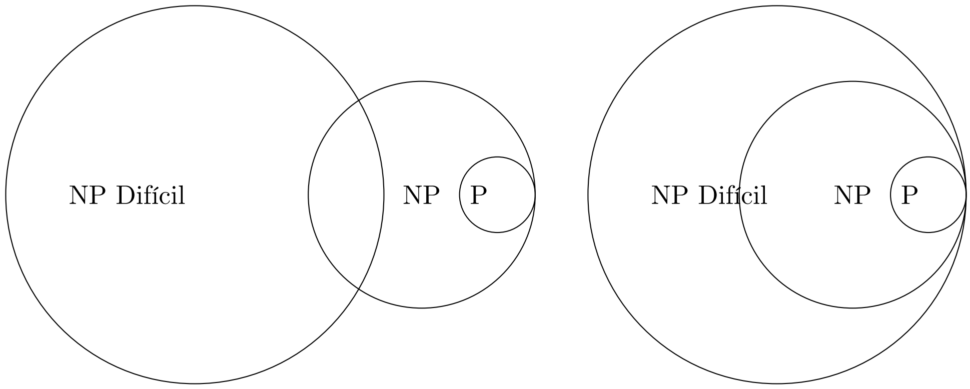


- **NP-Completo:** Todo problema desta classe está em NP.Problemas NPC têm a característica de, se algum deles admitir um algoritmo polinomial, então automaticamente todos os problemas de NP possuem um algoritmo polinomial;

Desde 1970 até hoje um problema importante é se P=NP

1.3 Problemas de Decisão

Resposta deve ser de Sim (1) ou Não (0).
Exemplo:
Da versão de decisão do problema do menor caminho em um grafo: *Entrada:* $G = (V, E)$ com pesos nas arestas, valor k, e uv E V *Pergunta:* Existe caminho u->v com custo <= k?



(a) P $\neq$ NP (b) P $=$ NP

P $\leq$ NP | NP $\in$ P é uma questão em aberto. Desde 1970 até hoje um importante problema aberto é se $P = NP$.

1.3.1 Formalização matemática de um problema

- Um problema será definido como um lingagem sobre um alfabeto Σ;
- Usaremos $\Sigma = 0, 1$ (binário);
- Dado um problema Q, qualquer instância desse problema será codificada como uma string de 0s e 1s;
- Uma linguagem L de Σ é um conjunto de strings formadas com os símbolos de Σ.
  Notação:

  - E: string vazia
  - $\emptyset$: Uma linguagem vazia
  - Σ^*: Todas as possíveis strings que podem ser escritas com os símbolos de Σ. Exemplo: $\Sigma^* = \{E, 0, 1, 00, 01, \ldots\}$

  Observação: Qualquer lingaguem L é tal que L contem em Σ^*. *Observação:* Qualquer lingaguem L é tal que L contem em Σ^*.

Um problema de decisão Q será visto como uma linguagem que contém todas as strings de Σ^* que corresponde às instâncias de Q cuja resposta é sim.

Exemplo: Ciclo-Hamiltoniano = { $< G = (V, E) >$ tal que G possui um Ciclo Hamiltoniano}
$<>$: Notação que corresponde à codificação da instância como uma string.

1.3.2 Operações sobre Linguagens

União $L_1 \cup L_2 = \{st.q.s \in L_1 ous \in L_2\}$ Concatenação $L_{12} = \{xyt.q.x \in L_1 ouy \in L_2\}$ União $L_1 L_2 = \{st.q.s \in L_1 ous \in L_2\}$

1.4 Algoritmos

- Uma entrada para um algoritmo A é qualquer string de Σ^*;
- Um algoritmo aceita $s \in \Sigma^*$ se $A(s) = 1$;
- Um algoritmo rejeita $s \in \Sigma^*$ se $A(s) = 0$;
- Um algoritmo aceita uma linguagem L se $\forall s \in L \rightarrow A(s) = 1$
  Para strings $s \notin L A(s) \neq 1$ o algoritmo pode não parar — entra em loop infinito)

- Um algoritmo que decide uma linguagem L se $\forall s \in L \rightarrow A(s) = 1$
  $\forall s \notin L \rightarrow A(s) = 0$
- Uma linguagem é aceita em tempo polinomial se existe um algoritmo polinomial A que aceita L;

- Uma linguagem é decidida em tempo polinomial
- Uma linguagem é decidida em tempo polinomial se existe um algoritmo polinomial que decide L;

1.5 Definição da classe P

$$P = \{L \in \Sigma^* \text{t.q.} L \text{é decidido em tempo polinomial}\}$$

Teorema: P é o conjunto de todas as linguagens decididas em tempo polinomial.
P = L contido em sigma * tal que L é aceita em tempo polinomial = P'
Prova:
Contido: Seja L decidida em tempo polinomial $\rightarrow$ $umalgoritmo$A$polinomialquedecide$L$\rightarrow$ A$aceita$L$emtempopolinomial$
$Contrriodeconntido : Seja$L$aceitaemtempopolinomial$ $Existeumalgoritmo$A$queparatodospertencentea L$A(s)
= 1$emtempo$c$\times|s|^k$ (polinomial) onde c e k são constantes.
Existe um algoritmo A' que simula A por $c \times |s|^k$ passos e que se $A(s) = 1$ então $A'(s)$ devolve 1 e caso A(s) não responda nada (ou zero) então $A'(s)$ devolve 0 $\rightarrow$L$decididaemtempopolinomial.$

Problema de Decisão

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$\Sigma^* = \{E, 0, 1, 00, 01, \ldots\}$$

Problema $\subseteq \Sigma^*/x \in$ Problema se e somente se a resposta para instância x é sim
Algoritmo A que decide uma linguagem L $\subset \Sigma^*$

$$A(x) = 1 \forall x \in L$$

$$A(x) = 0 \forall x \notin L$$

$P = \{L \subseteq \Sigma^*$ tal que existe um algoritmo A que decide L em tempo polinomial$\}$

1.6 Verificação

Ciclo Hamiltoniano = {$<G = (V, E) >$ onde G é um grafo simples e G possu um ciclo que passa por cada vértice exatamente uma vez

Algoritmo Verificador para uma linguagem $L \subseteq \Sigma^*$. $A(x, y)$ onde x é uma instância de L e y é outra string que chamamos de certificado.

1. Se $x \in L$ então $\exists y \in \Sigma^*/A(x, y) = 1$
2. Se xL então $\forall y \in \Sigma^*/A(x, y) \neq 1$

1.7 Algoritmo Verificador para Ciclo Hamiltoniano

A(G, sequência vertical $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$) -> Verificar que correspondem a todos os vértices do grafo exatamente uma vez. For v $\in (v_1, v_2, \ldots, v_n) Ifv \notin Greturn0Fori = 1ton - 1if(v_i, v_{i+1}) \notin Greturn0if(v_1, v_n) \not{i}nGreturn0return1$

Se G $\in Ciclo{-}Hamiltoniano, entoexisteumasequnciadevrticasquecorrespondeaocicloeusamosistocomocertificad$

Se G $\not{i}nCiclo{-}Hamiltonianoentonachecagemdasarestas, paraqualquersequnciadevrtices, umaarestaestarfaltan$

Um algoritmo A(x,y) verifica L $\subseteq \Sigma^* emtempopolinomialseAexecutaemtempopolinomialem|x|e|y|e:$

Se x $\in L, ento\exists y \in \Sigma^*/|y| = O(|x|^k)parakconstante.A(x, y) = 1Sex \notin Lento\forall y \in \Sigma^*/|y|\ inO(|x|^k)temosqueA(x,y$

1

1.8 Classe NP

NP = {L $\subseteq \Sigma^*/\exists A(x, y) polinomialqueverificaL\}$

Questão em aberto: P = NP?

Exercício> P $\subseteq NP$

Seja L $\in P(mostrarqueL \in NP)ExistealgoritmoA(x)quedecideLemtempopolinomial.$

A1(x,y) return A(x)

1. $x \in L$, então usando $y = E$ temos que $A'(x, y) = 1$ e $|y| \in O(|x|^k)$
2. $x \notin L$, então $A(x) = 0 \to A1(x, y) = 0$ independente do y.

1.9 Classe co-NP

Dado $L \subseteq \Sigma^*$ definimos o complemento de l como

$$\overline{L} = \Sigma^* \backslash L$$

co-NP = $\{L \subset \Sigma^*/\overline{L} \in$ NP}

Instintivamente, co-NP contém as lingaguens para as quais existe algoritmo verificador polinomial para instâncias "não"do problema. $L \in$ co-NP se existe um algoritmo polinomial $A(x, y)$, dois quais x é instância e y é um certificado, onde:

1. $x \not{i}nL, \exists y \in \Sigma^*/|y| = O(|x|^k)$ e $A(x, y) = 1$

2. $x \in L, \forall y \in \Sigma^*/|y| = O(|x|^k)$ e $A(x,y) \neq 1$

Primos { <n> N é um inteiro positivo e é primo}

Primos $\in co{-}NPpoispodemoscriarumalgoritmoqueparacadan \neq Primos \rightarrow \exists umdivisorddenqueservecomocertificad$

Questão em aberto> NP = co-NP ?

Exercício: p $\subseteq NP \cap co-NP(AcabamosdeverqieP \subseteq NP)MostrarP \subseteq co-NP!SejaL \in P \rightarrow existeumalgoritmopolinomialA(x)quedecideL.$

A'(x,y) if A(x) == 1 return 0 if A(x) == 0 return 1

1. $x \notin L$ então A(x,E) = 1 em tempo polinomial
2. $x \in L$ então A(x,y)=0 independe do y.

1.10 Possíveis Relações entre estas Classes

P = NP $\rightarrow P = NP = co-NPP \neq NP \rightarrow P \in NP = co-NPP \neq NP \rightarrow P = NP \bigcap co-NP, NP \neq co-NPp \neq NP \rightarrow P \subset NP \bigcap co-NP, NP \neq co-NP$

$n = p_1^{j_1} \times p_2^{j_2} \times \ldots \times p_q^{j_q}$ Qualquer $n \in^+$ possui uma fatoração única em primos distintos.

RSA (ninguém consegue achar um fator de n em tempo polinomial)

Fatoração: Dado n e m $\leq nexisteumfatorpdentalque$p $\leq m$

Fatoração $\in P?Ningumsabe.$

Fatoração $\in co-NPeFatorao \in NP.$

Fatoração $\in NP : Dado(n,m) \in Fatorao, bastausarcomocertificadoumfatop \leq m!Fatorao \in co-NP : (n,m) \notin Fatorao \rightarrow fatorprimop \leq mtalquepdividan.Meucertificadoumafatoraodenemprimos$p$_1^{j_1}, p_2^{j_2}, \ldots, p_q^{j_q}$

1. Verificar que a multiplicação do valor n n = ppp

2. Verificar que cada p$_j umnmeroprimo(feitoemtempopolinomialcomAKSde2006)Verificarquecadap_j \geq m$

1.11 Reduções Polinomiais

Definição: sejam $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ duas linguagens. Dizemos qye L_1 se reduz para L_2 em tempo polinomial se:

1. Existe um algoritmo F que tranforma a instância x_1 de L_1 em instâncias $x_2 = F(x_1)$ de L_2 em tempo $O(|x_1|^k)$, k constante;
2. $x_1 \in L_1 \iff F(x_1) = x_2 \in L_2$;

Pergunta: Dado $x_1 \notin L_1$, é possível $F(x_1) = x_2 \in L_2$? **R:** Não é possível!

1.11.1 Lema 34.3

Sejam $L_1, L_2 \subseteq^*$ tal que $L_1 \leq_p L_2$. Se $L_2 \in P$, então $L_1 \in P$

Como $L_2 \in P \rightarrow \exists$ algoritmo polinomial A_2 que decide L_2. Podemos construir: $\mathrm{A}_1(x_1) : x_2 = F(x_1) return A_2(x+2)$

Como $L_1 \leq_p L_2$ existe o algoritmo de redução F de L_1 pra L_2.

- A_1 executa em tempo polinomial (tanto A_2 quanto F têm tempo polinomial)
- 1. Dado $x_1 \in L_1 \rightarrow F(X_1) = x_2 \in L_2$ e $A_2(x_2) = 1 \rightarrow A_1(x_1) = 1$
  2. Dado $x_1 \notin L_1 \rightarrow F(x_1) = x_2 \notin L_2$ e $A_2(x_2) = 0 \rightarrow A_1(x_1) = 0$

1.12 NP-Completo (NPC)

Uma linguagem $L \in$ NPC se ela satisfizer:

1. $L \in$ NP
2. $\forall L' \in$ NP então existe redução polinomial de L' para L, $L1 \leq_p L$

Obs: As linguagens (problemas) que só satisfazem a condição (2) pertencem à classe $\mathrm{NP}_D ifcil$.

1.13 Teorema 34.4

Seja $L \in$ NPC. Se $L \in$ P, então $\forall L' \in$ NPC. Temos que $L' \in$ P

Prova: Seja $L' \in$ NP um problema qualquer. Sabemos que $L \in \mathrm{NPC} \rightarrow L' \leq_p L$.
Sabemos que $L \in$ P, então, pelo lema anterior, $L' \in$ P!

$$P_1 \in \mathrm{NPC}$$

$$\forall L \in \mathrm{NP},\ L \leq_p P_1$$

$$P_2,\ P_1 \leq_p P_2$$

Ao mostrarmos que um problema $L_1 \in NPC$, estamos dando fortes indícios que L_1 não admite um algoritmo polinomial. Melhor resolver L_1 com técnicas para lidar com problemas NP-Difíceis.

1.14 Teorema de Cook (1971)

1.14.1 Problema SAT

Dadas variáveis booleanas $x_1, \ldots, x_n$ e uma fórmula sobre elas com operadores $\vee$, $\wedge$, $\neq$, $\rightarrow$, $\iff$, existe uma atribuição para $x_1, \ldots, x_n$ tal que f fica verdadeira?

1.14.2 Circuit-SAT

Portas lógicas: not, or, and (podem ter mais entradas).

Dado um circuito lógico com entradas $x_1, \ldots, x_n$ e uma única saída, existe uma atribuição para $x_1, \ldots, x_n$ tal que a saída do circuito é verdadeira?

Os circuitos considerados não possuem *loop*?

1.14.3 Circuit-SAT $\in$ NP

Vamos mostrar que Circuit-SAT é NP-Difícil.

Uma máquina é construída com vários circuitos lógicos.

Seja $L \in$ NP, queremos mostrar que existe $L \leq_p$ Circuit-SAT. Sabemos que existe um algoritmo $A(x, y)$ verificador polinomial para L.

1. Se $x \in L$, $\exists y$ tamanho polinomial tal que $A(x, y) = 1$;
2. Se $s \notin L$, $\forall y$ tamanho polinomial tal que $A(x, y) \neq 1$;

Dado x, assumimo que A executa no máximo $c_1|x|^{k_1}$ passos (c_1, k_1 são constantes) e $|y| \leq c_2|x|^{k_2}$, onde c_2 e k_2 são constantes.

Podemos üsarö computador para executar o algoritmo A

Dado x uma instância de L. Montamos um circuito l[ogico com $c_1|x|^{k_1}A$ cópias do c̈omputadorq̈ue faz a simulação do algoritmo verificador A; Tamanho dos circuitos representando, A, PC, Mem e Controle são constantes. Assumimos que x é setado fixo com seu próprio valor. A única entrada deste circuito é o y; Dado $x \in \Sigma^*$ instância de L, construímos um circuito C em tempo polinomial!

1. Se $x \in L$ então $\exists y$ polinomial tal que $A(x, y) = 1$. Este mesmo y serve como entrada para o circuito C, deixando ele satisfazível $\rightarrow C\in$ Circuit-SAT
2. Se $x \not in L$ então $\forall y$ de tamanho polinomial, $A(x, y) \neq 1 \forall$ entrada y de C $\rightarrow Cnuncasersatisfazvel \rightarrow C\notin$ Circuit-SAT.

1.15 Provas de NP-Completude

Mostramos que o Circuit-SAT é NP-Completo:

1. Circuit-SAT $\in$ NP;
2. $\forall L \in$ NP existe redução em tempo polinomail de L/leq_{pol} Circuit-SAT.
   $x \in L \iff C \in$ Circuit-SAT

Vale a transitividade para $\leq_{pol}$: $P_1 \leq_p ol P_2$ e $P_2 \leq_p ol P_3 \rightarrow P_1 \leq_p ol P_3$

x_1	x_2	$x_1 \to x - 2$	$x_1 \iff x_2$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	1	1

1.15.1 SAT

Fórmula booleana f com variáveis $x_1, \ldots, x_n$ e operadores $\neg, \vee, \wedge, \to, \iff$. Existe atribuição para $x_1, \ldots, x_n$ tal que f fica verdadeiro.

$$f = (x_1 \to x_2) \vee \neg((\neg x_1 \iff x_3) \vee x_4) \wedge \neg x - 2$$

SAT = { $< f >$ onde f é uma fórmula lógica que possui atribuição verdadeira}
Para mostrar que SAT é NP-Difícil (condição 2 de NPc) faremos Circuit-SAT $\leq_{pol}$ SAT $\forall L \in$ NP, sabemos que $L \leq_{pol}$ Circuit-SAT e, por transitividade, teremos $L \leq_{pol}$ SAT.

Teorema 34.9: SAT $\in$ NP-Completo. Prova:

1. SAT $\in$ NP (fica como exercício);
2. Mostrar que Circuit-SAT $\leq_{pol}$ SAT:

   $C \in$ Circuit-SAT $\iff f \in$ SAT.

   Dado um circuito C qualquer, vamos construir a fórmula f em tempo polinomial onde vale o item anterior.

   Dado c além das variáveis de entrada, criamos uma nova variável para saíde de uma porta lógica do circuito.

   Escreveremos uma cláusula para cada porta lógica.
   Exemplo: $(x_5 \iff (x_1 \vee x_2))$

   Cada cláusula só pode ser verdadeira quando o valor de variável de saída da porta lógica correspondem ao que é computado pela porta lógica.

   A formula f será um *and* de todas as cláusulas correspondentes a cada uma das portas lógicas mais a última variável de saída do circuito. f = $x_{10} \wedge (x_4 \iff (\neg x_3))$
   $\wedge (x_5 \iff (x_1 \vee x_2))$
   $\wedge (x_6 \iff \neg x_4)$
   $\wedge (x_7 \iff (x_1 \wedge x_2 \wedge x_4))$
   $\wedge (x_8 \iff (x_5 \vee x_6))$
   $\wedge (x_9 \iff (x_6 \vee x_7))$
   $\wedge (x_{10} \iff (x_7 \wedge x_8 \wedge x_9))$

Dado C qualquer podemos construir f em tempo proporcional ao número de portas lógicas em C e, portanto, em tempo polinomial.

1. Suponha que $C \in$ Circuit-SAT:

$\rightarrow Existeumaatribuioparaasvariveisdeentradaquedeixa C verdadeiro. Simulandoessaentradanocircuito,$
$cadaclusulacorrespondeaumaportalgicaficaverdadeira.$

Além disso, a saída de C é verdadeira $\rightarrow avariveldesadafinalverdadeira \rightarrow$f$ficaverdadeiro. f \in SAT$

2. $f \in$ SAT (temos que mostrar que C que deu origem a f é tal que $C \in$ Circuit-SAT)
$f \in$ SAT $\rightarrow existeatribuioparavarivekdef quedeixaf verdadeiro. Usamososvaloresdasvariveisdeentradaem$
$Paracadaportaportalgicade C, oseuvalordesadaigualaovalordavariveldesadadaclusulacorrespondenteaess$
$Ovalordesadadecadaclausulaigualaportalgicacorrespondentequandodamosessaentrada.$
$Comoemfasadafinalverdadeiraeeladedeveserigualasadadaltimaportalgica \rightarrow Asadadocircuito1 \rightarrow$C $\in$ Circuit-SAT.

1.16 3 CNF-SAT

Uma fórmula que é uma conjunção (and) de cláusulas e cada cláusula é uma disjunção (or) de exatamente três literais (x_i ou $\overline{x_i}$).
Existe atribuição verdadeira?A
Exemplo: $f = (x_1 \vee \overline{x_2} x_3) \wedge (x_4 \vee \overline{x_5} \vee x_1) \wedge (x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})$

Teorema: 3CNF-SAT é NP-Completo Prova:

1. 3CNF-SAT $\in$ NP (exercício)

2. 3CNF-SAT $\in$ NP-Difícil.
Faremos SAT $\leq_{pol}$ 3CNF-SAT. A partir de f_1 de SAT, construiremos um f_2 do 3CNF-SAT.

$$f_1 - ((x_1 \rightarrow) \wedge \neg((\neg x_1 \iff x_3) \wedge \neg x_2$$

Construímos uma árvore de avaliação da fórmula onde as folhas são os literais da fórmula, nós são os operadores lógicos da fórmula.

Criamos f_1' equivalente a f_1 que corresponde à avaliação da árvore construída. f$_1'$ =
$y_1 \wedge (y_1 \iff (y_2 \wedge \neg x_2))$
$\wedge (y_2 \iff (y_3 y_4))$
$\wedge (y_3 \iff (x_1 \rightarrow x_2))$
$\vdots$
$\wedge (y_5 \iff \neg x_6)$

Cada cláusula em f_1 tem no máximo 3 literais (cada operador lógico tem no máximo 2 entradas e tem uma saída);

f_1' pode ser computado em tempo polinomial.

Deixar cada cláusula na CNF

Para cad cláusula f_i' de f_1, construímos uma tabela verdade.
Exemplo: $(y_1 \iff (y_2 \wedge \overline{x_2})) = f_i'$

POdemos escrever fórmulas na DNF (forma normal disjuntiva equivalente à f_1'

$$f_i'' = (\overline{y_1} \wedge \overline{y_2} \wedge \overline{x_2}) \vee (\overline{y_1} \wedge \overline{y_2} \wedge x_2) \vee \ldots$$

Criar $\overline{f_i''}$ na DNF que corresponde a f_i

$$\overline{f_i'} \approx \overline{f_i''} = (\overline{y_1} \wedge y_2 \wedge \overline{x_2}) \vee (y_1 \wedge \overline{y_2} \wedge \overline{x_2}) \vee (y_1 \wedge \overline{y_2} \wedge x_2) \vee (y_1 \wedge y_2 \wedge x_2))$$

Aplicando De'Morgen, obtemos:

A partir de f_1', construímos f_1'' equivalente e que está na CNF e isso em tempo polinomial.
Cada cláusula de f_1' temos no máximo 3 variáveis $\rightarrow tabelaverdadecomnomximo8entradas.$
$\rightarrow nmerodeclusulasnomximo8vezesonmerooriginaldeclusulasem\mathrm{f}_1'$

Deixar cada cláusula de f_1'' com 3 literais. Suponha uma cláusula de 2 literais $(l_1 \vee l_2) \iff (l_1 \vee l_2 \vee z) \wedge (l_1 \vee l_2 \wedge \overline{z})$