

EMIL LANGER

Československá
akademie
věd

Vědecký redaktor
akademik Bedřich Heller

Recenzent
prof. inž. dr. Jan Hlávka, DrSc.

Teorie
indukčního a
dielektrického
tepla

svému spoluautorovi
prof. Říčnému Koženému

E. Langer
25. 11. 64

Nakladatelství
Československé akademie věd

PRAHA 1964

Obsah

Předmluva	13
Seznam hlavních značek technických a fyzikálních veličin	15
1. Úvod	16
2. Základní poznatky o elektromagnetickém vlnění	19
2.1. Obecné elektromagnetické vlnění	19
2.2. Odvození Poyntingova zářivého vektoru	22
2.21. Příklady pro použití zářivého vektoru	24
3. Rovinné elektromagnetické vlnění	28
3.1. Základní vlastnosti	30
3.2. Rovinné vlnění v izolantu před rozhraním	32
3.21. Stojaté vlnění v izolantu	32
3.22. Rovnice stojatého vlnění v izolantu s malým argumentem $(\omega/v) \cdot x$	37
3.3. Rovná vodivá stěna velké, teoreticky nekonečné tloušťky	38
3.31. Odvození základních výrazů	42
Příklady	42
3.32. Průběh okamžitých hodnot hustoty proudu	44
3.33. Obecné grafické znázornění amplitud H, E, J	46
3.4. Množství naindukovaného tepla ve stěně velké tloušťky	47
3.41. Proud ve stěně, vybuzený při dopadu vlnění	48
3.42. Odvození množství tepla z naindukovaného proudu	49
3.43. Množství tepla ze zářivého vektoru.	51
3.44. Množství tepla jako rozdíl dopadajícího a odraženého elektromagnetického vlnění	53
3.45. Impedance stěny velké tloušťky	53
3.46. Grafické znázornění vektorů vlny dopadající a odražené	53
Příklady	55
3.5. Vodivá stěna malé tloušťky, na kterou dopadá rovinné vlnění z jedné strany	57
3.51. Šíření rovinné vlny ve stěně	60
3.52. Výrazy pro intenzitu E a H ve stěně malé tloušťky	62
Příklad	62
3.53. Vlna dopadající a odražená ve vodivé stěně	64
3.54. Celkový proud, vybuzený dopadem rovinného vlnění ve stěně malé tloušťky	65
3.55. Průběh okamžitých hodnot hustoty proudu J	67
3.56. Měrný tepelný příkon σ v jednotce objemu	68
3.57. Obecné grafické zobrazení průběhů H, E, J, σ	68

3.58. Určení množství tepla ve stěně	70	4.24. Výrazy E a H pro velkou hodnotu argumentu x	126
3.59. Impedance stěny malé tloušťky	72	Příklad	129
Optimální tloušťka stěny	75	4.3. Válcové elektromagnetické vlnění v plné vodivé válcové vsázce	129
3.6. Rovinné vlnění dopadá z obou stran na rovnou vodivou stěnu a vyvolává proudy téže fáze	76	4.31. Odvození výrazů pro intenzitu elektrického a magnetického pole	129
3.61. Odvození výrazů pro výslednou intenzitu magnetického a elektrického pole	76	4.32. Výrazy pro H a E v případě velkého argumentu x	135
3.62. Absolutní hodnoty intenzity H a E	78	4.33. Proud vybuzený ve vsázce	138
3.63. Měrný příkon σ v jednotce objemu	79	4.34. Impedance válcové vsázky	139
3.64. Obecné grafické zobrazení hodnot H , E , J , σ	80	4.35. Množství vyvinutého tepla ve válcové vsázce	143
3.65. Celkový proud vybuzený v každé polovině stěny	81	4.351. Přímé odvození množství tepla	143
3.66. Množství tepla, které se vytváří v každé polovině stěny	81	4.352. Nepřímé odvození množství tepla	144
3.67. Impedance jedné poloviny stěny	81	4.353. Důkaz totožnosti výrazů P_{21} a P'_{21} obecně, pro jakýkoliv argument x	145
3.7. Rovinné vlnění dopadá z obou stran na rovnou vodivou stěnu a vyvolává proudy opačné fáze	82	4.354. Množství tepla ve vsázce z absorbované elektromagnetické energie	147
3.71. Výrazy pro výslednou intenzitu magnetického a elektrického pole ve stěně	83	4.355. Množství tepla ve vsázce s velkým argumentem x	148
3.72. Odvození absolutní hodnoty E a H	85	4.36. Náhradní průměr válcové vsázky	150
Příklady	85	4.361. Impedance náhradní vsázky	151
3.73. Měrný příkon σ v jednotce objemu	87	4.362. Průměr náhradní vsázky	153
3.74. Obecné grafické zobrazení hodnot H , E , J , σ	87	4.363. Činný odpor a průměr náhradní vsázky v případě velkého argumentu x	154
3.75. Celkový proud vybuzený v každé polovině stěny	89	4.364. Průběh poměru r_n/r_s v závislosti na argumentu x	156
3.76. Naindukování množství tepla ve stěně	90	4.365. Porovnání odvozeného výsledku s výrazem N. M. Rodigina	158
3.77. Grafické znázornění průběhu celkového proudu a množství absorbované elmg. energie	92		159
3.78. Impedance poloviny stěny	93	4.4. Cívka indukční pece	
3.8. Vedení střídavého proudu rovnou stěnou.	95	4.41. Odvození výrazů pro intenzitu elektrického a magnetického pole	159
3.81. Odvození intenzity E a H ve stěně	96	Příklad	162
3.9. Vedení střídavého proudu dvěma rovnoběžnými stěnami. Pásové vedení	98	4.42. Proud v cívce	165
3.91. Odvození intenzity magnetického a elektrického pole ve stěně	98	4.43. Impedance cívky	166
3.92. Impedance a ztráty v pásovém vedení	101	4.44. Ztráty v cívce	171
Příklad	104	4.45. Náhradní průměr cívky	173
3.93. Elektrická složka E vlnění v mezeře mezi pásy	104	4.5. Dvouvrstvová cívka indukční pece	173
3.10. Ekvivalentní tloušťka vlníku	105	4.51. Odvození odporu dvouvrstvové cívky	173
3.11. Přehled rovinných vlnění	107	Příklad	179
4. Válcové elektromagnetické vlnění	108	4.6. Dutá válcová vsázka	180
4.1. Válcové elektromagnetické vlnění v dutině cívky	109	4.61. Dutá vsázka s argumentem x malých hodnot	181
4.11. Odvození intenzity H a E obecně	109	4.611. Elektrická a magnetická intenzita E a H ve stěně dutého válce	181
4.12. Poměry u skutečných cívek obvyklých rozměrů a používaných kmitočtů	115	Příklad	184
4.2. Válcové elmg. vlnění v mezeře mezi cívkom a válcovou vsázkou	117	4.612. Celkový proud ve stěně duté vsázky	185
4.21. Odvození obecných výrazů pro intenzitu elektrického a magnetického pole	117	Příklad	187
4.22. Výrazy E a H pro malé hodnoty argumentu x	120	4.613. Impedance duté vsázky	187
4.23. Nový výklad vzniku elektromotorické síly	124	Příklad	189
		4.614. Výpočet tepla v duté vsázce	190
		4.62. Dutá vsázka s velkým argumentem x	191

E a H ve stěně	191	6.1. Obecné řešení	246																																																																														
4.622. Celkový proud ve vsázce	193	6.11. Rozložení elektrického a magnetického pole v nevodivém válci	246																																																																														
Příklad	193	6.12. Výsledný proud I mezi deskami kondenzátoru a impedance uvažovaného válce	249																																																																														
4.623. Impedance dutého válce, množství tepla ve stěně	196																																																																																
Příklady	196	6.2. Válec z dokonalého dielektrika	249																																																																														
4.63. Dutá vsázka s velkým argumentem x_1 a velkou tloušťkou stěny	199	6.21. Odvození E a H v obecném případě	250																																																																														
4.631. Elektrická a magnetická intenzita ve stěně	199	Příklad	252																																																																														
4.632. Celkový proud ve stěně	200	6.22. Obecné platný diagram pro průběh intenzity E	253																																																																														
4.633. Impedance duté vsázky	201	6.23. Výrazy pro E a H v případě, že argument x je malý	255																																																																														
4.64. Účinnost přenosu energie z cívky do vsázky	201	6.24. Proud I a impedance Z_{11} bezetrátového válce	255																																																																														
4.65. Náhradní průměr duté vsázky	202																																																																																
4.66. Optimální kmitočet pro indukční ohřev dutého válce	203	6.3. Válec z dielektrika s malými ztrátami	256																																																																														
4.661. Doplňení diagramu 46.9 stupnicemi	205	6.31. Intenzita E elektrického pole	257																																																																														
Příklady	207	6.32. Odvození tepla v dielektriku s malými ztrátami	258																																																																														
	209	Příklady	260																																																																														
5. Vedení ze souosých válců	209	6.33. Množství tepla ve válci v případě malého argumentu x_1	262																																																																														
5.1. Přímý plný vodič válcového tvaru	209		264																																																																														
5.11. Elektrická a magnetická intenzita ve vodiči	209	7. Přílohy																																																																															
5.12. Impedance válcového vodiče	215	5.13. Množství tepla (ztráty) ve vodiči	218	7.1. Některé poznatky z počítání s prostorovými vektory, přicházející v této práci	264		219	7.2. Goniometrické a hyperbolické funkce a jejich vztahy, vyskytující se v této práci	266	5.2. Přímý dutý válcový vodič	219	7.3. Cylindrické funkce	268	5.21. Elektrická a magnetická intenzita ve vodiči	219	7.31. Cylindrické funkce reálného argumentu	268	5.22. Impedance a ztráty dutého vodiče	220	7.32. Cylindrické funkce komplexního argumentu ($x\sqrt{-j}$)	270	5.23. Elektrická a magnetická intenzita v případě velké hodnoty argumentu x	221	7.33. Cylindrické funkce Hankelovy	271	5.24. Impedance a ztráty v případě velkého argumentu x	223	7.34. Některé integrály cylindrických funkcí	273		224	7.35. Cylindrické funkce pro velmi malé reálné hodnoty argumentu $x \rightarrow 0$	274	5.3. Souosé vodivé válce	224	7.36. Cylindrické funkce pro velmi velké hodnoty reálného argumentu $x \rightarrow \infty$	274	5.31. Elektrická a magnetická intenzita ve vnějším válci	225	7.4. Tabulky cylindrických funkcí prvního a druhého druhu, nultého a prvního rádu pro komplexní argument ($\sqrt{x-j}$)	276	5.32. Impedance a ztráty ve vnějším válci	227	7.5. Tabulka pro výpočet činného odporu a reaktance duté vsázky	280	Příklad	229			5.33. Elektrická a magnetická intenzita ve vnějším válci s velkou tloušťkou stěny	231	Summary in English	282	5.34. Impedance a ztráty ve vnějším válci velké tloušťky	233	Literatura, která má přímý vztah ke knize Teorie indukčního a dielektrického tepla	284	Příklad	233	Rejstřík	286	5.35. Absolutní hodnota hustoty proudu ve stěně velké tloušťky	235			Příklad	236			5.36. Výrazy pro H , J v případě, že argumenty x_1 , x_4 jsou veliké (koaxiální kabel)	237			Příklad	239			5.37. Impedance válce s velkými hodnotami argumentů x_1 , x_4	240		
5.13. Množství tepla (ztráty) ve vodiči	218	7.1. Některé poznatky z počítání s prostorovými vektory, přicházející v této práci	264																																																																														
	219	7.2. Goniometrické a hyperbolické funkce a jejich vztahy, vyskytující se v této práci	266																																																																														
5.2. Přímý dutý válcový vodič	219	7.3. Cylindrické funkce	268																																																																														
5.21. Elektrická a magnetická intenzita ve vodiči	219	7.31. Cylindrické funkce reálného argumentu	268																																																																														
5.22. Impedance a ztráty dutého vodiče	220	7.32. Cylindrické funkce komplexního argumentu ($x\sqrt{-j}$)	270																																																																														
5.23. Elektrická a magnetická intenzita v případě velké hodnoty argumentu x	221	7.33. Cylindrické funkce Hankelovy	271																																																																														
5.24. Impedance a ztráty v případě velkého argumentu x	223	7.34. Některé integrály cylindrických funkcí	273																																																																														
	224	7.35. Cylindrické funkce pro velmi malé reálné hodnoty argumentu $x \rightarrow 0$	274																																																																														
5.3. Souosé vodivé válce	224	7.36. Cylindrické funkce pro velmi velké hodnoty reálného argumentu $x \rightarrow \infty$	274																																																																														
5.31. Elektrická a magnetická intenzita ve vnějším válci	225	7.4. Tabulky cylindrických funkcí prvního a druhého druhu, nultého a prvního rádu pro komplexní argument ($\sqrt{x-j}$)	276																																																																														
5.32. Impedance a ztráty ve vnějším válci	227	7.5. Tabulka pro výpočet činného odporu a reaktance duté vsázky	280																																																																														
Příklad	229																																																																																
5.33. Elektrická a magnetická intenzita ve vnějším válci s velkou tloušťkou stěny	231	Summary in English	282																																																																														
5.34. Impedance a ztráty ve vnějším válci velké tloušťky	233	Literatura, která má přímý vztah ke knize Teorie indukčního a dielektrického tepla	284																																																																														
Příklad	233	Rejstřík	286																																																																														
5.35. Absolutní hodnota hustoty proudu ve stěně velké tloušťky	235																																																																																
Příklad	236																																																																																
5.36. Výrazy pro H , J v případě, že argumenty x_1 , x_4 jsou veliké (koaxiální kabel)	237																																																																																
Příklad	239																																																																																
5.37. Impedance válce s velkými hodnotami argumentů x_1 , x_4	240																																																																																

Kniha Teorie indukčního a dielektrického tepla vznikla ve vývojovém pracovišti Závodů elektrotepelných zařízení v Praze. Úkolem tohoto pracoviště bylo připravit podklady pro projektování a výrobu indukčních pecí tavicích a zařízení prohřívacích, které se dříve v ČSSR nevyráběly.

Kelímkových indukčních pecí tavicích se používá k výrobě nejjakostnějších druhů ocelí a slitin barevných kovů. Intenzivní vření vsázky, vyvolané elektromagnetickým působením proudu v cívce, způsobí dokonalé promisení lázně v kelímku, a tím zajistí nejjemnější rozptylení příasad a dokonalou homogenitu celého obsahu kelímku, nedosažitelnou v žádném jiném druhu pecí. V indukčních zařízeních prohřívacích nastává velmi rychle prohřátí kovových dílců v celém průseku. Podstatné zkrácení doby ohřevu ve srovnání s ohrevem v pecích palivových téměř vylučuje tvoření okuji, šetří materiál a záustky. Ve spojení s moderními kovacími rychlolisy se značně snižují výrobní náklady v kovárnách.

Princip vzniku tepla v indukčních pecích a zařízeních lze ve všech případech vysvětlit takto: kovový materiál, který má být indukčně zahříván, se umístí do dutiny vhodně upravené cívky. Cívka vhodného tvaru vyzařuje elektromagnetické vlnění, zpravidla rovinné nebo válcové, které dopadá na vsázku a částečně do ní vstupuje. Energie vsázkou pohlceného vlnění se přemění v teplo.

Autor této knihy byl po dlouhou dobu vedoucím uvedeného vývojového pracoviště. Jeho snahou bylo proniknout hlouběji do teorie vzniku indukčního tepla při dopadu elektromagnetického vlnění na vodivou vsázku a odvozených výsledků potom použít při výpočtech, projektování a konstruování pecí a zařízení.

Obor indukčního tepla je i ve světovém měřítku poměrně nový a odborná literatura je proto neúplná. Autor ve značné míře doplnil známé poznatky vlastními pracemi. Vyšel z Maxwellových rovnic a systematicky propracoval v samostatných kapitolách různé případy dopadu elektromagnetického vlnění rovinného a válcového. Některé kapitoly jsou zcela původní, u všech je původní jednotné, systematické zpracování celé látky. Pokud je autorovi známo, nebyla ve světové literatuře dosud tato látka v takovém rozsahu zpracována. Za důležitý přínos lze označit odvozený poznatek, že většinu případů rovinného vlnění (dopad vlnění na stěnu z jedné strany, z obou stran, vedení proudu jednou nebo dvěma stěnami) lze převést na jeden společný základní typ.

Kniha je určena zájemcům z výzkumných, vývojových a projekčních pra-

covišť a dále studentům vysokých škol. Prináší podrobné informace především těm, kteří se chtějí s uvedenými problémy seznámit zevrubněji, aby mohli sami řešit případy použití indukčního tepla. Protože odvozené výsledky jsou současně vyjádřeny i formou přehledných diagramů, může kniha poskytnout informace i dalším zájemcům, kteří nebudou jednotlivá řešení podrobně sledovat a kteří se pro svou práci spokojí pouze s odvozenými výsledky. Text knihy je vhodně doplněn 130 obrázky a diagramy a větším počtem příkladů přímo z praxe. Přání autora je, aby tato kniha přispěla k výchově dalších odborníků, a tím urychlila rozvoj indukčního tepla v ČSSR.

Autor děkuje zde za některé podnětné připomínky, které přispěly ke zlepšení práce, vědeckému redaktorovi akademiku Bedřichu Hellerovi a recenzentovi prof. DrSc. Janu Hlávkovi. Za pečlivé nakreslení obrázků svým spolupracovníkům Miloslavu Truhelkovi, inž. Karlu Ouřadovi a inž. Josefem Lindovi. Dále vyslovují poděkování za pečlivou redakční úpravu redaktorce Lidmile Jánské a za vzorně provedenou obtížnou sazbu kolektivu sazečů z pracoviště mistra Bauera.

V Plzni, v červnu 1963.

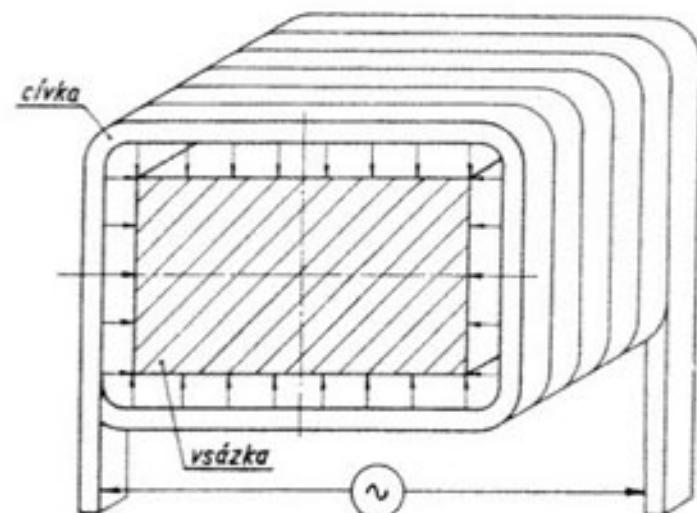
1. Úvod

V této knize se budeme zabývat teorií vzniku indukčního tepla. Indukční teplo vzniká vždy při dopadu elektromagnetického vlnění na vodivou stěnu. Část vlnění se při dopadu odraží a vraci zpět, druhá část proniká do stěny a vyvolá v ní indukované (vířivé) proudy. Energie elmg. vlnění se spotřebuje na uvedení do pohybu volných elektronů v materiálu stěny. Elektrony se pohybují ve směru intenzity elektrického pole, nabývají i na krátkých volných drahách značných rychlosti, a tím poměrně i značné kinetické energie. Při nárazu elektronů na molekuly předají elektrony svou kinetickou energii molekulám, tím zvýší jejich rozkmit, což jinými slovy znamená zvýšení teplosty materiálu. Elmg. vlnění se ve stěně utlumí a jeho energie se přemění na energii tepelnou.

Zdrojem elektromagnetického záření je každý vodič, kterým prochází střídavý elektrický proud. Vodič obvykle upravujeme vzhledem k prohřívanému předmětu do vhodného tvaru, abychom zajistili dobrou účinnost přenosu energie ze zářiče do prohřívaného předmětu. Jde-li o prohřívání předmětu omezeného rovnými plochami, jako je hranol, pás, atd., volíme i zářič (cívku) z rovných ploch, jejichž jednotlivé části jsou rovnoběžné s povrchovými plochami prohřívaného tělesa, podle obr. 10,1.

V dalším odvodíme, že jednotlivé strany cívky tohoto tvaru vyzařují na stěny tělesa rovinné elmg. vlnění.

Druhým základním případem je prohřívání těles válcových. Takové předměty prohříváme v souosé cívce rovněž válcového tvaru, podle obr. 10,2. Vnitřní povrch cívky vyzařuje do své dutiny válcové elmg. vlnění.



Obr. 10,1. Indukční prohřívání vsázky ve tvaru hranolu, vložené do dutiny cívky, jejíž stěny jsou rovnoběžné se stěnami vsázky. Šipky naznačují elektromagnetické vlnění, vyzařované vnitřním povrchem cívky.

Budeme se proto v dalším podrobněji zabývat vlněním rovinným v izolantu a různými případy rovinného vlnění ve vodivé rovné stěně; zejména to bude dopad vlnění na rovnou stěnu z jedné, po případě z obou stran. Vedení proudu jednou rovnou stěnou a vedení stejných proudů opačně orientovaných dvěma navzájem rovnoběžnými rovinnými stěnami (pásové vedení).

Dále budeme vyšetřovat válcové elmg. vlnění v izolantu (v dutině prázdné cívky a v mezeře mezi cívku a válcovou vsázkou) a ve vodivém prostředí. Jsou to zejména tyto případy: válcová vsázka plná a dutá, vlnění ve vodiči cívky, válcové vlnění, buzené válcovým vodičem, izolovaně umístěný v dutině válcového tělesa atd.

V poslední kapitole se budeme zabývat vznikem tepla v izolantu umístěném v elektrickém poli, to je mezi deskami kondenzátoru (teplota dielektrická), obr. 10.3.



Obr. 10.2. Indukční prohřívání válcové vsázky, vložené do dutiny válcové cívky.

Obr. 10.3. Dielektrické prohřívání nevodivého válce v elektrickém poli mezi kruhovými deskami kondenzátoru.

Základní rovnice vlnění rovinného a válcového odvodíme z Maxwellových rovnic. Bude také nutné seznámit se se zářivým vektorem Poyntingovým, který v každém místě můžeme určit z intenzity pole elektrického a magnetického a který určuje směr a intenzitu toku elektromagnetické energie.

V dalších úvahách budeme předpokládat, že fyzikální vlastnosti (elektrická vodivost, permeabilita, tepelná vodivost atd.) jsou konstantami v celém uvažovaném objemu (homogenní, izotropní prostředí). Všechna vyšetřovaná prostředí uvažujeme jako tuhá, neřešíme elektrodynamiku tekutých (roztažených) kovů.

V celé knize používáme důsledně jednotek rationalizované soustavy podle

normy ČSN 34 5200. Ve smyslu této normy lze veličiny vyjadřovat také v dekadických násobcích základních jednotek. Intenzitu magnetického pole vyjadřujeme v jednotkách A/cm, intenzitu pole elektrického ve V/cm, atd. Pro označení fyzikálních a jiných veličin používáme znaků podle normy ČSN 34 5200.

- E** — vektor intenzity elektrického pole [V/cm]
H — vektor intenzity magnetického pole [A/cm]
J — γE hustota proudu [A/cm², S·cm⁻¹, V/cm]
S — vektor záření (Poyntingův vektor) [VA/cm²]
E_p, H_p — složky dopadajícího elmg. vlnění [V/cm, A/cm]
E_r, H_r — složky odraženého elmg. vlnění [V/cm, A/cm]
S_p, S_r — zářivý vektor vlnění dopadajícího a odraženého [VA/cm²]
 γ — vodivost materiálu [S·cm/cm²]
 ϱ — odpornost materiálu [$\Omega \cdot \text{cm}^2/\text{cm}$]
 σ — měrný příkon v jednotce objemu [W/cm³]
 R — činný odpornost [Ω]
 L — indukčnost [H]
 M — vzájemná indukčnost 2 obvodů [H]
 f — kmitočet [Hz]
 $\omega = 2\pi f$ kruhová frekvence
 λ — vlnová délka elmg. vlnění [cm]
 $c = 3 \cdot 10^{10}$ [cm/s] rychlosť elmg. vlnění ve vzduchoprázdnině
 v — rychlosť elmg. vlnění v prostředí [cm/s]
 a — hloubka vniku v materiálu [cm]
 d — tloušťka vodivé stěny [cm]
 $\epsilon_0 = \left(\frac{1}{4\pi c^2}\right) \cdot 10^9$ [F/cm] dielektrická konstanta vakua
 ϵ — poměrná dielektrická konstanta
 $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ [H/cm] permeabilita vakua
 μ — poměrná permeabilita
 r_1, r_2 — vnitřní a vnější poloměr cívky [cm]
 N_1 — počet závitů cívky
 $J_0(x), J_1(x)$ — cylindrické funkce prvního druhu
 $N_0(x), N_1(x)$ — cylindrické funkce druhého druhu
 Význam dalších, méně častých znaků je vždy uveden v textu.
 Na obrázcích jsou vektory značeny s pruhem, např. **E**, **H** atd.

2. Základní poznatky o elektromagnetickém vlnění

2.1. Obecné elektromagnetické vlnění

Rovnice obecného elmg. vlnění v nevodivém a ve vodivém prostředí se dají odvodit ze základních rovnic Maxwellových, které v soustavě praktických jednotek mají tvar:

- I. $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E} + \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ [A/cm, V/cm],
 II. $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ [V/cm, A/cm],
 III. $\operatorname{div} \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E} = \sigma$ [V/cm, F/cm, C/cm³],
 IV. $\operatorname{div} \mu_0 \mu \mathbf{H} = 0$ [A/cm, H/cm].

Uvažujeme dva základní případy:

Elektromagnetické vlnění se šíří v prostředí *nevodivém* (izolant), bez vnitřních zdrojů elektřiny; potom $\gamma = 0$, $\sigma = 0$. To se projeví v rovnici I a III. Ve druhém případě se vlnění šíří ve *vodivém* prostředí. Druhý člen na pravé straně rovnice I, značící hustotu proudu posuvného, je zanedbatelně malý proti členu prvnímu, který značí hustotu proudu vodivého. Můžeme proto druhý člen vypustit.

Podle staršího způsobu se při odvozování rovnic vlnění postupovalo tak, že se vyjádřily složky vektorů $\operatorname{rot} \mathbf{H}$ a $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ ve směrech souřadných os a určitým matematickým postupem se odvodily rovnice vlnění pro všechny tři složky vektorů \mathbf{E} a \mathbf{H} . Ty mohou být potom nahrazeny vektorovou rovnicí vlnění, např. [2,1].

Rychleji nás však dovede k cíli dále uvedený postup:

- a) Odvodme rovnici vlnění pro intenzitu \mathbf{E} v nevodivém prostředí.

Vyjdeme opět z Maxwellových rovnic pro izolant:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (21.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (21.2)$$

$$\operatorname{div} \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E} = 0, \quad (21.3)$$

$$\operatorname{div} \mu_0 \mu \mathbf{H} = 0. \quad (21.4)$$

Derivujme rovnici (21,1) podle času a dosadme do (21,2):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \mathbf{H}) = \text{rot} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (21,5)$$

Z rovnice (21,2)

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0 \mu} \text{rot } \mathbf{E}. \quad (21,6)$$

Určeme rotaci výrazu (21,6):

$$\text{rot} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0 \mu} \cdot \text{rot} \text{rot } \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (21,7)$$

$$\text{rot} \text{rot } \mathbf{E} = -\mu_0 \mu \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (21,8)$$

V příloze 7,0 jsme odvodili výraz (71,19)

$$\text{rot} \text{rot } \mathbf{E} = \text{grad} \text{div } \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E}. \quad (21,9)$$

Protože podle (21,3) $\text{div } \mathbf{E} = 0$, bude

$$\text{rot} \text{rot } \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}, \quad (21,10)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \mu \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (21,11)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \mu \epsilon_0 \epsilon} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} \right] \quad [\text{V/cm}]. \quad (21,12)$$

Zeza analogicky můžeme z rovnic (21,2) až (21,4) odvodit i rovnici vlnění pro složku magnetickou:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \mu \epsilon_0 \epsilon} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} \right] \quad [\text{A/cm}]. \quad (21,13)$$

Rovnice vlnění (21,12) a (21,13) pro složku elektrickou \mathbf{E} a magnetickou \mathbf{H} mají na levé straně druhou derivaci vektoru \mathbf{E} resp. \mathbf{H} podle času, na pravé straně Laplaceův operátor téhož vektoru. Obdobný vzhled mají obecně rovnice vlnění i v jiných případech, např. při šíření elektrické vlny po homogenním vedení, v mechanice při šíření vlny po pružném vláknu, atd. Součinitel na pravé straně značí vždy čtverec postupné rychlosti šíření. Je tedy rychlosť šíření elmg. vlnění v nevodivém prostředí dána výrazem:

$$v^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu} = \frac{1}{\epsilon \mu} \frac{4\pi c^2}{10^9} \frac{10^9}{4\pi} = \frac{c^2}{\epsilon \mu},$$

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad [\text{cm/s}]. \quad (21,14)$$

b) Odvodme rovnici vlnění pro složku \mathbf{H} ve vodivém prostředí:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E}, \quad (21,15)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu_0 \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (21,16)$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0, \quad (21,17)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 0. \quad (21,18)$$

Určeme \mathbf{E} z rovnice (21,15) a dosadme do (21,16):

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\gamma} \cdot \text{rot } \mathbf{H}. \quad (21,15a)$$

Určeme rotaci výrazu (21,15a):

$$\text{rot } \mathbf{E} = \frac{1}{\gamma} \text{rot} \text{rot } \mathbf{H} = -\mu_0 \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (21,19)$$

Z přílohy, z výrazu (71,19) a s přihlédnutím k (21,17)

$$\text{rot} \text{rot } \mathbf{H} = -\nabla^2 \mathbf{H}, \quad (21,20)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \gamma \mu_0 \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (21,21)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{1}{\gamma \mu_0 \mu} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} \right] \quad [\text{A/cm}]. \quad (21,22)$$

Odvodme ještě rovnici vlnění pro složku \mathbf{E} :

Derivujme (21,15) podle času a dosadme do (21,16):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \mathbf{H}) = \text{rot} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (21,23)$$

Naznačme rotaci rovnice (21,16):

$$\text{rot} \text{rot } \mathbf{E} = -\mu_0 \mu \cdot \text{rot} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\mu_0 \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (21,24)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\gamma \mu_0 \mu} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} \right] \quad [\text{V/cm}]. \quad (21,25)$$

Z výrazů (21,12), (21,13) a (21,22), (21,25), které udávají rovnice vlnění obou složek v prostředí nevodivém a vodivém v obecném případě, odvodíme v dalším jednodušší výrazy pro vlnění rovinné a válcové.

Odvození Poyntingova zářivého vektoru

(v sovětské literatuře: vektor Poyntingův—Umovův)

Poyntingův zářivý vektor \mathbf{S} [W/cm^2] určuje směr a hustotu toku elektromagnetické energie v prostoru. V dalším odvodíme závislost vektoru záření \mathbf{S} na intenzitě pole elektrického \mathbf{E} a magnetického \mathbf{H} v uvažovaném bodě. Vychází se z definice množství elektromagnetické energie v jednotkovém objemu prostoru (hustota energie). Záporný časový vztah (úbytek) celkového množství energie v uvažovaném objemu V je právě hledaný zářivý vektor.

V určitém objemu V prostoru je množství magnetické energie W_m a elektrické energie W_e dáné výrazy

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \, dV = \frac{1}{2} \mu_0 \mu \int_V \mathbf{H}^2 \, dV \quad [\text{joule, joule/cm}^3, \text{A/cm, cm}^3], \quad (22.1)$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon \int_V \mathbf{E}^2 \, dV \quad [\text{joule, joule/cm}^3, \text{V/cm, cm}^3]. \quad (22.2)$$

Vektory \mathbf{B} a \mathbf{D} značí magnetickou a elektrickou indukci.

Hustota elektromagnetické energie v každém bodě je časově proměnná. Rychlosť ubývání neboli záporný časový vztah množství energie v uvažovaném objemu V za jednotku času bude

$$-\frac{\partial}{\partial t} (W_e + W_m) = -\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \mu \mathbf{H}^2 \right\} \, dV \quad [\text{W, V/cm, A/cm, cm}^3], \quad (22.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}^2 \right) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon \cdot 2 \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (22.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu_0 \mu \mathbf{H}^2 \right) = \mu_0 \mu \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (22.5)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} (W_e + W_m) = -\int_V \left\{ \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mu \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right\} \, dV. \quad (22.6)$$

Použijme k vyjádření 1. a 2. věty Maxwellovy:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = [\nabla \mathbf{H}] = \gamma \mathbf{E} + \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = [\nabla \mathbf{H}] - \gamma \mathbf{E}, \quad (22.7)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = [\nabla \mathbf{E}] = -\mu_0 \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \mu_0 \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -[\nabla \mathbf{E}]. \quad (22.8)$$

Dosadíme do (22.6):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} (W_e + W_m) &= -\int_V \{([\nabla \mathbf{H}] - \gamma \mathbf{E}) \mathbf{E} - ([\nabla \mathbf{E}] \mathbf{H})\} \, dV = \\ &= + \int_V \{\gamma \mathbf{E}^2 + ([\nabla \mathbf{E}] \mathbf{H}) - ([\nabla \mathbf{H}] \mathbf{E})\} \, dV. \end{aligned} \quad (22.9)$$

Druhý a třetí člen v závorce značí skalární součiny vektorů. Protože platí komutativní zákon, nezáleží na pořadí součinitelů. Výraz (22.9) můžeme pak napsat:

$$-\frac{\partial}{\partial t} (W_e + W_m) = \int_V \{\gamma \mathbf{E}^2 + (\mathbf{H} \cdot [\nabla \mathbf{E}]) - (\mathbf{E} \cdot [\nabla \mathbf{H}])\} \, dV. \quad (22.10)$$

V příloze 7.0 je odvozen výraz (71.16):

$$(\mathbf{H} \cdot [\nabla \mathbf{E}]) - (\mathbf{E} \cdot [\nabla \mathbf{H}]) = (\nabla \cdot [\mathbf{E} \mathbf{H}]) = \operatorname{div} [\mathbf{E} \mathbf{H}].$$

Po dosazení do (22.10)

$$-\frac{\partial}{\partial t} (W_e + W_m) = \int_V \{\gamma \mathbf{E}^2 + \operatorname{div} [\mathbf{E} \mathbf{H}]\} \, dV. \quad (22.11)$$

Podle poučky Gaussovy—Ostrogradského nahradíme integrál objemový integrálem plošným:

$$\int_V \operatorname{div} [\mathbf{E} \mathbf{H}] \, dV = \oint_F [\mathbf{E} \mathbf{H}] \, dF, \quad (22.12)$$

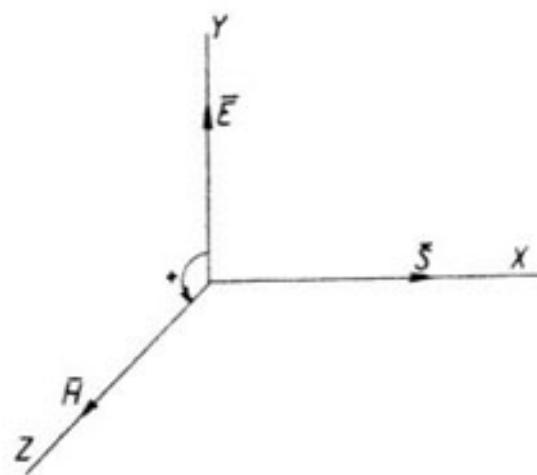
$$-\frac{\partial}{\partial t} (W_e + W_m) = \int_V \gamma \mathbf{E}^2 \, dV + \oint_F [\mathbf{E} \mathbf{H}] \, dF = \int_V \gamma \mathbf{E}^2 \, dV + \oint_F \mathbf{S} \, dF \quad [W/cm^3, cm^3, W/cm^2 \cdot cm^2]. \quad (22.13)$$

Výraz (22.13) určuje úbytek elektromagnetické energie v uvažovaném objemu V za jednotku času. Prvý člen na pravé straně značí množství elmg. energie, které se v tomto objemu za 1 vteřinu přemění v teplo. Druhý výraz udává množství elmg. energie, které z uvažovaného objemu povrchem vystoupí (diverguje) za 1 vteřinu do okolí. Množství energie, které diverguje (vyzařuje) plochou 1 cm², je hledaný zářivý vektor Poyntingův-Umovův:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E} \mathbf{H}] \quad [\text{W/cm}^2, \text{V/cm, A/cm}]. \quad (22.14)$$

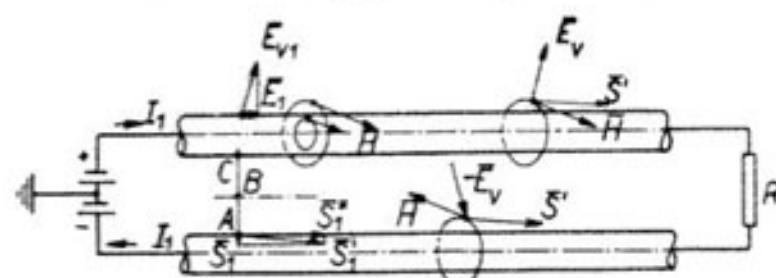
Z předchozího výkladu je vidět, jak je elektromagnetické pole svázáno s tokem elmg. energie v prostoru. Tok energie se děje ve směru vektoru \mathbf{S} . Hustota toku energie, to je množství energie, které proteče za 1 vteřinu plochou 1 cm² kolmou ke směru šíření, je dána výrazem (22.14).

Zářivý vektor \mathbf{S} je obecně určen vektorovým součinem z vektorů \mathbf{E} a \mathbf{H} v uvažovaném místě. Jeho velikost je dána plochou rovnoběžníka, určeného vektory \mathbf{E} a \mathbf{H} . Směr \mathbf{S} je kolmý k ploše rovnoběžníka a jeho smysl je takový, že při pohledu proti smyslu \mathbf{S} se jeví otočení od \mathbf{E} k \mathbf{H} v kladném smyslu, jak je vidět na obr. 22.1.



Obr. 22.1. Vzájemná orientace vektorů: S (zářivý vektor), E (intenzita elektrického pole), H (intenzita magnetického pole).

Vedení tvoří dva vodiče kruhového průřezu, obr. 22.2. Začátek vedení je připojen na stejnosměrný zdroj, na konci vedení je zátěž R . Na obrázku jsou naznačeny magnetické siločáry (soustředné kružnice) uvnitř i vně každého jednotlivého vodiče. Tečny k těmto siločárám určují směr intenzity magnetického pole \mathbf{H} . Díváme-li se proti proudu I_1 , má \mathbf{H} kladný smysl. Intenzita pole elektrického \mathbf{E}_v vně vodiče by ležela v rovině kolmé k ose vodiče v případě, že by vodič měl nekonečnou vodivost. Intenzita \mathbf{E}_{v1} právě na povrchu by v tom případě byla kolmá k povrchu vodiče a současně kolmá k intenzitě \mathbf{H}_1 v tomto místě. Zářivý vektor \mathbf{S}_1 , určený vektory \mathbf{E}_{v1} a \mathbf{H}_1 , by měl směr povrchové přímky a jeho smysl by byl v obou vodičích od zdroje ke spotřebiči.



Obr. 22.2. Rozložení elektrického a magnetického pole v okoli vodičů homogenního vedení.

U skutečného vodiče s konečnou vodivostí γ je vektor \mathbf{E}_{v1} právě na povrchu mírně skloněn, má složku \mathbf{E}_1 ve směru proudu. Tato složka \mathbf{E}_1 protlačuje proud I_1 vodičem. Při stejnosměrném proudu je složka \mathbf{E}_1 v celém průřezu stejná:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{\gamma} \mathbf{J}_1 \quad [\text{V/cm}, \text{S.cm/cm}^2, \text{A/cm}^2]. \quad (22.15)$$

Vektor \mathbf{J}_1 značí hustotu proudu I_1 ve vodiči. Zářivý vektor \mathbf{S}_1 v bodě A na

povrchu, určený vektorů \mathbf{E}_1 a \mathbf{H}_1 , není již rovnoběžný s osou vodiče. Má dvě složky: menší z nich \mathbf{S}_1 vstupuje kolmo povrchem do vodiče, druhá složka \mathbf{S}'_1 , rovnoběžná s osou vodiče, přenáší energii od zdroje ke spotřebiči.

Složka \mathbf{S}_1 je určena vektoru \mathbf{E}_1 a \mathbf{H}_1 v bodě A na povrchu. Poloměr vodiče jsme označili r_1 [cm].

$$E_1 = \frac{1}{\gamma} J_1 = \frac{1}{\gamma} \frac{I_1}{\pi r_1^2} \quad [\text{V/cm}], \quad (22.16a)$$

$$H_1 = \frac{I_1}{2\pi r_1} \quad [\text{A/cm}], \quad (22.16b)$$

$$S_1 = [\mathbf{E}_1 \mathbf{H}_1] = \frac{1}{\gamma} \frac{I_1}{\pi r_1^2} \frac{I_1}{2\pi r_1} \quad [\text{W/cm}^2]. \quad (22.17)$$

Absolutní velikost S_1 :

$$S_1 = \frac{1}{\gamma} \frac{I_1^2}{2\pi^2 r_1^3} \quad [\text{W/cm}^2]. \quad (22.18)$$

Množství energie S_1 vstupuje části povrchu o ploše 1 cm^2 do vodiče. Povrchem obou vodičů o délce l [cm] vstoupí do vedení výkon:

$$P = 2S_1 F = 2 \cdot \frac{1}{\gamma} \frac{I_1^2}{2\pi^2 r_1^3} \cdot 2\pi r_1 l = \frac{1}{\gamma} \frac{2l}{\pi r_1^2} I_1^2 \quad [\text{W}]. \quad (22.19)$$

Protéká-li uvažovaným vedením proud I_1 , jsou ztráty ve vedení:

$$P' = RI_1^2 = \varrho \frac{2l}{\pi r_1^2} I_1^2 \quad [\text{W}]. \quad (22.20)$$

Znak ϱ [$\Omega \cdot \text{cm}^2/\text{cm}$] je měrný odpor, $\varrho = \frac{1}{\gamma}$.

Je vidět totožnost výrazů (22.19) a (22.20): $P = P'$.

Odvozené výsledky podávají tento výklad pro přenos elektrické energie stejnosměrným proudem: výkon se nepřenáší vodičem, nýbrž šíří se izolutem (vzduchem) kolem vodičů, ve směru zářivého Poyntingova vektoru. Část elektromagnetické energie, která při konečné vodivosti materiálu vstoupí povrchem do vodičů, se přemění v tepelnou energii a tvoří ztráty vedení.

Chceme-li vyšetřit rozložení elektromagnetického toku v prostoru kolem vodičů, zvolime v řezu kolmém k ose vedení řadu bodů, v nich určíme intenzitu elektrického pole \mathbf{E} a magnetického pole \mathbf{H} , a ty pak určují zářivý vektor \mathbf{S} v každém zvoleném bodě. Integrací \mathbf{S} v ploše řezu dostaneme celý přenášený výkon.

Číselný příklad

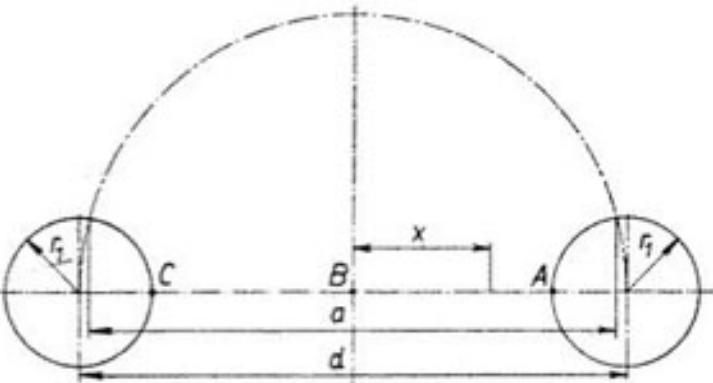
Abychom si učinili kvantitativní představu o rozložení elmg. toku v prostoru kolem uvažovaného dvouvodičového vedení, stanovme velikost zářivého vektoru \mathbf{S} v bodech A , B , C na spojnici, kolmě k ose vedení, obr. 22.3.

Osová vzdálenost d obou měděných vodičů je 20 cm, délka vedení 100 m, poloměr vodiče $r_1 = 2,0$ mm. Měrná vodivost mědi $\gamma = 5,5 \cdot 10^8$ S.cm $^{-1}$. Přenášíme stejnosměrný výkon $N = 25$ kW, napětí $U = 1000$ V, proud $I_1 = 25$ A.

Hustota proudu $J_1 = \frac{I_1}{\pi r_1^2} \doteq 2,0$ A/mm 2 .

Intenzita elektrického pole E_1 na povrchu

$$E_1 = \frac{1}{\gamma} J_1 = 3,64 \cdot 10^{-4}$$
 V/cm.



Obr. 22,3. Řez homogenním vedením.

Intenzita magnetického pole H_1 na povrchu

$$H_1 = \frac{I_1}{2\pi r_1} \doteq 20$$
 A/cm,

$$S_1 = E_1 H_1 = 7,28 \cdot 10^{-3}$$
 W/cm 2 .

Ztráta v celém vedení

$$P = S_1 F = 182$$
 W.

Pro intenzitu elektrického pole E_v na spojnici mezi dvěma rovnoběžnými vodiči použijeme výrazu

$$E_v = \frac{Ua}{2\left(\frac{a}{2}-x\right)\left(\frac{2}{a}+\frac{x}{2}\right)\ln\left(\frac{d}{2r_1} + \sqrt{\frac{d^2}{4r_1^2}-1}\right)} \quad [\text{V/m}, \text{m}] \quad (22,21)$$

Osová vzdálenost je d , x je vzdálenost uvažovaného bodu od osy symetrie. Význam délky a je vidět z náčrtku 22,3.

Dosazením do (22,21) jsme určili intenzitu E v bodech B a A :

$$E_B = 14,5 \text{ V/cm}, \quad E_A = 362 \text{ V/cm}.$$

Intenzita magnetického pole v bodech B a A je

$$H_B = 0,398 \text{ A/cm}, \quad H_A = 20,10 \text{ A/cm}.$$

Zářivý vektor S'' (hustota elmg. toku) v bodech A , B :

$$S''_A = 7276 \text{ W/cm}^2,$$

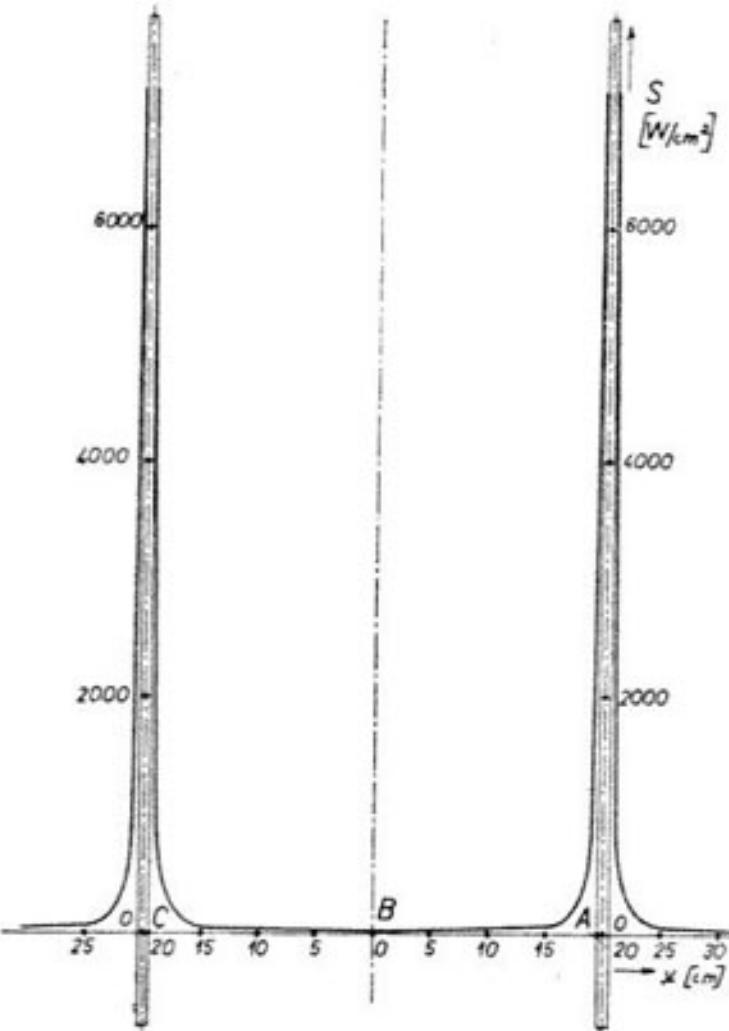
$$S''_B = 11,55 \text{ W/cm}^2,$$

Je vidět, že zářivý vektor má na povrchu vodiče maximální hodnotu S''_A a se vzdáleností od povrchu se jeho hodnota velmi rychle zmenšuje. Je tedy tok energie převážně soustředěn do těsné blízkosti vodičů (obr. 22,4).

Dvouvodičové vedení, protékáne střídavým proudem

Výklad přenosu energie a vzniku ztrát jako části toku elektromagnetické energie, která povrchem vnikne do vodiče, je stejný, jako u vedení s proudem stejnosměrným.

Velmi důležitý rozdíl je však v tom, že střídavý proud ve vodiči vytváří střídavé magnetické pole uvnitř i vně vodiče. Toto střídavé pole indukuje



Obr. 22,4. Rozložení toku elektromagnetické energie podél vodičů.

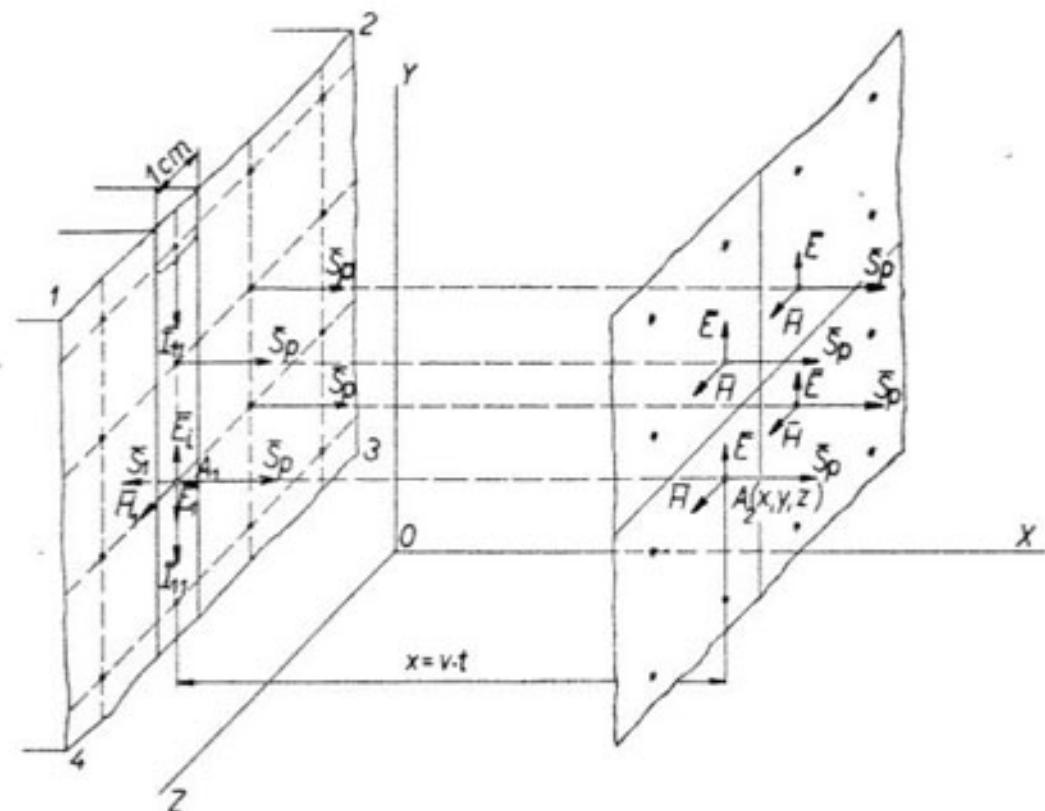
ve vodiči elektromotorickou silu, jejíž směr je namířen proti směru proudu. Označme tuto elektromotorickou силu právě na povrchu E_i . Tato elektromotorická síla vytvoří s intenzitou magnetického pole na povrchu H_1 zářivý Poyntingův vektor, orientovaný kolmo k povrchu a směřující ven z vodiče. Vektor H_1 je časově ve fázi s proudem I_1 ve vodiči. Vektor E_i je však o $\pi/2$ opožděn za budicím tokem, který je ve fázi s proudem I_1 . Je proto E_i opožděn o $\pi/2$ za H_1 a vyzařovaná energie je čistě jalová.

Odrozený poznatek, že ztráty ve vodiči se rovnají energii, která povrchem vstupuje do vodiče, má obecnou platnost a v dalším ho budeme častěji používat.

3. Rovinné elektromagnetické vlnění

3.1. Základní vlastnosti

V části 2,10 jsme odvodili rovnice obecného elmg. vlnění. Rovinné vlnění je zvláštním případem elmg. vlnění. Dříve odvozené obecné výrazy se v tomto případě značně zjednoduší.



Obr. 31.1. Schematické znázornění rovinné vlny, vyzařované rovinným zářičem
 $1-2-3-4$.

Zdrojem rovinného elmg. vlnění je rovná vodivá stěna, kterou prochází střídavý proud. Zvolme pravoúhlý souřadnicový systém tak, aby vyzařující rovina, to je rozhraní mezi stěnou a izolantem procházela osami Y , Z , podle obr. 31.1.

V teoretických úvahách předpokládáme, že je tato stěna rozprostřena ve směrech Y a Z do nekonečna. Předpokládejme, že jsou splněny určité podmínky nutné k tomu, aby celá rovina vyzařovala kolmo, to je ve směru osy X ,

elektromagnetické vlnění. Základní podmínkou je, aby celá stěna byla ze zdroje napájena střídavým proudem např. ve směru osy Y . Hustota proudu, to je proud, protékající pruhem o šířce 1 cm, nechť je I_{11} [A/cm]. Má-li tato rovina vyzařovat rovinné vlnění, musí být splněna ještě další podmínka: okamžitá hodnota hustoty i_{11} musí být v každém zvoleném okamžiku v celé nekonečné stěně stejná. To předpokládá, že zdroj postačí zásobit všechny pruhy o šířce 1 cm mezi nekonečně vzdálenými body 1 a 2 proudem téže hustoty a dále, že proudová vlna se šíří ve směru osy Y nekonečně velikou rychlosí. (Tyto podmínky jsou nesplnitelné pro stěnu, rozprostřenou do nekonečna. Ve skutečnosti se však setkáváme s vyzařujícími rovinami poměrně malých geometrických rozměrů ve srovnání s vlnovou délkou λ odpovídající použitému kmitočtu, a pak je podmínka též okamžité hustoty i_{11} v každém místě stěny s postačující přesností splněna.)

V teoretických úvahách tedy budeme předpokládat, že v celé nekonečné vyzařující stěně je v každém zvoleném okamžiku ve všech bodech táž okamžitá hustota proudu i_{11} . Každý bod roviny vyzařuje kolmo k rozhraní týž elektromagnetický tok, daný Poyntingovým zářivým vektorem S_p [W/cm^2]. Směr vektoru S_p splývá se směrem šíření elmg. vlnění, je kolmý k vyzařující rovině. Rychlosť šíření v izolantu je určena výrazem (21.14):

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad [\text{cm/s}].$$

Ve všech bodech zvolené roviny, kolmé ke směru šíření ve vzdálenosti x od rozhraní, je v každém zvoleném okamžiku táz okamžitá hodnota zářivého vektoru \mathbf{S}_p , jsou stejné i okamžité hodnoty vektorů \mathbf{E} a \mathbf{H} . Těmito podmínkami je definováno rovinné elmg. vlnění. Postačí proto vyšetřovat poměry ve zvoleném bodě A_2 o souřadnicích x , y , z , ležícím v rovině vzdálené o x od rozhraní. Hodnoty odvozené pro tento bod platí potom pro všechny body uvažované roviny.

V uvažovaném bodě $A_2(x, y, z)$ nechť je zářivý vektor \mathbf{S}_p , a vektory intenzity elektrického a magnetického pole \mathbf{E} a \mathbf{H} . Víme již, že vektory \mathbf{E} a \mathbf{H} leží v rovině kolmé k vektoru záření \mathbf{S}_p , tedy kolmé k ose X . Zvolíme směr svislé osy Y právě tak, aby splynul se směrem vektoru intenzity elektrického pole \mathbf{E} . Za použití Maxwellových rovnic lze odvodit, že vektor intenzity \mathbf{H} je kolmý k \mathbf{E} a je orientován ve směru osy Z [2,1].

Z definice rovinného vlnění vyplývá, že vektory E a H nezávisí na souřadnicích y a z . Jsou tedy vzhledem k těmto souřadnicím konstantami a jejich derivace podle těchto proměnných se rovnají nule:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial u} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = 0. \quad (31,1)$$

3.2. Rovinné vlnění v izolantu před rozhraním

Dříve odvozené obecné rovnice (21,12) a (21,13) pro vlnění složek \mathbf{E} a \mathbf{H} v izolantu budou mít pro rovinné vlnění ve směru osy X , s přihlédnutím k (31,1), tvar:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\epsilon \mu} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} \quad [\text{V/cm}], \quad (32,1)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\epsilon \mu} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} \quad [\text{A/cm}]. \quad (32,2)$$

Protože uvažované elmg. vlnění má časově harmonický průběh, můžeme časové vektory \mathbf{E} a \mathbf{H} vyjádřit výrazy:

$$\mathbf{E} = E e^{j\omega t}, \quad \mathbf{H} = H e^{j\omega t}, \quad \frac{d\mathbf{H}}{dt} = j\omega \mathbf{H}. \quad (32,3)$$

Znak $\omega = 2\pi f$ je kruhová frekvence použitého kmitočtu f .

Potom

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\epsilon \mu} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} = -\omega^2 \mathbf{H}, \quad (32,4)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{H}}{dx^2} + \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (32,5)$$

Výraz (32,5) je homogenní diferenciální rovnice 2. řádu. Řešením je součet dvou exponenciálních funkcí typu: $\mathbf{H} = A e^{\lambda x} + B e^{\lambda x}$. Exponent λ dostaneme z charakteristické rovnice.

$$\lambda_{1,2} = \pm j \left(\frac{\omega}{v} \right),$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{A} e^{j\lambda_1 x} + \mathbf{B} e^{-j\lambda_2 x} = \mathbf{A} e^{-j\left(\frac{\omega}{v}\right)x} + \mathbf{B} e^{+j\left(\frac{\omega}{v}\right)x} \quad [\text{A/cm}]. \quad (32,6)$$

Symboly \mathbf{A} a \mathbf{B} jsou integrační konstanty, které určíme z mezních podmínek. Intenzita \mathbf{H} je složena ze dvou částí, které postupují proti sobě. První člen značí vlnění, které vystupuje ze zdroje a šíří se rychlostí v , až dopadne na vodivou stěnu, umístěnou kolmo ke směru šíření. Druhý člen značí vlnu odraženou, která se od rozhraní vraci zpět ke zdroji. Počátek souřadnice x umístíme v odrážejícím rozhraní. Vlnění ze zdroje postupuje odleva doprava (souřadnice x'), kladný smysl x volíme odprava doleva.

Nyní je třeba zjistit vzájemný vztah mezi intenzitou pole magnetického \mathbf{H} a pole elektrického \mathbf{E} v izolantu. Použijeme 1. Maxwellovy rovnice pro izolant a přihlédneme k obr. 32,1, abychom určili $\text{rot } \mathbf{H}$.

$$\text{rot } \mathbf{H} = \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (32,7)$$

Rot \mathbf{H} je určena jako poměr elementární práce, kterou vykoná intenzita \mathbf{H} po obvodu plošky o rozměrech $(dx, \Delta z)$, dělené touto ploškou:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\mathbf{H} \Delta z - \left(\mathbf{H} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} dx \right) \Delta z}{dx \Delta z} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x}, \quad (32,8)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = j\omega \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x}. \quad (32,9)$$

Určíme derivaci výrazu (32,6) podle x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} &= -j \frac{\omega}{v} \mathbf{A} e^{-j\left(\frac{\omega}{v}\right)x} + \\ &+ j \frac{\omega}{v} \mathbf{B} e^{+j\left(\frac{\omega}{v}\right)x} = -j\omega \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (32,10)$$

Dosadíme do (32,10) za v :

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_0 \mu_0 \mu}}; \\ \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120 \pi.$$

Intenzita elektrického pole \mathbf{E} je

Obr. 32,1. Prostorový element pro vyjádření $\text{rot } \mathbf{H}$.

$$\mathbf{E} = 120 \pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[\mathbf{A} e^{-j\left(\frac{\omega}{v}\right)x} - \mathbf{B} e^{+j\left(\frac{\omega}{v}\right)x} \right] \quad [\text{V/cm}]. \quad (32,11)$$

Určení konstant \mathbf{A} a \mathbf{B}

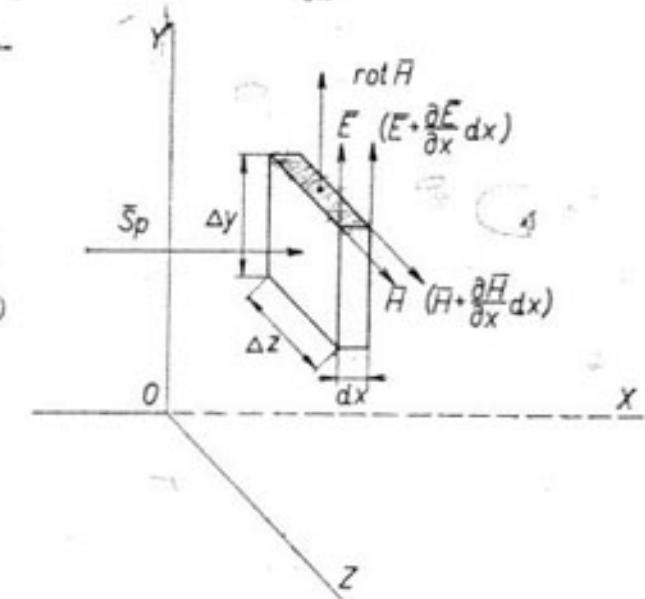
Hodnoty \mathbf{E}_2 a \mathbf{H}_2 právě v rozhraní dostaneme, dosadíme-li do (32,6) a (32,11) za $x = 0$:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_2 = \mathbf{A} + \mathbf{B}, \quad (32,12)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_2 = 120 \pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} (\mathbf{A} - \mathbf{B}). \quad (32,13)$$

V těchto rovnicích jsou čtyři neznámé \mathbf{H}_2 , \mathbf{E}_2 , \mathbf{A} , \mathbf{B} . K oběma rovnicím přiřadíme třetí, určující vzájemný vztah mezi \mathbf{H}_2 a \mathbf{E}_2 , a potom již můžeme určit konstanty \mathbf{A} a \mathbf{B} jako funkce \mathbf{H}_2 .

Pro vztah mezi \mathbf{H}_2 a \mathbf{E}_2 použijeme této úvahy: elektromagnetické vlnění při



dopadu na vodivou stěnu se částečně odráží a menší část pronikne do vodivé stěny. V rozhraní musí být zachována kontinuita, vektory \mathbf{H}_2 a \mathbf{E}_2 se nemohou změnit skokem, musí mít stejné hodnoty těsně před rozhraním (v izolantu) a těsně za rozhraním (ve vodivé stěně).

V další části 3,30 odvodíme pro poměr \mathbf{E} a \mathbf{H} ve vodivé stěně výraz (33,11):

$$\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{H}} = \frac{1+j}{ay} \quad [\text{V/cm}, \text{A/cm}, \text{cm}, \text{S.cm}^{-1}].$$

Přitom značí symbol a tzv. hloubka vniku. Tento pojem bude bliže vysvětlen v kapitole 3,30, výraz (33,4).

Uvedený výraz platí i pro rozhraní, takže:

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1+j}{ay} \mathbf{H}_2. \quad (32,14)$$

Z rovnic (32,12), (32,13) a (32,14) potom určíme

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{H}_2 \left(1 + \frac{1+j}{120\pi a y} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \right). \quad (32,15)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \mathbf{H}_2 \left(1 - \frac{1+j}{120\pi a y} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \right). \quad (32,16)$$

Druhý člen v závorce je zpravidla mnohokrát menší než 1 (rádově 10^4 až 10^6 krát), můžeme jej tedy zanedbat. Potom

$$\mathbf{A} \doteq \mathbf{B} \doteq \frac{1}{2} \mathbf{H}_2. \quad (32,17)$$

3.21. Stojaté vlnění v izolantu

Vlna magnetická

Dosadíme hodnoty integračních konstant z (32,17) do výrazu (32,6) pro intenzitu magnetického pole \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \mathbf{H}_2 e^{-j\left(\frac{\omega}{v}\right)x} + \frac{1}{2} \mathbf{H}_2 e^{j\left(\frac{\omega}{v}\right)x} = \mathbf{H}_p + \mathbf{H}_r \quad [\text{A/cm}]. \quad (32,18)$$

Prvý člen na pravé straně značící vlnu vycházející ze zdroje a dopadající na rozhraní označili jsme \mathbf{H}_p , druhý člen je vlna odražená \mathbf{H}_r . V rozhraní ($x = 0$) bude

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_2 = \frac{1}{2} \mathbf{H}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_{p2} + \mathbf{H}_{r2} \quad [\text{A/cm}]. \quad (32,19)$$

Vidíme, že vlna přicházející a odražená mají v rozhraní stejnou velikost i fázi. Vlna \mathbf{H}_2 v rozhraní je dána součtem vlny přicházející a odražené.

Upravme vhodně výraz (32,18):

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{H}_{p2} \left(e^{-j\left(\frac{\omega}{v}\right)x} + e^{j\left(\frac{\omega}{v}\right)x} \right) = \mathbf{H}_{p2} \left[\cos\left(\frac{\omega}{v}x\right) - j \sin\left(\frac{\omega}{v}x\right) + \right. \\ &\quad \left. + \cos\left(\frac{\omega}{v}x\right) + j \sin\left(\frac{\omega}{v}x\right) \right] = 2 \mathbf{H}_{p2} \cdot \cos\left(\frac{\omega}{v}x\right), \end{aligned} \quad (32,20)$$

$$\mathbf{H} = H_2 e^{j\omega t} \cdot \cos\left(\frac{\omega}{v}x\right) = H_2 \cdot \cos\left(\frac{\omega}{v}x\right) e^{j\omega t} \quad [\text{A/cm}]. \quad (32,21)$$

Dostali jsme rovnici stojatého vlnění složky \mathbf{H} v nevodivém prostředí mezi zdrojem a vodivým rozhraním. Amplituda vektoru \mathbf{H} je goniometrickou funkcí argumentu $\left(\frac{\omega}{v} \cdot x\right)$, přímo úměrného vzdálenosti x od rozhraní. Pro $x = 0$ je maximum $\mathbf{H} = \mathbf{H}_2 = 2\mathbf{H}_{p2}$ (kmitna). Další kmitny jsou v bodech:

$$\cos\left(\frac{\omega}{v}x\right) = 1, \left(\frac{\omega}{v}x\right) = 0, \pi, 2\pi, \dots k\pi. \quad (32,22)$$

Zaveděme do argumentu $\left(\frac{\omega}{v}x\right)$ vlnovou délku λ , kterou dostaneme ze vztahu

$$v = \lambda f \quad [\text{cm/s, cm, 1/s}]. \quad (32,23)$$

Dosadíme za v do (32,22):

$$\left(\frac{\omega}{v}x\right) = \frac{2\pi f}{\lambda} x = \frac{2\pi}{\lambda} x = 0, \pi, 2\pi, \dots k\pi; \text{ z toho určíme vzdálenosti } x, \text{ ve kterých jsou kmitny:}$$

$$x = 0, \frac{1}{2}\lambda, \frac{2}{2}\lambda, \frac{3}{2}\lambda, \dots \frac{k}{2}\lambda. \quad (32,24)$$

Obdobně určíme nulové hodnoty (uzly) vlny magnetické v bodech:

$$x = \frac{1}{4}\lambda, \frac{3}{4}\lambda, \frac{5}{4}\lambda, \dots \frac{2k+1}{4}\lambda. \quad (32,25)$$

Průběh stojaté vlny magnetické je na obr. 32,2.

Vlna elektrická

Dosadíme do (32,11) za \mathbf{A}, \mathbf{B} z (32,17):

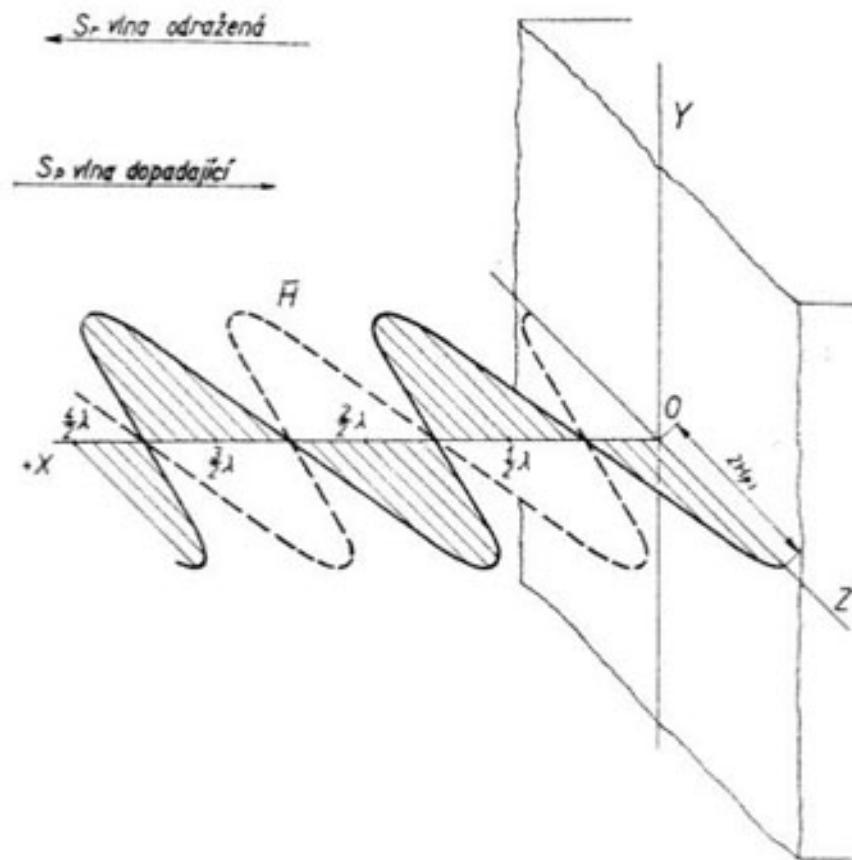
$$\mathbf{E} = 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{H}_{p2} e^{-j\left(\frac{\omega}{v}\right)x} - 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{H}_{p2} e^{j\left(\frac{\omega}{v}\right)x} = \mathbf{E}_p + \mathbf{E}_r \quad [\text{V/cm}]. \quad (32,26)$$

Prvý člen značí opět vlnu dopadající \mathbf{E}_p , druhý odraženou \mathbf{E}_r .

V rozhraní, pro $x = 0$, bude

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_2 = 120 \pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{H}_{p2} - 120 \pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{H}_{r2} = \mathbf{E}_{p2} + \mathbf{E}_{r2} = 0.$$

Je vidět, že vlna přicházející \mathbf{E}_{p2} a odražená \mathbf{E}_{r2} mají stejnou velikost, avšak opačnou fázi. V rozhraní se odečítají, takže výsledná vlna elektrická v rozhraní



Obr. 32.2. Stojaté vlnění (vlna magnetická H) před vodivým rozhraním.

$\mathbf{E}_2 = 0$. V dalším tento výsledek zpřesníme a zjistíme, že \mathbf{E}_2 je zanedbatelně malé proti \mathbf{E}_{p2} a \mathbf{E}_{r2} , avšak není rovné nule.

Upravme výraz (32,26):

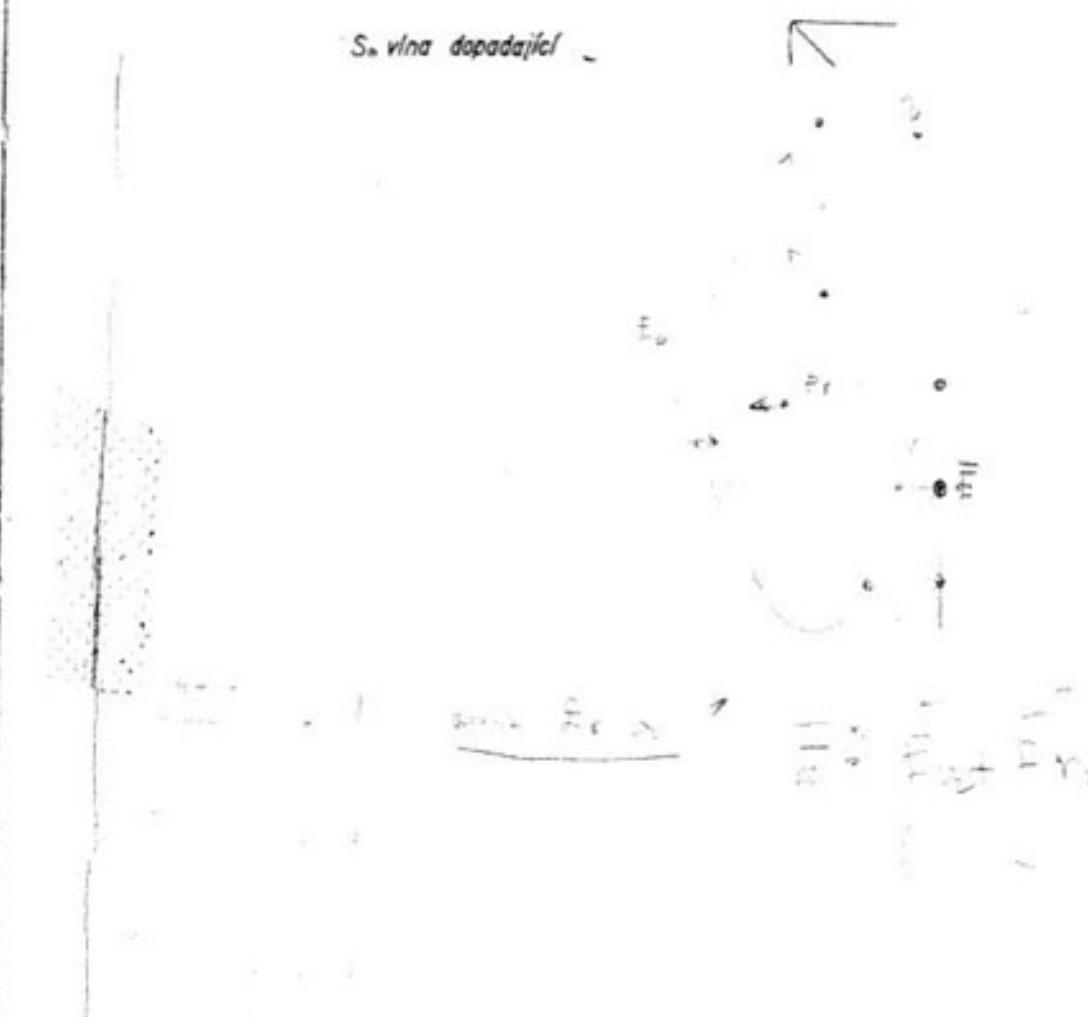
$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_{p2} e^{-j\left(\frac{\omega}{v}\right)x} - \mathbf{E}_{p2} e^{j\left(\frac{\omega}{v}\right)x} = \\ &= \mathbf{E}_{p2} \left[\cos\left(\frac{\omega}{v}x\right) - j \sin\left(\frac{\omega}{v}x\right) - \cos\left(\frac{\omega}{v}x\right) + j \sin\left(\frac{\omega}{v}x\right) \right] = \\ &= -2j \mathbf{E}_{p2} \cdot \sin\left(\frac{\omega}{v}x\right), \end{aligned} \quad (32,26a)$$

$$\mathbf{E} = -j 2 \mathbf{E}_{p2} \cdot \sin\left(\frac{\omega}{v}x\right) e^{j\omega t} \quad [\text{V/cm}]. \quad (32,27)$$

Výraz (32,27) značí stojaté vlnění složky elektrické. Amplituda je rovněž goniometrickou funkcí argumentu, přímo úměrného vzdálenosti x od rozhraní. Pro $x = 0$ má vlnění nulovou hodnotu (uzel).

Další uzly budou v bodech:

$$x = 0, \frac{1}{2}\lambda, \frac{2}{2}\lambda, \dots, \frac{k}{2}\lambda. \quad (32,28)$$



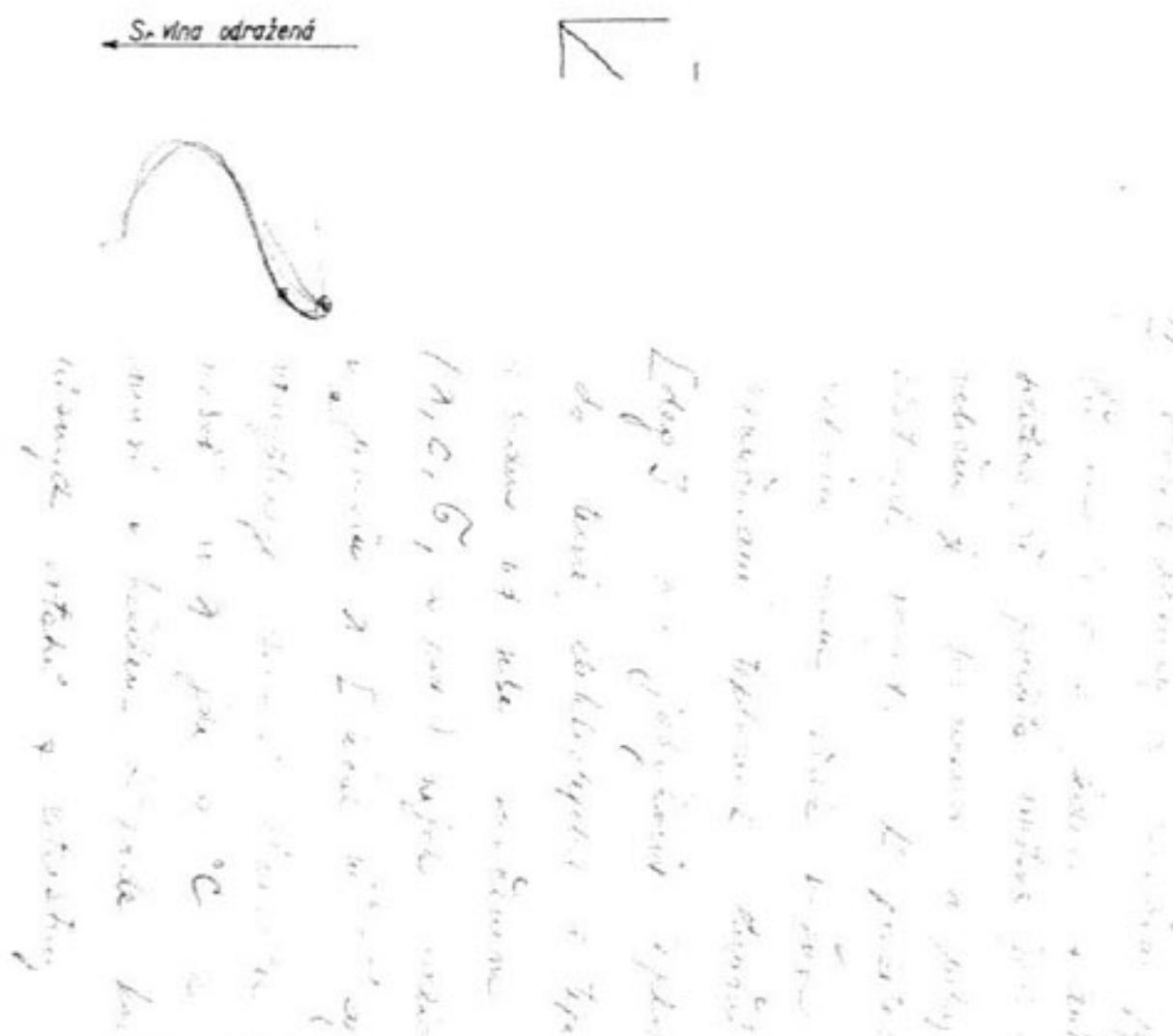
Průběh stojatého vlnění složky elektrické je na obr. 32,3.

Stojaté elmg. vlnění v izolantu má současně obě složky \mathbf{H} a \mathbf{E} , které jsou k sobě kolmé. V našich diagramech 32,2 a 32,3 jsou v zájmu větší názornosti obě složky kresleny odděleně.

V rozhraní, pro $x = 0$, bude

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_2 = 120 \pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \mathbf{H}_{p2} - 120 \pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \mathbf{H}_{p2} = \mathbf{E}_{p2} + \mathbf{E}_{r2} = 0.$$

Je vidět, že vlna přicházející \mathbf{E}_{p2} a odražená \mathbf{E}_{r2} mají stejnou velikost, avšak opačnou fázi. V rozhraní se odečítají, takže výsledná vlna elektrická v rozhraní



Upravme výraz (32,26):

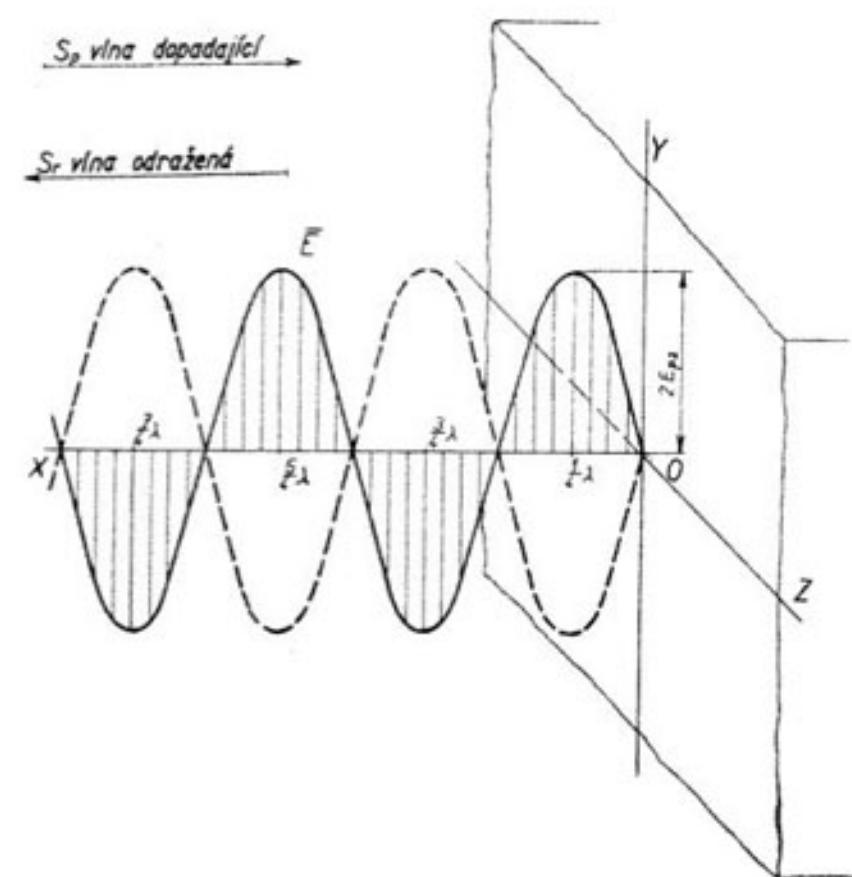
$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_{p2} e^{-j\left(\frac{\omega}{v}\right)x} - \mathbf{E}_{p2} e^{j\left(\frac{\omega}{v}\right)x} = \\ &= \mathbf{E}_{p2} \left[\cos\left(\frac{\omega}{v}x\right) - j \sin\left(\frac{\omega}{v}x\right) - \cos\left(\frac{\omega}{v}x\right) - j \sin\left(\frac{\omega}{v}x\right) \right] = \\ &= -2j \mathbf{E}_{p2} \cdot \sin\left(\frac{\omega}{v}x\right), \end{aligned} \quad (32,26a)$$

$$\mathbf{E} = -j 2E_{p2} \cdot \sin\left(\frac{\omega}{v}x\right) e^{j\omega t} \quad [\text{V/cm}]. \quad (32,27)$$

Výraz (32,27) značí stojaté vlnění složky elektrické. Amplituda je rovněž goniometrickou funkcí argumentu, přímo úměrného vzdálenosti x od rozhraní. Pro $x = 0$ má vlnění nulovou hodnotu (uzel).

Další uzly budou v bodech:

$$x = 0, \frac{1}{2}\lambda, \frac{2}{2}\lambda, \dots, \frac{k}{2}\lambda. \quad (32,28)$$



Obr. 32,3. Stojaté vlnění (vlna elektrická E) před vodivým rozhraním.

Kmitny vlny elektrické jsou v bodech:

$$x = \frac{1}{4}\lambda, \frac{3}{4}\lambda, \dots, \frac{2k+1}{4}\lambda \quad (32,29)$$

Průběh stojatého vlnění složky elektrické je na obr. 32,3.

Stojaté elmg. vlnění v izolantu má současně obě složky \mathbf{H} a \mathbf{E} , které jsou k sobě kolmé. V našich diagramech 32,2 a 32,3 jsou v zájmu větší názností obě složky kresleny odděleně.

Z výrazů (32,18) a (32,26) můžeme určit poměry obou složek přicházejících a odražených:

$$\frac{\mathbf{E}_p}{\mathbf{H}_p} = 120 \pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad [\text{V/cm, A/cm}], \quad (32,30)$$

$$\frac{\mathbf{E}_r}{\mathbf{H}_r} = -120 \pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad [\text{V/cm, A/cm}]. \quad (32,31)$$

Výraz (32,20) znamená, že obě složky vlny přicházející jsou ve fázi, obě složky vlny odražené jsou vzájemně časově pošinuty o úhel π . Poměr jejich amplitud ve vzduchu ($\epsilon = \mu = 1$) je $120 \pi \approx 377 \Omega$. Číselná hodnota intenzity E je 377krát větší než intenzita H .

Poznámka: V soustavě absolutních jednotek mají vektory \mathbf{E} a \mathbf{H} v prostředí s konstantami $\epsilon = 1$, $\mu = 1$ (vakuum, vzduch) číselně stejně velikosti. Mějme např. v soustavě praktických jednotek složku magnetickou $H = 10^3 \text{ A/cm}$. Složka elektrická $E = 120\pi \cdot H = 3,77 \cdot 10^5 \text{ V/cm}$.

Převedme do soustavy absolutní:

$$H = \frac{4\pi}{10} \cdot 10^3 = 1,256 \cdot 10^3 \quad [\text{abs. jedn. elmg./cm} = \text{oersted/cm}],$$

$$E = \frac{1}{3 \cdot 10^2} \cdot 3,77 \cdot 10^5 = 1,256 \cdot 10^3 \quad [\text{abs. jedn. elst./cm} = \text{abs. V/cm}].$$

Elektromagnetické vlnění do nekonečného prázdného prostoru

Uvažujme takové rovinné vlnění, které se šíří do nekonečného prostoru, aniž by narazilo na vodivou stěnu.

Vyjděme z rovnic (32,6) a (32,11). Protože nenastává odraz, odpadnou druhé členy v obou výrazech (tyto členy značí vlnění odražené). Konstanta $B = 0$.

Počátek souřadnice x v tomto případě zvolíme ve vyzařujícím rozhraní.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{A} e^{i\omega t} = \mathbf{A} e^{-i\left(\frac{\omega}{v}\right)x}, \\ \mathbf{E} &= 120 \pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{A} e^{-i\left(\frac{\omega}{v}\right)x}. \end{aligned} \right\} (32,32)$$

Pro vyzařující rozhraní $x = 0$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{p1} = \mathbf{A}.$$

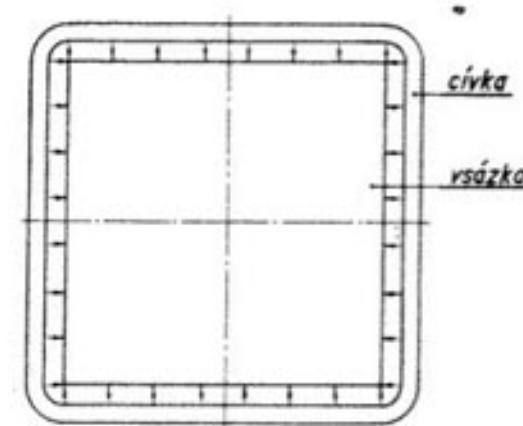
Dosadme integrační konstantu \mathbf{A} do (32,32):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{H}_p = \mathbf{H}_{p1} e^{-i\left(\frac{\omega}{v}\right)x} \quad [\text{A/cm}], \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_p = 120 \pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{H}_{p1} \cdot e^{-i\left(\frac{\omega}{v}\right)x} \quad [\text{V/cm}]. \end{aligned} \right\} (32,33)$$

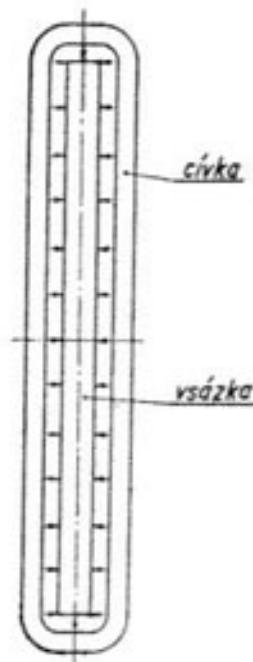
Vektory \mathbf{H}_p a \mathbf{E}_p jsou ve fázi. Zdroj vyzařuje tok elmg. energie:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_p &= [\mathbf{E}_p \mathbf{H}_p] = 120 \pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \mathbf{H}_{p1}^2 e^{-i\left(\frac{\omega}{v}\right)x} = \\ &= 120 \pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{H}_{p1}^2 \cdot \left[\cos\left(\frac{2\omega}{v}x\right) - j \sin\left(\frac{2\omega}{v}x\right) \right] \quad [\text{W/cm}^2]. \end{aligned} \quad (32,34)$$

První člen značí tok činné elmg. energie, druhý člen tok jalové elmg. energie.



Obr. 32,4. Indukční prohřívání vodivého hranolu.



Obr. 32,5. Indukční prohřívání vodivého pásu.

3.22. Rovnice stojatého vlnění v izolantu, s malým argumentem $\left(\frac{\omega}{v}x\right)$

V předchozí kapitole 3,21 jsme předpokládali, že vzdálenost mezi vyzařující a odrážející stěnou je ve srovnání s vlnovou délkou dostatečně veliká, takže se stojaté vlnění může plně rozvinout v té formě, jak jsme odvodili a zobrazili na obr. 32,2. a 32,3.

Zjistěme, zda výrazy (32,21) a (32,27) pro intenzitu \mathbf{H} a \mathbf{E} stojatého vlnění zůstanou v platnosti i v případě, že mezera mezi vyzařující a odrážející stěnou je velmi malá proti vlnové délce λ . Takové poměry právě nastávají v praxi např. při indukčním prohřívání kovového hranolu, umístěného ve čtyřboké cívce, podle obr. 32,4, 32,5.

Vyjděme z výrazů (32,21) a (32,27):

$$\mathbf{H} = H_2 \cdot \cos\left(\frac{\omega}{v}x\right) e^{i\omega t} \quad [\text{A/cm}],$$

$$\mathbf{E} = -j 120 \pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_2 \cdot \sin\left(\frac{\omega}{v}x\right) e^{i\omega t} \quad [\text{V/cm}].$$

Na schematickém obrázku 32,6 označíme stěnu vyzařující I a stěnu odrážející 2 . Vzdálenost obou označme $2c$, prostředí je vzduch.

Při kmitočtu např. $f = 10^4$ Hz, $2c = 3$ cm, bude hodnota argumentu

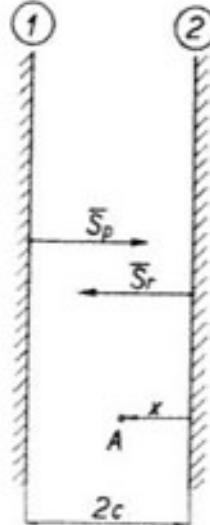
$$\left(\frac{\omega}{g}x\right) = \frac{2\pi f}{c} \sqrt{\epsilon\mu} x = \frac{6,28 \cdot 10^4}{3 \cdot 10^{10}} \cdot 1,3 = 6,28 \cdot 10^{-6}.$$

Pro $x \rightarrow 0$

$$\sin \alpha \doteq \alpha, \quad \cos \alpha \doteq 1.0.$$

Dosadíme do předešlých rovnic:

$$H = H_0, 1.0 \text{ e}^{\text{sat}} \quad [\text{A/cm}], \quad (32.35)$$



Z výrazu je vidět, že v mezeře je stojaté vlnění, jehož amplituda $H_2 = 2H_{z2}$ je konstantní (homogenní magnetické pole). Amplituda stojatého vlnění elektrického

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -j 120 \pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot 2 H_{p2} \left(\frac{2\pi f}{c} \sqrt{\varepsilon \mu} x \right) e^{j\omega t} = \\ &= -j \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \mu \cdot 2 H_{p2} \cdot 2\pi f \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} x e^{j\omega t} = \\ &= -j \mu_0 \mu H_2 \cdot 2\pi f x e^{j\omega t} \quad [\text{V/cm}], \end{aligned} \quad (32.36)$$

► Obr. 32,6. Schematické uspořádání roviny vyzařující a roviny odrážející.

Výraz (32,36) určuje intenzitu elektrického pole v mezeře. Je to opět stojaté vlnění, jehož amplituda lineárně roste s x , to je se vzdáleností od odrážející roviny 2. Maximální hodnoty dosáhne pro $x = 2c$, to je v rovině 1:

$$\mathbf{E}_{(2c)} = -j \cdot 4\pi \cdot 10^{-9} \mu H_2 \cdot 2\pi f \cdot 2c e^{j\omega t} = \\ = -j(4\pi)^2 c \mu H_2 \cdot 10^{-9} e^{j\omega t} [V/cm]. \quad (32.37)$$

Amplituda $E_{(2e)}$ stojatého vlnění právě ve vyzařující rovině vzniká složením vyzařující vlny $E_{(p2e)}$ a vracející se vlny odražené $E_{(r2e)}$. K tomuto poznatku se znova vrátíme v části 3.93.

3,3. Rovná vodivá stěna velké, teoreticky nekonečné tloušťky

3.31. Odvození základních výrazů

V části 2,10 jsme odvodili pro obecné elmg. vlnění ve vodivém prostředí pro složku H výraz (21,22):

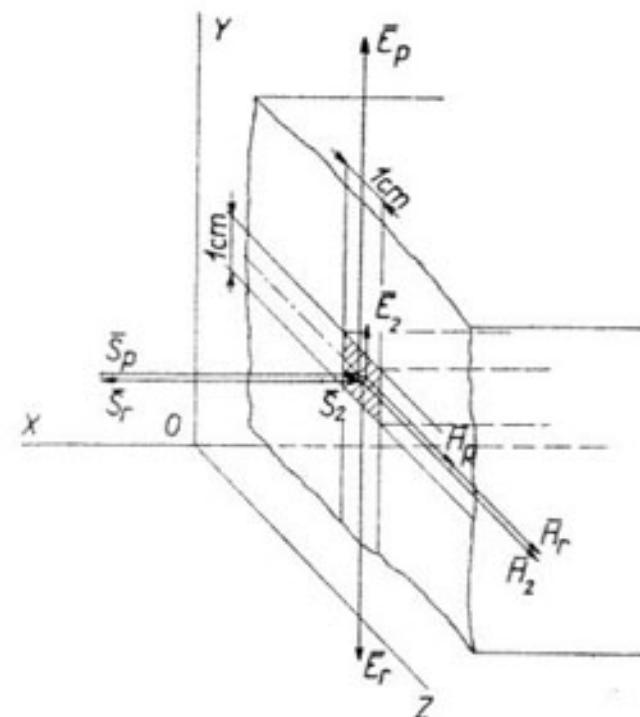
$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{1}{\gamma \mu_0 \mu} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} \right] = \frac{1}{\gamma \mu_0 \mu} \nabla^2 \mathbf{H} \quad [\text{A/cm}].$$

V této kapitole budeme uvažovat vodivé prostředí podle obr. 33.1. Měrná vodivost γ a poměrná permeabilita μ jsou konstanty.

Souřadnicový pravoúhlý systém umístíme tak, aby osy Y a Z ležely v rozhraní nevodivého a vodivého prostředí. Nechť je stěna ve směrech Y a Z rozprostřena do nekonečna. Nechť kolmo na rozhraní, to je ve směru osy X , dlevo doprava, dopadá rovinné elmg. vlnění, jehož složka \mathbf{E} je ve směru osy Y a složka \mathbf{H} ve směru osy Z .

Vektory E a H jsou vzhledem k souřadnicím Y a Z konstantami, jejich derivace podle těchto proměnných jsou rovné nule. Rovnice pro vlnení magnetické složky H se pak zjednoduší:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{1}{\gamma \mu_0 \mu} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} \quad [\text{A/cm}]. \quad (33.1)$$



Obr. 33,1. Dopad rovinného vlnění S_p na stěnu velké tloušťky.

Protože uvažujeme harmonické vlnění: $\mathbf{H} = H e^{j\omega t}$, je jeho derivace $\frac{d\mathbf{H}}{dt} = j\omega \mathbf{H}$, takže (33.1) bude

$$\frac{d^2\mathbf{H}}{dx^2} - j\omega\gamma\mu_0\mu\mathbf{H} = 0. \quad (33.2)$$

Obdrželi jsme opět homogenní diferenciální rovnici 2. řádu. Jejím řešením je součet dvou integrálů typu $H = e^{px}$. Exponent p dostaneme z charakteristické rovnice:

$$p_{1,2} = \pm \sqrt{j} \sqrt{\omega \gamma \mu_0 \mu} = \pm (1+j) \sqrt{\frac{\omega \gamma \mu_0 \mu}{2}} = \pm \frac{1+j}{a}. \quad (33,3)$$

Abychom zjednodušili psaní, zavedli jsme znak a , který určuje tzv. hloubku vniku. Tato veličina se dá v jednotlivých případech indukčního prohřívání snadno vypočítat a poskytuje představu o rozložení vyvinutého tepla v pro-

hřívané stěně. Přesný fyzikální význam hloubky vniku odvodíme později (Část 3,45, výraz (34,28)).

$$a = \sqrt{\frac{2}{\omega \gamma \mu_0 \mu}} [\text{cm}] = 5,04 \cdot 10^3 \sqrt{\frac{1}{f \gamma \mu}} [\text{cm}]. \quad (33,4)$$

Jednotlivé znaky ω , γ , μ_0 , μ jsou nám již známé.

V našich úvahách předpokládáme, že vodivost γ a permeabilita μ jsou v celé tloušťce stěny konstantní. Ve skutečnosti obě tyto veličiny závisí na teplotě a permeabilita μ mimoto na intenzitě magnetického pole H v uvažovaném místě. Při obvyklém indukčním prohřívání (kromě intenzívního prohřívání povrchu při povrchovém klení) trvá proces větší počet minut a v této době nastává působením tepelné vodivosti postačující vyrovnávání teploty, a tedy i γ v celé tloušťce. Intenzita magnetického pole ubývá od povrchu exponenciálně, a to značně ovlivňuje hodnotu permeability μ . V [4,1] odvozuje N. M. Rodigin tzv. „střední permeabilitu“, kterou potom považujeme za konstantní v celé tloušťce stěny.

Rovnice (33,2) má řešení

$$\mathbf{H} = \mathbf{A} e^{j\omega x'} + \mathbf{B} e^{-j\omega x'} = \mathbf{A} e^{-(1+j)\left(\frac{x}{a}\right)} + \mathbf{B} e^{(1+j)\left(\frac{x}{a}\right)} = \mathbf{H}_p + \mathbf{H}_r. \quad (33,5)$$

Intenzita \mathbf{H} má opět dvě složky: vlnu, postupující ve směru dopadu vlnění, a druhou složku, odraženou od zadního rozhraní vodivé stěny. Počátek souřadnice x je v prvním rozhraní, avšak za kladný smysl budeme opět považovat smysl odraženého vlnění ($x = -x'$). Změni se proto znaménka exponentů obou členů v (33,5).

V uvažovaném případě vyšetřujeme průnikání vlnění do stěny velké tloušťky, teoreticky nekonečné.

Rozborem prvního člena na pravé straně výrazu (33,5) se přesvědčíme, že vlna postupující se poměrně rychle utlumí na téměř nulovou hodnotu, takže již nemůže nastat zpětný odraz od velmi vzdáleného druhého rozhraní. Z této úvahy vyplývá, že druhý člen výrazu (33,5) je rovný nule. Protože součinitel $e^{(1+j)\left(\frac{x}{a}\right)}$ s rostoucím x roste, musí být integrační konstanta $\mathbf{B} = 0$. Pro stěnu velké tloušťky se tedy výraz (33,5) zjednoduší:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_p = \mathbf{A} e^{-(1+j)\left(\frac{x}{a}\right)} [\text{A/cm}]. \quad (33,6)$$

V rozhraní, pro $x = 0$, je intenzita magnetického pole, kterou jsme označili \mathbf{H}_2 . Z důvodu kontinuity vlnění musí být i ve vodivé stěně v rozhraní pro $x = 0$ taktéž intenzita \mathbf{H}_2 .

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_2 = \mathbf{A} e^0 = \mathbf{A}, \quad (33,7)$$

potom

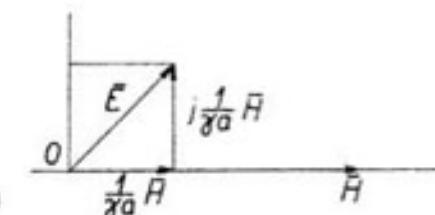
$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_2 e^{-(1+j)\left(\frac{x}{a}\right)} = \mathbf{H}_2 e^{-\left(\frac{x}{a}\right)} e^{-j\left(\frac{x}{a}\right)} [\text{A/cm}]. \quad (33,8)$$

Elektrickou složku \mathbf{E} , odpovídající magnetické složce \mathbf{H} , dostaneme z 1. Maxwellovy rovnice, při čemž hodnotu rot \mathbf{H} pro rovinové vlnění jsme již dříve určili, výraz (32,8):

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x}. \quad (33,9)$$

Derivace výrazu (33,5) podle x

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} &= -p \mathbf{A} e^{-j\omega x} + p \mathbf{B} e^{j\omega x} = -\gamma \mathbf{E}, \\ \mathbf{E} &= \frac{p}{\gamma} [\mathbf{A} e^{-j\omega x} - \mathbf{B} e^{j\omega x}]. \end{aligned} \quad (33,10)$$



Obr. 33,2. Vzájemné fázové natočení vektorů H a E ve vodivé stěně.

Pro stěnu velké tloušťky je konstanta $\mathbf{B} = 0$, takže

$$\mathbf{E} = \frac{p}{\gamma} \mathbf{H}_2 e^{-j\omega x} = \frac{1+j}{a\gamma} \mathbf{H} = \frac{\sqrt{2}}{a\gamma} e^{j(\pi/4)} \mathbf{H} [\text{V/cm}, \text{A/cm}]. \quad (33,11)$$

Tohoto důležitého vztahu jsme použili již dříve, v části (3,20). Vektor \mathbf{E} je o $\frac{\pi}{4}$ před vektorem \mathbf{H} , graficky na obr. 33,2.

Pro rozhrani, $x = 0$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_2 = \frac{1+j}{a\gamma} \mathbf{H}_2 [\text{V/cm}]. \quad (33,12)$$

Za použití (33,12) můžeme napsat výraz (33,11)

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_2 e^{-\left(\frac{x}{a}\right)} e^{-j\left(\frac{x}{a}\right)}. \quad (33,13)$$

Vlnění, které pronikne do vodivé stěny, je určeno výrazy (33,8) a (33,13). Vektory \mathbf{E} a \mathbf{H} jsou prostorově k sobě kolmé, časově je vektor \mathbf{E} o $\pi/4$ před vektorem \mathbf{H} .

Protože uvažované vlnění je harmonické, můžeme výraz (33,8) napsat také ve tvaru

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_2 e^{-(1+j)\left(\frac{x}{a}\right)} = H_2 e^{j\omega t} e^{-\left(\frac{x}{a}\right)} e^{-j\left(\frac{x}{a}\right)} = H_2 e^{-\left(\frac{x}{a}\right)} e^{-j\left(\frac{x}{a}\right)} e^{j\omega t}. \quad (33,14)$$

Prvá část výrazu (33,14) značí amplitudu pronikající složky magnetické, druhá část udává fázové natočení vektoru \mathbf{H} v místě x proti vektoru \mathbf{H}_2 v rozhraní. Amplitudy ubývá exponenciálně s rostoucím x . Vektor \mathbf{H} je fázově opožděn o $\left(-\frac{x}{a}\right)$ proti vektoru \mathbf{H}_2 .

Tabulka 33,1

Kmitočet f [Hz]	Ocel 1500 °C	Měď 20 °C
Hloubka vniku a [cm]	2,07	0,278
Vlnová délka λ [cm]	12,9	1,74
Fázová rychlos v [m/s]	77,4	10,4

Příklad 33,2

Nechť dopadá na rovnou ocelovou stěnu kolmo rovinné elmg. vlnění, jehož dopadající vlna magnetická H_p má hodnotu 600 A/cm, kmitočet $f = 600$ Hz. Stanovme stojaté vlnění před rozhraním a průběh vlnění ve vodivém prostředí.

Utlumením elmg. energie vzniká teplo, teplota materiálu stoupá. Uvažujme v dalším stav, kdy teplota oceli je již 1200 °C, $\gamma = 10^4$ S.cm⁻¹, $\mu = 1$. Hloubka vniku $a = 2,07$ cm.

Dopadající vlnění bude mít ve vzduchu před rozhraním složku elektrickou:

$$E_p = 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot H_p = 377 \cdot 600 = 2,26 \cdot 10^5 \text{ V/cm.}$$

Odražená složka magnetická a elektrická:

$$H_t = H_p = 600 \text{ A/cm,}$$

$$E_t = -E_p = -2,26 \cdot 10^5 \text{ V/cm.}$$

V případě, že by byl dostatečný prostor mezi rovinou vyzařující a odrážející, vzniklo by stojaté vlnění; amplituda vlnění magnetického: $2H_p = H_2 = 1200$ A/cm. Vlna magnetická má kmitnu právě v rozhraní.

Vlnová délka uvažovaného vlnění ve vzduchu:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{600} = 5 \cdot 10^5 \text{ cm} = 500 \text{ km.}$$

Kmitna vlnění elektrického by vznikla ve vzdálenosti $\frac{1}{4}\lambda = 125$ km.

Amplituda elektrického vlnění: $2E_p = 4,52 \cdot 10^5$ V/cm. V rozhraní má vlnění elektrické uzel, obě složky E_p a E_t se odečtou a protože jsou stejně veliké, elektrická vlna v rozhraní se rovná nule. V dalším však při přesnějším rozboru zjistíme, že v rozhraní zbude velmi malá hodnota E_2 , daná výrazem (33,12). V daném případě její absolutní hodnota bude

$$E_2 = \frac{\sqrt{2}}{a\gamma} H_2 = \frac{1,414}{2,07 \cdot 10^4} \cdot 1200 = 8,22 \cdot 10^{-2} \text{ V/cm.}$$

Příklad 33,1

Obdobně je tomu se složkou elektrického vlnění \mathbf{E} . S přihlédnutím k (33,12) můžeme (33,13) napsat:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_2 e^{-\left(\frac{x}{a}\right)} e^{-j\left(\frac{x}{a}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{\gamma a} e^{j\left(\frac{\pi}{4}\right)} H_2 e^{-\left(\frac{x}{a}\right)} e^{-j\left(\frac{x}{a}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{\gamma a} H_2 e^{-\frac{x}{a}} e^{+j\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{a}\right)}. \quad (33,15)$$

Rovněž i amplitudy vektoru \mathbf{E} ubývá exponenciálně se vzdáleností x od rozhraní. Vektor \mathbf{E} je o $\left(-\frac{x}{a}\right)$ fázově pootočen proti vektoru \mathbf{E}_2 v rozhraní a o $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{a}\right)$ pootočen proti vektoru \mathbf{H}_2 v rozhraní.

Ve vzdálenosti x od povrchu, rovné hloubce vniku a , se amplituda H i E zmenší (e^{-1})krát, to je na 36,8 % z hodnoty H_2 , resp. E_2 v rozhraní. V hloubce $x = 2\pi a$ se utlumi amplituda H i E ($e^{-6,28}$) krát, to je na $0,00187 = 1,87$ % z hodnot na povrchu. Z této úvahy vidíme, že vlnění, které pronikne do vodivé stěny, se velmi rychle utlumí a má již prakticky nulovou hodnotu, rovná-li se vzdálenost x asi 6tinásobku hloubky vniku. V takovém případě již nenastane zpětný odraz od zadního rozhraní. Můžeme tedy považovat za stěnu velké tloušťky takovou vodivou stěnu, jejíž tloušťka se alespoň rovná 6tinásobku hloubky vniku. (V praxi často vystačíme s trojnásobkem hloubky vniku.)

Povšimněme si ve výrazech (33,14) a (33,15) bliže součinitele $e^{-j\left(\frac{x}{a}\right)}$, který určuje fázové natočení vektoru \mathbf{H} , resp. \mathbf{E} proti vektorům \mathbf{H}_2 a \mathbf{E}_2 v rozhraní. V hloubce $x = 2\pi a$ je fázové natočení 2π , pronikající vektor se právě pootočil o plný úhel. Tím je definována vlnová délka λ uvažovaného vlnění o kmitočtu f v daném materiálu:

$$x = \lambda = 2\pi a = 2\pi \sqrt{\frac{2}{\omega\gamma\mu_0\mu}} = \sqrt{\frac{10^9}{f\gamma\mu}} \text{ [cm].} \quad (33,16)$$

Z názoru vyplývá, že do této hloubky pronikne elmg. vlnění právě za dobu T jednoho kmitu, $T = \frac{1}{f}$.

Z výrazu (33,16) můžeme určit tzv. fázovou rychlos šíření elmg. vlnění ve vodivé stěně:

$$v = \lambda f = 2\pi a f = \omega \cdot a = \sqrt{\frac{2\omega}{\gamma\mu_0\mu}} = \sqrt{\frac{f \cdot 10^9}{\gamma\mu}} \text{ [cm/s].} \quad (33,17)$$

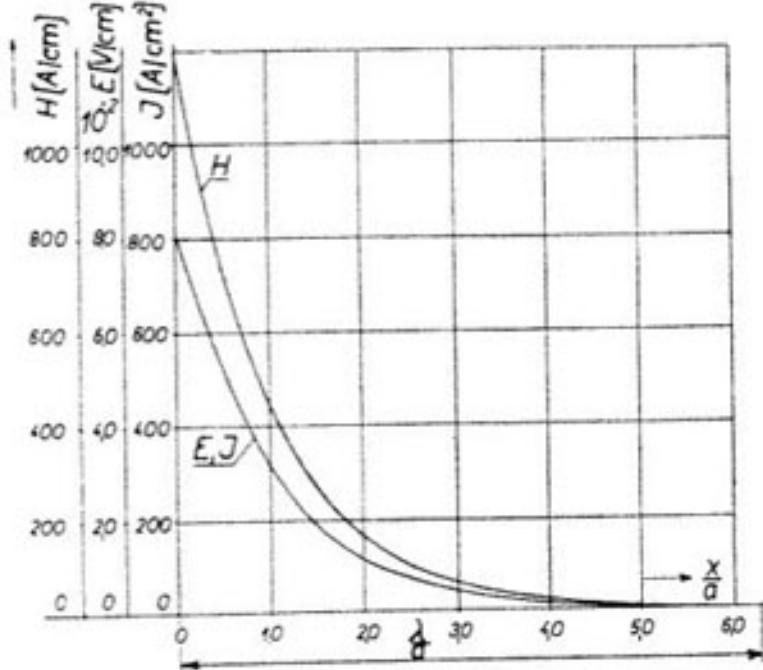
Příklad 33,1

Vypočteme vlnovou délku λ a fázovou rychlos v elmg. vlnění při kmitočtu $f = 600$ Hz, v tekuté oceli (1500 °C) a alternativně v mědi (20 °C). Vodivost oceli $\gamma = 10^4$ S.cm⁻¹, $\mu = 1$, vodivost mědi $\gamma = 5,5 \cdot 10^5$ S.cm⁻¹, $\mu = 1$. Výsledky jsou v tabulce.

Hustota proudu J_2 v rozhraní:

$$J_2 = \gamma E_2 = 822 \text{ A/cm}^2.$$

Do stěny v rozhraní vstupuje vlna magnetická $H_2 = 1200 \text{ A/cm}$ a vlna elektrická $E_2 = 8.22 \cdot 10^{-2} \text{ V/cm}$, resp. $J_2 = 822 \text{ A/cm}^2$. Rychle se utlumují, jak je vidět v tabulce 33,2 a na obr. 33,3.



Obr. 33,3. Průběh absolutních hodnot H, E, J ve vodivé stěně

Tabulka 33,2

x [cm]	$\frac{x}{a}$	$e^{-\frac{x}{a}}$	H [A/cm]	E [V/cm]	J [A/cm 2]
0,0	0,0	1,000	1200	$822 \cdot 10^{-4}$	822
2,07	1,0	0,36788	441	$301 \cdot 10^{-4}$	301
4,14	2,0	0,13554	162	$111 \cdot 10^{-4}$	111
8,28	4,0	0,01831	21,9	$15,0 \cdot 10^{-4}$	15,0
13,0	6,28	0,00187	2,24	$1,54 \cdot 10^{-4}$	1,54

Elm. vlnění se téměř zcela utlumí při proniknutí do hloubky $\lambda = 2\pi a = 6,28, 2,07 \doteq 13,0 \text{ cm}$.

3.32. Průběh okamžitých hodnot hustoty proudu

Amplitudy veličin H, E, J ve vodivém prostředí mají stejný exponenciální průběh. Sledujme proto v dalším pouze jednu z nich, např. hustotu J . Je však třeba si uvědomit, že vzhledem k vzájemnému fázovému natočení nedosahují veličiny H, E, J svých maximálních hodnot v různých místech v tomtéž okamžiku. Pro bližší poznání tohoto jevu sledujme ještě průběh

okamžitých hodnot v některých zvolených okamžicích. Můžeme jej stanovit buď početně, nebo graficky.

Vyjděme z rovnice (33,15):

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \gamma \mathbf{E} = \frac{1+j}{a} \mathbf{H}_2 e^{-\left(\frac{x}{a}\right)} e^{-j\left(\frac{x}{a}\right)} = \frac{1+j}{a} H_2 e^{-\left(\frac{x}{a}\right)} e^{j\left[\omega t - \left(\frac{x}{a}\right)\right]} = \\ &= \frac{1}{a} H_2 e^{-\left(\frac{x}{a}\right)} \left\{ \left[\cos\left(\omega t - \frac{x}{a}\right) - \sin\left(\omega t - \frac{x}{a}\right) \right] + j \left[\cos\left(\omega t - \frac{x}{a}\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin\left(\omega t - \frac{x}{a}\right) \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{a} H_2 \mathbf{M}. \quad (33,18) \end{aligned}$$

Vyšetřili jsme průběh \mathbf{J} , resp. průběh výrazu \mathbf{M} , pro tyto okamžiky a místa:

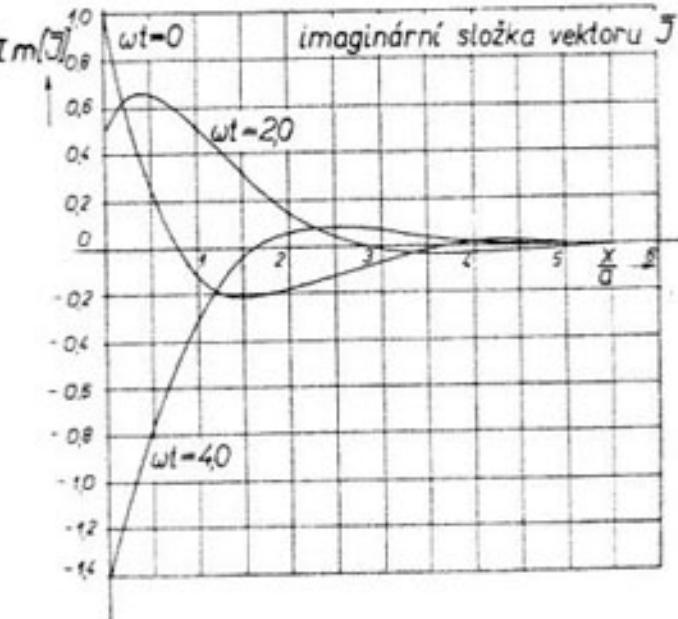
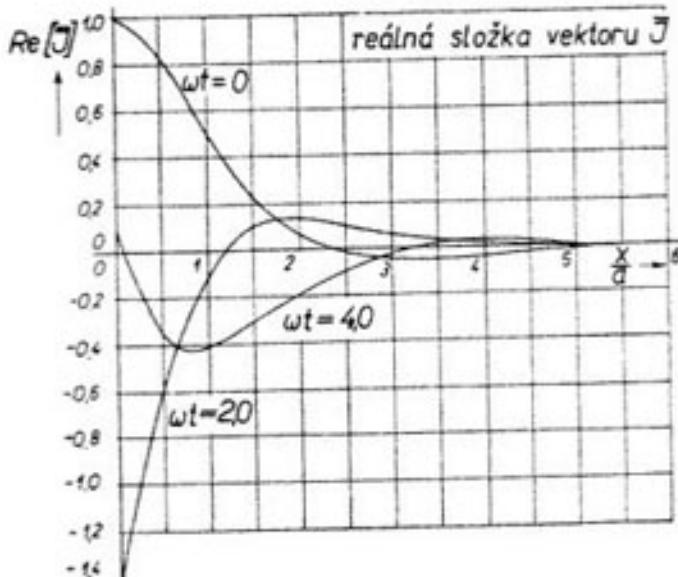
$$\begin{aligned} \omega t &= 0, \quad \omega t = 2,0 \\ &\quad \omega t = 4,0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} &= 0; 0,5; 1,0; 2,0; 3,0; \\ &\quad 4,0; 5,0; 6,0; \end{aligned}$$

Výsledky jsou v tabulce 33,3:

Průběh okamžitých hodnot je dán průmětem \mathbf{M} do svislé roviny, čili průběhem reálných hodnot z tabulky 33,3. Graficky jsou průběhy okamžitých hodnot pro zvolené časy znázorněny na obr. 33,4.

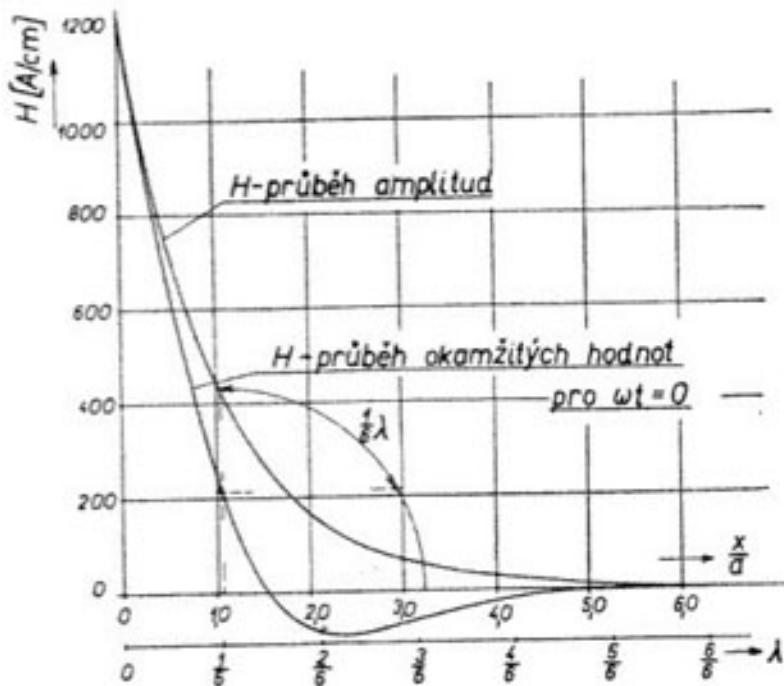
Obr. 33,4. Průběh okamžitých hodnot hustoty J ve stěně v okamžicích: $\omega t = 0, 2,0, 4,0$.



Při grafickém vyšetření průběhu okamžitých hodnot vyjdeme z křivek amplitud, obr. 33,3. Do obr. 33,5 překreslime z 33,3 křivku amplitud magnetické intenzity H a k ní sestrojime křivku okamžitých hodnot. Při tom po-

Tabulka 33,3

$\frac{x}{a}$	$\omega t = 0$	$\omega t = 2,0$	$\omega t = 4,0$
0,0	$1,000 + j 0,000$	$-1,325 + j 0,493$	$0,103 - j 1,411$
1,0	$0,508 - j 0,113$	$(-11,1 + j 51,0) \cdot 10^{-2}$	$(-4,16 - j 3,13) \cdot 10^{-1}$
2,0	$(6,65 - j 17,9) \cdot 10^{-2}$	$(13,5 + j 13,5) \cdot 10^{-2}$	$(-17,9 + j 6,66) \cdot 10^{-2}$
4,0	$(-2,58 + j 1,88) \cdot 10^{-2}$	$(0,90 - j 2,42) \cdot 10^{-2}$	$(1,83 + j 1,83) \cdot 10^{-2}$
6,0	$(1,68 + j 3,08) \cdot 10^{-2}$	$(-3,50 + j 0,256) \cdot 10^{-2}$	$(-1,22 - j 3,28) \cdot 10^{-2}$



Obr. 33,5. Grafická konstrukce okamžité hodnoty z hodnoty absolutní.

užijeme dříve odvozeného zjištění, že vektor \mathbf{H} při pronikání do stěny změní fázi o plný úhel 2π , vnikne-li do vodivé stěny právě do vzdálenosti $\lambda = 2\pi a$ od povrchu. V hloubce vniku a je pootočen o 1 radian. V hloubce $\frac{1}{6}\lambda = \frac{2\pi a}{6} = 1,047$ a je vektor \mathbf{H} pootočen o 60° , v hloubce $\frac{2}{6}\lambda$ o 120° , atd. Konstrukce je na obr. 33,5.

3.33. Obecné grafické znázornění amplitud H, E, J

V diagramu 33,3 jsou znázorněny průběhy absolutních hodnot H, E, J pro určitý vypočtený případ. Dělíme-li hodnoty H, E, J v místě x hodnotami H_2, E_2, J_2 na povrchu, dostaneme obecně platné diagramy, použitelné pro každý materiál a kmitočet.

Absolutní hodnota vektorů $\mathbf{H}, \mathbf{E}, \mathbf{J}$ v místě x jsou

$$H_2 e^{-\left(\frac{x}{a}\right)}, E_2 e^{-\left(\frac{x}{a}\right)}, J_2 e^{-\left(\frac{x}{a}\right)}$$

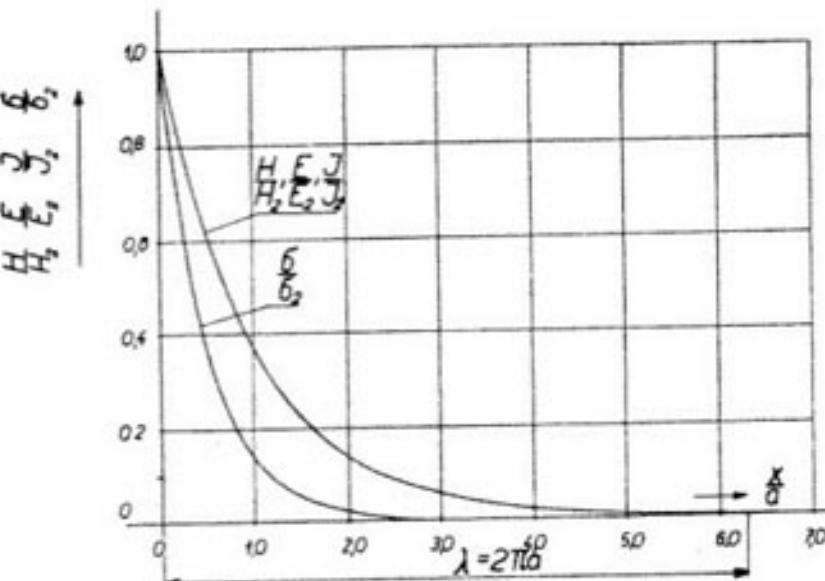
Potom

$$\frac{H}{H_2} = \frac{E}{E_2} = \frac{J}{J_2} = e^{-\left(\frac{x}{a}\right)}. \quad (33,19)$$

V tabulce 33,4 jsou hodnoty funkce $e^{-\left(\frac{x}{a}\right)}$.

Tabulka 33,4

$\frac{x}{a}$	0,0	0,2	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
$e^{-\frac{x}{a}}$	1,000	0,81873	0,60653	0,36798	0,13534	0,04989	0,01832	0,00674
$e^{-\frac{2x}{a}}$	1,000	0,6703	0,36798	0,13534	0,018326	0,00248		0,0000454

Obr. 33,6. Obecné diagramy pro průběh poměrů: $H/H_2, E/E_2, J/J_2, \sigma/\sigma_2$, platné pro jakýkoliv materiál a kmitočet.

V obecném diagramu 33,6 dostaneme jednu křivku pro všechny tři uvažované veličiny H, E, J .

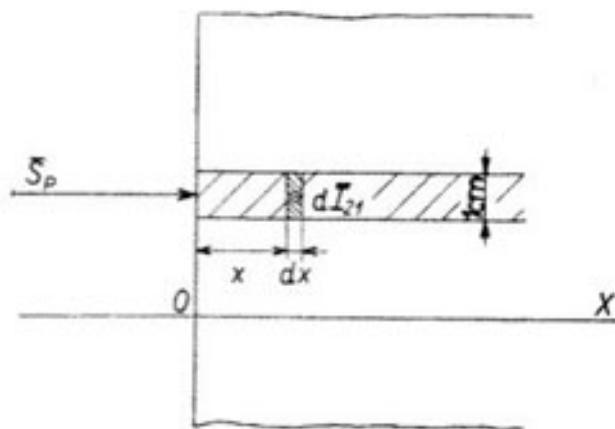
3.4. Množství naindukovaného tepla ve stěně velké tloušťky

3.41. Proud ve stěně, vybuzený při dopadu vlnění

Při dopadu elmg. vlnění na vodivou stěnu se část vlnění odráží zpět a menší část proniká do stěny. Tato část toku elmg. energie vybudí ve stěně indukované proudy o hustotě J [A/cm^2], jejíž velikost se exponenciálně zmenšuje s rostou-

cím x . Průchodem indukovaných proudů stěnou o konečné vodivosti γ se přemění elmg. energie v energii tepelnou.

Rozdělme stěnu řezy kolmými k rozhraní a rovnoběžnými se směrem na indukovaného proudu na pruhy o šířce 1 cm (obr. 34,1).



Obr. 34,1. Odvození naindukovaného proudu ve stěně

Celkový naindukovaný proud v pruhu o šířce 1 cm označme I_{21} . Dostaneme jej integrací dilých proudů v elementech o výšce 1 cm a šířce dx . Integraci provedeme pro celou tloušťku stěny:

$$dI_{21} = (1 \cdot dx) J = J dx,$$

$$\begin{aligned} I_{21} &= \int_0^{\infty} J dx = \gamma \int_0^{\infty} E dx = \frac{1+j}{a} H_2 \int_0^{\infty} e^{-\left[\frac{1+j}{a} x\right]} dx = \\ &= \frac{1+j}{a} H_2 \left(-\frac{a}{1+j} \right) \left[e^{-\left[\frac{1+j}{a} x\right]} \right]_0^{\infty} = -H_2 = -2H_{p2} \quad [\text{A/cm}]. \end{aligned} \quad (34,1)$$

Podle (34,1) celkový proud I_{21} , naindukovaný do stěny nekonečné tloušťky při dopadu rovinného vlnění, je dán dvojnásobkem magnetické složky vlnění a nezávisí ani na kmotučtu, ani na fyzikálních vlastnostech stěny.

V dalším odvodíme množství tepla, které se vyvine v rovné stěně při dopadu rovinného elmg. vlnění, a to několika odlišnými způsoby.

3.42. Odvození množství tepla z naindukovaného proudu

Uvažujme element stěny o ploše $(1 \times dx)$ a délce ve směru proudu 1 cm, obr. 34,1. Elektrický odpor tohoto elementu:

$$dR_{21} = \rho \frac{1}{1 dx} = \frac{\rho}{dx} = \frac{1}{\gamma dx} \quad [\Omega, \Omega \cdot \text{cm}^1, \Omega \cdot \text{cm}^{-1}]. \quad (34,2)$$

Tímto elementem protéká dilčí proud dI_{21} ; vznikne množství tepla dP_{21} (I_{21} je maximální hodnota):

$$dP_{21} = \frac{1}{2} dR_{21} (dI_{21})^2 = \frac{1}{2\gamma} J^2 dx = \sigma dx \quad [\text{W}]. \quad (34,3)$$

Zavedli jsme pojed „měrný příkon“ σ v uvažovaném místě:

$$\sigma = \frac{1}{2\gamma} J^2 = \frac{1}{2} \gamma E^2 \quad [\text{W/cm}^3]. \quad (34,4)$$

Dosadíme-li za absolutní hodnotu E v místě x , bude:

$$\sigma = \frac{1}{2} \gamma \left(\frac{\sqrt{2}}{ay} H_2 e^{-\frac{x}{a}} \right)^2 = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{H_2}{a} \right)^2 e^{-\frac{2x}{a}} \quad [\text{W/cm}^3]. \quad (34,5)$$

Měrný příkon σ_2 v rozhraní:

$$\sigma_2 = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{H_2}{a} \right)^2 \quad [\text{W/cm}^3]. \quad (34,6)$$

Pro grafické znázornění je opět výhodné zavést poměr:

$$\frac{\sigma}{\sigma_2} = e^{-\frac{2x}{a}}. \quad (34,7)$$

Hodnoty funkce $e^{-\frac{2x}{a}}$ jsou v předchozí tabulce 33,4 a její průběh je v grafu 33,6.

Množství tepla P_{21} , které se vyvine v části stěny tvaru hranolu, jehož základna je $(1 \times 1) \text{ cm}^2$ v rozhraní a výška se rovná tloušťce stěny, (obr. 33,1), dostaneme integraci výrazu (34,3):

$$P_{21} = \int_0^{\infty} \sigma dx = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{H_2}{a} \right)^2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{2x}{a}} dx = \frac{1}{2\gamma a} H_2^2 \quad [\text{W/cm}^2, \text{A/cm}, \text{S.cm}^{-1}, \text{cm}] \quad (34,8)$$

3.43. Množství tepla ze zářivého vektoru

V části 2,21 jsme odvodili, že u dvouvodičového vedení protékaného stejnosměrným proudem ta část elektromagnetické energie, která vstoupí povrchem do vodiče, se rovná ztrátám ve vodiči při průchodu proudu. Pokusme se tohoto způsobu užít i zde ke stanovení vyvinutého tepla.

Vektory E_2 a H_2 v rozhraní určují zářivý vektor S_2 :

$$S_2 = [E_2 H_2] \quad [\text{W/cm}^2, \text{V/cm}, \text{A/cm}]. \quad (34,9)$$

Na obr. 33,1 je vidět, že vektor S_2 je kolmý k rozhraní a má takový smysl, že vstupuje rozhraním do vodiče stěny. Dosadme za E_2 :

$$S_2 = \frac{1+j}{ay} H_2 H_2 = \frac{1}{ay} H_2^2 + j \frac{1}{ay} H_2^2 \quad [\text{W/cm}^2]. \quad (34,10)$$

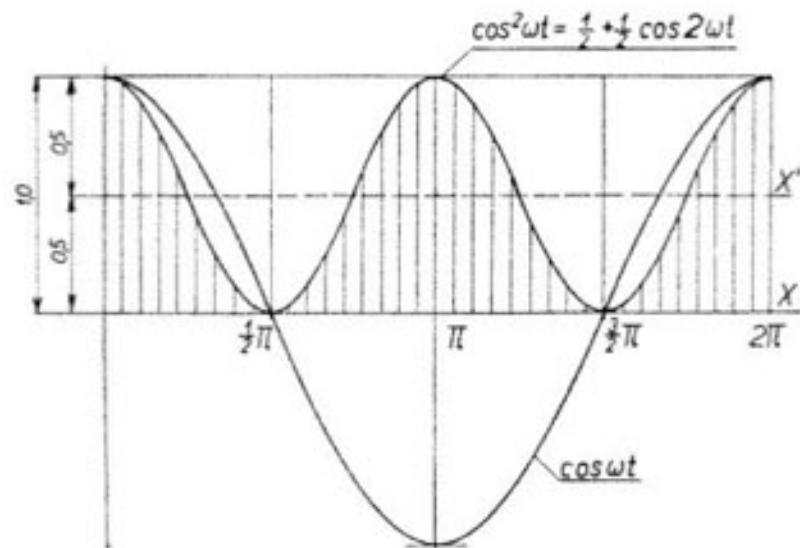
Zářivý vektor S_2 má složku reálnou a imaginární. Pro vznik tepla se uplatní pouze složka reálná $\text{Re}(S_2)$.

Druhý člen značí tok jalové elektromagnetické energie.

$$\operatorname{Re}(S_2) = \frac{1}{a\gamma} H_z^2 \quad [\text{W/cm}^2]. \quad (34.11)$$

Dosadme do (34.11) za časový vektor H_z :

$$H_z = H_2 e^{j\omega t} = H_2 \cdot \cos \omega t + jH_2 \cdot \sin \omega t. \quad (34.12)$$



Obr. 34.2. Časový průběh okamžitých hodnot $\cos(\omega t)$ a $\cos^2(\omega t)$.

Určeme časový průběh okamžitých hodnot vyvinutého tepla. Je zřejmé, že se uplatní pouze reálná složka $H_2 \cdot \cos \omega t$.

$$\operatorname{Re}(S_2) = \frac{1}{a\gamma} H_z^2 \cdot \cos^2(\omega t). \quad (34.13)$$

Zavedme dvojnásobný argument:

$$\operatorname{Re}(S_2) = \frac{1}{a\gamma} H_z^2 \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega t) = \frac{1}{2a\gamma} H_z^2 + \frac{1}{2a\gamma} H_z^2 \cdot \cos 2\omega t. \quad (34.13a)$$

Výsledek (34.13a) je graficky vyznačen na obr. 34.2.

Množství tepla, které se vyvine v jedné periodě, je dáno plochou mezi osou X a křivkou $\cos^2(\omega t)$. Zavedeme-li dvojnásobný argument, potom ve shodě s výrazem (34.13a) hledanou plochu dostaneme jako součet dvou částí: první částí je obdélník mezi osou X a novou osou X' ve vzdálenosti rovné polovině amplitudy. Druhá část je funkcí dvojnásobného argumentu vzhledem k této nové ose. Protože plochy kladných a záporných půlvln jsou stejné, je výsledná plocha dána pouze prvním členem výrazu (34.13a). Je proto množství vyvinutého tepla, které označíme $\operatorname{Re}(S_{2e})$,

$$\operatorname{Re}(S_{2e}) = \frac{1}{2a\gamma} H_z^2 \quad [\text{W/cm}^2, \text{A/cm}]. \quad (34.14)$$

Porovnáme (34.8) a (34.14) a zjistíme totožnost:

$$\operatorname{Re}(S_{2e}) = P_{21}. \quad (34.15)$$

3.44. Množství tepla jako rozdíl dopadajícího a odraženého elektromagnetického vlnění

V části 3.20 jsme odvodili, že integrační konstanty \mathbf{A} a \mathbf{B} ve výrazech pro \mathbf{H} a \mathbf{E} jsou téměř stejně veliké, $\mathbf{A} \doteq \mathbf{B} \doteq \frac{1}{2} \mathbf{H}_2$. Tohoto jednoduchého výsledku jsme dosáhli za cenu toho, že jsme ve výrazech (32.15) a (32.16) zanedbali velmi malý člen $\left[\frac{(1+j)}{120\pi a\gamma} \right] \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$ proti 1. V důsledku toho potom magnetická vlna odražená v rozhraní je stejná jako přicházející ($\mathbf{H}_{r2} = \mathbf{H}_{p2}$) a rovněž i obě složky vlny elektrické jsou až na znaménko stejné ($\mathbf{E}_{r2} = -\mathbf{E}_{p2}$). Odražené elmg. vlnění v rozhraní by bylo až na znaménko přesně stejné ($\mathbf{S}_{r2} = -\mathbf{S}_{p2}$), všechna dopadající energie by se odrážela zpět.

Chceme-li vyjádřit onu část dopadajícího elmg. vlnění, která vniká do vodivého prostředí, potom musíme použít úplných odvozených výrazů (32.15) a (32.16) pro integrační konstanty \mathbf{A} a \mathbf{B} . Rovnice (32.18) pro magnetickou složku v izolantu nyní bude

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{H}_p + \mathbf{H}_r = \frac{1}{2} \mathbf{H}_2 \left(1 + \frac{1+j}{120\pi a\gamma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \right) e^{-j\left(\frac{\omega}{v}\right)x} + \\ &+ \frac{1}{2} \mathbf{H}_2 \left(1 - \frac{1+j}{120\pi a\gamma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \right) e^{j\left(\frac{\omega}{v}\right)x} \quad [\text{A/cm}]. \end{aligned} \quad (34.16)$$

V zájmu zjednodušeného psaní označme:

$$\alpha = \frac{1+j}{120\pi a\gamma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}. \quad (34.17)$$

Magnetická vlna v rozhraní pro $x = 0$ bude

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{p2} + \mathbf{H}_{r2} = \frac{1}{2} \mathbf{H}_2 (1 + \alpha) + \frac{1}{2} \mathbf{H}_2 (1 - \alpha) = \mathbf{H}_2. \quad (34.18)$$

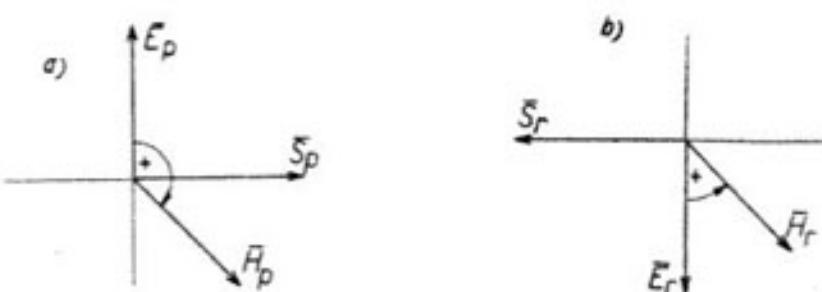
Úplný výraz pro vlnu elektrickou v izolantu je

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_p + \mathbf{E}_r = \\ &= 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \frac{1}{2} \mathbf{H}_2 (1 + \alpha) e^{-j\left(\frac{\omega}{v}\right)x} - 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \frac{1}{2} \mathbf{H}_2 (1 - \alpha) e^{j\left(\frac{\omega}{v}\right)x} \quad [\text{V/cm}]. \end{aligned} \quad (34.19)$$

Složka elektrická v rozhraní je

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_2 = \frac{1}{2} \mathbf{H}_2 \cdot 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} (1 + \alpha - 1 + \alpha) = \frac{1 + j}{a\gamma} \mathbf{H}_2. \quad (34.20)$$

Určeme nyní zářivý vektor dopadajícího elmg. vlnění \mathbf{S}_{p2} a zářivý vektor odraženého vlnění \mathbf{S}_{r2} právě v rozhraní. Vzájemné orientace vektorů $\mathbf{S}, \mathbf{E}, \mathbf{H}$ jsou na obr. 34.3.



Obr. 34.3. Vzájemná orientace vektorů $\mathbf{S}, \mathbf{E}, \mathbf{H}$. Diagram platí a) pro vlnu dopadající, b) pro vlnu odraženou.

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{p2} &= [\mathbf{E}_{p2} \mathbf{H}_{p2}] = 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \frac{1}{2} \mathbf{H}_2 (1 + \alpha) \cdot \frac{1}{2} \mathbf{H}_2 (1 + \alpha) = \\ &= 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \frac{1}{4} \mathbf{H}_2^2 (1 + 2\alpha + \alpha^2). \end{aligned} \quad (34.21)$$

Zanedbáme proti 1 druhou mocninu nepatrné veličiny α^2 a dostaneme

$$\mathbf{S}_{p2} = 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \frac{1}{4} \mathbf{H}_2^2 (1 + 2\alpha) \quad [\text{W/cm}^2]. \quad (34.22)$$

Zářivý vektor vlnění odraženého

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{r2} &= [\mathbf{E}_{r2} \mathbf{H}_{r2}] = \\ &= -120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \frac{1}{2} \mathbf{H}_2 (1 - \alpha) \cdot \frac{1}{2} \mathbf{H}_2 (1 - \alpha) = -120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{4} \mathbf{H}_2^2 (1 - 2\alpha) \end{aligned} \quad [\text{W/cm}^2]. \quad (34.23)$$

Do vodivého prostředí vstupuje součet

$$\mathbf{S}_2 = \mathbf{S}_{p2} + \mathbf{S}_{r2} = \frac{1 + j}{a\gamma} \mathbf{H}_2^2 = \frac{1}{a\gamma} \mathbf{H}_2^2 + j \frac{1}{a\gamma} \mathbf{H}_2^2 \quad [\text{W/cm}^2]. \quad (34.24)$$

Dostali jsme tentýž výsledek, jako v předchozí části 3.43, rovnice (34.10).

3.45. Impedance stěny velké tloušťky

Stěnu si opět rozdělme řezy kolmými k rozhraní ve směru proudu na pruhy o šířce 1 cm, obr. 34.1.

Impedanci části uvažovaného pruhu o délce 1 cm označme \mathbf{Z}_{21} . Impedance je definována jako poměr intenzity elektrického pole \mathbf{E}_2 na povrchu vodivé stěny a celkového proudu I_{21} , protékajícího uvažovaným pruhem:

$$\mathbf{Z}_{21} = \frac{\mathbf{E}_2}{I_{21}} = \frac{1 + j}{a\gamma} \cdot \mathbf{H}_2 \frac{1}{\mathbf{H}_2} = \frac{1}{\gamma a} + j \frac{1}{\gamma a} \quad [\Omega \cdot \text{cm}^2/\text{cm}]. \quad (34.25)$$

Impedance \mathbf{Z}_{21} má složku reálnou R_{21} a imaginární $j\omega L_{21}$:

$$R_{21} = \frac{1}{a\gamma} \quad [\Omega \cdot \text{cm}, \text{S} \cdot \text{cm}^{-1}, \text{cm}], \quad (34.26)$$

$$\omega L_{21} = \frac{1}{a\gamma} \quad [\Omega \cdot \text{cm}, \text{S} \cdot \text{cm}^{-1}, \text{cm}]. \quad (34.27)$$

Z výrazu (34.26) vidíme, že činný odpor stěny při prostorově rozloženém naindukovaném proudu je stejný jako odpor vrstvy z téhož materiálu, o tloušťce rovné hloubce vniku, při rovnoměrně rozloženém proudu.

Dosadíme-li do dříve odvozeného výrazu (34.8) pro množství vyvinutého tepla z (34.26), bude

$$P_{21} = \frac{1}{2a\gamma} H_2^2 = \frac{1}{2} R_{21} I_{21}^2 = R_{21} I_{21\text{ef}}^2 \quad [\text{W/cm}^2, \text{S} \cdot \text{cm}^{-1}, \text{cm}]. \quad (34.28)$$

Celkový naindukovaný proud I_{21} z (34.1) značí maximální hodnotu, $I_{21\text{ef}} = \frac{I_{21}}{\sqrt{2}}$ je jeho efektivní hodnota.

Výraz (34.28) poskytuje vysvětlení pro zavedený pojem *hloubka vniku* a . Při průchodu prostorově rozloženého naindukovaného proudu I_{21} stěnou velké tloušťky vzniká množství tepla P_{21} stejně veliké, jaké by vzniklo při průchodu rovnoměrně rozloženého stejněho proudu I_{21} vrstvou z téhož materiálu, o tloušťce, rovné hloubce vniku a .

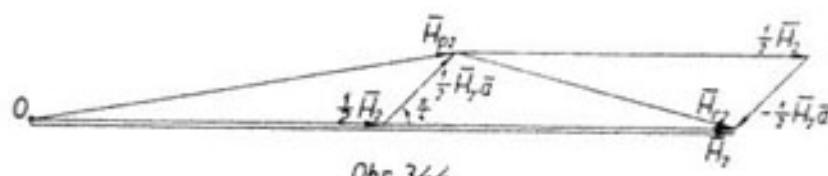
3.46. Grafické znázornění vektorů vlny dopadající a odražené

Vlna magnetická:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_2 &= \mathbf{H}_{p2} + \mathbf{H}_{r2} \quad [\text{A/cm}], \\ \mathbf{H}_{p2} &= \frac{1}{2} \mathbf{H}_2 \left(1 + \frac{1 + j}{120\pi a\gamma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \right) = \frac{1}{2} \mathbf{H}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{H}_2 \alpha, \end{aligned} \quad (34.29)$$

$$\mathbf{H}_{r2} = \frac{1}{2} \mathbf{H}_2 \left(1 - \frac{1 + j}{120\pi a\gamma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \right) = \frac{1}{2} \mathbf{H}_2 - \frac{1}{2} \mathbf{H}_2 \alpha. \quad (34.30)$$

Vektor značící druhý člen v obou výrazech je ve skutečnosti proti prvnímu členu nepatrny a je proti němu pootočen o $\left(+\frac{\pi}{4}\right)$. Sestrojme příslušný diagram 34,4.



Obr. 34,4

Obr. 34,4. Konstrukce výsledné složky magnetické H_t v rozhraní.

V zájmu názornosti jsme zvětšili vektor $\left(\frac{1}{2} \mathbf{H}_2 \mathbf{a}\right)$ proti $\frac{1}{2} \mathbf{H}_2$. Ve skutečnosti je druhý vektor nepatrny proti prvnímu a potom:

$$\mathbf{H}_{p2} \doteq \mathbf{H}_{r2} \doteq \frac{1}{2} \mathbf{H}_2.$$

Vlna elektrická:

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{p2} + \mathbf{E}_{r2} \quad [\text{V/cm}], \quad (34,31)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{p2} &= 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \frac{1}{2} \mathbf{H}_2 \left(1 + \frac{1+j}{120\pi a\gamma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \right) = \\ &= 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \frac{1}{2} \mathbf{H}_2 + \frac{1+j}{a\gamma} \cdot \frac{1}{2} \mathbf{H}_2 = \frac{1}{2} \mathbf{H}_2 \sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\epsilon_0\epsilon}} + \frac{1}{2} \mathbf{H}_2 \sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\epsilon_0\epsilon}} \mathbf{a} \end{aligned} \quad [\text{V/cm}], \quad (34,32)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{r2} &= -120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \frac{1}{2} \mathbf{H}_2 \left(1 - \frac{1+j}{120\pi a\gamma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \right) = \\ &= -120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \frac{1}{2} \mathbf{H}_2 + \frac{1+j}{a\gamma} \cdot \frac{1}{2} \mathbf{H}_2 = -\frac{1}{2} \mathbf{H}_2 \sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\epsilon_0\epsilon}} + \frac{1}{2} \mathbf{H}_2 \sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\epsilon_0\epsilon}} \mathbf{a} \end{aligned} \quad [\text{V/cm}]. \quad (34,32a)$$

Sestrojili jsme příslušný diagram 34,5.

Ve skutečnosti je vektor $\left(\frac{1}{2} \mathbf{H}_2 \sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\epsilon_0\epsilon}} \mathbf{a}\right)$ nepatrny proti $\left(\frac{1}{2} \mathbf{H}_2 \sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\epsilon_0\epsilon}}\right)$. Potom je velmi přibližně: $\mathbf{E}_{p2} \doteq -\mathbf{E}_{r2} \doteq \frac{1}{2} \mathbf{H}_2 \sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\epsilon_0\epsilon}}$.

Předchozí diagramy 34,4 a 34,5 pro vlnu magnetickou a vlnu elektrickou jsme ještě doplnili dalším diagramem pro zářivý vektor \mathbf{S}_2 , obr. 34,6. Vyšli jsme z rovnic (34,22) a (34,23).

Velikost vektoru \mathbf{E}_2 je ve skutečnosti nepatrna proti velikosti vlny dopadající \mathbf{E}_{p2} nebo odražené \mathbf{E}_{r2} .

V diagramu 34,5 je vidět, že

$$\mathbf{E}_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \mathbf{H}_2 \sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\epsilon_0\epsilon}} \mathbf{a} = \mathbf{H}_2 \cdot 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1+j}{120\pi a\gamma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} = \frac{1+j}{a\gamma} \mathbf{H}_2. \quad (34,33)$$

Ovodíme vztah mezi elektrickou intenzitou \mathbf{E}_2 na povrchu vodivé stěny a dopadající vlnou elektrickou \mathbf{E}_{p2} v závislosti na kmitočtu f a na fyzikálních vlastnostech izolantu ϵ_i , μ_i a vodivé stěny γ , μ_r .

Místo $\left(\frac{1}{2} \mathbf{H}_2\right)$ můžeme psát s velkou přiblížností \mathbf{H}_{p2} . Mezi \mathbf{H}_p a \mathbf{E}_p v izolantu

platí: $\mathbf{E}_p = \sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\epsilon_0\epsilon}} \mathbf{H}_p$, takže

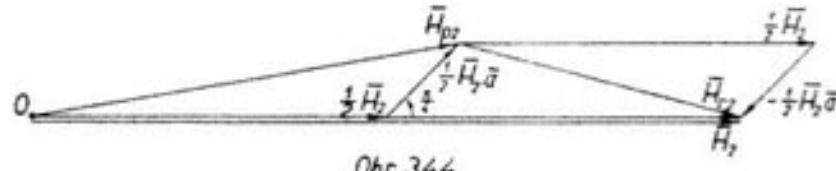
$$\mathbf{E}_2 = 2 \cdot \frac{1+j}{120\pi a\gamma} \sqrt{\frac{\epsilon_i}{\mu_i}} \mathbf{E}_{p2} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1+j}{120\pi a\gamma} \sqrt{\frac{\epsilon_0\epsilon_r}{\mu_0\mu_i}} \mathbf{E}_{p2} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1+j}{120\pi a\gamma} \sqrt{\frac{\epsilon_0\epsilon_r}{\mu_0\mu_i}} \sqrt{\frac{\mu_0\mu_i}{\epsilon_0\epsilon_r}} \mathbf{E}_{p2} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1+j}{120\pi a\gamma} \sqrt{\frac{\epsilon_0\epsilon_r}{\mu_0\mu_i}} \mathbf{E}_{p2} =$$

Vektor značejí druhý člen v obou výrazech je ve skutečnosti proti prvnímu členu nepatrny a je proti němu pootočen o $\left(+\frac{\pi}{4}\right)$. Sestrojme příslušný diagram 34.4.



Obr. 34.4

Obr. 34.4. Konstrukce výsledné složky magnetické H_z v rozhraní.

V zájmu názornosti jsme zvětšili vektor $\left(\frac{1}{2} \mathbf{H}_2 \mathbf{a}\right)$ proti $\frac{1}{2} \mathbf{H}_2$. Ve skutečnosti je druhý vektor nepatrny proti prvnímu a potom:

$$\mathbf{H}_{p2} \doteq \mathbf{H}_{r2} \doteq \frac{1}{2} \mathbf{H}_2.$$

Vlna elektrická:



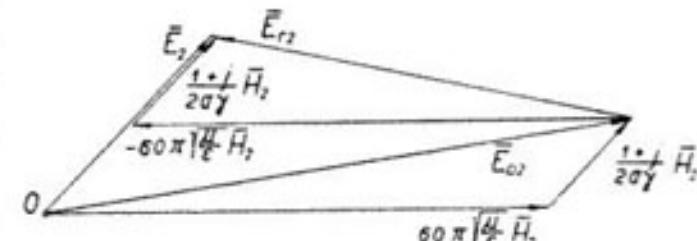
V diagramu 34.5 je vidět, že

$$\mathbf{E}_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \mathbf{H}_2 \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon}} \mathbf{a} = \mathbf{H}_2 \cdot 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon} \frac{1+j}{120\pi a \gamma}} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} = \frac{1+j}{a \gamma} \mathbf{H}_2. \quad (34.33)$$

Ovodíme vztah mezi elektrickou intenzitou \mathbf{E}_2 na povrchu vodivé stěny a dopadající vlnou elektrickou \mathbf{E}_{p2} v závislosti na kmitočtu f a na fyzikálních vlastnostech izolantu ϵ_i , μ_i a vodivé stěny γ , μ_v .

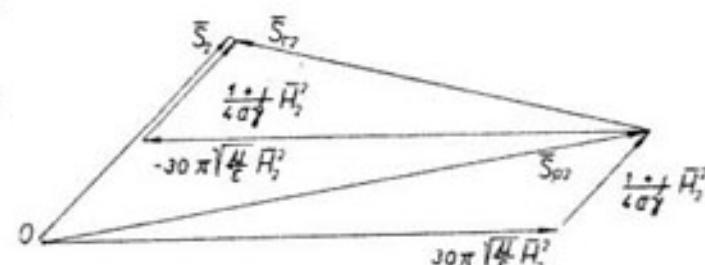
Místo $\left(\frac{1}{2} \mathbf{H}_2\right)$ můžeme psát s velkou přiblížností \mathbf{H}_{p2} . Mezi \mathbf{H}_p a \mathbf{E}_p v izolantu platí: $\mathbf{E}_p = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon}} \mathbf{H}_p$, takže

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 &= 2 \frac{1+j}{120\pi a \gamma} \sqrt{\frac{\epsilon_i}{\mu_i}} \mathbf{E}_{p2} = \\ &= 2 \frac{1+j}{a \gamma} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_i}{\mu_0 \mu_i}} \mathbf{E}_{p2} = \\ &= 2 \sqrt{j} \mathbf{E}_{p2} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_i}{\gamma} \frac{\mu_i \mu_v}} [V/cm]. \end{aligned} \quad (34.34)$$



Obr. 34.5

Obr. 34.5. Konstrukce výsledné složky elektrické E_z v rozhraní.



Obr. 34.6. Konstrukce výsledného zářivého vektoru S_z v rozhraní.

Dosadili jsme za hloubku vniku ve stěně. Je-li izolačním prostředím vzduch, je $\epsilon_i = 1$, $\mu_i = 1$, dosadíme za ϵ_0 a dostaneme výraz pro absolutní hodnotu E_z

$$E_z = 1,4908 \cdot 10^{-6} \sqrt{\frac{f}{\gamma}} \sqrt{\frac{\epsilon_i \mu_v}{\mu_i}} E_{p2} [V/cm]. \quad (34.35)$$

Příklad 34.1

Vypočteme intenzitu elektrického pole E_z a hustotu proudu $J_z = \gamma E_z$ v rozhraní vodivé stěny z mědi ($\gamma = 5,5 \cdot 10^5 \text{ S} \cdot \text{cm}^{-1}$) a alternativně ze studené oceli ($\gamma = 10^5 \text{ S} \cdot \text{cm}^{-1}$, $\mu = 20$), dopadá-li kolmo na rozhraní rovinne elmg. vlnění o hodnotě elektrické složky $E_p = 10^3 \text{ V}/\text{cm}$. Izolační prostředí, kterým vlnění přichází, je vzduch, $\epsilon_i = \mu_i = 1$. Alternativně pro kmitočty $f = 10^3$ a 10^7 Hz .

Přehled výsledků je v tabulce 34.1.

Tabulka 34,1

Materiál	Měd		Ocel	
Kmitočet	E_s [V/cm]	J_s [A/cm ²]	E_s [V/cm]	J_s [A/cm ²]
$f = 10^5$ Hz	$6,37 \cdot 10^{-4}$	35,0	$6,64 \cdot 10^{-4}$	66,4
$f = 10^7$ Hz	$6,37 \cdot 10^{-2}$	3500	$6,64 \cdot 10^{-2}$	6640

Vidíme, že naindukována intenzita elektrického pole E_s roste s odmocinou kmitočtu f .

Příklad 34,2

Vypočteme, jaké množství elmg. energie za 1 vteřinu absorbuje ocelový hranol o rozměrech $20 \times 20 \times 80$ cm, umístěný souose v cívce tvaru dutého hranolu o vnitřních rozměrech $24 \times 24 \times 84$ cm. Cívka je napájena proudem o kmitočtu $f = 1000$ Hz. Proud v cívce, připadající na 1 cm délky cívky, $I_{11} = 1000$ A/cm (maximální hodnota). Analogicky, jak odvodíme v dalším pro válcovou cívku, i zde intenzita magnetického pole H_s v dutině cívky se rovná proudu na 1 cm osové délky, $H_s = I_{11} = 1000$ A/cm. Fyzikální vlastnosti vsázky se mění při vzrůstající teplotě. Vypočtěme množství absorbované energie při teplotě 20°C . Vodivost oceli $\gamma = 10^5$ S.cm⁻¹, střední uvažovaná permeabilita $\mu = 20$.

Jednotlivé stěny hranolovité cívky vyzařují do vlastní dutiny rovinné elmg. vlnění, které dopadá kolmo na stěny vložené vsázky a je jí částečně absorbováno. Je-li intenzita magnetického pole v dutině H_s [A/cm], pohltí každý cm² povrchu vsázky množství energie P_{21} , výraz (34,8).

Hloubka vniku a :

$$a = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^8}{6,28 \cdot 10^3 \cdot 10^5 \cdot 1,256 \cdot 20}} = 0,1125 \text{ cm},$$

$$P_{21} = \frac{1}{2a\gamma} H_s^2 = \frac{1}{2 \cdot 10^5 \cdot 0,1125} \cdot (10^3)^2 = 44,4 \text{ W/cm}^2.$$

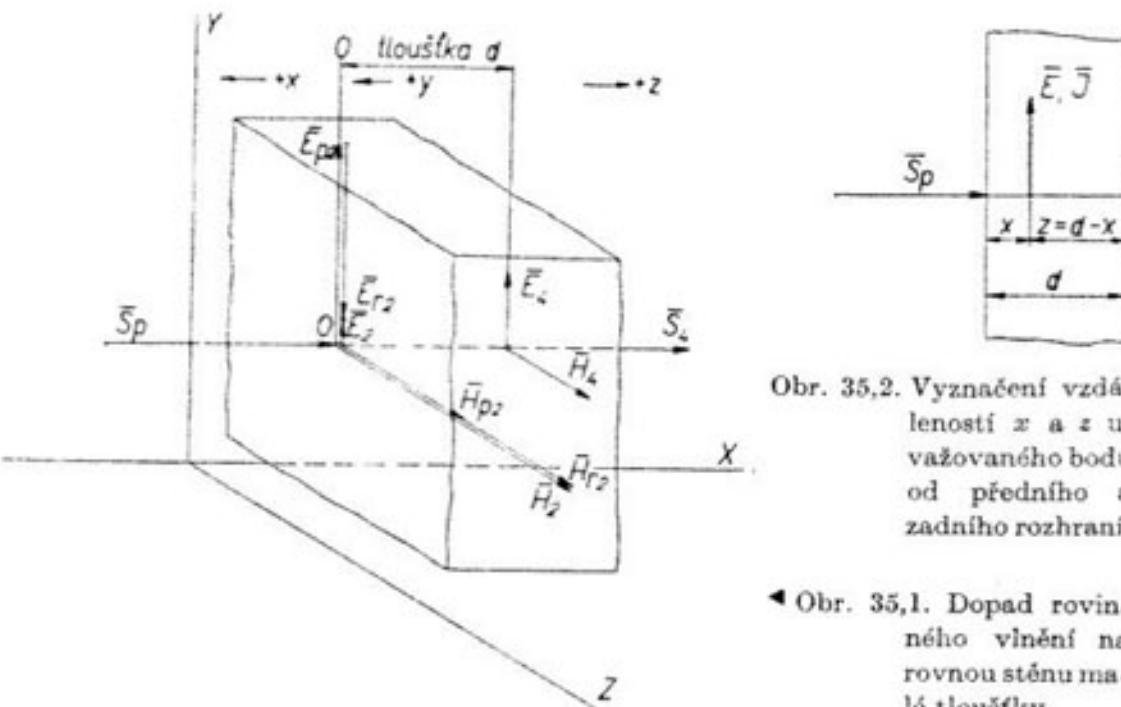
Celý povrch hranolu má plochu $F = 4 \times 20 \times 80 = 6400 \text{ cm}^2$, takže absorbuje výkon:

$$P_2 = P_{21} F = 284 \text{ kW}.$$

Podle předchozího se elmg. vlnění prakticky zeela utlumi při proniknutí do hloubky rovné vlnové délce λ :

$$\lambda = 2\pi a = 6,28 \cdot 0,1125 = 0,706 \text{ cm}.$$

Vzhledem k rozměrům hranolu (20×20) cm² nedochází ke vzájemnému setkání a působení vlnění, dopadajících na protější stěny hranolu. Skládání vlnění ze dvou směrů nastává pouze v rozích prohřívaného tělesa. Vliv tohoto jevu jsme při našem přibližném výpočtu neuvažovali.



Obr. 35,2. Vyznačení vzdaleností x a z uvažovaného bodu od předního a zadního rozhraní.

■ Obr. 35,1. Dopad roviného vlnění na rovnou stěnu malé tloušťky.

3.5. Vodivá stěna malé tloušťky, na kterou dopadá rovinné vlnění z jedné strany

3.51. Šíření rovinné vlny ve stěně

Stěnou malé tloušťky rozumíme takovou stěnu, ve které se rovinné elmg. vlnění dopadající kolmo na přední rozhraní a částečně vstupující do stěny neutlumi dříve, než dojde k zadnímu rozhraní, takže se od zadního rozhraní odráží zpět.

Schematicky je dopad rovinného elmg. vlnění na stěnu malé tloušťky vyznačen na obr. 35,1 a 35,2.

Použijeme některých poznatků odvozených v předchozí části. Podle obr. 35,1 budeme postupně uvažovat tato tři prostředí, kterými prochází dopadající vlnění:

- prostředí vlevo před předním rozhraním — izolant (vzduch),
- prostředí vpravo za předním rozhraním — vodivá stěna,
- prostředí vpravo za zadním rozhraním — izolant (vzduch).

Vlastní odvození:

- a) Prostředí vlevo před prvním rozhraním — izolant. Souřadnice kolmou k rozhraní označme x . Počátek v rozhraní, smysl $(+x)$ doleva. Vlna magnetická má v izolantu složku dopadající \mathbf{H}_p a složku odraženou \mathbf{H}_r . Vlna elektrická má obdobně složky \mathbf{E}_p a \mathbf{E}_r . Hodnoty vektorů v předním rozhraní označme indexem 2.

$$\mathbf{H}_p = \mathbf{H}_{p2} e^{-j\left(\frac{\omega}{v}\right)x}, \quad \mathbf{E}_p = 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{H}_{p2} e^{-j\left(\frac{\omega}{v}\right)x}, \quad (35.1)$$

$$\mathbf{H}_r = \mathbf{H}_{r2} e^{j\left(\frac{\omega}{v}\right)x}, \quad \mathbf{E}_r = -120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{H}_{r2} e^{j\left(\frac{\omega}{v}\right)x}. \quad (35.2)$$

Právě v rozhraní bude:

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_{p2} + \mathbf{H}_{r2} \quad (35.3)$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{p2} + \mathbf{E}_{r2} = 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} [\mathbf{H}_{p2} - \mathbf{H}_{r2}]. \quad (35.4)$$

- b) Prostředí vpravo za předním rozhraním — vodivá stěna o tloušťce d [cm]. Souřadnice označme y , počátek v předním rozhraní, smysl $(+y)$ doleva. Elmg. vlnění ve stěně určují dříve odvozené rovnice (33.5) a (33.10):

$$\mathbf{H} = \mathbf{A} e^{-py} + \mathbf{B} e^{+py}, \quad (35.4a)$$

$$\mathbf{E} = \frac{p}{\gamma} [\mathbf{A} e^{-py} - \mathbf{B} e^{+py}]. \quad (35.4b)$$

Přímo v rozhrani ($y = 0$) budou v důsledku kontinuity mít vektory \mathbf{H} a \mathbf{E} stejné hodnoty jako v izolantu těsně před rozhraním, to je \mathbf{H}_2 , \mathbf{E}_2 .

$$\mathbf{H} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_{p2} + \mathbf{H}_{r2}, \quad (35.5)$$

$$\mathbf{E} = \frac{p}{\gamma} [\mathbf{A} - \mathbf{B}] = \mathbf{E}_2 = 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} [\mathbf{H}_{p2} - \mathbf{H}_{r2}], \quad (35.6)$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{H}_{p2} + \mathbf{H}_{r2}, \quad (35.7)$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \frac{120\pi a\gamma}{1+j} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} [\mathbf{H}_{p2} - \mathbf{H}_{r2}]. \quad (35.8)$$

Sečtěme a odečteme oba poslední výrazy:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{H}_{p2} \left(1 + \frac{120\pi a\gamma}{1+j} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \right) + \frac{1}{2} \mathbf{H}_{r2} \left(1 - \frac{120\pi a\gamma}{1+j} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \right), \quad (35.9)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \mathbf{H}_{p2} \left(1 - \frac{120\pi a\gamma}{1+j} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \right) + \frac{1}{2} \mathbf{H}_{r2} \left(1 + \frac{120\pi a\gamma}{1+j} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \right). \quad (35.10)$$

Druhý člen v závorce je zpravidla značně větší než 1 (řádově 10^4 až 10^6 krát), takže můžeme oba výrazy zjednodušit:

$$\frac{120\pi a\gamma}{1+j} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = k \gg 1, \quad (35.11)$$

$$\mathbf{A} \doteq \frac{1}{2} k (\mathbf{H}_{p2} - \mathbf{H}_{r2}), \quad (35.12)$$

$$\mathbf{B} \doteq \frac{1}{2} k (\mathbf{H}_{r2} - \mathbf{H}_{p2}). \quad (35.13)$$

Vyjádřeme intenzitu \mathbf{H}_4 a \mathbf{E}_4 v zadním rozhraní, $y = d$:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_4 = \mathbf{A} e^{-pd} + \mathbf{B} e^{pd}, \quad (35.14)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_4 = \frac{p}{\gamma} [\mathbf{A} e^{-pd} - \mathbf{B} e^{pd}]. \quad (35.15)$$

- c) Prostředí vpravo za zadním rozhraním vodivé stěny — izolant. Počátek souřadnice z je v zadním rozhraní. Elmg. vlnění, které projde zadním rozhraním do izolantu, bude mít z důvodu kontinuity hodnoty \mathbf{H}_4 , \mathbf{E}_4 stejné jako ve vodivé stěně pro $y = d$, výrazy (35.14) a (35.15). Vlnění, které projde stěnou do izolantu, již potom nenařazí na další překážku, takže bude mít pouze složky \mathbf{H}_p , \mathbf{E}_p , odražené složky \mathbf{H}_r a \mathbf{E}_r odpadnou. V rozhraní ($z = 0$) bude podle (32.30)

$$\frac{\mathbf{E}_{p4}}{\mathbf{H}_{p4}} = \frac{\mathbf{E}_4}{\mathbf{H}_4} = 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}. \quad (35.16)$$

Dosadíme \mathbf{E}_4 z (35.16) do (35.15):

$$\mathbf{E}_4 = 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{H}_4 = \frac{p}{\gamma} [\mathbf{A} e^{-pd} - \mathbf{B} e^{pd}], \quad (35.17)$$

$$120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\gamma}{p} \mathbf{H}_4 = \mathbf{A} e^{-pd} - \mathbf{B} e^{pd}. \quad (35.18)$$

Sečtěme a odečteme (35.14) a (35.18): Zanedbáme-li opět 1 proti $k = \frac{120\pi a\gamma}{1+j} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$, dostaneme

$$\mathbf{A} \doteq \frac{1}{2} \mathbf{H}_4 k e^{pd}, \quad (35.19)$$

$$\mathbf{B} \doteq -\frac{1}{2} \mathbf{H}_4 k e^{-pd}. \quad (35.20)$$

Porovnáme nyní výrazy (35.12), (35.19) a (35.13), (35.20) a z toho určíme

$$\mathbf{H}_4 e^{pd} = \mathbf{H}_{p2} - \mathbf{H}_{r2}, \quad (35.21)$$

$$\mathbf{H}_4 e^{-pd} = \mathbf{H}_{p2} - \mathbf{H}_{r2}. \quad (35.22)$$

Protože se rovnají pravé strany, musí se rovnat i levé:

$$\mathbf{H}_4 e^{-pd} = \mathbf{H}_4 e^{-pd}. \quad (35,23)$$

Z výrazu (35,23) vyplývá, že $\mathbf{H}_4 = 0$. Zadním rozhraním neproniká do izolantu žádná vlna magnetická a vzhledem k (35,16) ani vlna elektrická. Vodivá stěna nepropouští elmg. vlnění do prostoru za zadním rozhraním, působí tedy jako dokonalé stínění. Tento výsledek platí za předpokladu (35,11).

Dosadíme výsledek (35,23) do (35,14):

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_4 &= 0 = \mathbf{A} e^{-pd} + \mathbf{B} e^{pd}, \\ \mathbf{B} &= -\mathbf{A} e^{-2pd}. \end{aligned} \quad (35,24)$$

Z výrazu (35,4a), pro $y = 0$, dostaneme

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_2 = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{A} (1 - e^{-2pd}), \quad (35,25)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{H}_2}{1 - e^{-2pd}}. \quad (35,26)$$

Z výrazů (35,24), (35,21) a (35,5)

$$\mathbf{B} = -\frac{e^{-2pd}}{1 - e^{-2pd}} \mathbf{H}_2, \quad (35,27)$$

$$\mathbf{H}_{p2} = \mathbf{H}_{r2} = \frac{1}{2} \mathbf{H}_2. \quad (35,28)$$

Stejně, jako tomu bylo u stěny nekonečné tloušťky, i v uvažovaném případě jsme odvodili, že magnetická vlna \mathbf{H}_{r2} odražená zpět od předního rozhraní je stejně veliká a ve fázi s dopadající magnetickou vlnou \mathbf{H}_{p2} .

3.52. Výrazy pro intenzitu E a H ve stěně malé tloušťky

Odvozené integrační konstanty \mathbf{A} a \mathbf{B} dosadíme do výchozích rovnic (35,4a) a (35,4b). Místo souřadnice y pišme x :

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{A} e^{-px} + \mathbf{B} e^{px} = \frac{\mathbf{H}_2}{1 - e^{-2pd}} [e^{-px} - e^{-2pd} e^{px}] = \\ &= \frac{\mathbf{H}_2 e^{-pd}}{e^{-pd} (e^{pd} - e^{-pd})} [e^{pd} e^{-px} - e^{-pd} e^{px}] = \mathbf{H}_2 \frac{[e^{p(d-x)} - e^{-p(d-x)}]}{(e^{pd} - e^{-pd})} = \\ &= \mathbf{H}_2 \frac{(e^{px} - e^{-px})}{(e^{pd} - e^{-pd})} \quad [\text{A/cm}]. \end{aligned} \quad (35,29)$$

Označili jsme vzdálenost od zadního rozhraní znakem z (obr. 35,2), $z = (d - x)$. Čitatel i jmenovatel se dá zjednodušit, použijeme-li známého vztahu (72,15).

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_2 \frac{\sinh pz}{\sinh pd} \quad [\text{A/cm}]. \quad (35,30)$$

Dosadíme-li za $z = d$, $z = 0$, dostaneme intenzitu magnetického pole v obou rozhraních: $\mathbf{H}_2, \mathbf{H}_4 = 0$.

Intenzita elektrického pole z (35,4b) bude

$$\mathbf{E} = \frac{p}{\gamma} \frac{\mathbf{H}_2}{1 - e^{-2pd}} [e^{-px} + e^{-2pd} e^{px}] \quad [\text{V/cm}]. \quad (35,31)$$

Po krátké úpravě a za použití výrazu (72,14)

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\gamma} \mathbf{J} = \frac{p}{\gamma} \mathbf{H}_2 \frac{\cosh pz}{\sinh pd} \quad [\text{V/cm}]. \quad (35,32)$$

Intenzita \mathbf{E} v obou rozhraních:

$$x = 0, \quad z = d,$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{\gamma} \mathbf{J}_2 = \frac{p}{\gamma} \mathbf{H}_2 \frac{\cosh pd}{\sinh pd} \quad [\text{V/cm}]; \quad (35,33)$$

$$x = d, \quad z = 0,$$

$$\mathbf{E}_4 = \frac{1}{\gamma} \mathbf{J}_4 = \frac{p}{\gamma} \mathbf{H}_2 \frac{1}{\sinh pd} \quad [\text{V/cm}]. \quad (35,34)$$

Odvození absolutních hodnot H a E

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_2 \frac{\sinh pz}{\sinh pd} = \mathbf{H}_2 \frac{\left(\sinh \frac{z}{a} \cdot \cos \frac{z}{a} + j \cosh \frac{z}{a} \cdot \sin \frac{z}{a} \right)}{\left(\sinh \frac{d}{a} \cdot \cos \frac{d}{a} + j \cosh \frac{d}{a} \cdot \sin \frac{d}{a} \right)} = \mathbf{H}_2 \frac{(A + jB)}{(C + jD)} \quad (35,35)$$

$$|\mathbf{H}| = H = H_2 \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2}} \quad [\text{A/cm}]. \quad (35,36)$$

Označili jsme reálné a imaginární složky čitatele i jmenovatele znaky A, B, C, D .

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 &= \sinh^2 \left(\frac{z}{a} \right) \cdot \cos^2 \left(\frac{z}{a} \right) + \cosh^2 \left(\frac{z}{a} \right) \cdot \sin^2 \left(\frac{z}{a} \right) = \\ &= \sinh^2 \left(\frac{z}{a} \right) \left[1 - \sin^2 \left(\frac{z}{a} \right) \right] + \left[1 + \sinh^2 \left(\frac{z}{a} \right) \right] \cdot \sin^2 \left(\frac{z}{a} \right) = \sinh^2 \left(\frac{z}{a} \right) + \sin^2 \left(\frac{z}{a} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\cosh \frac{2z}{a} - \cos \frac{2z}{a} \right]. \end{aligned} \quad (35,37)$$

Analogicky

$$C^2 + D^2 = \frac{1}{2} \left[\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a} \right]. \quad (35,38)$$

Výraz (35,36) pro absolutní hodnotu H bude

$$H = H_2 \sqrt{\frac{\cosh \frac{2z}{a} - \cos \frac{2z}{a}}{\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a}}} \quad [A/cm]. \quad (35,39)$$

Absolutní hodnota E z výrazu (35,32):

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{\gamma} J = \frac{F}{\gamma} \\ &= \sinh^2 \frac{pz}{a} + \cosh^2 \frac{pz}{a} - 1 \\ &= \sinh^2 \left(\pi \cdot \frac{pd}{a} \right) + (\cosh^2 - 1) \sinh^2 \frac{pd}{a} \\ &= \cosh^2 \frac{pd}{a} + \sinh^2 \frac{pd}{a} - 1 \\ A^2 + &= \underline{\underline{\cosh^2 - \sinh^2}} \Rightarrow \underline{\underline{\cosh^2 - \sinh^2}} \\ &= c \\ &= \underline{\underline{\cosh^2 + 1 - 1 + \cosh^2}} = \underline{\underline{2 \cosh^2 \frac{pd}{a}}} \end{aligned}$$

Součet ($C^2 + L$)

$$\gamma \quad ay \quad \left| \cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a} \right.$$

Příklad 35,1

Určeme průběh H a E v rovné stěně z mědi, o tloušťce $d = 0,6$ cm, na kterou kolmo dopadá rovinné elmg. vlnění, dopadající vlna magnetická $H_p = 100$ A/cm. Kmitočet $f = 1000$ Hz, vodivost $\gamma = 5,5 \cdot 10^5$ S.cm⁻¹.

$$\text{Hloubka vniku } a = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^9}{6,28 \cdot 10^3 \cdot 5,5 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 3,14 \cdot 1}} = 0,214 \text{ cm.}$$

$$\text{Argument } \frac{2d}{a} = \frac{2 \cdot 0,6}{0,214} = 5,60.$$

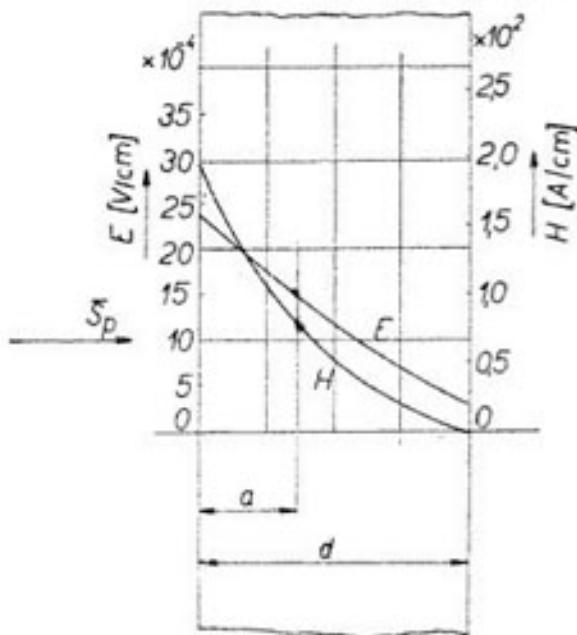
Hodnoty hyperbolických funkcí odečítáme např. z tabulek: Segal, Semen-dajev: Pjatiznačnyje tablicy, [7, 9]. Výsledky jsou v tabulce 35,1.

Tabulka 35,1

x [cm]	$x = 0$	$x = \frac{d}{2} = 0,3$	$x = d = 0,6$
H [A/cm]	200	52,4	0,0
E [V/cm]	$23,9 \cdot 10^{-4}$	$11,9 \cdot 10^{-4}$	$2,92 \cdot 10^{-4}$
J [A/cm ²]	1310	654,0	160,0

Obr. 35,3. Průběh intenzity elektrického a magnetického pole ve stěně malé tloušťky.

Graficky jsou průběhy H a E zobrazeny v diagramu 35,3.



Odvodme z (35,30) a (35,32) zjednodušené výrazy pro H a E v případě, že poměr $\frac{d}{a} \rightarrow \infty$, což značí, že stěna malé tloušťky přechází ve stěnu velké tloušťky.

$$\begin{aligned} H &= H_2 \frac{\sinh pz}{\sinh pd} = H_2 \frac{(e^{pz} - e^{-pz})}{(e^{pd} - e^{-pd})} \doteq H_2 \frac{e^{pz} - e^{-pz}}{e^{pd}} = \\ &\doteq H_2 (e^{p(z-d)} - e^{-p(z+d)}) \doteq H_2 e^{-px} \quad [A/cm], \end{aligned}$$

$$E = E_2 \frac{\cosh pz}{\sinh pd} \doteq E_2 \frac{e^{pz} + e^{-pz}}{e^{pd}} \doteq E_2 e^{-px} \quad [V/cm].$$

Dostali jsme pro H a E stejně výrazy, jako jsme dříve přímo odvodili pro stěnu velké tloušťky (výrazy (33,8) a (33,13)).

Odvodme ještě z (35,39) a (35,43) zjednodušené absolutní hodnoty H a E pro poměr $\frac{d}{a} \rightarrow \infty$. Již pro poměr $\frac{2d}{a}$ je $\cosh \left(\frac{2d}{a} \right) = 201,71$, takže můžeme

Analogicky

$$C^2 + D^2 = \frac{1}{2} \left[\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a} \right]. \quad (35,38)$$

Výraz (35,36) pro absolutní hodnotu H bude

$$H = H_2 \sqrt{\frac{\cosh \frac{2z}{a} - \cos \frac{2z}{a}}{\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a}}} \quad [\text{A/cm}]. \quad (35,39)$$

Absolutní hodnota E z výrazu (35,32):

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\gamma} \mathbf{J} = \frac{p}{\gamma} \mathbf{H}_2 \frac{\cosh \frac{z}{a} \cdot \cos \frac{z}{a} + j \sinh \frac{z}{a} \cdot \sin \frac{z}{a}}{\sinh \frac{d}{a} \cdot \cos \frac{d}{a} + j \cosh \frac{d}{a} \cdot \sin \frac{d}{a}} = \frac{p}{\gamma} \mathbf{H}_2 \frac{A + jB}{C + jD} \quad [\text{V/cm}], \quad (35,40)$$

$$E = \frac{1}{a\gamma} H_2 \sqrt{2} \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2}} \quad [\text{V/cm}]. \quad (35,41)$$

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 &= \cosh^2 \left(\frac{z}{a} \right) \cdot \cos^2 \left(\frac{z}{a} \right) + \sinh^2 \left(\frac{z}{a} \right) \cdot \sin^2 \left(\frac{z}{a} \right) = \\ &= \cosh^2 \left(\frac{z}{a} \right) - \sin^2 \left(\frac{z}{a} \right) = \frac{1}{2} \left[\cosh \frac{2z}{a} + \cos \frac{2z}{a} \right]. \end{aligned} \quad (35,42)$$

Součet ($C^2 + D^2$) jsme již odvodili, výraz (35,38).

$$E = \frac{1}{\gamma} J = \frac{\sqrt{2}}{a\gamma} H_2 \sqrt{\frac{\cosh \frac{2z}{a} + \cos \frac{2z}{a}}{\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a}}} \quad [\text{V/cm}]. \quad (35,43)$$

Příklad 35,1

Určeme průběh H a E v rovné stěně z mědi, o tloušťce $d = 0,6$ cm, na kterou kolmo dopadá rovinné elmg. vlnění, dopadající vlna magnetická $H_p = 100$ A/cm. Kmitočet $f = 1000$ Hz, vodivost $\gamma = 5,5 \cdot 10^5$ S.cm⁻¹.

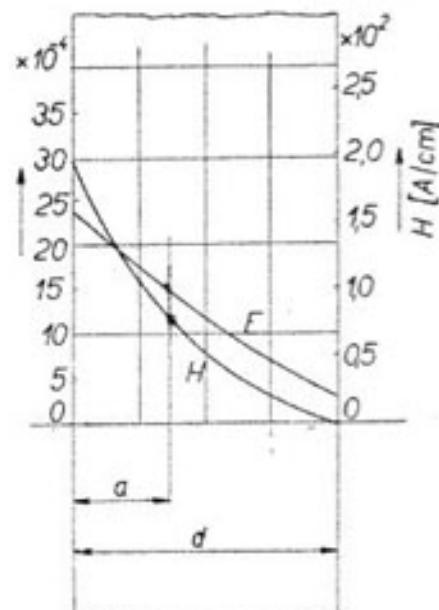
$$\text{Hloubka vniku } a = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^9}{6,28 \cdot 10^3 \cdot 5,5 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 3,14 \cdot 1}} = 0,214 \text{ cm.}$$

$$\text{Argument } \frac{2d}{a} = \frac{2 \cdot 0,6}{0,214} = 5,60.$$

Hodnoty hyperbolických funkcí odečítáme např. z tabulek: Segal, Semen-dajev: Pjatiznačnyje tablicy, [7, 9]. Výsledky jsou v tabulce 35,1.

Tabulka 35,1

z [cm]	$z = 0$	$z = \frac{d}{2} = 0,3$	$z = d = 0,6$
H [A/cm]	200	52,4	0,0
E [V/cm]	$23,9 \cdot 10^{-4}$	$11,9 \cdot 10^{-4}$	$2,92 \cdot 10^{-4}$
J [A/cm ²]	1310	654,0	160,0



$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= H_2 \frac{\sinh pz}{\sinh pd} = H_2 \frac{(e^{pz} - e^{-pz})}{(e^{pd} - e^{-pd})} \doteq H_2 \frac{e^{pz} - e^{-pz}}{e^{pd}} = \\ &\doteq H_2 (e^{p(z-d)} - e^{-p(z+d)}) \doteq H_2 e^{-px} \quad [\text{A/cm}]. \end{aligned}$$

$$\mathbf{E} = E_2 \frac{\cosh pz}{\sinh pd} \doteq E_2 \frac{e^{pz} + e^{-pz}}{e^{pd}} \doteq E_2 e^{-px} \quad [\text{V/cm}].$$

Dostali jsme pro \mathbf{H} a \mathbf{E} stejně výrazy, jako jsme dříve přímo odvodili pro stěnu velké tloušťky (výrazy (33,8) a (33,13)).

Odvodíme ještě z (35,39) a (35,43) zjednodušené absolutní hodnoty H a E pro poměr $\frac{d}{a} \rightarrow \infty$. Již pro poměr $\frac{2d}{a}$ je $\cosh \left(\frac{2d}{a} \right) = 201,71$, takže můžeme

goniometrickou funkci (maximálně rovnou jedné) ve jmenovateli zanedbat.

$$H = H_2 \sqrt{\frac{\cosh \frac{2z}{a} - \cos \frac{2z}{a}}{\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a}}} = H_2 \sqrt{\frac{\cosh \frac{2z}{a} - \cos \frac{2z}{a}}{\cosh \frac{2d}{a}}} = \\ = H_2 \sqrt{\frac{\cosh \frac{2z}{a}}{\cosh \frac{2d}{a}}} = H_2 \sqrt{\frac{e^{\frac{2z}{a}} + e^{-\frac{2z}{a}}}{e^{\frac{2d}{a}} + e^{-\frac{2d}{a}}}} = H_2 \sqrt{e^{\left(\frac{2}{a}\right)(x-d)} + e^{-\left(\frac{2}{a}\right)(x+d)}} = \\ = H_2 \sqrt{e^{-\left(\frac{2x}{a}\right)}} = H_2 \cdot e^{-\left(\frac{x}{a}\right)}.$$

Obdobně

$$E = E_2 e^{-\left(\frac{x}{a}\right)}.$$

Dostali jsme stejné výsledky, jako jsme dříve odvodili přímo pro stěnu velké tloušťky, (33,14) a (33,15).

3.53. Vlna dopadající a odražená ve vodivé stěně

Vlna magnetická

Rozepíšeme-li rovnici (35,29) pro \mathbf{H} , dostaneme výrazy pro vlnu postupující (přicházející) a vlnu odraženou od zadního rozhraní ve vodivé stěně:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_2 \frac{e^{px}}{2 \sinh pd} - \mathbf{H}_2 \frac{e^{-px}}{2 \sinh pd} = \mathbf{H}_p + \mathbf{H}_r \quad [\text{A/cm}]. \quad (35,44)$$

Prvý výraz na pravé straně značí vlnu postupující od předního rozhraní do stěny, druhý výraz značí vlnu odraženou zpět od zadního rozhraní. Obě vlny se odečítají.

V zadním rozhraní ($x = d, z = 0$) budou obě složky:

$$\mathbf{H}_4 = \mathbf{H}_2 \frac{1}{2 \sinh pd} - \mathbf{H}_2 \frac{1}{2 \sinh pd} = \mathbf{H}_{p4} + \mathbf{H}_{r4} = 0 \quad [\text{A/cm}]. \quad (35,45)$$

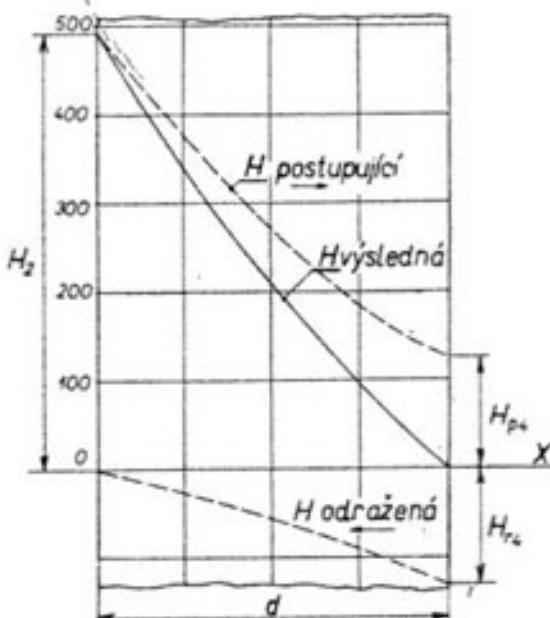
V zadním rozhraní je magnetická vlna odražená stejně veliká jako vlna přicházející, avšak je fázově pootečena o úhel π . Obě se odečítají, $\mathbf{H}_4 = 0$.

Absolutní hodnotu H_4 v zadním rozhraní dostaneme z (35,39):

$$H_4 = H_2 \sqrt{\frac{1}{\left(\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a}\right)} - \frac{1}{\left(\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a}\right)}} = 0 \quad [\text{A/cm}]. \quad (35,46)$$

Obě složky vlny magnetické jsou schematicky vyznačeny na obr. 35,4 (absolutní hodnoty).

Obr. 35,4. Vlna magnetická postupující, odražená a výsledná ve stěně malé tloušťky.



Vlna elektrická

Rozepíšeme rovnici (35,32) pro \mathbf{E} :

$$\mathbf{E} = \frac{p}{\gamma} \mathbf{H}_2 \frac{e^{px}}{2 \sinh pd} + \frac{p}{\gamma} \mathbf{H}_2 \frac{e^{-px}}{2 \sinh pd} \quad [\text{V/cm}]. \quad (35,47)$$

Prvý výraz udává vlnu postupující, druhý vlnu odraženou zpět od zadního rozhraní. Obě vlny se sčítají.

V zadním rozhraní ($z = 0$) budou obě složky:

$$\mathbf{E}_4 = \frac{p}{\gamma} \mathbf{H}_2 \frac{1}{2 \sinh pd} + \frac{p}{\gamma} \mathbf{H}_2 \frac{1}{2 \sinh pd} = \mathbf{E}_{p4} + \mathbf{E}_{r4} \quad [\text{V/cm}]. \quad (35,48)$$

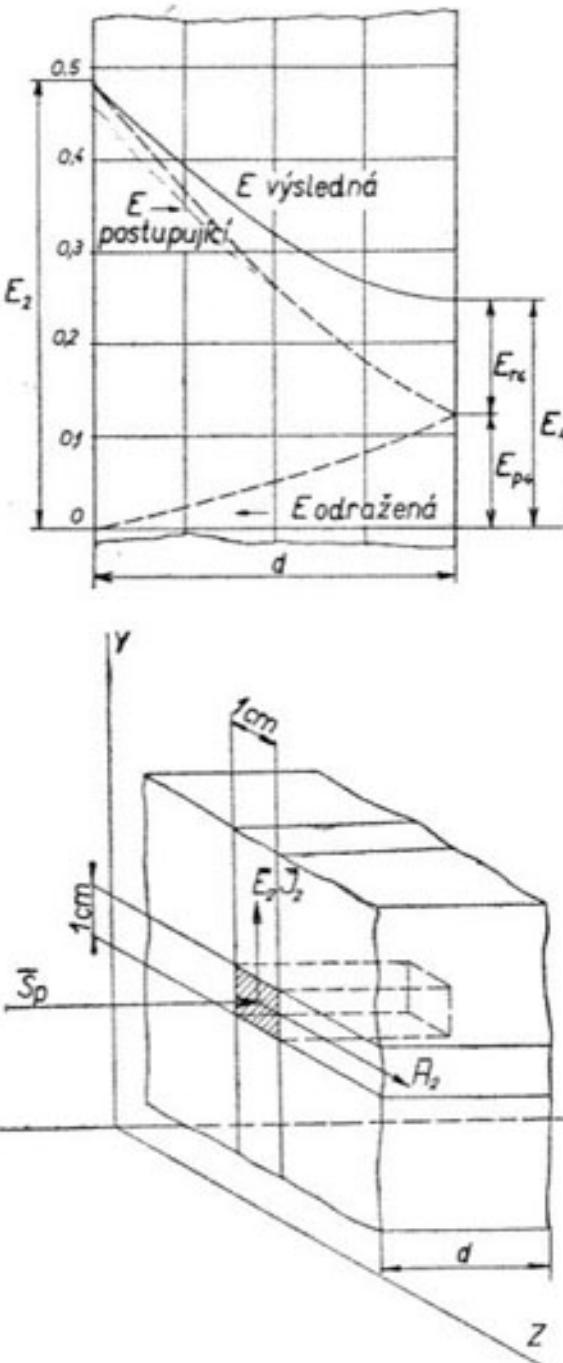
Obě složky jsou v zadním rozhraní stejně veliké, jsou ve fázi, sčítají se. Absolutní hodnotu E_4 dostaneme z (35,43):

$$\mathbf{E}_4 = \frac{\sqrt{2}}{a\gamma} \mathbf{H}_2 \sqrt{\frac{1}{\left(\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a}\right)} + \frac{1}{\left(\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a}\right)}} \quad [\text{V/cm}]. \quad (35,49)$$

Obě složky vlny elektrické jsou schematicky vyznačeny na obr. 35,5 (absolutní hodnoty).

3.54. Celkový proud, vybuzený dopadem rovinného vlnění ve stěně malé tloušťky

Stěnu rozdělme řezy, kolmými k rozhraní, ve směru proudu, na pruhy o šířce 1 cm. (Obr. 35,6). V takto vymezené části stěny protéká proud I_{21} :



Obr. 35,6. Při odvozování naindukovaného tepla ve stěně uvažujeme hranol o základně $(1 \times 1) \text{ cm}^2$ v rozhraní, o výšce d , rovné tloušťce stěny.

$$k = \frac{120\pi\gamma}{1+j} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \gg 1, \text{ takže magnetická složka v zadním rozhraní } \mathbf{H}_4 = 0.$$

$$I_{21} = \int_{x=0}^{x=d} J dx = \int_{z=0}^{z=d} J dz [A/\text{cm}, A/\text{cm}^2], \quad (35,50)$$

$$I_{21} = -\gamma \int_0^d \mathbf{E} dz = p \mathbf{H}_2 \int_0^d \frac{\cosh pz}{\sinh pd} dz = -p \mathbf{H}_2 \frac{1}{\sinh pd} \frac{1}{p} [\sinh pd] = \mathbf{H}_2 [A/\text{cm}], \quad (35,51)$$

Obr. 35,5. Vlna elektrická postupující, odražená a výsledná ve stěně malé tloušťky.

Ovodili jsme, že celkový naindukovaný proud I_{21} v části stěny malé tloušťky o šířce 1 cm se rovná číselně intenzitě magnetického pole \mathbf{H}_2 v předním rozhraní. Nezávisí ani na kmotřtu, ani na fyzikálních vlastnostech (γ, μ) stěny, ani na její tloušťce. Tento výsledek platí za dříve učiněného předpokladu, že výraz

$$k = \frac{120\pi\gamma}{1+j} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \gg 1,$$

magnetická složka v zadním rozhraní $\mathbf{H}_4 = 0$.

3.55. Průběh okamžitých hodnot hustoty proudu J

Vyjdeme z výrazu (35,32):

$$J = p \mathbf{H}_2 \frac{\cosh pz}{\sinh pd} = \frac{1+j}{a} \mathbf{H}_2 \frac{\left(\cosh \frac{z}{a} \cdot \cos \frac{z}{a} + j \sinh \frac{z}{a} \cdot \sin \frac{z}{a} \right)}{\left(\sinh \frac{d}{a} \cdot \cos \frac{d}{a} + j \cosh \frac{d}{a} \cdot \sin \frac{d}{a} \right)} [A/\text{cm}], \quad (35,52)$$

Označme opět jednotlivé části znaky A, B, C, D . Potom

$$J = \frac{\mathbf{H}_2}{a} \frac{(1+j)(A+jB)(C-jD)}{C^2 + D^2} = \frac{\mathbf{H}_2}{a(C^2 + D^2)} \{[A(C+D) + B(D-C)] + j[A(C-D) + B(C+D)]\} [A/\text{cm}^2]. \quad (35,53)$$

Dosadili jsme do (35,53) za A, B, C, D :

$$J = \frac{2\mathbf{H}_2}{a \left(\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a} \right)} \left\{ \left[\cosh \frac{z}{a} \cdot \cos \frac{z}{a} \left(\sinh \frac{d}{a} \cdot \cos \frac{d}{a} + \cosh \frac{d}{a} \cdot \sin \frac{d}{a} \right) - \sinh \frac{z}{a} \cdot \sin \frac{z}{a} \cdot \left(\sinh \frac{d}{a} \cdot \cos \frac{d}{a} - \cosh \frac{d}{a} \cdot \sin \frac{d}{a} \right) \right] + j \left[\cosh \frac{z}{a} \cdot \cos \frac{z}{a} \cdot \left(\sinh \frac{d}{a} \cdot \cos \frac{d}{a} - \cosh \frac{d}{a} \cdot \sin \frac{d}{a} \right) + \sinh \frac{z}{a} \cdot \sin \frac{z}{a} \left(\sinh \frac{d}{a} \cdot \cos \frac{d}{a} + \cosh \frac{d}{a} \cdot \sin \frac{d}{a} \right) \right] \right\} = \frac{\mathbf{H}_2}{a} [Re + jIm] [A/\text{cm}], \quad (35,54)$$

Protože uvažujeme harmonické vlnění, je $\mathbf{H}_2 = H_2 e^{j\omega t}$. Provedli jsme výpočet J dosazením do (35,54) pro případ, že $\frac{d}{a} = 1,0$, pro čas $\omega t = 0$. Určili jsme hodnoty J v bodech:

$$\frac{z}{a} = 0,0 \quad 0,25 \quad 0,50 \quad 0,75 \quad 1,00.$$

Výsledky jsou v tabulce 35,2 a na obr. 35,7.

Tabulka 35,2

$\frac{z}{a}$	$\frac{z}{a}$	Re	Im
0,0	1,0	1,35	+ j 1,54
0,25	0,75	1,035	+ j 0,22
0,50	0,50	1,003	+ j 0,08
0,75	0,25	0,974	+ j 0,26
1,00	0,0	0,934	+ j 0,32

Průběh okamžitých hodnot pro čas $\omega t = 0$ je dán průmětem J do svislé roviny, je tedy určen křivkou Re .

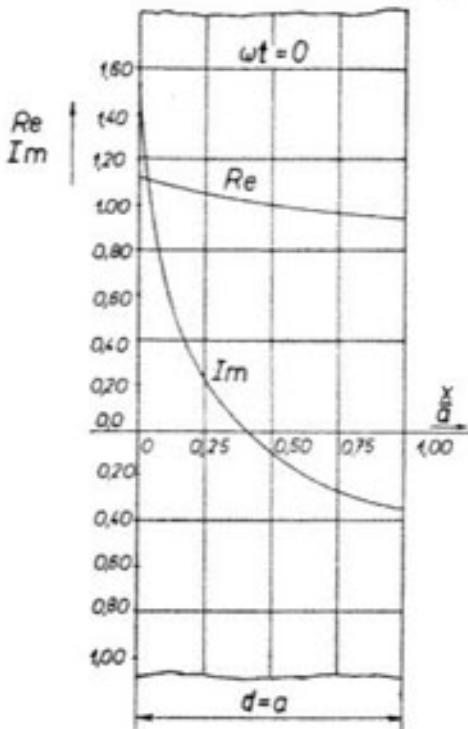
3.56. Měrný tepelný příkon σ v jednotce objemu

Průchodem indukovaných proudů vzniká ve stěně teplo. Měrný příkon v jednotce objemu je definován výrazem

$$\sigma = \frac{1}{2\gamma} J^2 = \frac{1}{2} \gamma E^2 [\text{W/cm}^3, \text{A/cm}^2, \text{V/cm}]. \quad (35.55)$$

Dosadme za J z (35.43):

$$\sigma = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{H_2}{a} \right)^2 \frac{\left(\cosh \frac{2z}{a} + \cos \frac{2z}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a} \right)} [\text{W/cm}^3]. \quad (35.56)$$



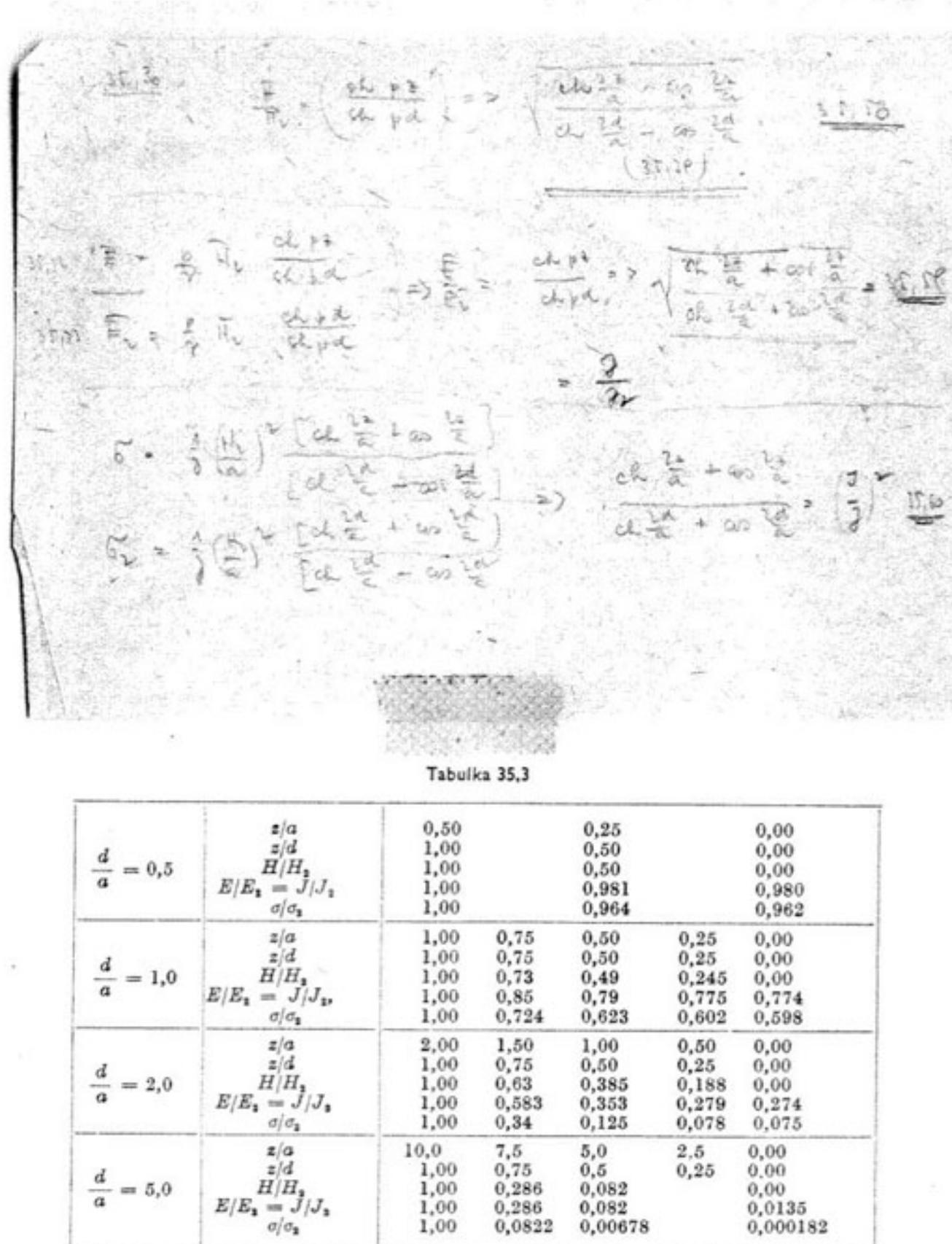
Měrný příkon v předním rozhraní je

$$\sigma_2 = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{H_2}{a} \right)^2 \frac{\left(\cosh \frac{2d}{a} + \cos \frac{2d}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a} \right)}. \quad (35.57)$$

Obr. 35.7. Průběh hustoty proudu ve stěně malé tloušťky.

3.57. Obecné grafické znázornění průběhů H, E, J, σ

V diagramu 35.3 jsme vyznačili průběh absolutní hodnoty H a E v měděné stěně o tloušťce 0,6 cm při kmitočtu 600 Hz. Výhodnější je však zavést diagramy, které mají obecnou platnost pro jakýkoliv materiál a kmitočet. Dosáhneme toho tak, že na svislou osu vynášíme absolutní hodnotu H nebo E v uvažovaném místě, dělenou hodnotou H_2 nebo E_2 v předním rozhraní. Na vodorovnou osu vynášíme vzdálenost x od předního rozhraní, resp. z od zadního rozhraní, dělenou tloušťkou stěny d . Každý diagram sestrojíme pro několik argumentů $\frac{d}{a}$.



Průběh okamžitých hodnot pro čas $\omega t = 0$ je dán průmětem J do svislé roviny, je tedy určen křivkou Re .

3,56. Měrný tepelný příkon σ v jednotce objemu

Průchodem indukovaných proudů vzniká ve stěně teplo. Měrný příkon v jednotce objemu je definován výrazem

$$\sigma = \frac{1}{2\gamma} J^2 = \frac{1}{2} \gamma E^2 [\text{W/cm}^3, \text{A/cm}^2, \text{V/cm}]. \quad (35,55)$$

Dosadme za J z (35,43):

$$\sigma = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{H_2}{a} \right)^2 \frac{\left(\cosh \frac{2z}{a} + \cos \frac{2z}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a} \right)} [\text{W/cm}^3]. \quad (35,56)$$

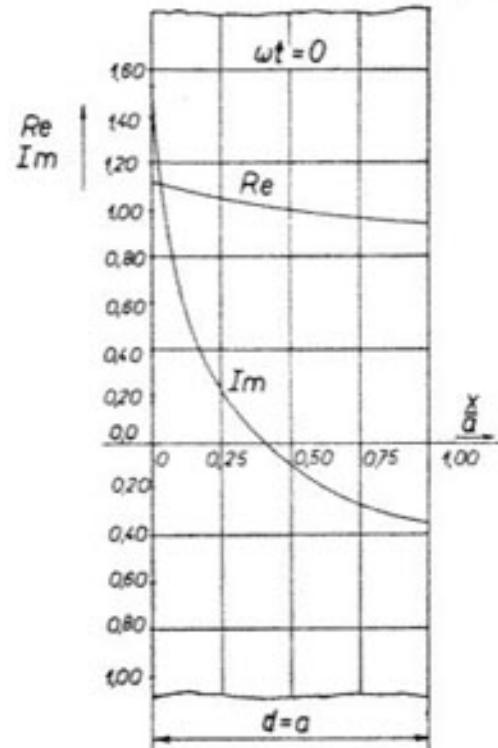
Měrný příkon v předním rozhraní je

$$\sigma_2 = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{H_2}{a} \right)^2 \frac{\left(\cosh \frac{2d}{a} + \cos \frac{2d}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a} \right)}. \quad (35,57)$$

Obr. 35,7. Průběh hustoty proudu ve stěně malé tloušťky.

3,57. Obecné grafické znázornění průběhů H, E, J, σ

V diagramu 35,3 jsme vyznačili průběh absolutní hodnoty H a E v měděné stěně o tloušťce 0,6 cm při kmitočtu 600 Hz. Výhodnější je však zavést diagramy, které mají obecnou platnost pro jakýkoliv materiál a kmitočet. Dosáhneme toho tak, že na svislou osu vynášíme absolutní hodnotu H nebo E v uvažovaném místě, dělenou hodnotou H_2 nebo E_2 v předním rozhraní. Na vodorovnou osu vynášíme vzdálenost x od předního rozhraní, resp. z od zadního rozhraní, dělenou tloušťkou stěny d . Každý diagram sestrojíme pro několik argumentů $\frac{d}{a}$.



Dosadme za H a H_2 z (35,39), za E a E_2 z (35,43), za σ a σ_2 z (35,56) a (35,57):

$$\frac{H}{H_2} = \sqrt{\frac{\cosh \frac{2z}{a} - \cos \frac{2z}{a}}{\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a}}}, \quad (35,58)$$

$$\frac{E}{E_2} = \frac{J}{J_2} = \sqrt{\frac{\cosh \frac{2z}{a} + \cos \frac{2z}{a}}{\cosh \frac{2d}{a} + \cos \frac{2d}{a}}}, \quad (35,59)$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_2} = \frac{\left(\cosh \frac{2z}{a} + \cos \frac{2z}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{2d}{a} + \cos \frac{2d}{a} \right)} = \left(\frac{J}{J_2} \right)^2. \quad (35,60)$$

Dosazením příslušných hodnot do výrazů (35,58) až (35,60) jsme vypočetli poměry $\frac{H}{H_2}$, $\frac{E}{E_2}$, $\frac{\sigma}{\sigma_2}$, pro body:

$$\frac{x}{d} = 0,00 - 0,50 - 1,00, \text{ pro argumenty } \frac{d}{a} = 0,5 - 1,0 - 2,0 - 5,0.$$

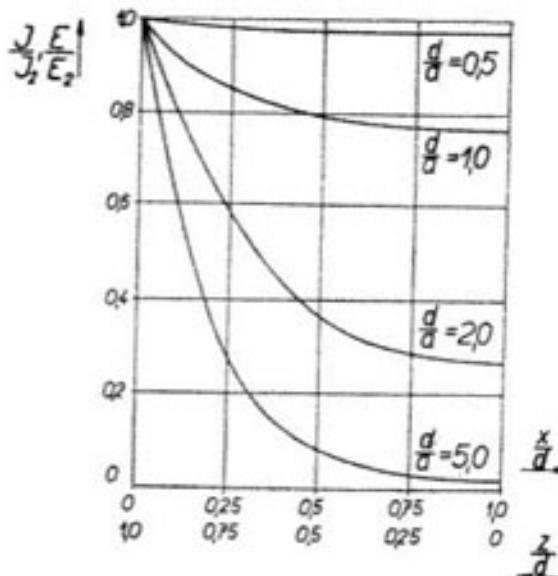
Výsledky jsou v tabulce 35,3 a v diagramech 35,8, 35,9, 35,10.

V diagramu 35,8 vidíme, že pro malé hodnoty poměru $\frac{d}{a}$ ubývá intenzity H magnetického pole od předního rozhraní téměř lineárně, pro větší hodnoty poměru $\frac{d}{a}$ se křivka průběhu prohýbá a pro $\frac{d}{a} > 6$ uvažovaná stěna přechází ve stěnu velké tloušťky a průběh je potom dán exponenciálou.

V diagramu 35,9 můžeme odcítit, že pro malé hodnoty poměru $\frac{d}{a}$ je hustota proudu J ve stěně téměř rovnoměrně rozložena. Pro rostoucí poměr $\frac{d}{a}$ (stěna přechází ve stěnu velké tloušťky) je průběh hustoty proudu opět exponenciálou.

Obdobný je průběh měrného příkonu σ podle diagramu 35,10.

Obr. 35,8. Obecný diagram pro průběh poměru H/H_2 ve stěně malé tloušťky, pro různé poměry d/a (tloušťka/hloubka vniku).



Obr. 35,9. Obdobný diagram jako 35,8, avšak pro poměr $E/E_2 = J/J_2$.

$$P_{21} = \int_{z=0}^{z=d} \sigma dz = \frac{1}{2\gamma} \int_0^d J^2 dz = \\ = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{H_2}{a} \right)^2 \frac{1}{\left(\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a} \right)} \left[\int_0^d \cosh \frac{2z}{a} dz + \int_0^d \cos \frac{2z}{a} dz \right] =$$

3.58. Určení množství tepla ve stěně

a) Z indukovaných proudů

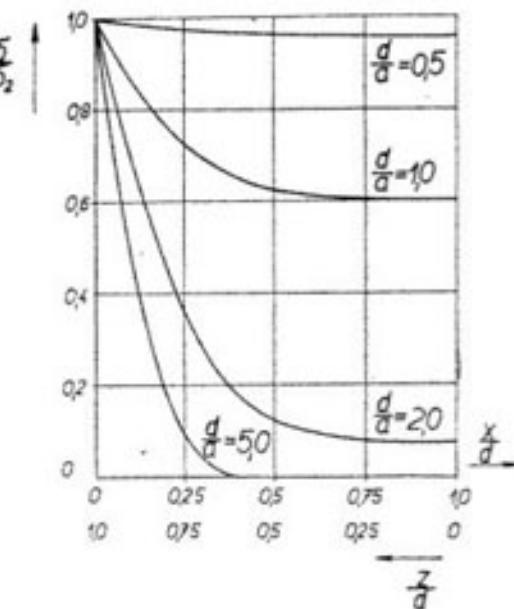
Stejnou úvahou jako v části 3,42 můžeme odvodit výraz P_{21} pro množství tepla, které se vyvine v hranolu, jehož základna (1×1) cm 2 je v předním rozhraní a jehož výška se rovná tloušťce stěny d , obr. 35,6.

$$= \frac{1}{2a\gamma} H_2^2 \frac{\left(\sinh \frac{2d}{a} + \sin \frac{2d}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a} \right)} [W/cm^2]. \quad (35,61)$$

Zvětšuje-li se tloušťka stěny $d \rightarrow \infty$, potom se výraz (35,61) zjednoduší. Např. pro $\left(\frac{2d}{a} \right) = 6,0$, je $\cosh \left(\frac{2d}{a} \right) \approx \sinh \left(\frac{2d}{a} \right) = 201,71$. Funkce $\sin \left(\frac{2d}{a} \right)$ a $\cos \left(\frac{2d}{a} \right)$ nemohou být větší než 1, můžeme proto goniometrické funkce zanedbat proti hyperbolickým. Zlomek má mezní hodnotu 1. Potom

$$P_{21\infty} = \frac{1}{2\gamma a} H_2^2 [W/cm^2]. \quad (35,62)$$

Stejný výraz (34,8) jsme odvodili pro množství tepla ve stěně velké tloušťky.



Obr. 35,10. Obecný diagram pro průběh poměru σ/σ_2 (měrný příkon v uvažovaném místě dělený měrným příkonem v rozhraní).

b) Z Poyntingova vektoru

Složka zářivého vektoru, která vstupuje předním rozhraním do vodivé stěny, je určena výrazem:

$$\mathbf{S}_2 = [\mathbf{E}_2 \mathbf{H}_2] [W/cm^2]. \quad (35,63)$$

Vektory \mathbf{E}_2 a \mathbf{H}_2 již známe, rovnice (35,30), (35,32). Jsou k sobě prostorově kolmé, takže jejich vektorový součin se rovná jejich číselnému součinu:

$$\mathbf{S}_2 = \mathbf{E}_2 \mathbf{H}_2 = \frac{p}{\gamma} \mathbf{H}_2^2 \frac{\cosh pd}{\sinh pd} = \\ = \frac{1}{a\gamma} \mathbf{H}_2^2 (1+j) \frac{\left(\cosh \frac{d}{a} \cdot \cos \frac{d}{a} + j \sinh \frac{d}{a} \cdot \sin \frac{d}{a} \right)}{\left(\sinh \frac{d}{a} \cdot \cos \frac{d}{a} + j \cosh \frac{d}{a} \cdot \sin \frac{d}{a} \right)} [W/cm^2]. \quad (35,64)$$

Označme opět jednotlivé části čitatele a jmenovatele znaky A , B , C , D .

$$\begin{aligned} & \text{C} + \text{D} = \frac{1}{2} \left(1 - \sin \frac{2d}{a} \right) + \frac{1}{2} \left(\sin \frac{2d}{a} - 1 \right) \\ & = \sin \frac{d}{a} \left(\cosh \frac{2d}{a} - \sinh \frac{d}{a} \right) + \sinh \frac{d}{a} \left(\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A(C + D) + B(D) = \cosh \frac{d}{a} \cos \frac{d}{a} \sinh \frac{d}{a} \cosh \frac{2d}{a} - \sinh \frac{d}{a} \sinh \frac{d}{a} \cosh \frac{d}{a} \cos \frac{d}{a} + \\ & + \sin \frac{d}{a} \sinh \frac{d}{a} \cosh \frac{d}{a} \sinh \frac{d}{a} + \cosh \frac{d}{a} \sinh \frac{d}{a} \cosh \frac{d}{a} \sinh \frac{d}{a} \\ & = \sinh \frac{d}{a} \cosh \frac{d}{a} \left(\cos \frac{d}{a} + \sinh \frac{d}{a} \right) + \sinh \frac{d}{a} \cosh \frac{d}{a} \left(\sin \frac{d}{a} - \cosh \frac{d}{a} \right) \\ & = \frac{1}{2} \left(\sinh \frac{2d}{a} + \sin \frac{2d}{a} \right) \end{aligned}$$

Podobně jako jsme z výrazu (34,11) odvodili efektivní hodnotu, můžeme stejnou úvahou dojít k výsledku

$$\operatorname{Re}(S_2)_{et} = \frac{1}{2a\gamma} H_2^2 \frac{\left(\sinh \frac{2d}{a} + \sin \frac{2d}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a} \right)} \quad [\text{W/cm}^2]. \quad (35,68)$$

Porovnáme (35,68) a (35,61) a zjistíme totožnost

$$\operatorname{Re}(S_2)_{et} \equiv P_{21}. \quad (35,69)$$

3,59. Impedance stěny malé tloušťky

Rozdělme stěnu řezy ve směru proudu na pruhy o šířce 1 cm. Impedanci části vyznačeného pruhu o délce 1 cm označme Z_{21} (obr. 35,6). Impedanci definujeme jako poměr intenzity elektrického pole E_2 v rozhraní k celkovému proudu I_{21} , který protéká uvažovaným pruhem.

$$\begin{aligned} Z_{21} &= \frac{E_2}{I_{21}} = \frac{p}{\gamma} H_2 \frac{\cosh pd}{\sinh pd} \frac{1}{H_2} = \\ &= \frac{1}{a\gamma} (1+j) \frac{\left(\cosh \frac{d}{a} \cdot \cos \frac{d}{a} + j \sinh \frac{d}{a} \cdot \sin \frac{d}{a} \right)}{\left(\sinh \frac{d}{a} \cdot \cos \frac{d}{a} + j \cosh \frac{d}{a} \cdot \sin \frac{d}{a} \right)} \end{aligned}$$

Tento výraz je obdobný s předchozím výrazem (35,64). Stejně dostaneme

$$Z_{21} = \frac{1}{a\gamma} \frac{\left(\sinh \frac{2d}{a} + \sin \frac{2d}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a} \right)} + j \frac{1}{a\gamma} \frac{\left(\sinh \frac{2d}{a} - \sin \frac{2d}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a} \right)} \quad [\Omega]$$

Reálná složka impedance značí činný odpor R_{21} stěny, imaginární značí reaktanci stěny ωL_{21} :

$$R_{21} = \frac{1}{a\gamma} \frac{\left(\sinh \frac{2d}{a} + \sin \frac{2d}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a} \right)} = \frac{1}{a\gamma} \varphi \left(\frac{2d}{a} \right) \quad [$$

$$\omega L_{21} = \frac{1}{a\gamma} \frac{\left(\sinh \frac{2d}{a} - \sin \frac{2d}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a} \right)} = \frac{1}{a\gamma} \psi \left(\frac{2d}{a} \right) \quad]$$

Abychom zkrátili psaní, zavedli jsme pro zlomky ve výrazu (35,73) pomocné znaky $\varphi \left(\frac{2d}{a} \right)$ a $\psi \left(\frac{2d}{a} \right)$.

Porovnáme-li výraz (35,61) s (35,72) a (35,51), můžeme napsat

$$P_{21} = \frac{1}{2} R_{21} I_{21}^2 = R_{21} I_{21,et}^2 \quad [\text{W/cm}^2], \quad \text{tedy}$$

Množství vyvinutého tepla P_{21} ve stěně můžeme také vyjádřit činného odporu R_{21} stěny a čtverce naindukovaného proudu $I_{21,et}^2$

Roste-li tloušťka stěny $d \rightarrow \infty$, potom činný a jalový odpor

$$R_{21,\infty} = \omega L_{21,\infty} = \frac{1}{a\gamma} \quad [\Omega/\text{cm}].$$

Stejný výraz jsme odvodili dříve pro stěnu velké tloušťky.

Potom

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_2 &= \frac{1}{a\gamma} \mathbf{H}_2^2 \frac{(1+j)(A+jB)(C-jD)}{C^2 + D^2} = \\ &= \frac{1}{a\gamma} \mathbf{H}_2^2 \frac{AC + BD + AD - BD}{C^2 + D^2} + j \frac{AC + BD + BC - AD}{C^2 + D^2}. \end{aligned} \quad (35,65)$$

Dosadíme-li za A, B, C, D , dostaneme výsledek

$$\mathbf{S}_2 = \frac{1}{a\gamma} \mathbf{H}_2^2 \frac{\left(\sinh \frac{2d}{a} + \sin \frac{2d}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a} \right)} + j \frac{1}{a\gamma} \mathbf{H}_2^2 \frac{\left(\sinh \frac{2d}{a} - \sin \frac{2d}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a} \right)} \quad [\text{W/cm}^2]. \quad (35,66)$$

První člen na pravé straně značí činnou složku toku elmg. energie, která se přemění v teplo. Druhý člen značí tok jalové elmg. energie.

Činná složka $\text{Re}(\mathbf{S}_2)$ je

$$\text{Re}(\mathbf{S}_2) = \frac{1}{a\gamma} \mathbf{H}_2^2 \frac{\left(\sinh \frac{2d}{a} + \sin \frac{2d}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a} \right)} \quad [\text{W/cm}^2]. \quad (35,67)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{21} &= \frac{I_{21}}{I_{21}} = \frac{\gamma}{\gamma} \mathbf{H}_2 \sinh pd \quad \mathbf{H}_2 = \\ &= \frac{1}{a\gamma} (1+j) \frac{\left(\cosh \frac{d}{a} \cdot \cos \frac{d}{a} + j \sinh \frac{d}{a} \cdot \sin \frac{d}{a} \right)}{\left(\sinh \frac{d}{a} \cdot \cos \frac{d}{a} + j \cosh \frac{d}{a} \cdot \sin \frac{d}{a} \right)} \end{aligned}$$

Tento výraz je obdobný s předchozím výrazem (35,64). Stejně dostaneme

$$\mathbf{Z}_{21} = \frac{1}{a\gamma} \frac{\left(\sinh \frac{2d}{a} + \sin \frac{2d}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a} \right)} + j \frac{1}{a\gamma} \frac{\left(\sinh \frac{2d}{a} - \sin \frac{2d}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a} \right)} \quad [Ω]$$

Reálná složka impedance značí činný odpor R_{21} stěny, ima značí reaktanci stěny ωL_{21} :

$$R_{21} = \frac{1}{a\gamma} \frac{\left(\sinh \frac{2d}{a} + \sin \frac{2d}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a} \right)} = \frac{1}{a\gamma} \varphi \left(\frac{2d}{a} \right)$$

$$\omega L_{21} = \frac{1}{a\gamma} \frac{\left(\sinh \frac{2d}{a} - \sin \frac{2d}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a} \right)} = \frac{1}{a\gamma} \psi \left(\frac{2d}{a} \right)$$

Abychom zkrátili psání, zavedli jsme pro zlomky ve výrazu (35,73) pomocné znaky $\varphi \left(\frac{2d}{a} \right)$ a $\psi \left(\frac{2d}{a} \right)$.

Porovnáme-li výraz (35,61) s (35,72) a (35,51), můžeme napsat

$$P_{21} = \frac{1}{2} R_{21} I_{21}^2 = R_{21} I_{21 \text{ eff}}^2 \quad [\text{W/cm}^2],$$

Množství vyvinutého tepla P_{21} ve stěně můžeme také vyjádřit činného odporu R_{21} stěny a čtverce naindukovánoho proudu I_{21}

Roste-li tloušťka stěny $d \rightarrow \infty$, potom činný a jalový odp

$$R_{21\infty} = \omega L_{21\infty} = \frac{1}{a\gamma} \quad [\Omega/\text{cm}].$$

Stejný výraz jsme odvodili dříve pro stěnu velké tloušťky.

Tento bod je vyznačen v diagramu 35,11. V tabulce 35,4 vidíme, že minimální odpor je

$$R_{21\min} = 0,918 R_{21\infty}. \quad (35,83)$$

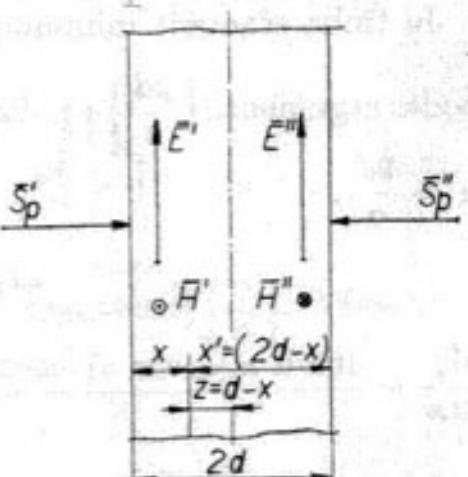
Minimální odpor $R_{21\min}$ stěny o tloušťce $d = 1,57a$ je o 8,2 % menší, než je odpor $R_{21\infty}$ stěny nekonečné (velmi veliké) tloušťky.

3,6 Rovinné vlnění dopadá z obou stran na rovnou vodivou stěnu a vyvolává proudy téže fáze

Toto uspořádání je schematicky vyznačeno na obr. 36,1. V teoretické úvaze předpokládáme, že stěna je rozprostřena ve směrech Y a Z do nekonečna.

Uvažovaný případ nastává při indukčním prohřívání rovné stěny, umístěné mezi dvěma rovnoběžnými vyzařujícími stěnami, kterými protéká proud téže velikosti i fáze. V praxi je to případ, kdy část rovné stěny prohříváme dvěma stejnými plochými cívky, umístěnými po obou stranách prohřívané stěny. Obě cívky jsou napájeny z téhož střídavého zdroje a jsou zapojeny paralelně nebo v sérii. Jiným příkladem je pásové vedení ze tří rovnoběžných pásů o malé vzájemné vzdálenosti a velké výšce, při čemž střední pás vede proud jedním směrem a oběma vnějšími pásky se proud vraci.

Rovinná vlnění téže velikosti i fáze z obou stran S'_p a S''_p vyvolávají ve stěně o tloušťce $2d$ intenzitu elektrického pole \mathbf{E}' a \mathbf{E}'' téhož smyslu. Vektor intenzity magnetického pole \mathbf{H}' , vyvolaný zářením S'_p z levé strany, je orientován z nákresny, vektor \mathbf{H}'' , buzený zářením S''_p , směruje do nákresny.



Obr. 36,1. Schematické uspořádání rovné vodivé stěny, na kterou dopadají stejná synchronní roviná vlnění z obou stran. Elektrické složky elmg. vlnění jsou v tomto případě v obou polovinách stěny téže fáze, složky magnetické jsou v protifázi.

3,61. Odvození výrazů pro výslednou intenzitu magnetického a elektrického pole ve stěně

Uvažujme zvlášť vektory \mathbf{E}' a \mathbf{H}' , vyvolané vlněním S'_p z levé strany, a vektory \mathbf{E}'' a \mathbf{H}'' , vybuzené vlněním S''_p z pravé strany. Výslednou intenzitu \mathbf{E} a \mathbf{H} v místě vzdáleném o x od

levého rozhraní a o $x' = (2d - x)$ od pravého rozhraní získáme čich vektorů. Dilčí vektory jsou dány výrazy, které jsme odchozí části 3,50, kdy jsme vyšetřovali dopad rovinného vlnění na stěnu malé tloušťky d [cm], výrazy (35,30) a (35,32).

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \mathbf{E}'' \quad [\text{V/cm}],$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}' - \mathbf{H}'' \quad [\text{A/cm}].$$

Z výrazu (35,32)

$$\checkmark \quad \mathbf{E}' = \frac{p}{\gamma} \mathbf{H}_2 \frac{\cosh p(2d - x)}{\sinh 2pd} \quad [\text{V/cm}],$$

$$\checkmark \quad \mathbf{E}'' = \frac{p}{\gamma} \mathbf{H}_2 \frac{\cosh p(2d - x')}{\sinh 2pd} = \mathbf{H}_2 \frac{p}{\gamma} \frac{\cosh px}{\sinh 2pd}$$

Výsledná intenzita \mathbf{E}

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \mathbf{E}'' = \frac{p}{\gamma} \mathbf{H}_2 \frac{\cosh p(2d - x) + \cosh px}{\sinh 2pd}$$

Upravme zlomek ve výrazu (36,5):

$$\begin{aligned} & \checkmark \quad \frac{\cosh p(2d - x) + \cosh px}{\sinh 2pd} = \\ & = \frac{\cosh 2pd \cdot \cosh px - \sinh 2pd \cdot \sinh px + \cosh px}{\sinh 2pd} \\ & = \cosh px \frac{(\cosh 2pd + 1)}{\sinh 2pd} - \sinh px = \cosh px \frac{2 \cosh^2 (pd)}{2 \sinh pd \cdot \cosh pd} \\ & = \frac{1}{\sinh pd} (\cosh px \cdot \cosh pd - \sinh px \cdot \sinh pd) = \frac{\cosh p}{\sinh p} \end{aligned}$$

Označme na obr. 36,1 vzdálenost uvažovaného bodu od rotační osy $z = (d - x)$. Protože funkce cosh kladného i záporného argumentu jsou symetrické, bude výsledná intenzita \mathbf{E} dána výrazem

$$\mathbf{E} = \frac{p}{\gamma} \mathbf{H}_2 \frac{\cosh pz}{\sinh pd} \quad [\text{V/cm}].$$

Zjistěme ještě výslednou intenzitu \mathbf{H} za použití výrazu (35,30)

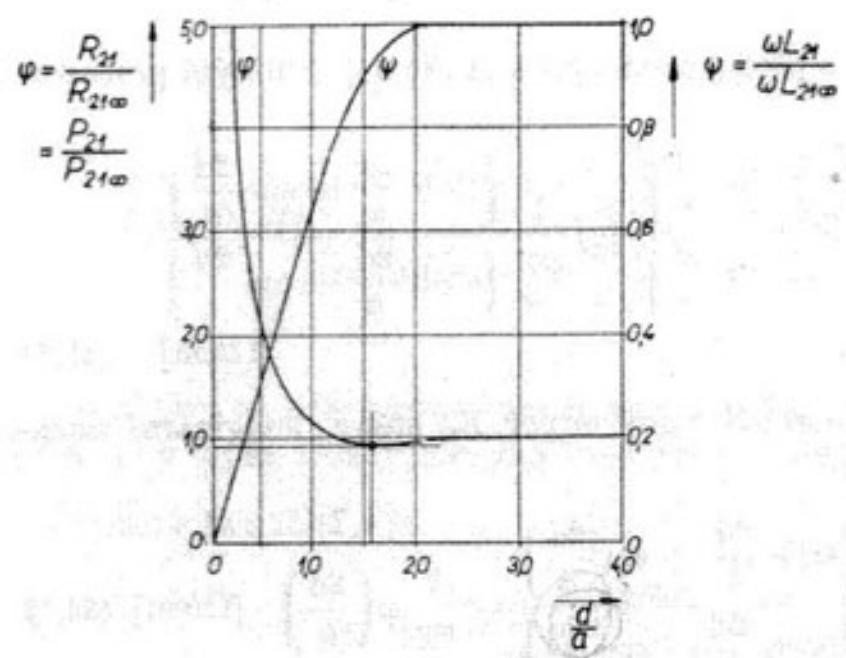
$$\mathbf{H}' = \mathbf{H}_2 \frac{\sinh p(2d - x)}{\sinh 2pd} \quad [\text{A/cm}],$$

$$\mathbf{H}'' = \mathbf{H}_2 \frac{\sinh px}{\sinh 2pd} \quad [\text{A/cm}],$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}' - \mathbf{H}'' = \mathbf{H}_2 \frac{\sinh p(2d - x) - \sinh px}{\sinh 2pd}$$

Použijme výrazů (35,72), (35,73) a (35,75), utvořme poměry

$$\frac{R_{21}}{R_{21\infty}} = \frac{\left(\sinh \frac{2d}{a} + \sin \frac{2d}{a}\right)}{\left(\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a}\right)} = \varphi\left(\frac{2d}{a}\right), \quad (35,76)$$



Obr. 35,11. Průběh činného odporu a reaktance vodivé stěny v závislosti na poměru d/a .

$$\frac{\omega L_{21}}{\omega L_{21\infty}} = \frac{\left(\sinh \frac{2d}{a} - \sin \frac{2d}{a}\right)}{\left(\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a}\right)} = \psi\left(\frac{2d}{a}\right). \quad (35,77)$$

Vypočetli jsme průběh funkcí φ a ψ pro různé argumenty $\left(\frac{d}{a}\right)$. Výsledky jsou v tabulce 35,4 a v grafu 35,11.

Tabulka 35,4

$\frac{d}{a}$	$\varphi\left(\frac{2d}{a}\right)$	$\psi\left(\frac{2d}{a}\right)$
0,10	10,00	0,05
0,25	4,00	0,167
0,50	2,01	0,333
0,75	1,37	0,490
1,00	1,086	0,652
1,25	0,96	—
1,50	0,92	0,893
1,57	0,918	—
1,75	0,925	—
2,00	0,95	1,004
3,00	0,999	1,006
5,0	1,00	1,00
10,0	1,00	1,00

Utvořme poměr P_{21} a $P_{21\infty}$, výrazy (35,61) a (35,62):

$$\frac{P_{21}}{P_{21\infty}} = \varphi\left(\frac{2d}{a}\right) = \frac{R_{21}}{R_{21\infty}}.$$

Křivka $\varphi\left(\frac{2d}{a}\right)$ v diagramu 35,11 značí současně poměr $\frac{R_{21}}{R_{21\infty}}$ a

Optimální tloušťka stěny

Optimální tloušťkou rozumíme takovou tloušťku stěny, při které pro střídavý proud, a tedy i ztráty ve stěně minimální.

Vyjdeme z výrazu (35,72) pro odpor stěny:

$$R_{21} = \frac{1}{a\gamma} \varphi\left(\frac{2d}{a}\right) = \frac{1}{a\gamma} \frac{\left(\sinh \frac{2d}{a} + \sin \frac{2d}{a}\right)}{\left(\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a}\right)}$$

Je třeba stanovit minimum funkce $\varphi\left(\frac{2d}{a}\right)$. Utvořme derivaci podle argumentu $\left(\frac{2d}{a}\right)$ a položme ji rovnou nule. Označme argument $\alpha = \frac{2d}{a}$.

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) &= \frac{\sinh \alpha + \sin \alpha}{\cosh \alpha - \cos \alpha}, \\ \frac{d\varphi}{d\alpha} &= \frac{(\cosh \alpha + \cos \alpha)(\cosh \alpha - \cos \alpha) - (\sinh \alpha + \sin \alpha)(\sinh \alpha - \sin \alpha)}{(\cosh \alpha - \cos \alpha)^2} \\ &= \frac{2 \sinh \alpha \cdot \sin \alpha}{\cosh \alpha - \cos \alpha}^2 \end{aligned}$$

Hledáme maxima a minima funkce φ , položme derivaci rovnu nule, tedy $2 \sinh \alpha \cdot \sin \alpha = 0$, z toho

$$\begin{aligned} \sinh \alpha &= 0, \quad \alpha = 0, \\ \sin \alpha &= 0, \quad \alpha = 0, \pi, 2\pi, \dots k\pi. \end{aligned}$$

Pro $\alpha = 0, 2\pi, 4\pi$ atd. má funkce maxima, pro $\alpha = \pi, 3\pi$, atd. má minima.

První minimum je pro

$$\alpha = \frac{2d}{a} = \pi, \quad \frac{d}{a} = \frac{\pi}{2} = 1,57.$$

Tento bod je vyznačen v diagramu 35,11. V tabulce 35,4 vidíme, že minimální odpor je

$$R_{21\min} = 0,918 R_{21\infty}. \quad (35,83)$$

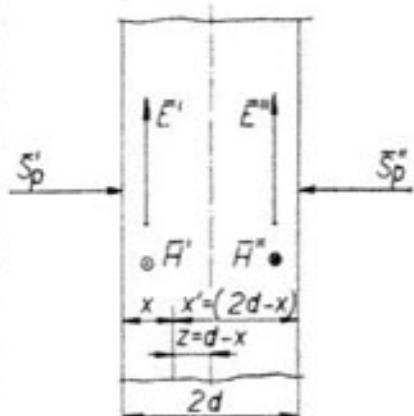
Minimální odpor $R_{21\min}$ stěny o tloušťce $d = 1,57a$ je o 8,2 % menší, než je odpor $R_{21\infty}$ stěny nekonečné (velmi veliké) tloušťky.

3,6 Rovinné vlnění dopadá z obou stran na rovnou vodivou stěnu a vyvolává proudy téže fáze

Toto uspořádání je schematicky vyznačeno na obr. 36,1. V teoretické úvaze předpokládáme, že stěna je rozprostřena ve směrech Y a Z do nekonečna.

Uvažovaný případ nastává při indukčním prohřívání rovné stěny, umístěné mezi dvěma rovnoběžnými vyzařujícími stěnami, kterými protéká proud téže velikosti i fáze. V praxi je to případ, kdy část rovné stěny prohříváme dvěma stejnými plochými cívkami, umístěnými po obou stranách prohřívané stěny. Obě cívky jsou napájeny z téhož střídavého zdroje a jsou zapojeny paralelně nebo v sérii. Jiným příkladem je pásové vedení ze tří rovnoběžných pásů o malé vzájemné vzdálenosti a velké výšce, při čemž střední pás vede proud jedním směrem a oběma vnějšími pásky se proud vraci.

Rovinná vlnění téže velikosti i fáze z obou stran S'_p a S''_p vyvolávají ve stěně o tloušťce $2d$ intenzitu elektrického pole E' a E'' téhož smyslu. Vektor intenzity magnetického pole H' , vyvolaný zářením S'_p z levé strany, je orientován z nákresny, vektor H'' , buzený zářením S''_p , směruje do nákresny.



Obr. 36,1. Schematické uspořádání rovné vodivé stěny, na kterou dopadají stejná synchronní roviná vlnění z obou stran. Elektrické složky elmg. vlnění jsou v tomto případě v obou polovinách stěny téže fáze, složky magnetické jsou v protifázi.

3,61 Odvození výrazů pro výslednou intenzitu magnetického a elektrického pole ve stěně

Uvažujme zvlášť vektory E' a H' , vyvolané vlněním S'_p z levé strany, a vektory E'' a H'' , vybuzené vlněním S''_p z pravé strany. Výslednou intenzitu \mathbf{E} a \mathbf{H} v místě vzdáleném o x od

levého rozhraní a o $x' = (2d - x)$ od pravého rozhraní získáme sečtením dílčích vektorů. Dílčí vektory jsou dány výrazy, které jsme odvodili v předchozí části 3,50, kdy jsme vyšetřovali dopad rovinného vlnění z jedné strany na stěnu malé tloušťky d [cm], výrazy (35,30) a (35,32).

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \mathbf{E}'' \quad [\text{V/cm}], \quad (36,1)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}' - \mathbf{H}'' \quad [\text{A/cm}]. \quad (36,2)$$

Z výrazu (35,32)

$$E' = \frac{p}{\gamma} H_2 \frac{\cosh p(2d - x)}{\sinh 2pd} \quad [\text{V/cm}], \quad (36,3)$$

$$E'' = \frac{p}{\gamma} H_2 \frac{\cosh p(2d - x')}{\sinh 2pd} = H_2 \frac{p}{\gamma} \frac{\cosh px}{\sinh 2pd} \quad [\text{V/cm}]. \quad (36,4)$$

Výsledná intenzita \mathbf{E}

$$E = E' + E'' = \frac{p}{\gamma} H_2 \frac{\cosh p(2d - x) + \cosh px}{\sinh 2pd} \quad [\text{V/cm}]. \quad (36,5)$$

Upravme zlomek ve výrazu (36,5):

$$\begin{aligned} & \cosh p(2d - x) + \cosh px = \\ & = \frac{\cosh 2pd \cdot \cosh px - \sinh 2pd \cdot \sinh px + \cosh px}{\sinh 2pd} = \\ & = \cosh px \frac{(\cosh 2pd + 1)}{\sinh 2pd} - \sinh px = \cosh px \frac{2 \cosh^2 (pd)}{2 \sinh pd \cdot \cosh pd} - \sinh px = \\ & = \frac{1}{\sinh pd} (\cosh px \cdot \cosh pd - \sinh px \cdot \sinh pd) = \frac{\cosh p(x - d)}{\sinh pd}. \end{aligned} \quad (36,6)$$

Označme na obr. 36,1 vzdálenost uvažovaného bodu od roviny symetrie $z = (d - x)$. Protože funkce cosh kladného i záporného argumentu jsou stejné, bude výsledná intenzita \mathbf{E} dána výrazem

$$E = \frac{p}{\gamma} H_2 \frac{\cosh pz}{\sinh pd} \quad [\text{V/cm}]. \quad (36,7)$$

Zjistěme ještě výslednou intenzitu \mathbf{H} za použití výrazu (35,30):

$$H' = H_2 \frac{\sinh p(2d - x)}{\sinh 2pd} \quad [\text{A/cm}], \quad (36,8)$$

$$H'' = H_2 \frac{\sinh px}{\sinh 2pd} \quad [\text{A/cm}], \quad (36,9)$$

$$H = H' - H'' = H_2 \frac{\sinh p(2d - x) - \sinh px}{\sinh 2pd} \quad [\text{A/cm}]. \quad (36,10)$$

Upravme zlomek ve výrazu (36,10):

$$\begin{aligned} & \frac{\sinh p(2d-x) - \sinh px}{\sinh 2pd} = \\ & = \frac{\sinh 2pd \cdot \cosh px - \cosh 2pd \cdot \sinh px - \sinh px}{\sinh 2pd} = \\ & = \cosh px - \sinh px \frac{(\cosh 2pd + 1)}{\sinh 2pd} = \cosh px - \sinh px \frac{2 \cosh^2(pd)}{2 \sinh pd \cdot \cosh pd} = \\ & = \frac{1}{\sinh pd} [\cosh px \cdot \sinh pd - \sinh px \cdot \cosh pd]. \quad (36,11) \end{aligned}$$

$$H = H_2 \frac{\sinh (pd-x)}{\sinh pd} = H_2 \frac{\sinh pz}{\sinh pd} \quad [\text{A/cm}]. \quad (36,12)$$

Výrazy (36,7) a (36,12) pro výslednou intenzitu E a H jsou přesně stejné jako dříve odvozené výrazy (35,32) a (35,30) pro intenzitu E a H ve stěně malé tloušťky, při dopadu vlnění z jedné strany. Odvozené výsledky platí za dříve uvedeného předpokladu (35,11), který je zpravidla splněn:

$$\frac{120\pi ay}{1+j} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \gg 1.$$

Odvozené výsledky znamenají, že prostorové rozložení elektrického i magnetického pole [v každé polovině stěny] o tloušťce $2d$ při dopadu stejných vlnění z obou stran je přesně stejné jako při dopadu téhož vlnění z jedné strany na stěnu poloviční tloušťky d .

V důsledku toho není již třeba v uvažovaném případě znova odvozovat absolutní hodnoty E a H , celkový naindukováný proud I_{21} , množství vyvinutého tepla ve stěně, impedanci stěny, atd. Všechny tyto veličiny budou v každé polovině stěny o celkové tloušťce $2d$ přesně stejné jako dříve odvozené hodnoty pro stěnu o poloviční tloušťce d a můžeme jich tedy přímo použít.

3,62. Absolutní hodnoty intenzity H a E ,

Dříve odvozené výrazy (35,39) a (35,43):

$$H = H_2 \sqrt{\frac{\cosh \frac{2z}{a} - \cos \frac{2z}{a}}{\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a}}} \quad [\text{A/cm}], \quad (36,13)$$

$$E = \frac{1}{\gamma} J = \frac{\sqrt{2}}{a\gamma} H_2 \sqrt{\frac{\cosh \frac{2z}{a} + \cos \frac{2z}{a}}{\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a}}} \quad [\text{V/cm}, \text{ A/cm}^2]. \quad (36,14)$$

Hodnoty v obou rozhraních:

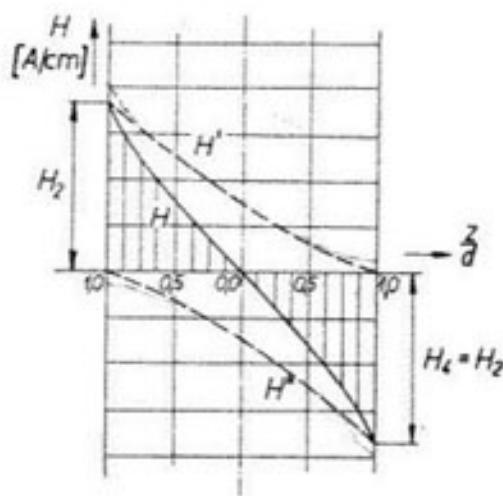
$$x = 0, z = \pm d, H = H_2 = H_4 \quad [\text{A/cm}], \quad (36,15)$$

$$E = E_2 = E_4 = \frac{\sqrt{2}}{a\gamma} H_2 \sqrt{\frac{\cosh \frac{2d}{a} + \cos \frac{2d}{a}}{\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a}}} \quad [\text{V/cm}]; \quad (36,16a)$$

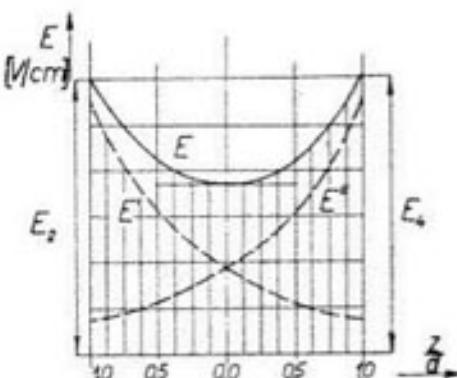
$$x = d, z = 0, H = 0,$$

$$E = \frac{1}{a\gamma} H_2 \sqrt{\frac{2}{\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a}}} \quad [\text{V/cm}]. \quad (36,16b)$$

Graficky je průběh H a E vyznačen na obr. 36,2 a 36,3.



Obr. 36,2. Průběh magnetické složky ve stěně (H' , H'') jsou vybuzeny dopadem vlnění z levé a z pravé strany, H je výsledná.



Obr. 36,3. Průběh elektrické složky ve stěně.

3,63. Měrný příkon σ v jednotce objemu

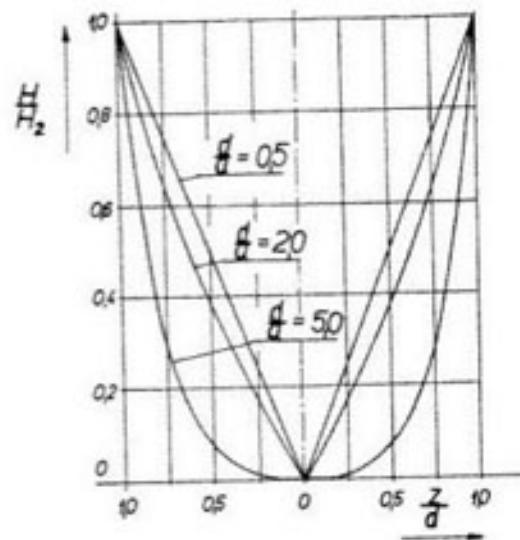
Dříve odvozený výraz (35,56):

$$\sigma = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{H_2}{a} \right)^2 \frac{\left(\cosh \frac{2z}{a} + \cos \frac{2z}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a} \right)} \quad [\text{W/cm}^3]. \quad (36,17)$$

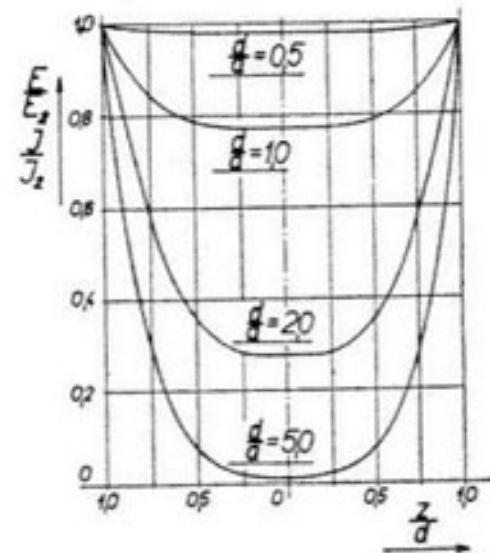
V obou rozhraních:

$$x = 0, z = \pm d : \sigma_2 = \sigma_4 = \frac{1}{\gamma} \cdot \left(\frac{H_2}{a} \right)^2 \frac{\cosh \frac{2d}{a} + \cos \frac{2d}{a}}{\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a}}$$

[W/cm²]. (36,17a)



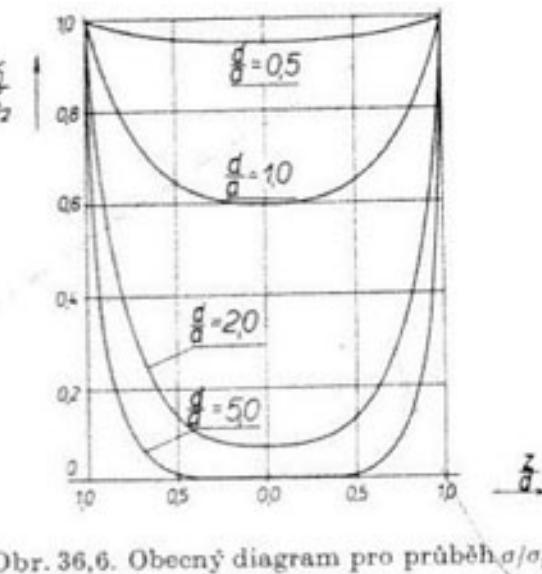
Obr. 36.4. Obecný diagram pro průběh H/H_2 při dopadu vlnění z obou stran.



Obr. 36.5. Obecný diagram pro průběh $E/E_2 = J/J_2$ při dopadu vlnění z obou stran.

3.64. Obecné grafické zobrazení hodnot H, E, J, σ

Na svislou osu vynášíme opět poměr $\frac{H}{H_2}, \frac{E}{E_2}, \frac{J}{J_2}, \frac{\sigma}{\sigma_2}$, na vodorovnou osu poměr $\frac{z}{d}$. Vypočetli jsme příslušné hodnoty pro argumenty $\frac{d}{a} = 0,5 - 1,0 - 2,0 - 5,0$. Výsledky jsou v diagramech 36.4, 36.5, 36.6.



Obr. 36.6. Obecný diagram pro průběh σ/σ_2 .

$$\frac{H}{H_2} = \sqrt{\frac{\cosh \frac{2z}{a} - \cos \frac{2z}{a}}{\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a}}}, \quad (36,18)$$

$$\frac{E}{E_2} = \frac{J}{J_2} = \sqrt{\frac{\cosh \frac{2z}{a} + \cos \frac{2z}{a}}{\cosh \frac{2d}{a} + \cos \frac{2d}{a}}}, \quad (36,19)$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_2} = \left(\frac{J}{J_2} \right)^2. \quad (36,20)$$

Tyto diagramy jsou pro každou polovinu stěny totožné s diagramy 35,8, 35,9, 35,10 pro stěnu s vlněním z jedné strany.

3.65. Celkový proud, vybuzený v každé polovině stěny

Dříve odvozený výraz (35,51):

$$I_{21} = -H_2 \quad [\text{A}/\text{cm}]. \quad (36,21)$$

3.66. Množství tepla, které se vydene v každé polovině stěny

Dříve odvozený výraz (35,61), (35,68):

$$P_{21} = \operatorname{Re}(S_2)_{et} = \frac{1}{2a\gamma} H_2^2 \frac{\left(\sinh \frac{2d}{a} + \sin \frac{2d}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a} \right)} \quad [\text{W}/\text{cm}^2]. \quad (36,22)$$

3.67. Impedance jedné poloviny stěny

Dříve odvozený výraz (35,71):

$$Z_{21} = R_{21} + j\omega L_{21} \quad [\Omega \cdot \text{cm}]. \quad (36,23)$$

$$R_{21} = \frac{1}{a\gamma} \frac{\left(\sinh \frac{2d}{a} + \sin \frac{2d}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a} \right)} = \frac{1}{a\gamma} \varphi \left(\frac{2d}{a} \right) \quad [\Omega \cdot \text{cm}]. \quad (36,24)$$

$$\omega L_{21} = \frac{1}{a\gamma} \frac{\left(\sinh \frac{2d}{a} - \sin \frac{2d}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a} \right)} = \frac{1}{a\gamma} \psi \left(\frac{2d}{a} \right) \quad [\Omega \cdot \text{cm}]. \quad (36,25)$$

Roste-li poloviční tloušťka stěny $d \rightarrow \infty$, potom

$$R_{21\infty} = \omega L_{21\infty} = \frac{1}{a\gamma} [\Omega \cdot \text{cm}]. \quad (36.26)$$

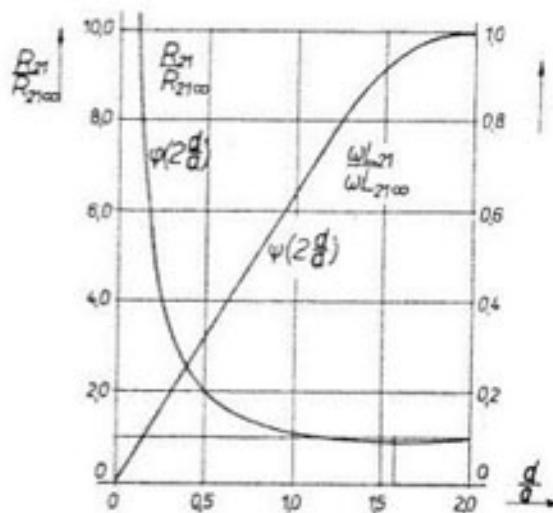
Pro grafické znázornění utvořme poměry

$$\frac{R_{21}}{R_{21\infty}} = \frac{P_{21}}{P_{21\infty}} = \varphi\left(\frac{2d}{a}\right), \quad (36.27)$$

$$\frac{\omega L_{21}}{\omega L_{21\infty}} = \psi\left(\frac{2d}{a}\right). \quad (36.28)$$

Odvozené výsledky jsou v diagramu 36,7.

Tento obrázek je totožný s dřívějším obr. 35,11. Stěna o tloušťce $2d$, na kterou dopadá uvažované vlnění z obou stran, má minimální odpor, jestliže se tloušťka stěny $2d$ rovná π -násobku hloubky vniku:



Obr. 36,7. Průběh činného odporu a reaktance ve stěně, při dopadu vlnění z obou stran.

$$2d = \pi a = 3,14 a \quad [\text{cm}]. \quad (36.29)$$

3.7. Rovinné vlnění dopadá z obou stran na rovnou vodivou stěnu a vyvolává proudy opačné fáze

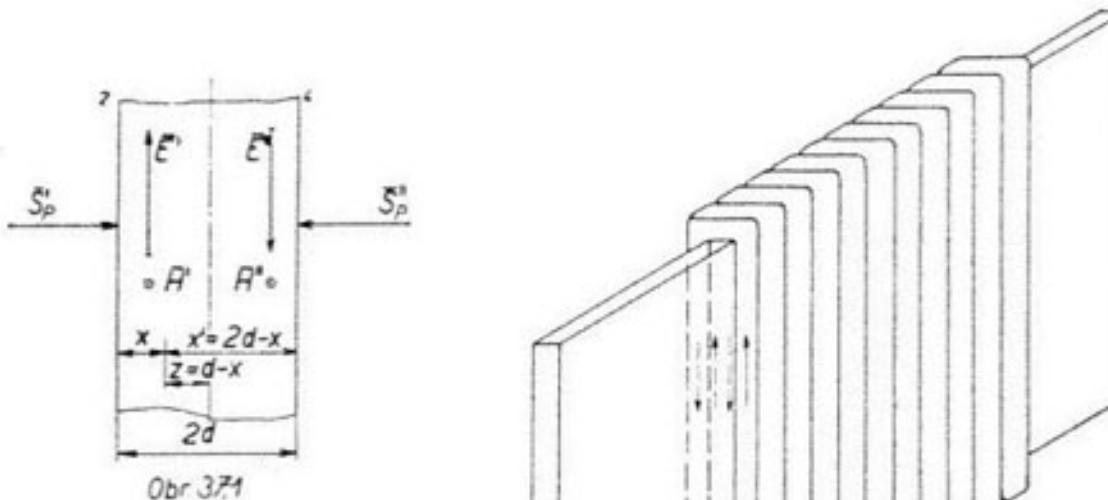
Toto uspořádání je schematicky vyznačeno na obr. 37,1.

Uvažovaný případ nastává při indukčním prohřívání rovné stěny umístěné mezi dvěma rovnoběžnými vyzařujícími stěnami, kterými protékají proudy téže velikosti, avšak opačné fáze. V praxi je to např. indukční prohřívání vodivého pásu v ploché cívce, schematicky podle obr. 37,2.

Obě protější stěny ploché cívky vyzařují synchronní rovinné vlnění téže velikosti. Po dopadu obou vlnění na vodivou stěnu o tloušťce $2d$ vzniknou ve stěně indukované proudy téže velikosti, fázově pootočené proti sobě o úhel π . Z orientace zářivých vektorů S_p' a S_p'' z obou stran dostaneme i smysl vektorů H' a H'' . Výsledný vektor H má v obou polovinách stěny tentýž smysl, na obr. 37,1 vystupuje z nákresny.

3.7.1. Výrazy pro výslednou intenzitu magnetického a elektrického pole ve stěně

Uvažujme zvláště vektory E' a H' , vyvolané vlněním S_p' z levé strany, a vektory E'' a H'' , vybuzené vlněním S_p'' z pravé strany. Výslednou intenzitu



Obr. 37,1. Schematické uspořádání rovné vodivé stěny, na kterou dopadají stejná synchronní rovinná vlnění z obou stran. Elektrické složky elmg. vlnění jsou v tomto případě v obou polovinách stěny v protifázi, složky magnetické jsou též fáze.

Obr. 37,2. Uspořádání, při kterém nastává dopad elmg. vlnění podle schematického obr. 37,1.

H a E v místě ve vzdálenosti x od povrchu dostaneme sečtením dílčích vektorů.

$$E = E' - E'' = \frac{1}{\gamma} (J' - J'') \quad [\text{V/cm}, \text{A/cm}^2], \quad (37.1)$$

$$H = H' + H'' \quad [\text{A/cm}]. \quad (37.2)$$

Dílčí vektory jsou dány výrazy, které jsme určili v části 3.50, kdy jsme se zabývali dopadem elmg. vlnění z jedné strany na stěnu o tloušťce d [cm], výrazy (35,30) a (35,32). Souřadnice $x' = (2d - x)$.

$$E = \frac{p}{\gamma} H_z \frac{\cosh p(2d - x)}{\sinh 2pd} \quad [\text{V/cm}], \quad (37.3)$$

$$E'' = \frac{p}{\gamma} H_z \frac{\cosh p(2d - x')}{\sinh 2pd} = \frac{p}{\gamma} H_z \frac{\cosh px}{\sinh 2pd} \quad [\text{V/cm}], \quad (37.4)$$

$$E = E' - E'' = \frac{p}{\gamma} H_2 \frac{\cosh p(2d-x) - \cosh px}{\sinh 2pd} \quad [\text{V/cm}] \quad (37,5)$$

Upravme zlomek ve výraze (37,5).

$$\begin{aligned} & \frac{\cosh 2pd \cdot \cosh px - \sinh 2pd \cdot \sinh px - \cosh px}{\sinh 2pd} = \\ & = \cosh px \frac{(\cosh 2pd - 1)}{\sinh 2pd} - \sinh px = \\ & = \cosh px \frac{2\sinh^2(pd) + 1 - 1}{2 \sinh pd \cdot \cosh pd} - \sinh px = \\ & = \frac{1}{\cosh pd} (\cosh px \cdot \sinh pd - \sinh px \cdot \cosh pd) = \frac{\sinh p(d-x)}{\cosh pd}, \\ & E = \frac{p}{\gamma} H_2 \frac{\sinh pz}{\cosh pd} \quad [\text{V/cm}]. \end{aligned} \quad (37,6) \quad (37,7)$$

Označili jsme $z =$
symetrie stěny.

Určeme ještě výsl.

$$\begin{aligned} \cosh(z+\beta) &= \cosh z \cosh \beta + \sinh z \sinh \beta \\ \cosh(z-\beta) &= \cosh z \cosh \beta - \sinh z \sinh \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sinh(z+\beta) &= \sinh z \cosh \beta + \cosh z \sinh \beta \\ \sinh(z-\beta) &= \sinh z \cosh \beta - \cosh z \sinh \beta \end{aligned}$$

H'

$$H = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{1}{H_2} \frac{\sinh(p(d-x)) + \cosh px}{\cosh 2pd}$$

Upravme zlomek

$$\begin{aligned} \frac{\sinh z}{\cosh z} &= \frac{1}{H_2} \left[\frac{\sinh(p(d-x)) + \cosh px}{\cosh 2pd} \right] = \\ &= \frac{1}{H_2} \left[\frac{H_2 \cosh px - H_2 \cosh(p(2d-x))}{\cosh 2pd} \right] = \frac{1}{H_2} \left[\cosh px - \frac{2 \sinh px \cosh pd}{\cosh 2pd} \right] = \\ &= \frac{1}{H_2} \left[\cosh px - \frac{\sinh px \cosh pd}{\cosh pd} \right] = \frac{1}{H_2} \left[\frac{1}{\cosh pd} (\cosh pd \cosh px - \sinh px \sinh pd) \right] = \\ &= \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\cosh p(d-x)}{\cosh pd} = \frac{1}{H_2} \frac{\cosh p +}{\cosh pd} \end{aligned}$$

Výrazy (37,7) a (37,6) jsou výsledkem upravení zlomku pro tloušťku stěny $2d$.

3.72. Odvození absolutní hodnoty E a H

$$\begin{aligned} E &= \frac{p}{\gamma} H_2 \frac{\sinh pz}{\cosh pd} = \frac{p}{\gamma} H_2 \frac{\left(\sinh \frac{z}{a} \cdot \cos \frac{z}{a} + j \cosh \frac{z}{a} \cdot \sin \frac{z}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{d}{a} \cdot \cos \frac{d}{a} + j \sinh \frac{d}{a} \cdot \sin \frac{d}{a} \right)} = \\ &= \frac{p}{\gamma} H_2 \frac{A + jB}{C + jD} \quad [\text{V/cm}], \end{aligned} \quad (37,13)$$

$$E = \frac{\sqrt{2}}{a\gamma} H_2 \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2}} \quad [\text{V/cm}], \quad (37,14)$$

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 &= \sinh^2 \left(\frac{z}{a} \right) \cdot \cos^2 \left(\frac{z}{a} \right) + \cosh^2 \left(\frac{z}{a} \right) \cdot \sin^2 \left(\frac{z}{a} \right) = \sinh^2 \left(\frac{z}{a} \right) + \sin^2 \left(\frac{z}{a} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\cosh \frac{2z}{a} - \cos \frac{2z}{a} \right), \end{aligned} \quad (37,15)$$

$$\begin{aligned} C^2 + D^2 &= \cosh^2 \left(\frac{d}{a} \right) \cdot \cos^2 \left(\frac{d}{a} \right) + \sinh^2 \left(\frac{d}{a} \right) \cdot \sin^2 \left(\frac{d}{a} \right) = \\ &= \left[1 + \sinh^2 \left(\frac{d}{a} \right) \right] \left[1 - \sin^2 \left(\frac{d}{a} \right) \right] + \sinh^2 \left(\frac{d}{a} \right) \cdot \sin^2 \left(\frac{d}{a} \right) = \\ &= \sinh^2 \left(\frac{d}{a} \right) + \cos^2 \left(\frac{d}{a} \right) = \cosh^2 \left(\frac{d}{a} \right) - \sin^2 \left(\frac{d}{a} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\cosh \frac{2d}{a} + 1 \right) - \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2d}{a} \right) = \frac{1}{2} \left(\cosh \frac{2d}{a} + \cos \frac{2d}{a} \right), \end{aligned} \quad (37,16)$$

$$E = \frac{\sqrt{2}}{a\gamma} H_2 \sqrt{\frac{\cosh \frac{2z}{a} - \cos \frac{2z}{a}}{\cosh \frac{2d}{a} + \cos \frac{2d}{a}}} \quad [\text{V/cm}] \quad (37,17)$$

pro obě rozhraní: $z = \pm d$,

$$E = E_2 = E_4 = \frac{\sqrt{2}}{a\gamma} H_2 \sqrt{\frac{\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a}}{\cosh \frac{2d}{a} + \cos \frac{2d}{a}}} \quad [\text{V/cm}] \quad (37,18)$$

pro

$$z = 0, \quad E = 0. \quad (37,18a)$$

Příklad 37,1

Stanovit průběh hustoty proudu $J = \gamma E$ ve stěně z mědi, tloušťky $2d = 0,6$ cm, $\gamma = 5,5 \cdot 10^6 \text{ S} \cdot \text{cm}^{-1}$, $f = 1000 \text{ Hz}$, intenzita dopadajícího vlnění $H_p = 500 \text{ A/cm}$.

$$E = E' - E'' = \frac{p}{\gamma} H_2 \frac{\cosh p(2d-x) - \cosh px}{\sinh 2pd} \quad [\text{V/cm}], \quad (37,5)$$

Upravme zlomek ve výrazu (37,5).

$$\begin{aligned} & \frac{\cosh 2pd \cdot \cosh px - \sinh 2pd \cdot \sinh px - \cosh px}{\sinh 2pd} = \\ & = \cosh px \frac{(\cosh 2pd - 1)}{\sinh 2pd} - \sinh px = \\ & = \cosh px \frac{2 \sinh^2(pd) + 1 - 1}{2 \sinh pd \cdot \cosh pd} - \sinh px = \\ & = \frac{1}{\cosh pd} (\cosh px \cdot \sinh pd - \sinh px \cdot \cosh pd) = \frac{\sinh p(d-x)}{\cosh pd}, \quad (37,6) \\ & E = \frac{p}{\gamma} H_2 \frac{\sinh pz}{\cosh pd} \quad [\text{V/cm}]. \quad (37,7) \end{aligned}$$

Označili jsme $z = (d-x)$, z je vzdálenost uvažovaného bodu od roviny symetrie stěny.

Určeme ještě výslednou intenzitu H za použití výrazu (35,30).

$$H' = H_2 \frac{\sinh p(2d-x)}{\sinh 2pd} \quad [\text{A/cm}], \quad (37,8)$$

$$H'' = H_2 \frac{\sinh p(2d-x')}{\sinh 2pd} = H_2 \frac{\sinh px}{\sinh 2pd} \quad [\text{A/cm}], \quad (37,9)$$

$$H = H' + H'' = H_2 \frac{\sinh p(2d-x) + \sinh px}{\sinh 2pd} \quad [\text{A/cm}]. \quad (37,10)$$

Upravme zlomek ve výrazu (37,10):

$$\begin{aligned} & \frac{\sinh 2pd \cdot \cosh px - \cosh 2pd \cdot \sinh px + \sinh px}{\sinh 2pd} = \\ & = \cosh px - \sinh px \frac{(\cosh 2pd - 1)}{\sinh 2pd} = \\ & = \cosh px - \sinh px \frac{2 \sinh^2(pd)}{2 \sinh pd \cdot \cosh pd} = \\ & = \frac{1}{\cosh pd} (\cosh px \cdot \cosh pd - \sinh px \cdot \sinh pd) = \frac{\cosh p(d-x)}{\cosh pd}, \quad (37,11) \\ & H = H_2 \frac{\cosh pz}{\cosh pd} \quad [\text{A/cm}]. \quad (37,12) \end{aligned}$$

Výrazy (37,7) a (37,12) určují výslednou intenzitu elektrického a magnetického pole ve stěně, ve vzdálenosti ($\pm z$) od roviny symetrie stěny.

3.72. Odvození absolutní hodnoty E a H

$$\begin{aligned} E &= \frac{p}{\gamma} H_2 \frac{\sinh pz}{\cosh pd} = \frac{p}{\gamma} H_2 \frac{\left(\sinh \frac{z}{a} \cdot \cos \frac{z}{a} + j \cosh \frac{z}{a} \cdot \sin \frac{z}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{d}{a} \cdot \cos \frac{d}{a} + j \sinh \frac{d}{a} \cdot \sin \frac{d}{a} \right)} = \\ &= \frac{p}{\gamma} H_2 \frac{A + jB}{C + jD} \quad [\text{V/cm}], \quad (37,13) \end{aligned}$$

$$E = \frac{\sqrt{2}}{a\gamma} H_2 \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2}} \quad [\text{V/cm}], \quad (37,14)$$

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 &= \sinh^2 \left(\frac{z}{a} \right) \cdot \cos^2 \left(\frac{z}{a} \right) + \cosh^2 \left(\frac{z}{a} \right) \cdot \sin^2 \left(\frac{z}{a} \right) = \sinh^2 \left(\frac{z}{a} \right) + \sin^2 \left(\frac{z}{a} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\cosh \frac{2z}{a} - \cos \frac{2z}{a} \right), \quad (37,15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sinh^2 \left(\frac{d}{a} \right) \cdot \sin^2 \left(\frac{d}{a} \right) &= \\ \sinh^2 \left(\frac{d}{a} \right) \cdot \sin^2 \left(\frac{d}{a} \right) &= \\ \frac{d}{a} - \sin^2 \left(\frac{d}{a} \right) &= \\ \frac{1}{2} \left(\cosh \frac{2d}{a} + \cos \frac{2d}{a} \right), \quad (37,16) & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\cos \frac{2z}{a} &= \\ \frac{-\cos \frac{2z}{a}}{2d} &= \quad [\text{V/cm}] \quad (37,17) \\ -\cos \frac{2d}{a} &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a} &= \\ \frac{2d}{a} + \cos \frac{2d}{a} &= \quad [\text{V/cm}] \quad (37,18) \end{aligned}$$

(37,18a)

\Rightarrow stěně z mědi, tloušťky $2d$ = intenzita dopadajícího vlnění

Hloubka vniku $a = 0,214$ cm, $\frac{2d}{a} = 2,80$,

$$z = \pm d : J_2 = J_4 = \frac{2 \cdot 500 \cdot \sqrt{2}}{0,214} \sqrt{\frac{\cosh 2,80 - \cos 2,80}{\cosh 2,80 + \cos 2,80}} = 7,28 \cdot 10^3 \text{ A/cm},$$

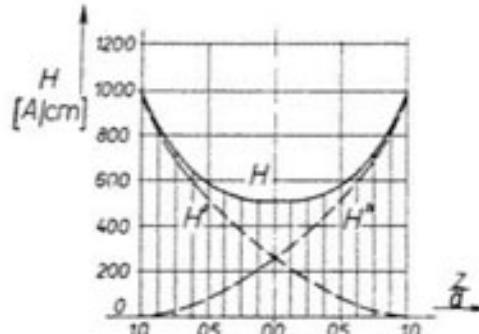
$$E_2 = E_4 = \frac{1}{\gamma} J_2 = \frac{7,38 \cdot 10^3}{5,5 \cdot 10^5} = 1,34 \cdot 10^{-2} \text{ V/cm},$$

pro $z = 0, J = E = 0$,

$$\text{pro } z = \frac{d}{2} = 0,15 \text{ cm},$$

$$J = 3,42 \cdot 10^3 \text{ A/cm}^2, \\ E = 6,22 \cdot 10^{-3} \text{ V/cm}.$$

Průběh je zakreslen na obr. 37,3.



Obr. 37,4. Průběh intenzity H ve stěně (složky H' a H'' jsou vybuzeny vlněním z levé a z pravé strany).

Absolutní hodnota H

$$H = H_2 \frac{\left(\cosh \frac{z}{a} \cdot \cos \frac{z}{a} + j \sinh \frac{z}{a} \cdot \sin \frac{z}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{d}{a} \cdot \cos \frac{d}{a} + j \sinh \frac{d}{a} \cdot \sin \frac{d}{a} \right)} = H_2 \frac{A + jB}{C + jD} \quad [A/\text{cm}], \quad (37,19)$$

$$H = H_2 \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2}} \quad [\text{A/cm}].$$

$(C^2 + D^2)$ je dáno výrazem (37,16). Součet $(A^2 + B^2)$ je nyní analogický s $(C^2 + D^2)$.

$$H = H_2 \sqrt{\frac{\cosh \frac{2z}{a} + \cos \frac{2z}{a}}{\cosh \frac{2d}{a} + \cos \frac{2d}{a}}} \quad [\text{A/cm}]. \quad (37,20)$$

Pro obě rozhraní:

$$z = \pm d, \quad H = H_2 = H_4 \quad (37,21)$$

pro $z = 0$,

$$H = H_2 \sqrt{\frac{2}{\cosh \frac{2d}{a} + \cos \frac{2d}{a}}} \quad [\text{A/cm}]. \quad (37,22)$$

Příklad 37,2

Stanovit průběh H v téže stěně z mědi, jako v příkl. 37,1.

$$H_2 = H_4 = 2H_p = 1000 \text{ A/cm}.$$

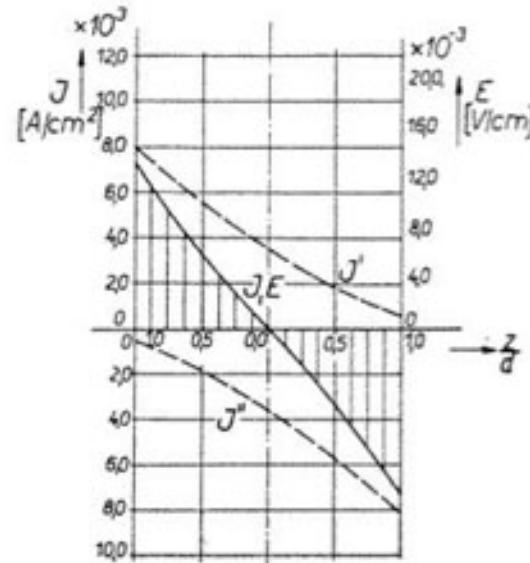
V rovině symetrie, $z = 0$:

$$H = 500 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cosh 2,80 + \cos 2,80}} = 520 \text{ A/cm}$$

$$\text{pro } z = \frac{d}{2} = 0,15 \text{ cm}, \quad H = 602 \text{ A/cm}.$$

Průběh je zakreslen na obr. 37,4.

Obr. 37,3. Průběh intenzity E a hustoty proudu J ve stěně (složky J' a J'' jsou vybuzeny dopadem vlnění z levé a z pravé strany).



3,73. Měrný příkon σ v jednotce objemu

$$\sigma = \frac{1}{2\gamma} J^2 = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{H_2}{a} \right)^2 \frac{\left(\cosh \frac{2z}{a} - \cos \frac{2z}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{2d}{a} + \cos \frac{2d}{a} \right)} \quad [\text{W/cm}^3]. \quad (37,23)$$

V obou rozhraních, $z = \pm d$:

$$\sigma_2 = \sigma_4 = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{H_2}{a} \right)^2 \frac{\left(\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{2d}{a} + \cos \frac{2d}{a} \right)} \quad [\text{W/cm}^3]. \quad (37,24)$$

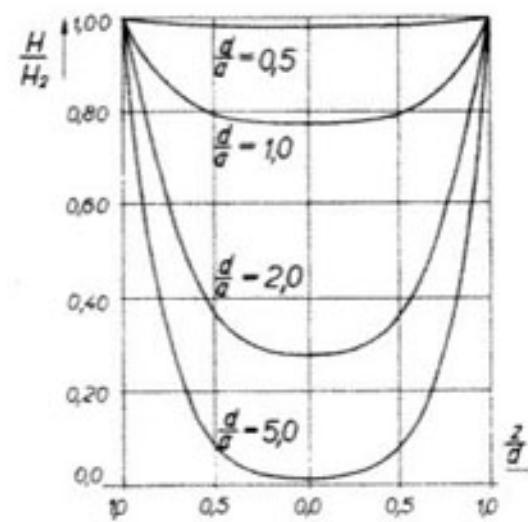
V rovině symetrie, $z = 0$:

$$\sigma = 0. \quad (37,25)$$

3,74. Obecné grafické zobrazení hodnot H, E, J, σ

Sestrojíme diagramy, platné pro jakýkoliv materiál a kmitočet. Na svislou osu vynášíme poměr $\frac{H}{H_2}, \frac{E}{E_2}, \frac{J}{J_2}, \frac{\sigma}{\sigma_2}$, na vodorovnou poměr $\frac{z}{d}$. Výpočet jsme provedli pro argumenty $\frac{d}{a} = 0,5 - 1,0 - 2,0 - 5,0$.

$$\frac{H}{H_2} = \sqrt{\frac{\cosh \frac{2z}{a} + \cos \frac{2z}{a}}{\cosh \frac{2d}{a} + \cos \frac{2d}{a}}}, \quad (37,26)$$



Obr. 37,5. Obecný diagram pro průběh H/H_2 při dopadu vlnění z obou stran.

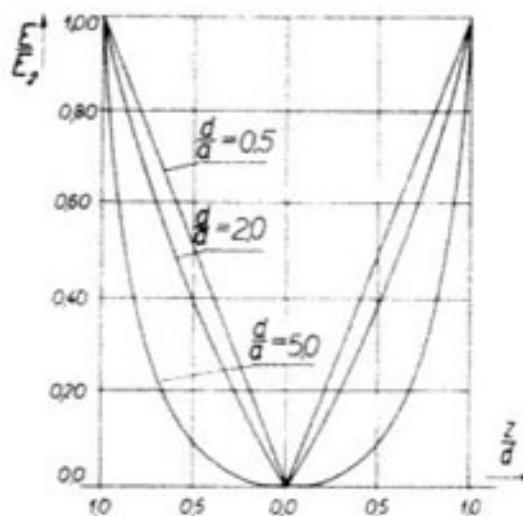
$$\frac{E}{E_2} = \frac{J}{J_2} = \sqrt{\frac{\cosh \frac{2z}{a} - \cos \frac{2z}{a}}{\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a}}}, \quad (37,27)$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_2} = \left(\frac{J}{J_2} \right)^2. \quad (37,28)$$

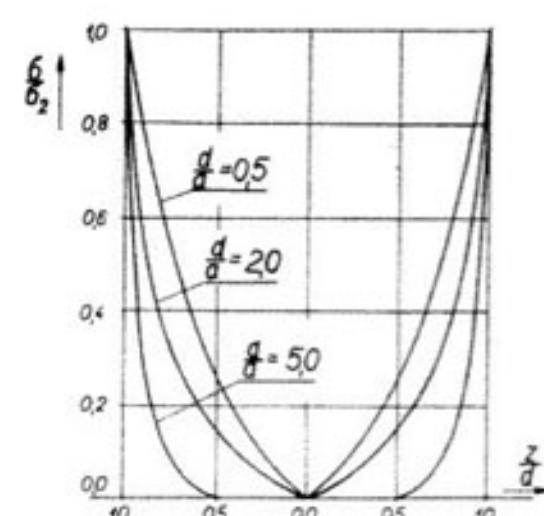
Výsledky výpočtů jsou v tabulce 37,1 a v diagramech 37,5, 37,6, 37,7.

Porovnejme výrazy (37,26) a (37,27) s výrazy (36,18) a (36,19) z předchozí části. Zjistíme totožnost výrazů:

$$(37,26) = (36,19) \quad (37,27) = (36,18).$$



Obr. 37,6. Obecný diagram pro průběh E/E_2 při dopadu vlnění z obou stran.



Obr. 37,7. Obecný diagram pro průběh σ/σ_2 .

V důsledku toho je diagram 37,5 pro $\frac{H}{H_2}$ (stěna s buzenými proudy opačné fáze) totožný s diagramem 36,5 pro $\frac{E}{E_2}$ (stěna s buzenými proudy téže fáze).

Tabulka 37,1

$\frac{d}{a}$	z/a	0,5	0,25	0,00	0,25	0,50	1,00	
$\frac{d}{a} = 0,5$	z/d	1,00	0,50	0,00	0,50	1,00		
	H/H_2	1,00	0,982	0,980	0,982	1,00		
	E/E_2	1,00	0,50	0,0	0,50	1,00		
	σ/σ_2	1,00	0,25	0,0	0,25	1,00		
$\frac{d}{a} = 1,0$	z/d	1,00	0,50	0,00	0,50	1,00		
	H/H_2	1,00	0,805	0,774	0,805	1,00		
	E/E_2	1,00	0,46	0,0	0,46	1,00		
	σ/σ_2	1,00	0,213	0,0	0,213	1,00		
$\frac{d}{a} = 2,0$	z/d	2,0	1,0	0,0	1,0	2,0		
	H/H_2	1,00	0,36	0,274	0,36	1,00		
	E/E_2	1,00	0,392	0,0	0,392	1,00		
	σ/σ_2	1,00	0,154	0,0	0,154	1,00		
$\frac{d}{a} = 5,0$	z/d	5,0	4,0	2,5	0,0	2,5	4,0	5,0
	H/H_2	1,00	0,36	0,084	0,0	0,084	0,36	1,00
	E/E_2	1,00	0,36	0,084	0,0	0,084	0,36	1,00
	σ/σ_2	1,00	0,13	0,007	0,0	0,007	0,13	1,00

Diagram 37,6 pro $\frac{E}{E_2}$ (stěna s buzenými proudy opačné fáze) je totožný s diagramem 36,4 pro $\frac{H}{H_2}$ (stěna s proudy téže fáze).

3,75. Celkový proud, vybuzený v každé polovině stěny

Celkový proud I_{21} je stejný v obou polovinách, avšak opačného smyslu.

$$I_{21} = \int_{z=0}^{z=d} J dz = p H_2 \frac{1}{\cosh pd} \int_0^d \sinh pz dz = \frac{p H_2}{\cosh pd} \frac{1}{p} [\cosh pz]_0^d = H_2 \frac{\cosh pd - 1}{\cosh pd} [A/cm]. \quad (37,29)$$

Absolutní hodnota:

$$I_{21} = H_2 \frac{\left[\left(\cosh \frac{d}{a} \cdot \cos \frac{d}{a} - 1 \right) + j \sinh \frac{d}{a} \cdot \sin \frac{d}{a} \right]}{\left(\cosh \frac{d}{a} \cdot \cos \frac{d}{a} + j \sinh \frac{d}{a} \cdot \sin \frac{d}{a} \right)} = H_2 \frac{A + jB}{C + jD}, \quad (37,30)$$

$$I_{21} = H_2 \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2}} [A/cm], \quad (37,31)$$

$$\begin{aligned}
 A^2 + B^2 &= \cosh^2 \left(\frac{d}{a} \right) \\
 &= \left[1 + \sin^2 \left(\frac{d}{a} \right) \right] \left(\cosh^2 \frac{d}{a} - \cos^2 \frac{d}{a} \right) \\
 &+ jB_2 = H_2 \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2}} = H_2 \sqrt{\frac{\left(\cosh^2 \frac{d}{a} - \cos^2 \frac{d}{a} \right)}{\frac{1}{2} \left(\cosh^2 \frac{d}{a} + \cos^2 \frac{d}{a} \right)}} = \\
 \text{Součet } (C^2 + D^2) \text{ je} \\
 &\quad \cdot H_2 \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\left(\cosh^2 \frac{d}{a} - \cos^2 \frac{d}{a} \right)}}{\sqrt{\left(\cosh^2 \frac{d}{a} + \cos^2 \frac{d}{a} \right)}} = H_2 \frac{\sqrt{2} \left(\cosh \frac{d}{a} - \cos \frac{d}{a} \right)}{\sqrt{2 \cosh^2 \frac{d}{a} + 1 + 2 \cos^2 \frac{d}{a} - 1}} = \\
 I_{21} &= H_2 \frac{\sqrt{2} \left(\cosh \frac{d}{a} - \cos \frac{d}{a} \right)}{\sqrt{\cosh^2 \frac{d}{a} + \cos^2 \frac{d}{a}}} = \frac{H_2 \left(\cosh \frac{d}{a} - \cos \frac{d}{a} \right)}{\sqrt{\sinh^2 \frac{d}{a} + \cos^2 \frac{d}{a}}} \\
 \underline{\underline{37.31}}
 \end{aligned}$$

3.76. Naind...

Z indukovaných

$$\begin{aligned}
 P_{21} &= \int_{z=0}^d \sigma dz = \frac{1}{2\gamma} \int_0^d J^2 dz = \\
 &= \frac{1}{\gamma} \left(\frac{H_2}{a} \right)^2 \cdot \frac{1}{\left(\cosh \frac{2d}{a} + \cos \frac{2d}{a} \right)} \int_0^d \left(\cosh \frac{2z}{a} - \cos \frac{2z}{a} \right) \cdot dz = \\
 &= \frac{1}{2a\gamma} H_2^2 \frac{\left(\sinh \frac{2d}{a} - \sin \frac{2d}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{2d}{a} + \cos \frac{2d}{a} \right)} \quad [\text{W/cm}^2]. \quad (37.34)
 \end{aligned}$$

Z Poyntingova vektoru:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_2 &= [\mathbf{E}_2 \mathbf{H}_2] = \frac{p}{\gamma} \mathbf{H}_2^2 \frac{\sinh pd}{\cosh pd} = \\
 &= \frac{1+j}{a\gamma} \mathbf{H}_2^2 \frac{\left(\sinh \frac{d}{a} \cdot \cos \frac{d}{a} + j \cosh \frac{d}{a} \cdot \sin \frac{d}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{d}{a} \cdot \cos \frac{d}{a} + j \sinh \frac{d}{a} \cdot \sin \frac{d}{a} \right)} = \\
 &= \frac{\mathbf{H}_2^2}{a\gamma} \frac{(1+j)(A+jB)(C-jD)}{C^2 + D^2} = \\
 &= \frac{\mathbf{H}_2^2}{a\gamma} \frac{AC + BD + AD - BC}{C^2 + D^2} + j \frac{\mathbf{H}_2^2}{a\gamma} \frac{AC + BD + BC - AD}{C^2 + D^2} \quad [\text{W/cm}^2]. \quad (37.35)
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 AC &= \sinh \frac{d}{a} \cdot \cosh \frac{d}{a} \cdot \cos^2 \left(\frac{d}{a} \right) = \frac{1}{2} \sinh \frac{2d}{a} \cdot \cos^2 \left(\frac{d}{a} \right), \\
 BD &= \frac{1}{2} \sinh \frac{2d}{a} \cdot \sin^2 \left(\frac{d}{a} \right), \\
 AC + BD &= \frac{1}{2} \sinh \frac{2d}{a}, \\
 AD - BC &= \frac{1}{2} \sin \frac{2d}{a}.
 \end{aligned} \right\} \quad (37.36)$$

$(C^2 + D^2)$ jsme již odvodili, výraz (37.16).

$$\mathbf{S}_2 = \frac{\mathbf{H}_2^2}{a\gamma} \frac{\left(\sinh \frac{2d}{a} - \sin \frac{2d}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{2d}{a} + \cos \frac{2d}{a} \right)} + j \frac{\mathbf{H}_2^2}{a\gamma} \frac{\left(\sinh \frac{2d}{a} + \sin \frac{2d}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{2d}{a} + \cos \frac{2d}{a} \right)} \quad [\text{W/cm}^2]. \quad (37.37)$$

První část výrazu (37.37) značí reálnou složku zářivého vektoru, která se přemění v teplo. Druhá složka značí tok jalové elektromagnetické energie. Reálná složka vektoru \mathbf{S}_2 :

$$\text{Re}(\mathbf{S}_2) = \frac{\mathbf{H}_2^2}{a\gamma} \frac{\left(\sinh \frac{2d}{a} - \sin \frac{2d}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{2d}{a} + \cos \frac{2d}{a} \right)} \quad [\text{W/cm}^2]. \quad (37.38)$$

Obdobně jako jsme z výrazu (34.11) odvodili efektivní hodnotu, můžeme stejnou úvahou dojít k výsledku:

$$\text{Re}(\mathbf{S}_2) = \frac{H_2^2}{2a\gamma} \frac{\left(\sinh \frac{2d}{a} - \sin \frac{2d}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{2d}{a} + \cos \frac{2d}{a} \right)} = P_{21} \quad [\text{W/cm}^2]. \quad (37.39)$$

$$A^2 + B^2 = \cosh^2\left(\frac{d}{a}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{d}{a}\right) - 2 \cosh\frac{d}{a} \cdot \cos\frac{d}{a} + 1 + \sinh^2\left(\frac{d}{a}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{d}{a}\right) = \\ = \left[1 + \sinh^2\left(\frac{d}{a}\right)\right] \left[1 - \sin^2\left(\frac{d}{a}\right)\right] - 2 \cosh\frac{d}{a} \cdot \cos\frac{d}{a} + 1 + \\ + \sinh^2\left(\frac{d}{a}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{d}{a}\right) = \left(\cosh\frac{d}{a} - \cos\frac{d}{a}\right)^2. \quad (37,32)$$

Součet ($C^2 + D^2$) jsme zjistili již dříve, výraz (37,16), takže

$$I_{21} = H_2 \frac{\sqrt{2} \left(\cosh\frac{d}{a} - \cos\frac{d}{a} \right)}{\sqrt{\cosh\frac{2d}{a} + \cos\frac{2d}{a}}} = H_2 \frac{\left(\cosh\frac{d}{a} - \cos\frac{d}{a} \right)}{\sqrt{\cosh^2\left(\frac{d}{a}\right) - \cos^2\left(\frac{d}{a}\right)}} = \\ = H_2 \sqrt{\frac{\cosh\frac{d}{a} - \cos\frac{d}{a}}{\cosh\frac{d}{a} + \cos\frac{d}{a}}} \quad [\text{A/cm}]. \quad (37,33)$$

3.76. Naindukováne množství tepla ve stěně

Z indukovaných proudů:

$$P_{21} = \int_{z=0}^{z=d} \sigma dz = \frac{1}{2\gamma} \int_0^d J^2 dz = \\ = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{H_2}{a}\right)^2 \cdot \frac{1}{\left(\cosh\frac{2d}{a} + \cos\frac{2d}{a}\right)} \int_0^d \left(\cosh\frac{2z}{a} - \cos\frac{2z}{a}\right) \cdot dz = \\ = \frac{1}{2a\gamma} H_2^2 \frac{\left(\sinh\frac{2d}{a} - \sin\frac{2d}{a}\right)}{\left(\cosh\frac{2d}{a} + \cos\frac{2d}{a}\right)} \quad [\text{W/cm}^2]. \quad (37,34)$$

$$\frac{pd}{pd} = \frac{h \frac{d}{a} \cdot \sin \frac{d}{a}}{h \frac{d}{a} \cdot \sin \frac{d}{a}} = \frac{-jD}{C + BD + BC - AD} = \frac{h \frac{2d}{a} \cdot \cos^2\left(\frac{d}{a}\right)}{C^2 + D^2} \quad [\text{W/cm}^2]. \quad (37,35)$$

$$\left. \begin{aligned} & h \frac{2d}{a} \cdot \cos^2\left(\frac{d}{a}\right), \\ & \frac{1}{2}, \\ & \left. \begin{aligned} & \sinh \frac{2d}{a} + \sin \frac{2d}{a} \\ & \cosh \frac{2d}{a} + \cos \frac{2d}{a} \end{aligned} \right) \end{aligned} \right\} \quad (37,36)$$

$$\frac{\sinh \frac{2d}{a} + \sin \frac{2d}{a}}{\cosh \frac{2d}{a} + \cos \frac{2d}{a}} \quad [\text{W/cm}^2], \quad (37,37)$$

zářivého vektoru, která se přenese v tepu, kterou ovlada směr jasu, je elektromagnetické energie. Reálná složka vektoru \mathbf{S}_2 :

$$\text{Re}(\mathbf{S}_2) = \frac{H_2^2}{a\gamma} \frac{\left(\sinh\frac{2d}{a} - \sin\frac{2d}{a}\right)}{\left(\cosh\frac{2d}{a} + \cos\frac{2d}{a}\right)} \quad [\text{W/cm}^2]. \quad (37,38)$$

Obdobně jako jsme z výrazu (34,11) odvodili efektivní hodnotu, můžeme stejnou úvahou dojít k výsledku:

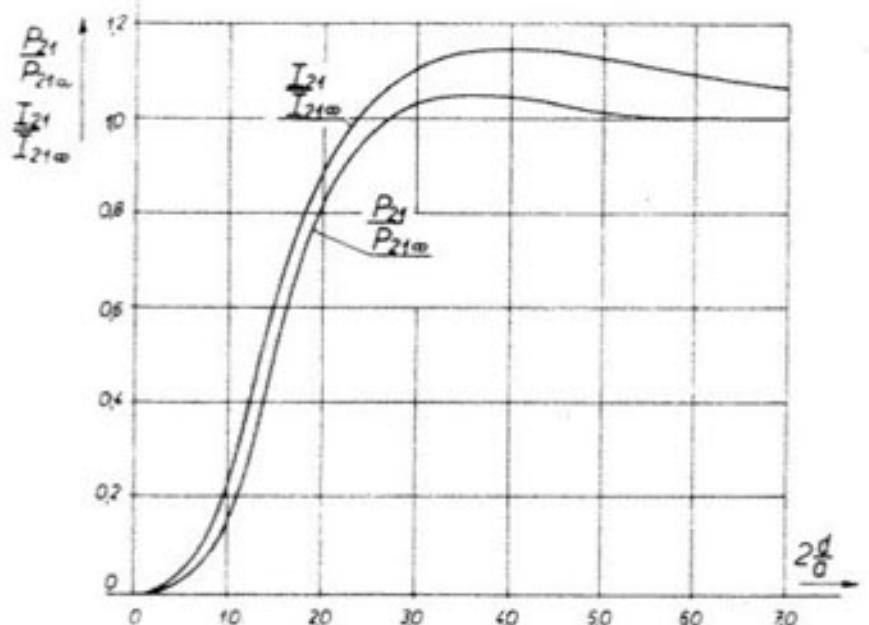
$$\text{Re}(S_2) = \frac{H_2^2}{2a\gamma} \frac{\left(\sinh\frac{2d}{a} - \sin\frac{2d}{a}\right)}{\left(\cosh\frac{2d}{a} + \cos\frac{2d}{a}\right)} = P_{21} \quad [\text{W/cm}^2]. \quad (37,39)$$

37.

Grafické znázornění průběhu celkového proudu a množství absorbované elmg. energie

Vyjděme z výrazu (37,33) pro proud I_{21} . Pro grafické znázornění je výhodné zavést poměr $\frac{I_{21}}{I_{21\infty}}$, při čemž $I_{21\infty}$ je proud v polovině stěny v případě, že tloušťka $2d \rightarrow \infty$, $I_{21\infty} = H_2$.

$$\frac{I_{21}}{I_{21\infty}} = \sqrt{2} \frac{\left(\cosh \frac{d}{a} - \cos \frac{d}{a}\right)}{\sqrt{\cosh \frac{2d}{a} + \cos \frac{2d}{a}}} = \sqrt{\frac{\cosh \frac{d}{a} - \cos \frac{d}{a}}{\cosh \frac{d}{a} + \cos \frac{d}{a}}}. \quad (37,40)$$



Obr. 37,8. Průběh naindukovánoho proudu a vyvinutého tepla ve stěně v závislosti na poměru $2d/a$.

Pro množství absorbované energie P_{21} jsme odvodili výraz (37,34). Roste-li tloušťka stěny $2d \rightarrow \infty$, potom bude množství tepla v polovině stěny:

$$P_{21\infty} = \frac{1}{2a\gamma} H_2^2 \quad [\text{W/cm}^2], \quad (37,41)$$

$$\frac{P_{21}}{P_{21\infty}} = \frac{\left(\sinh \frac{2d}{a} - \sin \frac{2d}{a}\right)}{\left(\cosh \frac{2d}{a} + \cos \frac{2d}{a}\right)}. \quad (37,42)$$

Vypočetli jsme hodnoty výrazů (37,40) a (37,42) pro různé argumenty $\frac{2d}{a}$. Výsledky jsou v tabulce 37,2 a v diagramu 37,8.

Tabulka 37,2

$2d/a$	0	0.1	0.25	0.50	1.0	2.0	4.0	6.0	8.0
$I_{21}/I_{21\infty}$	0,0	0,0	0,0156	0,0625	0,246	0,876	1,145	1,103	1,063
$P_{21}/P_{21\infty}$	0,0	0,00015	0,003	0,021	0,160	0,815	1,046	0,996	1,00

V diagramu 37,8 vidíme, že při malé tloušťce stěny $\left(\frac{2d}{a}\right)$ je malé množství obou elmg. vlnění, dopadajících z obou stran proti sobě, vzájemně ruší, výsledný proud je malý, rovněž je malé i množství absorbované energie. Roste-li tloušťka stěny $2d$ a poměr $\frac{2d}{a}$, roste rychle i množství vyvinutého tepla. Plné hodnoty se dosáhne, je-li tloušťka stěny $2d$ větší než přibližně trojnásobek hloubky vniku. Zvětšuje-li se dále tloušťka stěny, množství vyvinutého tepla ve stěně již neroste.

37.8. Impedance poloviny stěny

Impedanci jedné poloviny stěny definujeme jako poměr intenzity elektrického pole E_2 v rozhraní k proudu I_{21} v polovině stěny.

$$Z_{21} = \frac{E_2}{I_{21}} = \frac{p}{\gamma} H_2 \frac{\sinh pd}{\cosh pd} \frac{\cosh pd}{H_2 (\cosh pd - 1)} = \frac{p}{\gamma} \frac{\sinh pd}{(\cosh pd - 1)} \quad [\Omega \cdot \text{cm}]. \quad (37,43)$$

Určeme část reálnou a imaginární:

$$\begin{aligned} Z_{21} &= \frac{p}{\gamma} \frac{\left(\sinh \frac{d}{a} \cdot \cos \frac{d}{a} + j \cosh \frac{d}{a} \cdot \sin \frac{d}{a}\right)}{\left[\left(\cosh \frac{d}{a} \cdot \cos \frac{d}{a} - 1\right) + j \sinh \frac{d}{a} \cdot \sin \frac{d}{a}\right]} = \\ &= \frac{1}{a\gamma} \frac{(1+j)(A+jB)(C-jD)}{C^2 + D^2} = \frac{1}{a\gamma} \frac{AC + BD + AD - BC}{C^2 + D^2} + \\ &\quad + j \frac{1}{a\gamma} \frac{AC + BD + BC - AD}{C^2 + D^2} = R_{21} + j\omega L_{21} \quad [\Omega \cdot \text{cm}]. \end{aligned} \quad (37,44)$$

Po dosazení za A až D :

$$R_{21} = \frac{1}{a\gamma} \frac{\left(\sinh \frac{d}{a} + \sin \frac{d}{a}\right)}{\left(\cosh \frac{d}{a} - \cos \frac{d}{a}\right)} \quad [\Omega \cdot \text{cm}], \quad (37,45)$$

$$\omega L_{21} = \frac{1}{a\gamma} \frac{\left(\sinh \frac{d}{a} - \sin \frac{d}{a}\right)}{\left(\cosh \frac{d}{a} - \cos \frac{d}{a}\right)} \quad [\Omega \cdot \text{cm}], \quad (37,46)$$

Roste-li tloušťka stěny $2d \rightarrow \infty$, potom

$$R_{21\infty} = \omega L_{21\infty} = \frac{1}{a\gamma} \quad [\Omega \cdot \text{cm}], \quad (37,47)$$

$$\frac{R_{21}}{R_{21\infty}} = \frac{\left(\sinh \frac{d}{a} + \sin \frac{d}{a}\right)}{\left(\cosh \frac{d}{a} - \cos \frac{d}{a}\right)}, \quad (37,48)$$

$$\frac{\omega L_{21}}{\omega L_{21\infty}} = \frac{\left(\sinh \frac{d}{a} - \sin \frac{d}{a}\right)}{\left(\cosh \frac{d}{a} - \cos \frac{d}{a}\right)}. \quad (37,49)$$

Porovnáme-li výrazy (37,45) a (37,46) pro stěnu s naindukovanými proudy opačné fáze s korespondujícími výrazy (36,24), (36,25) pro stěnu s proudy téže fáze, zjištujeme shodu funkcí i znamének pouze s tím rozdílem, že ve výrazech (37,45) a (37,46) se vyskytuje argument $\left(\frac{d}{a}\right)$, kdežto ve výrazech (36,24) a (36,25) argument $\left(\frac{2d}{a}\right)$.

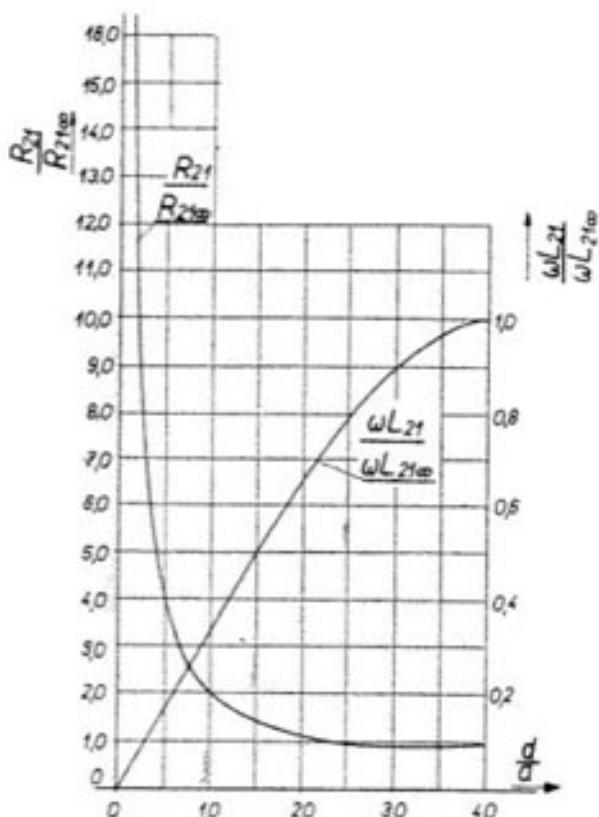
Vypočetli jsme hodnoty výrazů (37,48) a (37,49) pro různé argumenty $\frac{d}{a}$.

Výsledky jsou v tabulce 37,3 a v diagramu 37,9.

Tabulka 37,3

d/a	0,0	0,125	0,25	0,50	1,0	2,0	3,0	4,0
$R_{21}/R_{21\infty}$	∞	16,03	8,01	4,00	2,01	1,087	0,920	0,948
$\omega L_{21}/\omega L_{21\infty}$	0	0,0423	0,0833	0,167	0,333	0,652	0,893	1,004

Porovnáním zjistíme, že diagram 37,9 je analogický s obr. 36,7.

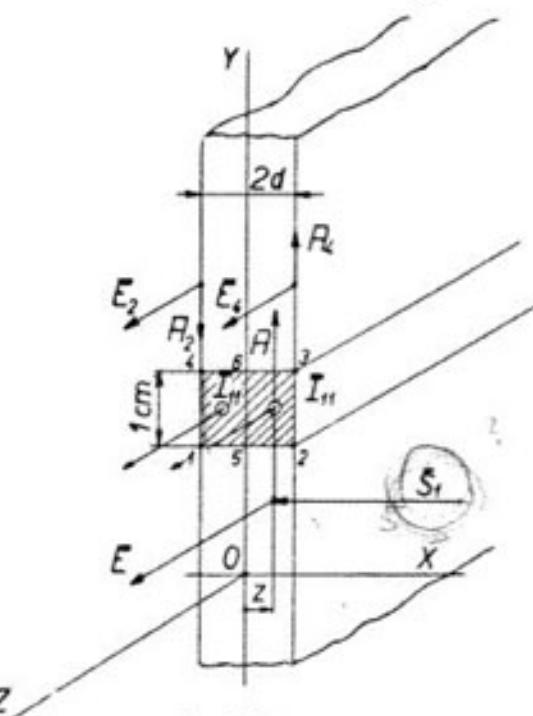


Obr. 37,9. Průběh činného odporu a impedance stěny v závislosti na poměru d/a .

Povšimněme si bliže obr. 37,9. Činný odpor stěny roste do nekonečna, zmenšuje-li se poměr $\frac{d}{a} \rightarrow 0$. Tento případ nastane, jestliže $d \rightarrow 0$, nebo hloubka vniku $a \rightarrow \infty$ (kmitočet $f \rightarrow 0$). Roste-li poměr $\frac{d}{a}$, klesá rychle i odpor k mezní hodnotě $R_{21\infty}$. Přibližně se dosáhne mezní hodnoty již pro $\frac{d}{a} = 2,0$.

V rozsahu $\frac{d}{a} = 0,0$ až $2,0$ je průběh křivky $R_{21}/R_{21\infty}$ velmi přibližně hyperbolický. Reaktance stěny roste přibližně lineárně v rozsahu $d/a = 0$ až $2,0$, potom se křivka ohýbá a asi při $d/a \approx 4,0$ dosáhne své limitní hodnoty $\omega L_{21\infty}$.

V uvažovaném případě, kdy rovinné vlnění dopadá z obou stran a ve svých účincích působí proti sobě, není celkový naindukovaný proud I_{21} [výraz (37,29), (37,33)], rovný intenzitě magnetického pole H_z v rozhraní, jako tomu bylo v předchozích případech. V tomto zvláštním případě také není množství vyvinutého tepla P_{21} [výraz (37,34)] dáno součinem z odporu R_{21} (37,45) a čtverce $I_{21\text{eff}}$, jako tomu bylo v předchozích případech.



Obr. 38,1. Schematické uspořádání rovné stěny, protékáné střídavým proudem ve směru osy Z.

3.8. Vedení střídavého proudu rovnou stěnou

Uvažujme rovnou vodivou stěnu o tloušťce $2d$ [cm], podle obr. 38,1.

Systém pravoúhlých souřadnic jsme umístili tak, že osy Y a Z leží v rovině symetrie vodivé stěny. Předpokládáme, že stěna je rozprostřena do nekonečna ve směrech Y a Z . Stěnu nechť prochází střídavý proud ve směru osy Z . Směr magnetické intenzity H splývá se směrem osy Y . Stěnu rozdělme rovinou řezy, rovnoběžnými s rovinou XZ , na pruhy o šířce 1 cm. Každým takto vymezeným pruhem protéká proud $2I_{21}$ [A/cm], každou polovinou stěny protéká poloviční proud I_{21} [A/cm]. Předpokládejme, že rychlosť šíření elektromagnetické vlny podél stěny je nekonečná. Potom bude okamžitá hodnota proudu i_{21} v kterémkoliv místě vodivé stěny stejná. Magnetické a elektrické pole ve stěně

i mimo stěnu má charakter rovinného elmg. vlnění. Vyšetříme proto intenzitu \mathbf{E} a \mathbf{H} pole elektrického a magnetického v nějakém bodě ve vzdálenosti z [cm] od roviny symetrie stěny. Všechny body roviny, vzdálené o z od roviny symetrie budou mít stejné hodnoty \mathbf{E} a \mathbf{H} .

3.81. Odvození intenzity E a H ve stěně

V části 3.30 jsme odvodili obecné výrazy pro \mathbf{E} a \mathbf{H} při rovinném vlnění ve vodivé stěně, výrazy (33,5) a (33,10). Vzdálenost uvažovaného bodu od roviny symetrie jsme označili z .

$$\mathbf{H} = \mathbf{A} e^{-pz} + \mathbf{B} e^{pz} \quad [\text{A/cm}], \quad (38,1)$$

$$\mathbf{E} = \frac{p}{\gamma} [\mathbf{A} e^{-pz} - \mathbf{B} e^{pz}] \quad [\text{V/cm}]. \quad (38,2)$$

\mathbf{A} , \mathbf{B} značí integrační konstanty, které je třeba v jednotlivých případech určit z mezních podmínek.

$$p = \frac{(1+j)}{a}. \quad (38,3)$$

Intenzita elektrického pole \mathbf{E} má tentýž směr, jako má proud I_{11} , to je směr osy Z a je téhož smyslu v obou polovinách stěny. Intenzitu magnetického pole \mathbf{H}_2 zjistíme z obecného výrazu (1. rovnice Maxwellova v integrálním tvaru):

$$I = \oint \mathbf{H} ds. \quad (38,4)$$

Sledujme obvod vyznačeného řezu 1—2—3—4. Na drahách 1—2 a 3—4 se práce nekoná, protože intenzita \mathbf{H} má směr osy Y a nemá složku ve směru X . Sledujeme-li celý řez 1—2—3—4, vyjde nám smysl vektoru \mathbf{H}_4 ve směru ($+Y$), smysl vektoru \mathbf{H}_2 ve směru ($-Y$). V důsledku toho bude \mathbf{H} v rovině symetrie rovné nule.

Sledujeme-li obvod 1—5—6—4—1, koná se práce pouze po dráze 4—1 o délce 1 cm, takže z toho dostaneme

$$\mathbf{H}_2 = I_{11} \quad [\text{A/cm}]. \quad (38,5)$$

Dosadme do výrazu (38,1) $z = 0$. Protože intenzita \mathbf{H} v rovině symetrie se rovná nule, bude

$$0 = \mathbf{A} + \mathbf{B}, \quad \mathbf{A} = -\mathbf{B} \quad (38,6)$$

Intenzitu \mathbf{H}_2 v místě $z = d$ již známe:

$$\mathbf{H}_2 = I_{11} = \mathbf{A} e^{-pd} + \mathbf{B} e^{pd} = \mathbf{A} (e^{-pd} - e^{pd}). \quad (38,7)$$

Z výrazu (38,7) již určíme konstantu \mathbf{A} a za použití (38,6) i konstantu \mathbf{B} :

$$\mathbf{A} = -\frac{I_{11}}{e^{pd} - e^{-pd}} = -\frac{I_{11}}{2 \sinh pd}, \quad (38,8)$$

$$\mathbf{B} = -\mathbf{A} = +\frac{I_{11}}{2 \sinh pd}. \quad (38,9)$$

Dosadíme nyní obě integrační konstanty do výrazů (38,1) a (38,2):

$$\mathbf{H} = +\frac{I_{11}}{2 \sinh pd} [e^{pz} - e^{-pz}] = I_{11} \frac{\sinh pz}{\sinh pd} \quad [\text{A/cm}], \quad (38,10)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{p}{\gamma} \frac{I_{11}}{2 \sinh pd} [e^{pz} + e^{-pz}] = -\frac{p}{\gamma} I_{11} \frac{\cosh pz}{\sinh pd} \quad [\text{V/cm}]. \quad (38,11)$$

Ve výrazech (38,10) a (38,11) můžeme místo proudu v jedné polovině stěny I_{11} psát podle (38,5) intenzitu magnetického pole \mathbf{H}_2 na povrchu.

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_2 \frac{\sinh pz}{\sinh pd} \quad [\text{A/cm}], \quad (38,12)$$

$$\mathbf{E} = \frac{p}{\gamma} \mathbf{H}_2 \frac{\cosh pz}{\sinh pd} \quad [\text{V/cm}]. \quad (38,13)$$

Porovnejme výrazy (38,12) a (38,13) s dříve odvozenými výrazy (36,12) a (36,7) v části 3.60.

Zjistíme úplnou shodu. To znamená, že magnetické a elektrické pole ve vodivé stěně, kterou protéká střídavý proud, je přesně stejné jako elektromagnetické pole, které vznikne ve vodivé stěně, na kterou dopadá z obou stran elmg. rovinné vlnění a vyvolává proudy téže fáze. Oba zde uvažované případy jsou spolu totožné.

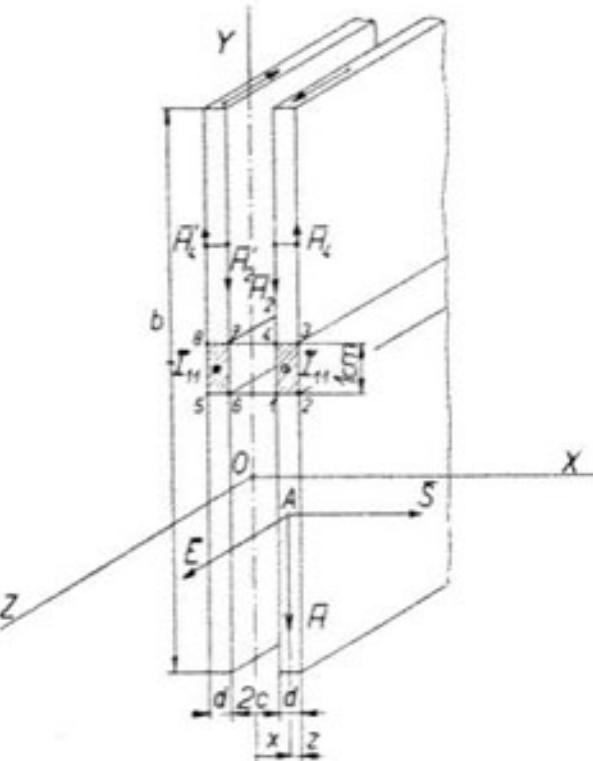
Není proto třeba znova odvozovat absolutní hodnoty H a E , impedanci vodivé stěny a množství tepla, které při průchodu proudem stěnou v ní vznikne. Postačí použít příslušných výrazů, odvozených v části 3.60, respektive ještě dříve v části 3.50.

Stejně i diagramy 36,2 až 36,7 mají platnost i pro nyní uvažovaný případ rovné stěny, kterou prochází střídavý proud. Např. na obr. 36,7 vidíme, že stěna vedoucí střídavý proud má minimální odpor v případě, že její poloviční tloušťka d se rovná $\frac{\pi}{2} = 1,57$ násobku hloubky vniku a .

3.9. Vedení střídavého proudu dvěma rovnoběžnými stěnami, pásové vedení

Uvažujme dvě rovnoběžné stěny, každou o tloušťce d [cm], rozprostřené v naší teoretické úvaze do nekonečna ve směrech Y a Z , schematicky podle obr. 39.1.

Střídavý proud prochází stěnami ve směru osy Z , levou stěnu odleva doprava, v pravé stěně se tentýž proud vraci v opačném smyslu. Rozdělme obě stěny řezy kolmými k ose Y na pruhy o šířce 1 cm. Každým uvažovaným pruhem prochází proud I_{11} [A/cm]. Předpokládáme-li, že rychlosť šíření proudu ve stěnách je nekonečná, potom obě roviny vyzařují rovinné elmg. vlnění do okolního prostoru a rovněž i rozložení elmg. pole ve stěnách má rovinný charakter.



Obr. 39.1. Schematické uspořádání dvou rovnoběžných stěn, protékaných střídavými proudy ve směru osy Z , též velikosti, opačné fáze.

3.91. Odvození intenzity magnetického a elektrického pole ve stěně

Vyjdeme z obr. 39.1. Počátek souřadnice x uvažovaného bodu A je v rovině symetrie obou stěn. Na obr. 39.1 jsme vyznačili řez rovinou kolmou ke směru proudu. Uvažovaný pruh o šířce 1 cm protne tuto rovinu v bodech $1-2-3-4$. Timto řezem $1-2-3-4$ protéká proud I_{11} , smysl odprava doleva. Smysl vektorů H_2 a H_4 na vnitřním a vnějším rozhraní pravé stěny je na obrázku vyznačen, stejně i H'_1 a H'_4 v levé stěně. Z důvodu symetrie celé soustavy je

$H_2 = H'_2$. Mezi stěnami je homogenní magnetické pole o intenzitě H_2 , směřující proti ose Y . Jsou-li obě stěny rozprostřeny do nekonečna, potom se magnetický tok, procházející mezerou mezi stěnami, uzavírá nekonečným prostorem na vnější straně obou stěn a je proto jeho intenzita $H_4 = 0$. Intenzitu H_2 na vnitřním rozhraní určíme ze základního zákona:

$$I = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}. \quad (39.1)$$

Na drahách: $1-2, 2-3, 3-4$ se práce nekoná, takže:

$$I_{11} = H_2 \cdot l = H_2 \quad [\text{A}/\text{cm}]. \quad (39.2)$$

V části 3.30 jsme odvodili pro rovinné vlnění ve vodivé rovné stěně tyto obecné výrazy pro \mathbf{H} a \mathbf{E} [rovn. (33,5) a (33,10)]:

$$\mathbf{H} = \mathbf{A} e^{-px} + \mathbf{B} e^{px} \quad [\text{A}/\text{cm}], \quad (39.3)$$

$$\mathbf{E} = \frac{p}{\gamma} [\mathbf{A} e^{-px} - \mathbf{B} e^{px}] \quad [\text{V}/\text{cm}]. \quad (39.4a)$$

Integrační konstanty \mathbf{A} a \mathbf{B} opět určíme z mezních podmínek.

Pro $x = c$ bude rovnice (39.3)

$$\mathbf{H} = H_2 = I_{11} = \mathbf{A} e^{-pc} + \mathbf{B} e^{pc}. \quad (39.4b)$$

Pro $x = (c + d)$

$$\mathbf{H} = H_4 = 0 = \mathbf{A} e^{-p(c+d)} + \mathbf{B} e^{p(c+d)}. \quad (39.5)$$

Z rovnice (39.5)

$$\mathbf{A} = -\mathbf{B} e^{2p(c+d)}. \quad (39.6)$$

Dosadme do (39.4b):

$$I_{11} = -\mathbf{B} e^{2p(c+d)} e^{-pc} + \mathbf{B} e^{pc} = \mathbf{B} e^{p(c+d)} [e^{-p(c+d)} e^{pc} - e^{p(c+d)} e^{-pc}] = \mathbf{B} e^{p(c+d)} [e^{-pd} - e^{pd}] \quad (39.7)$$

$$\mathbf{B} = -\frac{I_{11} e^{-p(c+d)}}{2 \sinh pd}, \quad (39.8)$$

$$\mathbf{A} = +I_{11} \frac{e^{-p(c+d)}}{2 \sinh pd} e^{2p(c+d)} = I_{11} \frac{e^{p(c+d)}}{2 \sinh pd}. \quad (39.9)$$

Dosadme za \mathbf{A} , \mathbf{B} do (39.3):

$$\mathbf{H} = I_{11} \frac{e^{p(c+d)}}{2 \sinh pd} e^{-px} - I_{11} \frac{e^{-p(c+d)}}{2 \sinh pd} e^{px}. \quad (39.10)$$

Z obr. 39.1 vidíme: $(c + d - x) = z$,

$$\mathbf{H} = I_{11} \frac{1}{2 \sinh pd} [e^{pz} - e^{-pz}] = I_{11} \frac{\sinh pz}{\sinh pd} \quad [\text{A}/\text{cm}]. \quad (39.11)$$

Dosadme za \mathbf{A} , \mathbf{B} do výrazu (39,4a):

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{p}{\gamma} \left[+I_{11} \frac{e^{p(c+d)}}{2 \sinh pd} e^{-px} + I_{11} \frac{e^{-p(c+d)}}{2 \sinh pd} e^{px} \right] = \\ &= \frac{p}{\gamma} I_{11} \frac{1}{2 \sinh pd} [e^{px} + e^{-px}] = \frac{p}{\gamma} I_{11} \frac{\cosh pz}{\sinh pd} \quad [\text{V/cm}].\end{aligned}\quad (39,12)$$

Porovnáme-li odvozené výrazy (39,11) a (39,12) pro intenzitu H a E ve stěně pásového vedení, zjistíme úplnou totožnost s výrazy (35,30) a (35,32), které udávají H a E ve stěně při dopadu rovinného elmg. vlnění z jedné strany.

Můžeme proto pro absolutní hodnotu H a E , pro impédanci pásového vedení a pro ztráty v pásovém vedení, které jsou rovné množství pohlcené elmg. energie, použít již odvozených výrazů z části 3,50.

$$H = I_{11} \sqrt{\frac{\cosh \frac{2z}{a} - \cos \frac{2z}{a}}{\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a}}} \quad [\text{A/cm}], \quad (39,13)$$

$$E = \frac{1}{\gamma} J = \frac{\sqrt{2}}{a\gamma} I_{11} \sqrt{\frac{\cosh \frac{2z}{a} + \cos \frac{2z}{a}}{\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a}}} \quad [\text{V/cm}, \text{ A/cm}^2], \quad (39,14)$$

$$\sigma = \frac{1}{2\gamma} J^2 = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{I_{11}}{a} \right)^2 \frac{\left(\cosh \frac{2z}{a} + \cos \frac{2z}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a} \right)} \quad [\text{W/cm}^3]. \quad (39,15)$$

Pro grafické zobrazení jsou výhodné poměry

$$\frac{H}{H_2} = \sqrt{\frac{\cosh \frac{2z}{a} - \cos \frac{2z}{a}}{\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a}}}, \quad (39,16)$$

$$\frac{E}{E_2} = \frac{J}{J_2} = \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma_2}} = \sqrt{\frac{\cosh \frac{2z}{a} + \cos \frac{2z}{a}}{\cosh \frac{2d}{a} + \cos \frac{2d}{a}}}. \quad (39,17)$$

Graficky jsou výsledky (39,16) a (39,17) zobrazeny v diagramech 39,2, 39,3.

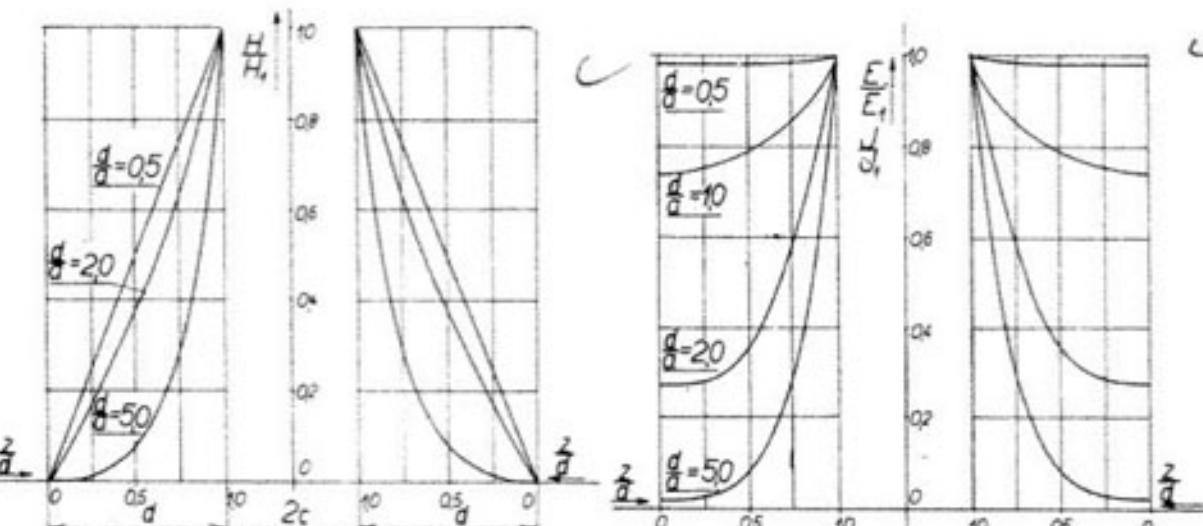
3,92. Impedance a ztráty v pásovém vedení

Impedance jednoho pásu:

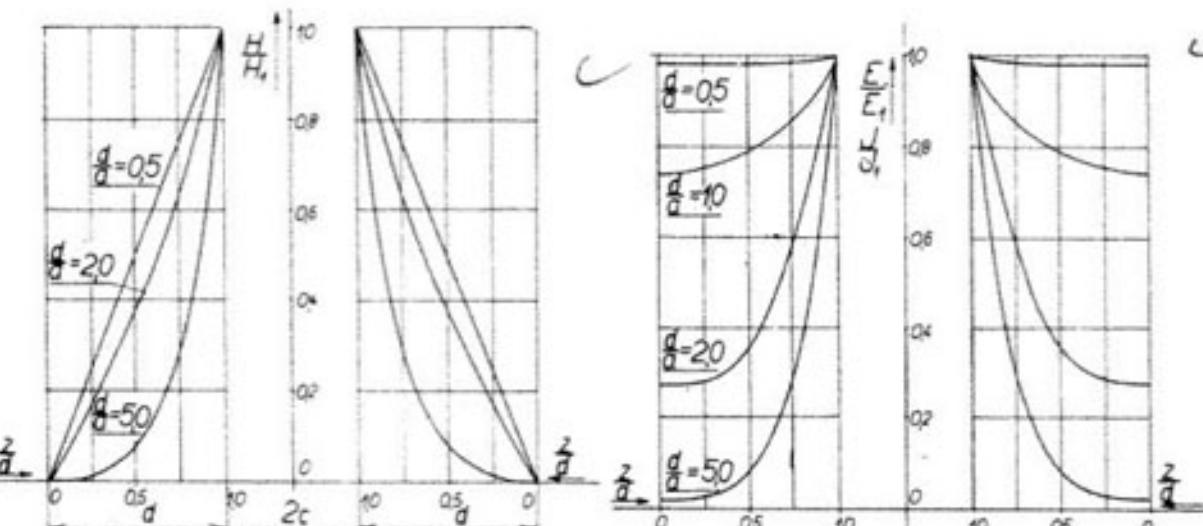
$$\mathbf{Z}_{11} = \frac{\mathbf{E}_2}{I_{11}} = \frac{p}{\gamma} \frac{\cosh pd}{\sinh pd} \quad [\Omega \cdot \text{cm}]. \quad (39,18)$$

Impedance vedení ze dvou pásů je dvojnásobná:

$$\mathbf{Z}_{11} = 2 \frac{p}{\gamma} \frac{\cosh pd}{\sinh pd} = R_{11} + j\omega L_{11} \quad [\Omega \cdot \text{cm}]. \quad (39,19)$$



Obr. 39,2. Rozložení magnetického pole ve stěnách pásového vedení.



Obr. 39,3. Rozložení elektrického pole a hustoty proudu ve stěnách pásového vedení.

Impedance vedení obou pásů má složku reálnou a imaginární.

$$R_{11} = \frac{2}{a\gamma} \frac{\left(\sinh \frac{2d}{a} + \sin \frac{2d}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a} \right)} = \frac{2}{a\gamma} \varphi \left(\frac{2d}{a} \right) \quad [\Omega \cdot \text{cm}], \quad (39,20)$$

$$\omega L_{11} = \frac{2}{a\gamma} \frac{\left(\sinh \frac{2d}{a} - \sin \frac{2d}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a} \right)} = \frac{2}{a\gamma} \psi \left(\frac{2d}{a} \right) \quad [\Omega \cdot \text{cm}]. \quad (39,21)$$

Průběh funkcí φ a ψ je v diagramu 39,4.

Činný odpor R_{11} a ztráty v pásovém vedení jsou minimální, rovná-li se tloušťka stěny 1,57 násobku hloubky vniku.

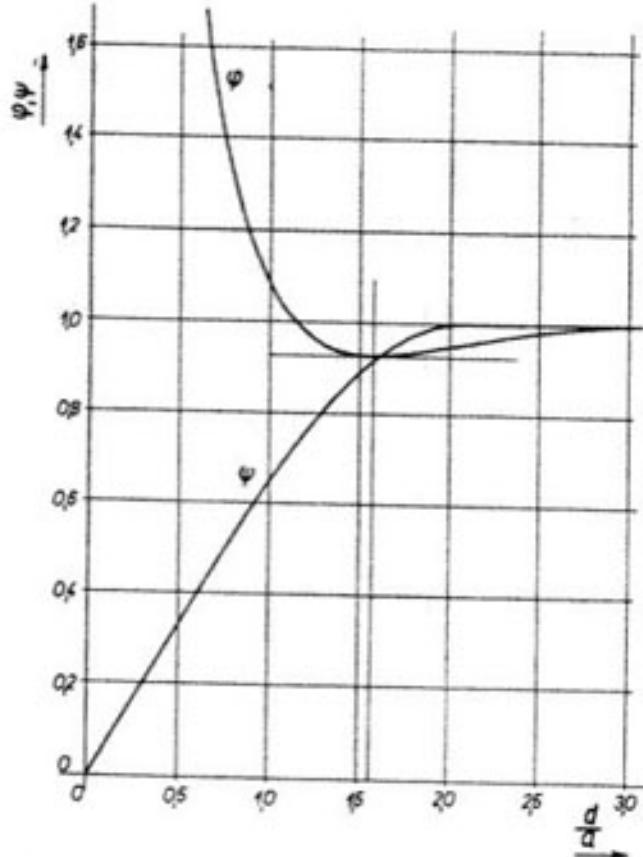
$$d = \frac{\pi}{2} a = 1,57 a \quad [\text{cm}]. \quad (39,22)$$

Ztráty v jednom pásu ze zářivého vektoru:

$$S_1 = [E_2 H_2] = \frac{p}{\gamma} I_{11}^2 \frac{\cosh pd}{\sinh pd} \quad [\text{W/cm}^2, \text{A/cm}] \quad (39,23)$$

Dosadme do (39,23) z (39,19):

$$S_1 = \frac{1}{2} Z_{11} I_{11}^2 = \frac{1}{2} (R_{11} + j\omega L_{11}) I_{11}^2 = \frac{1}{a\gamma} \varphi \left(\frac{2d}{a} \right) I_{11}^2 + j \frac{1}{a\gamma} \psi \left(\frac{2d}{a} \right) I_{11}^2 \quad [\text{W/cm}^2]. \quad (39,24)$$



Obr. 39,4. Diagram pro průběh činného odporu a reaktance v závislosti na poměru d/a .

Funkci $\varphi \left(\frac{2d}{a} \right)$ odečteme z obr. 39,4.

Reaktance $\omega L'$ obou pásů:

$$\omega L' = \omega L_{11} \frac{l}{b} = \varrho \frac{2l}{ab} \psi \left(\frac{2d}{a} \right) \quad [\Omega]. \quad (39,28)$$

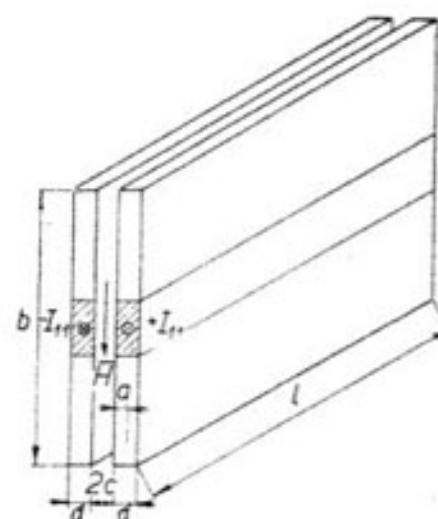
K vlastní indukčnosti L' je třeba přičíst indukčnost mezery mezi pásy označme ji L'' . Stanovme magnetický tok mezi pásy. Obr. 39,6 je pohled na pásové vedení zhora.

Uvažujme část vedení o délce 1 cm. Mezi pásy je homogenní magnetické pole o intenzitě H_2 , viz (32,34), takže části vedení o délce 1 cm přísluší magnetický tok:

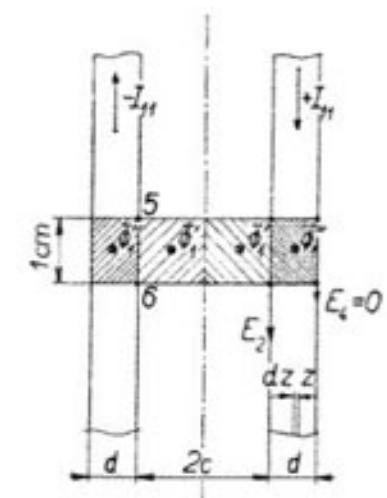
$$2\Phi'_1 = (2c, 1)\mu_0 \mu H_2 = 2c\mu_0 \mu I_{11} \quad [\text{Wb}, \text{cm}, \text{A/cm}]. \quad (39,29)$$

Vlastní indukčnost L'' mezery příslušející části vedení o délce 1 cm dostaneme jako magnetický tok při jednotkovém proudu:

$$L'' = \frac{2\Phi'_1}{I_{11}} = 2c\mu_0 \mu \quad [\text{H/cm}]. \quad (39,30)$$



Obr. 39,5. Pásové vedení.



Obr. 39,6. Diagram pro určení vlastní indukčnosti mezery mezi pásy.

Indukčnost mezery mezi pásy o výšce b [cm] a délce l [cm] bude

$$L'' = L''_1 \frac{l}{b} = \frac{2cl}{b} \mu_0 \mu \quad [\text{H}]. \quad (39,31)$$

Reaktance mezery:

$$\omega L'' = \omega \mu_0 \mu \frac{2cl}{b} \quad [\Omega, \text{cm}]. \quad (39,32)$$

Výsledná reaktance pásového vedení je dána součtem:

$$\omega L = \omega L' + \omega L'' = \varrho \frac{2l}{ab} \psi \left(\frac{2d}{a} \right) + \omega \mu_0 \mu \frac{2cl}{b} \quad [\Omega]. \quad (39,33)$$

Funkci $\psi \left(\frac{2d}{a} \right)$ odečteme z diagramu 39,4.

Impedance Z celého vedení:

$$Z = R + j\omega L = \varrho \frac{2l}{ab} \varphi + j \left[\varrho \frac{2l}{ab} \psi + \omega \mu_0 \mu \frac{2cl}{b} \right] \quad [\Omega]. \quad (39,34)$$

Vedení protéká proud I_{ef} :

$$I_{ef} = \frac{I'}{\sqrt{2}} = \frac{I_n b}{\sqrt{2}} \quad [\text{A}] \quad (39,55)$$

Úbytek U_{ef} na pásovém vedení bude

$$U_{ef} = Z I_{ef} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} I_{ef} \quad [\text{V}, \text{A}, \Omega]. \quad (39,36)$$

Ztráty v celém vedení:

$$P = (lb) P_{n1} = R I_{ef}^2 \quad [\text{W}, \text{cm}, \text{A}, \Omega]. \quad (39,37)$$

Příklad 39,1

Vypočtěme ztráty a úbytek v měděném pásovém vedení o délce 13 m. Výška pásů $b = 20$ cm, tloušťka $d = 0,5$ cm, vzdálenost pásů $2c = 2,0$ cm. Prochází proud $I_{ef} = 1575$ A, kmitočet $f = 600$ Hz. Vodivost $\gamma = 5,5 \cdot 10^6$ S/cm. Hloubka vniku $a = 0,276$ cm. Argument $\frac{d}{a} = \frac{0,50}{0,276} = 1,81$. Z diagramu 39,4 odečteme: $\varphi = 0,926$, $\psi = 0,97$.

$$R = \rho \frac{2l}{ab} \varphi = \frac{1}{5,5 \cdot 10^6} \cdot \frac{2 \cdot 13 \cdot 10^2}{0,276 \cdot 20} \cdot 0,926 = 7,9 \cdot 10^{-4} \quad \Omega.$$

Ztráty ve vedení:

$$P = RI_{ef}^2 = 7,9 \cdot 10^{-4} \cdot 1,575^2 \cdot 10^6 = 1960 \text{ W}.$$

Reaktance vedení z (39,33):

$$\begin{aligned} \omega L &= \frac{1}{5,5 \cdot 10^6} \cdot \frac{2 \cdot 13 \cdot 10^2}{0,276 \cdot 20} \cdot 0,97 + 6,28 \cdot 6 \cdot 10^2 \cdot 1,256 \cdot 10^{-8} \cdot 1 \\ &\cdot \frac{2,0 \cdot 13 \cdot 10^2}{20} = 0,83 \cdot 10^{-3} + 6,12 \cdot 10^{-3} = 6,95 \cdot 10^{-3} \Omega. \end{aligned}$$

Výsledná impedance:

$$Z = R + j\omega L = (0,79 + j 6,95) \cdot 10^{-3} \Omega,$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = \sqrt{0,79^2 + 6,95^2} \cdot 10^{-3} = 6,97 \cdot 10^{-3} \Omega.$$

Úbytek na vedení:

$$U_{ef} = Z I_{ef} = 6,97 \cdot 10^{-3} \cdot 15,75 \cdot 10^2 = 11,0 \text{ V}.$$

3,93. Elektrická složka E vlnění v mezeře mezi pásy

U obvyklého pásového vedení, které je jedním koncem připojeno na zdroj a na druhém konci je zátěž, je celá soustava (oba pásy + mezera $2c$) symetrická vzhledem ke střední rovině. Na každou jednotku délky obou pásů musíme

Hodnota	1 ve stěně	2 ve stěně	3 v každé polovině stěny	4 v každé polovině stěny
H [A/cm]	$H_1 e^{-px}$			$H_2 \frac{\sinh pz}{\sinh pd}$
H [A/cm]	$H_1 e^{-\frac{x}{a}}$			$H_2 \sqrt{\frac{\cosh \frac{2z}{a} - \cos \frac{2z}{a}}{\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a}}}$
E [V/cm]	$\frac{p}{y} H_1 e^{-px}$			$-\frac{p}{y} H_2 \frac{\cosh pz}{\sinh pd}$
E [V/cm]	$\frac{\sqrt{2}}{ay} H_1 e^{-\frac{x}{a}}$			$\frac{\sqrt{2}}{ay} H_2 \sqrt{\frac{\cosh \frac{2z}{a} + \cos \frac{2z}{a}}{\cosh \frac{2d}{a} + \cos \frac{2d}{a}}}$
$\frac{H}{H_1}$	$e^{-\frac{x}{a}}$			$\sqrt{\frac{\cosh \frac{2z}{a} - \cos \frac{2z}{a}}{\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a}}}$
$\frac{E}{E_1} = \frac{J}{J_1} =$ $= \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma_1}}$	$e^{-\frac{x}{a}}$			$\sqrt{\frac{\cosh \frac{2z}{a} + \cos \frac{2z}{a}}{\cosh \frac{2d}{a} + \cos \frac{2d}{a}}}$
I_{n1} [A/cm]	H_1	H_2	H_2	$I_{n1} = H_1$
P_{n1} [W/cm ²]	$\frac{1}{2ay} H_1^2$			$\frac{H_2^2}{2ay} \left(\frac{\sinh \frac{2d}{a} + \sin \frac{2d}{a}}{\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a}} \right)$
R_{n1} [$\Omega \cdot \text{cm}$]	$\frac{1}{ay}$			$\frac{1}{ay} \left(\frac{\sinh \frac{2d}{a} + \sin \frac{2d}{a}}{\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a}} \right)$
ωL_{n1} [$\Omega \cdot \text{cm}$]	$\frac{1}{ay}$			$\frac{1}{ay} \left(\frac{\sinh \frac{2d}{a} - \sin \frac{2d}{a}}{\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a}} \right)$

Tabulka 3.11.1 Přehled roviných vlnění

Hodnota	1	2	3	4	5	6	Poznámka
	ve stěně	ve stěně	v každé polovině stěny	v každé stěně	v každé polovině		
	\bar{S}	\bar{S}	\bar{S}	\bar{S}	\bar{S}	\bar{S}	
$H [A/cm]$	$H_1 e^{-px}$		$H_1 \frac{\sinh pz}{\sinh pd}$		$H_1 \frac{\cosh pz}{\cosh pd}$		Pro případy 1 až 6: $J = \gamma E [A/cm^2]$ $\sigma = \frac{1}{2\gamma} J^2 [W/cm^3]$ $a = \sqrt{\frac{2}{\omega \gamma \mu_s u}} [\text{cm}]$ $p = \frac{a}{a}$
$H [A/cm]$	$H e^{-\frac{x}{a}}$		$H_1 \sqrt{\frac{\cosh \frac{2z}{a} - \cos \frac{2z}{a}}{\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a}}}$		$H_1 \sqrt{\frac{\cosh \frac{2z}{a} + \cos \frac{2z}{a}}{\cosh \frac{2d}{a} + \cos \frac{2d}{a}}}$		
$E [V/cm]$	$\frac{p}{\gamma} H_1 e^{-px}$		$\frac{p}{\gamma} H_1 \frac{\cosh pz}{\sinh pd}$		$\frac{p}{\gamma} H_1 \frac{\sinh pz}{\cosh pd}$		
$E [V/cm]$	$\frac{\sqrt{2}}{a\gamma} H_1 e^{-\frac{x}{a}}$		$\frac{\sqrt{2}}{a\gamma} H_1 \sqrt{\frac{\cosh \frac{2z}{a} + \cos \frac{2z}{a}}{\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a}}}$		$\frac{\sqrt{2}}{a\gamma} H_1 \sqrt{\frac{\cosh \frac{2z}{a} - \cos \frac{2z}{a}}{\cosh \frac{2d}{a} + \cos \frac{2d}{a}}}$		
H H_1	$e^{-\frac{x}{a}}$		$\sqrt{\frac{\cosh \frac{2z}{a} - \cos \frac{2z}{a}}{\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a}}}$		$\sqrt{\frac{\cosh \frac{2z}{a} + \cos \frac{2z}{a}}{\cosh \frac{2d}{a} + \cos \frac{2d}{a}}}$		
$\frac{E}{E_1} = \frac{J}{J_1} =$ $= \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma_1}}$	$e^{-\frac{x}{a}}$		$\sqrt{\frac{\cosh \frac{2z}{a} + \cos \frac{2z}{a}}{\cosh \frac{2d}{a} + \cos \frac{2d}{a}}}$		$\sqrt{\frac{\cosh \frac{2z}{a} - \cos \frac{2z}{a}}{\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a}}}$		
$I_{11} [A/cm]$	H_1	H_1	H_1	$I_{11} = H_1$	$I_{11} = H_1$	$I_{11} = H_1 \frac{\cosh pd - 1}{\cosh pd}$	Případ 6: $I_{11} =$
$P_{11} [W/cm^2]$	$\frac{1}{2a\gamma} H_1^2$		$\frac{H_1^2}{2a\gamma} \left(\sinh \frac{2d}{a} + \sin \frac{2d}{a} \right)$		$\frac{H_1^2}{2a\gamma} \left(\sinh \frac{2d}{a} - \sin \frac{2d}{a} \right)$	$\frac{H_1^2}{2a\gamma} \left(\cosh \frac{2d}{a} + \cos \frac{2d}{a} \right)$	$= H_1 \sqrt{\frac{\cosh \frac{d}{a} - \cos \frac{d}{a}}{\cosh \frac{d}{a} + \cos \frac{d}{a}}}$
$R_{11} [\Omega \cdot \text{cm}]$	$\frac{1}{a\gamma}$		$\frac{1}{a\gamma} \left(\sinh \frac{2d}{a} + \sin \frac{2d}{a} \right)$		$\frac{1}{a\gamma} \left(\sinh \frac{d}{a} + \sin \frac{d}{a} \right)$	$\frac{1}{a\gamma} \left(\cosh \frac{d}{a} - \cos \frac{d}{a} \right)$	
$\omega L_{11} [\Omega \cdot \text{cm}]$	$\frac{1}{a\gamma}$		$\frac{1}{a\gamma} \left(\sinh \frac{2d}{a} - \sin \frac{2d}{a} \right)$		$\frac{1}{a\gamma} \left(\sinh \frac{d}{a} - \sin \frac{d}{a} \right)$	$\frac{1}{a\gamma} \left(\cosh \frac{d}{a} - \cos \frac{d}{a} \right)$	

dodat ze zdroje určité napětí na krytí činných a jalových úbytků. Obě rozhraní vyzařují vzájemně proti sobě elmg. rovinné vlnění.

Předpokládejme v další úvaze, že na zdroj připojíme pouze jeden z obou pásů, např. levý (obr. 39,6). Tento pás bude vyzařovat do mezery elmg. vlnění, které dopadne na protější pás (pravý), částečně pronikne do tohoto pásu, vybudí stejný proud $I_{21} = -I_{11}$ [A/cm] a větší část vlnění se odrazí zpět. Rozložení elmg. pole v obou pásech i v mezeře bude přesně stejné jako při napájení obou pásů, pouze v tomto případě jsou úbytky v levém pásu, které kryjeme ze zdroje, dvakrát větší než úbytek v jednom pásu při obvyklém zapojení pásového vedení.

Předpokládejme, že má vedení nekonečnou vodivost, je bezztrátové. Hloubka vniku bude $a = 0$, magnetické toky Φ_1' na obr. 39,6 budou mít nulové hodnoty. Proud v levém pásu bude být magnetický tok $2\Phi_1'$ podle (39,29). Tento magnetický tok vyvolá v rozhraní levého pásu, na úseku 6—5 elektromotorickou sílu

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{(2c)} &= -\frac{2d\Phi_1'}{dt} = -j\omega \cdot 2c \mu_0 \mu \mathbf{H}_2 = -j 2\pi f \cdot 2c \cdot 4\pi \cdot 10^{-9} \cdot 1 \cdot \mathbf{H}_2 = \\ &= -j (4\pi)^2 c \mu_0 f \mathbf{H}_2 \cdot 10^{-9} \quad [\text{V/cm}].\end{aligned}\quad (39,38)$$

V části 3,22 jsme odvodili, že stojaté vlnění v mezeře mezi stěnou vyzařující a odrázející v případě, že jejich vzájemná vzdálenost $(2c)$ je velmi malá proti vlnové délce λ , je dáno výrazem (32,37).

Porovnáme-li výrazy (39,38) a (32,37), zjistíme jejich totožnost.

Odvozený výsledek můžeme popsat takto:

Dodává-li zdroj do jedné ze dvou rovnoběžných stěn střídavý proud I_{11} [A/cm], vznikne mezi stěnami homogenní magnetické pole, které ve vyzařující stěně budí protielektromotorickou sílu $\mathbf{E}_{(2c)}$ [V/cm] podle (39,38). Tato protiehma je podle (32,37) právě stejně veliká, jako amplituda stojatého vlnění ve vyzařující rovině.

3,10. Ekvivalentní hloubka vniku

Při řešení rovnic elektromagnetického rovinného vlnění ve vodivém prostředí se ukázalo výhodným zavedení pojmu *hloubka vniku* a .

$$a = \sqrt{\frac{2}{\omega \gamma \mu_0 \mu}} \quad [\text{cm}].$$

V části 3,45 jsme odvodili fyzikální výklad tohoto pojmu. Množství tepla,

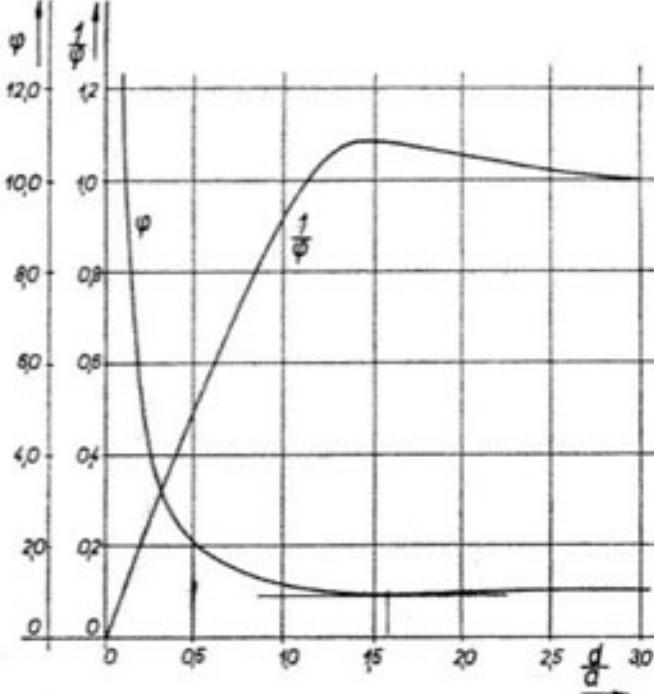
které vznikne ve stěně velké tloušťky při průchodu naindukovaného proudu I_{21} , je dáný výrazem (34,28):

$$P_{21} = \frac{1}{2a\gamma} I_{21}^2 = \frac{1}{a\gamma} I_{21\text{et}}^2 \quad [\text{W/cm}^2, \text{S.cm}^{-1}, \text{A/cm}].$$

Při průchodu prostorově rozloženého naindukovaného proudu I_{21} stěnou

velké tloušťky vznikne množství tepla P_{21} stejně velké, jako by vzniklo při průchodu rovnoměrně rozloženého stejně velikého proudu $I_{21\text{et}}$ vrstvou z téhož materiálu, o tloušťce rovné hloubce vniku a .

Odvodme *ekvivalentní hloubku vniku*, označme a^+ , definovanou obdobným způsobem pro stěnu malé tloušťky d [cm].



Obr. 310.1. Diagram pro stanovení ekvivalentní hloubky vniku.

Ve stěně malé tloušťky vznikne podle (35,61), je-li naindukovaný proud I_{21} [A/cm], množství tepla P_{21} :

$$P_{21} = \frac{1}{2a\gamma} I_{21}^2 \frac{\left(\sinh \frac{2d}{a} + \sin \frac{2d}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a} \right)} = \frac{1}{a\gamma} I_{21\text{et}}^2 \varphi \left(\frac{2d}{a} \right) \quad [\text{W/cm}^2]. \quad (310.1)$$

Z definice *ekvivalentní hloubky vniku* a^+ vyplývá, že stejně množství tepla má vzniknout při průchodu rovnoměrně rozloženého stejně velikého proudu $I_{21\text{et}}$ vrstvou z téhož materiálu, avšak o tloušťce a^+ :

$$P_{21} = \frac{1}{a\gamma} I_{21\text{et}}^2 \varphi \left(\frac{2d}{a} \right) = \frac{1}{a^+ \gamma} I_{21\text{et}}^2 \quad [\text{W/cm}^2]. \quad (310.2)$$

Pro hledanou ekvivalentní hloubku vniku a^+ dostáváme výraz

$$a^+ = a \frac{1}{\varphi \left(\frac{2d}{a} \right)} = a \frac{\left(\cosh \frac{2d}{a} - \cos \frac{2d}{a} \right)}{\left(\sinh \frac{2d}{a} + \sin \frac{2d}{a} \right)} \quad [\text{cm}]. \quad (310.3)$$

Hodnoty funkce φ a $\frac{1}{\varphi}$ jsou v tabulce 310.1

Tabulka 310.1

$\frac{d}{a}$	$\varphi \left(\frac{2d}{a} \right)$	$\frac{1}{\varphi}$	$\frac{d}{a}$	$\varphi \left(\frac{2d}{a} \right)$	$\frac{1}{\varphi}$
0,10	10,00	0,10	1,57	0,918	1,088
0,25	4,00	0,25	1,75	0,925	1,080
0,50	2,01	0,497	2,0	0,950	1,052
0,75	1,37	0,73	3,0	0,999	1,001
1,00	1,085	0,92	5,0	1,00	1,00
1,25	0,96	1,04	10,0	1,00	1,00
1,50	0,92	1,085			

Graficky je průběh φ a $\frac{1}{\varphi}$ zobrazen v diagramu 310.1.

Z průběhu funkce $\frac{1}{\varphi}$ na obrázku vidíme, že ekvivalentní hloubka vniku a^+ roste od nuly (pro $\frac{d}{a} = 0$) přibližně lineárně asi do $\frac{d}{a} = 1,0$, potom se ohýbá a přiblížuje asymptoticky kmezni hodnotě $\lim \left(\frac{1}{\varphi} \right) \rightarrow 1,0$, rovná-li se tloušťka d vícenásobku hloubky vniku a .

Výraz (310.3) udává ekvivalentní hloubku vniku pro stěnu o tloušťce d , na kterou dopadá z jedné strany elmg. rovinné vlnění. Tentýž výraz platí i pro stěnu s vlněním z obou stran, s proudy téže fáze, dále pro stěnu vedoucí proud a pro pásové vedení.

3.11. Přehled rovinných vlnění

V dále uvedené tabulce 310.1 jsou přehledně uspořádány výsledky odvozené pro všechny uvažované případy rovinných vlnění. Rozložení elektrického a magnetického pole v každé polovině stěny v případě 3 a 4 a v každé stěně případu 5 je stejně jako ve stěně malé tloušťky (případ 2). Výrazu v 1. sloupci, platné pro stěnu velké tloušťky, můžeme snadno odvodit z výrazů pro stěnu malé tloušťky (případ 2), jestliže zvětšujeme tloušťku d do nekonečna.

Od všech předchozích se odlišuje případ 6. Ve výrazech pro intenzitu E a H v případě 3 a 6 je vidět vzájemnou záměnu hyperbolických funkcí. Zajímavé je porovnání výrazů pro poměry $\frac{H}{H_2}$ a $\frac{E}{E_2}$ a výrazů pro činný odpor a reaktanci.

4. Válcové elektromagnetické vlnění

Zdrojem válcového elmg. vlnění je válcová plocha nekonečné délky, protékaná střídavým proudem tak, že proudová vlákna leží v rovinách kolmých k ose válce. Předpokládejme, že okamžitá hodnota proudové hustoty i_{11} [A/cm], připadající na část válcové plochy o osové délce 1 cm, je v každém okamžiku po celé délce stejná. Takováto válcová plocha vyzařuje do své dutiny válcové elmg. vlnění.

Umístěme vyzařující válec tak, aby jeho osa splynula s osou Z polárního souřadnicového systému. Vektory S , E , H v kterémkoliv místě v dutině válce jsou pouze funkci poloměru r a nezávisí na úhlu natočení φ od nějaké zvolené výchozí polohy ani na vzdálenosti z od zvolené výchozí roviny. Určíme-li v dalším veličiny E a H v uvažovaném bodu na poloměru r , potom tytéž hodnoty E a H budou mít všechny body souosé válcové plochy o poloměru r .

Uvažovanou vyzařující válcovou plochu můžeme realizovat tak, že ji navineme jako cívku z vodiče obdélníkového průřezu, při čemž předpokládáme nulovou tloušťku izolace mezi závití. Předpokládejme, že stoupání závitů je zanedbatelně malé proti poloměru r , takže přibližně je splněna podmínka, aby proudová vlákna ležela v rovinách, kolmých k ose cívky.

Na obr. 40,1 je schematicky vyznačena uvažovaná vyzařující válcová plocha.

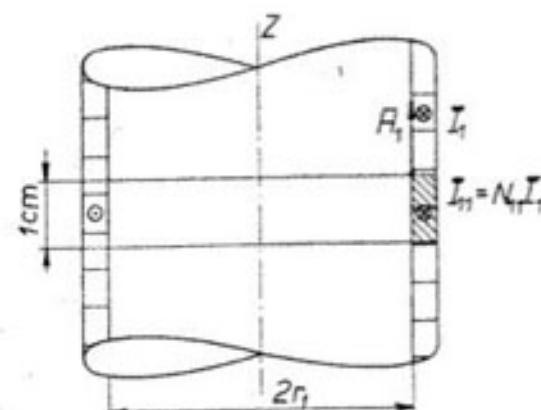
Počet závitů, připadající na část cívky o osové délce 1 cm, označme N_{11} [1/cm]. Proud v závitech cívky nechť je I_1 [A], takže proudová hustota I_{11} bude

$$I_{11} = N_{11} I_1 \quad [\text{A}/\text{cm}]. \quad (40,1)$$

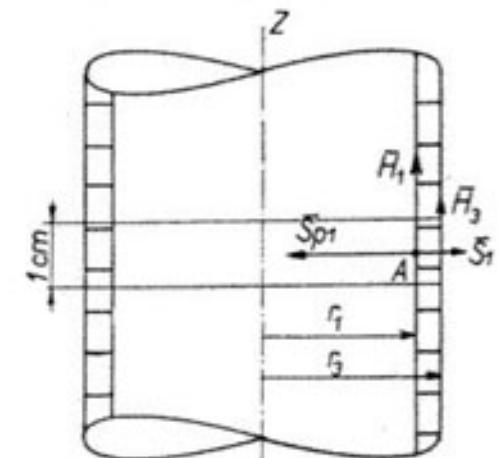
Sledujme podle obr. 40,2 jednotlivé vektory (jejich vzájemnou prostorovou orientaci). Teče-li proud I_{11} vyznačeným směrem, má intenzita elektrického pole E_1 na poloměru r_1 stejný směr i smysl. Vektor magnetické intenzity H_1 směřuje vzhůru. Vektory E_1 a H_1 určují zářivý vektor S_1 , kolmý k jejich rovině. Jeho smysl je takový, že vstupuje kolmo do stěny cívky a značí velikost ztrát v cívce. Proud I_1 v cívce vybudi v dutině cívky magnetický tok, který indukuje v závitech elektromotorickou sílu E_1 opačného smyslu, než je intenzita E_1 . Magnetická intenzita H_1 a indukovaná elektromotorická síla E_1 vytvoří zářivý vektor S_{p1} , který je opět kolmý k povrchu cívky a směřuje radiálně k její ose. Cívka tedy vyzařuje do své dutiny elektromagnetický tok o hustotě S_{11} [W/cm²].

U cívky nekonečné délky můžeme pouze teoreticky předpokládat konstantní hustotu proudu i_{11} [A/cm] v celé délce cívky. To by mohlo ve skutečnosti

nastat pouze v případě, že rychlosť šíření proudové vlny podél vodiče cívky by byla nekonečná. U skutečných cívek, jejichž rozměry jsou zpravidla velmi malé proti vlnové délce λ při použití kmitočtu, je předpoklad též hustoty proudu i_{11} po celé délce cívky splněn s velkou přesností. (např. pro kmitočet $f = 10^4$ Hz je vlnová délka ve vzduchu $\lambda = 30$ km).

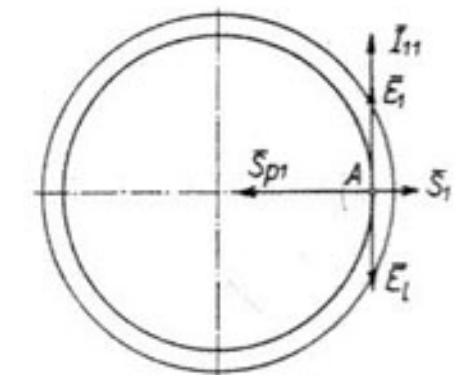


Obr. 40,1. Schematický řez válcovou cívku.



Obr. 40,2. Schematický řez válcovou cívku.

Vektor S_{p1} značí elmg. vlnění, které vyzařuje vnitřní povrch cívky do vlastní dutiny.



Předpokládáme-li v teoretických úvahách, že cívka má nekonečnou délku, potom se magnetický tok, buzený v dutině cívky, vrací nekonečným prostorem vně cívky, má nekonečný průřez, a tedy nulovou intenzitu. Proto intenzita magnetického pole H_2 na vnějším poloměru r_2 se rovná nule. Z obr. 40,1 vidíme:

$$I_{11} = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = H_1 \cdot 1 - H_2 \cdot 1 = H_1 \quad [\text{A}/\text{cm}] \quad (40,2)$$

4.1. Válcové elektromagnetické vlnění v dutině cívky

4.1.1. Odvození intenzity H a E obecně

V části 2,10 jsme odvodili pro izolační prostředí, pro magnetickou složku obecného elektromagnetického vlnění, rovnici (21,13)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu} \nabla^2 \mathbf{H} = \frac{c^2}{\epsilon \mu} \nabla^2 \mathbf{H} \quad [\text{A}/\text{cm}] \quad (41,1)$$

Na pravé straně rovn. (41,1) je čtverec rychlosti šíření v a Laplaceův diferenciální operátor vektoru \mathbf{H} .

Laplaceův diferenciální operátor má v polárním souřadnicovém systému tvar

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2}. \quad (41,2)$$

V uvažovaném případě intenzita \mathbf{H} nezávisí ani na úhlu natočení φ , ani na souřadnici z , takže:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial \varphi^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} = 0, \quad (41,3)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial r} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial r} + \frac{1}{r} r \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial r}. \quad (41,4)$$

Dosadme za $\nabla^2 \mathbf{H}$ z (41,4) do (41,1):

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial r} \right). \quad (41,5)$$

Protože uvažujeme harmonické vlnění $\mathbf{H} = H e^{j\omega t}$, je

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = (j\omega)^2 H e^{j\omega t} = -\omega^2 \mathbf{H}. \quad (41,6)$$

Spojením (41,5) a (41,6) dostaneme

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial r} + \left(\frac{\omega}{v} \right)^2 \mathbf{H} = 0. \quad (41,7)$$

Označme součinitele při \mathbf{H} znakem m^2 , dělme výraz (41,7) tímto součinitelem:

$$\frac{d^2 \mathbf{H}}{d(mr)^2} + \frac{1}{mr} \frac{d \mathbf{H}}{d(mr)} + \mathbf{H} = 0, \quad (41,8)$$

$$m = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{\lambda f} = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (41,9)$$

Výraz (41,8) je Besselova diferenciální rovnice 2. řádu. Jejím řešením je lineární kombinace dvou cylindrivkých funkcí téhož argumentu:

$$\mathbf{H} = C_1 J_0(mr) + C_2 N_0(mr) \quad [\text{A/cm}]. \quad (41,10)$$

Znaky C_1, C_2 jsou integrační konstanty, $J_0(mr), N_0(mr)$ jsou cylindrické funkce nultého řádu, prvního a druhého druhu, pro reálný argument (mr) . Podrobněji rozvedeno v příloze, část 7,31.

K výrazu (41,10) pro intenzitu magnetického pole \mathbf{H} v místě o poloměru r je třeba ještě odvodit výraz pro intenzitu elektrického pole \mathbf{E} .

Vzájemný vztah mezi \mathbf{E} a \mathbf{H} dostaneme, určíme-li podle obr. 41,1 rotor \mathbf{H} .

Rot \mathbf{H} dostaneme, jestliže práci, kterou vykoná magnetická intenzita \mathbf{H} po dráze 1—2—3—4—1, dělme ploškou $(1 \times dr)$.

$$(-\operatorname{rot} \mathbf{H}) = \frac{\left[\left(\mathbf{H} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial r} dr \right) \cdot \mathbf{1} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{1} \right]}{1 \cdot dr} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial r}. \quad (41,11)$$

Vyjádřeme rot \mathbf{H} z 1. Maxwellovy rovnice:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \\ &= j\omega \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial r}. \end{aligned} \quad (41,12)$$

Určeme intenzitu \mathbf{E} z výrazu (41,12):

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{j\omega \epsilon_0 \epsilon} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial r}. \quad (41,13)$$

Provedme derivaci výrazu (41,10) a dosadme do (41,13):

Podle přílohy, výraz (73,8),

$$\frac{d [J_0(mr)]}{d(mr)} = \frac{d [J_0(mr)]}{m dr} = -J_1(mr),$$

$$\frac{d [J_0(mr)]}{dr} = -m J_1(mr), \quad (41,14)$$

$$\frac{d [N_0(mr)]}{dr} = -m N_1(mr). \quad (41,15)$$

$J_1(mr), N_1(mr)$ jsou cylindrické funkce prvního řádu, prvního a druhého druhu, pro argument (mr) .

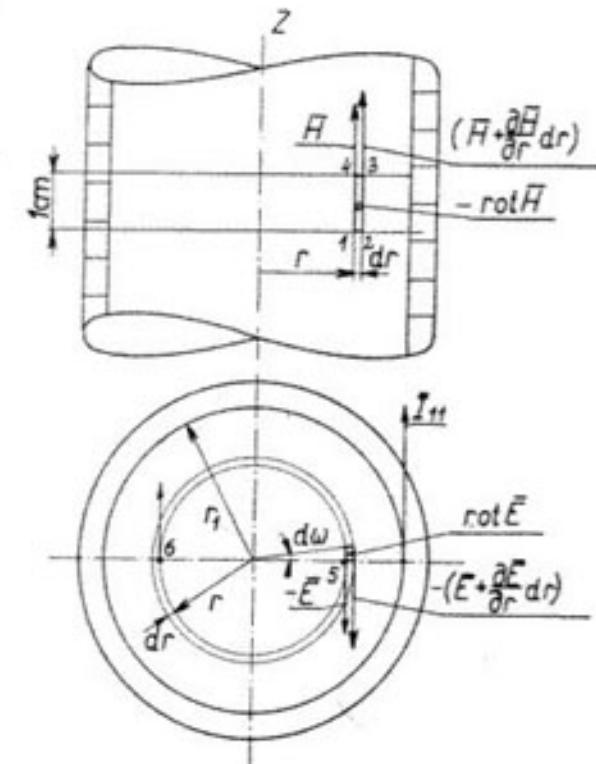
$$\mathbf{E} = \frac{m}{j\omega \epsilon_0 \epsilon} [C_1 J_1(mr) + C_2 N_1(mr)]. \quad (41,16)$$

Dosadme za m z (41,9):

$$\frac{m}{j\omega \epsilon_0 \epsilon} = -j \frac{\omega}{v \epsilon_0 \epsilon} = -j \frac{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu}}{\epsilon_0 \epsilon} = -j \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon}} = -j 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}.$$

$$\mathbf{E} = -j 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} [C_1 J_1(mr) + C_2 N_1(mr)] \quad [\text{V/cm}]. \quad (41,17)$$

Výrazy (41,10) a (41,17) určují složku magnetickou a elektrickou válcového elmg. vlnění v dutině cívky. Integrační konstanty C_1 a C_2 určíme z mezních podmínek, rozdílných pro jednotlivé případy.



Obr. 41,1. Diagram pro odvození rot H a rot E v dutině cívky.

První člen v obou výrazech značí vlnu vyzařovanou cívku, druhý člen značí vlnu odraženou.

Na obr. 41,1 je vidět orientace vektoru \mathbf{E} v protilehlých bodech 5 a 6. Z úvahy vyplývá, že pro $r = 0$, musí být $\mathbf{E}_0 = 0$. Dosadme tento výsledek do (41,17):

$$\mathbf{E}_0 = 0 = -j 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} [C_1 J_1(0) + C_2 N_1(0)]. \quad (41,18)$$

Protože je $J_1(0) = 0$, $N_1(0) = -\infty$, musí být

$$C_2 = 0. \quad (41,19)$$

Výraz (41,19) značí, že v uvažovaném případě nenastává odraz, elmg. vlnění v prázdné dutině cívky má pouze složky \mathbf{H}_p a \mathbf{E}_p , vyzařované cívou.

Druhou integrační konstantu C_1 dostaneme z podmínky, že intenzita \mathbf{H}_1 v místě r_1 je určena výrazem (40,2),

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= N_{11} I_1 = I_{11} = C_1 J_0(mr_1), \\ C_1 &= \frac{\mathbf{H}_1}{J_0(mr_1)}. \end{aligned} \quad (41,20)$$

Výrazy (41,10) a (41,17) mají v případě prázdné dutiny tvar:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_p = C_1 J_0(mr) = \mathbf{H}_1 \frac{J_0(mr)}{J_0(mr_1)} = \mathbf{H}_1 \frac{J_0\left(\frac{2\pi}{\lambda} r\right)}{J_0\left(\frac{2\pi}{\lambda} r_1\right)} \quad [\text{A/cm}]. \quad (41,21)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_p = -j 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{H}_1 \frac{J_1(mr)}{J_0(mr_1)} = -j 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{H}_1 \frac{J_1\left(\frac{2\pi}{\lambda} r\right)}{J_0\left(\frac{2\pi}{\lambda} r_1\right)} \quad [\text{V/cm}]. \quad (41,22)$$

Označme argument Besselových funkcí zkráceně znakem x :

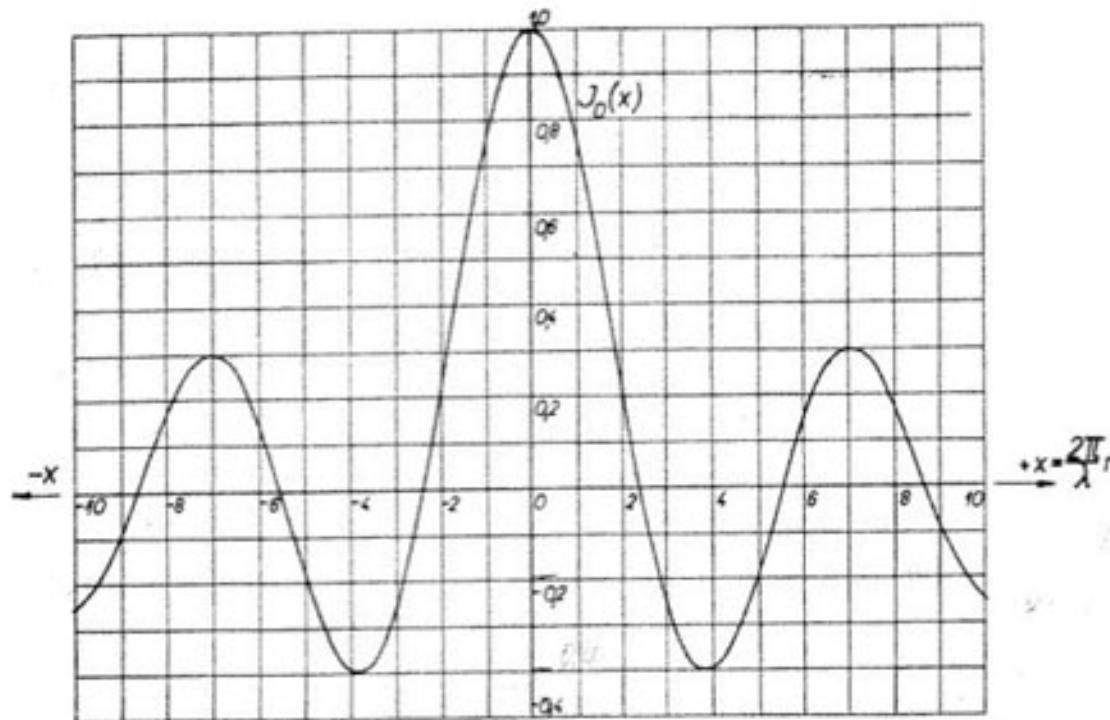
$$x = (mr) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) r. \quad (41,23)$$

Protože uvažujeme harmonické vlnění, můžeme výrazy (41,21) a (41,22) napsat:

$$\mathbf{H}_p = \frac{\mathbf{H}_1}{J_0(x_1)} J_0(x) e^{j\omega t} \quad [\text{A/cm}]. \quad (41,24)$$

$$\mathbf{E}_p = -j 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\mathbf{H}_1}{J_0(x_1)} J_1(x) e^{j\omega t} \quad [\text{V/cm}]. \quad (41,25)$$

Z výrazů je vidět, že v dutině cívky je stojaté elmg. vlnění. Amplituda složky magnetické \mathbf{H} je dána Besselovou funkci nultého řádu, argumentu $x = mr$, amplituda vlny elektrické \mathbf{E} Besselovou funkci prvního řádu téhož argumentu x .



Obr. 41,2. Průběh cylindrické funkce prvního druhu nultého řádu s reálným argumentem x .

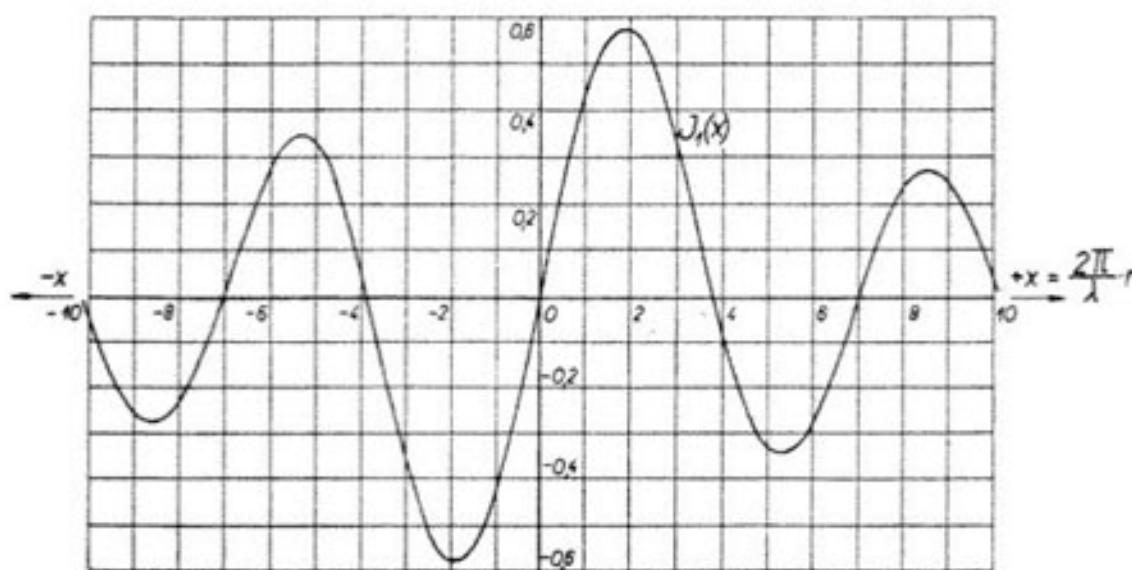
Průběhy funkcí $J_0(x)$ a $J_1(x)$, které jsou současně i obrazem amplitud H a E , jsou v diagramech 41,2 a 41,3, číselné hodnoty jsou v tabulce 41,1.

Tabulka 41,1

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$
0,00	1,0000	0,0000	5,52	0,0000	-0,3403
0,50	0,9385	0,2423	6,00	0,1506	-0,2767
1,00	0,7652	0,4401	6,50	0,2651	-0,1538
1,50	0,5118	0,5579	7,00	0,3001	-0,0047
2,00	0,2239	0,5767	7,01	0,3001	-0,0017
2,40	0,0025	0,5202	7,02	0,3001	+0,0013
2,405	0,0000	0,5191	7,50	0,2663	0,1352
2,50	-0,0484	0,4971	8,00	0,1717	0,2346
3,00	-0,2601	0,3391	8,50	0,0419	0,2731
3,50	-0,3801	0,1374	8,65	+0,0010	0,2716
3,83	-0,4028	+0,0007	8,66	-0,0017	0,2713
3,84	-0,4027	-0,0033	9,00	-0,0903	0,2453
4,00	-0,3971	-0,0660	9,50	-0,1939	0,1613
4,50	-0,3205	-0,2311	10,0	-0,2459	0,0435
5,00	-0,1776	-0,3276			
5,50	-0,0068	-0,3414			

Z obr. 41,2 vidíme, že intenzita magnetického pole H má maximální hodnotu v ose cívky, s rostoucím poloměrem se mění podle Besselovy funkce $J_0(x)$.

Na poloměru, kterému přísluší argument $x = 2,405$, má nulovou hodnotu, další nulová hodnota je pro argument $x = 4,52$, atd. (uzly).



Obr. 41,3. Průběh cylindrické funkce prvního druhu prvního řádu s reálným argumentem x .

V jednotlivých půlvalnách jsou střídavě kladné a záporné hodnoty. Křivka $J_0(x)$ připomíná do určité míry průběh goniometrické funkce $\cos x$. Je to vidět i z podobnosti řad těchto funkcí:

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{(2 \cdot 4)^2} - \frac{x^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} + \dots \quad (41,26)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (41,27)$$

Průběh intenzity elektrického pole E je dán Besselovou funkci $J_1(x)$ prvního druhu, prvního řádu. Má rovněž kladná a záporná maxima (kmitny) a nulové body (uzly), jak vidíme v diagramu 41,3 a v tabulce 41,1. Tato křivka připomíná goniometrickou funkci $\sin x$. Uvedme pro porovnání řady, které tyto funkce definují:

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} + \frac{x^5}{(2 \cdot 4) \cdot 6^2} - \frac{x^7}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2 \cdot 8} + \dots \quad (41,28)$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (41,29)$$

4.12. Poměry u skutečných cívek obvyklých rozměrů a používaných kmitočtů

Aplikujme odvozené výsledky na skutečné poměry. U tavících a prohřívacích indukčních pecí používáme zpravidla středních kmitočtů, až asi do $f = 10^4$ Hz. V dutině cívky je vzduch, $\epsilon = 1$, $\mu = 1$. Rychlosť šíření elektromagnetického vlnění v dutině bude: $v = c = 3 \cdot 10^10$ cm/s. Vlnová délka pro kmitočet $f = 10^4$ Hz

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{10^4} = 3 \cdot 10^6 \text{ cm} = 30 \text{ km}.$$

Uvažujme jako příklad, že průměr cívky pro tavící pec na 5000 kg oceli se rovná 117 cm, $r_1 = 58,5$ cm. Pec napájíme proudem o kmitočtu 600 Hz, $\lambda = 500$ km. Mezní hodnota argumentu x_1 bude:

$$x_1 = mr_1 = \frac{2\pi}{\lambda} r_1 = \frac{6,28 \cdot 58,5}{5 \cdot 10^7} = 7,36 \cdot 10^{-6}$$

Z přílohy 7,41, z výrazů (73,5) a (73,7) vidíme, že pro velmi malý argument platí s velkou přiblížností

$$J_0(x) \doteq 1,0, \quad J_1(x) \doteq \frac{x}{2}. \quad (41,30)$$

Dosadime-li (41,30) do (41,24) a (41,25), dostaneme pro průběh H_p a E_p v dutině skutečných pecních cívek

$$H_p \doteq H_1 \quad [\text{A/cm}], \quad (41,31)$$

$$E_p = -j 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_1 \frac{x}{2} \quad [\text{V/cm}]. \quad (41,32)$$

Výraz (41,31) značí, že v dutině skutečných pecních cívek je homogenní magnetické pole o hodnotě $H_p = H_1 = N_{11} I_1$ [A/cm].

Intenzita elektrického pole E_p roste lineárně s $x = (mr)$, minimum je pro $r = x = 0$, $E_p = 0$, maxima E_{p1} dosáhne pro $x_1 = mr_1$. Jeho číselná hodnota v soustavě praktických jednotek je ve srovnání s H_p poměrně malá.

Stanovme např. hodnotu E_{p1} v případě uvažované pece pro 5000 kg oceli, $x_1 = 7,36 \cdot 10^{-6}$. Intenzita $H_p = 1200$ A/cm.

$$E_{p1} = -j 60\pi \sqrt{\frac{1}{1}} \cdot 1200 \cdot 7,36 \cdot 10^{-6} = -1,66 \quad \text{V/cm}.$$

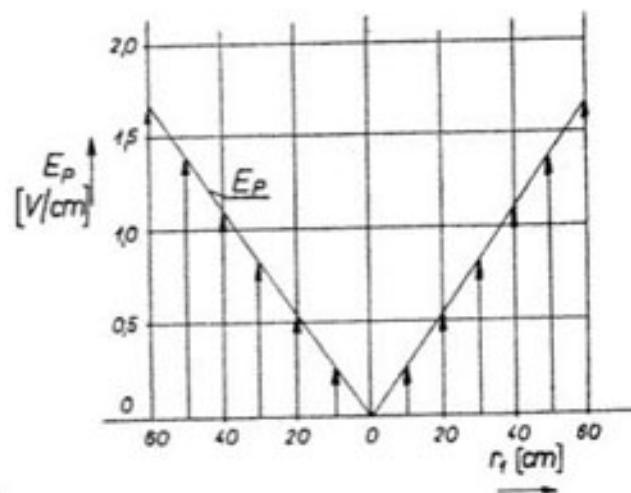
Graficky jsou průběhy H_p a E_p pro uvažovaný příklad zobrazeny v diagramech 41,4 a 41,5.

Porovnáme-li diagram 41,2 s 41,4 a obdobně 41,3 s 41,5, vidíme, že u skutečných pecí se z křivek 41,2 a 41,3 uplatní pouze úzké oblasti v nepatrném rozmezí ($\pm x$) poblíž nuly. Na obr. 41,5 jsme vynesli hodnoty E_p v obou oblastech ($+x$) i ($-x$) na tutéž stranu, protože uvažujeme absolutní hodnoty E_p a ty jsou vždy kladné.

Pokusme se ještě vhodně upravit výraz (41,32) pro argument $x_1 = mr_1$.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2\pi r_1}{\lambda} = \frac{2\pi/r_1}{v} = \\ &= \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \mu} r_1, \\ \mathbf{E}_{p1} &= -j 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{H}_1 \cdot \frac{1}{2} x_1 = \\ &= -j \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon}} \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \mu} \frac{r_1}{2} \mathbf{H}_1 = \\ &= -j \omega \mu_0 \mu \frac{r_1}{2} \mathbf{H}_1 \quad [\text{V/cm}]. \end{aligned} \quad (41,33)$$

Obr. 41,4. Rozložení magnetického pole v dutině cívky indukční pece.



Obr. 41,5. Rozložení elektrického pole v dutině cívky indukční pece.

Protože je v dutině cívky homogenní magnetické pole \mathbf{H}_1 , protéká cívkou magnetický tok Φ_1 .

$$\Phi_1 = \pi r_1^2 \mu_0 \mu \mathbf{H}_1 \quad [\text{weber}, \text{cm}, \text{A/cm}]. \quad (41,34)$$

Na kružnici o poloměru r_1 vybudí tento tok v jednom závitu elektromotorickou silu \mathbf{U}_1 :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_1 &= -\frac{d\Phi_1}{dt} = \\ &= -j \omega \mu_0 \mu \pi r_1^2 \mathbf{H}_1 \quad [\text{V}]. \end{aligned} \quad (41,35)$$

Na 1 cm obvodu kružnice připadá část:

$$U_{11} = \frac{U_1}{2\pi r_1} = -j \omega \mu_0 \mu \frac{r_1}{2} \mathbf{H} = \mathbf{E}_{p1} \quad [\text{V/cm}]. \quad (41,36)$$

Je vidět totožnost výrazů (41,36) a (41,33).

Odvozený výsledek podává nový výklad pro vznik elektromotorické sily. Dosavadní výklad: Protéká-li cívku o vnitřním poloměru r_1 proud I_{11} [A/cm], vybudí se v dutině cívky magnetický tok Φ_1 podle (41,34), a ten indukuje ve vláknu o poloměru r_1 elektromotorickou sílu \mathbf{U}_1 [V/cm].

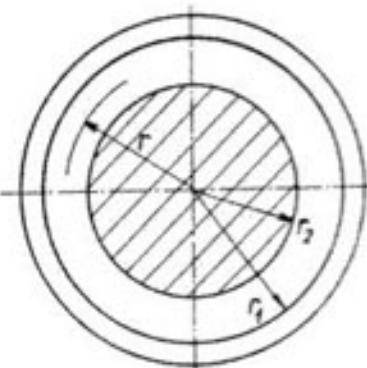
Nový výklad: Protéká-li cívku o vnitřním poloměru r_1 proud I_{11} [A/cm], vyzařuje cívka do své dutiny elektromagnetické vlnění \mathbf{S}_{p1} o složkách: \mathbf{H}_{p1} a \mathbf{E}_{p1} . Složka \mathbf{H}_{p1} vytvoří magnetický tok Φ_1 , intenzita elektrického pole \mathbf{E}_{p1} je na poloměru r_1 totožná s \mathbf{U}_{11} .

Tok elektromagnetické energie, který vyzařuje cívka do své dutiny, je dán zářivým vektorem \mathbf{S}_{p1} :

$$\mathbf{S}_{p1} = [\mathbf{E}_{p1} \mathbf{H}_{p1}] \quad [\text{VA/cm}^2, \text{V/cm}, \text{A/cm}]. \quad (41,37)$$

Uvažujme skutečnou cívku, \mathbf{H}_{p1} a \mathbf{E}_{p1} podle (41,31) a (41,33). Oba vektory jsou k sobě kolmé.

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{p1} &= \mathbf{E}_{p1} \mathbf{H}_{p1} = -j 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \frac{1}{2} x_1 \mathbf{H}_1^2 = \\ &= -j \omega \mu_0 \mu \frac{r_1}{2} \mathbf{H}_1^2 \quad [\text{VA/cm}^2, \text{A/cm}]. \end{aligned} \quad (41,38)$$



Obr. 42,1. Příčný řez válcovou cívkou a plnou vsázkou.

Protože je vektor \mathbf{E}_{p1} o $\pi/2$ časově opožděn za \mathbf{H}_{p1} , je vyzařovaná energie čistě jalová.

4.2. Válcové elektromagnetické vlnění mezi cívkom a válcovou vsázkou

4.2.1. Odvození obecných výrazů pro intenzitu elektrického a magnetického pole

Schematicky je válcová cívka a souosá vsázka z vodivého materiálu vyznačena na obr. 42,1.

Vnitřní poloměr cívky jsme označili r_1 , vnější poloměr vsázky r_2 . Pro stanovení \mathbf{E} a \mathbf{H} v mezeře mezi cívkom a vsázkou použijeme výrazů (41,10) a (41,17), které jsme odvodili v předchozí části 4,10.

$$\mathbf{H} = C_1 J_0(x) + C_2 N_0(x) \quad [\text{A/cm}], \quad (42,1)$$

$$\mathbf{E} = -j 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} [C_1 J_1(x) + C_2 N_1(x)] \quad [\text{V/cm}]. \quad (42,2)$$

Argument

$$x = mr = \frac{\omega}{v} r = \frac{2\pi}{\lambda} r.$$

První člen v obou výrazech značí vlnu vyzařovanou cívkou, druhý člen vlnu odraženou. Integrační konstanty C_1 a C_2 určíme z mezních podmínek.

$$\text{Pro } r = r_1: \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_1 = N_{11} I_1 = C_1 J_0(x_1) + C_2 N_0(x_1), \quad (42,3)$$

$$\text{pro } r = r_2: \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_2 = C_1 J_0(x_2) + C_2 N_0(x_2), \quad (42,4)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_2 = -j 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} [C_1 J_1(x_2) + C_2 N_1(x_2)]. \quad (42,5)$$

Na poloměru r_2 neznáme ani \mathbf{H}_2 , ani \mathbf{E}_2 , můžeme však použít určitého jejich vzájemného vztahu. Na rozhraní „mezera—vodivá vsázka“ dopadá elmg. vlnění, vyzařované cívkou, částečně se odráží, částečně vstupuje do vsázky, je ji absorbováno, čímž se vsázka zahřívá. Z důvodu kontinuity musí být v rozhraní tytéž hodnoty \mathbf{E}_2 a \mathbf{H}_2 ve vodivém prostředí vsázky i v izolačním prostředí mezery. Pro vodivý válec odvodíme v dalším, část 4,30, tento vzájemný vztah mezi intenzitou elektrického pole \mathbf{E}_2 a magnetického pole \mathbf{H}_2 , výraz (43,89):

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{\sqrt{2}}{ay} [P(x_2) + jQ(x_2)] \cdot \mathbf{H}_2, \quad (42,6)$$

$P(x_2)$, $Q(x_2)$ jsou určité funkce argumentu x_2 :

$$x_2 = \frac{r_2 \sqrt{2}}{a}. \quad (42,7)$$

Znak a je hloubka vniku v uvažovaném vodivém prostředí, γ jeho vodivost.

$$a = \sqrt{\frac{2}{\omega \gamma \mu_0 \mu}} = 5,04 \cdot 10^3 \sqrt{\frac{1}{f \gamma \mu}} \quad [\text{cm}]. \quad (42,8)$$

Uvažujme v dalším, že absorbované elmg. vlnění se utlumí v poměrně tenké vrstvě na povrchu vsázky. V tom případě je hodnota argumentu $x_2 > 10$ (obvyklý případ u tavicích indukčních pecí). Za tohoto předpokladu se velmi zjednoduší funkce $P(x_2)$, $Q(x_2)$:

$$P(x_2) \doteq Q(x_2) \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (42,9)$$

Výraz (42,6) nyní bude

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{1+j}{ay} \mathbf{H}_2. \quad (42,10)$$

Dosadíme do (42,5) za \mathbf{E}_2 z (42,10), spojme (42,3), (42,4) a (42,5) a pro konstanty C_1 a C_2 nám vyjdou dále uvedené výrazy:

$$C_1 = \frac{\mathbf{H}_1}{J_0(x_1)} \frac{[b + kc - aN_0(x_1)]}{(b + kc)}, \quad (42,11)$$

$$C_2 = \frac{\mathbf{H}_1}{J_0(x_1)} \frac{aJ_0(x_1)}{(b + kc)}. \quad (42,12)$$

Abychom zjednodušili psání, použili jsme těchto znaků:

$$k = j \frac{120\pi a y}{1+j} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}, \quad (42,13)$$

$$\left. \begin{aligned} a &= J_0(x_2) - k \cdot J_1(x_2), \\ b &= N_0(x_1) J_0(x_2) - J_0(x_1) N_0(x_2), \\ c &= J_0(x_1) N_1(x_2) - N_0(x_1) J_1(x_2). \end{aligned} \right\} \quad (42,14)$$

Pro intenzitu magnetického pole \mathbf{H} v mezeře na poloměru $r_2 < r < r_1$ dostáváme výraz

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{H}_1}{J_0(x_1)} \frac{[b + kc - aN_0(x_1)]}{(b + kc)} J_0(x) + \frac{\mathbf{H}_1}{J_0(x_1)} \frac{aJ_0(x_1)}{(b + kc)} N_0(x) \quad [\text{A/cm}]. \quad (42,15)$$

Prvý člen na pravé straně výrazu (42,15) značí vlnu, šířící se ve směru zářivého vektoru \mathbf{S}_p , to je vlnu, vycházející z cívky, označme ji \mathbf{H}_p . Druhý člen výrazu (42,15) značí vlnu odraženou od vsázky, označme ji \mathbf{H}_r . V dalším odvodíme zvláště \mathbf{H}_p a \mathbf{H}_r .

Dosadíme do čitatele první části výrazu (42,15) za a , b , c z (42,14) a vlna \mathbf{H}_p , vyzařovaná cívkou, bude

$$\mathbf{H}_p = \mathbf{H}_1 \frac{kN_1(x_2) - N_0(x_2)}{b + kc} J_0(x) \quad [\text{A/cm}], \quad (42,16)$$

$$\mathbf{H}_r = \mathbf{H}_1 \frac{J_0(x_2) - kJ_1(x_2)}{b + kc} N_0(x) \quad [\text{A/cm}]. \quad (42,17)$$

Intenzita \mathbf{H} na poloměru r bude

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_p + \mathbf{H}_r = \mathbf{H}_1 \cdot \frac{-[N_0(x_2) - kN_1(x_2)] J_0(x) + [J_0(x_2) - kJ_1(x_2)] N_0(x)}{[N_0(x_1) J_0(x_2) - J_0(x_1) N_0(x_2)] + k[J_0(x_1) N_1(x_2) - N_0(x_1) J_1(x_2)]} \quad [\text{A/cm}]. \quad (42,18)$$

Pro intenzitu pole elektrického \mathbf{E} v mezeře dostaneme

$$\mathbf{E} = -j 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[\frac{\mathbf{H}_1}{J_0(x_1)} \frac{b + kc - aN_0(x_1)}{b + kc} J_1(x) + \frac{\mathbf{H}_1}{J_0(x_1)} \frac{aJ_0(x_1)}{b + kc} N_1(x) \right] \quad [\text{V/cm}]. \quad (42,19)$$

Výrazy pro vlnu \mathbf{E}_p , vyzařovanou cívkou, a vlnu odraženou \mathbf{E}_r , budou

$$\mathbf{E}_p = j 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{H}_1 \frac{N_0(x_2) - kN_1(x_2)}{b + kc} J_1(x) \quad [\text{V/cm}], \quad (42,20)$$

$$\mathbf{E}_r = -j 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{H}_1 \frac{J_0(x_2) - kJ_1(x_2)}{b + kc} N_1(x) \quad [\text{V/cm}]. \quad (42,21)$$

Intenzita \mathbf{E} na poloměru r :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_p + \mathbf{E}_r = -j 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{H}_1 \frac{-[N_0(x_2) - k N_1(x_2)] J_1(x) + [J_0(x_2) - k J_1(x_2)] N_1(x)}{[N_0(x_1) J_0(x_2) - J_0(x_1) N_0(x_2)] + k [J_0(x_1) N_1(x_2) - N_0(x_1) J_1(x_2)]} [\text{V/cm}] \quad (42,22)$$

Vytvořme ještě poměr složky elektrické a magnetické pro vlnu vycházející z cívky a pro vlnu odraženou od vsázky. Po vykrácení zbude

$$\frac{\mathbf{E}_p}{\mathbf{H}_p} = -j 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{J_1(x)}{J_0(x)} \quad [\text{Vem, A/cm}], \quad (42,23)$$

$$\frac{\mathbf{E}_r}{\mathbf{H}_r} = -j 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{N_1(x)}{N_0(x)} \quad [\text{V/cm, A/cm}]. \quad (42,24)$$

4.22. Výrazy E a H pro malou hodnotu argumentu x

$$\text{Argument} \quad x = \frac{2\pi}{\lambda} r \rightarrow 0.$$

U běžných indukčních pecí je hodnota argumentu x řádově 10^{-5} . Vyjádřeme cylindrické funkce $J_0(x)$, $J_1(x)$, $N_0(x)$, $N_1(x)$ pro x velmi malé a dosadíme do výrazů pro \mathbf{H}_p , \mathbf{H}_r , \mathbf{E}_p , \mathbf{E}_r .

Definice cylindrických funkcí reálného argumentu x jsou uvedeny v příloze 7,31 a funkcí pro malý argument v příloze 7,35.

Např. pro $x = 10^{-3}$, $\ln\left(\frac{x}{2}\right) = -7,599$, $\left(\gamma + \ln\frac{x}{2}\right) = -7,022$, bude

$$\left. \begin{aligned} J_0(x) &\doteq 1,0, & J_1(x) &\doteq \frac{x}{2}, \\ N_0(x) &\doteq \frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln\frac{x}{2} \right), & N_1(x) &\doteq -\frac{2}{\pi x}. \end{aligned} \right\} \quad (42,25)$$

Dosadíme do (42,16), po krátké úpravě

$$\mathbf{H}_p \doteq \mathbf{H}_1 \frac{\left[\frac{k}{x_1} + \left(\gamma + \ln\frac{x_1}{2} \right) \right]}{\left[\frac{k}{x_2} + \frac{kx_2}{2} \left(\gamma + \ln\frac{x_1}{2} \right) - \ln\frac{x_1}{x_2} \right]} \quad [\text{A/cm}] \quad (42,26)$$

Stanovme řádově velikost jednotlivých členů. Např. při kmitočtu $f = 600$ Hz. vodivosti roztavené oceli $\gamma_2 = 10^4$ S.cm $^{-1}$, je hloubka vniku $a_2 = 2,07$ cm.

Mezi cívku a vsázkou o poloměru $r_2 = 46,5$ cm, je stěna kelímku o tloušťce 12 cm, s dielektrickou konstantou $\epsilon = 4$, $\mu = 1$. Rychlosť šíření

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} = 1,5 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}, \quad \lambda = \frac{v}{f} = 2,5 \cdot 10^7 \text{ cm}.$$

$$\text{Argument} \quad x_2 = \frac{2\pi}{\lambda} r_2 = 1,17 \cdot 10^{-5}.$$

Výraz k podle (42,13):

$$k = (1 + j) \cdot 1,95 \cdot 10^6 \quad \frac{k}{x_2} = (1 + j) \cdot 1,67 \cdot 10^{11}.$$

Všechny ostatní členy ve výrazu (42,16) jsou řádově jednotky a jsou ne-srovnatelně menší než $\frac{k}{x_2}$. Po vykrácení dostaneme s velkou přibližností pro vyzařovanou vlnu \mathbf{H}_p v mezeře výraz

$$\mathbf{H}_p \doteq \mathbf{H}_1 \quad [\text{A/cm}] \quad (42,27)$$

Odvozený výsledek značí, že v mezeře mezi cívkom a vsázkou u skutečných pecí je homogenní magnetické pole o hodnotě \mathbf{H}_1 .

Dosadíme-li (42,25) do výrazu (42,17), dostaneme odraženou vlnu \mathbf{H}_r . Po vykrácení

$$\mathbf{H}_r = -\mathbf{H}_1 \frac{x_2}{k} \doteq 0 \quad [\text{A/cm}] \quad (42,28)$$

Převratná hodnota $\frac{x_2}{k}$ je řádově 10^{-11} , takže vlna \mathbf{H}_r , odražená od vsázky, má nulovou hodnotu.

Tento překvapující výsledek je v rozporu s případem, kdy dopadá roviná elektromagnetická vlna na rovnou stěnu a kdy odražená vlna magnetická se s velkou přibližností rovná vlně dopadající.

Dosadíme (42,25) do výrazů (42,20) a (42,21). Vypustíme-li členy zanedbatelně malé, bude

$$\mathbf{E}_p = -j 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{H}_1 \frac{x}{2} \quad [\text{V/cm}] \quad (42,29)$$

$$\mathbf{E}_r = -j 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{H}_1 \frac{x_2}{x} \left(\frac{1}{k} - \frac{x_1}{2} \right) \quad [\text{V/cm}] \quad (42,30)$$

Oba členy v závorce výrazu (42,30) jsou řádově srovnatelné. Výraz \mathbf{E}_r se skládá ze dvou částí: $\mathbf{E}_r = \mathbf{E}'_r + \mathbf{E}''_r$. Vyjádřeme každou část zvlášť. Za k dosadíme z (42,13), dále jsme použili (42,10):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_r &= -j 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{H}_1 \frac{x_2}{x} \frac{1}{k} = -j 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{H}_1 \frac{r_2}{r} \frac{1-j}{120\pi ay} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} = \\ &= -\frac{1+j}{ay} \mathbf{H}_1 \frac{r_2}{r} = \mathbf{E}_2 \frac{r_2}{r} \quad [\text{V/cm}] \end{aligned} \quad (42,31)$$

$$\mathbf{E}_r'' = -j 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{H}_1 \frac{r_2}{r} \left(-\frac{x_2}{2} \right) = -\mathbf{E}_{p2} \frac{r_2}{r} \quad [\text{V/cm}]. \quad (42,32)$$

Použili jsme výrazu (42,29). Dosadíme do (42,30):

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}'_r + \mathbf{E}''_r = (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_{p2}) \frac{r_2}{r} \quad [\text{V/cm}]. \quad (42,33)$$

Příklad 42,1

Vypočtěme hodnoty elmg. vlnění v mezeře pro poloměry r_1 a r_2 u tavicí pece na ocel ($\gamma_2 = 10^4 \text{ S.cm}^{-1}$), obsah 5000 kg, $f = 600 \text{ Hz}$. Intenzita $\mathbf{H}_1 =$

$= 1200 \text{ A/cm}$. Poloměr cívky $r_1 = 58,5 \text{ cm}$, poloměr vsázky $r_2 = 46,5 \text{ cm}$, hloubka vniku $a_2 = 2,07 \text{ cm}$. Materiál kelimku má $\epsilon = 4$, $\mu = 1$. Rychlosť šíření $v = 1,5 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}$, $\lambda = 2,5 \cdot 10^7 \text{ cm}$.

Argumenty:

$$x_1 = \frac{2\pi}{\lambda} r_1 = 1,47 \cdot 10^{-5}, \\ x_2 = 1,17 \cdot 10^{-5}.$$

Pro výpočet složek elmg. vlnění použijeme odvozených zjednodušených výrazů (42,27), (42,28), (42,29), (42,30). Součinitel $k = (1 + j) \cdot 1,95 \cdot 10^6$.

Složky na poloměru r_1 mají index 1, složky na r_2 mají index 2.

Výsledky:

$$\mathbf{H}_{p1} \doteq \mathbf{H}_1 = 1200 \text{ A/cm},$$

$$\mathbf{H}_{r1} \doteq 0 \text{ A/cm}.$$

$$\mathbf{H}_{p2} \doteq \mathbf{H}_1 = 1200 \text{ A/cm},$$

$$\mathbf{H}_{r2} \doteq 0 \text{ A/cm},$$

$$\mathbf{E}_{p1} = -j 1,66 \text{ V/cm},$$

$$\mathbf{E}_{r1} = (-0,046 + j 1,01) \text{ V/cm},$$

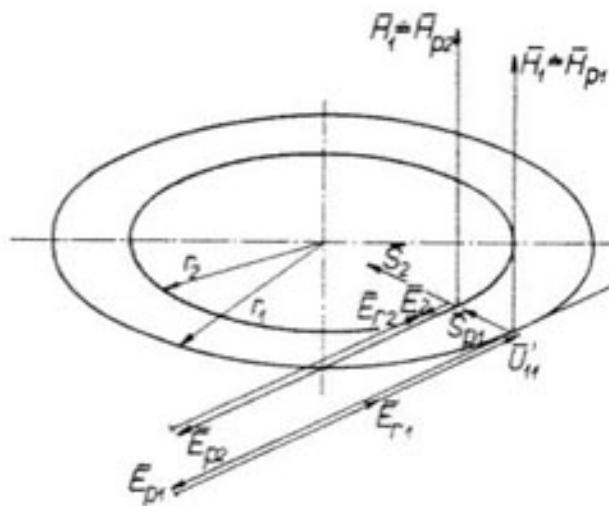
$$\mathbf{E}_{p2} = -j 1,32 \text{ V/cm},$$

$$\mathbf{E}_{r2} = (-0,058 + j 1,264) \text{ V/cm}.$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{p2} + \mathbf{E}_{r2} = (-j 1,322 - 0,058 + j 1,284) = -(1 + j) \cdot 0,058.$$

Vypočtené výsledky jsou zobrazeny v diagramu 42,2.

Obrázek podává vzájemnou prostorovou orientaci jednotlivých vektorů. Jejich vzájemné časové natočení je na obr. 42,3.



Obr. 42,2. Vyzářené a odražené elmg. vlnění (složka magnetická a elektrická) na vnitřním povrchu cívky a na povrchu vsázky (prostorové uspořádání).

Na obr. 42,3 vidíme, že v každém bodě na poloměru r_2 vsázky jsou dvě složky intenzity elektrického pole: složka \mathbf{E}_{p2} , která je vyzářena cívkou, složka odražená \mathbf{E}_{r2} . Jejich součet se rovná intenzitě \mathbf{E}_2 , která vyvolá indukovaný proud ve vsázce.

Podobný uzavřený vektorový trojúhelník můžeme sledovat na vnitřním poloměru r_1 vyzářující cívky. Složku \mathbf{E}_{p1} vyzářuje cívka, výraz \mathbf{E}_{r1} značí složku odraženou od vsázky. Jejich součet dává vektor \mathbf{V}_{11} . V uvažovaném příkladu je jeho hodnota

$$\mathbf{V}_{11} = \mathbf{E}_{p1} + \mathbf{E}_{r1} = -j 1,66 - 0,046 + j 1,01 = (-0,046 - j 0,65) \text{ V/cm}$$

Má-li protékat cívku proud I_1 , musíme na každý cm délky vodiče cívky přivádět ze zdroje napětí \mathbf{V}_{11} též velikosti, avšak opačného smyslu.

$$\mathbf{V}_{11} = -\mathbf{V}_{11} = (0,046 + j 0,65) \text{ V/cm}.$$

Na jeden závit o poloměru $r_1 = 58,5 \text{ cm}$ musíme tedy přivádět ze zdroje napětí

$$\mathbf{V}_1 = 2\pi r_1 \mathbf{V}_{11} = 6,28 \cdot 58,5 \cdot (0,046 + j 0,65) = (16,9 + j 239) \text{ V}.$$

Doplňme ještě předchozí příklad výpočtem toku elektromagnetické energie, který cívka vyzářuje. Každý cm^2 vnitřního povrchu cívky vyzářuje radiálně k ose cívky množství elmg. energie, dané zářivým vektorem:

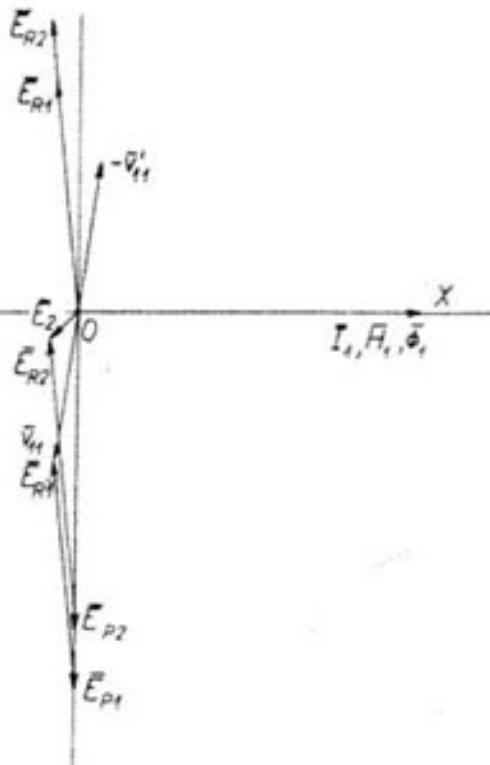
$$\mathbf{S}_{p1} = [\mathbf{E}_{p1} \mathbf{H}_{p1}] = -j 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{x_1}{2} \mathbf{H}_1^2 \quad [\text{VA/cm}^2, \text{A/cm}]. \quad (42,34)$$

Po odrazu od vsázky se vraci zpět:

$$\mathbf{S}_{r1} = [\mathbf{E}_{r1} \mathbf{H}_{r1}] \doteq 0. \quad (42,35)$$

Cívka vyzářuje na vsázkou tok jalové elektromagnetické energie, v opačném směru energie neproudí. Pro srovnání připomeňme, že po odrazu rovinového vlnění od rovné stěny proudí zpět téměř stejný tok elmg. činné energie, zmenšený pouze o malou složku, pohlcenou ve vsázce.

Z výrazu (42,34) vidíme, že cívka vyzářuje čistě jalovou elmg. energii.



Obr. 42,3. Vyzářené a odražené elmg. vlnění na vnitřním povrchu cívky a na povrchu vsázky – časové natočení vektorů.

Je to způsobeno tím, že jsme použili zjednodušených výrazů pro \mathbf{E}_{p1} a \mathbf{H}_{p1} . Při použití úplných výrazů bychom odvodili, že zářivý vektor nese poměrně nepatrnou složku reálnou. Tato část elmg. energie je pohlcena vsázkou a přemění se v teplo.

Dosadíme-li do výrazu (42,34) data z uvažovaného příkladu 42,1, bude číselně

$$\mathbf{S}_{p1} = -j 377 \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,47 \cdot 10^{-5} \cdot 1200^2 = -j 1990 \text{ VA/cm}^2.$$

Množství elmg. energie pohlcené vsázkou bude ($\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2$)

$$\mathbf{S}_2 = [\mathbf{E}_2 \mathbf{H}_2] = -\frac{1+j}{a\gamma} H_2^2 = -\left(\frac{H_2^2}{a\gamma} + j \frac{H_2^2}{a\gamma}\right) \text{ [VA/cm}^2]. \quad (42,36)$$

Je to stejný výraz, jaký jsme odvodili při dopadu rovinného vlnění na rovnou stěnu v části 3,43, výraz (34,10). Množství energie, které se přemění v teplo,

$$\operatorname{Re}(S_2)_{et} = \frac{H_2^2}{2a\gamma} = 34,8 \text{ W/cm}^2.$$

Vektory \mathbf{S}_{p1} a \mathbf{S}_2 jsme rovněž zakreslili do obr. 42,2.

4,23. Nový výklad vzniku elektromotorické síly

Upravme vhodně výraz pro argument x_1 :

$$x_1 = \frac{\omega}{v} r_1 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu} r_1. \quad (42,37)$$

Dosadíme (42,37) do výrazu (42,29):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{p1} &= -j 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{H}_1 \frac{x_1}{2} = -j \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon}} \mathbf{H}_1 \cdot \frac{1}{2} \omega \sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu} r_1 = \\ &= -j \omega \mu_0 \mu \frac{r_1}{2} \mathbf{H}_1 \text{ [V/cm].} \end{aligned} \quad (42,38)$$

Obdobně intenzita \mathbf{E}_{p2} , vyzářená cívkou, na poloměru r_2

$$\mathbf{E}_{p2} = -j \omega \mu_0 \mu \frac{r_2}{2} \mathbf{H}_1 \text{ [V/cm].} \quad (42,39)$$

V dutině cívky je homogenní magnetické pole o intenzitě \mathbf{H}_1 . Neuvažujme prozatím vsázkou, určeme magnetický tok Φ_1 v dutině cívky, o poloměru r_1 :

$$\Phi_1 = \pi r_1^2 \mu_0 \mu \mathbf{H}_1 \text{ [Wb, cm, A/cm].} \quad (42,40)$$

Náklad

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_T &= \mathbf{E}_T + \mathbf{E}_Y = (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_{p2}) \frac{r_2}{r} \\ &\downarrow \\ \mathbf{E}_{T2} &= (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_{p2}) \frac{r_2}{r} \\ &\downarrow \\ \mathbf{E}_{T1} &= \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_{p2} \end{aligned} \quad \underline{42,44}$$

intenzita \mathbf{E}_2 bude

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1+j}{a\gamma} \mathbf{H}_1 = \frac{1+j}{\gamma} \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \mu}{2}} \mathbf{H}_1 = 0. \quad (42,45)$$

Potom

$$\mathbf{E}_{T2} = -\mathbf{E}_{p2} \text{ [V/cm].} \quad (42,46)$$

Při dopadu elmg. vlnění na dokonale vodivý válec se vybudí v povrchové vrstvě nulové tloušťky ($a = 0$) naindukováný proud též hustoty jako proud budící, avšak opačného smyslu (odvodíme v další části 4,33):

$$\mathbf{I}_{21} = -\mathbf{I}_{11} \text{ [A/cm].} \quad (42,47)$$

Tento proud vyvolá ve vsázce magnetický tok $\vec{\Phi}_2$ též velikosti, avšak opačného smyslu, než je tok Φ_2 , buzený cívkou, $\vec{\Phi}_2 = -\Phi_2$. Oba toky se vzájemně ruší, takže v prostoru dutiny není žádný výsledný magnetický tok. Fiktivní tok $\vec{\Phi}_2$ naindukuje do části závitu o délce 1 cm, na poloměru r_2 , elektromotorickou sílu, totožnou s \mathbf{E}_{p2} . Fiktivní tok $\vec{\Phi}_2$ vyvolá v 1 cm délky závitu o poloměru r_1 elektromotorickou sílu

$$\mathbf{E}_{T1} = \mathbf{E}_{T2} \frac{r_2}{r_1} \text{ [V/cm].} \quad (42,48)$$

Porovnáme s (42,46), pro $\gamma = \infty$ bude

$$\mathbf{E}_{T1} = \mathbf{E}_{T2} \frac{r_2}{r_1} = -\mathbf{E}_{p2} \frac{r_2}{r_1} \text{ [V/cm].} \quad (42,49)$$

4.23. Nový výklad vzniku elektromotorické sily

Upravme vhodně výraz pro argument x_1 :

$$x_1 = \frac{\omega}{v} r_1 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu} r_1. \quad (42.37)$$

Dosadme (42.37) do výrazu (42.29):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{p1} &= -j 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{H}_1 \frac{x_1}{2} = -j \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon}} \mathbf{H}_1 \cdot \frac{1}{2} \omega \sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu} r_1 = \\ &= -j \omega \mu_0 \mu \frac{r_1}{2} \mathbf{H}_1 \quad [\text{V/cm}]. \end{aligned} \quad (42.38)$$

Obdobně intenzita \mathbf{E}_{p2} , vyzářená cívkou, na poloměru r_2

$$\mathbf{E}_{p2} = -j \omega \mu_0 \mu \frac{r_2}{2} \mathbf{H}_1 \quad [\text{V/cm}]. \quad (42.39)$$

V dutině cívky je homogenní magnetické pole o intenzitě \mathbf{H}_1 . Neuvažujme prozatím vsázku, určeme magnetický tok Φ_1 v dutině cívky, o poloměru r_1 :

$$\Phi_1 = \pi r_1^2 \mu_0 \mu \mathbf{H}_1 \quad [\text{Wb, cm, A/cm}]. \quad (42.40)$$

V závitu o poloměru r_1 vznikne elektromotorická síla

$$\mathbf{U}_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -j \omega \mu_0 \mu \pi r_1^2 \mathbf{H}_1 \quad [\text{V}]. \quad (42.41)$$

Na část závitu o délce 1 cm připadá

$$\mathbf{U}_{11} = \frac{\mathbf{U}_1}{2\pi r_1} = -j \omega \mu_0 \mu \frac{r_1}{2} \mathbf{H}_1 = \mathbf{E}_{p1} \quad [\text{V/cm}]. \quad (42.42)$$

Porovnáním s (42.30) zjistíme totožnost. Jestliže magnetický tok Φ_1 vybudí v jednom závitu elektromotorickou sílu \mathbf{U}_1 , potom její část \mathbf{U}_{11} , připadající na část závitu o délce 1 cm, je totožná s intenzitou \mathbf{E}_{p1} , vyzařovanou cívkou.

Neuvažujme prozatím vsázku. V dutině o poloměru r_2 vyvolá cívka magnetický tok Φ_2 . Stejnou úvahou dojdeme k výsledku, že tento tok vybudí v části závitu o délce 1 cm, na poloměru r_2 , elektromotorickou sílu \mathbf{U}_{21} , totožnou s \mathbf{E}_{p2} .

$$\mathbf{U}_{21} = \frac{\mathbf{U}_2}{2\pi r_2} = -j \omega \mu_0 \mu \frac{r_2}{2} \mathbf{H}_1 = \mathbf{E}_{p2} \quad [\text{V/cm}]. \quad (42.43)$$

Abychom stanovili složky odražené \mathbf{E}_r , vyjdeme z výrazu (42.33). Na poloměru r_2

$$\mathbf{E}_{r2} = \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_{p2} \quad [\text{V/cm}]. \quad (42.44)$$

Předpokládejme, že vsázka je z dokonalého vodiče, $\gamma = \infty$. V tom případě intenzita \mathbf{E}_2 bude

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1+j}{a\gamma} \mathbf{H}_1 = \frac{1+j}{\gamma} \sqrt{\frac{\omega \gamma \mu_0 \mu}{2}} \mathbf{H}_1 = 0. \quad (42.45)$$

Potom

$$\mathbf{E}_{r2} = -\mathbf{E}_{p2} \quad [\text{V/cm}]. \quad (42.46)$$

Při dopadu elmg. vlnění na dokonale vodivý válec se vybudí v povrchové vrstvě nulové tloušťky ($a = 0$) naindukováný proud též hustoty jako proud budící, avšak opačného smyslu (odvodíme v další části 4.33):

$$\mathbf{I}_{21} = -\mathbf{I}_{11} \quad [\text{A/cm}]. \quad (42.47)$$

Tento proud vyvolá ve vsázce magnetický tok $\vec{\Phi}_2$ též velikosti, avšak opačného smyslu, než je tok Φ_2 , buzený cívou, $\vec{\Phi}_2 = -\Phi_2$. Oba toky se vzájemně ruší, takže v prostoru dutiny není žádný výsledný magnetický tok. Fiktivní tok Φ_2 naindukuje do části závitu o délce 1 cm, na poloměru r_2 , elektromotorickou sílu, totožnou s \mathbf{E}_{r2} . Fiktivní tok $\vec{\Phi}_2$ vyvolá v 1 cm délky závitu o poloměru r_1 elektromotorickou sílu

$$\mathbf{E}_{r1} = \mathbf{E}_2 \frac{r_2}{r_1} \quad [\text{V/cm}]. \quad (42.48)$$

Porovnáme s (42.46), pro $\gamma = \infty$ bude

$$\mathbf{E}_{r1} = \mathbf{E}_{r2} \frac{r_2}{r_1} = -\mathbf{E}_{p2} \frac{r_2}{r_1} \quad [\text{V/cm}]. \quad (42.49)$$

Za použití (42,34) a (42,35) vyjde

$$\mathbf{E}_{r_1} = -\mathbf{E}_{p_1} \quad [\text{V/cm}]. \quad (42,50)$$

V předchozím jsme uvedli v soulad dřívější výkladu vzniku elektromotorických sil z příslušných magnetických toků s novým výkladem, podle kterého naindukováne elektromotorické síly na 1 cm délky závitu jsou totožné se složkami intenzity elektrického pole vyzářeného cívou, resp. odraženého od vsázky.

U skutečné vsázky, kdy vodivost γ je konečná, je magnetický tok Φ'_2 vyvolaný indukovaným proudem ve vsázce poněkud menší než Φ_2 a není s ním přesně v protifázi. V důsledku toho nejsou v diagramu 42,3 intenzity odraženého vlnění \mathbf{E}_{r_2} a \mathbf{E}_{r_1} kolmé k ose X . Součet vektorů $\mathbf{E}_{p_2} + \mathbf{E}_{r_2}$ se rovná intenzitě \mathbf{E}_2 , součet $\mathbf{E}_{p_1} + \mathbf{E}_{r_1}$ se rovná úbytku \mathbf{V}_{11} .

4.24. Výrazy \mathbf{E} a \mathbf{H} pro velkou hodnotu argumentu x

Argument $x = \frac{2\pi}{\lambda} r \rightarrow \infty$. Výrazy (42,18) a (42,22) pro intenzitu \mathbf{H} a \mathbf{E} v mezeře mezi válcovou cívou a vsázkou jsou značně odlišné od výrazů \mathbf{H} a \mathbf{E} v mezeře mezi dvěma rovnými stěnami, z nichž jedna vyzařuje a druhá odráží rovinné elmg. vlnění. Pokusme se potvrdit správnost odvozených výrazů pro válcové vlnění tím, že odvodíme, zda tyto výrazy pro válcové vlnění přejdou ve výrazy pro rovinné vlnění v případě, že poloměr cívky r_1 vzroste do nekonečna, $r_1 \rightarrow \infty$.

Hodnoty cylindrických funkcí pro argument $x \rightarrow \infty$ jsou uvedeny v příloze 7,36.

$$J_0(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi x}} (\sin x + \cos x) \doteq -N_1(x), \quad (42,51)$$

$$J_1(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi x}} (\sin x - \cos x) \doteq -N_0(x) \quad (42,52)$$

Dosadme (42,51) a (42,52) do výrazu (42,18) pro intenzitu magnetického pole \mathbf{H} v mezeře. Součinitel k podle (42,13) je v uvažované oblasti středních kmitočtů řádově 10^6 . Můžeme proto s velkou přibližností zanedbat 1 proti k . Podrobněji odvozeno v [4,10].

Po úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \\ &= \mathbf{H}_1 \frac{\left[-\frac{k}{\sqrt{x}} (\sin x_2 + \cos x_2) \cdot (\sin x + \cos x) + \frac{k}{\sqrt{x}} (\cos x_2 - \sin x_2) \cdot (\sin x - \cos x) \right]}{\left[\frac{2}{\sqrt{x_1}} (\cos x_2 \cdot \sin x_1 - \sin x_2 \cdot \cos x_1) - \frac{2k}{\sqrt{x_1}} (\sin x_2 \cdot \sin x_1 + \cos x_2 \cdot \cos x_1) \right]} \quad [A/cm]. \quad (42,53) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{H}_1 \frac{k}{2} \sqrt{\frac{x_1}{x}} \frac{-\cos(x-x_1) - \sin(x+x_1) - \cos(x+x_2) + \sin(x+x_2)}{\sin(x_1-x_2) - k \cdot \cos(x_1-x_2)} = \\ &= \mathbf{H}_1 k \sqrt{\frac{x_1}{x}} \frac{\cos x_2 \cdot \cos x}{k \cdot \cos(x_1-x_2) - \sin(x_1-x_2)}. \end{aligned} \quad (42,54)$$

Poloměr vyzařující cívky $r_2 \rightarrow \infty$, stejně i poloměr r_1 vsázky, na kterou vlnění dopadá. Jejich vzájemnou vzdálenost označme $z_1 = (r_1 - r_2)$. Vzdálenost bodu v mezeře na poloměru r od povrchu vsázky označme $z = (r - r_1)$. Rozdíl argumentů

$$x_1 - x_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda} z_1. \quad (42,55)$$

Dělme čitatele i jmenovatele výrazu (42,45) číslem k :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \sqrt{\frac{x_1}{x}} \frac{\cos x_2 \cdot \cos x}{\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z_1\right) - \frac{1}{k} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} z_1\right)}. \quad (42,56)$$

Povšimněme si blíže jmenovatele výrazu (42,56). Je-li argument $\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot z_1\right)$ malý, což značí, že vzdálenost z_1 mezi vyzařující a odrážející plochou je malá proti vlnové délce λ , $z_1 \ll \lambda$, potom $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z_1\right) \rightarrow 1,0$, $\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} z_1\right) \rightarrow 0$. Druhý člen ve jmenovateli můžeme zanedbat.

Druhý extrém by nastal v případě, že $\left(\frac{2\pi}{\lambda} z_1\right)$ se blíží $\frac{\pi}{2}$. Potom $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z_1\right) \rightarrow 0$, $\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} z_1\right) \rightarrow 1,0$. Druhý člen však musíme ještě dělit číslem k (řádově 10^6), takže i druhý člen ve jmenovateli se blíží nule. Tento případ nemůžeme připustit, z čehož vyplývá, že vzdálenost z_1 obou ploch nesmí překročit určitou hodnotu. Tu dostaneme z podmínky:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z_1\right) \gg \frac{1}{k} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} z_1\right),$$

$$k \gg \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} z_1\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{z_1}{\lambda}\right).$$

Protože $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = \infty$, musí být $z_1 \ll \frac{1}{4} \lambda$.

Např. při kmitočtu $f = 10^6$ Hz musí být $z_1 \ll 75$ km. V dalším předpokládáme, že tato podmínka bude vždy splněna. Současně z toho vyplývá, že argument x_1 , bližící se nekonečnu, se pouze málo liší od argumentu x , takže poměr obou se přibližně rovná jedné.

Výraz (42,56) bude

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \frac{\cos x_2}{\left[\cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} z_1 \right) \right]} \cdot \cos x. \quad (42,57)$$

Hodnoty goniometrické funkce $\cos x$ a $\cos x_2$ se nezmění, jestliže argumenty x a x_2 zvětšíme nebo změníme o libovolný násobek plného úhlu ($n \cdot 2\pi$). V uvažovaném případě se argumenty x a x_2 bliží nekonečnu. Zmenšeme tyto argumenty právě o takový násobek plného úhlu, aby nový argument x'_2 byl právě rovný nule, tedy i $r'_2 = 0$. To znamená, že počátek nové souřadnice r' umístíme v rozhraní mezery a vsázky:

$$\begin{aligned} \cos x'_2 &= \cos(x_2 - n \cdot 2\pi) = 1, \\ x'_2 &= x_2 - n \cdot 2\pi = 0, \quad x' = (x - x_2) = \frac{2\pi}{\lambda} z. \end{aligned} \quad (42,58)$$

Výraz (42,57) nyní bude

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \frac{\cos x'_2}{\cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} z_1 \right)} \cdot \cos x' = \mathbf{H}_1 \frac{1}{\cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} z_1 \right)} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} z \right) \quad (42,59)$$

pro $r = r_1$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1,$$

$$\text{pro } r = r_2 \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_1 \frac{\cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot 0 \right)}{\cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} z_1 \right)} = \frac{\mathbf{H}_1}{\cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} z_1 \right)}. \quad (42,60)$$

Výraz (42,59) pro intenzitu magnetického pole v mezeře v konečné úpravě bude

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_2 \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} z \right) = \mathbf{H}_2 \cdot \cos \left(\frac{\omega}{v} z \right) \quad [\text{A/cm}]. \quad (42,61)$$

Výraz (42,61) je totožný s dříve odvozeným výrazem (32,21) pro stojaté vlnění složky \mathbf{H} v mezeře mezi dvěma rovnoběžnými rovinami, z nichž jedna vyzařuje a druhá odráží rovinné elmg. vlnění.

Obdobně můžeme odvodit z výrazu (42,22) složku intenzity elektrické \mathbf{E} v mezeře v případě, že poloměr cívky r_1 vzroste do nekonečna (provedeno v [4,9]).

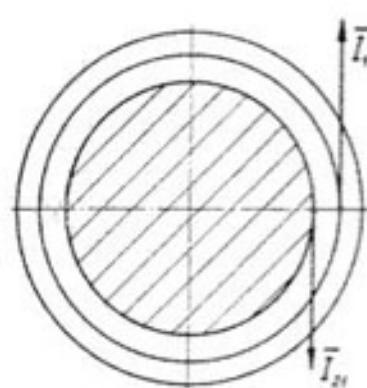
$$\mathbf{E} = -j 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{H}_2 \cdot \sin \left(\frac{\omega}{v} z \right) \quad [\text{V/cm}]. \quad (42,62)$$

Výraz (42,62) je shodný s výrazem (32,26a) pro stojaté vlnění složky \mathbf{E} při dopadu rovinné vlny elektrické na rovnou stěnu.

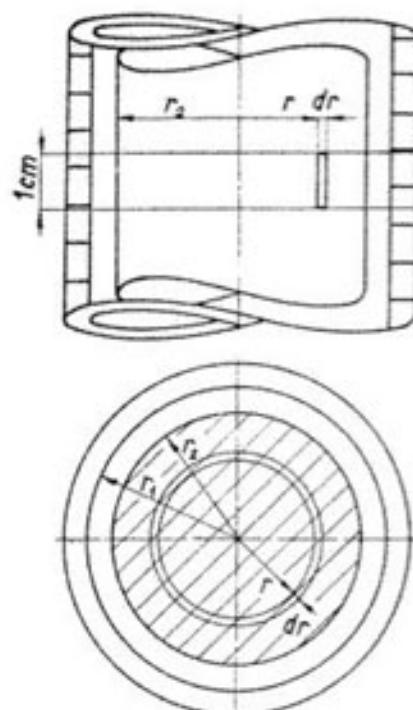
Příklad 42,2

Určeme, jaký minimální konečný poloměr cívky musíme uvažovat, abychom mohli válcové vlnění v mezeře s dostatečnou přesností považovat za vlnění rovinné. Uvažujeme kmitočet $f = 10^3$ Hz, vlnová délka v mezeře (vzduch) $\lambda = 3 \cdot 10^7$ cm. 300nm

Uvažujme argument $x_1 = 10$. Dopustime se chyb velikosti rádově asi 1 %, viz přílohu, část 7,36.



Obr. 43,1. Příčný řez cívky a vodivou válcovou vsázkou.



Obr. 43,2. Schematické uspořádání válcové cívky a souosé vsazky.

Hledaný poloměr r_1 :

$$r_1 = x_1 \frac{\lambda}{2\pi} = 10 \cdot \frac{3 \cdot 10^7}{6,28} = 4,78 \cdot 10^7 \text{ cm} = 478 \text{ km}.$$

4,3. Válcové elektromagnetické vlnění v plné vodivé válcové vsázce

4,31. Odvození výrazů pro intenzitu elektrického a magnetického pole

Schematicky je cívka se souosou válcovou vodivou vsazkou zobrazena na obr. 43,1, 43,2.

Pro stanovení \mathbf{H} a \mathbf{E} ve vsázce použijeme obdobného způsobu, jako jsme použili v části 4,10 pro elmg. vlnění v prázdné dutině cívky.

V části 2,10 jsme odvodili výraz (21,22) pro magnetickou složku obecného elmg. vlnění ve vodivém prostředí:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{1}{\gamma \mu_0 \mu} \nabla^2 \mathbf{H} \quad [\text{A/cm}]. \quad (43,1)$$

Laplaceův diferenciální operátor má v polárním souřadnicovém systému tvar (41,2). Intenzita magnetického pole \mathbf{H} nezávisí ani na úhlu φ , ani na souřadnici z , takže opět

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial r}. \quad (43,2)$$

Protože uvažujeme harmonické vlnění, bude (43,1):

$$j\omega \mathbf{H} = \frac{1}{\gamma \mu_0 \mu} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial r} \right), \quad (43,3)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial r} - j\omega \gamma \mu_0 \mu \mathbf{H} = 0. \quad (43,4)$$

Zavedeme hloubku vniku a :

$$a = \sqrt{\frac{2}{\omega \gamma \mu_0 \mu}} \quad [\text{cm}]. \quad (43,5)$$

Místo poloměru r zavedeme argument x , definovaný vztahem

$$x = \frac{r}{a} \sqrt{2}. \quad (43,6)$$

Dělme rovnici (43,4) součinitelem $(-j\omega \gamma \mu_0 \mu) = \left(\sqrt{-j} \frac{\sqrt{2}}{a}\right)^2$ při \mathbf{H} :

$$\frac{d^2 \mathbf{H}}{d(x \sqrt{-j})^2} + \frac{1}{(x \sqrt{-j})} \frac{d \mathbf{H}}{d(x \sqrt{-j})} + \mathbf{H} = 0. \quad (43,7)$$

Výraz $\sqrt{-j}$ je komplexní číslo: $\sqrt{-j} = \frac{1-j}{\sqrt{2}}$. (43,8)

Rovnice (43,7) je diferenciální rovnice 2. řádu, rovnice Besselova, pro komplexní argument $(x \sqrt{-j})$. Jejím řešením je lineární kombinace dvou cylindrických funkcí téhož argumentu:

$$\mathbf{H} = C_1 J_0(x \sqrt{-j}) + C_2 N_0(x \sqrt{-j}) \quad [\text{A/cm}]. \quad (43,9)$$

C_1, C_2 jsou integrační konstanty, jejichž hodnoty odvodíme v dalším z meziních podmínek.

$J_0(x \sqrt{-j})$ je cylindrická funkce 1. druhu, funkce Besselova.

$N_0(x \sqrt{-j})$ je cylindrická funkce 2. druhu, funkce Neumannova.

Obě funkce jsou nultého řádu, pro komplexní argument $(x \sqrt{-j})$. Podrobněji rozvedeno v příloze, část 7,32.

Obě zmíněné cylindrické funkce jsou definovány řadami, ve kterých je polovina členů reálných a polovina imaginárních. Součet reálných a imaginárních členů funkce $J_0(x \sqrt{-j})$ se značí ber x , bei x , analogicky ner x a nei x funkce $N_0(x \sqrt{-j})$.

$$J_0(x \sqrt{-j}) = \text{ber } x - j \text{ bei } x, \quad (43,10)$$

$$N_0(x \sqrt{-j}) = \text{ner } x - j \text{ nei } x. \quad (43,11)$$

Tabulky funkcí ber x , bei x , ner x , nei x jsou v příloze 7,4.

Nyní je třeba odvodit k rovnici (43,9) pro intenzitu \mathbf{H} ještě obdobnou rovnici pro složku elektrickou \mathbf{E} .

Vzájemný vztah mezi \mathbf{H} a \mathbf{E} je dán 1. rovnici Maxwellovou pro vodivé prostředí

$$\text{rot } \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E}. \quad (43,12)$$

Velikost (rot \mathbf{H}) v případě válcového vlnění jsme odvodili již v části 4,10, výraz (41,11), takže

$$\text{rot } \mathbf{H} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial r} = \gamma \mathbf{E}. \quad (43,13)$$

Za použití (43,13) odvodíme z (43,9) intenzitu \mathbf{E} :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial r} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \left(x \frac{a}{\sqrt{2}} \right)} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\sqrt{2}}{a} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} = \\ &= -\frac{1}{\gamma} \frac{\sqrt{2}}{a} \sqrt{-j} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial (x \sqrt{-j})} = -\sqrt{2} \frac{\sqrt{-j}}{ay} \left\{ C_1 \frac{d[J_0(x \sqrt{-j})]}{d(x \sqrt{-j})} + \right. \\ &\quad \left. + C_2 \frac{d[N_0(x \sqrt{-j})]}{d(x \sqrt{-j})} \right\}. \end{aligned} \quad (43,14)$$

Derivace obou funkcí jsou v příloze, výrazy (73,17) a (73,18).

$$-\frac{d[J_0(x \sqrt{-j})]}{d(x \sqrt{-j})} = -\sqrt{j} (\text{ber}' x - j \text{ bei}' x) = J_1(x \sqrt{-j}). \quad (43,15)$$

$$-\frac{d[N_0(x \sqrt{-j})]}{d(x \sqrt{-j})} = -\sqrt{j} (\text{ner}' x - j \text{ nei}' x) = N_1(x \sqrt{-j}). \quad (43,16)$$

Funkce $J_1(x \sqrt{-j})$ je cylindrická funkce prvního druhu, prvního řádu (Besselova), $N_1(x \sqrt{-j})$ je cylindrická funkce druhého druhu, prvního řádu (Neumannova). Každá z těchto funkcí 1. řádu je opět definována řadou členů reálných ber' x , ner' x a členů imaginárních bei' x , nei' x . Řady: ber' x , bei' x , ner' x , nei' x jsou první derivaci řad ber x , bei x , ner x , nei x podle x . Tabulky také těchto funkcí jsou v příloze 7,4.

Výraz (43,14) bude

$$\mathbf{E} = \sqrt{-j} \frac{\sqrt{2}}{a\gamma} [C_1 J_1(x \sqrt{-j}) + C_2 N_1(x \sqrt{-j})] \quad [\text{V/cm}]. \quad (43,17)$$

Integrační konstanty určíme z podmínek:

a) v ose válce, pro $r = 0$, je intenzita $\mathbf{E} = 0$,

b) v předchozí části 4,20 jsme odvodili, že je v mezeře homogenní magnetické pole o intenzitě \mathbf{H}_1 , takže intenzita \mathbf{H}_2 na poloměru r_2 se též rovná \mathbf{H}_1 .

Dosadme podmínku a) do výrazu (43,17). Prvni člen v závorce se rovná nule, protože $J_1(0) = 0$. Funkce $N_1(0)$ však se nerovná nule, potom musí být $C_2 = 0$.

Z rovnice (43,9) pro poloměr r_2 potom dostaneme C_1

$$C_1 = \frac{\mathbf{H}_2}{J_0(x_2 \sqrt{-j})}. \quad (43,18)$$

Dosadme C_1 do (43,9) a (43,17) a dostaneme výrazy pro intenzitu magnetického pole \mathbf{H} a elektrického pole \mathbf{E} ve vodivé vsázce na poloměru r , čemuž odpovídá argument x podle (43,6):

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{H}_2}{J_0(x_2 \sqrt{-j})} J_0(x \sqrt{-j}) \quad [\text{A/cm}], \quad (43,19)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\gamma} J = \sqrt{-j} \frac{\sqrt{2}}{a\gamma} \frac{\mathbf{H}_2}{J_0(x_2 \sqrt{-j})} J_1(x \sqrt{-j}) \quad [\text{V/cm}]. \quad (43,20)$$

Absolutní hodnoty H a E

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_2 \frac{(a - jb)}{(c - jd)}. \quad (43,21)$$

Abychom zkrátili psání, zavedli jsme pomocné znaky a, b, c, d .

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_2 \frac{(a - jb)(c + jd)}{c^2 + d^2} = \mathbf{H}_2 \frac{(ac + bd) + j(ad - bc)}{c^2 + d^2}, \quad (43,22)$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{\mathbf{H}_2}{c^2 + d^2} \sqrt{(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2} = \mathbf{H}_2 \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}} = \\ &= \mathbf{H}_2 \sqrt{\frac{\text{ber}^2 x + \text{bei}^2 x}{\text{ber}^2 x_2 + \text{bei}^2 x_2}} \quad [\text{A/cm}], \end{aligned} \quad (43,23)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\gamma} J = \sqrt{-j} \frac{\sqrt{2}}{a\gamma} \mathbf{H}_2 \frac{-\sqrt{j}(\text{ber}' x - j \text{bei}' x)}{\text{ber} x_2 - j \text{bei} x_2} \quad [\text{V/cm}], \quad (43,24)$$

$$E = \frac{1}{\gamma} J = \frac{\sqrt{2}}{a\gamma} H_2 \sqrt{\frac{\text{ber}^2 x + \text{bei}^2 x}{\text{ber}^2 x_2 + \text{bei}^2 x_2}} \quad [\text{V/cm}]. \quad (43,25)$$

Měrný příkon σ , definovaný stejně jako v části 3,42:

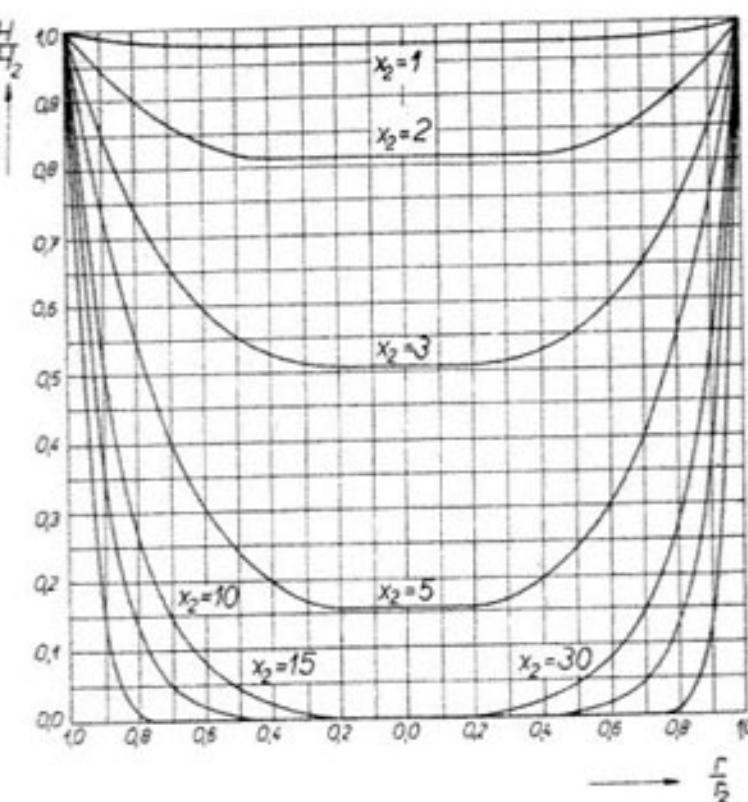
$$\sigma = \frac{1}{2\gamma} J^2 = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{H_2}{a} \right)^2 \frac{\text{ber}^2 x + \text{bei}^2 x}{\text{ber}^2 x_2 + \text{bei}^2 x_2} \quad [\text{W/cm}^3]. \quad (43,26)$$

Pro grafické znázornění je výhodné dělit hodnoty H, E, J, σ v uvažovaném místě hodnotami H_2, E_2, J_2, σ_2 na povrchu. Na vodorovné osu vynášíme poměr $\frac{r}{r_2}$. Takto odvozené diagramy mají obecnou platnost pro jakýkoliv materiál a kmitočet.

$$\frac{H}{H_2} = \sqrt{\frac{\text{ber}^2 x + \text{bei}^2 x}{\text{ber}^2 x_2 + \text{bei}^2 x_2}}, \quad (43,27)$$

$$\begin{aligned} \frac{E}{E_2} &= \frac{J}{J_2} = \\ &= \sqrt{\frac{\text{ber}^2 x + \text{bei}^2 x}{\text{ber}^2 x_2 + \text{bei}^2 x_2}}, \end{aligned} \quad (43,28)$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_2} = \left(\frac{J}{J_2} \right)^2. \quad (43,29)$$



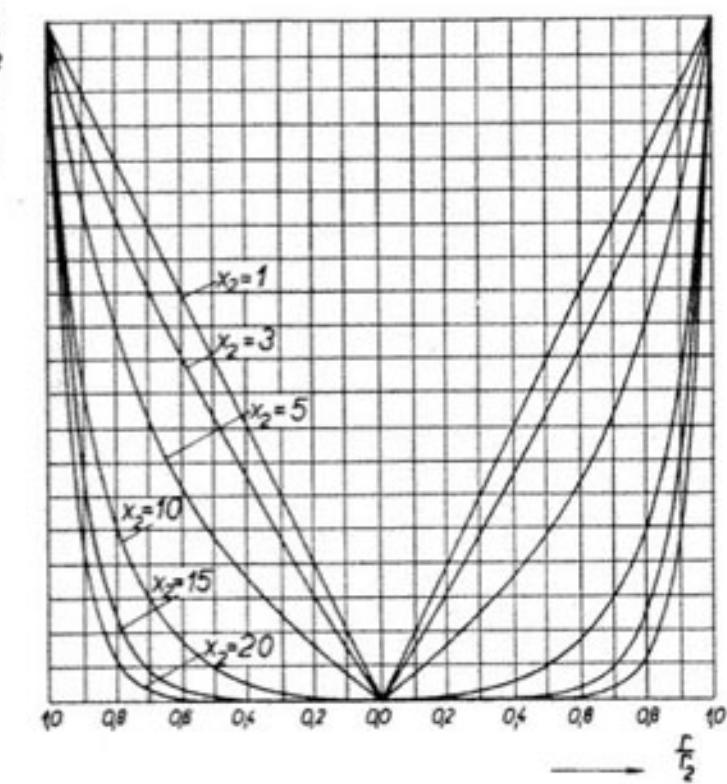
Obr. 43,3. Rozložení magnetického pole ve válcové vsázce, v závislosti na argumentu $x_2 = r_1 \sqrt{2}/a$.

Vypočetli jsme hodnoty těchto poměrů pro několik argumentů x v rozmezí 1 až 20. Výsledky výpočtů jsou v tabulkách 43,1 a 43,2. Graficky jsou vypočetné výsledky zobrazeny v diagramech 43,3, 43,4, 43,5.

V diagramu 43,3 vidíme, že pro malé hodnoty argumentu x_2 (malý poloměr vsázky a nízký kmitočet) se intenzita magnetického pole H příliš nemění, zůstává téměř konstantní v celém průseku. Pro $x_2 > 10$ poklesne H v ose válcové vsázky na nulu. Je to způsobeno tím, že proti magnetickému toku o konstantní intenzitě, buzenému cívkom, působi magnetický tok buzený na indukovaným proudem ve vsázce. Tento magnetický tok je fázově natočen téměř o plný úhel π proti toku buzenému cívkom, takže se vzájemně ruší.

Tabulka 43,1
Poměr $\frac{H}{H_2}$ v závislosti na $\frac{r}{r_2}$

Argument x_2	Poměr $\frac{r}{r_2}$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	0,95	1,00
1		0,984	0,984	0,984	0,986	0,992	0,996	0,998	1,00
2		0,813	0,815	0,818	0,838	0,894	0,940	0,970	1,00
3		0,513	0,514	0,528	0,588	0,740	0,865	0,930	1,00
5		0,160	0,163	0,197	0,313	0,550	0,741	0,870	1,00
10		$6,65 \cdot 10^{-3}$	$8,18 \cdot 10^{-3}$	0,0228	0,0764	0,272	0,519		1,00
15		0,00	$4,55 \cdot 10^{-4}$	$2,67 \cdot 10^{-3}$	0,0186	0,134	0,363		1,00
20				0,00	$4,55 \cdot 10^{-2}$	0,0661	0,256	0,503	1,00
30					0,00	0,0161	0,126	0,354	1,00

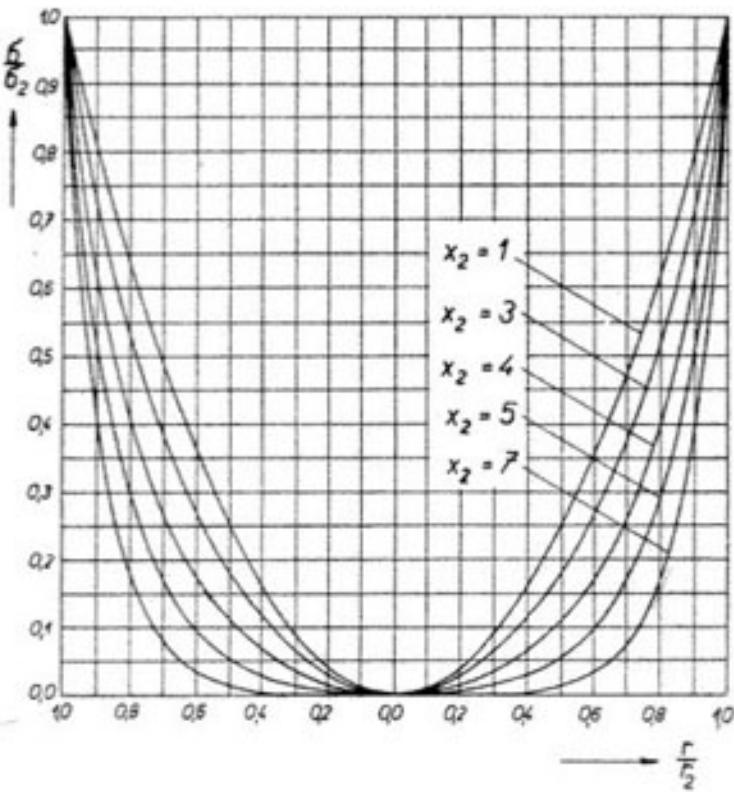


Obr. 43,4. Rozložení hustoty proudu ve válcové vsázce, v závislosti na x_2 .

Tabulka 43,2
Poměr $\frac{E}{E_2} = \frac{J}{J_2}$ v závislosti na $\frac{r}{r_2}$

Argument x_2	Poměr $\frac{r}{r_2}$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	0,95	1,00
1		0,0		0,398		0,802			1,00
3		0,0	0,166		0,329	0,512	0,721		1,00
5		0,0	0,0804		0,179	0,310	0,561	0,744	1,00
10		0,0	$7,10 \cdot 10^{-3}$		0,0276	0,0750	0,269	0,473	1,00
15		0,0			0,0186	0,134	0,363		1,00
20		0,0			$4,55 \cdot 10^{-2}$	0,0661	0,256	0,503	1,00

Podobně z diagramu 43,4 je vidět, že pro malé hodnoty x_2 ubývá hustota proudu od povrchu k ose téměř lineárně. Pro velké x_2 je proud pouze v povrchových vrstvách vsázky.



Obr. 43,5. Rozložení měrného příkonu ve válcové vsázce, v závislosti na x_2 .

4,32. Výrazy pro H a E v případě velkého argumentu x_2

U tavicích pecí bývá argument x_2 poměrně veliký. Např. u pece na tavení oceli, obsahu 40 kg, je průměr vsázky $2 r_2 = 20$ cm, měrná vodivost oceli při 1500°C $\gamma = 10^4 \text{ S.cm}^{-1}$, kmitočet $f = 4000 \text{ Hz}$.

$$x_2 = \frac{r_2}{a} \sqrt{2} = r_2 \sqrt{\omega \gamma \mu_0 \mu} = 35,4.$$

Podobně u velké pece o obsahu 5000 kg oceli, průměru vsázky 93 cm, při kmitočtu 600 Hz je $x_2 = 63,6$.

V těchto případech se dají výrazy (43,19) a (43,20) pro H a E značně zjednodušit. V příloze 7,33 jsou částečně odvozeny výrazy pro cylindrické funkce v případě, že argument x roste do nekonečna (výrazy 73,25 až 73,30). Cylindrické funkce potom přejdou na funkce exponenciální.

Úprava výrazu (43,19) pro velký argument x vede k výrazu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} J_0(x \sqrt{-j}) = \frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{8}\right)}}{\sqrt{2\pi x}} e^{\sqrt{j}x}, \quad (43,30)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} J_1(x \sqrt{-j}) = -j \frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{8}\right)}}{\sqrt{2\pi x}} e^{\sqrt{j}x}, \quad (43,31)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} N_0(x \sqrt{-j}) = -\frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{8}\right)}}{\sqrt{2\pi x}} [2e^{-\sqrt{j}x} + je^{\sqrt{j}x}], \quad (43,32)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} N_1(x \sqrt{-j}) = -j \frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{8}\right)}}{\sqrt{2\pi x}} [2e^{-\sqrt{j}x} - je^{\sqrt{j}x}]. \quad (43,33)$$

Těchto výrazů lze používat s přijatelnými chybami již pro $x \geq 8$. Chyba je tím menší, čím je x větší. Dosadme výrazy (43,30) a (43,31) do (43,19) a (43,20):

$$H = H_2 \frac{J_0(x \sqrt{-j})}{J_0(x_2 \sqrt{-j})} = H_2 \frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{8}\right)}}{\sqrt{2\pi x}} \frac{\sqrt{2\pi x_2}}{e^{-j\left(\frac{\pi}{8}\right)}} \frac{e^{\sqrt{j}x_2}}{e^{\sqrt{j}x}} = H_2 \sqrt{\frac{x_2}{x}} e^{-\sqrt{j}(x_2-x)}. \quad (43,34)$$

Vyjádřeme exponent:

$$\begin{aligned} -\sqrt{j}(x_2 - x) &= -\frac{1+j}{\sqrt{2}} \left(\frac{r_2}{a} \sqrt{2} - \frac{r}{a} \sqrt{2} \right) = -\frac{1+j}{a} (r_2 - r) = \\ &= -\frac{1+j}{a} z. \end{aligned} \quad (43,35)$$

Rozdíl $(r_2 - r)$, to je vzdálenost uvažovaného bodu od povrchu, jsme označili z . Výraz (43,34) pro intenzitu H bude

$$H = H_2 \sqrt{\frac{r_2}{r}} e^{-\left(\frac{z}{a}\right)} \cdot e^{-j\left(\frac{\pi}{8}\right)} \quad [\text{A/cm}]. \quad (43,36)$$

Tento výraz je zcela obdobný s (33,8), který jsme odvodili pro intenzitu magnetického pole H ve stěně velké tloušťky při dopadu rovinného vlnění. Rozdíl je pouze v tom, že ve výraze (43,36) je amplituda magnetického vlnění v místě z od povrchu úměrná poměru $\sqrt{\frac{r_2}{r}}$.

Podobně dostaneme z (43,20)

$$E = -\sqrt{j} \frac{\sqrt{2}}{ay} H_2 \sqrt{\frac{r_2}{r}} e^{-\left(\frac{z}{a}\right)} e^{-j\left(\frac{\pi}{8}\right)} \quad [\text{V/cm}]. \quad (43,37)$$

Pro povrch vsázky ($r = r_2$, $z = 0$) bude

$$H = H_2 \quad [\text{A/cm}], \quad (43,38)$$

$$E = E_2 = -\sqrt{j} \frac{\sqrt{2}}{ay} H_2 \quad [\text{V/cm}]. \quad (43,39)$$

Výraz (43,37) je potom

$$E = E_2 \sqrt{\frac{r_2}{r}} e^{-\left(\frac{z}{a}\right)} e^{-j\left(\frac{\pi}{8}\right)} \quad [\text{V/cm}]. \quad (43,40)$$

Utvořme poměr E_2 ku H_2 na povrchu:

$$\frac{E_2}{H_2} = -\frac{1+j}{ay} \quad [\text{V/cm, A/cm}]. \quad (43,41)$$

Stejný výraz (33,12) až na znaménko jsme dostali pro poměr obou intenzit na povrchu rovné stěny.

Při pronikání elmg. vlnění do vodivé stěny se vlnění rychle utlumuje, amplituda složky magnetické i elektrické se zmenšuje podle exponenciální

$$\underline{E} = \sqrt{-j} \frac{r_2}{ay} \frac{H_2 \cdot J_0(x\sqrt{-j})}{J_0(x_2\sqrt{-j})} =$$

$$\begin{aligned} &\xrightarrow[43,20]{\text{z}} \frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{8}\right)}}{\sqrt{2\pi x}} e^{\sqrt{j}x} \\ &J_0(x\sqrt{-j}) = -j \frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{8}\right)}}{\sqrt{2\pi x}} e^{\sqrt{j}x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\xrightarrow[43,20]{\text{z}} \frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{8}\right)}}{\sqrt{2\pi x}} e^{\sqrt{j}x} \\ &J_0(x_2\sqrt{-j}) = \frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{8}\right)}}{\sqrt{2\pi x_2}} e^{\sqrt{j}x_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{-j} \frac{r_2}{ay} H_2 \frac{-j \cdot \frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{8}\right)}}{\sqrt{2\pi x}} e^{\sqrt{j}x} \cdot \sqrt{2\pi x_2}}{\sqrt{2\pi x} \cdot \frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{8}\right)}}{\sqrt{2\pi x_2}} e^{\sqrt{j}x_2}} = \\ &= -j \sqrt{-j} \frac{r_2}{ay} H_2 \sqrt{\frac{x_2}{x}} \cdot e^{j(x_2-x)} \end{aligned}$$

$$-j \sqrt{-j} \frac{r_2}{ay} H_2 \sqrt{\frac{x_2}{x}} \cdot e^{j(x_2-x)} = -\sqrt{j} \frac{r_2}{ay} H_2 \sqrt{\frac{x_2}{x}}$$

$$\begin{aligned} &-j \sqrt{-j} = -\sqrt{-j} \cdot \sqrt{j} = \\ &> -\sqrt{-j} \cdot \sqrt{j} = -1 \sqrt{j} = -\sqrt{j} \end{aligned}$$

,368krát menší proti krát hloubka vniku) hodnot na povrchu). jící elmg. vlnění, je vsázky r_2 . Korekční ibližně rovná jedné. jně jako při dopadu

ové natočení vektoru V hloubce $z = 2\pi a$ stejná jako vektorů e vlnovou délkou λ

cmitu, $T = \frac{1}{f}$. Tak alu bude

[cm/s]. (43,43)

, jako jsme v části

zýhodné opět zavést $-\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)$. (43, 43 a, b)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} J_0(x \sqrt{-j}) = \frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{8}\right)}}{\sqrt{2\pi x}} e^{\sqrt{j}x}, \quad (43,30)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} J_1(x \sqrt{-j}) = -j \frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{8}\right)}}{\sqrt{2\pi x}} e^{\sqrt{j}x}, \quad (43,31)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} N_0(x \sqrt{-j}) = -\frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{8}\right)}}{\sqrt{2\pi x}} [2e^{-\sqrt{j}x} + je^{\sqrt{j}x}], \quad (43,32)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} N_1(x \sqrt{-j}) = -j \quad (43,33)$$

Těchto výrazů lze používat s příjemem menší, čím je x větší. Dosadíme do (43,20):

$$H = H_2 \frac{J_0(x \sqrt{-j})}{J_0(x_2 \sqrt{-j})} = H_2 \frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{8}\right)}}{\sqrt{2}}$$

Vyjádřeme exponent:

$$-\sqrt{j}(x_2 - x) = -\frac{1+j}{\sqrt{2}}$$

Rozdíl $(r_2 - r)$, to je vzdálenost z. Výraz (43,34) pro intenzitu

$$H =$$

Tento výraz je zcela obecný magnetického pole H ve stěně. Rozdíl je pouze v tom, že ve v místě z od povrchu úměří

Podobně dostaneme z (43,34)

$$E = -$$

Pro povrch vsázky ($r =$

Výraz (43,37) je potom

$$E = E_2 \sqrt{\frac{r_2}{r}} e^{-\left(\frac{z}{a}\right)} e^{-j\left(\frac{z}{a}\right)} \quad [\text{V/cm}]. \quad (43,40)$$

Utvorime poměr E_2 ku H_2 na povrchu:

$$\frac{E_2}{H_2} = -\frac{1+j}{a\gamma} \quad [\text{V/cm, A/cm}]. \quad (43,41)$$

Stejný výraz (33,12) až na znaménko jsme dostali pro poměr obou intenzit na povrchu rovné stěny.

Při pronikání elmg. vlnění do vodivé stěny se vlnění rychle utlumuje, amplituda složky magnetické i elektrické se zmenšuje podle exponenciální, maximální hodnoty jsou v rozhraní.

V hloubce vniku ($z = a$) jsou amplitudy E a H $e^{-1} = 0,368$ krát menší proti hodnotám E_2 , H_2 v rozhraní. V hloubce $z = 2\pi a$ (to je 6,28krát hloubka vniku) je elmg. vlnění již prakticky utlumené (přesně 0,00187 z hodnot na povrchu).

Vrstva na povrchu vsázky, ve které se utlumi dopadající elmg. vlnění, je u tavicích pecí poměrně malá v poměru k poloměru vsázky r_2 . Korekční součinitel $\sqrt{\frac{r_2}{r}}$ ve výrazech (43,36) a (43,37) se velmi přibližně rovná jedné.

Výrazy pro H a E u válcové vsázky jsou potom přesně stejné jako při dopadu rovinného vlnění na rovnou stěnu.

Součinitel $\left(e^{-j\left(\frac{\pi}{8}\right)}\right)$ ve výrazech (43,36) a (43,37) značí fázové natočení vektoru H , resp. E v místě z , proti vektorům H_2 , E_2 na povrchu. V hloubce $z = 2\pi a$ se fázové natočení právě rovná 2π . Fáze vektorů H a E je stejná jako vektorů H_2 , E_2 na povrchu. Takto definovanou hloubku nazýváme vlnovou délku λ uvažovaného elmg. vlnění v daném vodivém prostředí.

$$\lambda = 2\pi a = 2\pi \sqrt{\frac{2}{\omega\gamma\mu_0\mu}} = 3,16 \cdot 10^4 \sqrt{\frac{1}{f\gamma\mu}} \quad [\text{cm}]. \quad (43,42)$$

Do této hloubky pronikne vlnění za dobu T jednoho kmitu, $T = \frac{1}{f}$. Takzvaná fázová rychlosť v šíření elmg. vlnění v daném materiálu bude

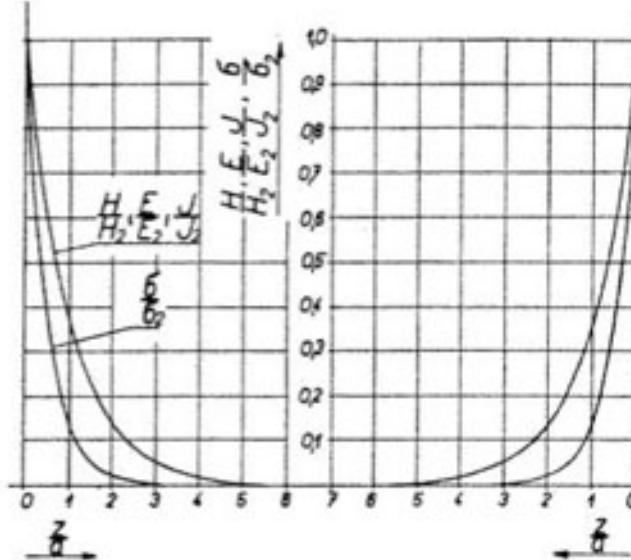
$$v = \lambda f = 2\pi fa = \omega \cdot a = 3,16 \cdot 10^4 \sqrt{\frac{f}{\gamma\mu}} \quad [\text{cm/s}]. \quad (43,43)$$

Výrazy pro vlnovou délku a rychlosť šíření jsou stejné, jako jsme v části 3,31 odvodili při pronikání rovinného vlnění.

Pro grafické znázornění průběhu H a E v řezu vsázky je výhodné opět zavést poměry

$$\frac{H}{H_2} = \frac{E}{E_2} = \frac{J}{J_2} = e^{-\left(\frac{z}{a}\right)}, \quad \frac{\sigma}{\sigma_2} = \left(\frac{J}{J_2}\right)^2 = e^{-\left(\frac{2z}{a}\right)}. \quad (43,43 \text{ a, b})$$

Ciselné hodnoty exponenciální funkce v závislosti na exponentu $\frac{z}{a}$, resp. $\frac{2z}{a}$, jsou v tabulce 43,3. Graficky jsou průběhy všech uvažovaných veličin zobrazeny v diagramu 43,6.



Obr. 43,6. Obecný diagram pro průběh H/H_1 , E/E_1 , J/J_1 a σ/σ_1 ve válcové vsázce.

Tabulka 43,3

$\frac{z}{a}$	0,0	0,2	0,5	1,0	2,0	3,0	5,0	$2\pi = 6,2832$
$e^{-\frac{z}{a}}$	1,000	0,81873	0,60653	0,36798	0,13534	0,04989	0,00674	0,001868
$e^{-\frac{2z}{a}}$	1,000	0,6703	0,36798	0,13534	0,01832	0,00248	$4,54 \cdot 10^{-5}$	

4.33. Proud vybuzený ve vsázce

Vyjdeme z obr. 43,2. Uvažujme část vsázky o osové délce 1 cm. Plošným elementem ($1 \cdot dr$) cm^2 protéká proud:

$$dI_{21} = (1 \cdot dr) \cdot J = J \cdot dr \quad [\text{A/cm}, \text{A/cm}^2]. \quad (43,44)$$

Integraci dostaneme proud I_{21} v uvažované části vsázky:

$$I_{21} = \int_0^{r_1} J \cdot dr = \sqrt{-j} \frac{\sqrt{2}}{a} \frac{H_2}{J_0(x_2 \sqrt{-j})} \int_0^{r_1} J_1(x \sqrt{-j}) \cdot dr \quad [\text{A/cm}]. \quad (43,45)$$

Průběh okamžitých hodnot H a E je u tavicích pecí (velké x_2) stejný, jak jsme odvodili v části 3,32.

$$\begin{aligned} & J_1(x \sqrt{-j}) \cdot dr = \frac{1}{\sqrt{-j}} \frac{J_0(x_2 \sqrt{-j}) - J_0(0)}{J_0(x_2 \sqrt{-j})} = -H_2 \frac{J_0(x_2 \sqrt{-j}) - 1}{J_0(x_2 \sqrt{-j})} \\ & V \text{ píloze } 7,34 \text{ jsme odvodili výraz } (73,32): \end{aligned}$$

$$\int J_1(x \sqrt{-j}) \cdot dr = \int J_1(x \sqrt{-j}) d\left(\frac{\sqrt{2}}{a} r\right) = -\sqrt{j} J_0(x \sqrt{-j}). \quad (43,46)$$

Potom

$$I_{21} = \sqrt{-j} \frac{\sqrt{2}}{a} H_2 (-\sqrt{j}) \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{J_0(x_2 \sqrt{-j}) - J_0(0)}{J_0(x_2 \sqrt{-j})} = -H_2 \frac{J_0(x_2 \sqrt{-j}) - 1}{J_0(x_2 \sqrt{-j})} \quad [\text{A/cm}]. \quad (43,47)$$

Vybuzený proud I_{21} ve vsázce závisí na argumentu x_2 , tedy na fyzikálních vlastnostech γ a μ vsázky, na jejím poloměru r_2 a na kmitočtu.

Pro větší hodnoty argumentu x_2 rostou rychle složky běr x_2 a bei x_2 . Např. pro $x_2 = 10$: běr $x_2 = 138,84$, bei $x_2 = -56,37$. Můžeme proto zanedbat v (43,47) 1 proti $J_0(x \sqrt{-j})$ a potom

$$I_{21} = -H_2 = -H_1 = -N_{11} I_1 = -I_{11} \quad [\text{A/cm}]. \quad (43,48)$$

U pecí tavicích, kde je argument x_2 zpravidla značně větší než 10, nezávisí proud I_{21} ve vsázce ani na fyzikálních vlastnostech γ a μ , ani na poloměru r_2 vsázky, ani na kmitočtu. Vybuzený proud I_{21} je stejně veliký jako proud budící I_{11} , má však opačný smysl.

$$\begin{aligned} \int J_1(x \sqrt{-j}) dr &= \int J_1(x \sqrt{-j}) \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} dx = \\ &= \frac{a}{\sqrt{2}} \int J_1(x \sqrt{-j}) dx = \frac{a}{\sqrt{2}} [J_0(x_2 \sqrt{-j}) - J_0(x_1 \sqrt{-j})] \end{aligned}$$

4.34. Impedance válcové vsázky

Volíme tento postup:

Určíme magnetické toky v dutině cívky, obsahující vsázku. Časová změna těchto toků vybudí ve zvolené části cívky určitou elektromotorickou silu. Abychom uvažované magnetické toky vytvořili, musíme na uvažovanou část cívky dodávat ze zdroje napětí, rovně vybuzené elektromotorické síle, avšak opačného smyslu. Dělíme-li toto napětí, přiváděné na cívku, proudem cívky, dostaneme impedanci vsázky, převedenou do cívky.

Závity cívky protéká proud I_1 [A], na část cívky o osové délce 1 cm připadá budící proud $I_{11} = N_{11} I_1$ [A/cm]. V dutině cívky je magnetický rok Φ_m (v mezeře mezi cívkom a vsázkou) a tok Φ_v (tok vsázkou).

$$\Phi_m = \pi(r_1^2 - r_2^2) \mu_0 \mu H_1 \quad [\text{weber}, \text{cm}, \text{A/cm}], \quad (43,49)$$

$$d\Phi_v = 2\pi r dr \mu_0 \mu H = 2\pi \mu_0 \mu H \frac{a^2}{2} x dx,$$

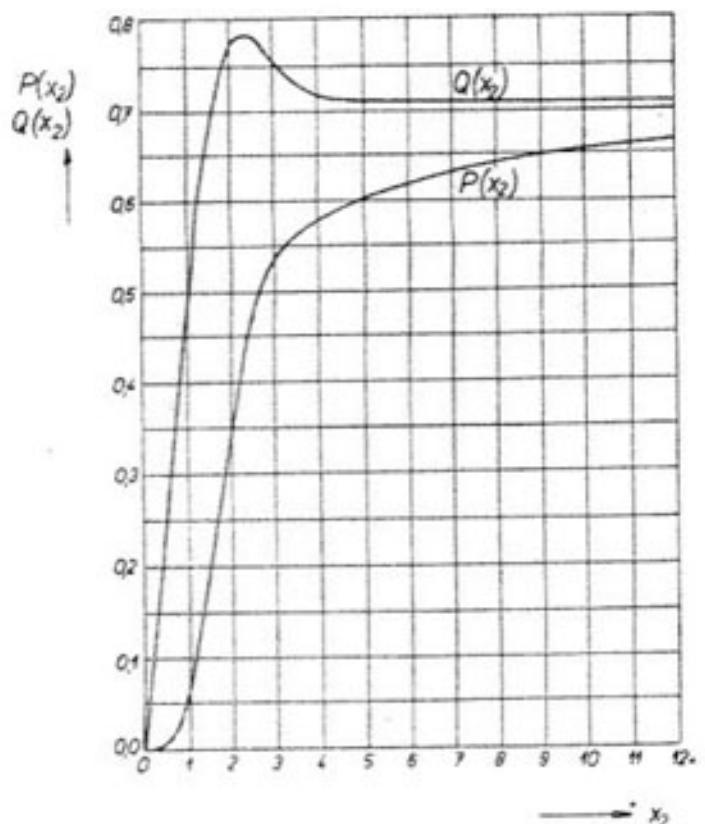
$$\Phi_v = 2\pi \mu_0 \mu \frac{a^2}{2} \int_0^{x_1} H x dx \quad [\text{weber}]. \quad (43,50)$$

Časová změna obou toků indukuje v 1 závitu napětí ($-U_1$), v části cívky o osové délce 1 cm napětí ($-N_{11} U_1$) [V]. Na vytvoření obou toků je třeba přivádět ze zdroje na 1 cm osové délky cívky napěti téže velikosti, avšak opačného smyslu:

$$N_{11} U_1 = N_{11} \left(\frac{d\Phi_m}{dt} + \frac{d\Phi_r}{dt} \right) [\text{V/cm}], \quad (43.51)$$

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = j\omega \pi (r_1^2 - r_2^2) \mu_0 \mu H_1, \quad (43.52)$$

$$\frac{d\Phi_r}{dt} = j\omega \pi \mu_0 \mu a^2 \frac{H_1}{J_0(x_2 \sqrt{-j})} \int_0^{x_2} J_0(x \sqrt{-j}) x dx. \quad (43.53)$$



Obr. 43.7. Průběh činného odporu a reaktance válcové vsázky, v závislosti na x_2 .

$$= -\sqrt{j} \left[\frac{\operatorname{ber} x_2 \cdot \operatorname{ber}' x_2 + \operatorname{bei} x_2 \cdot \operatorname{bei}' x_2}{\operatorname{ber}^2 x_2 + \operatorname{bei}^2 x_2} + j \frac{-\operatorname{ber} x_2 \cdot \operatorname{bei}' x_2 + \operatorname{ber}' x_2 \cdot \operatorname{bei} x_2}{\operatorname{ber}^2 x_2 + \operatorname{bei}^2 x_2} \right] = \\ = -\sqrt{j} [P(x_2) + jQ(x_2)]. \quad (43.55)$$

Funkce argumentu x_2 , dané prvním a druhým členem v závorce, jsme označili $P(x_2)$ a $Q(x_2)$. Hodnoty těchto funkcí jsou v tabulce 43.4, graficky je průběh obou znázorněn na obr. 43.7.

Tabulka 43.4

x	$P(x)$	$Q(x)$	x	$P(x)$	$Q(x)$
0,2	0,0005	0,1000	3,8	0,5792	0,7175
0,3	0,0017	0,1500	3,9	0,5818	0,7155
0,4	0,0040	0,1999	4,0	0,5843	0,7143
0,5	0,0078	0,2497			
0,6	0,0135	0,2992	4,2	0,5885	0,7122
0,7	0,0213	0,3482	4,4	0,5925	0,7110
0,8	0,0316	0,3966	4,6	0,5964	0,7104
0,9	0,0447	0,4440	4,8	0,6006	0,7102
1,0	0,0608	0,4899	5,0	0,6040	0,7102
1,1	0,0798	0,5339	5,2	0,6077	0,7102
1,2	0,1020	0,5756	5,4	0,6113	0,7102
1,3	0,1269	0,6144	5,6	0,6147	0,7102
1,4	0,1546	0,6497	5,8	0,6181	0,7102
1,5	0,1844	0,6812	6,0	0,6211	0,7101
1,6	0,2158	0,7085			
1,7	0,2483	0,7315	6,2	0,6239	0,7100
1,8	0,2810	0,7498	6,4	0,6268	0,7099
1,9	0,3135	0,7638	6,6	0,6293	0,7097
2,0	0,3449	0,7738	6,8	0,6317	0,7096
			7,0	0,6339	0,7095
2,1	0,3748	0,7799			
2,2	0,4026	0,7827	7,2	0,6360	0,7093
2,3	0,4283	0,7829	7,4	0,6380	0,7091
2,4	0,4513	0,7808	7,6	0,6398	0,7090
2,5	0,4718	0,7770	7,8	0,6417	0,7088
2,6	0,4898	0,7721	8,0	0,6433	0,7087
2,7	0,5019	0,7666			
2,8	0,5188	0,7605	8,2	0,6450	0,7086
2,9	0,5303	0,7542	8,4	0,6464	0,7085
3,0	0,5400	0,7486	8,6	0,6478	0,7085
			8,8	0,6492	0,7084
3,1	0,5481	0,7429	9,0	0,6505	0,7084
3,2	0,5550	0,7379			
3,3	0,5608	0,7296	9,2	0,6518	0,7083
3,4	0,5656	0,7287	9,4	0,6529	0,7083
3,5	0,5699	0,7251	9,6	0,6541	0,7082
3,6	0,5733	0,7221	9,8	0,6552	0,7081
3,7	0,5764	0,7197	10,0	0,6563	0,7081

Dosadme (43.52), (43.54), (43.55) do (43.51). Místo H_1 pišme $N_{11} I_1$:

$$N_{11} U_1 = j\omega \pi \mu_0 \mu (r_1^2 - r_2^2) N_{11}^2 I_1 + j\omega \pi \mu_0 \mu a^2 x_2 N_{11}^2 I_1 \sqrt{-j} (-\sqrt{j}) [P(x_2) + jQ(x_2)] = \\ = \{[\omega \pi \mu_0 \mu a^2 x_2 N_{11}^2 P(x_2) + j[\omega \pi \mu_0 \mu (r_1^2 - r_2^2) N_{11}^2 + \omega \pi \mu_0 \mu a^2 x_2 N_{11}^2 Q(x_2)]]. \quad (43.56)$$

Z výrazu pro hloubku vniku můžeme vyjádřit $\omega \mu_0 \mu = \frac{2}{\gamma a^2}$. Dosadme do (43.56). Dělíme-li proudem I_1 , dostaneme impedanci Z_{21} části cívky o délce 1 cm, včetně převedené impedance vsázky:

$$Z_{21} = \frac{N_{11} U_1}{I_1} = \left\{ \frac{2\pi x_2}{\gamma} N_{11}^2 P(x_2) + j[\omega \mu_0 \mu \pi (r_1^2 - r_2^2) N_{11}^2 + \frac{2\pi x_2}{\gamma} N_{11}^2 Q(x_2)] \right\} [\Omega/\text{cm}, \text{V}/\text{cm}, \text{A}]. \quad (43.57)$$

Impedance má reálnou složku, to je činný odpor R_{21} vsázky, a složku jalovou, to je reaktanci vsázky a mezery mezi cívkou a vsázkou.

$$R_{21} = \frac{2\pi x_2}{\gamma} N_{11}^2 P(x_2) [\Omega/\text{cm}], \quad (43,58)$$

$$\omega L_{21} = \omega \mu_0 \mu \pi (r_1^2 - r_2^2) N_{11}^2 + \frac{2\pi x_2}{\gamma} N_{11}^2 Q(x_2) [\Omega/\text{cm}]. \quad (43,59)$$

Výrazy pro činný a jalový odpor vsázky, transformované do cívky, se značně zjednoduší, jedná-li se o vsázkou s větší hodnotou argumentu x_2 , jako je tomu zpravidla u tavicích pecí.

Pro $x_2 > 4$ platí s chybou menší než 1 %:

$$P(x_2) \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2x_2}, \quad (43,60)$$

$$Q(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (43,61)$$

Pro $x_2 > 15$ můžeme v (43,60) zanedbat druhý člen, potom

$$P(x_2) \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (43,62)$$

Dosadme (43,62) do (43,58) a dostaneme výraz pro odpor vsázky s velkým argumentem x_2 :

$$R_{21} = \frac{2\pi x_2}{\gamma} N_{11}^2 P(x_2) = \varrho \frac{2\pi r_2 \sqrt{2}}{a} \frac{1}{\sqrt{2}} N_{11}^2 = \varrho \frac{2\pi r_2}{a} N_{11}^2 [\Omega/\text{cm}]. \quad (43,63)$$

Výraz (43,63) určuje odpor části vsázky o osové délce 1 cm, transformovaný do cívky. Součinitel N_{11}^2 značí převodní poměr $p^2 = N_{11}^2$.

Ekvivalentní odpor části vsázky o osové délce 1 cm je

$$R'_{21} = \varrho \frac{2\pi r_2}{a} [\Omega/\text{cm}]. \quad (43,64)$$

Z výrazu (43,64) vidíme, že vsázka klade naindukovánému proudu odpor, který se rovná odporu vrstvy na povrchu vsázky o tloušťce, rovné hloubce vniku a . Tento důležitý výsledek umožňuje zjednodušení výpočtů kelimkových tavicích indukčních pecí.

4.35. Množství vyvinutého tepla ve válcové vsázce

4.351. Přímé odvození množství tepla

Při průchodu indukovaných proudů vzniká ve vsázce teplo. Měrný příkon σ je množství tepla, které vznikne v jednotce objemu za jednu vteřinu:

$$\sigma = \frac{1}{2\gamma} J^2 = \frac{1}{2} \varrho J^2 [\text{W/cm}^3, \text{S.cm}^{-1}, \text{A/cm}^2]. \quad (43,65)$$

J značí hustotu proudu v místě o poloměru r . V části válcové vsázky o poloměru r_2 , o osové délce 1 cm, vznikne množství tepla P_{21} (obr. 43,8).

$$dP_{21} = 2\pi r \, dr \, \sigma = \pi \varrho J^2 r \, dr,$$

$$P_{21} = \pi \varrho \int_0^{r_2} J^2 r \, dr [\text{W/cm}, \Omega \cdot \text{cm}, \text{A/cm}^2, \text{cm}]. \quad (43,66)$$

Pro hustotu proudu J jsme odvodili výraz (43,25):

$$J^2 = \frac{2}{a^2} H_2^2 \frac{\operatorname{ber}^2 x + \operatorname{bei}^2 x}{\operatorname{ber}^2 x_2 + \operatorname{bei}^2 x_2} [\text{A/cm}^2].$$

Zavedme do (43,66) argument x místo r :

$$x = \frac{r}{a} \sqrt{2}, \quad r \, dr = \frac{a^2}{2} x \, dx. \quad (43,67) \quad \text{Obr. 43,8. Diagram pro přímé odvození naindukováného tepla.}$$

Dosadme do (43,66):

$$P_{21} = \frac{\pi \varrho H_2^2}{\operatorname{ber}^2 x_2 + \operatorname{bei}^2 x_2} \left[\int_0^{x_2} x \operatorname{ber}^2 x \, dx + \int_0^{x_2} x \operatorname{bei}^2 x \, dx \right] [\text{W/cm}]. \quad (43,68)$$

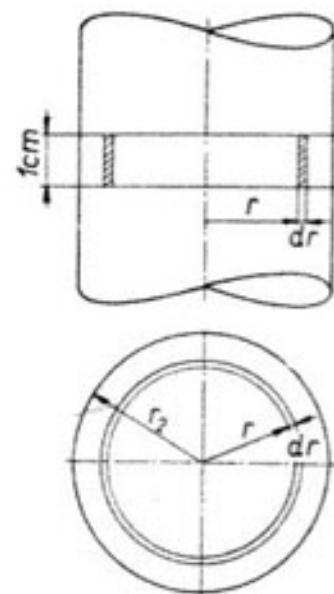
Oba integrály v závorce vyřešíme integraci řad, kterými jsou definovány funkce $\operatorname{ber}' x$ a $\operatorname{bei}' x$ (příloha, (73,14a) a (73,15a)):

$$\operatorname{ber}' x = \left(-\frac{x^3}{2^2 \cdot 4} + \frac{x^7}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2 \cdot 8} - \frac{x^{11}}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10)^2 \cdot 12} + \dots \right), \quad (43,69)$$

$$\operatorname{bei}' x = \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^5}{(2 \cdot 4)^2 \cdot 6} - \frac{x^9}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8)^2 \cdot 10} + \dots \right). \quad (43,70)$$

Řady $\operatorname{ber}' x$ a $\operatorname{bei}' x$ konvergují tím rychleji, čím menší je hodnota argumentu x . Např. pro $x = 5,0$ má řada $\operatorname{ber}' x$ tyto členy:

$$\operatorname{ber}' (5,0) = -7,81 + 4,24 - 0,275 + 0,0045 \dots$$



Integrování obou výrazů v (43,68) je značně zdlouhavé [4,5]. Vzhledem k rychle postupující konvergenci řad ber' x a bei' x omezíme naše řešení na určitý interval argumentu x (např. $0 < x < 4$). Budeme potom ve výsledku sledovat členy s potencemi až do x^{16} . Řady s potencemi vyššími nejsou již úplné, a proto je ve výsledku označíme pouze symbolicky Σx^{20} , Σx^{24} atd.

Naznačeným postupem jsme dostali pro množství tepla P_{21} :

$$P_{21} = \frac{\pi \rho H_2^2}{\operatorname{ber}^2 x_2 + \operatorname{bei}^2 x_2} \left[\frac{x_2^4}{2^2 \cdot 4} + \frac{x_2^8}{(2 \cdot 4)^2 \cdot 8 \cdot 12} + \frac{x_2^{12}}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8)^2 \cdot 10 \cdot 12} + \right. \\ \left. + \frac{x_2^{16}}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8)^2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 16} + \Sigma x_2^{20} + \Sigma x_2^{24} + \dots \right] \quad [\text{W/cm}] \quad (43,71)$$

Abychom se přesvědčili, že můžeme členy s vyššími potencemi Σx_2^{20} a další zanedbat, dosadíme do (43,71) za x_2 horní mez uvažovaného intervalu $x_2 = 4$. Výraz v závorce bude

$$\left[\frac{4^4}{2^4} + \frac{4^8}{2^{11} \cdot 3} + \frac{4^{12}}{2^{17} \cdot 3^2 \cdot 5} + \frac{4^{16}}{2^{23} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7} + \Sigma 4^{20} + \Sigma 4^{24} + \dots \right] = \\ = 16,0 + 10,67 + 2,84 + 0,0226 + \dots \quad (43,72)$$

Ze (43,72) vidíme, že čtvrtý člen řady s potencí 4^{16} je již řádově 10^3 krát menší než člen první. Lze očekávat, že hodnoty členů $\Sigma 4^{20}$ atd. jsou ještě menší než člen $\Sigma 4^{16}$, a proto se dopustíme velmi malé chyby, když členy $\Sigma 4^{20}$ a další prostě zanedbáme. Množství tepla P_{21} dostaneme potom z (43,71), když sečteme první čtyři členy v závorce až do potence x_2^{16} .

4.352. Nepřímé odvození množství tepla ve vsázce

Použijeme způsobu, který je běžně používán u transformátoru, kdy hodnotu odporu ze sekundární strany převádíme na primární. Vzhledem k prostorovému rozložení proudu ve vsázce si však nejsme a priori jisti, že odvozený výsledek bude správný.

V předchozí části 4.34 jsme odvodili výraz (43,58) pro činný odpor R_{21} části vsázky o osové délce 1 cm, transformovaný do cívky. Prochází-li tímto odporem cívkový proud I_1 , vznikne množství tepla P'_{21} :

$$P'_{21} = \frac{1}{2} R_{21} I_1^2 = \frac{2\pi x_2}{\gamma} N_{21}^2 P(x_2) \frac{1}{2} I_1^2 = \pi \rho x_2 P(x_2) (N_{21} I_1)^2 = \pi \rho x_2 H_2^2 P(x_2) \quad [\text{W/cm}] \quad (43,73)$$

Funkce $P(x_2)$ je podle (43,55)

$$P(x_2) = \frac{\operatorname{ber} x_2 \cdot \operatorname{ber}' x_2 + \operatorname{bei} x_2 \cdot \operatorname{bei}' x_2}{\operatorname{ber}^2 x_2 + \operatorname{bei}^2 x_2}. \quad (43,74)$$

Dosadíme (43,74) do (43,73):

$$P'_{21} = \frac{\pi \rho H_2^2}{\operatorname{ber}^2 x_2 + \operatorname{bei}^2 x_2} [\operatorname{ber} x_2 \cdot \operatorname{ber}' x_2 + \operatorname{bei} x_2 \cdot \operatorname{bei}' x_2] \quad [\text{W/cm}] \quad (43,74a)$$

Porovnejme výrazy (43,68) a (43,74a). Podaří-li se dokázat totožnost výrazů v závorkách, bude platit $P_{21} = P'_{21}$.

Dosadíme do (43,74a) za $\operatorname{ber} x_2$, $\operatorname{ber}' x_2$, $\operatorname{bei} x_2$, $\operatorname{bei}' x_2$ z přílohy výrazy (73,14), (73,14a), (73,15), (73,15a). Po vynásobení a sečtení členů týchž potencí dostaneme výsledek stejný s (43,71).

Můžeme-li zanedbat potence x_2^{20} a vyšší, jejichž součtové řady nejsou úplné, což můžeme učinit v případě, že argument x_2 je menší než 4, zjistíme totožnost P'_{21} a P_{21} .

Odvodili jsme, že pro menší hodnoty argumentu x_2 nemusíme při výpočtu tepla užívat složitého výrazu (43,71), avšak můžeme používat velmi jednoduchého výrazu (43,73). Hodnoty funkce $P(x_2)$ jsou uvedeny v tabulce 43,4.

4.353. Důkaz totožnosti výrazů P_{21} a P'_{21} obecně, pro jakýkoliv argument x_2

Z porovnání výrazů (43,68) a (43,74a) vyplývá, že budou totožné, bude-li

$$\int_0^{x_2} x \operatorname{ber}^2 x \, dx + \int_0^{x_2} x \operatorname{bei}^2 x \, dx \quad (43,75)$$

totožné s výrazem

$$[\operatorname{ber} x_2 \cdot \operatorname{ber}' x_2 + \operatorname{bei} x_2 \cdot \operatorname{bei}' x_2]. \quad (43,76)$$

Důkaz provedl v dodatku k pojednání [4,5] O. Koníček. Použil však poněkud odlišných definic cylindrických funkcí $J_0(x \sqrt{-j})$, $J_1(x \sqrt{-j})$, než použil E. Langer ve vlastním pojednání [4,5]. Tyto odchylky znesnadňují, aby pochopili důkaz O. Koníčka čtenáři, kteří nejsou záběhlí v používání cylindrických funkcí komplexního argumentu. Provedme v dalším tento důkaz poněkud odlišným způsobem, při čemž se budeme důsledně přidržovat dříve uvedených definic cylindrických funkcí.

Ve výrazech (43,75) a (43,76) přicházejí reálné a imaginární řady, které definují Besselovy cylindrické funkce prvního druhu, nultého a prvního řádu, pro komplexní argument $(x \sqrt{-j})$.

$$\left. \begin{aligned} J_0(x \sqrt{-j}) &= \operatorname{ber} x - j \operatorname{bei} x, \\ J_1(x \sqrt{-j}) &= -\sqrt{j}(\operatorname{ber}' x - j \operatorname{bei}' x). \end{aligned} \right\} \quad (43,77)$$

Řady $\operatorname{ber}' x$, $\operatorname{bei}' x$ jsou první derivace řad $\operatorname{ber} x$, $\operatorname{bei} x$ podle x . Dosadíme-li do výchozích definic pro funkce $J_0(x)$ a $J_1(x)$ (příloha (73,5), (73,7)) místo

argumentu $(x\sqrt{-j})$ nový argument $(x\sqrt{+j})$, dostaneme až na znaménko u některých řad stejně reálné a imaginární fády ber x , ber' x , bei x , bei' x , takže (podrobněji rozvedeno v [7,6])

$$\left. \begin{aligned} J_0(x\sqrt{+j}) &= \text{ber } x + j \text{ bei } x, \\ J_1(x\sqrt{+j}) &= -\sqrt{-j}(\text{ber}' x + j \text{ bei}' x). \end{aligned} \right\} \quad (43,78)$$

Porovnáme-li (43,77) a (43,78), vidíme, že funkce téhož řádu s argumentem $(x\sqrt{-j})$ a $(x\sqrt{+j})$ jsou komplexně sdružené. Vynásobením dvou komplexně sdružených čísel dostaneme vždy reálný součet čtverců obou složek.

K provedení našeho důkazu použijeme známého Lommelova integrálního vztahu pro cylindrické funkce [7,4].

$$\int_0^{x_2} x J_n(kx) J_n(mx) dx = \frac{x_2}{k^2 - m^2} [m J_{n-1}(mx_2) J_n(kx_2) - k J_{n-1}(kx_2) J_n(mx_2)]. \quad (43,79)$$

V našem případě máme ve výrazech (43,75) a (43,76) funkce prvního a nultého řádu. Součinitelé při x_2 jsou $(\sqrt{-j})$ a $(\sqrt{+j})$:

$$n = 1, \quad (n-1) = 0, \quad k = \sqrt{-j}, \quad m = \sqrt{+j}. \quad (43,80)$$

Vyjádřeme levou stranu výrazu (43,79):

$$\begin{aligned} \int_0^{x_2} x J_1(x\sqrt{-j}) J_1(x\sqrt{+j}) dx &= \int_0^{x_2} x [-\sqrt{j}(\text{ber}' x - j \text{ bei}' x)] (-\sqrt{-j}) dx \\ (\text{ber}' x + j \text{ bei}' x) dx &= \int_0^{x_2} x \text{ber}'^2 x dx + \int_0^{x_2} x \text{bei}'^2 x dx. \end{aligned} \quad (43,81)$$

Je vidět totožnost (43,81) a (43,75).

Nyní vyjádřeme pravou stranu výrazu (43,79):

$$\left. \begin{aligned} k^2 &= (\sqrt{-j})^2 = \frac{1-j}{\sqrt{2}} \frac{1-j}{\sqrt{2}} = -j, \\ m^2 &= (\sqrt{+j})^2 = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \frac{1+j}{\sqrt{2}} = +j, \\ k^2 - m^2 &= -2j, \end{aligned} \right\} \quad (43,82)$$

$$\begin{aligned} m J_{n-1}(mx_2) J_n(kx_2) &= \sqrt{+j} J_0(x_2\sqrt{+j}) J_1(x_2\sqrt{-j}) = \\ &= \sqrt{j}(\text{ber } x_2 + j \text{ bei } x_2) (-\sqrt{+j})(\text{ber}' x_2 - j \text{ bei}' x_2) = \\ &= -j[(\text{ber } x_2 \cdot \text{ber}' x_2 + \text{bei } x_2 \cdot \text{bei}' x_2) + \\ &\quad + j(\text{bei } x_2 \cdot \text{ber}' x_2 - \text{ber } x_2 \cdot \text{bei}' x_2)]. \end{aligned} \quad (43,84)$$

$$\begin{aligned} k J_{n-1}(kx_2) J_n(mx_2) &= \sqrt{-j} J_0(x_2\sqrt{-j}) J_1(x_2\sqrt{+j}) = \\ &= +j[(\text{ber } x_2 \cdot \text{ber}' x_2 + \text{bei } x_2 \cdot \text{bei}' x_2) - \\ &\quad - j(\text{bei } x_2 \cdot \text{ber}' x_2 - \text{ber } x_2 \cdot \text{bei}' x_2)]. \end{aligned} \quad (43,85)$$

První člen v závorce výrazů (43,84) a (43,85) označme A , druhý B . Potom pravá strana vztahu (43,79) bude

$$P = \frac{x_2}{-2j} [-j(A + B) - j(A - B)] = x_2 A. \quad (43,86)$$

Dosadíme-li za A z (43,84), dostaneme

$$P = [x_2 \text{ber } x_2 \cdot \text{ber}' x_2 + x_2 \text{bei } x_2 \cdot \text{bei}' x_2]. \quad (43,86)$$

Je vidět totožnost výrazů (43,86) a (43,76), čímž je důkaz proveden.

4.354. Množství tepla ve vsázce z absorbované elektromagnetické energie

Cívka vyzařuje radiálně do své dutiny elmg. energii, jak jsme poznali v části 4.10. Tato energie je z největší části jalová, nese však poměrně malou složku, která pronikne do vsázky a přemění se v teplo. Označíme-li příslušné vektory na povrchu vsázky \mathbf{E}_2 , \mathbf{H}_2 (pro $r = r_2$), je zářivý vektor \mathbf{S}_2 , který vstupuje do vsázky,

$$\mathbf{S}_2 = [\mathbf{E}_2 \mathbf{H}_2] \quad [\text{VA/cm}^2]. \quad (43,87)$$

Z rovnic (43,19) a (43,20) dostaneme pro $r = r_2$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_2 \quad [\text{A/cm}], \quad (43,88)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \mathbf{E}_2 &= \sqrt{-j} \frac{\sqrt{2}}{a\gamma} \mathbf{H}_2 \frac{J_1(x_2\sqrt{-j})}{J_0(x_2\sqrt{-j})} = \sqrt{-j} \frac{\sqrt{2}}{a\gamma} \mathbf{H}_2 \sqrt{-j} [P(x_2) + jQ(x_2)] = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{a\gamma} \mathbf{H}_2 [P(x_2) + jQ(x_2)] \quad [\text{V/cm}], \end{aligned} \quad (43,89)$$

$$\mathbf{S}_2 = -\left[\frac{\sqrt{2}}{a\gamma} \mathbf{H}_2^2 P(x_2) + j \frac{\sqrt{2}}{a\gamma} \mathbf{H}_2^2 Q(x_2) \right] \quad [\text{VA/cm}^2]. \quad (43,90)$$

První část výrazu značí činnou elmg. energii, která se přemění v teplo. Podobně jako v části 3.43 mohli bychom i zde odvodit, že množství vyvinutého tepla je dáno výrazem

$$\text{Re}(\mathbf{S}_2)_{\text{et}} = \frac{\sqrt{2}}{2a\gamma} P(x_2) H_2^2 \quad [\text{W/cm}^2, \text{A/cm}]. \quad (43,91)$$

Do části válcové vsázky o osové délce 1 cm vstoupí povrchem množství elmg. energie

$$P_{21} = 2\pi r_2 \cdot 1 \cdot \text{Re}(\mathbf{S}_2)_{\text{et}} = \frac{\pi}{\gamma} \frac{r_2 \sqrt{2}}{a} P(x_2) H_2^2 = \pi \rho x_2 P(x_2) H_2^2 \quad [\text{W/cm}]. \quad (43,92)$$

Výrazy (43,92) a (43,73) jsou totožné.

4.355. Množství tepla ve vsázce s velkým argumentem x_2

Pro množství tepla P_{21} jsme odvodili výraz (43,66):

$$P_{21} = \pi \varrho \int_0^{r_2} J^2 r dr \quad [\text{W/cm}]. \quad (43,93)$$

Ve vsázce s velkým argumentem x_2 (např. u tavicích pecí) je hustota proudu J dána výrazem (43,37):

$$J = \gamma E = -\sqrt{j} \frac{\sqrt{2}}{a} H_2 \sqrt{\frac{r_2}{r}} e^{-\left(\frac{z}{a}\right)} e^{-\left(\frac{z}{a}\right)} \quad [\text{A/cm}^2]. \quad (43,94)$$

Absolutní hodnota J :

$$J = \frac{\sqrt{2}}{a} \sqrt{\frac{r_2}{r}} H_2 e^{-\left(\frac{z}{a}\right)} \quad (43,95)$$

Znak z značí vzdálenost od povrchu: $z = (r_2 - r)$.

Dosadme do (43,93):

$$P_{21} = \pi \varrho \frac{2r_2}{a^2} e^{-\left(\frac{2r_2}{a}\right)} H_2^2 \int_0^{r_2} e^{\left(\frac{2r}{a}\right)} dr = \varrho \frac{\pi r_2}{a} H_2^2 \left[1 - e^{-\left(\frac{2r_2}{a}\right)} \right] \quad [\text{W/cm}]. \quad (43,96)$$

U tavicích pecí bývá $a \ll r_2$, tedy hodnota druhého člena v závorce je zanedbatelná proti 1. Vyjádříme H_2 pomocí efektivní hodnoty proudu v cívce $I_{1\text{ef}}$:

$$H_2 = H_1 = N_{11} I_1 = N_{11} \sqrt{2} I_{1\text{ef}} \quad [\text{A/cm}]. \quad (43,97)$$

Množství tepla P_{21} bude

$$P_{21} = \varrho \frac{2\pi r_2}{a} (N_{11} I_{1\text{ef}})^2 \quad [\text{W/cm}]. \quad (43,98)$$

Dříve odvozený obecně platný výraz (43,73) můžeme v případě velkého argumentu x_2 převést na tvar (43,98). Podle (43,62) pro velké x_2 , $P(x_2) \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$P_{21} = \pi \varrho x_2 P(x_2) (N_{11} I_1)^2 = \varrho \frac{2\pi r_2}{a} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} (N_{11} I_{1\text{ef}})^2. \quad (43,99)$$

Použijeme-li výrazu (43,63) pro odpor R_{21} vsázky s velkým argumentem x_2 (R_{21} je odpor vsázky, transformovaný do cívky), můžeme (43,98) napsat také

$$P_{21} = \varrho \frac{2\pi r_2}{a} N_{11}^2 I_{1\text{ef}}^2 = R_{21} I_{1\text{ef}}^2 \quad [\text{W/cm}]. \quad (43,100)$$

Pro proud I_{21} , naindukovaný do vsázky, jsme odvodili výraz (43,48):

$$I_{21} = -N_{11} I_1, \quad I_{21} = \sqrt{2} N_{11} I_{1\text{ef}} \quad [\text{A/cm}]. \quad (43,101)$$

Výraz (43,98) nyní bude

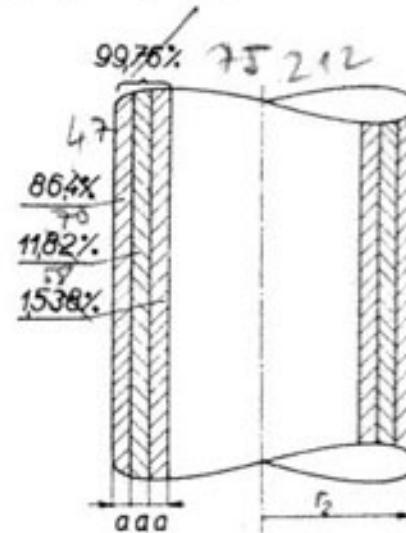
$$P_{21} = \varrho \frac{2\pi r_2}{a} \left(\frac{I_{21}}{\sqrt{2}} \right)^2 = \varrho \frac{2\pi r_2}{a} I_{21\text{ef}}^2 \quad [\text{W/cm}]. \quad (43,102)$$

Z (43,102) vidíme, že množství tepla P_{21} ve vsázce v případě velkého argumentu x_2 je dáno součinem z efektivního odporu vsázky a čtverce naindukovaného proudu.

$$P_{21} = R_{21} I_{21\text{ef}}^2 \quad [\text{W/cm}]. \quad (43,103)$$

Efektivní odpor R_{21} vsázky (pro velké x_2) určuje výraz (43,64).

Obr. 43,9. Množství vyvinutého tepla v povrchových vrstvách o tloušťce, rovné hloubce vniku.



Z výrazu (43,96) můžeme stanovit, kolik tepla vznikne ve vrstvě libovolné tloušťky na povrchu vsázky. Postačí v (43,96) provést integraci v uvažované vrstvě. Určeme např., kolik tepla se vyvine v povrchové vrstvě o tloušťce rovné hloubce vniku a :

$$\begin{aligned} P_a &= \varrho \frac{2\pi r_2}{a^2} e^{-\left(\frac{2r_2}{a}\right)} H_2^2 \int_{(r_2-a)}^{r_2} e^{\left(\frac{2r}{a}\right)} dr = \varrho \frac{2\pi r_2}{a^2} e^{-\left(\frac{2r_2}{a}\right)} H_2^2 \frac{a}{2} \left[e^{\left(\frac{2r}{a}\right)} \right]_{(r_2-a)}^{r_2} = \\ &= \varrho \frac{2\pi r_2}{a} (N_{11} I_{1\text{ef}})^2 (1 - e^{-2}) = 0,864 P_{21} \quad [\text{W/cm}]. \quad (43,104) \end{aligned}$$

V povrchové vrstvě o tloušťce a se přemění v teplo 86,4 % z celkového absorbovaného množství elmg. energie.

Podobně můžeme stanovit množství tepla v povrchové vrstvě o tloušťce $2a$, popřípadě $3a$:

$$P_{2a} = \varrho \frac{2\pi r_2}{a} (N_{11} I_{1\text{ef}})^2 (1 - e^{-4}) = 0,9822 P_{21} \quad [\text{W/cm}], \quad (43,105)$$

$$P_{3a} = \varrho \frac{2\pi r_2}{a} (N_{11} I_{1\text{ef}})^2 (1 - e^{-6}) = 0,99758 P_{21} \quad [\text{W/cm}]. \quad (43,106)$$

Tento výraz značí, že u tavicích pecí, kde vždy bývá hloubka vniku malá proti poloměru vsázky, se vyvine všechno teplo v poměrně tenké vrstvě u povrchu vsázky. Graficky je to znázorněno na obr. 43,9.

U dříve uvažované pece o obsahu 5000 kg oceli, o poloměru vsázky $r_2 = 46,5$ cm, hloubce vniku $a = 2,07$ cm se vytváří vrstvou $3a = 6,21$ cm celkem 99,758 % z absorbované elmg. energie.

V některých případech potřebujeme znát množství elmg. energie, které absorbuje každý cm^2 povrchu válcové vsázky, v závislosti na kmitočtu a fyzikálních vlastnostech vsázky. Vyjdeme z výrazu (43,91). Pro velké x_2 bude

$$\text{Re}(S_2)_{\text{ef}} = \frac{\sqrt{2}}{2ay} \frac{1}{\sqrt{2}} H_2^2 = \frac{1}{2,504} \cdot 10^{-3} \rho \sqrt{\frac{f\mu}{\rho}} H_2^2 \doteq \sqrt{f_0\mu} \cdot 10^{-4} \cdot H_2^2 [\text{W/cm}] \quad (43,107)$$

4.36. Náhradní průměr válcové vsázky

Pro výpočet indukčních tavicích a prohřívacích zařízení je výhodné, nahradit skutečnou válcovou vsázku s prostorovým rozložením proudů válcem nulové tloušťky, kterým protéká proud a jehož působení na cívku je přesně stejné jako působení skutečné vsázky.

Skutečná vsázka, stejně jako náhradní válec nulové tloušťky, mají dvě charakteristické vlastnosti: činný odpor a indukčnost. Našim úkolem je odvodit průměr náhradního válce, který by splňoval tyto dvě podmínky:

- a) indukčnost náhradního válce převedená do cívky je stejná jako indukčnost skutečné vsázky převedená do cívky.
- b) odpor náhradního válce převedený do cívky je stejný jako převedený odpor skutečné vsázky.

4.361. Impedance náhradní vsázky

Na obr. 43,10 je schematicky vyznačeno vzájemné uspořádání náhradního válce vsázky (poloměr označen r_n) a cívky o vnitřním poloměru r_1 . Cívku protéká proud I_1 [A], na 1 cm délky cívky připadá N_{11} závitů a proud $I_{11} = N_{11} \cdot I_1$ [A/cm].

Náhradní vsázka (to je válec nulové tloušťky o poloměru r_n) má na 1 cm své délky činný odpor R_{n1} [Ω/cm] a reaktanci $j\omega L_{n1}$ [Ω/cm]. Převedme tyto hodnoty do primárního obvodu, to je do cívky. Vyjdeme z magnetických toků, jak je vidět z obr. 43,11.

V mezeře mezi cívkom a vsázkou je homogenní magnetické pole velikosti H_1 , v dutině náhradní vsázky je homogenní magnetické pole velikosti H_n .

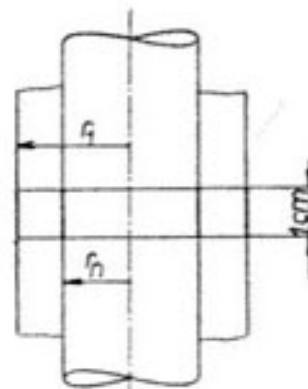
$$H_1 = N_{11} I_1 = I_{11} \quad [\text{A}/\text{cm}], \quad (43,108)$$

$$H_n = I_{11} + I_{n1} \quad [\text{A}/\text{cm}]. \quad (43,109)$$

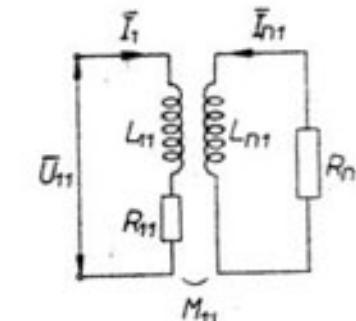
I_{n1} [A/cm] značí proud v části náhradní vsázky o osové délce 1 cm. Proud I_{n1} dostaneme touto úvahou:

Proud I_1 v cívce vybudi v dutině náhradní vsázky fiktivní magnetický tok Φ_{n1} o hodnotě

$$\Phi_{n1} = \mu_0 \mu \pi r_n^2 H_1 \quad [\text{weber}, \text{cm}, \text{A}/\text{cm}]. \quad (43,110)$$



Obr. 43,10. Vzájemné uspořádání náhradního válce vsázky (poloměr r_n) a cívky.



Obr. 43,11. Elektrické schéma náhradního válce vsázky a cívky.

Tento magnetický tok naindukuje do 1 závitu náhradní vsázky elektromotorickou sílu

$$U_{n1} = -\frac{d\Phi_{n1}}{dt} = -j\omega \mu_0 \mu \pi r_n^2 H_1 \quad [\text{V}]. \quad (43,111)$$

Uvažujme závit o šířce 1 cm. Jeho impedance Z_{n1} se rovná

$$Z_{n1} = R_{n1} + j\omega L_{n1} \quad [\Omega/\text{cm}]. \quad (43,112)$$

Elektromotorická síla U_{n1} protlačí závitem proud I_{n1} :

$$I_{n1} = \frac{U_{n1}}{Z_{n1}} = \frac{-j\omega \mu_0 \mu \pi r_n^2 \cdot H_1}{R_{n1} + j\omega L_{n1}} \quad [\text{A}/\text{cm}]. \quad (43,113)$$

Přihlédneme-li k obr. 43,10, můžeme z příslušných magnetických toků odvodit tyto výrazy pro vlastní indukčnost cívky L_{11} , indukčnost náhradní vsázky L_{n1} a vzájemnou indukčnost M_{n1} mezi oběma obvody (uvažujeme část cívky a vsázkou o osové délce 1 cm):

$$\left. \begin{aligned} L_{11} &= \mu_0 \mu \pi r_1^2 N_{11}^2 & [\text{H}/\text{cm}], \\ L_{n1} &= \mu_0 \mu \pi r_n^2 1 & [\text{H}/\text{cm}], \\ M_{n1} &= \mu_0 \mu \pi r_n^2 N_{11} & [\text{H}/\text{cm}], \end{aligned} \right\} \quad (43,114)$$

Výraz (43,113) bude

$$I_{n1} = -\frac{j\omega L_{n1}}{R_{n1} + j\omega L_{n1}} I_{11} \quad [\text{A}/\text{cm}]. \quad (43,115)$$

Na obr. 43,11 vidíme, že dutinou cívky prochází součet obou magnetických toků:

$$\begin{aligned} (\Phi_m + \Phi_n) &= \mu_0 \mu \pi (r_1^2 - r_n^2) H_1 + \mu_0 \mu \pi r_n^2 H_n = \\ &= \mu_0 \mu \pi r_1^2 I_{11} - \mu_0 \mu \pi r_n^2 I_{11} + \mu_0 \mu \pi r_n^2 I_{11} - \mu_0 \mu \pi r_n^2 \frac{j\omega L_{n1}}{R_{n1} + j\omega L_{n1}} I_{11} = \\ &= \pi \mu_0 \mu I_{11} \left[r_1^2 - r_n^2 \frac{j\omega L_{n1}}{R_{n1} + j\omega L_{n1}} \right]. \end{aligned} \quad (43,116)$$

Výsledný magnetický tok v dutině naindukuje do 1 závitu cívky elektromotorickou sílu \mathbf{U}_1 :

$$\mathbf{U}_1 = -\frac{d}{dt} (\Phi_m + \Phi_n) = -j\omega \pi \mu_0 \mu I_{11} \left[r_1^2 - r_n^2 \frac{j\omega L_{n1}}{R_{n1} + j\omega L_{n1}} \right] [V] \quad (43,117)$$

Abychom udrželi v dutině cívky uvažované magnetické toky, musíme přivádět na každý závit stejně veliké napětí \mathbf{U}_1 , avšak opačného smyslu. Na 1 cm cívky musíme přivádět: $(-\mathbf{U}_1 \cdot N_{11})$ [V/cm]. Po krátké úpravě výrazu (43,117) bude

$$\mathbf{U}_1 N_{11} = \frac{\omega \pi \mu_0 \mu}{R_{n1}^2 + \omega^2 L_{n1}^2} N_{11}^2 I_{11} \{ \omega L_{n1} r_n^2 R_{n1} + j[(R_{n1}^2 + \omega^2 L_{n1}^2) r_1^2 - \omega^2 L_{n1}^2 r_n^2] \}. \quad (43,118)$$

Dělíme-li (43,118) proudem I_{11} , dostaneme výslednou impedanci \mathbf{Z}_{n1} části cívky o osové délce 1 cm (zahrnuje i převedenou impedanci náhradní vsázkky). Použijeme-li výrazu (43,114), dostaneme po krátké úpravě

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{n1} &= \frac{\omega^2 M_{11}^2}{R_{n1}^2 + \omega^2 L_{n1}^2} R_{n1} + j \left[\omega L_{n1} - \frac{\omega^2 M_{11}^2}{R_{n1}^2 + \omega^2 L_{n1}^2} \omega L_{n1} \right] = \\ &= p^2 R_{n1} + j[\omega L_{n1} - p^2 \omega L_{n1}] \quad [\Omega/\text{cm}]. \end{aligned} \quad (43,119)$$

Transformační (převodní) poměr p^2 :

$$p^2 = \frac{\omega^2 M_{11}^2}{R_{n1}^2 + \omega^2 L_{n1}^2}. \quad (43,120)$$

V části 4,34 jsme pro impedanci části cívky o délce 1 cm, včetně převedené impedance válcové vsázkky, dostali výraz (43,57):

$$\mathbf{Z}_{21} = \frac{2\pi x_2}{\gamma} N_{11}^2 P(x_2) + j \left[\omega \mu_0 \mu \pi (r_1^2 - r_2^2) N_{11}^2 + \frac{2\pi x_2}{\gamma} N_{11}^2 Q(x_2) \right] \quad [\Omega/\text{cm}].$$

Po krátké úpravě výrazu v závorce, s použitím (43,114) pro L_{11} bude

$$\mathbf{Z}_{21} = \frac{2\pi x_2}{\gamma} N_{11}^2 P(x_2) + j \left\{ \omega L_{11} - \left[\omega \mu_0 \mu \pi r_2^2 N_{11}^2 - \frac{2\pi x_2}{\gamma} N_{11}^2 Q(x_2) \right] \right\}. \quad (43,121)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi \mu_0 \mu \sqrt{J_0} \left[r_1^2 - r_n^2 \frac{j\omega L_{n1}}{R_{n1} + j\omega L_{n1}} \right]}{R_{n1} + j\omega L_{n1}} \quad \text{části, vyplývá, že} \\ &= \pi \mu_0 \mu \sqrt{J_0} \left[r_1^2 - r_n^2 \frac{j\omega L_{n1}}{R_{n1} + j\omega L_{n1}} \right] \end{aligned} \quad (43,122)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1 &= \tilde{J}_{11} + \tilde{J}_{n1} \quad (43,123) \\ \tilde{J}_{n1} &= -\frac{j\omega L_{n1}}{R_{n1} + j\omega L_{n1}} \cdot \tilde{J}_{11} \quad (43,124) \end{aligned}$$

$$\frac{\omega^2 L_{n1}^2}{R_{n1}^2 + \omega^2 L_{n1}^2} R_{n1} = \frac{2\pi x_2}{\gamma} P(x_2) = k_1. \quad (43,124)$$

Z rovnosti imaginárních částí plyně

$$\frac{\omega^2 L_{n1}^2}{R_{n1}^2 + \omega^2 L_{n1}^2} \omega L_{n1} = \omega \mu_0 \mu \pi r_2^2 - \frac{2\pi x_2}{\gamma} Q(x_2) = k_2. \quad (43,125)$$

Abychom zjednodušili psaní, zavedli jsme pomocné znaky k_1 a k_2 .

Řešením rovnic (43,124) a (43,125) dostaneme obě neznámé:

$$R_{n1} = \frac{k_1(k_1^2 + k_2^2)}{k_2^2}, \quad (43,126)$$

$$\omega L_{n1} = \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_2}. \quad (43,127)$$

Upravme vhodně výraz k_1 :

$$k_1 = \frac{2\pi x_2}{\gamma} P(x_2) = \frac{2\pi r_2 \sqrt{2}}{\gamma a} P(x_2). \quad (43,128)$$

Použijme dále známého výrazu pro hloubku vniku:

$$a = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \mu}}, \quad \omega \mu_0 \mu = \frac{2}{a^2 \gamma}, \quad (43,129)$$

$$k_1 = \frac{2\pi r_2 \sqrt{2}}{\gamma a} P(x_2) \omega \mu_0 \mu \frac{a^2 \gamma}{2} \frac{r_2 \sqrt{2}}{r_2 \sqrt{2}} = \omega \mu_0 \pi r_2^2 \frac{2\mu}{x_2} P(x_2). \quad (43,130)$$

Obdobně i výraz k_2 :

$$k_2 = \omega \mu_0 \mu \pi r_2^2 - \frac{2\pi x_2}{\gamma} Q(x_2) = \omega \mu_0 \pi r_2^2 \left[1 - \frac{2\mu}{x_2} Q(x_2) \right]. \quad (43,131)$$

První z obou výrazů je odvozen z fiktivního toku v prázdné dutině o poloměru r_2 , takže $\mu = 1$.

Na obr. 43,11 vidíme, že dutinou toků:

$$\begin{aligned} (\Phi_m + \Phi_n) &= \mu_0 \\ &= \mu_0 \mu \pi r_1^2 I_{11} - \mu_0 \mu \pi r_2^2 I_{11} \\ &= \pi \mu_0 \mu I \end{aligned}$$

Výsledný magnetický tok v motorickou sílu \mathbf{U}_1 :

$$\mathbf{U}_1 = -\frac{d}{dt} (\Phi_m + \Phi_n) =$$

Abychom udrželi v dutině cívky uvažované magnetické toky, musíme přivádět na každý závit stejně veliké napětí \mathbf{U}_1 , avšak opačného smyslu. Na 1 cm cívky musíme přivádět: $(-\mathbf{U}_1, N_{11})$ [V/cm]. Po krátké úpravě výrazu (43,117) bude

$$\mathbf{U}_1 N_{11} = \frac{\omega \pi \mu_0 \mu}{R_{n1}^2 + \omega^2 L_{n1}^2} N_{11}^2 I_1 (\omega L_{n1} r_2^2 R_{n1} + j [(R_{n1}^2 + \omega^2 L_{n1}^2) r_1^2 - \omega^2 L_{n1}^2 r_2^2]). \quad (43,118)$$

Dělíme-li (43,118) proudem I_1 , dostaneme výslednou impedanci \mathbf{Z}_{n1} části cívky o osové délce 1 cm (zahrnuje i převedenou impedanci náhradní vsázky). Použijeme-li výrazu (43,114), dostaneme po krátké úpravě

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{n1} &= \frac{\omega^2 M_{11}^2}{R_{n1}^2 + \omega^2 L_{n1}^2} R_{n1} + j \left[\omega L_{11} - \frac{\omega^2 M_{11}^2}{R_{n1}^2 + \omega^2 L_{n1}^2} \omega L_{n1} \right] = \\ &= p^2 R_{n1} + j[\omega L_{11} - p^2 \omega L_{n1}] \quad [\Omega/\text{cm}]. \end{aligned} \quad (43,119)$$

Transformační (převodní) poměr p^2 :

$$p^2 = \frac{\omega^2 M_{11}^2}{R_{n1}^2 + \omega^2 L_{n1}^2}. \quad (43,120)$$

V části 4,34 jsme pro impedanci části cívky o délce 1 cm, včetně převedené impedance válcové vsázky, dostali výraz (43,57):

$$\mathbf{Z}_{21} = \frac{2 \pi x_2}{\gamma} N_{11}^2 P(x_2) + j \left[\omega \mu_0 \mu \pi (r_1^2 - r_2^2) N_{11}^2 + \frac{2 \pi x_2}{\gamma} N_{11}^2 Q(x_2) \right] \quad [\Omega/\text{cm}].$$

Po krátké úpravě výrazu v závorce, s použitím (43,114) pro L_{11} bude

$$\mathbf{Z}_{21} = \frac{2 \pi x_2}{\gamma} N_{11}^2 P(x_2) + j \left\{ \omega L_{11} - \left[\omega \mu_0 \mu \pi r_2^2 N_{11}^2 - \frac{2 \pi x_2}{\gamma} N_{11}^2 Q(x_2) \right] \right\}. \quad (43,121)$$

4,362. Průměr náhradní vsázky

Z definice náhradní vsázky, uvedené na začátku této části, vyplývá, že obě impedance podle (43,119) a (43,121) musí být totožné:

$$\mathbf{Z}_{\frac{n1}{n2}} = \mathbf{Z}_{21}. \quad (43,122)$$

Musí tedy být totožné reálné i imaginární části:

$$\frac{\omega^2 L_{n1}^2 N_{11}^2}{R_{n1}^2 + \omega^2 L_{n1}^2} R_{n1} = \frac{2 \pi x_2}{\gamma} N_{11}^2 P(x_2). \quad (43,123)$$

(Podle (43,114) $M_{11} = L_{n1} N_{11}$.)

Po vykrácení N_{11}^2

$$\frac{\omega^2 L_{n1}^2}{R_{n1}^2 + \omega^2 L_{n1}^2} R_{n1} = \frac{2 \pi x_2}{\gamma} P(x_2) = k_1. \quad (43,124)$$

Z rovnosti imaginárních částí plyne

$$\frac{\omega^2 L_{n1}^2}{R_{n1}^2 + \omega^2 L_{n1}^2} \omega L_{n1} = \omega \mu_0 \mu \pi r_2^2 - \frac{2 \pi x_2}{\gamma} Q(x_2) = k_2. \quad (43,125)$$

Abychom zjednodušili psaní, zavedli jsme pomocné znaky k_1 a k_2 .

Řešením rovnic (43,124) a (43,125) dostaneme obě neznámé:

$$R_{n1} = \frac{k_1 (k_1^2 + k_2^2)}{k_2^2}, \quad (43,126)$$

$$\omega L_{n1} = \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_2}. \quad (43,127)$$

Upravme vhodně výraz k_1 :

$$k_1 = \frac{2 \pi x_2}{\gamma} P(x_2) = \frac{2 \pi r_2 \sqrt{2}}{\gamma a} P(x_2). \quad (43,128)$$

Použijme dále známého výrazu pro hloubku vniku:

$$a = \sqrt{\frac{2}{\omega \gamma \mu_0 \mu}}, \quad \omega \mu_0 \mu = \frac{2}{a^2 \gamma}, \quad (43,129)$$

$$k_1 = \frac{2 \pi r_2 \sqrt{2}}{\gamma a} P(x_2) \omega \mu_0 \mu \frac{a^2 \gamma}{2} \frac{r_2 \sqrt{2}}{r_2 \sqrt{2}} = \omega \mu_0 \pi r_2^2 \frac{2 \mu}{x_2} P(x_2). \quad (43,130)$$

Obdobně i výraz k_2 :

$$k_2 = \omega \mu_0 \mu \pi r_2^2 - \frac{2 \pi x_2}{\gamma} Q(x_2) = \omega \mu_0 \pi r_2^2 \left[1 - \frac{2 \mu}{x_2} Q(x_2) \right]. \quad (43,131)$$

První z obou výrazů je odvozen z fiktivního toku v prázdné dutině o poloměru r_2 , takže $\mu = 1$.

Dosadíme-li za k_1 a k_2 , bude

$$R_{n1} = \frac{2\pi x_2}{\gamma} P(x_2) \left[1 + \frac{\left[\frac{2\mu}{x_2} P(x_2) \right]^2}{\left[1 - \frac{2\mu}{x_2} Q(x_2) \right]^2} \right] = \frac{2\pi x_2}{\gamma} P(x_2) Y^2(x_2) \quad [\Omega/\text{cm}] \quad (43,132)$$

Zavedli jsme funkci $Y^2(x_2)$, danou výrazem v hranaté závorce.

$$\begin{aligned} \omega L_{n1} &= \frac{k_2}{k_1} R_{n1} = \frac{2\pi x_2}{\gamma} P(x_2) \frac{[x_2 - 2\mu Q(x_2)]}{2\mu P(x_2)} Y^2(x_2) = \\ &= \frac{\pi x_2}{\gamma \mu} \left\{ [x_2 - 2\mu Q(x_2)] + \frac{[2\mu P(x_2)]^2}{[x_2 - 2\mu Q(x_2)]} \right\} \quad [\Omega/\text{cm}] \end{aligned} \quad (43,133)$$

Převodní poměr p^2 z výrazu (43,120):

$$p^2 = \frac{\omega^2 L_{n1}^2 N_{11}^2}{R_{n1}^2 + \omega^2 L_{n1}^2} = \frac{k_2^2}{k_1^2 + k_2^2} N_{11}^2 = \frac{N_{11}^2}{Y^2(x_2)}. \quad (43,134)$$

Poloměr r_n náhradního válce dostaneme z (43,133).

$$\omega L_{n1} = \omega \mu_0 \mu \pi r_n^2 = \frac{\pi x_2}{\gamma \mu} [x_2 - 2\mu Q(x_2)] Y^2(x_2). \quad (43,135)$$

Dutina náhradního válce nebude vyplňena magnetickým materiélem, takže ve výrazu pro ωL_{n1} je $\mu = 1$.

Potom

$$\begin{aligned} r_n^2 &= \frac{x_2}{\omega \gamma \mu_0 \mu} [x_2 - 2\mu Q(x_2)] Y^2(x_2) = \frac{a^2 x_2^2}{2} \left[1 - \frac{2\mu}{x_2} Q(x_2) \right] Y^2(x_2), \\ r_n &= r_2 \sqrt{1 - \frac{2\mu}{x_2} Q(x_2)} Y(x_2). \end{aligned} \quad (43,136)$$

4,363. Činný odpor a průměr náhradní vsázky v případě velkého argumentu x_2

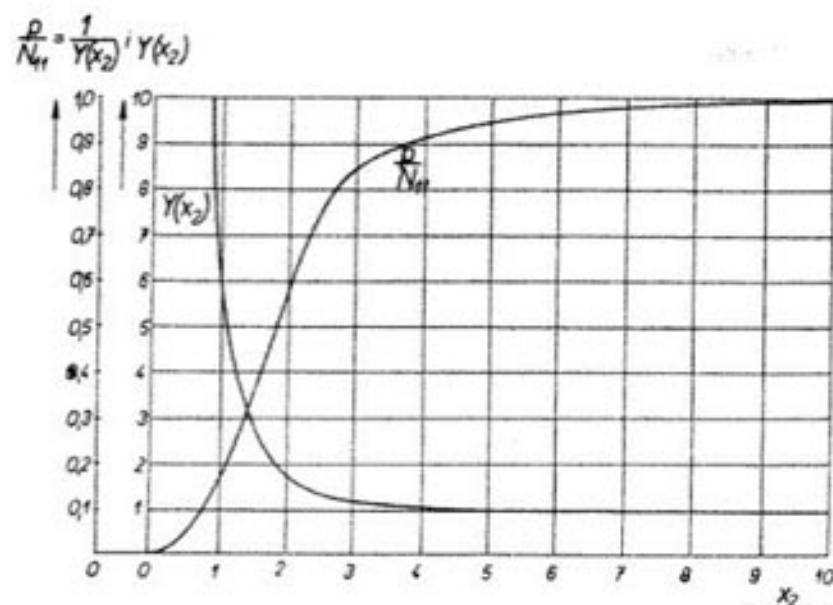
Povšimněme si funkci $Y^2(x_2)$ podle (43,132).

Pro $x_2 \rightarrow \infty$ je $P(x_2) \doteq Q(x_2) \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}$, takže pro $\mu = 1$

$$\lim_{x_2 \rightarrow \infty} Y^2(x_2) = 1 + \frac{\left[\frac{2\mu}{x_2} P(x_2) \right]^2}{\left[1 - \frac{2\mu}{x_2} Q(x_2) \right]^2} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{x_2 - \sqrt{2}} = 1. \quad (43,137)$$

Průběh funkce $Y(x_2)$ v závislosti na argumentu x_2 je na obr. 43,12.

Funkce $Y(x_2)$ prudce roste, zmenšuje-li se argument x_2 k nule. Pro rostoucí x_2 se hodnota $Y(x_2)$ rychle blíží ke své mezní hodnotě, $\lim x_2 = 1,0$. Např. pro $x_2 = 6,0$ je $Y(x_2) = 1,032$.



Obr. 43,12. Průběh funkce $Y(x_2)$ a její pěvrácené hodnoty v závislosti na x_2 .

Činný odpor z výrazu (43,132):

$$\lim_{x_2 \rightarrow \infty} R_{n1} = \frac{2\pi x_2}{\gamma} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi r_2 \sqrt{2}}{\gamma a \sqrt{2}} = \varrho \frac{2\pi r_2}{a} \quad [\Omega/\text{cm}] \quad (43,138)$$

Činný odpor náhradní vsázky se pro velké x_2 rovná odporu povrchové vrstvy o tloušťce rovné hloubce vniku.

Poloměr r_n náhradního válce pro velké x_2 dostaneme z (43,136):

$$\lim_{x_2 \rightarrow \infty} r_n = r_2 \sqrt{1 - \frac{2\mu}{x_2} Q(x_2)}. \quad (43,139)$$

Dosadíme-li za $Q(x_2) \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}$, potom

$$r_n = r_2 \sqrt{1 - 2\mu \frac{a}{r_2 \sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}} = r_2 \sqrt{1 - \mu \frac{a}{r_2}}. \quad (43,140)$$

Uvažujme materiál s permeabilitou $\mu = 1$. Pro velké x_2 platí, že $a \ll r_2$.

Potom můžeme odmočninu rozvinout v řadu a uvažovat pouze první dva členy:

$$r_n = r_2 \sqrt{1 - \frac{a}{r_2}} \doteq r_2 \left(1 - \frac{a}{2r_2}\right) = \left(r_2 - \frac{a}{2}\right) \quad [\text{cm}]. \quad (43,141)$$

Odvodili jsme, že v případě velkého argumentu x_2 je poloměr náhradního válce o polovinu hloubka vniku menší, než je skutečný poloměr r_2 vsázky.

4.364. Průběh poměru r_n/r_2 v závislosti na argumentu x_2

Vyjdeme z výrazu (43,136):

$$\frac{r_n}{r_2} = \sqrt{1 - \frac{2\mu}{x_2} Q(x_2)} Y(x_2). \quad (43,142)$$

Funkce $Y(x_2)$ je určena výrazem (43,132). Pro $\mu = 1$ jsme vypočetli hodnoty $Y(x_2)$ pro argument x_2 v rozmezí $0,3 < x_2 < 10$. Hodnoty $P(x_2)$, $Q(x_2)$ z tabulky 43,3. Výsledky jsou v tabulce 43,5 a v diagramu 43,12.

Tabulka 43,5

x_2	0,3	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	8,0	10,0
$Y(x_2)$	70,6	26,0	6,10	2,91	1,82	1,222	1,095	1,053	1,032	1,020	1,012
$\frac{1}{Y(x_2)}$	0,01414	0,0384	0,164	0,344	0,549	0,838	0,913	0,949	0,970	0,980	0,985

Do diagramu 43,12 je zakreslena i převrácená hodnota $\frac{1}{Y(x_2)} = \frac{p}{N_{11}}$ pro převodní poměr podle (43,134). Oba průběhy se pro $x_2 \rightarrow \infty$ bliží k mezní hodnotě 1,0.

Dále jsme vypočetli hodnoty poměru r_n/r_2 podle (43,142) v rozmezí $0,3 < x_2 < 50$. Výsledky jsou v tabulce 43,6, graficky na obr. 43,13.

Tabulka 43,6

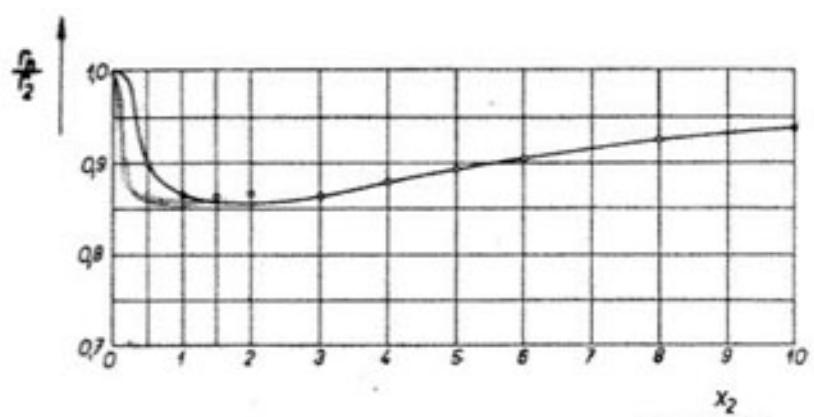
x_2	0,0	0,3	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0
r_n/r_2	1,000	1,0065	0,900	0,867	0,865	0,868	0,865
x_2	4,0	5,0	6,0	8,0	10,0	20,0	50,0
r_n/r_2	0,880	0,894	0,904	0,923	0,935	0,97	0,99

Hodnoty r_n/r_2 pro argument $x_2 < 2$ jsou málo přesné. Ke zvětšení přesnosti by bylo třeba znát další desetinná místa funkce $Q(x_2)$ pro malé argumenty.

Odvodíme v dalším velmi důležitou hodnotu poměru r_n/r_2 , a to pro $x_2 = 0$. Odvodíme limitu výrazu (43,142) pro $x_2 \rightarrow 0$.

Dosadíme-li do (43,142) za $Y(x_2)$, bude

$$\left(\frac{r_n}{r_2}\right)^2 = 1 - \frac{2\mu}{x_2} Q(x_2) + \frac{\left[\frac{2\mu}{x_2} P(x_2)\right]^2}{1 - \frac{2\mu}{x_2} Q(x_2)}. \quad (43,143)$$



Obr. 43,13. Průběh poměru r_n/r_2 v závislosti na x_2 .

Hledanou limitu odvodíme pro případ, že $\mu = 1$. Abychom zjednodušili psání, budeme místo x_2 psát pouze x . Utvořme limity jednotlivých členů výrazu (43,143).

Podle (43,55) jsou funkce $P(x)$ a $Q(x)$:

$$\left. \begin{aligned} P(x) &= \frac{\operatorname{ber} x \cdot \operatorname{ber}' x + \operatorname{bei} x \cdot \operatorname{bei}' x}{\operatorname{ber}^2 x + \operatorname{bei}^2 x}, \\ Q(x) &= \frac{-\operatorname{ber} x \cdot \operatorname{bei}' x + \operatorname{bei} x \cdot \operatorname{ber}' x}{\operatorname{ber}^2 x + \operatorname{bei}^2 x}. \end{aligned} \right\} \quad (43,144)$$

Funkce $\operatorname{ber} x$, $\operatorname{bei} x$, $\operatorname{ber}' x$, $\operatorname{bei}' x$ jsou definovány řadami (73,14), (73,15), (73,14a), (73,15a). Pro $x \leq 1,0$ můžeme zanedbat členy s vyššími potencemi, takže

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ber} x &\doteq 1 - \frac{x^4}{64}, & \operatorname{bei} x &\doteq -\frac{x^2}{4}, \\ \operatorname{ber}' x &\doteq -\frac{x^3}{16}, & \operatorname{bei}' x &\doteq -\frac{x}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (43,145)$$

Dosadíme-li (43,145) do (43,144), bude:

$$P(x) \doteq \frac{2x^3}{x^4 + 32}, \quad (43,146)$$

$$Q(x) \doteq \frac{x(x^4 + 64)}{4(x^4 + 32)}. \quad (43,147)$$

Odvodíme limitu druhého a třetího člena na pravé straně výrazu (43,143):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2}{x} Q(x) \right] = \lim \left[\frac{2}{x} \frac{x(x^4 + 64)}{4(x^4 + 32)} \right] = \lim \frac{x^4 + 64}{2x^4 + 64} = 1,0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[\frac{2}{x} P(x) \right]^2}{\left[1 - \frac{2}{x} Q(x) \right]} = \lim \frac{\left[\frac{2}{x} \frac{2x^3}{x^4 + 32} \right]^2}{\left[1 - \frac{2}{x} \frac{x(x^4 + 64)}{4(x^4 + 32)} \right]} = \lim \frac{x^4 + 32}{2x^4 + 64} = 1,0.$$

Dosadíme do (43,143):

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0} \left(\frac{r_n}{r_2} \right)^2 = 1 - 1 + 1 = +1,0. \quad (43,148)$$

Odvodili jsme, že pro argument $x_2 = 0$ je poloměr r_n náhradní vsázky stejně veliký, jako je skutečný poloměr r_2 vsázky.

4.365. Porovnání odvozeného výsledku s výrazem N. M. Rodigina

Ve své knize [4,1] udává N. M. Rodigin (na str. 108) pro poloměr náhradní vsázky tento výraz:

$$r_n = r_2 \sqrt{1 - \frac{2}{x_2} Q(x_2)}. \quad (43,149)$$

Porovnejme s výrazem (43,136), odvozeným v této práci:

$$r_n = r_2 \sqrt{1 - \frac{2\mu}{x_2} Q(x_2) Y(x_2)}. \quad (43,142)$$

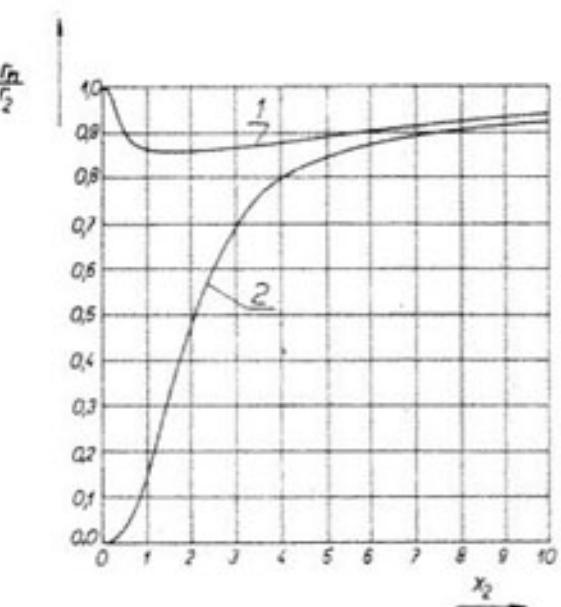
Vidíme, že pro $\mu = 1$ se výraz (43,142) liší od předchozího součinitelem $Y(x_2)$. Pro větší hodnoty argumentu x_2 je $Y(x_2) \doteq 1,0$ a potom dávají oba výrazy stejné hodnoty pro poloměr r_n náhradního válce. Pro malé hodnoty x_2 je však výraz (43,142) správnější. Názorně je to vidět z dalšího obr. 43,14, ve kterém je dán poměr $\frac{r_n}{r_2}$ v závislosti na argumentu x_2 . Správný výsledek podle této práce zobrazuje křivka 1, křivka 2 určuje poměr $\frac{r_n}{r_2}$ podle (43,149).

4.4. Cívka indukční pece

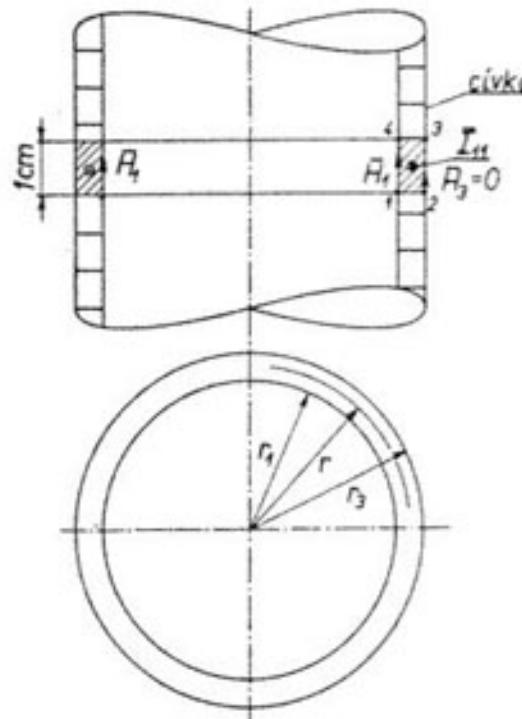
4.41. Odvození výrazů pro intenzitu elektrického a magnetického pole

Cívka je vinuta z vodiče obdélníkového průřezu. V teoretických úvahách předpokládáme, že izolace mezi jednotlivými závity má nulovou tloušťku. Cívku prochází proud o maximální hodnotě I_1 [A], na 1 cm osové délky cívky připadá N_{11} závitů. Proud procházející částí cívky o délce 1 cm označme I_{11} :

$$I_{11} = N_{11} I_1 \quad [\text{A}/\text{cm}, \text{1}/\text{cm}, \text{A}]. \quad (44,1)$$



Obr. 43,14. Průběh poměru r_n/r_2 v závislosti na x_2 . Křivka 1 – podle autora, křivka 2 – podle N. M. Rodigina.



Obr. 44,1. Řez válcovou cívkou.

Vnitřní poloměr cívky označme r_1 , vnější r_3 [cm]. Schematicky je uvažovaná cívka zobrazena v diagramu 44,1.

Vytněme část cívky o osové délce 1 cm. Touto částí cívky jde proud I_{11} [A/cm]. Uvažujme plochu 1, 2, 3, 4. Proud I_{11} teče za nákresnu, intenzita magnetického pole H_1 v dutině má smysl nahoru. Podle předchozího je v dutině cívky homogenní magnetické pole o hodnotě H_1 . Odvodíme H_1 na poloměr r_1 , opět za použití 1. rovnice Maxwellovy. Sledujme vyznačený obdélník 1—2—3—4. Cívka má nekonečnou délku, v tom případě je na vnějším povrchu $H_3 = 0$. Na drahách 1—2 a 3—4 se práce nekoná, protože H nemá složku v tomto směru. Práce se koná pouze na dráze 4—1.

$$H_1 \cdot 1 = I_{11} = N_{11} I_1 \quad [\text{A}/\text{cm}, \text{1}/\text{cm}, \text{A}]. \quad (44,2)$$

Homogenní magnetické pole v dutině vstupuje do vodiče cívky. Protože je o válcovou vlnu ve vodivém prostředí, můžeme použít pro stanovení \mathbf{E} a \mathbf{H} výchozích rovnic (43,9) a (43,17), odvozených v kapitole 4,30. Integrační konstanty C_1 a C_2 ovšem budou mít v tomto případě jiné hodnoty.

$$\mathbf{H} = C_1 \mathbf{J}_0(x \sqrt{-j}) + C_2 \mathbf{N}_0(x \sqrt{-j}) \quad [\text{A/cm}], \quad (44,3)$$

$$\mathbf{E} = \sqrt{-j} \frac{\sqrt{2}}{a\gamma_1} [C_1 \mathbf{J}_1(x \sqrt{-j}) + C_2 \mathbf{N}_1(x \sqrt{-j})] \quad [\text{V/cm}]. \quad (44,4)$$

Vodivost materiálu cívky jsme označili γ_1 , je to zpravidla měd.

Hloubka vniku ve stěně cívky a_1 :

$$a_1 = \sqrt{\frac{2}{\omega \gamma_1 \mu_0 \mu}} \quad [\text{cm}, \text{S.cm}^{-1}]. \quad (44,5)$$

Argument

$$x = \frac{r}{a_1} \sqrt{2}. \quad (44,5a)$$

Integrační konstanty C_1 a C_2 dostaneme z mezních podmínek.

- a) Na vnitřním poloměru r_1 je $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1$.
- b) U nekonečně dlouhé cívky se intenzita \mathbf{H}_3 na vnějším povrchu rovná nule.

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 = C_1 \mathbf{J}_0(x_1 \sqrt{-j}) + C_2 \mathbf{N}_0(x_1 \sqrt{-j}), \quad (44,6)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_3 = 0 = C_1 \mathbf{J}_0(x_3 \sqrt{-j}) + C_2 \mathbf{N}_0(x_3 \sqrt{-j}). \quad (44,7)$$

Z rovnic (44,6) a (44,7) dostaneme C_1 a C_2 .

Dosadíme C_1 a C_2 do (44,3) a (44,4):

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \frac{\mathbf{N}_0(x_3 \sqrt{-j}) \mathbf{J}_0(x \sqrt{-j}) - \mathbf{J}_0(x_3 \sqrt{-j}) \mathbf{N}_0(x \sqrt{-j})}{\mathbf{J}_0(x_1 \sqrt{-j}) \mathbf{N}_0(x_3 \sqrt{-j}) - \mathbf{J}_0(x_3 \sqrt{-j}) \mathbf{N}_0(x_1 \sqrt{-j})} \quad [\text{A/cm}], \quad (44,8)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\gamma_1} \mathbf{J} = \sqrt{-j} \frac{\sqrt{2}}{a_1 \gamma_1} \mathbf{H}_1 \frac{\mathbf{N}_0(x_3 \sqrt{-j}) \mathbf{J}_1(x \sqrt{-j}) - \mathbf{J}_0(x_3 \sqrt{-j}) \mathbf{N}_1(x \sqrt{-j})}{\mathbf{J}_0(x_1 \sqrt{-j}) \mathbf{N}_0(x_3 \sqrt{-j}) - \mathbf{J}_0(x_3 \sqrt{-j}) \mathbf{N}_0(x_1 \sqrt{-j})} \quad [\text{V/cm}, \text{A/cm}^2, \text{A/cm}]. \quad (44,9)$$

Poměrně složité výrazy (44,10) a (44,11) pro \mathbf{H} a \mathbf{E} se téměř ve všech případech dají zjednodušit, protože argument x má obvykle veliké hodnoty. V tom případě můžeme nahradit Besselovy funkce jednoduššími funkciemi exponenciálnimi.

Jako příklad uvedme:

Hloubka vniku v mědi je v důsledku vysoké vodivosti γ_1 značně menší než v oceli. Při kmitočtu $f = 600$ Hz, $\gamma_1 = 5,5 \cdot 10^5 \text{ S.cm}^{-1}$, je $a_1 = 0,276 \text{ cm}$.

Je-li poloměr cívky (z mědi) velké tavící pece $r_1 = 58,0 \text{ cm}$, potom

$$x_1 = \frac{r_1}{a_1} \sqrt{2} = \frac{58,0}{0,276} \cdot 1,41 = 297.$$

Pro malou tavící pec obsahu 40 kg o poloměru $r_1 = 13 \text{ cm}$ při kmitočtu $f = 4000$ Hz bude $x_1 = 198$.

Odvodíme jednodušší výrazy pro \mathbf{H} a \mathbf{E} tak, že ve výrazech (44,8) a (44,9) nahradíme funkce Besselovy funkciemi exponenciálnimi. Náhradní funkce cylindrické pro velké hodnoty argumentu x jsou v příloze 7,33, výrazy (73,25) až (73,30). Dosadíme do (44,8) a dostaneme

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \sqrt{\frac{x_1}{x}} \frac{e^{\sqrt{j}s} - e^{-\sqrt{j}s}}{e^{\sqrt{j}s_1} - e^{-\sqrt{j}s_1}} \quad [\text{A/cm}]. \quad (44,10)$$

V předchozim jsme označili

$$s = (x_3 - x) = \frac{\sqrt{2}}{a_1} (r_3 - r) = \frac{\sqrt{2}}{a_1} z,$$

$$s_1 = (x_3 - x_1) = \frac{\sqrt{2}}{a_1} (r_3 - r_1) = \frac{\sqrt{2}}{a_1} z_1.$$

Symbol z značí vzdálenost uvažovaného bodu od vnějšího povrchu, z_1 je tloušťka vodiče cívky.

Vyjádříme funkce $e^{\sqrt{j}s}$ a $e^{-\sqrt{j}s}$ pomocí hyperbolických a goniometrických funkcí. V příloze, z části 7,20, jsme odvodili výrazy (72,13):

$$\begin{aligned} [e^{(1+j)x} + e^{-(1+j)x}] &= 2 \cosh [(1+j)x], \\ [e^{(1+j)x} - e^{-(1+j)x}] &= 2 \sinh [(1+j)x]. \end{aligned}$$

Protože $\sqrt{j} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$, bude

$$\begin{aligned} e^{\sqrt{j}s} + e^{-\sqrt{j}s} &= 2 \cosh (\sqrt{j}s), \\ e^{\sqrt{j}s} - e^{-\sqrt{j}s} &= 2 \sinh (\sqrt{j}s). \end{aligned}$$

Výraz (44,10) bude

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \sqrt{\frac{x_1}{x}} \frac{\sinh (\sqrt{j}s)}{\sinh (\sqrt{j}s_1)} \quad [\text{A/cm}] \quad (44,12)$$

Rozepišme argument:

$$(\sqrt{j}s) = \frac{1+j}{\sqrt{2}} (x_3 - x) = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{a_1} (r_3 - r) = \frac{1+j}{a_1} z. \quad (44,13)$$

Podobně jako dříve v části 3,50 použijeme i zde označení

$$p = \frac{1+j}{a_1}. \quad (44,14)$$

Argument potom bude:

$$(\sqrt{j}s) = pz. \quad (44,15)$$

Intenzita magnetického pole:

$$H = H_1 \sqrt{\frac{x_1}{x}} \frac{\sinh pz}{\sinh pz_1} \quad [\text{A/cm}]. \quad (44,16)$$

Výraz (44,16) je až na součinitele $\sqrt{\frac{x_1}{x}}$ stejný jako výraz (35,30) pro intenzitu magnetického pole ve stěně malé tloušťky při dopadu rovinného vlnění z jedné strany.

Absolutní hodnota H bude potom podle (35,39)

$$H = H_1 \sqrt{\frac{r_1}{r}} \sqrt{\frac{\cosh \frac{2z}{a_1} - \cos \frac{2z}{a_1}}{\cosh \frac{2z_1}{a_1} - \cos \frac{2z_1}{a_1}}} \quad [\text{A/cm}]. \quad (44,17)$$

(Symbol d značí tloušťku stěny malé tloušťky, tloušťku vodiče cívky označujeme z_1).

Zjednodušme obdobným způsobem výraz (44,9) pro intenzitu elektrického pole E :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{\gamma_1} J = \frac{1+j}{a_1 \gamma_1} H_1 \sqrt{\frac{x_1}{x}} \frac{e^{\sqrt{j}s_1} + e^{-\sqrt{j}s_1}}{e^{\sqrt{j}s_1} - e^{-\sqrt{j}s_1}} = \frac{1+j}{a_1 \gamma_1} H_1 \sqrt{\frac{x_1}{x}} \frac{\cosh(\sqrt{j}s_1)}{\sinh(\sqrt{j}s_1)} = \\ &= \frac{p}{\gamma_1} H_1 \sqrt{\frac{x_1}{x}} \frac{\cosh pz}{\sinh pz_1} \quad [\text{V/cm}]. \end{aligned} \quad (44,18)$$

Tento výraz je až na součinitele $\sqrt{\frac{x_1}{x}}$ stejný s výrazem (35,32) pro intenzitu elektrického pole ve stěně malé tloušťky. Absolutní hodnota je podle (35,43)

$$E = \frac{1}{\gamma_1} J = \frac{\sqrt{2}}{a_1 \gamma_1} H_1 \sqrt{\frac{r_1}{r}} \sqrt{\frac{\cosh \frac{2z}{a_1} + \cos \frac{2z}{a_1}}{\cosh \frac{2z_1}{a_1} - \cos \frac{2z_1}{a_1}}} \quad [\text{V/cm}]. \quad (44,19)$$

Hodnota součinitele velmi přibližně:

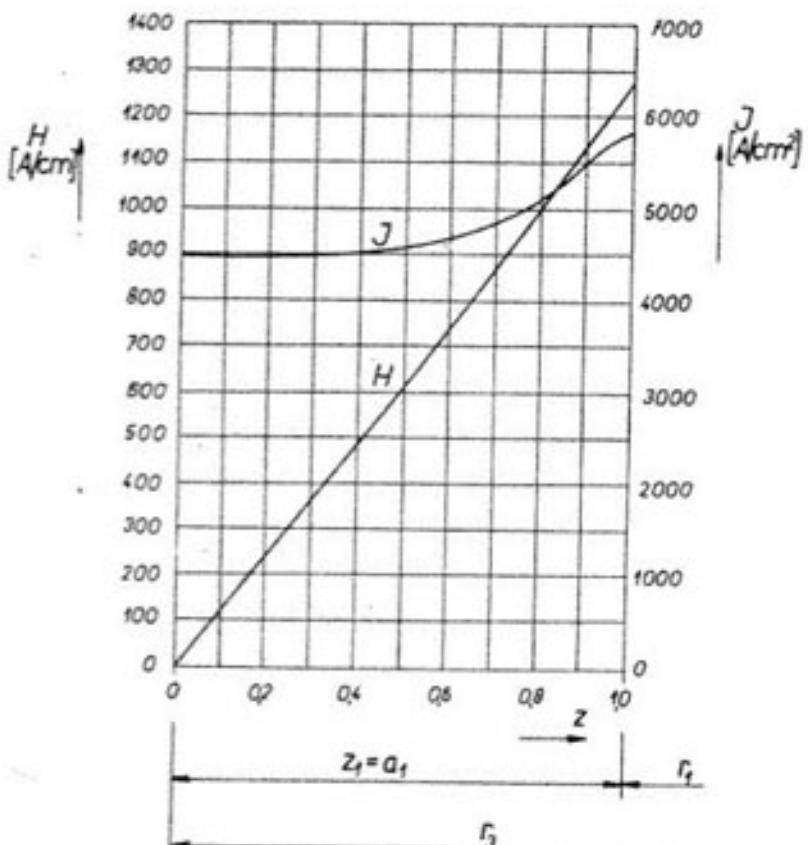
$$\sqrt{\frac{x_1}{x}} \doteq \sqrt{\frac{r_1}{r}} \doteq 1 \quad (44,20)$$

Příklad 44,1

Určeme průběh intenzity H a E ve stěně pevné cívky z mědi pro tavicí pec na ocel obsahu 5000 kg. Kmitočet přiváděného proudu $f = 600$ Hz. Vodivost mědi $\gamma_1 = 5,5 \cdot 10^8 \text{ S} \cdot \text{cm}^{-1}$. Tloušťku vodiče cívky z_1 volme rovnou

hloubce vniku a_1 . Hloubka vniku $a_1 = 0,276$ cm. Efektivní proud I_{let} procházející cívkou je 5530 A, $I_1 = \sqrt{2} \cdot 5530 = 7830$ A. Šířka závitů je 6,16 cm, $N_{11} = \frac{1}{6,16} = 0,162$ [1/cm].

$$H_1 = N_{11} I_1 = 0,162 \cdot 7830 = 1270 \text{ A/cm}.$$



Obr. 44,2. Rozložení magnetického a elektrického pole ve stěně cívky.

Průběh intenzity H určíme z výrazu (44,17), průběh $J = \gamma E$ z výrazu (44,19).

$$z_1 = (r_2 - r_1) = a_1,$$

$$(s_1 \sqrt{2}) = (r_2 - r_1) \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{a_1} (r_2 - r_1) \sqrt{2} = \frac{2}{a_1} z_1 = 2.$$

Vypočetli jsme H a J pro tyto body:

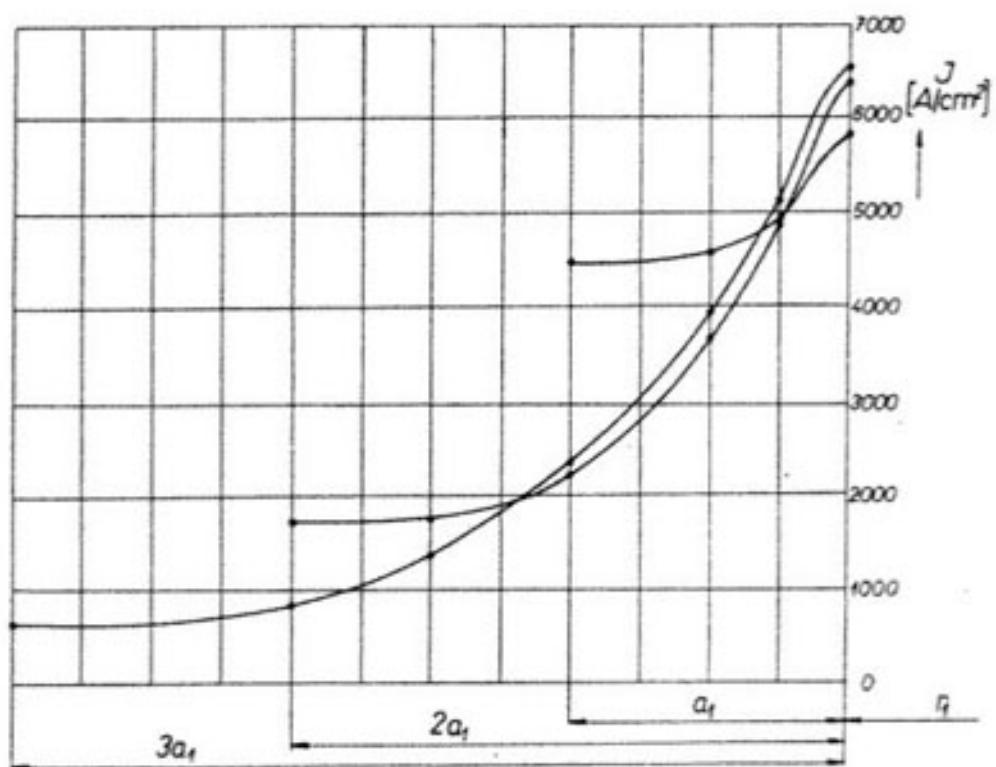
$$z = 0,0 a_1, 0,50 a_1, 0,75 a_1, 1,00 a_1.$$

Výsledky jsou v tabulce 44,1 a v diagramu 44,2.

Na obr. 44,2 jsou zakresleny průběhy amplitud H a J ve stěně cívky v závislosti na vzdálenosti z od vnějšího povrchu. Abychom se bliže seznámili s průběhem hustoty J i v případech, že tloušťka vodiče z_1 je větší než a_1 ,

Tabulka 44,1

z	$0,0a_1$	$0,5a_1$	$0,75a_1$	$1,0a_1$
H [A/cm]	0	618	940	1270
J [A/cm 2]	4490	4595	4950	5840



Obr. 44,3. Rozložení magnetického a elektrického pole ve stěně cívky, v závislosti na její tloušťce.

provedli jsme výpočty hustoty proudu J ještě pro případy, kdy tloušťka z se rovná dvojnásobku a trojnásobku hloubky vniku. Výsledky výpočtů jsou v tabulce 44,2 a v diagramu 44,3.

Tabulka 44,2

$z_1 = 2a_1$	z	$0,0a_1$	$0,5a_1$	$1,0a_1$	$1,5a_1$	$1,75a_1$	$2,0a_1$
	J [A/cm 2]	1730	1770	2250	3700	4890	6360

$z_1 = 3a_1$	z	$0,0a_1$	$1,0a_1$	$1,5a_1$	$2,0a_1$	$2,5a_1$	$2,75a_1$	$3,0a_1$
	J [A/cm 2]	650	840	1385	2370	3980	5130	6540

4.42. Proud v cívce

Proud v cívce (v části o osové délce 1 cm) označme I_{11} [A/cm]. Tento proud získáme integrací elementárních proudů dI_{11} v řezu, kolmém k proudovým vláknům. Na poloměru r zvolme plošku o šířce dr a výšce 1 cm. Hustota je J . Potom

$$dI_{11} = J (dr \cdot 1), I_{11} = \int_{r_1}^{r_2} J dr \quad [\text{A/cm}, \text{A/cm}^2, \text{cm}], \quad (44,21)$$

Rozepišme výraz (44,9) pro J :

$$\begin{aligned} J &= \frac{1-j}{a_1} H_1 \left[\frac{N_0(x_3 \sqrt{-j})}{J_0(x_1 \sqrt{-j}) N_0(x_3 \sqrt{-j}) - J_0(x_3 \sqrt{-j}) N_0(x_1 \sqrt{-j})} J_1(x \sqrt{-j}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{J_0(x_3 \sqrt{-j})}{J_0(x_1 \sqrt{-j}) N_0(x_3 \sqrt{-j}) - J_0(x_3 \sqrt{-j}) N_0(x_1 \sqrt{-j})} N_1(x \sqrt{-j}) \right] = \\ &= \frac{1-j}{a_1} H_1 [A_1 J_1(x \sqrt{-j}) - B_1 N_1(x \sqrt{-j})] \quad [\text{A/cm}^2, \text{A/cm}], \quad (44,22) \end{aligned}$$

$$I_{11} = \frac{1-j}{a_1} H_1 \left[A_1 \int_{r_1}^{r_2} J_1(x \sqrt{-j}) dr - B_1 \int_{r_1}^{r_2} N_1(x \sqrt{-j}) dr \right] \quad [\text{A/cm}]. \quad (44,23)$$

Podle (73,32)

$$\int_{r_1}^{r_2} J_1(x \sqrt{-j}) dr = -\sqrt{j} \frac{a_1}{\sqrt{2}} [J_0(x_3 \sqrt{-j}) - J_0(x_1 \sqrt{-j})]. \quad (44,24)$$

Obdobně

$$\int_{r_1}^{r_2} N_1(x \sqrt{-j}) dr = -\sqrt{j} \frac{a_1}{\sqrt{2}} [N_0(x_3 \sqrt{-j}) - N_0(x_1 \sqrt{-j})]. \quad (44,25)$$

Dosadíme-li (44,24) a (44,25) do (44,23), dostaneme po vykrácení

$$I_{11} = + H_1 = + N_{11} I_1 \quad [\text{A/cm}], \quad (44,26)$$

$$I_1 = \frac{I_{11}}{N_{11}} \quad [\text{A}]. \quad (44,27)$$

Integraci elementárních proudů vzájemně proti sobě fázově pošinutých jsme skutečně dostali proud I_1 , přiváděný ze zdroje do pecní cívky.

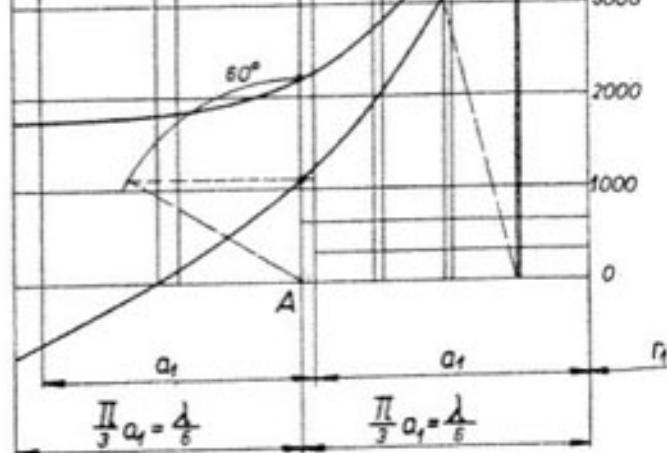
Celkový proud I_{11} můžeme dostat také graficky, vyjdeme-li z diagramu 44,3. Překresleme do dalšího diagramu 44,4 z 44,3 průběh hustoty J např. pro $z_1 = 2a_1$.

V části 4,32 jsme odvodili, že vlnová délka λ elektromagnetického vlnění při dopadu válcové vlny na válcovou vodivou vsázkou se rovná: $\lambda = 2\pi a$ [cm].

Endovol. dr. 44

Vlnovou délkou rozumíme dráhu, kterou urazí vlnění v materiálu za dobu $T = \frac{1}{f}$, za kterou se fáze vektoru \mathbf{J} změní o plný úhel 2π .

Těchto poznatků použijeme při konstrukci průběhu okamžitých hodnot hustoty J pro zvolený okamžik, např. kdy vektor hustoty na povrchu má maximální hodnotu. Vektor hustoty ve vzdálenosti $\lambda = 2\pi a_1$ od povrchu bude mít fázi $2\pi = 360^\circ$. Ve vzdálenosti např. $\frac{1}{6}\lambda = \frac{2\pi a_1}{6}$ bude vektor \mathbf{J} pootočen o $360^\circ/6 = 60^\circ$. Sestrojíme bod A , vzdálený od povrchu o $\frac{1}{6}\lambda = 1,047 a_1$.



Obr. 44,4. Grafické odvození okamžitých hodnot hustoty proudu ve stěně cívky.

mum (obr. 44,4). Obdobným způsobem bychom mohli zakreslit i průběhy proti uvažovanému okamžiku časově posunuté o libovolný zlomek doby kmitu. Planimetrováním plochy mezi nakreslenou křivkou a osou X dostaneme maximální hodnotu I_1 proudu v cívce a samozřejmě dostaneme stejnou hodnotu nezávisle na tloušťce vodiče.

4.43. Impedance cívky

Má-li cívku protékat proud I_1 , je třeba přivádět z cizího zdroje napětí, jehož část připadající na 1 závit označme \mathbf{U}_1 . Proud I_1 protékající cívku vyvolá magnetický tok Φ_1 v dutině cívky a tok Φ_2 ve stěně cívky:

$$\Phi_1 = \pi r_1^2 \mu_0 \mu \mathbf{H}_1 \quad [\text{Wb}, \text{cm}, \text{A}/\text{cm}], \quad (44,28)$$

$$\Phi_2 = 2\pi \mu_0 \mu \int_{r_1}^{r_3} \mathbf{H} r \, dr \quad [\text{Wb}, \text{cm}, \text{A}/\text{cm}]. \quad (44,29)$$

Uvažujme proudové vlákno na vnějším poloměru cívky r_3 . Tímto vláknem procházejí oba magnetické toky Φ_1 a Φ_2 a v něm indukuje elektromotorické síly, které označme \mathbf{u}_1 a \mathbf{u}_2 :

$$\mathbf{u}_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -j\omega \pi r_1^2 \mu_0 \mu \mathbf{H}_1 \quad [\text{V}, \text{cm}, \text{A}/\text{cm}], \quad (44,30)$$

$$\mathbf{u}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -j\omega \cdot 2\pi \mu_0 \mu \int_{r_1}^{r_3} \mathbf{H} r \, dr \quad [\text{V}, \text{cm}, \text{A}/\text{cm}]. \quad (44,31)$$

Napětí \mathbf{U}_1 přiváděné na 1 závit ze zdroje překonává indukční úbytky \mathbf{u}_1 a \mathbf{u}_2 a mimoto úbytek \mathbf{u}_3 , způsobený činným odporem vodiče. Intenzitu elektrického pole na poloměru r_3 označme \mathbf{E}_3 :

$$\mathbf{E}_3 = \frac{1}{\gamma_1} \mathbf{J}_3 \quad [\text{V}/\text{cm}],$$

$$\mathbf{u}_3 = 2\pi r_3 \mathbf{E}_3. \quad (44,32)$$

Napětí \mathbf{U}_1 přiváděné ze zdroje je dáno součtem:

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 \quad [\text{V}]. \quad (44,33)$$

Určeme jednotlivé členy pravé strany výrazu (44,33). Část (44,30) můžeme přímo vyčíslit.

Určení výrazu (44,31):

Zavedme místo proměnné r argument x :

$$r = \frac{xa}{\sqrt{2}},$$

$$\int_{r_1}^{r_3} \mathbf{H} r \, dr = \frac{a^2}{2} \int_{x_1}^{x_3} \mathbf{H} x \, dx. \quad (44,34)$$

Za \mathbf{H} dosadme z (44,8):

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \left[\frac{\text{N}_0(x_3 \sqrt{-j})}{\text{J}_0(x_1 \sqrt{-j}) \text{N}_0(x_3 \sqrt{-j}) - \text{J}_0(x_3 \sqrt{-j}) \text{N}_0(x_1 \sqrt{-j})} \text{J}_0(x \sqrt{-j}) - \right.$$

$$\left. - \frac{\text{J}_0(x_3 \sqrt{-j})}{\text{J}_0(x_1 \sqrt{-j}) \text{N}_0(x_3 \sqrt{-j}) - \text{J}_0(x_3 \sqrt{-j}) \text{N}_0(x_1 \sqrt{-j})} \text{N}_0(x \sqrt{-j}) \right] =$$

$$= \mathbf{H}_1 [A_1 \text{J}_0(x \sqrt{-j}) - B_1 \text{N}_0(x \sqrt{-j})] \quad [\text{A}/\text{cm}]. \quad (44,35)$$

$$\int_{r_1}^{r_3} \mathbf{H} r \, dr = \frac{a^2}{2} \mathbf{H}_1 \left[A_1 \int_{x_1}^{x_3} \text{J}_0(x \sqrt{-j}) x \, dx - B_1 \int_{x_1}^{x_3} \text{N}_0(x \sqrt{-j}) x \, dx \right] \quad (44,36)$$

V příloze (7,34) jsme odvodili integrál (73,34):

$$\left. \begin{aligned} \int_{x_1}^{x_3} J_0(x \sqrt{-j}) x dx &= \sqrt{j} x_3 J_1(x_3 \sqrt{-j}) - \sqrt{j} x_1 J_1(x_1 \sqrt{-j}), \\ \int_{x_1}^{x_3} N_0(x \sqrt{-j}) x dx &= \sqrt{j} x_3 N_1(x_3 \sqrt{-j}) - \sqrt{j} x_1 N_1(x_1 \sqrt{-j}). \end{aligned} \right\} \quad (44,37)$$

Dosadme (44,37) do (44,36) a dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_3} H_r dr &= \sqrt{j} \frac{a^2}{2} \mathbf{H}_1 \left\{ \frac{x_3 [N_0(x_3 \sqrt{-j}) J_1(x_3 \sqrt{-j}) - J_0(x_3 \sqrt{-j}) N_1(x_3 \sqrt{-j})]}{J_0(x_1 \sqrt{-j}) N_0(x_3 \sqrt{-j}) - N_0(x_1 \sqrt{-j}) J_0(x_3 \sqrt{-j})} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{x_1 [N_0(x_3 \sqrt{-j}) J_1(x_1 \sqrt{-j}) - J_0(x_3 \sqrt{-j}) N_1(x_1 \sqrt{-j})]}{J_0(x_1 \sqrt{-j}) N_0(x_3 \sqrt{-j}) - N_0(x_1 \sqrt{-j}) J_0(x_3 \sqrt{-j})} \right\}. \end{aligned} \quad (44,38)$$

Protože argumenty x_1, x_3 mají zpravidla velké hodnoty, můžeme nahradit funkce Besselovy funkcemi exponenciálními podle přílohy 7,33. Místo $(x_3 - x_1)$ pišme s_1 :

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_3} H_r dr &= \sqrt{j} \frac{a^2}{2} \mathbf{H}_1 \left[jx_3 \left(\frac{e^{-j(\frac{\pi}{4})}}{\pi x_3} + \frac{e^{-j(\frac{\pi}{4})}}{\pi x_3} \right) - jx_1 \frac{e^{-j(\frac{\pi}{4})}}{\pi \sqrt{x_1 x_3}} (e^{\sqrt{j}s_1} + e^{-\sqrt{j}s_1}) \right] = \\ &= \left[\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{\pi \sqrt{x_1 x_3}} (e^{\sqrt{j}s_1} - e^{-\sqrt{j}s_1}) \right] \\ &= -\sqrt{-j} \frac{a^2}{2} \mathbf{H}_1 \frac{[2 \sqrt{x_1 x_3} - x_1 (e^{\sqrt{j}s_1} + e^{-\sqrt{j}s_1})]}{(e^{\sqrt{j}s_1} - e^{-\sqrt{j}s_1})}. \end{aligned} \quad (44,39)$$

Dosadime-li za rozdíl a součet funkci v závorkách z (72,13), bude výraz (44,31)

$$\begin{aligned} u_2 &= j\omega 2\pi\mu_0\mu (-\sqrt{-j}) \frac{a^2}{2} \mathbf{H}_1 \frac{2\sqrt{x_1 x_3} - 2x_1 \cosh(s_1 \sqrt{j})}{2 \sinh(s_1 \sqrt{j})} = \\ &= -\sqrt{j} \frac{2\pi}{\gamma_1} \mathbf{H}_1 \frac{\sqrt{x_1 x_3} - x_1 \cosh(pz_1)}{\sinh(pz_1)}. \end{aligned} \quad (44,40)$$

Určení výrazu (44,32). Za \mathbf{E}_3 dosadme z (44,18):

$$u_3 = 2\pi r_3 \mathbf{E}_3 = 2\pi r_3 \frac{1+j}{a_1 \gamma_1} \mathbf{H}_1 \sqrt{\frac{x_1}{x_3}} \frac{1}{\sinh(pz_1)} = \sqrt{j} \frac{2\pi}{\gamma_1} \sqrt{x_1 x_3} \frac{1}{\sinh(pz_1)} \quad (44,41)$$

Sečtěme $u_2 + u_3$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 &= \sqrt{j} \frac{2\pi}{\gamma_1} \mathbf{H}_1 \frac{1}{\sinh(pz_1)} [-\sqrt{x_1 x_3} + x_1 \cosh(pz_1) + \sqrt{x_1 x_3}] = \\ &= \sqrt{j} \frac{2\pi x_1}{\gamma_1} \mathbf{H}_1 \frac{\cosh(pz_1)}{\sinh(pz_1)} = \frac{\sqrt{2}\pi x_1}{\gamma_1} \mathbf{H}_1 \left[\frac{\left(\sinh \frac{2z_1}{a_1} + \sin \frac{2z_1}{a_1} \right)}{\left(\cosh \frac{2z_1}{a_1} - \cos \frac{2z_1}{a_1} \right)} + \right. \\ &\quad \left. + j \frac{\left(\sinh \frac{2z_1}{a_1} - \sin \frac{2z_1}{a_1} \right)}{\left(\cosh \frac{2z_1}{a_1} - \cos \frac{2z_1}{a_1} \right)} \right] \quad [\text{V}]. \end{aligned} \quad (44,42)$$

Přičteme-li ještě \mathbf{u}_1 z (44,30), dostaneme \mathbf{U}_1 :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_1 &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 = \frac{\sqrt{2}\pi x_1}{\gamma_1} \mathbf{H}_1 \frac{\left(\sinh \frac{2z_1}{a_1} + \sin \frac{2z_1}{a_1} \right)}{\left(\cosh \frac{2z_1}{a_1} - \cos \frac{2z_1}{a_1} \right)} + \\ &\quad + j \left[\omega \pi r_1^2 \mu_0 \mu H_1 + \frac{\sqrt{2}\pi x_1}{\gamma_1} \mathbf{H}_1 \frac{\left(\sinh \frac{2z_1}{a_1} - \sin \frac{2z_1}{a_1} \right)}{\left(\cosh \frac{2z_1}{a_1} - \cos \frac{2z_1}{a_1} \right)} \right] \quad [\text{V}] \end{aligned} \quad (44,43)$$

Místo \mathbf{H}_1 pišme $N_{11} I_1$. Pro další úvahy je výhodné uvažovat napětí přiváděné na 1 cm délky cívky, to je napětí $\mathbf{U}_{11} = N_{11} \mathbf{U}_1$. Násobíme proto rovnici (44,43) součinitelem N_{11} , dělíme proudem I_1 a dostaneme impedanci části cívky o osové délce 1 cm:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{11} &= \frac{\mathbf{U}_{11}}{I_{11}} = \frac{N_{11} \mathbf{U}_1}{I_{11}} = \frac{\sqrt{2}\pi x_1}{\gamma_1} N_{11}^2 \frac{\left(\sinh \frac{2z_1}{a_1} + \sin \frac{2z_1}{a_1} \right)}{\left(\cosh \frac{2z_1}{a_1} - \cos \frac{2z_1}{a_1} \right)} + \\ &\quad + j \left[\omega \pi r_1^2 \mu_0 \mu N_{11}^2 + \frac{\sqrt{2}\pi x_1}{\gamma_1} N_{11}^2 \frac{\left(\sinh \frac{2z_1}{a_1} - \sin \frac{2z_1}{a_1} \right)}{\left(\cosh \frac{2z_1}{a_1} - \cos \frac{2z_1}{a_1} \right)} \right] = [R_{11} + j\omega L_{11}] \quad [\Omega/\text{cm}]. \end{aligned} \quad (44,44)$$

Reálná část výrazu (44,44) značí činný odpor R_{11} , imaginární část jalový odpor (reaktance) 1 cm cívky.

$$R_{11} = \frac{2\pi r_1}{a_1 \gamma_1} N_{11}^2 \frac{\left(\sinh \frac{2z_1}{a_1} + \sin \frac{2z_1}{a_1} \right)}{\left(\cosh \frac{2z_1}{a_1} - \cos \frac{2z_1}{a_1} \right)} \quad [\Omega/\text{cm}]. \quad (44,45)$$

První člen imaginární v (44,44) značí indukčnost dutiny cívky, druhý člen indukčnost stěny cívky:

$$\omega L_{11} = \omega \pi r_1^2 \mu_0 \mu N_{11}^2 + \frac{2\pi r_1}{a_1 \gamma_1} N_{11}^2 \frac{\left(\sinh \frac{2z_1}{a_1} - \sin \frac{2z_1}{a_1} \right)}{\left(\cosh \frac{2z_1}{a_1} - \cos \frac{2z_1}{a_1} \right)} \quad [\Omega/\text{cm}] \quad (44,46)$$

Výrazy (44,45) a druhá část výrazu (44,46) jsou zcela obdobné s výrazy (35,72) a (35,73), které jsme v části 3,59 odvodili pro činný a jalový odpor rovné stěny o tloušťce d . Úplné shody dosáhneme, uvažujeme-li cívku o šířce závitu 1 cm, $N_{11} = 1$ a dělíme-li výrazy (44,45) a (44,46), které určují při $N_{11} = 1$ hodnoty jednoho závitu, délku závitu $2\pi r_1$.

Odvodíme R_{11} a ωL_{11} v případě, že tloušťka stěny z_1 je mnohonásobně větší než hloubka vniku a_1 . Hodnoty hyperbolických funkcí ve zlomech výrazů (44,45) a (44,46) rychle rostou. Např. pro $\alpha = \frac{2z_1}{a_1} = 6,0$ je $\cosh \alpha \approx \sinh \alpha \approx 201,71$. Goniometrické funkce můžeme zanedbat proti hyperbolickým, hodnota zlomku se asymptoticky blíží jedné. Potom

$$R_{11\infty} = \rho_1 \frac{2\pi r_1}{a_1} N_{11}^2 = \rho_1 \frac{2\pi r_1 N_{11}}{a_1 \frac{1}{N_{11}}} \quad [\Omega/\text{cm}, \Omega \cdot \text{cm}, \text{cm}] \quad (44,47)$$

Odpor cívky s velkou tloušťkou stěny se rovná odporu vrstvy o tloušťce a_1 na vnitřní straně cívky.

Podobně pro indukčnost stěny cívky dostaneme

$$\omega L_{11\infty} = \rho_1 \frac{2\pi r_1}{a_1} N_{11}^2 \quad [\Omega/\text{cm}, \Omega \cdot \text{cm}, \text{cm}] \quad (44,48)$$

Pro grafické znázornění je výhodné utvořit poměry

$$\frac{R_{11}}{R_{11\infty}} = \frac{\left(\sinh \frac{2z_1}{a_1} + \cos \frac{2z_1}{a_1} \right)}{\left(\cosh \frac{2z_1}{a_1} - \cos \frac{2z_1}{a_1} \right)} = \varphi \left(\frac{2z_1}{a_1} \right), \quad (44,49)$$

$$\frac{\omega L_{11}}{\omega L_{11\infty}} = \frac{\left(\sinh \frac{2z_1}{a_1} - \cos \frac{2z_1}{a_1} \right)}{\left(\cosh \frac{2z_1}{a_1} - \cos \frac{2z_1}{a_1} \right)} = \psi \left(\frac{2z_1}{a_1} \right). \quad (44,50)$$

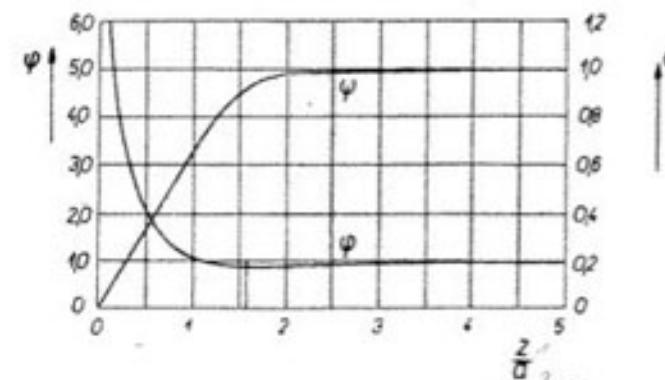
Hodnoty funkcí φ a ψ jsme určili již v části 3,59, tabulka 35,4.

$$\left[\varphi \left(\frac{2z_1}{a_1} \right) = \varphi \left(\frac{2d}{a} \right); \quad \psi \left(\frac{2z_1}{a_1} \right) = \psi \left(\frac{2d}{a} \right) \right]$$

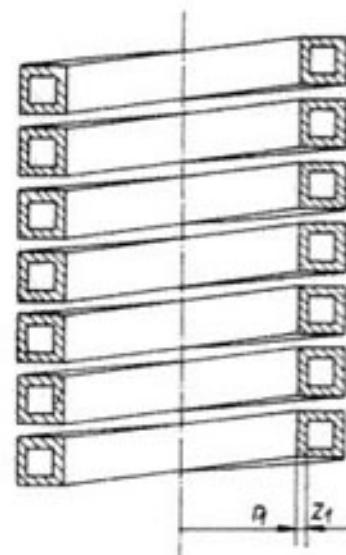
Graficky je jejich průběh zakreslen na obr. 44,5.

Funkce $\varphi \left(\frac{2z_1}{a_1} \right)$ má minimum pro $\frac{2z_1}{a_1} = \frac{\pi}{2}$. Cívka má minimální činný odpor, a tedy i minimální ztráty v případě, že tloušťka stěny z_1 se rovná 1,57násobku hloubky vniku a_1 (optimální tloušťka stěny):

$$z_1 = 1,57 a_1 \quad [\text{cm}] \quad (44,51)$$



Obr. 44,5. Průběh činného odporu a reaktance cívky v závislosti na poměru (z/a) .



Obr. 44,6. Řez válcovou cívkou, vinutou z duté trubky obdélníkového profilu.

Minimální odpor $R_{11\min}$ cívky se rovná pouze 91,8 % z odporu $R_{11\infty}$, to je odporu takové cívky, kdy tloušťka stěny by se rovnala mnohonásobku hloubky vniku.

Cívka indukčních zařízení se obvykle navijí z měděné trubky obdélníkového profilu. Aktivní částí je pouze ta stěna trubky, která je obrácena ke vsázce, obr. 44,6. Tlušťka z_1 této stěny se volí podle (44,51). Zbývající tři strany profilu mohou být po případě slabší, dovolí-li to mechanická pevnost.

Cívky středofrekvenčních zařízení ($f = 600$ až $10\,000$ Hz) mívají tloušťku stěny 4,0 až 2,0 mm. Z výrobních důvodů bývá stejná tloušťka všech stran obdélníkového profilu. U indukčních zařízení na síťový kmitočet je pro měď hloubka vniku a_1 přibližně 10 mm, optimální tloušťka aktivní stěny je potom asi 15 mm. Z úsporných důvodů se délka tloušťka 10 mm. Z diagramu 44,5 je vidět, že odpor cívky vzroste pouze o několik procent. Další tři strany profilu mívají tloušťku 3 až 4 mm.

4,44. Ztráty v cívce

Procházi-li cívku proud I_1 , vznikne v části cívky o délce 1 cm množství tepla

$$P_{11} = \frac{1}{2} R_{11} I_1^2 = \frac{1}{2} \frac{2\pi r_1}{a_1 \gamma_1} N_{11}^2 \frac{\left(\sinh \frac{2z_1}{a_1} + \sin \frac{2z_1}{a_1} \right)}{\left(\cosh \frac{2z_1}{a_1} - \cos \frac{2z_1}{a_1} \right)} I_1^2$$

[W/cm, cm, A]. (44,52)

Zavedme do (44,52) místo proudu v cívce I_1 proud $I_{11} = N_{11} I_1$ protékající části cívky o délce 1 cm. Dostaneme

$$P_{11} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi r_1}{a_1 \gamma_1} \cdot \frac{\left(\sinh \frac{2z_1}{a_1} + \sin \frac{2z_1}{a_1} \right)}{\left(\cosh \frac{2z_1}{a_1} - \cos \frac{2z_1}{a_1} \right)} \cdot I_{11}^2$$

[W/cm, cm, A]. (44,53)

Množství tepla P_{11} nezávisí na počtu závitů N_{11} . (Zanedbáváme v této úvaze izolační mezery mezi závity.)

Odvodíme množství tepla v cívce z Poyntingova zářivého vektoru \mathbf{S}_1 . Za \mathbf{E}_1 dosadíme z (44,18):

$$\mathbf{S}_1 = [\mathbf{E}_1 \mathbf{H}_1] = \frac{1+j}{a_1 \gamma_1} \mathbf{H}_1 \sqrt{\frac{x_1}{x_1}} \frac{\cosh p z_1}{\sinh p z_1} \mathbf{H}_1$$

[W/cm²]. (44,54)

Použijeme-li pro poměr hyperbolických funkcí výsledku z (44,42), bude

$$\mathbf{S}_1 = \frac{1}{a_1 \gamma_1} \mathbf{H}_1^2 \left[\begin{array}{cc} \sinh \frac{2z_1}{a_1} + \sin \frac{2z_1}{a_1} & \sinh \frac{2z_1}{a_1} - \sin \frac{2z_1}{a_1} \\ \cosh \frac{2z_1}{a_1} - \cos \frac{2z_1}{a_1} & \cosh \frac{2z_1}{a_1} - \cos \frac{2z_1}{a_1} \end{array} \right]$$

[W/cm²]. (44,55)

Zářivý vektor \mathbf{S}_1 má složku činnou a jalovou. Pro vznik tepla uvažujeme pouze složku činnou.

Dosadíme:

$$H_1 = N_{11} I_1 = I_{11}.$$

Množství tepla $\operatorname{Re}(S_1)_{\text{ef}}$ potom bude

$$\operatorname{Re}(S_1)_{\text{ef}} = \frac{1}{2} \frac{1}{a_1 \gamma_1} I_{11}^2 \frac{\left(\sinh \frac{2z_1}{a_1} + \sin \frac{2z_1}{a_1} \right)}{\left(\cosh \frac{2z_1}{a_1} - \cos \frac{2z_1}{a_1} \right)}$$

[W/cm²]. (44,56)

Porovnáme (44,56) a (44,53):

$$P_{11} = 2\pi r_1 \operatorname{Re}(S_1)_{\text{ef}}$$

[W/cm, W/cm²]. (44,57)

Oběma způsoby jsme dostali totéž množství tepla ve stěně cívky.

Působením tepelných ztrát v cívce by její teplota rychle stoupala. Je proto třeba cívky chladit. U tavících i prohřívacích indukčních zařízení se vesměs používá chlazení vodou.

4,45. Náhradní průměr cívky

Obdobnou úvahou, jako jsme provedli při odvozování průměru náhradního válce vsázky, dostaneme pro náhradní poloměr cívky výraz (část 4,36)

$$r_n = r_1 \sqrt{1 + \frac{2\mu}{x_1} Q(x_1)} Y'(x_1).$$

(44,58)

Funkce $Y'(x_1)$ se pro větší argumenty x_1 blíží asymptoticky k hodnotě $Y'(x_1) = 1,0$.

Dosadíme do (44,58) za $x_1 = \frac{r_1}{a_1} \sqrt{2}$. Pro $\mu = 1$ bude

$$r_n = r_1 \sqrt{1 + \frac{2a_1}{r_1 \sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}} = r_1 \sqrt{1 + \frac{a_1}{r_1}}.$$

(44,59)

Protože $a_1 \ll r_1$, rozvineme odmocninu v řadu a použijeme pouze prvních dvou členů:

$$r_n = r_1 \left(1 + \frac{a_1}{2r_1} \right) = \left(r_1 + \frac{a_1}{2} \right)$$

[cm]. (44,60)

Poloměr náhradního válce je o polovinu hloubky vniku větší než vnitřní poloměr cívky.

4,5. Dvouvrstvová cívka indukční pece

4,51. Odvození odporu dvouvrstvové cívky

V části 4,355 jsme odvodili výraz (43,107) pro množství elmg. energie, které absorbuje válcová vsázka každým cm² svého povrchu:

$$\operatorname{Re}(S_2)_{\text{ef}} = \sqrt{f_0 \mu} \cdot 10^{-4} H_2^2$$

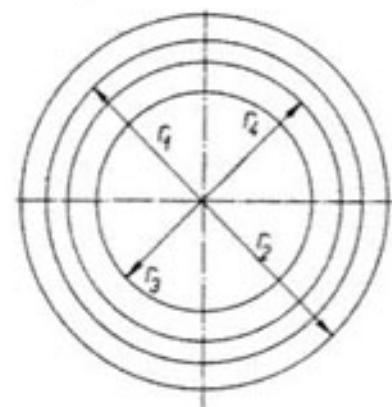
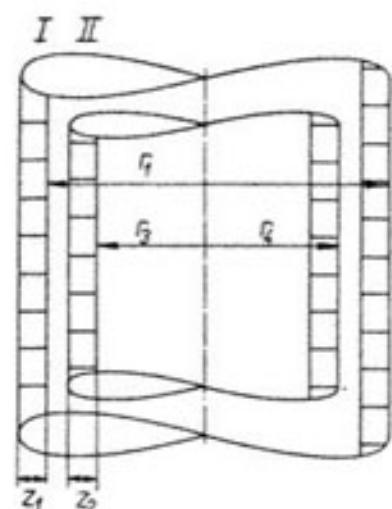
[W/cm²].

Z výrazu je vidět, že při 50 Hz je určitá vsázka schopna při stejné intenzitě magnetického pole H_2 přijmout $\sqrt{20}$ krát méně elmg. energie než při $f = 1000$ Hz. Je proto nutné zejména u prohřívacích zařízení, kde nechceme prodlužovat dobu prohřívání, zvýšit intenzitu magnetického pole H_2 . Toho

dosáhneme tím, že navineme cívku, která má dvě, popřípadě i více vrstev. Také v tomto případě se cívka vine z měděné trubky obdélníkového profilu. Schematicky je dvouvrstvová cívka vyznačena na obr. 45,1.

Vnější vrstva, označená jako první, má vnitřní poloměr r_1 , vnější r_2 [cm], druhá (vnitřní) poloměry r_3 a r_4 . Symboly z_1 , z_2 značí tloušťku vodičů obou vrstev.

Závity první (vnější) vrstvy protéká proud I_1 , počet závitů na 1 cm délky označme N'_{11} [1/cm]. Závity vnitřní vrstvy protéká proud I_2 , počet závitů N''_{11} na 1 cm.



Obr. 45,1. Řez dvouvrstvovou cívkou.

Čtyři integrační konstanty C'_1 , C''_1 , C'_2 , C''_2 se určí z těchto mezních podmínek: výjádříme intenzity magnetického pole na vnitřním (r_1) a vnějším (r_2) poloměru vnější vrstvy, a stejně i na r_3 a r_4 vnitřní vrstvy.

$$H_1 = N'_{11} I_1, \quad H_2 = 0 \quad (45,5a,b)$$

$$H_3 = N'_{11} I_1 + N''_{11} I_2, \quad H_4 = H_1 = N'_{11} I_1 \quad (45,6a, b)$$

Tuto cestou se odvodí poměrně složité výrazy pro H a E , které uvádí ve své knize [4,1] N. M. Rodigin, str. 55.

V praxi obvykle nepotřebujeme znát rozložení magnetického a elektrického

pole v obou vrstvách cívky, avšak velmi nás zajímá činný odporník dvouvrstvové cívky, abychom mohli posoudit, zda použití takové cívky přináší zvýšení nebo snížení elektrické účinnosti ve srovnání s cívkou jednovrstvovou.

V praxi jsou obvykle obě vrstvy cívky vinuty z téhož materiálu, zpravidla z mědi, takže $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, hloubka vniku $a_1 = a_2$. Obě vrstvy jsou obvykle vinuty z téhož profilu, takže: $N'_{11} = N''_{11} = N_{11}$, $z_1 = z_2$ a oběma vrstvami protéká týž proud, $I_1 = I_2 = I$.

Obvykle bývá také argument x velký, takže můžeme Besselovy funkce nahradit exponenciálními. Za těchto učiněných předpokladů uvádí N. M. Rodigin na str. 60 tyto výrazy pro odporník vnější (R_{11}) a vnitřní (R_{21}) vrstvy cívky (části cívky o osové délce 1 cm):

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{4\pi r_3 N_{11}^2}{\gamma} f_1(x_4 x_3) + \frac{2\pi x_4}{\gamma} N_{11}^2 f_2(x_4 x_3) + \frac{12N_{11}^2}{\gamma} f_3(x_4 x_3) + \\ &\quad + \frac{2\pi x_1}{\gamma} N_{11}^2 f_1(x_2 x_1) \quad [\Omega/\text{cm}], \end{aligned} \quad (45,7)$$

$$R_{21} = \frac{4\pi x_3}{\gamma} N_{11}^2 f_1(x_4 x_3) + \frac{4N_{11}^2}{\gamma} f_3(x_4 x_3) \quad [\Omega/\text{cm}]. \quad (45,8)$$

Funkce f_1 , f_2 , f_3 jsou určeny výrazy

$$\begin{aligned} f_1(x_4 x_3) &= f_2(x_4 x_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sinh(x_4 - x_3)\sqrt{2} + \sin(x_4 - x_3)\sqrt{2}}{\cosh(x_4 - x_3)\sqrt{2} - \cos(x_4 - x_3)\sqrt{2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sinh(s_3)\sqrt{2} + \sin(s_3)\sqrt{2}}{\cosh(s_3)\sqrt{2} - \cos(s_3)\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (45,9)$$

$$f_3(x_4 x_3) = -\frac{\pi \sqrt{x_4 x_3}}{\sqrt{2}} \frac{\left(\sinh \frac{s_3}{\sqrt{2}} \cos \frac{s_3}{\sqrt{2}} + \cosh \frac{s_3}{\sqrt{2}} \sin \frac{s_3}{\sqrt{2}} \right)}{\cosh(s_3)\sqrt{2} - \cos(s_3)\sqrt{2}}. \quad (45,10)$$

Poznámka: Ve jmenovateli výrazu (45,9) a v čitateli (45,10) je v [4,1] omylem vytisknuto znaménko (+) místo správného (-).

Ve výrazech (45,9) a (45,10) jsme zavedli znak

$$\begin{aligned} s_3 &= (x_4 - x_3) = \frac{\sqrt{2}}{a_2} (r_4 - r_3) = \frac{\sqrt{2}}{a_2} z_2, \quad s_1 = (x_2 - x_1) = \frac{\sqrt{2}}{a_1} (r_2 - r_1) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{a_1} z_1. \end{aligned}$$

Dosadme (45,9), (45,10) do (45,7), (45,8):

$$R_{11} = \frac{\sqrt{2} \pi N_{11}^2}{\gamma} \frac{\sinh(s_3 \sqrt{2}) + \sin(s_3 \sqrt{2})}{\cosh(s_3 \sqrt{2}) - \cos(s_3 \sqrt{2})} [2x_3 + x_4] + \\ + \frac{\sqrt{2} \pi x_3 N_{11}^2}{\gamma} \frac{\sinh(s_1 \sqrt{2}) + \sin(s_1 \sqrt{2})}{\cosh(s_1 \sqrt{2}) - \cos(s_1 \sqrt{2})} - \\ - \frac{12N_{11}^2}{\gamma} \frac{\pi \sqrt{x_4 x_3}}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sinh \frac{s_3}{\sqrt{2}} \cos \frac{s_3}{\sqrt{2}} + \cosh \frac{s_3}{\sqrt{2}} \sin \frac{s_3}{\sqrt{2}}}{\cosh(s_3 \sqrt{2}) - \cos(s_3 \sqrt{2})} \right) [\Omega/\text{cm}] \quad (45,11)$$

$$R_{21} = \frac{4\pi x_3 N_{11}^2}{\gamma \sqrt{2}} \frac{\sinh(s_3 \sqrt{2}) + \sin(s_3 \sqrt{2})}{\cosh(s_3 \sqrt{2}) - \cos(s_3 \sqrt{2})} - \\ - \frac{4\pi \sqrt{x_4 x_3} N_{11}^2}{\gamma \sqrt{2}} \left(\frac{\sinh \frac{s_3}{\sqrt{2}} \cos \frac{s_3}{\sqrt{2}} + \cosh \frac{s_3}{\sqrt{2}} \sin \frac{s_3}{\sqrt{2}}}{\cosh(s_3 \sqrt{2}) - \cos(s_3 \sqrt{2})} \right) [\Omega/\text{cm}] \quad (45,12)$$

Porovnáme-li třetí člen výrazu (45,11) s dříve odvozeným výrazem (44,45), zjistíme, že tento člen značí odpor vnější vrstvy v případě, že by cívka byla pouze jednovrstvová.

Protože obě vrstvy jsou vinuty stejným vodičem, je tloušťka $z_1 = z_2 = z$, takže platí: $s_1 = s_3 = s = \frac{z}{a} \sqrt{2}$.

Odpor části cívky o osové délce 1 cm je dán součtem odporů obou vrstev. Abychom ještě zjednodušili psaní, zavedeme pomocný znak α :

$$\frac{s}{\sqrt{2}} = \alpha, \quad \left(s \sqrt{2} \right) = 2\alpha = 2 \frac{z}{a}, \quad (45,13)$$

$$R = R_{11} + R_{21} = \frac{\sqrt{2} \pi N_{11}^2}{\gamma} \frac{\sinh 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cosh 2\alpha - \cos 2\alpha} [x_1 + 4x_3 + x_4] - \\ - \frac{8\sqrt{2} \pi N_{11}^2}{\gamma} \frac{\sinh \alpha \cos \alpha + \cosh \alpha \sin \alpha}{\cosh 2\alpha - \cos 2\alpha} [\Omega/\text{cm}] \quad (45,14)$$

Protože tloušťka vodiče z bývá malá ve srovnání s poloměrem r_3 , je přibližně $x_3 \approx x_4$. Roznásobením prvního členu dostaneme

$$R = \frac{\sqrt{2} \pi x_1 N_{11}^2}{\gamma} \frac{\sinh 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cosh 2\alpha - \cos 2\alpha} + \frac{\sqrt{2} \pi x_3 N_{11}^2}{\gamma} \frac{\sinh 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cosh 2\alpha - \cos 2\alpha} + \\ + 4 \cdot \frac{\sqrt{2} \pi x_3 N_{11}^2}{\gamma} \frac{\sinh 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cosh 2\alpha - \cos 2\alpha} - \\ - 8 \cdot \frac{\sqrt{2} \pi x_3 N_{11}^2}{\gamma} \frac{\sinh \alpha \cos \alpha + \cosh \alpha \sin \alpha}{\cosh 2\alpha - \cos 2\alpha} [\Omega/\text{cm}] \quad (45,15)$$

První člen na pravé straně značí odpor samotné vnější vrstvy, kdyby nepůsobil vliv druhé vrstvy (označme R_v).

Druhý člen značí obdobně odpor druhé vrstvy, bez vlivu první vrstvy (označme R_i).

Součet třetího a čtvrtého členu udává vzrůst odporu dvouvrstvové cívky proti pouhému součtu odporů ($R_v + R_i$).

Rozvineme-li ve třetím a čtvrtém členu vhodně funkce dvojnásobného argumentu, můžeme je spojit, takže (45,15) bude

$$R = R_v + R_i + 4 \frac{\sqrt{2} \pi x_3 N_{11}^2}{\gamma} \left[\frac{\sinh \alpha - \sin \alpha}{\cosh \alpha + \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cosh \alpha - \cos \alpha} \right] [\Omega/\text{cm}] \quad (45,16)$$

Chceme-li porovnávat odpor dvouvrstvové a jednovrstvové cívky, určíme přírůstek ΔR proti samotnému odporu vnější vrstvy R_v .

$$\Delta R = \frac{\sqrt{2} \pi x_3 N_{11}^2}{\gamma} \left[\frac{\sinh 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cosh 2\alpha - \cos 2\alpha} + 4 \frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha + \cos \alpha} + \right. \\ \left. + 4 \frac{\sin \alpha}{\cosh \alpha - \cos \alpha} \right] [\Omega/\text{cm}] \quad (45,17)$$

Poněkud jiný výraz pro ΔR dostaneme z (45,15):

$$\Delta R = \frac{\sqrt{2} \pi x_3 N_{11}^2}{\gamma} \left[5 \frac{\sinh 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cosh 2\alpha - \cos 2\alpha} - 8 \frac{\sinh \alpha \cos \alpha + \cosh \alpha \sin \alpha}{\cosh 2\alpha - \cos 2\alpha} \right] = \\ = \frac{\sqrt{2} \pi x_3 N_{11}^2}{\gamma} [\varphi_1 - \psi_1] [\Omega/\text{cm}] \quad (45,18)$$

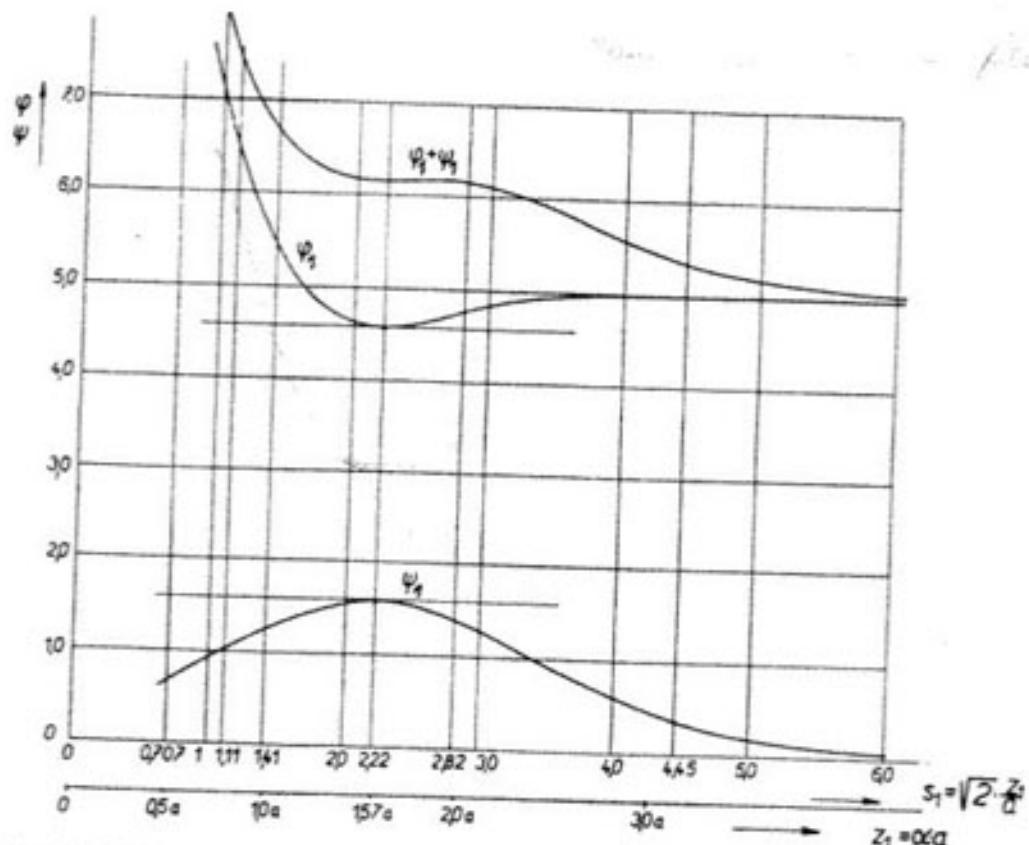
Vypočetli jsme hodnoty obou členů v závorce výrazu (45,18) pro různé argumenty $2\alpha = (s \sqrt{2})$, $s = (x_4 - x_3) = (x_2 - x_1) = \frac{\sqrt{2}}{a} \cdot (r_2 - r_1) = \frac{\sqrt{2}}{a} \cdot z$, v rozmezí $0,5 \leq \alpha \leq 3,14$. Výsledky jsou v tabulce 45,1 a na obr. 45,2.

Tabulka 45,1

$\alpha = \frac{s}{\sqrt{2}}$	$2\alpha = s \sqrt{2}$	s	$z = ax$	φ_1	ψ_1	Rozdíl $(\varphi_1 - \psi_1)$
0,5	1,0	0,707	$0,5a$	10,05	-0,664	10,714
0,785	1,57	1,11	$\frac{\pi}{4} a$	6,57	-1,032	7,602
1,0	2,0	1,41	$1,0a$	5,43	-1,272	6,702
1,57	3,14	2,22	$\frac{\pi}{2} a$	4,59	-1,60	6,190
2,0	4,0	2,82	$2a$	4,99	-1,408	6,398
3,14	6,28	4,45	πa	5,02	-0,3472	5,367
∞	∞	∞	∞	5,06	0,00	5,00

Na obr. 45,2 je dobře vidět průběh prvního člena φ_1 , druhého člena ψ_1 a jejich součet.

Zjistěme velikost ΔR v případě, že argument $\alpha = \frac{s}{\sqrt{2}} = \frac{z}{a}$ dosáhne vyšších hodnot (tloušťka vodiče z je několikrát větší než hloubka vniku a).



Obr. 45,2. Diagram pro porovnání odporu dvouvrstvové a jednovrstvové cívky.

Hodnota prvního člena v závorce (45,18) se bliží limitě rovné 5, limita druhého člena

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sinh \alpha \cdot \cos \alpha - \cosh \alpha \cdot \sin \alpha}{\cosh 2\alpha - \cos 2\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sinh \alpha (\cos \alpha - \sin \alpha)}{2 \sinh \alpha \cdot \cosh \alpha} = 0. \quad (45,19)$$

Limita rozdílu obou členů, jak je také vidět na obr. 45,2, se rovná 5.

Je-li $z \gg a$, je odpor R dvouvrstvové cívky

$$R = \frac{\sqrt{2}}{\gamma} \pi N_{11}^2 [x_1 + 5x_3] = \rho \frac{2\pi r_1}{a} N_{11}^2 + 5\rho \frac{2\pi r_3}{a} N_{11}^2 \quad [\Omega/\text{cm}]. \quad (45,20)$$

Stanovme ještě přírůstek odporu ΔR dvouvrstvové cívky v případě, že je

vinuta vodičem optimální tloušťky $z = 1,57a$, jak jsme dříve odvodili pro jednovrstvovou cívku.

$$z = \frac{\pi}{2} a, \quad \alpha = \frac{z}{a} = \frac{\pi}{2}. \quad (45,21)$$

Na obr. 45,2 vidíme, že obě křivky (φ_1 i ψ_1) mají v tomto bodě extrémní hodnoty. Jejich součet je 6,19. Z grafu je vidět, že s rostoucí tloušťkou z vodiče lze snížit přírůstek odporu na pětinásobek.

Příklad 45,1

Určeme odpor jednovrstvové a alternativně dvouvrstvové cívky z mědi pro indukční pec na tavení oceli, obsah 1000 kg, $f = 825$ Hz. Hloubka vniku $a = 0,242$ cm. Vnitřní průměr vnitřní vrstvy $2r_3 = 69$ cm. Tloušťka stěny cívky $z = 0,3$ cm, takže $2r_4 = 69,6$ cm. Vnitřní průměr vnější vrstvy $2r_1 = 75,2$ cm. Vodivost $\gamma = 5,2 \cdot 10^5 \text{ S} \cdot \text{cm}^{-1}$, $N_{11} = 0,282 \text{ [1/cm]}$.

Neuvážujeme-li mezery mezi závity, bude mít vnitřní vrstva samotná odpor R_1 :

$$R_1 = \frac{\sqrt{2} \pi x_3 N_{11}^2}{\gamma} \cdot \frac{\sinh 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cosh 2\alpha - \cos 2\alpha} \quad [\Omega/\text{cm}].$$

$$r_3 = 34,5 \text{ cm}, x_3 = \frac{r_3}{a} \sqrt{2} = 202, \quad r_4 = 34,8 \text{ cm}, \quad x_4 = 204,$$

$$\alpha = \frac{z}{a} = 1,24, \quad 2\alpha = 2,48,$$

$$R_1 = 1,33 \cdot 10^{-4} \Omega/\text{cm}.$$

Určeme odpor samotné vnější vrstvy:

$$r_1 = 37,6 \text{ cm}, \quad x_1 = 220, \quad r_2 = 37,9, \quad x_2 = 222,$$

$$R_v = \frac{\sqrt{2} \pi x_1 N_{11}^2}{\gamma} \frac{\sinh 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cosh 2\alpha - \cos 2\alpha} = 1,45 \cdot 10^{-4} \Omega/\text{cm}.$$

Výsledný odpor dvouvrstvové cívky:

$$R = R_v + R_1 + 4 \frac{\sqrt{2} \pi x_3 N_{11}^2}{\gamma} \left[\frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha + \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cosh \alpha - \cos \alpha} \right] \quad [\Omega/\text{cm}].$$

Po dosazení:

$$R = 1,33 \cdot 10^{-4} + 1,45 \cdot 10^{-4} + 7,20 \cdot 10^{-4} = 9,98 \cdot 10^{-4} \Omega/\text{cm}.$$

Porovnejme s R_1 :

$$\frac{R}{R_1} = \frac{9,98}{1,33} = 7,51.$$

Odpor uvažované dvouvrstvové cívky je 7,51krát větší než odpor pouze samotné vnitřní vrstvy.

Prochází-li samotnou vnitřní vrstvou proud $I_{\text{ref}} = 3250 \text{ A}$, budou ztráty:

$$P'_{11} = R_i I_{\text{ref}}^2 = 1,33 \cdot 10^{-4} \cdot 3,25^2 \cdot 10^6 = 1405 \text{ W/cm}.$$

Při dvouvrstvové cívce volime poloviční proud, takže magnetické pole v dutině, kde je vsázká, je stejné. Ztráty nyní budou:

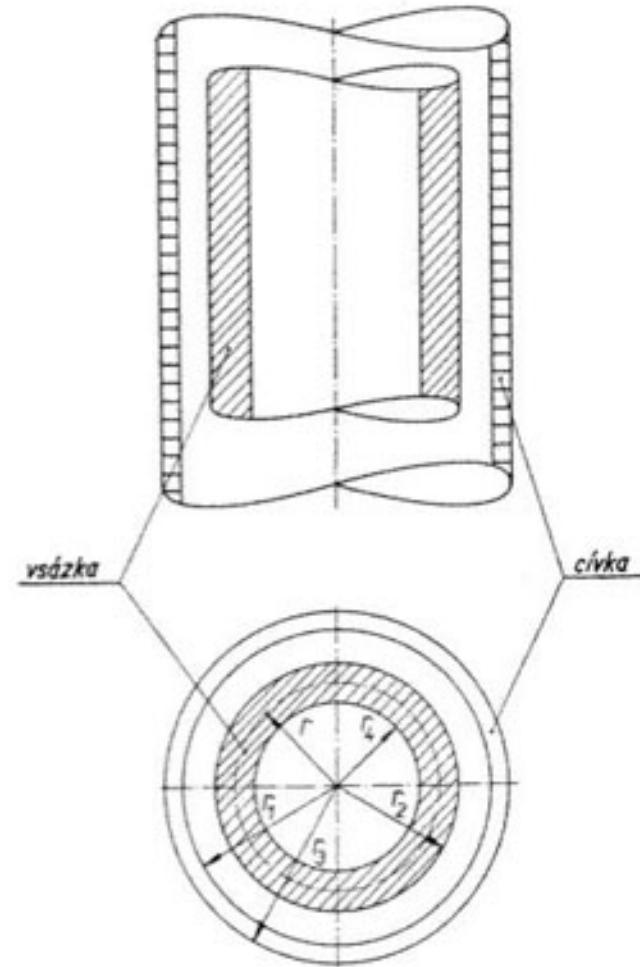
$$\begin{aligned} P''_{11} &= R \cdot \frac{1}{4} I_{\text{ref}}^2 = \\ &= 9,98 \cdot 10^{-4} \cdot 0,25 \cdot 3,25^2 \cdot 10^6 = \\ &= 2640 \text{ W/cm}. \end{aligned}$$

Poměr ztrát:

$$\frac{P''_{11}}{P'_{11}} = \frac{2640}{1405} = 1,81.$$

U dvouvrstvové cívky budou ztráty o 81 % vyšší než v případě cívky jednovrstvové. Z tohoto důvodu se středofrekvenční indukční pece dělají vždy s jednovrstvovou cívkou.

Vicevrstvových cívek se používá u prohřívacích zařízení, připojených na proud se síťovým kmitočtem, je-li třeba zvýšit intenzitu magnetického pole v dutině cívky i za cenu zhoršení účinnosti pece.



Obr. 46.1. Řez válcovou cívku se souosou dutou vsázkou.

4.6. Dutá válcová vsázka

Uvažujme nekonečně dlouhou cívku o vnitřním poloměru r_1 , se závity z vodiče obdélníkového profilu, s izolací nulové tloušťky mezi závity. Na 1 cm délky cívky připadá N_{11} závitů, proud v cívce je I_1 [A]. V dutině cívky je homogenní magnetické pole:

$$H_1 = N_{11} I_1 = I_{11} \quad [\text{A/cm}, \text{A}, \text{A/cm}]. \quad (46.1)$$

Do cívky vložíme souosý dutý válec z vodičového materiálu, nekonečné délky. Řez cívky a válcem je na obr. 46.1.

Vnější poloměr cívky jsme označili r_3 . Vnější a vnitřní poloměr duté vsázky jsme označili r_2 a r_4 .

4.61. Dutá vsázka s argumentem x malých hodnot

4.611. Elektrická a magnetická intenzita E a H ve stěně dutého válce

Jde opět o válcové elmg. vlnění ve válcové vodičové stěně. Odvodíme-li H a E pro zvolený bod ve vzdálenosti r od osy válce, víme, že stejné H a E mají všechny body válce o poloměru r . Použijeme výchozích rovnic (43,9) a (43,17), které jsme pro válcové vlnění v cívce odvodili v kapitole 4.30. Integrační konstanty C_1 a C_2 ovšem budou mít v uvažovaném případě jiné hodnoty.

$$H = C_1 J_0(x \sqrt{-j}) + C_2 N_0(x \sqrt{-j}) \quad [\text{A/cm}], \quad (46.2)$$

$$E = \frac{1}{\gamma} J = \sqrt{-j} \frac{\sqrt{2}}{a\gamma} [C_1 J_1(x \sqrt{-j}) + C_2 N_1(x \sqrt{-j})] \quad [\text{V/cm}]. \quad (46.3)$$

$J_0(x \sqrt{-j}), J_1(x \sqrt{-j}), N_0(x \sqrt{-j}), N_1(x \sqrt{-j})$ jsou Besselovy funkce prvního a druhého druhu, nultého a prvního řádu, pro komplexní argument $(x \sqrt{-j})$. Znakem a jsme opět označili hloubku vniku:

$$a = \sqrt{\frac{2}{\omega \gamma \mu_0 \mu}} \quad [\text{cm}, \text{S} \cdot \text{cm}^{-1}]. \quad (46.4)$$

Konstanty C_1 a C_2 v rovnicích (46.2) a (46.3) odvodíme z mezních podmínek:

- a) Intenzita magnetického pole H_2 na vnějším poloměru r_2 vsázky se rovná intenzitě H_1 v mezeře,

$$H_2 = H_1 = N_{11} I_1 = I_{11} \quad [\text{A/cm}]. \quad (46.5)$$

- b) V dutině vsázky bude homogenní magnetické pole o intenzitě H_4 .

Stejná intenzita bude na vnitřním poloměru r_4 .

Dutinou protéká magnetický tok Φ_4 :

$$\Phi_4 = \pi r_4^2 \mu_0 \mu H_4 \quad [\text{Wb}, \text{cm}, \text{A/cm}]. \quad (46.6)$$

Tento tok indukuje v proudovém vláknu o poloměru r_4 elektromotorickou sílu E'_4 .

$$E'_4 = -\frac{d\Phi_4}{dt} = -j\omega \pi r_4^2 \mu_0 \mu H_4 \quad [\text{V}]. \quad (46.7)$$

Dutina je prázdná, takže $\mu = 1$. Napětí E'_4 protlačí uvažovaným vláknem proud o hustotě J_4 :

$$E'_4 = 2\pi r_4 E_4 = 2\pi r_4 \frac{1}{\gamma} J_4. \quad (46.8)$$

Spojením (46,7) a (46,8):

$$\mathbf{J}_4 = -\frac{1}{2\pi r_4} j\omega \pi r_4^2 \mu_0 \mu \frac{\mu_v}{\mu_v} \gamma \mathbf{H}_4 = -j \frac{1}{a^2 \mu_v} r_4 \mathbf{H}_4 = -j \frac{1}{a \mu_v} \frac{x_4}{\sqrt{2}} \mathbf{H}_4 \quad [\text{A/cm}^2]. \quad (46,9)$$

(Znak μ_v je permeabilita materiálu stěny.)

Dosadíme do (46,9) za \mathbf{H}_4 z (46,2):

$$\mathbf{J}_4 = -j \frac{1}{a \mu_v} \frac{x_4}{\sqrt{2}} [C_1 J_0(x_4 \sqrt{-j}) + C_2 N_0(x_4 \sqrt{-j})] \quad [\text{A/cm}^2]. \quad (46,10)$$

Hustotu J_4 můžeme přímo vyjádřit z (46,3):

$$\mathbf{J}_4 = \sqrt{-j} \frac{\sqrt{2}}{a} [C_1 J_1(x_4 \sqrt{-j}) + C_2 N_1(x_4 \sqrt{-j})]. \quad (46,11)$$

Výrazy (46,10) a (46,11) jsou totožné. Označme:

$$m = \frac{1}{2\mu} x_4. \quad (46,12)$$

V dalším budeme permeabilitu materiálu μ_v psát pouze μ .

Potom bude

$$[C_1 J_1(x_4 \sqrt{-j}) + C_2 N_1(x_4 \sqrt{-j})] = \sqrt{-j} m [C_1 J_0(x_4 \sqrt{-j}) + C_2 N_0(x_4 \sqrt{-j})]. \quad (46,13)$$

Rovnice (46,13) udává vzájemný vztah mezi C_1 a C_2 . Abychom zjednodušili psaní, pišme v dalším zkráceně $J_0(x'_4)$ místo $J_0(x_4 \sqrt{-j})$, atd.:

$$C_2 = -C_1 \frac{J_1(x'_4) - m J_0(x'_4)}{N_1(x'_4) - m N_0(x'_4)}. \quad (46,14)$$

Další rovnici pro C_1 , C_2 dostaneme z (46,2) pro r_2 :

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_1 = C_1 J_0(x'_2) + C_2 N_0(x'_2) \quad [\text{A/cm}], \quad (46,15)$$

$$C_1 = \frac{H_1}{J_0(x'_2)} - C_2 \frac{N_0(x'_2)}{J_0(x'_2)}. \quad (46,16)$$

Řešením rovnic (46,14) a (46,16) jsme dostali C_1 a C_2 .

Dosadíme integrační konstanty C_1 a C_2 do rovnic (46,2) a (46,3) a dostaneme hledané výrazy pro \mathbf{H} a \mathbf{J} ve stěně dutého válce:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \frac{(N_1(x'_4) J_0(x') - J_1(x'_4) N_0(x')) - \sqrt{-j} m (N_0(x'_4) J_0(x') - J_0(x'_4) N_0(x'))}{(N_1(x'_4) J_0(x'_2) - J_1(x'_4) N_0(x'_2)) - \sqrt{-j} m (N_0(x'_4) J_0(x'_2) - J_0(x'_4) N_0(x'_2))} \quad [\text{A/cm}]. \quad (46,17)$$

$$\mathbf{J} = \frac{1-j}{a} \mathbf{H}_1 \frac{(N_1(x'_4) J_1(x') - J_1(x'_4) N_1(x')) - \sqrt{-j} m (N_0(x'_4) J_1(x') - J_0(x'_4) N_1(x'))}{(N_1(x'_4) J_0(x'_2) - J_1(x'_4) N_0(x'_2)) - \sqrt{-j} m (N_0(x'_4) J_0(x'_2) - J_0(x'_4) N_0(x'_2))} \quad [\text{A/cm}^2]. \quad (46,18)$$

Rovněž v rovnicích (46,17) a (46,18) jsme použili zjednodušeného způsobu psaní (např. $J_0(x'_4)$ místo $J_0(x_4 \sqrt{-j})$) atd. Součinitel m je dán výrazem (46,12).

Cylindrické funkce pro komplexní argument $(x \sqrt{-j})$ jsou definovány nekonečnými řadami členů reálných a členů imaginárních.

Plati:

$$\left. \begin{aligned} J_0(x \sqrt{-j}) &= \text{ber } x - j \text{ bei } x, & J_1(x \sqrt{-j}) &= -\sqrt{j} (\text{ber}' x - j \text{ bei}' x), \\ N_0(x \sqrt{-j}) &= \text{ner } x - j \text{ nei } x, & N_1(x \sqrt{-j}) &= -\sqrt{j} (\text{ner}' x - j \text{ nei}' x). \end{aligned} \right\} \quad (46,19)$$

Dosadíme do (46,17) a (46,18) výrazy z (46,19), vynásobíme, členy seřadíme a dostaneme:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \frac{C_{xx_4} + jD_{xx_4}}{C_{x_4 x_4} + jD_{x_4 x_4}} \quad [\text{A/cm}]. \quad (46,20)$$

$$\mathbf{J} = -\frac{\sqrt{2}}{a} \mathbf{H}_1 \frac{A_{xx_4} + jB_{xx_4}}{C_{x_4 x_4} + jD_{x_4 x_4}} \quad [\text{A/cm}^2]. \quad (46,21)$$

Absolutní hodnoty H a J jsou:

$$|\mathbf{H}| = H = H_1 \sqrt{\frac{C_{xx_4}^2 + D_{xx_4}^2}{C_{x_4 x_4}^2 + D_{x_4 x_4}^2}} \quad [\text{A/cm}], \quad (46,22)$$

$$|\mathbf{J}| = J = \frac{\sqrt{2}}{a} H_1 \sqrt{\frac{A_{xx_4}^2 + B_{xx_4}^2}{C_{x_4 x_4}^2 + D_{x_4 x_4}^2}} \quad [\text{A/cm}]. \quad (46,23)$$

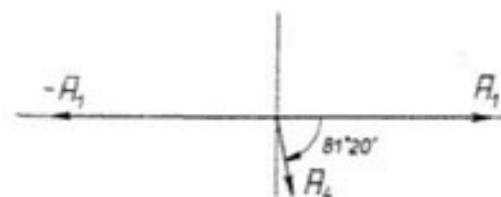
Přitom značí:

$$\left. \begin{aligned} A_{xx_4} &= a_{xx_4} + m a'_{xx_4}, & C_{xx_4} &= c_{xx_4} + m c'_{xx_4}, \\ B_{xx_4} &= b_{xx_4} + m b'_{xx_4}, & D_{xx_4} &= d_{xx_4} + m d'_{xx_4}. \end{aligned} \right\} \quad (46,24)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{xx_4} &= \text{nei}' x_4 \text{ ber}' x + \text{ner}' x_4 \text{ bei}' x - \text{bei}' x_4 \text{ ner}' x - \text{ber}' x_4 \text{ nei}' x \\ a'_{xx_4} &= \text{ner}' x_4 \text{ ber}' x - \text{nei}' x_4 \text{ bei}' x - \text{ber}' x_4 \text{ ner}' x + \text{bei}' x_4 \text{ nei}' x \\ b_{xx_4} &= \text{ner}' x_4 \text{ ber}' x - \text{nei}' x_4 \text{ bei}' x - \text{ber}' x_4 \text{ ner}' x + \text{bei}' x_4 \text{ nei}' x \\ b'_{xx_4} &= \text{bei}' x_4 \text{ ner}' x + \text{ber}' x_4 \text{ nei}' x - \text{nei}' x_4 \text{ ber}' x - \text{ner}' x_4 \text{ bei}' x \\ c_{xx_4} &= \text{nei}' x_4 \text{ ber}' x + \text{ner}' x_4 \text{ bei}' x - \text{bei}' x_4 \text{ ner}' x - \text{ber}' x_4 \text{ nei}' x \\ c'_{xx_4} &= \text{ner}' x_4 \text{ ber}' x - \text{nei}' x_4 \text{ bei}' x - \text{ber}' x_4 \text{ ner}' x + \text{bei}' x_4 \text{ nei}' x \\ d_{xx_4} &= \text{ner}' x_4 \text{ ber}' x - \text{nei}' x_4 \text{ bei}' x - \text{ber}' x_4 \text{ ner}' x + \text{bei}' x_4 \text{ nei}' x \\ d'_{xx_4} &= \text{bei}' x_4 \text{ ner}' x + \text{ber}' x_4 \text{ nei}' x - \text{nei}' x_4 \text{ ber}' x - \text{ner}' x_4 \text{ bei}' x \end{aligned} \right\} \quad (46,25)$$

Funkce $\text{ber } x$, $\text{bei } x$, atd. jsou v tabulkách v příloze 7,40. Výpočet jednotlivých členů a_{xx_4} , atd. podle (46,25) je poměrně zdlouhavý. Pro praktickou potřebu vystačíme ve většině případů s výpočtem pouze malého počtu hodnot. Pro usnadnění výpočtů byly vypracovány tabulky pro a_{xx_4} , a'_{xx_4} atd. Takové tabulky jsou např. v knize (4,1) N. M. Rodigina str. 203—235. Tyto tabulky jsou pro rozsahy argumentu x_2 od 0,2 do 7,0 a x_4 od 0,1 do 7,0.

Vypočteme intenzitu magnetického pole H_4 na vnitřním povrchu dutého válce, je-li pole vně válce $H_1 = 1000 \text{ A/cm}$. Materiál válce: ocel, ohřátá na 1200°C . Vodivost $\gamma = 10^4 \text{ S.cm}^{-1}$, $\mu = 1$. Použitý kmitočet $f = 1260 \text{ Hz}$.



Obr. 46,2. Diagram znázorňující intenzitu magnetického pole H_1 v mezeře mezi cívou a vsázkou a intenzitu H_4 v dutině vsázky.

Vnější poloměr válce $r_2 = 7,0 \text{ cm}$, vnitřní $r_4 = 6,0 \text{ cm}$. Hloubka vniku:

$$a = 5,04 \cdot 10^3 \sqrt{\frac{1}{f\gamma\mu}} = 1,41 \text{ cm.}$$

$$x_2 = \frac{r_2}{a} \sqrt{2} = \frac{7,0}{1,41} \cdot 1,41 = 7,0, \quad x_4 = \frac{r_4}{a} \sqrt{2} = 6,0.$$

Z tabulek vyhledáme:

$$\begin{aligned} c_{x_4 x_4} &= 0, & c'_{x_4 x_4} &= 0, & d_{x_4 x_4} &= 0,1061, & d'_{x_4 x_4} &= 0, \\ c_{x_2 x_4} &= -0,0502, & c'_{x_2 x_4} &= -0,0972, & & & \\ d_{x_2 x_4} &= 0,1020, & d'_{x_2 x_4} &= -0,0164, & & & \end{aligned}$$

$$m = \frac{1}{2\mu} x_4 = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3,0,$$

$$\begin{aligned} C_{x_4 x_4} &= 0,0 + 3,0 = 0, & D_{x_4 x_4} &= 0,1061 + 3,0 = 0,1061, \\ C_{x_2 x_4} &= -0,0502 + 3 \cdot (-0,0972) = (-0,0502 + 0,2916) = -0,3418, \\ D_{x_2 x_4} &= 0,1020 + 3 \cdot (-0,0164) = 0,1020 - 0,0492 = 0,0528. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_4 &= H_1 \frac{C_{x_4 x_4} + jD_{x_4 x_4}}{C_{x_2 x_4} + jD_{x_2 x_4}} = 1000 \cdot \frac{(0 + j0,1061)}{(-0,3418 + j0,0528)}, \\ H_4 &= 1000 (0,0466 - j0,303) = 306 \cdot 3,27 (0,0466 - j0,303) = \\ &= 306 (0,152 - j0,99), \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{0,99}{0,152} = -6,53, \quad \varphi = -81^\circ 20'.$$

$$H_4 = 306 \cdot e^{-j81^\circ 20'}.$$

Výsledek je zakreslen v diagramu 46,2.

Na vnitřním poloměru r_4 dutého válce je magnetické pole H_4 , jehož velikost je $0,306 H_1$ (v daném případě 306 A/cm).

Vektor H_4 je časově posunut proti H_1 o úhel $(-81^\circ 20')$. Pole v dutině je homogenní a má hodnotu H_4 .

Průběh magnetického pole v osovém řezu je schematicky znázorněn v diagramu 46,3.

4.612. Celkový proud ve stěně duté vsázky

Uvažujme část vsázky o osové délce 1 cm. Celkový proud touto částí vsázky procházející označme I_{21} .

$$dI_{21} = (1 \cdot dr) J = J dr \quad [\text{A/cm}].$$

Proud I_{21} dostaneme integrací:

$$I_{21} = \int_{r_4}^{r_2} J dr \quad [\text{A/cm}]. \quad (46,26)$$

Za hustotu proudu J dosadíme z (46,18). Součinitel před zlomkem a jeho jmenovatel jsou konstanty. Integrace se zúčastní pouze čitatel zlomku. V příloze 7,32 odvodíme výraz (73,17):

$$\begin{aligned} J_1(x \sqrt{-j}) &= -\frac{d [J_0(x \sqrt{-j})]}{d(x \sqrt{-j})} = \\ &= -\sqrt{j} \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{d [J_0(x \sqrt{-j})]}{dr}. \end{aligned}$$

Obr. 46,3. Schematické znázornění magnetického pole v cívce, v mezeře, ve stěně a dutině vsázky.

Integraci tohoto výrazu dostaneme

$$\int_{r_4}^{r_2} J_1(x \sqrt{-j}) dr = -\sqrt{j} \frac{a}{\sqrt{2}} [J_0(x_2 \sqrt{-j}) - J_0(x_4 \sqrt{-j})]. \quad (46,27)$$

Analogicky pro funkci druhého druhu

$$\int_{r_4}^{r_2} N_1(x \sqrt{-j}) dr = -\sqrt{j} \frac{a}{\sqrt{2}} [N_0(x_2 \sqrt{-j}) - N_0(x_4 \sqrt{-j})]. \quad (46,28)$$

Provedme integraci čitatele ve výrazu (46,18) a pišme opět zjednodušeně $N_1(x'_4)$ místo $N_1(x_4 \sqrt{-j})$, atd.

$$\begin{aligned} & \int_{r_1}^{r_2} (N_1(x'_4) J_1(x') - J_1(x'_4) N_1(x')) dr - \sqrt{-j} m \int_{r_1}^{r_2} (N_0(x'_4) J_0(x') - J_0(x'_4) N_0(x')) dr = \\ & = N_1(x'_4) \left\{ -\sqrt{j} \frac{a}{\sqrt{2}} [J_0(x'_2) - J_0(x'_4)] \right\} - J_1(x'_4) \left\{ -\sqrt{j} \frac{a}{\sqrt{2}} [N_0(x'_2) - N_0(x'_4)] \right\} - \\ & - \sqrt{-j} m \left[N_0(x'_4) \left\{ -\sqrt{j} \frac{a}{\sqrt{2}} [J_0(x'_2) - J_0(x'_4)] \right\} - J_0(x'_4) \left\{ -\sqrt{j} \frac{a}{\sqrt{2}} [N_0(x'_2) - N_0(x'_4)] \right\} \right] = -\sqrt{j} \frac{a}{\sqrt{2}} [N_1(x'_4) J_0(x'_2) - J_1(x'_4) N_0(x'_2) + J_1(x'_4) N_0(x'_4) - \\ & - N_1(x'_4) J_0(x'_4)] - \sqrt{-j} m \left[-\sqrt{j} \frac{a}{\sqrt{2}} (N_0(x'_4) J_0(x'_2) - J_0(x'_4) N_0(x'_2)) \right] \end{aligned} \quad (46.29)$$

Výsledek (46.29) dosadíme do (46.26):

$$\begin{aligned} I_{21} &= \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{J} dr = \\ &= \sqrt{-j} \frac{\sqrt{2}}{a} \mathbf{H}_1 \frac{-\sqrt{j} \frac{a}{\sqrt{2}}}{(N_1(x'_4) J_0(x'_2) - J_1(x'_4) N_0(x'_2)) - \sqrt{-j} m (N_0(x'_4) J_0(x'_2) - J_0(x'_4) N_0(x'_2))} \\ &\quad [(N_1(x'_4) J_0(x'_2) - J_1(x'_4) N_0(x'_2)) - \sqrt{-j} m (N_0(x'_4) J_0(x'_2) - J_0(x'_4) N_0(x'_4)) + \\ &\quad + J_1(x'_4) N_0(x'_4) - N_1(x'_4) J_0(x'_4)] = \\ &= -\mathbf{H}_1 \left[1 - \frac{J_0(x'_4) N_1(x'_4) - J_1(x'_4) N_0(x'_4)}{(N_1(x'_4) J_0(x'_2) - J_1(x'_4) N_0(x'_2)) - \sqrt{-j} m (N_0(x'_4) J_0(x'_2) - J_0(x'_4) N_0(x'_2))} \right] \quad [\text{A/cm}]. \quad (46.30) \end{aligned}$$

Určíme z (46.17) intenzitu \mathbf{H}_4 na poloměru r_4 :

$$\mathbf{H}_4 = \mathbf{H}_1 \frac{(N_1(x'_4) J_0(x'_4) - J_1(x'_4) N_0(x'_4))}{(N_1(x'_4) J_0(x'_2) - J_1(x'_4) N_0(x'_2)) - \sqrt{-j} m (N_0(x'_4) J_0(x'_2) - J_0(x'_4) N_0(x'_2))} \quad [\text{A/cm}]. \quad (46.31)$$

Porovnáme-li (46.30) a (46.31), můžeme napsat:

$$I_{21} = -\mathbf{H}_1 \cdot \left[1 - \frac{\mathbf{H}_4}{\mathbf{H}_1} \right] = -[\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_4] = -(I_{11} - \mathbf{H}_4) \quad [\text{A/cm}]. \quad (46.32)$$

Výsledek (46.32) značí, že celkový proud I_{21} [A/cm] ve vsázce se rovná zápornému rozdílu vektorů intenzit magnetického pole \mathbf{H}_1 vně válce a \mathbf{H}_4 v dutině válce. Je-li stěna válce dostatečně silná (rovná se vícenásobku hloubky vniku), utlumí se v ní prakticky zcela dopadající vlnění a intenzita magnetického pole \mathbf{H}_4 v dutině se blíží nule. Potom proud ve stěně:

$$I_{21} = -\mathbf{H}_1 = -I_{11} = -(N_{11} \cdot I_1) \quad [\text{A/cm}]. \quad (46.33)$$

Příklad 46.2

Stanovalme proud I_{21} ve stěně v předchozím příkladu 46.1. Vypočetli jsme:

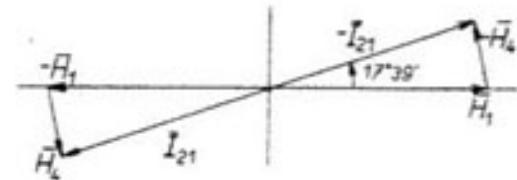
$$\mathbf{H}_4 = 306 (0,152 - j 0,99) = 306 \cdot e^{-j 81^\circ 20'}.$$

$$\begin{aligned} I_{21} &= -[\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_4] = -[1000 - 306 (0,152 - j 0,99)] = \\ &= -[1000 - 46,5 + j 303] = -[953,5 + j 303], \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{303}{953,5} = 0,318, \quad \varphi = 17^\circ 39'.$$

$$I_{21} = -1000 \sqrt{0,953^2 + 0,303^2} \cdot e^{j\varphi} = -1001,4 \cdot e^{j 17^\circ 39'}.$$

Obr. 46.4. Diagram znázorňující intenzity H_1 a H_4 a proud I_{21} , naindukováný do stěny duté vsázky.



Graficky je proud I_{21} ve vztahu k \mathbf{H}_1 zobrazen v diagramu 46.4.

4.613. Impedance duté vsázky

Použijeme stejného způsobu odvození, jako jsme použili při odvození impedance plné vsázky, kapitola 4.34.

Proud I_1 , procházející cívou, vyvolá tyto magnetické toky (obr. 46.1):
Tok Φ_1 v mezeře mezi cívou a vsázkou:

$$\Phi_1 = \pi(r_1^2 - r_2^2) \mu_0 \mu \mathbf{H}_1 \quad [\text{Wb}, \text{cm}, \text{A/cm}]. \quad (46.34)$$

Tok Φ_2 ve vsázce:

$$\Phi_2 = 2\pi \mu_0 \mu \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{H} r dr \quad [\text{Wb}, \text{cm}, \text{A/cm}]. \quad (46.35)$$

Tok Φ_4 v dutině vsázky:

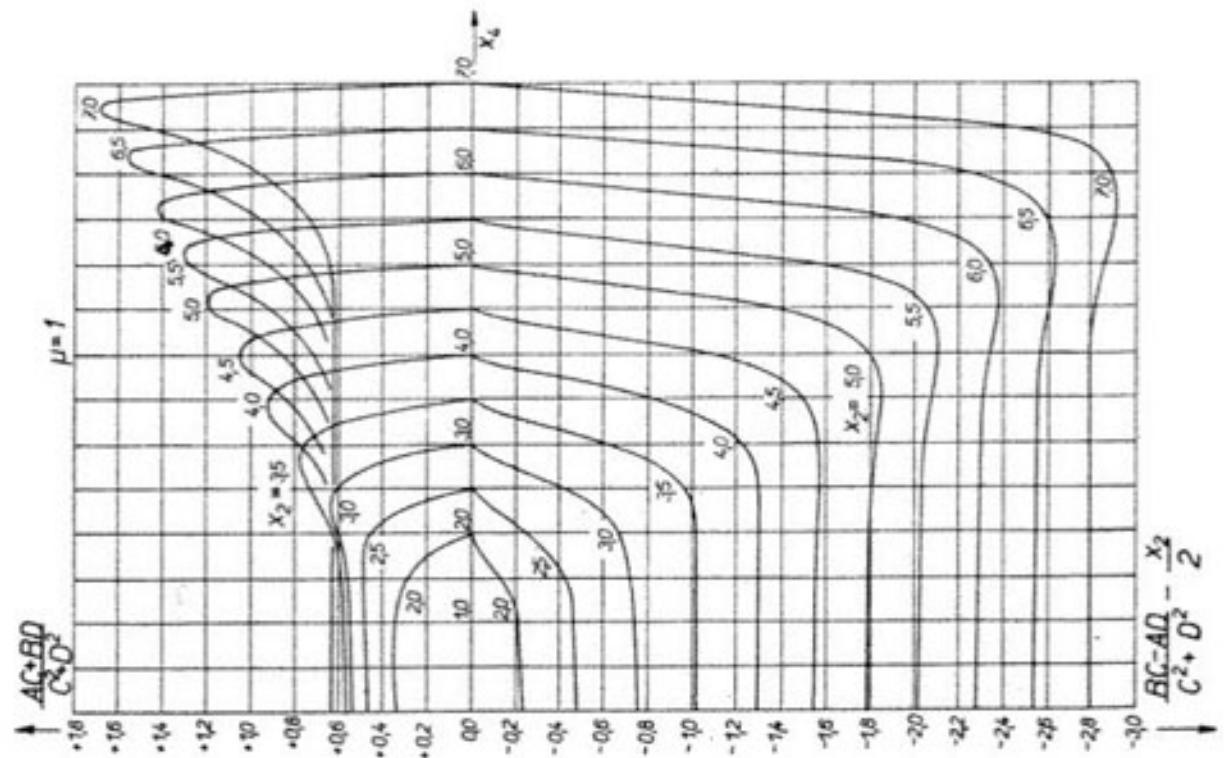
$$\Phi_4 = \pi r_4^2 \mu_0 \mu \mathbf{H}_4 \quad [\text{Wb}, \text{cm}, \text{A/cm}]. \quad (46.36)$$

Časová změna výsledného toku vyvolá na jednom závitu cívky úbytek napětí, daný výrazem:

$$\mathbf{U}_1 = -[j\omega \pi(r_1^2 - r_2^2) \mu_0 \mu \mathbf{H}_1 + j\omega \pi r_4^2 \mu_0 \mu \mathbf{H}_4 + j\omega 2\pi \mu_0 \mu \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{H} r dr] \quad [\text{V}]. \quad (46.37)$$

Dosadíme za $\mathbf{H}_1 = N_{11} \mathbf{I}_1 = I_{11}$, za \mathbf{H} a \mathbf{H}_4 z (46.17), provedeme integraci třetího člena v závorce, vynásobíme celou rovnici (46.37) součinitelem N_{11}

a dostaneme napětí \mathbf{U}_{11} na části cívky o osové délce 1 cm. Vydělíme proudem I_1 a dostaneme výraz pro impedanci vsázky, převedenou do obvodu cívky. Její reálná část je činný odpor R_{21} , její imaginární část je reaktance ωL_{21}



Obr. 46.5. Diagram pro určení činného odporu a reaktance duté vsázky (podle N. M. Rodigina).

části vsázky o délkou 1 cm, převedené do cívky. Dostaneme tyto výsledky (N. M. Rodigin):

$$R_{21} = \frac{\sqrt{2} \pi x_2}{\gamma} N_{11}^2 \frac{(A_{x_2 x_4} C_{x_2 x_4} + B_{x_2 x_4} D_{x_2 x_4})}{C_{x_2 x_4}^2 + D_{x_2 x_4}^2} \quad [\Omega/\text{cm}], \quad (46.38)$$

$$\begin{aligned} \omega L_{21} &= \omega \pi (r_1^2 - r_2^2) \mu_0 \mu N_{11}^2 + \frac{\sqrt{2} \pi x_2}{\gamma} N_{11}^2 \frac{(B_{x_2 x_4} C_{x_2 x_4} - A_{x_2 x_4} D_{x_2 x_4})}{C_{x_2 x_4}^2 + D_{x_2 x_4}^2} = \\ &= \omega \mu_0 \mu \pi r_1^2 N_{11}^2 + \frac{\sqrt{2} \pi x_2}{\gamma} N_{11}^2 \left[\frac{B_{x_2 x_4} C_{x_2 x_4} - A_{x_2 x_4} D_{x_2 x_4}}{C_{x_2 x_4}^2 + D_{x_2 x_4}^2} - \frac{x_2}{2} \right] \quad [\Omega/\text{cm}]. \end{aligned} \quad (46.39)$$

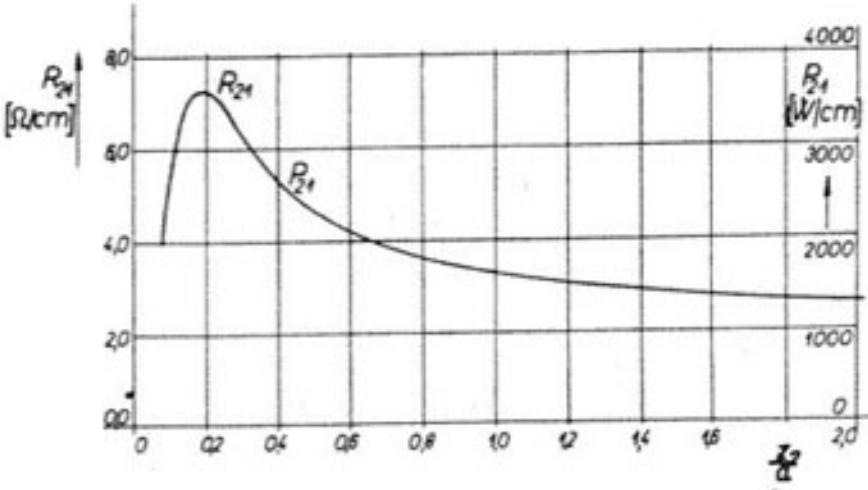
Význam znaků $A_{x_2 x_4}$ atd. podává (46.24) a (46.25). V dalším budeme tyto znaky psát zkráceně bez indexů.

Hodnoty výrazů $\frac{AC + BD}{C^2 + D^2}$, $\frac{BC - AD}{C^2 + D^2}$ pro argumenty $x_2 = 0,2$ až $7,0$,

$x_4 = 0,0$ až $7,0$, pro permeabilitu $\mu = 1$, jsou uvedeny v příloze 7,50. (Podle N. M. Rodigina.) Graficky jsou uvedené výrazy zobrazeny v diagramu 46,5. Rovněž tento diagram platí pro $\mu = 1$.

Příklad 46.3

Vypočtěme, jak se mění činný odpor ocelové trubky při teplotě 1150°C , o vnějším průměru $2r_2 = 10$ cm, zvětšujeme-li tloušťku stěny z_2 postupně na



Obr. 46.6. Průběh činného odporu ocelové trubky o průměru 100 mm, v závislosti na poměru z_2/a .

$0,1, 0,2, 0,5, 1,0, 2,0$ cm. Počet závitů cívky na 1 cm $N_{11} = 1$. Vodivost $\gamma = 10^4 \text{ S} \cdot \text{cm}^{-1}$, $\mu = 1$, kmitočet $f = 2450$ Hz. Vypočteme hloubku vniku, $a = 1,0$ cm:

$$x_2 = \frac{r_2}{a} \sqrt{2} = \frac{5,0}{1,0} \cdot 1,41 = 7,0.$$

Roste-li tloušťka stěny z_2 , zmenšuje se poloměr r_4 a tím i x_4 . Pro $z_2 = 0,1$ cm je $r_4 = 4,9$ cm, $x_4 = \frac{r_4}{a} \sqrt{2} = 6,86$.

Známe-li oba argumenty x_2 a x_4 , vyhledáme z tabulek: pro $x_2 = 7,0$, $x_4 = 6,86$ je $\frac{AC + BD}{C^2 + D^2} = 1,27$.

Dosadíme do (46.38):

$$R_{21} = \frac{2\pi x_2}{\gamma} N_{11}^2 \frac{AC + BD}{C^2 + D^2} = \frac{6,28 \cdot 7,0}{10^4} \cdot 1 \cdot 1,27 = 5,56 \cdot 10^{-3} \Omega/\text{cm}.$$

Stejným postupem jsme vypočetli hodnoty odporu i pro další uvažované tloušťky stěny válce. Výsledky jsou v dálce uvedené tabulce 46,1.

Tabulka 46,1

Tloušťka stěny z_2 [cm]	0,1	0,2	0,5	1,0	2,0
Funkce $\frac{AC + BD}{C^2 + D^2}$	1,27	1,65	1,20	0,75	0,60
Odpor R_{21} [Ω/cm]	5,56	7,25	5,28	3,30	$2,64 \cdot 10^{-2}$
Teplo P_{21} [W/cm]	2780	3630	2640	1650	1320

Graficky jsou výsledky nakresleny na obr. 46,6.

4.614. Výpočet tepla v duté vsádzce

Měrným příkonem σ v místě o poloměru r rozumíme množství tepla, které se vyvine v jednotce objemu při průchodu indukovaných proudů vsázkou. Za hustotu proudu J dosadíme z (46,23).

Měrný příkon σ :

$$\sigma = \frac{1}{2\gamma} J^2 = \frac{1}{2\gamma} \frac{2}{a^2} H_1^2 \frac{A_{x_2 x_4}^2 + B_{x_2 x_4}^2}{C_{x_2 x_4}^2 + D_{x_2 x_4}^2} \quad [\text{W/cm}^3, \text{A/cm}]. \quad (46,40)$$

Hustota proudu je největší na povrchu a zmenšuje se při klesajícím r . V důsledku toho je i vývin tepla ve stěně nerovnoměrný. Při indukčním prohřívání volíme vždy dobu ohřevu dosti dlouhou, takže nastane dobré vyrovnaní teploty ve stěně válce tepelnou vodivostí.

Pro ohřev trubky je rozhodující celkové množství tepla P_{21} , které vznikne ve stěně válce, v části o délce 1 cm.

P_{21} dostaneme z výrazu:

$$P_{21} = \frac{1}{2} R_{21} I_1^2 = \frac{\pi x_2}{\gamma} N_{21}^2 \frac{AC + BD}{C^2 + D^2} I_1^2 \quad [\text{W/cm}, \Omega \cdot \text{cm}, \text{A}]. \quad (46,41)$$

Příklad 46,4

Určeme množství absorbované elmg. energie P_{21} v příkladu 46,3, je-li cívkový proud $I_1 = 1000$ A (maximální hodnota). Dosazením do (46,41) jsme vypočetli P_{21} pro různé tloušťky stěny z_2 .

Výsledky jsou rovněž v předchozí tabulce 46,1 a v diagramu 46,6. Je vidět výraznou závislost P_{21} na poměru $\frac{z_2}{a}$.

4.62. Dutá vsádzka s velkým argumentem x_2

4.621. Elektrická a magnetická intenzita E a H ve stěně

Je-li hodnota argumentu x_2 větší než 8, je možno používat dále uvedených zjednodušených výrazů pro H , E , R_{21} , ωL_{21} . Zjednodušené výrazy odvodíme tak, že Besselovy funkce nahradíme jednoduššími exponenciálními. Náhradní funkce jsou uvedeny v příloze 7,33.

Dosadíme exponenciální funkce do výrazů pro H , E , rovnice (46,17) a (46,18).

$$H = H_1 \frac{(N_1(x'_4) J_0(x') - J_1(x'_4) N_0(x')) - \sqrt{-j} m (N_0(x'_4) J_0(x') - J_0(x'_4) N_0(x'))}{(N_1(x'_4) J_0(x'_2) - J_1(x'_4) N_0(x'_2)) - \sqrt{-j} m (N_0(x'_4) J_0(x'_2) - J_0(x'_4) N_0(x'_2))} \quad [\text{A/cm}].$$

(Používáme opět zjednodušeného způsobu psaní Besselových funkcí, např. $J_0(x')$ místo $J_0(x \sqrt{-j})$, atd.)

Budeme postupovat po částech.

$$N_1(x'_4) J_0(x'_2) = -j \frac{e^{-\frac{1}{4}(\frac{\pi}{8})}}{\sqrt{2 \pi x_4}} [2e^{-\sqrt{j} x_4} - j e^{\sqrt{j} x_4}] \frac{e^{-\frac{1}{4}(\frac{\pi}{8})}}{\sqrt{2 \pi x_2}} e^{\sqrt{j} x_2} = \\ = -j \frac{e^{-\frac{1}{4}(\frac{\pi}{4})}}{2 \pi \sqrt{x_2 x_4}} [2e^{\sqrt{j}(x_2 - x_4)} - j e^{\sqrt{j}(x_2 + x_4)}], \quad (46,42)$$

$$J_1(x'_4) N_0(x'_2) = -j \frac{e^{-\frac{1}{4}(\frac{\pi}{4})}}{2 \pi \sqrt{x_2 x_4}} [2e^{-\sqrt{j}(x_2 - x_4)} + j e^{\sqrt{j}(x_2 + x_4)}]. \quad (46,43)$$

Odečteme (46,43) od (46,42), místo $e^{-\frac{1}{4}(\frac{\pi}{4})}$ pišeme $\sqrt{-j}$. Rozdíl argumentů $(x_2 - x_4)$ označujeme s_2 :

$$(N_1(x'_4) J_0(x'_2) - J_1(x'_4) N_0(x'_2)) = -\frac{\sqrt{j}}{\pi \sqrt{x_2 x_4}} [e^{\sqrt{j} s_2} + e^{-\sqrt{j} s_2}]. \quad (46,44)$$

Podobně odvodíme:

$$(N_0(x'_4) J_0(x'_2) - J_0(x'_4) N_0(x'_2)) = j \frac{\sqrt{j}}{\pi \sqrt{x_2 x_4}} [e^{\sqrt{j} s_2} - e^{-\sqrt{j} s_2}]. \quad (46,45)$$

Součet a rozdíl exponenciálních funkcí vyjádříme za použití výrazů (72,13), (72,12). Jmenovatel výrazu (46,17) bude:

$$(N_1(x'_4) J_0(x'_2) - J_1(x'_4) N_0(x'_2)) - \sqrt{-j} m (N_0(x'_4) J_0(x'_2) - J_0(x'_4) N_0(x'_2)) = \\ = -\frac{\sqrt{j}}{\pi \sqrt{x_2 x_4}} \cdot 2 \cosh(s_2 \sqrt{j}) - \sqrt{-j} m j \frac{\sqrt{j}}{\pi \sqrt{x_2 x_4}} \cdot 2 \sinh(s_2 \sqrt{j}) = \\ = -\frac{2 \sqrt{j}}{\pi \sqrt{x_2 x_4}} [\cosh(s_2 \sqrt{j}) + \sqrt{j} m \sinh(s_2 \sqrt{j})]. \quad (46,46)$$

Čitatel výrazu (46,17) pro \mathbf{H} má přesně stejný tvar, pouze místo argumentu x_2 je x . Rozdíl $(x - x_4) = s$. Výraz pro \mathbf{H} bude:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \sqrt{\frac{x_2}{x}} \frac{\cosh(s\sqrt{j}) + \sqrt{j}m \cdot \sinh(s\sqrt{j})}{\cosh(s_2\sqrt{j}) + \sqrt{j}m \cdot \sinh(s_2\sqrt{j})} \quad [\text{A/cm}]. \quad (46,47)$$

Zjednodušený výraz pro \mathbf{J} odvodíme z (46,18):

$$\mathbf{J} = \frac{1-j}{\sqrt{2}} \mathbf{H}_1 \frac{(N_1(x'_4) J_1(x') - J_1(x'_4) N_1(x')) - \sqrt{-j}m(N_0(x'_4) J_1(x') - J_0(x'_4) N_1(x'))}{(N_1(x'_4) J_0(x'_2) - J_1(x'_4) N_0(x'_2)) - \sqrt{-j}m(N_0(x'_4) J_0(x'_2) - J_0(x'_4) N_0(x'_2))} \quad [\text{A/cm}^2]. \quad (46,47a)$$

Jmenovatel výrazů (46,17) a (46,18) je stejný. Odvodili jsme již dříve — rovnice (46,46).

Odvození čitatele (46,18):

$$(N_1(x'_4) J_1(x') - J_1(x'_4) N_1(x')) = -\frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{4}\right)}}{\pi \sqrt{xx_4}} \cdot 2 \sinh(s\sqrt{j}), \quad (46,48)$$

$$(N_0(x'_4) J_1(x') - J_0(x'_4) N_1(x')) = j \frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{4}\right)}}{\pi \sqrt{xx_4}} \cdot 2 \cosh(s\sqrt{j}). \quad (46,49)$$

Dosadíme do (46,18):

$$\mathbf{J} = \sqrt{j} \frac{\sqrt{2}}{a} \mathbf{H}_1 \sqrt{\frac{x_2}{x}} \frac{\sinh(s\sqrt{j}) + \sqrt{j}m \cdot \cosh(s\sqrt{j})}{\cosh(s_2\sqrt{j}) + \sqrt{j}m \cdot \sinh(s_2\sqrt{j})} \quad [\text{A/cm}^2]. \quad (46,50)$$

Ve výrazech (46,47) a (46,50), které platí pro velké hodnoty argumentu x_2 , je vyjádřena magnetická intenzita \mathbf{H} a hustota proudu \mathbf{J} ve stěně duté vsázký pomocí hyperbolických funkcí komplexního argumentu $(s\sqrt{j}) = (x - x_4)\sqrt{j} = (1+j)\frac{z}{a}$. Symbol z značí vzdálenost uvažovaného místa od vnitřního povrchu vsázký. Pro vnější povrch dutého válce (pro r_2, x_2) dostaneme

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_1 \quad [\text{A/cm}], \quad (46,51)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_2 = \frac{1+j}{a} \mathbf{H}_1 \frac{\sinh(s_2\sqrt{j}) + \sqrt{j}m \cdot \cosh(s_2\sqrt{j})}{\cosh(s_2\sqrt{j}) + \sqrt{j}m \cdot \sinh(s_2\sqrt{j})} \quad [\text{A/cm}^2, \text{A/cm}]. \quad (46,52)$$

Z výrazů (46,47) a (46,50) lze odvodit absolutní hodnoty pro intenzitu magnetického pole H a hustotu proudu J v místě o argumentu x (poloměru r). Moduly jsou dány výrazy:

$$H = H_1 \sqrt{\frac{x_2}{x}} \sqrt{\frac{N_{xx_4}}{N_{x_2x_4}}} \quad [\text{A/cm}]. \quad (46,53)$$

$$J = \frac{\sqrt{2}}{a} H_1 \sqrt{\frac{x_2}{x}} \sqrt{\frac{M_{xx_4}}{N_{x_2x_4}}} \quad [\text{A/cm}^2, \text{A/cm}]. \quad (46,54)$$

Přitom značí: $(s\sqrt{2}) = \frac{2z}{a}$.

$$N_{xx_4} = \cosh(s\sqrt{2}) + \cos(s\sqrt{2}) + m^2 [\cosh(s\sqrt{2}) - \cos(s\sqrt{2})] + \sqrt{2}m [\sinh(s\sqrt{2}) - \sin(s\sqrt{2})], \quad (46,55)$$

$$M_{xx_4} = \cosh(s\sqrt{2}) - \cos(s\sqrt{2}) + m^2 [\cosh(s\sqrt{2}) + \cos(s\sqrt{2})] + \sqrt{2}m [\sinh(s\sqrt{2}) + \sin(s\sqrt{2})]. \quad (46,56)$$

4.622. Celkový proud ve vsázce

Vyjdeme z dříve odvozeného obecného výrazu (46,32):

$$I_{21} = -\mathbf{H}_1 \left[1 - \frac{\mathbf{H}_4}{\mathbf{H}_1} \right] \quad [\text{A/cm}]. \quad (46,57)$$

Intenzitu \mathbf{H}_4 vyjádříme z (46,47):

pro $x = x_4, s = (x - x_4) = (x_4 - x_4) = 0$,

$$\cosh(0\sqrt{j}) = 1, \quad \sinh(0\sqrt{j}) = 0.$$

$$\mathbf{H}_4 = H_1 \sqrt{\frac{x_2}{x_4}} \frac{1}{\cosh(s_2\sqrt{j}) + \sqrt{j}m \sinh(s_2\sqrt{j})} \quad [\text{A/cm}]. \quad (46,58)$$

Dosadíme do (46,57):

$$I_{21} = -N_{11} I_1 \left[1 - \sqrt{\frac{x_2}{x_4}} \frac{1}{\cosh(s_2\sqrt{j}) + \sqrt{j}m \sinh(s_2\sqrt{j})} \right] = -I_{11} [1 - k] \quad [\text{A/cm}]. \quad (46,59)$$

Druhý člen v závorce značí, o kolik se liší proud I_{21} od budicího proudu ($N_{11}I_1$). Označili jsme jej k — korekční člen.

Příklad 46,5

Uvažujme ocelovou trubku vnějšího průměru $2r_2 = 25$ cm. Tloušťka stěny nechť se mění po stupních od 0,625 cm do 5,0 cm. Vypočtěme hodnoty korekčního člena k a proud ve vsázce I_{21} . Teplota 1200 °C, vodivost $\gamma = 10^4 \text{ S.cm}^{-1}$, $\mu = 1$, kmitočet $f = 800 \text{ Hz}$.

Hloubka vniku: $a = 1,77$ cm,

$$x_2 = \frac{r_2}{a} \sqrt{2} = \frac{12,5}{1,77} \cdot 1,4i = 10,0.$$

Tloušťka stěny: $z_2 = (r_2 - r_4)$. Tomu odpovídá rozdíl argumentů:

$$s_2 = (x_2 - x_4) = \frac{\sqrt{2}}{a} (r_2 - r_4) = \frac{\sqrt{2}}{a} z_2;$$

Pro výpočet korekčního členu k použijeme výrazu (46,59):

$$k = \sqrt{\frac{x_2}{x_4}} \frac{1}{\left[\cosh(s_2\sqrt{j}) + \frac{1+j}{\sqrt{2}} \frac{1}{2\mu} x_4 \cdot \sinh(s_2\sqrt{j}) \right]}.$$

Rozepíšeme-li hyperbolické funkce komplexního argumentu, dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{x_4}{x_2}} & \left\{ \cosh \frac{z_2}{a} \cdot \cos \frac{z_2}{a} + \frac{x_4}{\sqrt{2} \cdot 2\mu} \left[\sinh \frac{z_2}{a} \cdot \cos \frac{z_2}{a} - \cosh \frac{z_2}{a} \cdot \sin \frac{z_2}{a} \right] + \right. \\ & \left. + j \sinh \frac{z_2}{a} \cdot \sin \frac{z_2}{a} + j \frac{x_4}{\sqrt{2} \cdot 2\mu} \left[\cosh \frac{z_2}{a} \cdot \sin \frac{z_2}{a} + \sinh \frac{z_2}{a} \cdot \cos \frac{z_2}{a} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (46,60)$$

Hodnoty příslušných funkcí pro uvažované tloušťky stěny jsou v tabulce 46,2:

Tabulka 46,2

Tloušťka stěny z_2 [cm]	0,625	1,25	2,50	5,00
x_2	10,0	10,0	10,0	10,0
x_4	9,5	9,0	8,0	6,0
$s_2 = \frac{z_2}{a}\sqrt{2}$	0,5	1,0	2,0	4,0
$\cosh \frac{z_2}{a}$	1,063	1,260	2,178	8,502
$\sinh \frac{z_2}{a}$	0,361	0,767	1,935	8,443
$\cos \frac{z_2}{a}$	0,938	0,760	0,156	0,952
$\sin \frac{z_2}{a}$	0,347	0,649	0,987	0,307

Dosadíme do výrazů (46,60) a (46,59) a dostaneme hodnoty korekčního členu k a proudu I_{21} , tabulka 46,3.

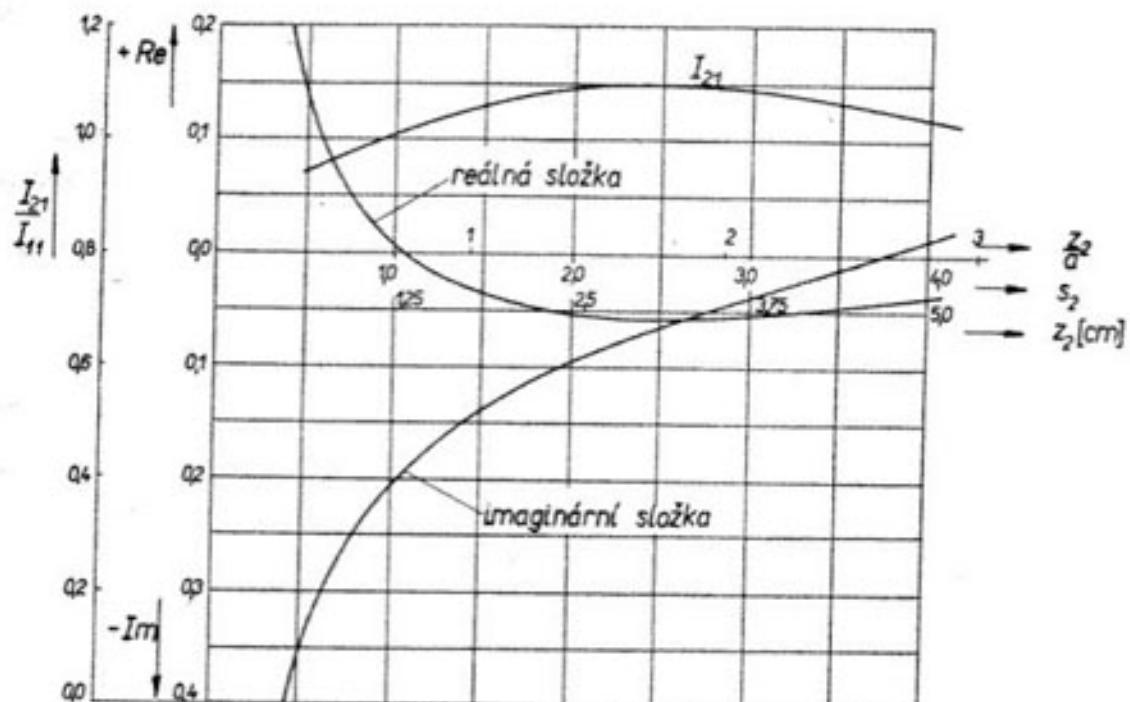
Tabulka 46,3

Tloušťka stěny z_2 [cm]	Argument s_2	Korekční člen k , $k = \text{Re} + j \text{Im}$	Proud I_{21} [A/cm]
0,625	0,5	$(12,9 - j 36,1) \cdot 10^{-2}$	$0,944 \cdot I_{11} \cdot e^{-j 157^{\circ}32'}$
1,25	1,0	$(0,86 - j 20,7) \cdot 10^{-2}$	$1,01 \cdot I_{11} \cdot e^{-j 108^{\circ}10'}$
2,50	2,0	$(-5,34 - j 9,65) \cdot 10^{-2}$	$1,10 \cdot I_{11} \cdot e^{-j 174^{\circ}44'}$
5,00	4,0	$(-3,90 - j 1,13) \cdot 10^{-2}$	$1,039 \cdot I_{11} \cdot e^{-j 179^{\circ}22'}$

Tyto výsledky jsou v diagramu 46,7.

Na vodorovné osu vyneseme proměnnou tloušťku stěny $z_2 = (r_2 - r_4)$, popřípadě argument $s_2 = (x_2 - x_4) = \frac{z_2}{a}\sqrt{2}$.

Na svislé ose je stupnice pro složku reálnou (Re) a imaginární (Im) korekčního členu k , nahoru (+), dolů (-). V diagramu vidíme, že s rostoucí tloušťkou se svislá osa posouvá dolů.



Obr. 46,7. Průběh korekčního členu (jeho reálné a imaginární složky) a naindukovaného proudu I_{21} , v závislosti na poměru z_2/a , pro ocelovou trubku o průměru 25 cm.

kou stěny z_2 obě složky korekčního členu k rychle ubývají. Pro $z_2 = 5$ cm $\left(\frac{z_2}{a} = \frac{5,0}{1,77} = 2,82 \right)$ se reálná složka rovná asi 4 % a imaginární složka asi 1 % z hodnoty I_{11} . Rovná-li se tloušťka stěny alespoň dvojnásobku hloubky vniku anebo je větší, jsou obě složky korekčního členu k menší než 5 % z I_{11} .

Do téhož diagramu jsme zakreslili i průběh absolutní hodnoty proudu I_{21} ve vsázce. V celém uvažovaném rozsahu tloušťky z_2 se I_{21} neliší příliš od I_{11} . Roste-li tloušťka stěny, blíží se fázové natočení mezi I_{11} a I_{21} úhlu $\pi = 180^\circ$.

4.623. Impedance dutého válce, množství tepla ve stěně

Výrazy (46,38) a (46,39) pro R_{21} a ωL_{21} , transformované do obvodu cívky, mají v případě velkého argumentu x_2 tvar

$$R_{21} = \frac{\sqrt{2} \pi x_2}{\gamma} N_{11}^2 \frac{Q_{x_2 x_2}}{N_{x_2 x_2}} \quad [\Omega/\text{cm}], \quad (46,61)$$

$$\begin{aligned} \omega L_{21} &= \omega \mu_0 \mu \pi (r_1^2 - r_2^2) N_{11}^2 + \frac{\sqrt{2} \pi x_2}{\gamma} N_{11}^2 \frac{S_{x_2 x_2}}{N_{x_2 x_2}} = \\ &= \omega \mu_0 \mu \pi r_1^2 N_{11}^2 + \frac{\sqrt{2} \pi x_2}{\gamma} N_{11}^2 \left[\frac{S_{x_2 x_2}}{N_{x_2 x_2}} - \frac{x_2}{\sqrt{2}} \right] \quad [\Omega/\text{cm}]. \end{aligned} \quad (46,62)$$

Výraz pro jmenovatele $N_{x_2 x_2}$ jsme uvedli již dříve, rovn. (46,55). Výrazy $Q_{x_2 x_2}$ a $S_{x_2 x_2}$ jsou:

$$\begin{aligned} Q_{x_2 x_2} &= \sinh(s_2 \sqrt{2}) - \sin(s_2 \sqrt{2}) + m^2 [\sinh(s_2 \sqrt{2}) + \sin(s_2 \sqrt{2})] + \\ &\quad + \sqrt{2} m [\cosh(s_2 \sqrt{2}) - \cos(s_2 \sqrt{2})], \end{aligned} \quad (46,63)$$

$$\begin{aligned} S_{x_2 x_2} &= \sinh(s_2 \sqrt{2}) + \sin(s_2 \sqrt{2}) + m^2 [\sinh(s_2 \sqrt{2}) - \sin(s_2 \sqrt{2})] + \\ &\quad + \sqrt{2} m [\cosh(s_2 \sqrt{2}) + \cos(s_2 \sqrt{2})]. \end{aligned} \quad (46,64)$$

Při průchodu indukovaných proudů stěnou vzniká teplo. Měrný příkon σ :

$$\sigma = \frac{1}{2\gamma} J^2 = \frac{1}{2\gamma} \frac{2}{a^2} H_1^2 \frac{x_2}{x} \frac{M_{xx_2}}{N_{x_2 x_2}} \quad [\text{W/cm}^3, \text{A}/\text{cm}]. \quad (46,65)$$

Množství tepla P_{21} v části duté vsázkы o osové délce 1 cm dostaneme z transformovaného odporu R_{21} :

$$P_{21} = \frac{1}{2} R_{21} I_1^2 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} \pi x_2}{\gamma} N_{11}^2 \frac{Q_{x_2 x_2}}{N_{x_2 x_2}} I_1^2 \quad [\text{W}/\text{cm}, \text{A}]. \quad (46,66)$$

Příklad 46,6

Vypočteme množství tepla, které vznikne v duté ocelové trubce o vnějším průměru $2r_2 = 100$ mm, tloušťce stěny $z_2 = 1$ mm, při teplotě 600°C . Vodivost $\gamma = 1,25 \cdot 10^4 \text{ S} \cdot \text{cm}^{-1}$, $\mu = 20$. Kmitočet budeme měnit po stupních od $f = 500$ Hz až $16\,000$ Hz. Počet závitů $N_{11} = 1/\text{cm}$, proud $I_1 = I_{11} = 1000$ A.

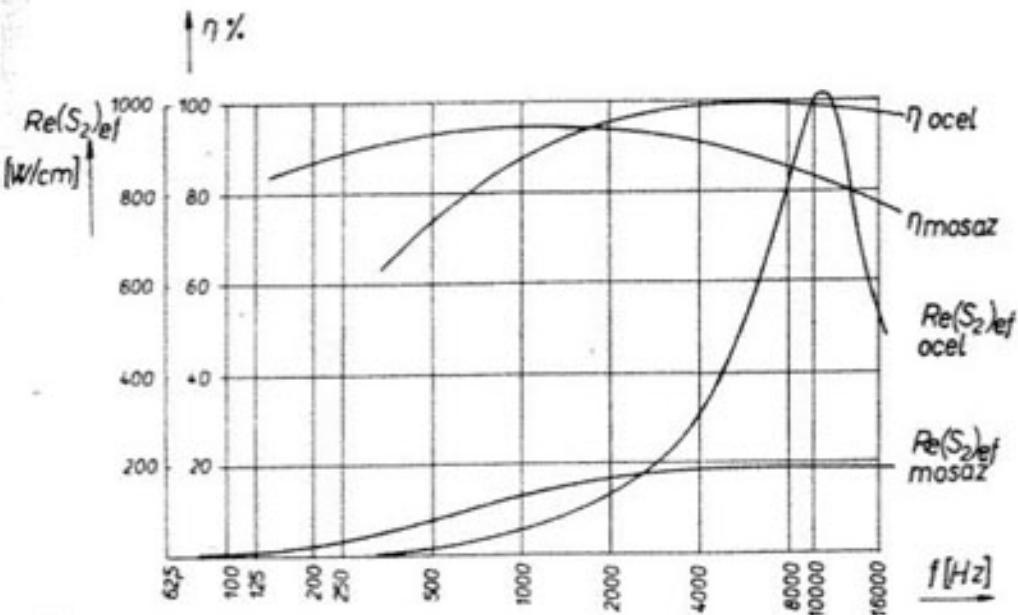
Teplo P_{21} budeme počítat z (46,66). Pro $f = 500$ Hz

$$x_2 = r_2 \sqrt{\omega \gamma \mu_0 \mu} = 15,60.$$

Je-li tloušťka stěny $z_2 = 0,1$ cm, bude $x_4 = 15,29$.

$$s_2 = (x_2 - x_4) = (15,60 - 15,29) = 0,31, \quad (s_2 \sqrt{2}) = 0,44,$$

$$m = \frac{1}{2\mu} x_4 = \frac{1}{2 \cdot 20} \cdot 15,29 = 0,383, \quad m^2 = 0,147.$$



Obr. 46,8. Průběh energie, absorbované trubkou o průměru 100 mm, a účinnost přenosu energie z cívky do trubky alternativně pro trubku ocelovou a mosaznou, v závislosti na použitém kmitočtu.

Výraz $Q_{x_2 x_2}$ určíme z (46,63), $N_{x_2 x_2}$ z (46,55):

$$\begin{aligned} Q_{x_2 x_2} &= (0,454 - 0,426) + 0,147 (0,454 + 0,426) + \\ &\quad + 0,542 (1,098 - 0,905) = 0,262 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{x_2 x_2} &= (1,098 + 0,905) + 0,147 (1,098 - 0,905) + \\ &\quad + 0,542 (0,454 - 0,426) = 2,0466 \end{aligned}$$

$$R_{21} = \frac{1,414 \cdot 3,14 \cdot 15,60}{1,25 \cdot 10^4} \cdot 1 \cdot \frac{0,262}{2,0466} = 6,96 \cdot 10^{-4} \Omega/\text{cm},$$

$$P_{21} = \frac{1}{2} R_{21} I_1^2 = 0,5 \cdot 6,96 \cdot 10^{-4} \cdot 10^6 = 348 \text{ W}/\text{cm}.$$

Dělíme-li P_{21} plochou $(2\pi r_2 \cdot 1)$ cm², dostaneme množství energie, které je absorbováno každým 1 cm² povrchu vsázkы:

$$\text{Re } (S_2)_{ef} = \frac{P_{21}}{2\pi r_2} = \frac{348}{6,28 \cdot 5,0} = 11,4 \text{ W}/\text{cm}^2.$$

Tentýž výpočet jsme provedli pro některé další kmitočty. Výsledky jsou v tabulce 46,4 a v diagramu 46,8.

Tabulka 46.4

Kmitočet f [Hz]	500	2000	4000	8000	16 000	32 000
$Q_{x_1 x_4} / N_{x_1 x_4}$	0,128	0,74	1,20	2,26	2,57	1,06
R_{21} [Ω/cm]	0,696	8,07	18,5	49,1	62,7	$32,7 \cdot 10^{-3}$
P_{21} [W/cm]	348	4035	9250	24.550	31.350	16.350
$\text{Re}(S_2)_{\text{ef}}$ [W/cm^2]	11,1	128	294	782	996	520

V grafu 46,8 vidíme, že množství energie, které uvažovaná ocelová trubka může absorbovat, je značně závislé na přiváděném kmitočtu. Optimální kmitočet je asi 11 000 Hz. Výpočet je proveden za předpokladu, že ve všech případech je proud v cívce $I_1 = I_{11} = 1000 \text{ A/cm}$, $H_1 = H_{11}$ [A/cm]. Při malých hodnotách R_{21} převažuje indukční odpor (reaktance) cívky a proud I_1 je převážně jalový. Roste-li R_{21} , zmenšuje se fázové pošinutí $\cos \varphi$ mezi proudem I_1 v cívce a napětím U_1 ze zdroje.

Příklad 46,7

Vypočtěme množství tepla v trubce týchž rozměrů jako v příkladu 46,6, avšak zhotovené z mosazi. Průměr $2r_2 = 100 \text{ mm}$, tloušťka stěny $z_2 = 1 \text{ mm}$. Při 700°C je vodivost $\gamma = 8,8 \cdot 10^4 \text{ S.cm}^{-1}$, $\mu = 1$.

Stejným postupem jako v příkladu 46,6 jsme dostali tyto výsledky:

Tabulka 46,5

Kmitočet f [Hz]	100	200	500	1000	2000	4000	16 000
$Q_{x_1 x_4} / N_{x_1 x_4}$	0,452	1,20	3,28	4,10	3,59	2,72	1,415
R_{21} [Ω/cm]	2,92	11,04	47,8	84,0	104,2	112	$116 \cdot 10^{-4}$
P_{21} [W/cm]	146	552	2390	4200	5210	5600	5800
$\text{Re}(S_2)_{\text{ef}}$ [W/cm^2]	4,65	17,6	76,0	136	166	178	185

Průběh $\text{Re}(S_2)_{\text{ef}}$ v závislosti na kmitočtu jsme opět vynesli do diagramu 46,8.

Porovnáme-li v 46,8 průběh $\text{Re}(S_2)_{\text{ef}}$ pro ocel a mosaz, vidíme, že mosazná trubka nemůže absorbovat ani při svém optimálním kmitočtu taklik energie jako trubka ocelová. Průběh u mosazné trubky není v takové míře závislý na použitém kmitočtu jako u trubky ocelové. V rozsahu kmitočtů asi od 2000 do 20 000 Hz se množství absorbované energie u mosazné trubky příliš nemění.

4,63. Dutá vsázka s velkým argumentem x_2 , s velkou tloušťkou stěny

4,631. Elektrická a magnetická intenzita ve stěně

Pokusme se zjednodušit výrazy (46,47) a (46,50) pro intenzitu \mathbf{H} a hustotu \mathbf{J} v případě, že tloušťka stěny z_2 dutého válce je mnohonásobek větší než hloubka vniku a , $z_2 \gg a$.

$$s_2 = (x_2 - x_4) = \frac{\sqrt{2}}{a} (r_2 - r_4) = \frac{z_2}{a} \sqrt{2}. \quad \text{J + x_2 k +}$$

Nechť má argument $\frac{s_2}{\sqrt{2}} = \frac{z_2}{a}$ hodnotu větší než 3. V tom případě

$$\sinh \frac{s_2}{\sqrt{2}} = 10,0179, \cosh \frac{s_2}{\sqrt{2}} = 10,0677, \cosh \frac{s_2}{\sqrt{2}} \doteq \sinh \frac{s_2}{\sqrt{2}} = \sinh \frac{z_2}{a},$$

$$\begin{aligned} \cosh(s_2 \sqrt{j}) &= \cosh \frac{s_2}{\sqrt{2}} \cdot \cos \frac{s_2}{\sqrt{2}} + j \sinh \frac{s_2}{\sqrt{2}} \cdot \sin \frac{s_2}{\sqrt{2}} \doteq \\ &\doteq \cosh \frac{z_2}{a} \left(\cos \frac{z_2}{a} + j \sin \frac{z_2}{a} \right) = e^{j \left(\frac{z_2}{a} \right)} \cosh \frac{z_2}{a}, \end{aligned} \quad (46,67)$$

$$\sinh(s_2 \sqrt{j}) \doteq \cosh \frac{z_2}{a} e^{j \left(\frac{z_2}{a} \right)} \doteq \cosh(s_2 \sqrt{j}). \quad (46,68)$$

Jmenovatel výrazů (46,47) a (46,50) bude

$$\begin{aligned} \cosh(s_2 \sqrt{j}) + \sqrt{j} m \cdot \sinh(s_2 \sqrt{j}) &= \cosh(s_2 \sqrt{j}) [1 + \sqrt{j} m] = \\ &= e^{j \left(\frac{z_2}{a} \right)} \cosh \frac{z_2}{a} (1 + \sqrt{j} m). \end{aligned} \quad (46,69)$$

Dosadme do (46,47) a (46,50):

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \sqrt{\frac{x_2}{x}} e^{-j \left(\frac{z_2}{a} \right)} \frac{\cosh(s_2 \sqrt{j}) + \sqrt{j} m \sinh(s_2 \sqrt{j})}{\cosh \frac{z_2}{a} (1 + \sqrt{j} m)} \quad [\text{A/cm}], \quad (46,70)$$

$$\mathbf{J} = \frac{1+j}{a} \mathbf{H}_1 \sqrt{\frac{x_2}{x}} e^{-j \left(\frac{z_2}{a} \right)} \frac{\sinh(s_2 \sqrt{j}) + \sqrt{j} m \cosh(s_2 \sqrt{j})}{\cosh \frac{z_2}{a} (1 + \sqrt{j} m)} \quad [\text{A/cm}^2]. \quad (46,71)$$

Odvodme v tomto případě hustotu J_2 z výrazu (46,52). Protože $\sinh(s_2\sqrt{j}) \doteq \cosh(s_2\sqrt{j})$, rovná se čitatel jmenovateli. Potom

$$J = J_2 = \gamma E_2 = \frac{1+j}{a} H_1 = \frac{1+j}{a} H_2 \\ [\text{A/cm}^2, \text{V/cm}, \text{A/cm}]. \quad (46,72)$$

Poměr obou intenzit na povrchu dutého válce v případě velkého argumentu x_2 a velké tloušťky stěny válce:

$$\frac{E_2}{H_2} = \frac{1+j}{a} \quad [\text{V/cm}, \text{A/cm}]. \quad (46,73)$$

Výrazy (46,53) a (46,54) pro absolutní hodnoty lze rovněž zjednodušit. Jmenovatel $N_{x_2 x_4}$ v případě velké tloušťky stěny se zjednoduší, pro $\frac{z_2}{a} = \frac{s_2}{\sqrt{2}} = 3$, je $(s_2\sqrt{2}) = 6,0$. Potom: $\sinh(s_2\sqrt{2}) \doteq \cosh(s_2\sqrt{2}) = 201,71$. Goniometrické funkce můžeme v (46,55) a (46,56) zanedbat proti hyperbolickým:

$$N_{x_2 x_4} \doteq \cosh(s_2\sqrt{2}) + m^2 \cdot \cosh(s_2\sqrt{2}) + \sqrt{2} m \cdot \cosh(s_2\sqrt{2}) = \\ = \cosh \frac{2z_2}{a} \left[1 + \sqrt{2} \frac{x_4}{2\mu} + \left(\frac{x_4}{2\mu} \right)^2 \right], \quad (46,74)$$

$$M_{x_2 x_4} \doteq N_{x_2 x_4}. \quad (46,75)$$

Z výrazu (46,54) dostaneme za použití (46,74) a (46,75) modul hustoty proudu na povrchu:

$$J_2 = \frac{\sqrt{2}}{a} H_1 \sqrt{\frac{x_2}{x_4}} \sqrt{\frac{M_{x_2 x_4}}{N_{x_2 x_4}}} = \frac{\sqrt{2}}{a} H_1 \quad [\text{A/cm}^2, \text{A/cm}]. \quad (46,76)$$

4,632. Celkový proud ve stěně

Odvodme proud I_{21} a korekční člen k v případě, že tloušťka stěny se rovná vicenásobku hloubky vniku. Vyjdeme z (46,59). Za jmenovatele zlomku dosadme z (46,69):

$$I_{21} = -I_{11} \left[1 - \sqrt{\frac{x_2}{x_4}} \frac{1}{\cosh(s_2\sqrt{j}) [1 + \sqrt{j} m]} \right] = \\ = -I_{11} \left[1 - \sqrt{\frac{x_2}{x_4}} e^{-j\left(\frac{s_2}{a}\right)} \frac{1}{\left[\cosh \frac{z_2}{a} (1 + \sqrt{j} m)\right]} \right] \quad [\text{A/cm}]. \quad (46,77)$$

Druhý člen v závorce se stává zanedbatelně malým, takže

$$I_{21} \doteq -I_{11} \quad [\text{A/cm}]. \quad (46,78)$$

4,633. Impedance duté vsázky

Odvodme z (46,61) a (46,62) výrazy pro R_{21} a ωL_{21} v případě, že tloušťka stěny z_2 se rovná vicenásobku hloubky vniku.

Pro $\frac{z_2}{a} = 3,0$, $(s_2\sqrt{2}) = 6,0$ jsme odvodili již $N_{x_2 x_4}$, výraz (45,74):

$$N_{x_2 x_4} \doteq \cosh \frac{2z_2}{a} \left[1 + \sqrt{2} \frac{x_4}{2\mu} + \left(\frac{x_4}{2\mu} \right)^2 \right].$$

Pro $Q_{x_2 x_4}$ a $S_{x_2 x_4}$, rovn. (46,63) a (46,64) dostaneme

$$Q_{x_2 x_4} \doteq S_{x_2 x_4} \doteq N_{x_2 x_4} \doteq \cosh \frac{2z_2}{a} \left[1 + \sqrt{2} \frac{x_4}{2\mu} + \left(\frac{x_4}{2\mu} \right)^2 \right], \quad (46,79)$$

$$R_{21} = \frac{\sqrt{2} \pi x_2}{\gamma} N_{11}^2 = \frac{\sqrt{2} \pi r_2 \sqrt{2}}{\gamma a} N_{11}^2 = \varrho \frac{2 \pi r_2}{a} N_{11}^2 \quad [\Omega/\text{cm}], \quad (46,80)$$

$$\omega L_{21} = \omega \mu_0 \mu \pi (r_1^2 - r_2^2) N_{11}^2 + \frac{\sqrt{2} \pi x_2}{\gamma} N_{11}^2 = + \omega \mu_0 \mu \pi (r_1^2 - r_2^2) N_{11}^2 + \\ + \varrho \frac{2 \pi r_2}{a} N_{11}^2 \quad [\Omega/\text{cm}]. \quad (46,81)$$

Je-li tloušťka stěny veliká proti hloubce vniku, rovná se činný a jalový odpor dutého válce odporu vrstvy o tloušťce a na povrchu válce. Stejný výsledek jsme odvodili dříve pro plnou válcovou vsázku s velkým argumentem x_2 .

4,64. Účinnost přenosu energie z cívky do vsázky

V předchozích příkladech (46,6) a (46,7) procházel cívka tentýž proud $I_1 = 1000$ A. Snadno můžeme vypočítat odpor cívky při uvažovaných kmitočtech a z toho potom ztráty při průchodu proudu I_1 .

Pro odpor $R_{11\infty}$ cívky jsme v kapitole 4,40 odvodili výraz (44,47):

$$R_{11\infty} = \varrho \frac{2 \pi r_1}{a_1} N_{11}^2 \quad [\Omega/\text{cm}, \Omega \cdot \text{cm}, \text{cm}].$$

Nechť např. vnější průměr válcové vsázky $2r_2 = 100$ mm, $N_{11} = 1$, vnitřní průměr cívky $2r_1 = 140$ mm. Vodivost mědi $\gamma = 5,5 \cdot 10^5 \text{ S} \cdot \text{cm}^{-1}$. Pro kmitočet $f = 500$ Hz vypočítáme hloubku vniku a_1 , dosadíme do předchozího výrazu a dostaneme

$$R_{11} = 2,64 \cdot 10^{-4} \Omega/\text{cm}.$$

Při tomto kmitočtu je odpor R_{21} ocelové trubky (příklad 46,6), převedený do obvodu cívky,

$$R_{21} = 0,696 \cdot 10^{-3} \Omega/\text{cm}.$$

Oba odpory jsou v obvodu cívky zařazeny za sebou, oběma protéká týž proud I_1 . Účinnost η přenosu energie z cívky do vsázky bude

$$\eta = \frac{P_{21}}{P_{11} + P_{21}} = \frac{R_{21} I_1^2}{(R_{11} + R_{21}) I_1^2} = \frac{R_{21}}{R_{11} + R_{21}}. \quad (46,82)$$

$$\eta = \frac{6,96 \cdot 10^{-4}}{(2,64 + 6,96) \cdot 10^{-4}} = 0,726.$$

Stejným způsobem jsme vypočetli účinnost pro přenos energie při uvažovaných kmitočtech do trubky ocelové a mosazné, příklady 46,6 a 46,7. Výsledky jsou v tabulce 46,6.

Tabulka 46,6

Kmitočet f [Hz]	200	500	2000	4000	8000	10 000
Účinnost η pro ocelovou trubku		72,6		98,6		98,2
Účinnost η pro mosaznou trubku	87,2		94,0		84,5	

Vypočtené účinnosti jsme rovněž vyznačili v předchozím diagramu 46,8. Z grafu je vidět, že maximální účinnost přenosu energie do uvažované trubky ocelové se dosáhne asi při kmitočtu 6000 Hz. Má-li být účinnost vyšší než 80 %, je třeba použít kmitočtu v rozmezí asi 600 Hz až asi 50 000 Hz.

U trubky mosazné je maximální dosažitelná účinnost asi 94 % proti 98 % u oceli. Má-li být účinnost přenosu vyšší než 80 %, je třeba volit kmitočet v rozmezí asi 100 Hz až 12 000 Hz.

4,65. Náhradní průměr duté vsázky

Při některých výpočtech je třeba znát náhradní průměr vsázky. Válec nulové tloušťky o tomto náhradním průměru má takový činný odpor a indukčnost, transformované do obvodu cívky, jako skutečná vsázka.

V kapitole 4,36 jsme odvodili výraz (43,136) pro poloměr r_n náhradního válce plné vsázky.

Analogicky uvádí N. M. Rodigin pro dutý válec ($\mu = 1$):

$$r_n = r_2 \sqrt{1 - \frac{2}{x_2} \frac{BC - AD}{C^2 + D^2}} \quad [\text{cm}], \quad Y(x_2, x_4) \quad (46,83)$$

$$r_n = r_2 \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{x_2} \frac{S_{x_2 x_4}}{N_{x_2 x_4}}} \quad [\text{cm}]. \quad (46,84)$$

Pvní výraz platí pro malé hodnoty x_2 , asi do $x_2 \leq 7,0$.

Pro velké x_2 lze užít druhého jednoduššího výrazu.

$S_{x_2 x_4}$ podle (46,64), $N_{x_2 x_4}$ podle (46,55).

Rovná-li se tloušťka stěny válce vícenásobku hloubky vniku, potom podle (46,79) je $S_{x_2 x_4} = N_{x_2 x_4}$.

V tom případě je náhradní poloměr r_n :

$$r_n = r_2 \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{x_2}} = r_2 \sqrt{1 - \frac{a}{r_2}} \quad [\text{cm}]. \quad (46,85)$$

Je-li $a \ll r_2$, rozvineme odmocninu v řadu

$$r_n = r_2 \left(1 - \frac{a}{2r_2}\right) = \left(r_2 - \frac{a}{2}\right) \quad [\text{cm}]. \quad (46,86)$$

Stejný výsledek jsme odvodili v kap. 4,36 pro plnou vsázku s velkým argumentem x_2 .

4,66. Optimální kmitočet pro indukční ohřev dutého válce

Jak je z předchozích příkladů 46,6 a 46,7 a z diagramu 46,8 vidět, lze pro účinný přenos energie z cívky do vsázky použít kmitočtů v poměrně širokém rozsahu.

Nemá-li být v jednotlivých případech prováděn zdlouhavý výpočet pro řadu odlišných kmitočtů, jako v uvedených příkladech, je třeba odvodit směrnice pro volbu optimálního kmitočtu, při kterém nastává co nejúčinnější přenos energie do vsázky.

Pro velké hodnoty argumentu x_2 lze odvodit, že vsázka absorbuje maximální výkon, když její činný a jalový odpor jsou stejné, $R_{21} = \omega L_{21}$. Podle (46,61) a (46,62) platí

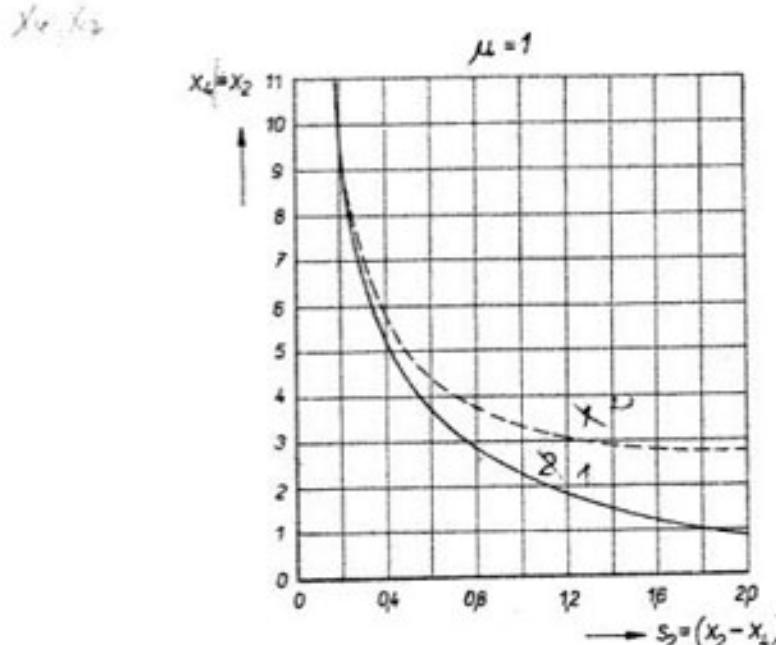
$$\frac{\sqrt{2} \pi x_2}{\gamma} N_{11}^2 \frac{Q_{x_2 x_4}}{N_{x_2 x_4}} = \frac{\sqrt{2} \pi x_2}{\gamma} N_{11}^2 \frac{S_{x_2 x_4}}{N_{x_2 x_4}},$$

z toho

$$Q_{x_2 x_4} = S_{x_2 x_4}. \quad (46,87)$$

Dosadme z (46,63) a (46,64):

$$\begin{aligned} \sinh(s_2\sqrt{2}) - \sin(s_2\sqrt{2}) + m^2 [\sinh(s_2\sqrt{2}) + \sin(s_2\sqrt{2})] + \\ + \sqrt{2}m [\cosh(s_2\sqrt{2}) - \cos(s_2\sqrt{2})] = \sinh(s_2\sqrt{2}) + \sin(s_2\sqrt{2}) + \\ + m^2 [\sinh(s_2\sqrt{2}) - \sin(s_2\sqrt{2})] + \sqrt{2}m [\cosh(s_2\sqrt{2}) + \cos(s_2\sqrt{2})], \end{aligned} \quad (46,88)$$



Obr. 46,9. Závislost argumentu x_2 na rozdílu argumentů $(x_2 - x_4)$, pro optimální kmitočet, při kterém je dutá vsázka schopna absorbovat maximální množství energie.

$$+ \sin(s_2\sqrt{2}) - m^2 \cdot \sin(s_2\sqrt{2}) + \sqrt{2}m \cos(s_2\sqrt{2}) = 0,$$

$$\operatorname{tg}(s_2\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}m}{m^2 - 1}. \quad (46,89)$$

Dosadme za $m = \frac{1}{2\mu} \cdot x_4$. Předpokládejme nemagnetický materiál, $\mu = 1$:

$$\operatorname{tg}(s_2\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}x_4}{x_4^2 - 4}, \quad (46,90)$$

$$x_4^2 \cdot \operatorname{tg}(s_2\sqrt{2}) - \sqrt{2} \cdot 2x_4 - 4 \operatorname{tg}(s_2\sqrt{2}) = 0,$$

$$x_4 = \frac{\sqrt{2} \cdot 2 \pm \sqrt{8 + 16 \operatorname{tg}^2(s_2\sqrt{2})}}{2 \operatorname{tg}(s_2\sqrt{2})}. \quad (46,91)$$

Z výrazu (46,90) jsme určili optimální x_4 jako funkci daného argumentu s_2 . Známe-li x_4 a s_2 , je $x_2 = x_4 + s_2$.

Zvolili jsme několik hodnot s_2 a dosazením do (46,91) jsme vypočetli příslušná x_4 . Výsledky jsou v tabulce 46,7.

Tabulka 46,7

s_2	0,2	0,4	0,6	1,0	1,6
$\operatorname{tg}(s_2\sqrt{2})$	0,291	0,635	1,138	6,33	1,214
x_4	10,1	5,23	3,60	2,24	1,165
$x_2 = (x_4 + s_2)$	10,3	5,63	4,20	3,24	2,765

V diagramu 46,9 je odvozená závislost mezi argumentem x_4 a rozdílem argumentů $s_2 = (x_2 - x_4)$ vyjádřena graficky, křivka 1.

Můžeme-li zanedbat v (46,90) s_2 proti x_2 , $s_2 \ll r_2$, dostaneme $x_4 \doteq x_2$:

$$\operatorname{tg}(s_2\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}x_2}{x_2^2 - 4}. \quad (46,92)$$

Křivka 2 v diagramu 46,9 ukazuje průběh x_2 podle rovnice (46,92).

Ačkoliv v předchozí úvaze jsme vyšli z podmínky, že argument x_2 má velkou hodnotu, bylo experimentálně potvrzeno, že vztah (46,92), vyjádřený graficky křivkou 2 v diagramu 46,9, platí i pro malé hodnoty argumentu x_2 .

Diagram 46,9, křivka 2, udává tedy obecně závislost mezi argumentem x_2 a rozdílem argumentů $s_2 = (x_2 - x_4)$, pro $\mu = 1$. Kmitočet, určený za použití tohoto diagramu, je optimální, což značí, že vsázka absorbuje s dobrou účinností energii z cívky.

Příklad 46,8

Stanovme za použití diagramu 46,9 optimální tloušťku stěny mosazné trubky, kterou chceme indukčně prohřívat při kmitočtu $f = 158$ Hz. Vnější průměr 10 cm, vodivost $\gamma = 8,8 \cdot 10^4$ S.cm $^{-1}$.

$$x_2 = r_2 \sqrt{\omega \gamma \mu_0 \mu} = 5,23.$$

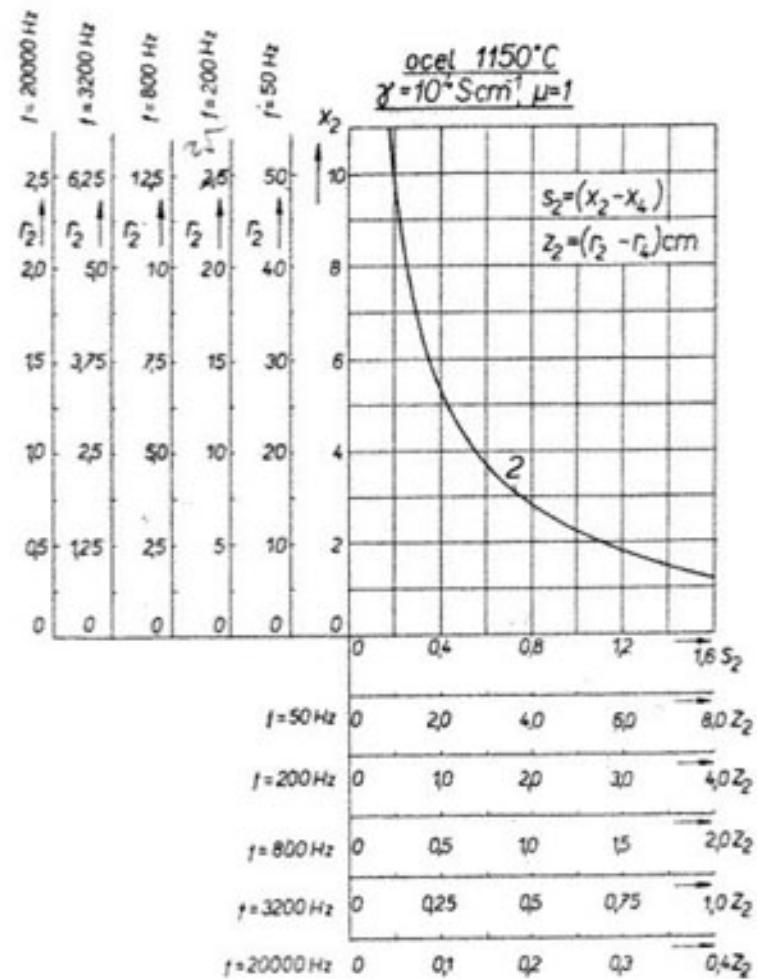
Z diagramu (křivka 2) odečteme, že pro optimální kmitočet odpovídá argu-

mentu $x_2 = 5,23$ rozdíl argumentů $s_2 = (x_2 - x_4) = 0,4$. Argument x_4 je tedy $x_4 = (x_2 - s_2) = (5,23 - 0,40) = 4,83$.

$$r_4 = r_2 \frac{x_4}{x_2} = 5,0 \cdot \frac{4,83}{5,23} = 4,62 \text{ cm.}$$

Optimální tloušťka stěny

$$z_2 = (r_2 - r_4) = 5,00 - 4,62 = 0,38 \text{ cm.}$$



Obr. 46,10. Diagram pro stanovení optimálního kmitočtu k prohřívání ocelových trubek různého průměru a různé tloušťky stěny.

4,661. Doplňení diagramu 46,9 stupnicemi

Tento diagram můžeme pro zvolený materiál doplnit dalšími stupnicemi, na kterých potom přímo odečítáme výsledky.

Sestrojme nový diagram 46,10 pro ocel při teplotě 1150°C , $\gamma = 10^4 \text{ S.cm}^{-1}$, $\mu = 1$.

Stupnice pro x_2 , $s_2 = (x_2 - x_4)$ a křivka 2 jsou převzaty z obr. 46,9. Rovnoběžně se stupnicí pro x_2 zakreslime další stupnice, z nichž každá platí pro určitý zvolený kmitočet. Ze závislosti $x_2 = r_2 \sqrt{\omega \gamma \mu_0 \mu}$ snadno odvodíme příslušné body pro r_2 , pro $f = 50 \text{ Hz}$.

$$\sqrt{\omega \gamma \mu_0 \mu} = \sqrt{2\pi \cdot 50 \cdot 10^4 \cdot 4\pi \cdot 10^{-9} \cdot 1} = \frac{2\pi}{10\sqrt{10}} \doteq \frac{1}{5},$$

$$r_2 = \frac{x_2}{\sqrt{\omega \gamma \mu_0 \mu}} \doteq 5x_2.$$

První stupnice platí pro $f = 50 \text{ Hz}$, při čemž bodu $x_2 = 10$ odpovídá bod $r_2 = 50$, bodu $x_2 = 6$ bod $r_2 = 30$, atd. Obdobně jsou sestrojeny stupnice pro další kmitočty až $f = 20000 \text{ Hz}$.

Analogicky jsou sestrojeny pro jednotlivé kmitočty vodorovné stupnice pro příslušné rozdíly $z_2 = (r_2 - r_4)$, což je přímo tloušťka stěny ($s_2 = z_2 \sqrt{\omega \gamma \mu_0 \mu}$).

$$z_2 = \frac{s_2}{\sqrt{\omega \gamma \mu_0 \mu}}$$

Příklad 46,9

Uvažujme ocelovou trubku o průměru 20 cm, teplota 1150°C . Odečteme z diagramu 46,10, jaká je optimální tloušťka stěny při kmitočtu 200 Hz, popřípadě 800 Hz.

Na svislé stupni pro $f = 200 \text{ Hz}$ vyhledáme bod: $r_2 = 10 \text{ cm}$. Tomuto bodu odpovídá na vodorovné stupni pro 200 Hz bod $z_2 = (r_2 - r_4) = 1,35$. Při kmitočtu 200 Hz je optimální tloušťka 1,35 cm. Obdobně při kmitočtu 800 Hz je hledaná optimální tloušťka stěny 0,3 cm.

Příklad 46,10

Odečteme z diagramu 46,10, jaký je optimální kmitočet k prohřívání ocelové trubky o průměru 15 cm, 1150°C , je-li tloušťka stěny 0,5 cm.

Zvolme kmitočet $f = 200 \text{ Hz}$. Z diagramu odečteme pro $r_2 = 7,5 \text{ cm}$ na stupni 200 Hz, že při tomto kmitočtu je optimální tloušťka asi 1,8 cm. Zvolme kmitočet 800 Hz. Příslušnému bodu $r_2 = 7,5 \text{ cm}$ na této stupni odpovídá tloušťka asi 0,45 cm. Porovnáním obou výsledků dojdeme k závěru, že optimální kmitočet pro tloušťku $z_2 = 0,5 \text{ cm}$ by byl asi 750 Hz.

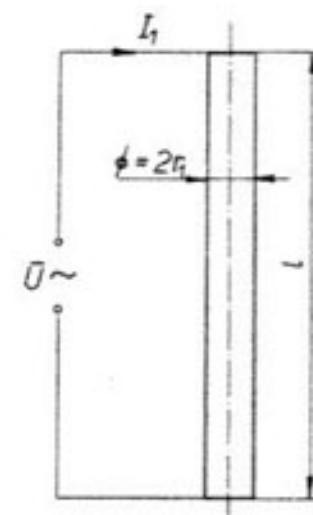
V příkladech 46,6 a 46,7 jsme vypočetli množství absorbované energie $Re(S_2)_{ef}$ [W/cm²] v závislosti na kmitočtu. Výsledky jsou v diagramu 46,8. Z průběhu křivek je vidět, že při zachování dobré účinnosti η přenosu energie z cívky do vsázky lze použít kmitočtů ve značném rozsahu různých. Z toho vyplývá, že dodržení optimálního kmitočtu podle obr. 46,10 není kritické. Lze užit kmitočtu přiměřeně vyššího nebo nižšího podle zdroje, který je k dispozici.

5. Vedení ze souosých válců

5.1. Přímý plný vodič válcového tvaru

Uvažujme přímý vodič válcového tvaru o délce l [cm], na jehož konci přivádime střídavé napětí U , podle obr. 51,1.

Vodičem prochází proud o intenzitě I_1 [A]. Uvažujme, že délka l je značně veliká. Dále předpokládejme, že se proudová vlna šíří podél vodiče nekonečnou rychlosí. Zanedbáme-li nerovnoměrnosti vytvořené u obou konců, můžeme říci, že rozložení proudu i magnetického pole je totožné v každém řezu kolmém k ose vodiče. Vzhledem k symetrii celého uspořádání k ose vodiče bude hustota proudu i intenzita magnetického pole v libovolném místě pouze funkci poloměru r uvažovaného místa. Rozložení elektromagnetického pole má opět váleový charakter.



Obr. 51,1. Přímý válcový vodič

5.11. Elektrická a magnetická intenzita ve vodiči

Vyjdeme z obr. 51,2.

První dvě Maxwellovy rovnice pro rot \mathbf{H} a rot \mathbf{E} mají v soustavě praktických jednotek tvar

$$\text{rot } \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E} + \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{E}(\gamma + j\omega \epsilon_0 \epsilon) \quad [\text{A}/\text{cm}, \text{V}/\text{cm}], \quad (51,1)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu_0 \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -j\omega \mu_0 \mu \mathbf{H} \quad [\text{V}/\text{cm}, \text{A}/\text{cm}]. \quad (51,2)$$

Porovnejme mezi sebou oba členy v závorce výrazu (51,1). Např. pro měď $\gamma = 5,5 \cdot 10^4 \text{ S} \cdot \text{cm}^{-1}$, pro žhavou ocel $\gamma = 10^4 \text{ S} \cdot \text{cm}^{-1}$. Kmitočty uvažujeme v rozmezí od $f = 10^3$ až 10^6 Hz . Pro nejnižší uvažovaný kmitočet bude

$$\omega \varepsilon_0 \varepsilon = 2\pi \cdot 10^3 \cdot \frac{10^9}{4\pi c^2} = \frac{10^3 \cdot 10^9}{18 \cdot 10^{20}} = 5,55 \cdot 10^{-10},$$

pro $f = 10^8$ Hz, $\omega \varepsilon_0 \varepsilon = 5,55 \cdot 10^{-7}$.

Je vidět, že u vodivých materiálů je vždy $\gamma \gg \omega \varepsilon_0 \varepsilon$ (resp. $\omega \ll \frac{\gamma}{\varepsilon_0 \varepsilon}$). Můžeme proto druhý člen v závorce výrazu (51,1) zanedbat:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E} \quad [\text{A/cm, V/cm}]. \quad (51,3)$$

Podle obr. 51,2 můžeme vyjádřit rot \mathbf{H} a rot \mathbf{E} :

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\left[\left(\mathbf{H} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\omega - \mathbf{H} r d\omega \right]}{r d\omega dr} = \left(\frac{\mathbf{H}}{r} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial r} \right), \quad (51,4)$$

$$-\text{rot } \mathbf{E} = \frac{\left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r} dr \right) \cdot 1 - \mathbf{E} \cdot 1}{1 dr} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r}. \quad (51,5)$$

Spojíme (51,3), (51,4) a (51,2) a (51,5) a dostaneme

$$\gamma \mathbf{E} = \frac{\mathbf{H}}{r} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial r}, \quad (51,6)$$

$$j\omega \mu_0 \mu \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r}. \quad (51,7)$$

Z rovnice (51,7) vyjádříme \mathbf{H} a dosadíme do (51,6):

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{1}{j\omega \mu_0 \mu} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r} + \frac{1}{j\omega \mu_0 \mu} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial r^2} - \gamma \mathbf{E} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r} - j\omega \gamma \mu_0 \mu \mathbf{E} &= 0. \end{aligned} \quad (51,8)$$

Obr. 51,2. Diagram pro stanovení rot \mathbf{E} a rot \mathbf{H} v přímém válcovém vodiči.

Rovnice (51,8) je analogická s rovnicií (43,4) pro válcovou vsázkou. Rozdíl je pouze v tom, že dřívější rovnice měla proměnnou \mathbf{H} , zde je proměnná \mathbf{E} .

Zavedme opět hloubku vniku a :

$$a = \sqrt{\frac{2}{\omega \gamma \mu_0 \mu}} \quad [\text{cm}]. \quad (51,9)$$

Místo poloměru r je výhodné uvažovat argument x :

$$x = \frac{r}{a} \sqrt{2}. \quad (51,10)$$

Dělme rovnici (51,8) součinitelem $(-j\omega \gamma \mu_0 \mu) = \left(\sqrt{-j} \frac{\sqrt{2}}{a}\right)^2$ při \mathbf{E} .

Rovnice (51,8) má nyní tvar:

$$\frac{d^2 \mathbf{E}}{d(x \sqrt{-j})^2} + \frac{1}{(x \sqrt{-j})} \frac{d \mathbf{E}}{d(x \sqrt{-j})} + \mathbf{E} = 0. \quad (51,11)$$

Dostali jsme diferenciální rovnici 2. řádu (rovnici Besselovu) pro komplexní argument $(x \sqrt{-j})$. Jejím řešením je lineární kombinace dvou cylindrických funkcí téhož argumentu:

$$\mathbf{E} = C_1 J_0(x \sqrt{-j}) + C_2 N_0(x \sqrt{-j}) \quad [\text{V/cm}]. \quad (51,12)$$

Intenzitu \mathbf{H} dostaneme z (51,7):

$$\mathbf{H} = \frac{1}{j\omega \mu_0 \mu} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r} = \frac{1}{j\omega \mu_0 \mu} \left[C_1 \frac{d[J_0(x \sqrt{-j})]}{dr} + C_2 \frac{d[N_0(x \sqrt{-j})]}{dr} \right]. \quad (51,13)$$

V příloze 7,32 jsou odvozeny derivace Besselových funkcí nultého řádu (73,17), (73,18):

$$\frac{d[J_0(x \sqrt{-j})]}{d(x \sqrt{-j})} = \frac{d[J_0(x \sqrt{-j})]}{\sqrt{-j} \frac{\sqrt{2}}{a} dr} = -J_1(x \sqrt{-j}), \quad (51,14)$$

$$\frac{d[J_0(x \sqrt{-j})]}{dr} = -\sqrt{-j} \frac{\sqrt{2}}{a} J_1(x \sqrt{-j}), \quad (51,15)$$

$$\frac{d[N_0(x \sqrt{-j})]}{dr} = -\sqrt{-j} \frac{\sqrt{2}}{a} N_1(x \sqrt{-j}). \quad (51,16)$$

Dosadme (51,15) a (51,16) do (51,13):

$$\mathbf{H} = \sqrt{j} \frac{\gamma a}{\sqrt{2}} [C_1 J_1(x \sqrt{-j}) + C_2 N_1(x \sqrt{-j})] \quad [\text{A/cm}]. \quad (51,17)$$

Výrazy (51,12) a (51,17) určují intenzitu elektrického a magnetického pole na poloměru r . Integrační konstanty C_1 a C_2 odvodíme z mezních podmínek: Magnetické silokřivky mají tvar koncentrických kružnic. Z úvahy (obr. 51,2) vyplývá, že pro $r = 0$, bude $H_0 = 0$.

Dosadme do (51,17):

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 = 0 = \sqrt{j} \frac{\gamma a}{\sqrt{2}} [C_1 J_1(0) + C_2 N_1(0)]. \quad (51,18)$$

Z tabulek odečteme $J_1(0) = 0$, $N_1(0) \neq 0$, tedy $C_2 = 0$.

Intenzitu elektrického pole \mathbf{E}_1 na poloměru r_1 dostaneme z (51,12):

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 = C_1 J_0(x_1 \sqrt{-j}) \quad [\text{V/cm}], \text{ z toho}$$

$$C_1 = \frac{\mathbf{E}_1}{J_0(x_1) \sqrt{-j}}. \quad (51,19)$$

Dosadíme odvozené konstanty C_1 a C_2 do (51,12) a (51,17):

$$\mathbf{E} = C_1 J_0(x) \sqrt{-j} = \mathbf{E}_1 \frac{J_0(x) \sqrt{-j}}{J_0(x_1) \sqrt{-j}} \quad [\text{V/cm}] \quad (51,20)$$

$$\mathbf{H} = \sqrt{j} \frac{\gamma a}{\sqrt{2}} \mathbf{E}_1 \frac{J_1(x) \sqrt{-j}}{J_0(x_1) \sqrt{-j}} \quad [\text{A/cm}, \text{V/cm}] \quad (51,21)$$

Zavedeme místo intenzity \mathbf{E} hustotu proudu $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$:

$$\mathbf{J} = J_1 \frac{J_0(x) \sqrt{-j}}{J_0(x_1) \sqrt{-j}} \quad [\text{A/cm}^2], \quad (51,22)$$

$$\mathbf{H} = \sqrt{j} \frac{a}{\sqrt{2}} J_1 \frac{J_1(x) \sqrt{-j}}{J_0(x_1) \sqrt{-j}} \quad [\text{A/cm}, \text{A/cm}^2]. \quad (51,23)$$

Tyto výrazy jsou analogické s výrazy pro \mathbf{H} a \mathbf{J} u válcové vsázky o poloměru r , vložené do homogenního magnetického pole \mathbf{H}_1 , kapitola 4,31, rovn. (43,19), (43,20):

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \frac{J_0(x) \sqrt{-j}}{J_0(x_1) \sqrt{-j}} \quad [\text{A/cm}],$$

$$\mathbf{J} = \sqrt{-j} \frac{\sqrt{2}}{a} \mathbf{H}_1 \frac{J_1(x) \sqrt{-j}}{J_0(x_1) \sqrt{-j}} \quad [\text{A/cm}^2, \text{A/cm}].$$

(Intenzita \mathbf{H}_2 na povrchu vsázky se rovná \mathbf{H}_1 .)

Výraz (51,22), který určuje hustotu \mathbf{J} u přímého vodiče, je analogický s výrazem (43,19), který určuje intenzitu \mathbf{H} u válcové vsázky.

Výraz (51,23), který určuje magnetickou intenzitu \mathbf{H} u přímého vodiče, je analogický s výrazem (43,20), který určuje hustotu proudu u válcové vsázky.

Odvození absolutních hodnot J a H u přímého vodiče

$$J = J_1 \frac{\operatorname{ber} x - j \operatorname{bei} x}{\operatorname{ber} x_1 - j \operatorname{bei} x_1},$$

z toho

$$J = J_1 \sqrt{\frac{\operatorname{ber}^2 x + \operatorname{bei}^2 x}{\operatorname{ber}^2 x_1 + \operatorname{bei}^2 x_1}} \quad [\text{A/cm}], \quad (51,24)$$

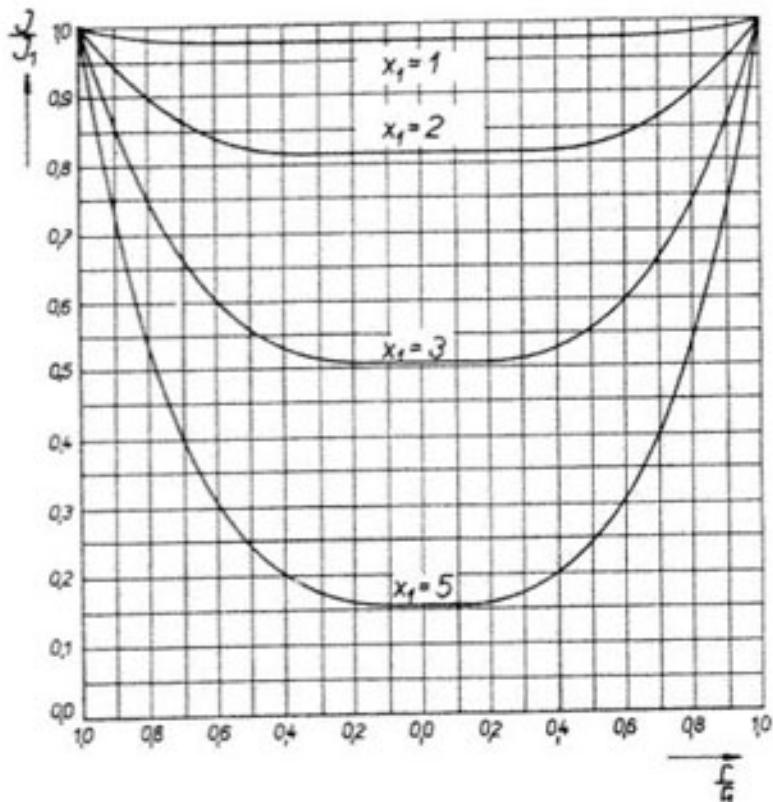
$$H = \frac{a}{\sqrt{2}} J_1 \sqrt{\frac{\operatorname{ber}^2 x + \operatorname{bei}^2 x}{\operatorname{ber}^2 x_1 + \operatorname{bei}^2 x_1}} \quad [\text{A/cm}], \quad (51,25)$$

Vyjádříme z (51,25) intenzitu magnetického pole H_1 na povrchu ($r = r_1$):

$$H_1 = \frac{a}{\sqrt{2}} J_1 \sqrt{\frac{\operatorname{ber}^2 x_1 + \operatorname{bei}^2 x_1}{\operatorname{ber}^2 x_1 + \operatorname{bei}^2 x_1}} \quad [\text{A/cm}]. \quad (51,26)$$

Určíme z (51,24) poměr

$$\frac{J}{J_1} = \sqrt{\frac{\operatorname{ber}^2 x + \operatorname{bei}^2 x}{\operatorname{ber}^2 x_1 + \operatorname{bei}^2 x_1}}. \quad (51,27)$$



Obr. 51,3. Průběh hustoty proudu v řezu válcového vodiče, v závislosti na argumentu x_1 .

Určíme z (51,26) hustotu J_1 , dosadíme do (51,25) a dostaneme poměr

$$\frac{H}{H_1} = \sqrt{\frac{\operatorname{ber}^2 x + \operatorname{bei}^2 x}{\operatorname{ber}^2 x_1 + \operatorname{bei}^2 x_1}}. \quad (51,28)$$

Grafické znázornění poměru $\frac{J}{J_1}$ a $\frac{H}{H_1}$ (obr. 51,3 a 51,4) u přímého vodiče je stejně jako znázornění poměru $\frac{H}{H_1}$ a $\frac{J}{J_1}$ u válcové vsázky.

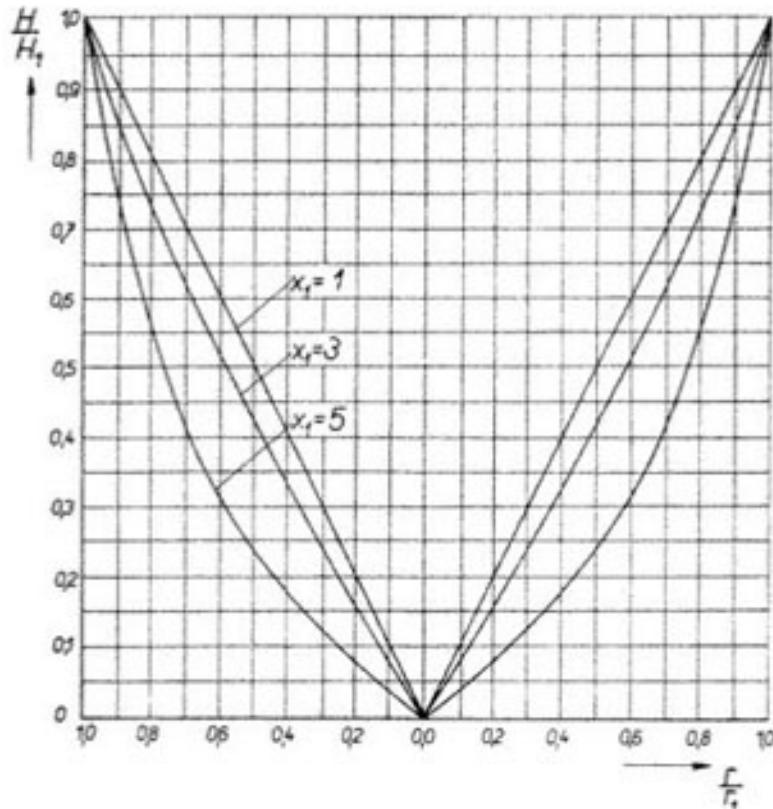
Intenzitu magnetického pole H_1 na povrchu můžeme také vyjádřit pomocí protékajícího proudu I_1 (maximální hodnota).

$$I_1 = \oint_s (\mathbf{H} d\mathbf{s}) = 2\pi r_1 \mathbf{H}_1 \quad [\text{A}, \text{A/cm}],$$

$$\mathbf{H}_1 = \frac{\mathbf{I}_1}{2\pi r_1} \quad [\text{A/cm}, \text{cm}, \text{A}]. \quad (51,29)$$

Dosadíme-li za \mathbf{H}_1 z (51,23), bude:

$$I_1 = 2\pi r_1 \sqrt{j} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} J_1 \frac{J_0(x_1 \sqrt{-j})}{J_1(x_1 \sqrt{-j})},$$



Obr. 51,4. Průběh intenzity magnetického pole v řezu válcového vodiče, v závislosti na x_1 .

$$\mathbf{J}_1 = \gamma \mathbf{E}_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{j} \cdot 2\pi r_1 a} I_1 \frac{J_0(x_1 \sqrt{-j})}{J_1(x_1 \sqrt{-j})} \quad [\text{A/cm}^2, \text{A}]. \quad (51,30)$$

Dosadíme \mathbf{J}_1 z (51,30) do výrazů (51,22) a (51,23):

$$\mathbf{J} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{j} \cdot 2\pi r_1 a} I_1 \frac{J_0(x_1 \sqrt{-j})}{J_1(x_1 \sqrt{-j})} \quad [\text{A/cm}^2], \quad (51,31)$$

$$\mathbf{H} = \sqrt{j} \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{j} \cdot 2\pi r_1 a} I_1 \frac{J_0(x_1 \sqrt{-j})}{J_1(x_1 \sqrt{-j})} \frac{J_1(x \sqrt{-j})}{J_0(x \sqrt{-j})} =$$

$$= \frac{1}{2\pi r_1} I_1 \frac{J_1(x \sqrt{-j})}{J_1(x_1 \sqrt{-j})} \quad [\text{A/cm}, \text{A}]. \quad (51,32)$$

Dosadíme-li z (51,29), dostanou výrazy pro \mathbf{J} a \mathbf{H} tvar

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\sqrt{j}} \frac{I_1}{2\pi r_1} \frac{\sqrt{2}}{a} \frac{J_0(x_1 \sqrt{-j})}{J_1(x_1 \sqrt{-j})} = \sqrt{-j} \frac{\sqrt{2}}{a} \mathbf{H}_1 \frac{J_0(x_1 \sqrt{-j})}{J_1(x_1 \sqrt{-j})} \quad [\text{A/cm}^2, \text{A/cm}] \quad (51,33)$$

$$\mathbf{H} = \frac{I_1}{2\pi r_1} \frac{J_1(x \sqrt{-j})}{J_1(x_1 \sqrt{-j})} = \mathbf{H}_1 \frac{J_1(x \sqrt{-j})}{J_1(x_1 \sqrt{-j})} \quad [\text{A/cm}]. \quad (51,34)$$

Porovnáme-li (51,33), (51,34) s výrazy (43,20), (43,19) pro válcovou vsázku, vidíme úplnou obdobu pouze s tím rozdílem, že Besselovy funkce $J_0(x \sqrt{-j})$ nultého řádu jsou nahrazeny funkciemi prvního řádu a naopak.

5.12. Impedance válcového vodiče

Impedanci \mathbf{Z}_{11} přímého vodiče rozumíme poměr intenzity \mathbf{E}_1 na povrchu a proudu I_1 . Za \mathbf{E}_1 dosadíme z (51,30):

$$\mathbf{Z}_{11} = \frac{\mathbf{E}_1}{I_1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{j} \cdot 2\pi r_1} \frac{1}{\gamma a} \frac{J_0(x_1 \sqrt{-j})}{J_1(x_1 \sqrt{-j})} \quad [\Omega/\text{cm}]. \quad (51,34a)$$

V kapitole 4,34, rovn. (43,55) jsme odvodili

$$\frac{J_1(x \sqrt{-j})}{J_0(x \sqrt{-j})} = -\sqrt{j} [P(x) + jQ(x)].$$

Dosadíme-li do (51,34a), bude

$$\mathbf{Z}_{11} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{j} \cdot 2\pi r_1} \frac{1}{\gamma a} \frac{1}{-\sqrt{j} [P(x_1) + jQ(x_1)]} = \varrho \frac{1}{\sqrt{2} \pi r_1 a} \frac{Q(x_1) + jP(x_1)}{P^2(x_1) + Q^2(x_1)} \quad [\Omega/\text{cm}]. \quad (51,35)$$

Impedance vodiče má část reálnou a imaginární. První značí činný odpor 1 cm vodiče, označme ji R_{11} , druhá část je jalový odpor ωL_{11} .

$$R_{11} = \varrho \frac{1}{\sqrt{2} \pi r_1 a} \frac{Q(x_1)}{P^2(x_1) + Q^2(x_1)} \quad [\Omega/\text{cm}], \quad (51,36)$$

$$\omega L_{11} = \varrho \frac{1}{\sqrt{2} \pi r_1 a} \frac{P(x_1)}{P^2(x_1) + Q^2(x_1)} \quad [\Omega/\text{cm}]. \quad (51,37)$$

Činný odpor vodiče (poloměru r_1 , o délce 1 cm), pro stejnosměrný proud, označme R_{s1} :

$$R_{s1} = \varrho \frac{l}{q} = \varrho \frac{1}{\pi r_1^2} \quad [\Omega/\text{cm}]. \quad (51,38)$$

Poměr $\frac{R_{11}}{R_{s1}}$ určuje, kolikrát vzroste při kmitočtu f činný odpor vodiče R_{11} ve srovnání s odporem R_{s1} pro stejnosměrný proud:

$$\frac{R_{11}}{R_{s1}} = \varrho \frac{1}{\sqrt{2} \pi r_1 a} \frac{Q(x_1)}{[P^2(x_1) + Q^2(x_1)]} \frac{\pi r_1^2}{\varrho} = \frac{1}{2} x_1 \frac{Q(x_1)}{P^2(x_1) + Q^2(x_1)} = \frac{1}{2} x_1 Q'(x_1). \quad (51,39)$$

Pro jednoduchost jsme zavedli novou funkci $Q'(x_1)$:

$$Q'(x_1) = \frac{Q(x_1)}{P^2(x_1) + Q^2(x_1)}. \quad (51,40)$$

Podle (43,55) jsou funkce $P(x)$ a $Q(x)$ definovány řadami

$$Q(x) = \frac{\operatorname{ber}' x \cdot \operatorname{bei} x - \operatorname{bei}' x \cdot \operatorname{ber} x}{\operatorname{ber}^2 x + \operatorname{bei}^2 x},$$

$$P(x) = \frac{\operatorname{ber} x \cdot \operatorname{ber}' x + \operatorname{bei} x \cdot \operatorname{bei}' x}{\operatorname{ber}^2 x + \operatorname{bei}^2 x}.$$

Dosadíme-li do (51,40), dostaneme $Q'(x)$ a obdobně $P'(x)$:

$$Q'(x) = \frac{\operatorname{ber}' x \cdot \operatorname{bei} x - \operatorname{ber} x \cdot \operatorname{bei}' x}{\operatorname{ber}^2 x + \operatorname{bei}^2 x}, \quad (51,41)$$

$$P'(x) = \frac{\operatorname{ber} x \cdot \operatorname{ber}' x + \operatorname{bei} x \cdot \operatorname{bei}' x}{\operatorname{ber}^2 x + \operatorname{bei}^2 x}. \quad (51,42)$$

Tabulka 51,1

x	$P(x)$	$Q(x)$	$P^2(x) + Q^2(x)$	$Q'(x)$
0,2	0,0005	0,1000	$1,0 \cdot 10^{-2}$	10,0
0,5	0,0078	0,2497	$6,25 \cdot 10^{-2}$	4,0
1,0	0,0608	0,4899	$24,37 \cdot 10^{-2}$	2,01
2,0	0,3449	0,7738	$71,7 \cdot 10^{-2}$	1,08
3,0	0,5400	0,7486	$83,3 \cdot 10^{-2}$	0,90
4,0	0,5843	0,7143	$85,1 \cdot 10^{-2}$	0,84
5,0	0,6040	0,7102	$86,8 \cdot 10^{-2}$	0,818
6,0	0,6211	0,7101	$88,8 \cdot 10^{-2}$	0,80
8,0	0,6433	0,7087	$91,6 \cdot 10^{-2}$	0,774
10,0	0,6563	0,7081	$93,2 \cdot 10^{-2}$	0,76

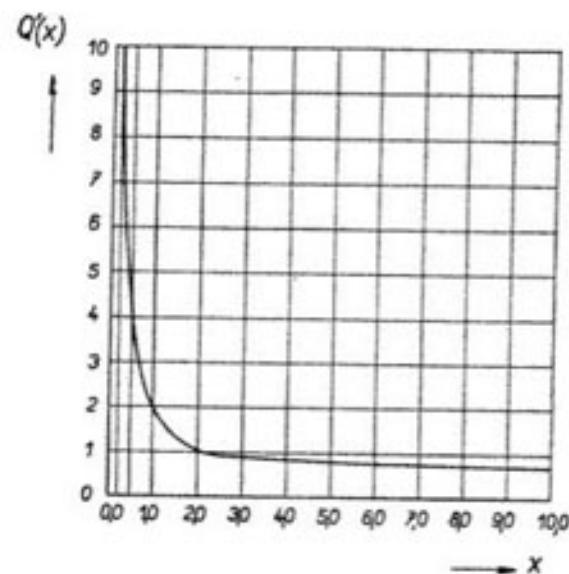
Porovnáme-li výrazy $Q'(x)$, $Q(x)$ a $P'(x)$, $P(x)$, vidíme, že mají stejný čitatele. Ve jmenovateli funkci $P(x)$ a $Q(x)$ jsou řady $\operatorname{ber} x$, $\operatorname{bei} x$, u funkcí $P'(x)$, $Q'(x)$ jsou řady $\operatorname{ber}' x$, $\operatorname{bei}' x$.

Vypočetli jsme funkci $Q'(x)$ pro argument v rozsahu $0,2 < x < 10$. Výsledky jsou v tabulce 51,1 a v diagramu 51,5.

Je-li $x_1 > 4$, platí přibližně

$$P(x_1) \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2x_1}, \quad Q(x_1) \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

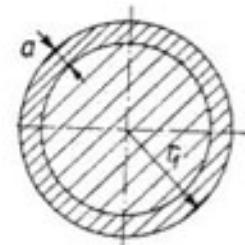
Z toho dostaneme $Q'(x_1)$ pro $x_1 > 4$:



Obr. 51,5. Diagram pro stanovení činného odporu válcového vodiče.

$$P^2(x_1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2} x_1} + \left(\frac{1}{2x_1}\right)^2.$$

Třetí člen je malý druhého řádu, můžeme jej zanedbat.



Obr. 51,6. Pro velký argument x_1 se činný odpor plného vodiče rovná odporu povrchové vrstvy o tloušťce rovné hloubce vniku.

$$Q'(x_1) \doteq \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2} x_1} + \frac{1}{2}\right)} \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2} x_1}\right) \doteq \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2x_1}\right). \quad (51,43)$$

Pro velké hodnoty argumentu x_1 můžeme zanedbat v (51,43) druhý člen a výraz (51,36) pro odpor $R_{11\infty}$ bude:

$$R_{11\infty} = \varrho \frac{1}{\sqrt{2} \pi r_1 a} Q'(x_1) = \varrho \frac{1}{2 \pi r_1 a} [\Omega/\text{cm}]. \quad (51,44)$$

Při velkých hodnotách argumentu x_1 (velký poloměr r_1 , vysoký kmitočet a malá hloubka vniku a) se činný odpor $R_{11\infty}$ vodiče rovná odporu povrchové vrstvy o tloušťce, rovné hloubce vniku a , pro stejnosměrný proud. Graficky vyznačeno na obr. 51,6.

Jalový odpor ωL_{11} je dán výrazem (51,37). Pro argument $x_1 > 4$ je $P'(x_1)$:

$$P'(x_1) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2x_1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}x_1}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (51.45)$$

Dosadíme do (51.37):

$$\omega L_{11\infty} = \varrho \frac{1}{2\pi r_1 a} \quad [\Omega/\text{cm}]. \quad (51.46)$$

5.13. Množství tepla (ztráty) ve vodiči

Množství tepla P_{11} , které vznikne ve vodiči při průchodu elektrického proudu o intenzitě I_1 (maximální hodnota), nejsnáze odvodíme z Poyntingova zářivého vektoru \mathbf{S}_1 . Tento vektor značí směr šíření elektromagnetické energie. U bez-ztrátového vodiče je směr záření rovnoběžný s osou vodiče.

Má-li vodič konečnou vodivost γ , potom intenzita elektrického pole \mathbf{E}_1 na povrchu není již přesně kolmá k povrchu vodiče, je mírně skloněna ve směru proudu. V důsledku toho má zářivý vektor vedle hlavní složky ve směru vodiče i malou složku, vstupující kolmo povrchem do vodiče. Složka elmg. vlnění, vstupující do vodiče, je totožná s Joulovými ztrátami procházejícího proudu.

Intenzitu elektrického a magnetického pole na povrchu jsme označili \mathbf{E}_1 a \mathbf{H}_1 . Zářivý vektor \mathbf{S}_1 , značící množství elmg. energie, které vstoupí každým cm^2 povrchu do vodiče, má hodnotu:

$$\mathbf{S}_1 = [\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1] \quad [\text{VA}/\text{cm}^2, \text{V}/\text{cm}, \text{A}/\text{cm}]. \quad (51.47)$$

Dosadíme z (51.30) a (51.29):

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1 &= \varrho \frac{1}{\sqrt{j}} \frac{1}{\sqrt{2} \pi r_1 a} I_1 \frac{J_0(x_1 \sqrt{-j})}{J_1(x_1 \sqrt{-j})} \frac{I_1}{2\pi r_1} = \\ &= \varrho \frac{1}{\sqrt{j}} \frac{I_1^2}{\sqrt{2} \pi r_1 a} \frac{1}{2\pi r_1} - \sqrt{j} [P(x_1) + jQ(x_1)] = \\ &= \varrho \frac{1}{\sqrt{2} \pi r_1 a} \frac{I_1^2}{2\pi r_1} [Q'(x_1) + jP'(x_1)] = (R_{11} + j\omega L_{11}) \frac{I_1^2}{2\pi r_1} = \\ &= \text{Re}(\mathbf{S}_1) + j \text{Im}(\mathbf{S}_1) \quad [\text{VA}/\text{cm}^2, \text{cm}, \text{A}]. \quad (51.48) \end{aligned}$$

Reálná část výrazu (51.48) značí činnou energii, která se přemění v teplo. Části o délce 1 cm vstupuje do vodiče tok elmg. energie:

$$2\pi r_1 \text{Re}(\mathbf{S}_1) = R_{11} I_1^2 \quad [\text{W}/\text{cm}, \text{A}]. \quad (51.49)$$

Množství tepla P_{11} ve vodiči dostaneme, uvažujeme-li efektivní hodnotu proudu $I_{1\text{ef}} = \frac{I_1}{\sqrt{2}}$:

$$P_{11} = R_{11} I_{1\text{ef}}^2 = \frac{1}{2} R_{11} I_1^2 = \varrho \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 2\pi r_1 a} Q'(x_1) I_1^2 \quad [\text{W}/\text{cm}, \text{A}]. \quad (51.50)$$

Pro velké hodnoty argumentu x_1 dosadíme za $Q'(x_1)$ z (51.43):

$$P_{11} = \varrho \frac{1}{2\pi r_1 a} I_{1\text{ef}}^2 \quad [\text{W}/\text{cm}, \text{A}]. \quad (51.51)$$

V tom případě se tepelné ztráty ve válcovém vodiči rovnají ztrátám, jaké by vznikly při průchodu stejnosměrného proudu $I_{1\text{ef}}$ povrchovou vrstvou o tloušťce rovné hloubce vniku.

5.2. Přímý dutý válcový vodič

5.2.1. Elektrická a magnetická intenzita ve vodiči

Schematicky je válcový dutý vodič vyznačen na obr. 52.1. Maxwellovy rovnice vedou k týmž základním rovnicím, jako byly výrazy (51.12) a (51.17) v předchozí kapitole:

$$\mathbf{H} = \sqrt{j} \frac{a\gamma}{\sqrt{2}} [C_1 J_1(x \sqrt{-j}) + C_2 N_1(x \sqrt{-j})] \quad [\text{A}/\text{cm}], \quad (52.1)$$

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} = \gamma [C_1 J_0(x \sqrt{-j}) + C_2 N_0(x \sqrt{-j})] \quad [\text{A}/\text{cm}^2, \text{V}/\text{cm}]. \quad (52.2)$$

Integrační konstanty C_1 a C_2 opět určíme z mezních podmínek. Na vnějším poloměru r_1 je intenzita \mathbf{H}_1 :

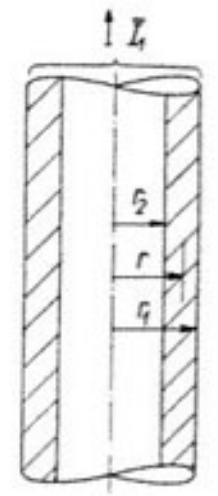
$$\mathbf{H}_1 = \frac{I_1}{2\pi r_1} \quad [\text{A}/\text{cm}, \text{A}, \text{cm}]. \quad (52.3)$$

Na vnitřním poloměru r_2 se intenzita \mathbf{H}_2 rovná nule, protože magnetická silokřivka na poloměru r_2 obemyká nulový proud.

$$\mathbf{H}_2 = 0. \quad (52.4)$$

Dosadíme-li $\mathbf{H}_2 = 0$ do rovnice (52.1), dostaneme C_1 :

$$C_1 = - \frac{N_1(x_2 \sqrt{-j})}{J_1(x_2 \sqrt{-j})} C_2. \quad (52.5)$$



Obr. 52.1. Rez válcovým dutým vodičem.

$$\mathbf{H}_1 = \frac{\mathbf{I}_1}{2\pi r_1} = \sqrt{j} \frac{a\gamma}{\sqrt{2}} \left[-C_2 \frac{N_1(x_2) \sqrt{-j}}{J_1(x_2) \sqrt{-j}} J_1(x_1) \sqrt{-j} + C_2 N_1(x_1) \sqrt{-j} \right] [A/cm]. \quad (52,6)$$

V dalším budeme používat opět zkráceného způsobu psaní cylindrických funkcí s komplexním argumentem, např. místo $J_0(x_1) \sqrt{-j}$ budeme psát zkráceně $J_0(x'_1)$, atd.

Z rovnic (52,6) a (52,5) určíme C_1 a C_2 :

$$C_1 = -\mathbf{H}_1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{j} a\gamma} \frac{N_1(x'_2)}{J_1(x'_2) N_1(x'_1) - N_1(x'_2) J_1(x'_1)}, \quad (52,7)$$

$$C_2 = \mathbf{H}_1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{j} a\gamma} \frac{J_1(x'_2)}{J_1(x'_2) N_1(x'_1) - N_1(x'_2) J_1(x'_1)}. \quad (52,8)$$

Konstanty C_1 a C_2 dosadíme do (52,1) a (52,2) a dostaneme hledané výrazy pro \mathbf{H} a \mathbf{J} ve stěně dutého vodiče:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \frac{J_1(x'_2) N_1(x') - N_1(x'_2) J_1(x')}{J_1(x'_2) N_1(x'_1) - N_1(x'_2) J_1(x'_1)} [A/cm], \quad (52,9)$$

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} = \sqrt{-j} \frac{\sqrt{2}}{a} \mathbf{H}_1 \frac{J_1(x'_2) N_0(x') - N_1(x'_2) J_0(x')}{J_1(x'_2) N_1(x'_1) - N_1(x'_2) J_1(x'_1)} [A/cm^2, V/cm, A/cm]. \quad (52,10)$$

Zmenšuje-li se vnitřní poloměr r_2 až k nule, potom $J_1(0) = 0$, první člen ve jmenovateli i čitateli odpadne a po vykrácení dostaneme pro \mathbf{H} a \mathbf{J} stejné výrazy, jako byly (51,34) a (51,33) v předchozí kapitole.

5.22. Impedance a ztráty dutého vodiče

Impedance je definována výrazem

$$\mathbf{Z}_{11} = \frac{\mathbf{E}_1}{\mathbf{I}_1} = \sqrt{-j} \frac{\sqrt{2}}{a\gamma} \frac{J_1(x'_2) N_0(x'_1) - N_1(x'_2) J_0(x'_1)}{J_1(x'_2) N_1(x'_1) - N_1(x'_2) J_1(x'_1)} [\Omega/cm]. \quad (52,11)$$

Označme zlomek s Besselovými funkcemi vektorem \mathbf{P} :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \frac{J_1(x'_2) N_0(x'_1) - N_1(x'_2) J_0(x'_1)}{J_1(x'_2) N_1(x'_1) - N_1(x'_2) J_1(x'_1)} = \\ &= [-\sqrt{j} (\text{ber}' x_2 - j \text{bei}' x_2) (\text{ner}' x_1 - j \text{nei}' x_1) + \sqrt{j} (\text{ner}' x_2 - j \text{nei}' x_2) (\text{ber}' x_1 - j \text{bei}' x_1)] \times [-\sqrt{j} (\text{ber}' x_2 - j \text{bei}' x_2) (-\sqrt{j}) (\text{ner}' x_1 - j \text{nei}' x_1) + \sqrt{j} (\text{ner}' x_2 - j \text{nei}' x_2) (-\sqrt{j}) (\text{ber}' x_1 - j \text{bei}' x_1)]^{-1}. \end{aligned} \quad (52,12)$$

Hodnoty funkcí ber' x , bei' x atd. vyhledáme z tabulek, vynásobíme a dostaneme reálnou a imaginární část:

$$\mathbf{P} = \text{Re}(\mathbf{P}) + j \text{Im}(\mathbf{P}). \quad (52,13)$$

Impedance \mathbf{Z}_{11} potom bude

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{11} &= \frac{1-j}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{a\gamma} \frac{1}{2\pi r_1} [\text{Re}(\mathbf{P}) + j \text{Im}(\mathbf{P})] = \\ &= \frac{1}{2\pi r_1 a\gamma} \{[\text{Re}(\mathbf{P}) + \text{Im}(\mathbf{P})] + j [\text{Im}(\mathbf{P}) - \text{Re}(\mathbf{P})]\} [\Omega/cm]. \end{aligned} \quad (52,14)$$

Reálná část výrazu (52,14) je činný odpor R_{11} , imaginární část značí reaktanci ωL_{11} stěny dutého vodiče:

$$R_{11} = \frac{1}{2\pi r_1 a\gamma} [\text{Re}(\mathbf{P}) + \text{Im}(\mathbf{P})] [\Omega/cm], \quad (52,15)$$

$$\omega L_{11} = \frac{1}{2\pi r_1 a\gamma} [\text{Im}(\mathbf{P}) - \text{Re}(\mathbf{P})] [\Omega/cm]. \quad (52,16)$$

Množství tepla při průchodu proudu I_1 vodičem dostaneme opět z Poyntingova zářivého vektoru

$$\mathbf{S}_1 = [\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1] [\text{VA}/\text{cm}^2]. \quad (52,17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1 &= \sqrt{-j} \frac{\sqrt{2}}{a\gamma} \frac{1}{2\pi r_1} \frac{J_1(x'_2) N_0(x'_1) - N_1(x'_2) J_0(x'_1)}{J_1(x'_2) N_1(x'_1) - N_1(x'_2) J_1(x'_1)} \frac{I_1^2}{2\pi r_1} = \\ &= \mathbf{Z}_{11} \frac{I_1^2}{2\pi r_1} = \frac{1}{2\pi r_1} (R_{11} + j\omega L_{11}) I_1^2 [\text{VA}/\text{cm}^2, \text{A}, \text{cm}]. \end{aligned} \quad (52,18)$$

Reálná část vektoru \mathbf{S}_1 , která se přemění v teplo $(I_{1\text{ef}} = \frac{I_1}{\sqrt{2}})$,

$$\text{Re}(\mathbf{S}_1)_{\text{ef}} = \frac{1}{2\pi r_1} R_{11} I_{1\text{ef}}^2 [\text{W}/\text{cm}^2]. \quad (52,19)$$

Množství tepla v části vodiče o délce 1 cm

$$P_{11} = 2\pi r_1 \text{Re}(\mathbf{S}_1)_{\text{ef}} = R_{11} I_{1\text{ef}}^2 = \frac{1}{2\pi r_1 a\gamma} [\text{Re}(\mathbf{P}) + \text{Im}(\mathbf{P})] I_{1\text{ef}}^2 [\text{W}/\text{cm}, \text{A}]. \quad (52,20)$$

5.23. Elektrická a magnetická intenzita v případě velké hodnoty argumentu x

Do výrazů (52,9) a (52,10) dosadíme za cylindrické funkce zjednodušené funkce exponenciální. Výrazy pro zjednodušené funkce jsou odvozeny v příloze 7,33.

Cítač výrazu (52,9) bude

$$\begin{aligned} & (J_1(x'_2) N_1(x') - N_1(x'_2) J_1(x')) = \\ & = + \frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{4}\right)}}{2\pi\sqrt{x_2x}} [-2e^{-Vj(x-x_2)} + je^{Vj(x+x_2)} + 2e^{Vj(x-x_2)} - je^{Vj(x+x_2)}] = \\ & = \frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{4}\right)}}{\pi\sqrt{x_2x}} [e^{Vj s} - e^{-Vj s}]. \end{aligned} \quad (52,21)$$

(Pro rozdíl argumentů $(x - x_2)$ jsme zavedli znak s .)

Po dosazení za rozdíl exponenciálních funkcí s komplexním argumentem bude čítač podle (72,13):

$$J_1(x'_2) N_1(x') - N_1(x'_2) J_1(x') = \frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{4}\right)}}{\pi\sqrt{x_2x}} \cdot 2 \sinh(s\sqrt{j}). \quad (52,22)$$

Obdobně dostaneme pro jmenovatele výrazů (52,9) a (52,10), $s_1 = x_1(-x_2)$:

$$J_1(x'_1) N_1(x'_1) - N_1(x'_1) J_1(x'_1) = \frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{4}\right)}}{\pi\sqrt{x_2x_1}} \cdot 2 \sinh(s_1\sqrt{j}). \quad (52,23)$$

Označme tloušťku stěny z_1 , $z_1 = r_1 - r_2$. Potom

$$s_1 = (x_1 - x_2) = \frac{\sqrt{2}}{a} (r_1 - r_2) = \frac{\sqrt{2}}{a} z_1, \quad \frac{s_1}{\sqrt{2}} = \frac{z_1}{a}. \quad (52,24)$$

Pro intenzitu \mathbf{H} magnetického pole ve stěně vodiče dostaneme:

$$\mathbf{H} = H_1 \sqrt{\frac{r_1}{r}} \frac{\sinh(s\sqrt{j})}{\sinh(s_1\sqrt{j})} \quad [\text{A/cm}]. \quad (52,25)$$

Cítač výrazu (52,10) pro hustotu J :

$$\begin{aligned} & J_1(x'_2) N_0(x') - N_1(x'_2) J_0(x') = \\ & = +j \frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{4}\right)}}{2\pi\sqrt{x_2x}} [2e^{-Vj(x-x_2)} + je^{Vj(x+x_2)} + 2e^{Vj(x-x_2)} - je^{Vj(x+x_2)}] = \\ & = +j \frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{4}\right)}}{\pi\sqrt{x_2x}} \cdot 2 \cosh(s\sqrt{j}), \end{aligned} \quad (52,26)$$

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} = \frac{1+j}{a} H_1 \sqrt{\frac{r_1}{r}} \frac{\cosh(s\sqrt{j})}{\sinh(s_1\sqrt{j})} \quad [\text{A/cm}^2, \text{V/cm}, \text{A/cm}]. \quad (52,27)$$

Výrazy (52,25) a (52,27) pro \mathbf{H} a \mathbf{E} u trubkového vodiče jsou úplně shodné, jako jsme odvodili v kapitole 4,40 pro \mathbf{H} a \mathbf{E} ve stěně pecní cívky. Můžeme proto bez dalšího odvozování analogicky napsat výrazy pro absolutní hodnoty H a J , stejně jako dříve odvozené (44,17) a (44,19):

$$H = H_1 \sqrt{\frac{r_1}{r}} \sqrt{\frac{\cosh(s\sqrt{j}) - \cos(s\sqrt{j})}{\cosh(s_1\sqrt{j}) - \cos(s_1\sqrt{j})}} \quad [\text{A/cm}]. \quad (52,28)$$

$$J = \frac{\sqrt{2}}{a} H_1 \sqrt{\frac{r_1}{r}} \sqrt{\frac{\cosh(s\sqrt{j}) + \cos(s\sqrt{j})}{\cosh(s_1\sqrt{j}) - \cos(s_1\sqrt{j})}} \quad [\text{A/cm}^2, \text{A/cm}]. \quad (52,29)$$

(Místo argumentu $(s_1\sqrt{j})$ bychom mohli také psát $\frac{2z_1}{a}$).

5.24. Impedance a ztráty v případě velkého argumentu x

$$\mathbf{Z}_{11} = \frac{\mathbf{E}_1}{I_1} = \frac{1+j}{a\gamma} H_1 \sqrt{\frac{r_1}{r_1}} \frac{\cosh(s_1\sqrt{j})}{\sinh(s_1\sqrt{j})} \frac{1}{I_1} = \frac{1+j}{a\gamma} \frac{1}{2\pi r_1} \frac{\cosh(s_1\sqrt{j})}{\sinh(s_1\sqrt{j})} \quad [\Omega/\text{cm}]. \quad (52,30)$$

Chceme-li určit reálnou a imaginární část, rozepíšeme hyperbolické funkce komplexního argumentu:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{11} &= \frac{1+j}{a\gamma} \frac{1}{2\pi r_1} \frac{\cosh \frac{s_1}{\sqrt{2}} \cdot \cos \frac{s_1}{\sqrt{2}} + j \sinh \frac{s_1}{\sqrt{2}} \cdot \sin \frac{s_1}{\sqrt{2}}}{\sinh \frac{s_1}{\sqrt{2}} \cdot \cos \frac{s_1}{\sqrt{2}} + j \cosh \frac{s_1}{\sqrt{2}} \cdot \sin \frac{s_1}{\sqrt{2}}} = \\ &= \frac{1+j}{a\gamma} \frac{1}{2\pi r_1} \frac{A + jB}{C + jD} = \frac{1}{2\pi r_1 a\gamma} \left[\frac{AC + BD + AD - BC}{C^2 + D^2} + \right. \\ &\quad \left. + j \frac{AC + BD + BC - AD}{C^2 + D^2} \right] = R_{11} + j\omega L_{11} \quad [\Omega/\text{cm}]. \end{aligned} \quad (52,31)$$

$$\left. \begin{aligned} AC &= \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{2z_1}{a} \right) \cdot \frac{1}{2} \sinh \frac{2z_1}{a}, \\ AD &= \frac{1}{2} \left(\cosh \frac{2z_1}{a} + 1 \right) \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{2z_1}{a}, \\ BD &= \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2z_1}{a} \right) \cdot \frac{1}{2} \sinh \frac{2z_1}{a}, \\ BC &= \frac{1}{2} \left(\cosh \frac{2z_1}{a} - 1 \right) \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{2z_1}{a}, \\ C^2 + D^2 &= \frac{1}{2} \left(\cosh \frac{2z_1}{a} - \cos \frac{2z_1}{a} \right). \end{aligned} \right\} \quad (52,32)$$

Po dosazení do (52,31) dostaneme činný odpor a reaktanci dutého vodiče:

$$R_{11} = \frac{1}{2\pi r_1 a \gamma} \frac{\left(\sinh \frac{2z_1}{a} + \sin \frac{2z_1}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{2z_1}{a} - \cos \frac{2z_1}{a} \right)} = \frac{1}{2\pi r_1 a \gamma} \varphi \left(\frac{2z_1}{a} \right) \quad [\Omega/\text{cm}], \quad (52,33)$$

$$\omega L_{11} = \frac{1}{2\pi r_1 a \gamma} \frac{\left(\sinh \frac{2z_1}{a} - \sin \frac{2z_1}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{2z_1}{a} - \cos \frac{2z_1}{a} \right)} = \frac{1}{2\pi r_1 a \gamma} \psi \left(\frac{2z_1}{a} \right) \quad [\Omega/\text{cm}]. \quad (52,34)$$

Obdobné výrazy pro R_{11} a ωL_{11} jsme dostali v kapitole 4,41 pro odpor a indukčnost pevné cívky, rovnice (44,45) a (44,46). Zlomky s hyperbolickými a goniometrickými funkciemi jsme označili v kapitole 4,41 jako funkce $\varphi \left(\frac{2z_1}{a} \right)$ a $\psi \left(\frac{2z_1}{a} \right)$. Jejich průběh je v tabulce 35,4 a v diagramu 44,5. Funkce $\varphi \left(\frac{2z_1}{a} \right)$ má minimum pro určitou tloušťku stěny z_1 :

$$z_1 = \frac{\pi}{2} a = 1,57 a \quad [\text{cm}]. \quad (52,35)$$

Rovná-li se tloušťka stěny z_1 1,57násobku hloubky vniku, je odpor R_{11} trubky rovný 91,8 % z odporu $R_{11\infty}$ v případě, že by tloušťka byla teoreticky nekonečně veliká.

Je-li tloušťka stěny z_1 veliká proti hloubce vniku a , blíží se funkce $\varphi \left(\frac{2z_1}{a} \right)$ a $\psi \left(\frac{2z_1}{a} \right)$ své limitní hodnotě = 1. Potom

$$R_{11\infty} = \omega L_{11\infty} = \frac{1}{2\pi r_1 a \gamma} \quad [\Omega/\text{cm}]. \quad (52,36)$$

Množství tepla v části dutého vodiče o délce 1 cm dostaneme z (52,20). Za R_{11} dosadíme z (52,33):

$$P_{11} = R_{11} I_{1\text{ef}}^2 = \frac{1}{2\pi r_1 a \gamma} \cdot \frac{\left(\sinh \frac{2z_1}{a} + \sin \frac{2z_1}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{2z_1}{a} - \cos \frac{2z_1}{a} \right)} \cdot \frac{1}{2} I_1^2 \quad [\text{W}/\text{cm}, \text{A}]. \quad (52,37)$$

5.3. Souosé vodivé válce

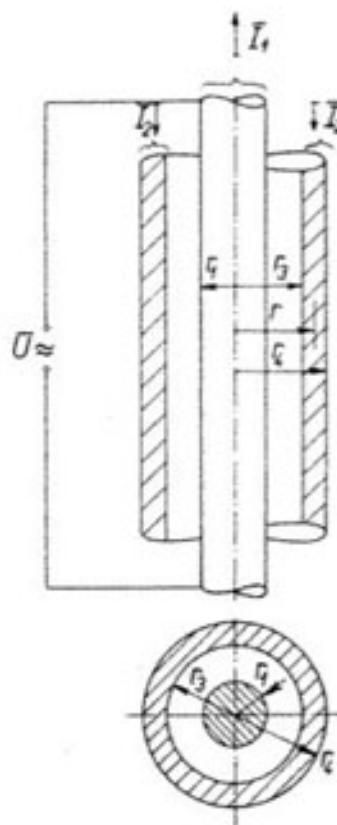
Vzájemné uspořádání obou válců je na obr. 53,1.

Vnitřní vodič může být buď plný, nebo dutý. Má-li takové uspořádání vodičů sloužit k vedení proudu od zdroje ke spotřebiči, jsou oba vodiče z mědi

nebo z hliníku a takové uspořádání se nazývá *souosé* (koaxiální) *vedení*. V obou vodičích je stejný proud, jejich smysl je v každém okamžiku vzájemně opačný, $I_1 = -I_2$:

V některých případech však vedeme proud I_1 ze zdroje pouze vnitřním vodičem. Tento vodič vyzařuje do svého okolí elmg. energii, která dopadá na vnitřní povrch o poloměru r_3 vnější válcové stěny. Uvažujme opět teoreticky, že vodiče na obr. 53,1 mají nekonečnou délku. V dutině mezi oběma vodiči je válcové elektromagnetické pole. Siločáry intenzity magnetické jsou soustředné kružnice v rovinách kolmých k ose vodiče. Směr intenzity elektrickév každému bodě je rovnoběžný s osou vodiče. Tok intenzity elektrického pole, procházející dutinou mezi oběma vodiči, se v případě nekonečné délky vodiče vraci nekonečným prostorem zpět, takže intenzita elektrického pole na poloměru r_4 $E_4 = 0$. Je-li ve vnějším prostoru složka elektrického pole buzeného proudem I_1 ve vnitřním vodiči nulová, má nulovou hodnotu také složka pole magnetického, $H_4 = 0$.

Tuto úvahu jsme odvodili, že vnější vodič působí jako dokonalé stínítko, které zabránil pronikání elmg. vlnění z vnitřního vodiče do okolního prostoru.



Obr. 53,1. Vzájemné uspořádání plného a dutého sonosého válce.

5.31. Elektrická a magnetická intenzita ve vnějším válci

Vyjděme opět ze základních rovnic (51,13) a (51,17) pro toto uspořádání, které jsme odvodili v části 5,11.

$$\mathbf{H} = \sqrt{j} \frac{ay}{\sqrt{2}} [C_1 J_1(x\sqrt{-j}) + C_2 N_1(x\sqrt{-j})] \quad [\text{A}/\text{cm}], \quad (53,1)$$

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} = \gamma [C_1 J_0(x\sqrt{-j}) + C_2 N_0(x\sqrt{-j})] \quad [\text{A}/\text{cm}^2]. \quad (53,2)$$

Pro intenzitu magnetického pole H_3 a H_4 na vnitřním a vnějším poloměru vnějšího válce máme výrazy:

$$H_3 = \frac{I_1}{2\pi r_3} \quad [\text{A}/\text{cm}]. \quad (53,3)$$

Při dopadu elmg. vlnění z vnitřního vodiče na vnější stěnu se v ní indukuje proud I_2 . Intenzita H_4 tedy bude

$$H_4 = 0 = \frac{I_1 + I_2}{2\pi r_4}, \text{ takže } I_2 = -I_1 \quad [A]. \quad (53,4)$$

Proud I_2 , vybuzený na vnější stěně, je též velikosti jako proud I_1 , avšak opačné fáze.

Integrační konstanty C_1 a C_2 v (53,1) a (53,2) dostaneme z mezních podmínek:

$$H_3 = \frac{I_1}{2\pi r_3} = \sqrt{j} \frac{a\gamma}{\sqrt{2}} [C_1 J_1(x_3) \sqrt{-j} + C_2 N_1(x_3) \sqrt{-j}] \quad [A/cm], \quad (53,5)$$

$$H_4 = 0 = \sqrt{j} \frac{a\gamma}{\sqrt{2}} [C_1 J_1(x_4) \sqrt{-j} + C_2 N_1(x_4) \sqrt{-j}] \quad [A/cm]. \quad (53,6)$$

Řešením těchto dvou rovnic dostaneme obě konstanty:

$$C_1 = -\frac{I_1}{2\pi r_3} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{j} a\gamma} \frac{N_1(x'_4)}{J_1(x'_4) N_1(x'_3) - J_1(x'_3) N_1(x'_4)}, \quad (53,7)$$

$$C_2 = \frac{I_1}{2\pi r_3} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{j} a\gamma} \frac{J_1(x'_4)}{J_1(x'_4) N_1(x'_3) - J_1(x'_3) N_1(x'_4)}. \quad (53,8)$$

(Opět pišeme cylindrické funkce s komplexním argumentem ve zkrácené formě:

$J_1(x'_4)$, $N_1(x'_4)$ atd. místo: $J_1(x'_4) \sqrt{-j}$, $N_1(x'_4) \sqrt{-j}$ atd.)

Výrazy (53,1) a (53,2) dostanou tvar

$$H = \frac{I_1}{2\pi r_3} \frac{J_1(x'_4) N_1(x') - N_1(x'_4) J_1(x')}{N_1(x'_3) J_1(x'_4) - N_1(x'_4) J_1(x'_3)} \quad [A/cm], \quad (53,9)$$

$$J = \gamma E = \sqrt{-j} \frac{\sqrt{2}}{a} \frac{I_1}{2\pi r_3} \frac{J_1(x'_4) N_0(x') - N_1(x'_4) J_0(x')}{N_1(x'_3) J_1(x'_4) - N_1(x'_4) J_1(x'_3)} \quad [A/cm^2]. \quad (53,10)$$

Pokusme se pro kontrolu odvodit proud I_2 ve vnějším válci:

$$\begin{aligned} I_2 &= 2\pi \int_{r_3}^{r_4} J r \, dr = 2\pi \frac{a^2}{2} \int_{x_3}^{x_4} J x \, dx = \\ &= \pi a^2 \sqrt{-j} \frac{\sqrt{2}}{a} \frac{I_1}{2\pi r_3} \frac{1}{N_1(x'_3) J_1(x'_4) - N_1(x'_4) J_1(x'_3)} [J_1(x'_4) \int_{x_3}^{x_4} N_0(x') x \, dx - \\ &\quad - N_1(x'_4) \int_{x_3}^{x_4} J_0(x') x \, dx] \quad [A]. \end{aligned} \quad (53,11)$$

Rešení integrálu $\int_{x_3}^{x_4} J_0(x) \sqrt{-j} x \, dx$ je v příloze (73,33). Analogicky platí i pro funkci $N_0(x) \sqrt{-j}$. Po dosazení

$$\begin{aligned} I_2 &= \sqrt{-j} \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{I_1}{r_3} \frac{1}{N_1(x'_3) J_1(x'_4) - N_1(x'_4) J_1(x'_3)} \sqrt{j} \frac{r_3 \sqrt{2}}{a} [-N_1(x'_3) J_1(x'_4) + \\ &\quad + N_1(x'_4) J_1(x'_3)] = (-I_1) \quad [A]. \end{aligned} \quad (53,12)$$

Proud I_2 , vybuzený ve vnějším válci dopadem elmg. vlnění z vnitřního vodiče, je stejně veliký jako I_1 , je však časově opožděn o 180° . Jsou proto oba případy, uvažované v úvodu této kapitoly, fyzikálně totožné. Rozdíl je pouze v tom, že v případě souosého válcového vedení dodáváme ze zdroje do obou vodičů napětí, potřebné na překonání činného a jalového úbytku. Napájíme-li pouze vnitřní vodič ze zdroje (vnější válec má proud indukovaný), dodáváme do vnitřního vodiče napěti na krytí úbytků v obou vodičích.

5.32. Impedance a ztráty ve vnějším válci

Impedanci vnějšího válce dostaneme z definice

$$Z_{21} = \frac{E_3}{I_2} \quad [\Omega/cm, V/cm, A]. \quad (53,13)$$

Intenzitu E_3 na poloměru r_3 určíme z (53,10). Proud $I_2 = -I_1$.

$$Z_{21} = \frac{E_3}{-I_1} = -\sqrt{-j} \frac{\sqrt{2}}{a\gamma} \frac{1}{2\pi r_3} \frac{J_1(x'_4) N_0(x'_3) - N_1(x'_4) J_0(x'_3)}{N_1(x'_3) J_1(x'_4) - N_1(x'_4) J_1(x'_3)} \quad [\Omega/cm]. \quad (53,14)$$

Znaky γ , a ve výrazu (53,14) značí vodivost a hloubku vniku ve vnějším válci. Označme zlomek ve výrazu (53,14) vektorem S :

$$S = \frac{J_1(x'_4) \sqrt{-j} N_0(x'_3) \sqrt{-j} - N_1(x'_4) \sqrt{-j} J_0(x'_3) \sqrt{-j}}{N_1(x'_3) \sqrt{-j} J_1(x'_4) \sqrt{-j} - N_1(x'_4) \sqrt{-j} J_1(x'_3) \sqrt{-j}} = \operatorname{Re}(S) + j \operatorname{Im}(S), \quad (53,15)$$

$$\begin{aligned} Z_{21} &= -\sqrt{-j} \frac{\sqrt{2}}{a\gamma} \frac{1}{2\pi r_3} \{\operatorname{Re}(S) + j \operatorname{Im}(S)\} = \\ &= -\frac{1}{2\pi r_3 a\gamma} \{[\operatorname{Re}(S) + \operatorname{Im}(S)] + j[\operatorname{Im}(S) - \operatorname{Re}(S)]\} \quad [\Omega/cm]. \end{aligned} \quad (53,16)$$

Impedance má reálnou a imaginární část:

$$R_{21} = -\frac{1}{2\pi r_3 a\gamma} [\operatorname{Re}(S) + \operatorname{Im}(S)] \quad [\Omega/cm], \quad (53,17)$$

$$\omega L_{21} = -\frac{1}{2\pi r_3 a \gamma} [\text{Im}(\mathbf{S}) - \text{Re}(\mathbf{S})] \quad [\Omega/\text{cm}]. \quad (53,18)$$

Napájíme-li ze zdroje vnitřní vodič, musíme přivést napětí na krytí všech úbytků, činné i jalové odpory se sčítají. Úbytky na vnitřním vodiči jsme odvodili již dříve v kap. 5,10 a 5,20 (pro vodič plný i dutý). Je však třeba ještě odvodit napětí potřebné k vytvoření magnetického toku v mezeře mezi vnitřním a vnějším válcem.

Z obr. 53,1 odvodíme velikost magnetického toku Φ_m v mezeře:

$$\Phi_m = \mu_0 \mu \int_{r_1}^{r_3} H_m dr \quad [\text{weber}, \text{A/cm}, \text{cm}]. \quad (53,19)$$

Znak μ značí permeabilitu prostředí v mezeře, obvykle vzduch, $\mu = 1$.

Intenzita magnetického pole H_m v mezeře, na poloměru r ($r_1 < r < r_3$) je dána výrazem

$$H_m = \frac{I_1}{2\pi r} \quad [\text{A/cm}], \quad (53,20)$$

$$\Phi_m = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} I_1 \int_{r_1}^{r_3} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} I_1 \ln \frac{r_3}{r_1} \quad [\text{weber}, \text{A}]. \quad (53,21)$$

Na vytvoření tohoto toku je třeba přivádět napětí E_m :

$$E_m = + \frac{d\Phi_m}{dt} = j\omega \mu_0 \mu \frac{1}{2\pi} I_1 \ln \frac{r_3}{r_1} \quad [\text{V/cm}]. \quad (53,22)$$

Impedance mezery:

$$Z_{m1} = \frac{E_m}{I_1} = j\omega \mu_0 \mu \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_3}{r_1} \quad [\Omega/\text{cm}, \text{cm}]. \quad (53,23)$$

Z výrazu (53,23) je vidět, že impedance mezery je čistě jalová:

$$\omega L_{m1} = \omega \mu_0 \mu \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_3}{r_1} = \omega \frac{4\pi \cdot 10^{-9} \mu}{2\pi} \ln \frac{r_3}{r_1} = 2\omega \mu \ln \frac{r_3}{r_1} 10^{-9} \quad [\Omega/\text{cm}, \text{H}, \text{cm}]. \quad (53,24)$$

Ztráty ve vnějším válci

Ztráty určíme ze zářivého vektoru

$$\begin{aligned} S_2 = [\mathbf{E}_3 \mathbf{H}_3] &= \sqrt{-j} \frac{\sqrt{2}}{a\gamma} \frac{1}{2\pi r_3} \frac{J_1(x'_4) N_0(x'_3) - N_1(x'_4) J_0(x'_3)}{N_1(x'_3) J_1(x'_4) - N_1(x'_4) J_1(x'_3)} \frac{I_1^2}{2\pi r_3} = \\ &\frac{1}{2\pi r_3} Z_{21} I_1^2 = \frac{1}{2\pi r_3} (R_{21} + j\omega L_{21}) I_1^2 \quad [\text{VA}/\text{cm}^2]. \quad (53,25) \end{aligned}$$

Množství tepla P_{21} , které vznikne v části vnějšího válce o osové délce 1 cm:

$$P_{21} = R_{21} I_1^2 = \frac{1}{2\pi r_3 a \gamma} [\text{Re}(\mathbf{S}) + \text{Im}(\mathbf{S})] \frac{1}{2} I_1^2 \quad [\text{W}/\text{cm}, \text{A}, \text{cm}]. \quad (53,26)$$

Reálná a imaginární část vektoru \mathbf{S} je ve výrazu (53,15).

Příklad 53,1

Uvažujme měděnou tyč připojenou na zdroj proudu a souosou ocelovou trubku indukčně vyhřívanou podle obr. 53,2.

Určeme impedanci soustavy, potřebné napětí a účinnost přenosu energie z tyče do trubky, ohřáté na teplotu 450 °C. Průměr měděné tyče $2r_1 = 2,0$ cm. Vnitřní průměr trubky $2r_3 = 2,50$ cm, vnější průměr $2r_4 = 5,70$ cm. Tyčí protéká proud o efektivní hodnotě $I_{1,\text{ef}} = 1300$ A, $I_1 = \sqrt{2} \cdot I_{1,\text{ef}} = 1840$ A. Kmitočet přiváděného proudu $f = 50$ Hz.

Odpor mědi při 20 °C, $\rho_1 = 1,8 \cdot 10^{-8}$ ohm.cm. Můžeme předpokládat, že v ustáleném stavu bude také teplota tyče 450 °C. Při této teplotě je $\rho_1 = 4,90 \cdot 10^{-8}$ ohm.cm, vodivost $\gamma_1 = 2,04 \cdot 10^5$ S.cm⁻¹. Odpor oceli při 450 °C, $\rho_2 = 65 \cdot 10^{-8}$ ohm.cm, vodivost $\gamma_2 = 1,54 \cdot 10^4$ S.cm⁻¹. Permeabilita μ oceli závisí poněkud na teplotě, avšak podstatně se mění s intenzitou magnetického pole H . Protéká-li tyčí proud $I_1 = 1840$ A, je intenzita magnetického pole H_3 na poloměru r_3 :

$$H_3 = \frac{1840}{2\pi r_3} = 235 \text{ A/cm}.$$

Pro toto sycení je střední permeabilita $\mu_{\text{eff}} = 60$.

Vypočteme hloubky vniku v mědi a oceli, $a_1 = 1,58$ cm, $a_2 = 0,74$ cm.

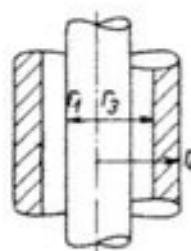
Pro činný a jalový odpor přímého vodiče jsme odvodili výrazy (51,36) a (51,37):

$$R_{11} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi r_1 a_1 \gamma_1} \frac{Q(x_1)}{P^2(x_1) + Q^2(x_1)} \quad [\text{ohm}/\text{cm}],$$

$$r_1 = 1,0 \text{ cm}, \quad x_1 = \frac{r_1 \sqrt{2}}{a_1} = 0,89.$$

Z tabulky 43,4 odečteme:

$$P(x_1) = 0,0447, Q(x_1) = 0,4440, P^2(x_1) + Q^2(x_1) = 0,199,$$



Obr. 53,2. Měděná tyč umístěná souose v dutině ocelové trubky.

$$R_{11} = \frac{1,41}{6,28 \cdot 1,0 \cdot 1,58 \cdot 2,04 \cdot 10^6} \cdot \frac{0,444}{0,199} = 1,56 \cdot 10^{-6} \Omega/\text{cm},$$

$$\omega L_{11} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi r_1 a_1 \gamma_1} \frac{P(x_1)}{P^2(x_1) + Q^2(x_1)} = 1,56 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{0,0447}{0,444} = 1,65 \cdot 10^{-7} \Omega/\text{cm}.$$

Impedanci trubky vypočteme z (53,17) a (53,18).

Určeme reálnou a imaginární složku vektoru \mathbf{S} , rovn. (53,15).

$$\mathbf{S} = \frac{J_1(x_4)\sqrt{-j} N_0(x_3)\sqrt{-j} - N_1(x_4)\sqrt{-j} J_0(x_3)\sqrt{-j}}{N_1(x_3)\sqrt{-j} J_1(x_4)\sqrt{-j} - N_1(x_4)\sqrt{-j} J_1(x_3)\sqrt{-j}} = \operatorname{Re}(\mathbf{S}) + j \operatorname{Im}(\mathbf{S}),$$

$$r_3 = 1,25 \text{ cm}, \quad x_3 = \frac{r_3\sqrt{2}}{a_2} = 2,40, \quad r_4 = 2,85 \text{ cm}, \quad x_4 = 5,45.$$

Z tabulek 7,40 v příloze 7,0 vyhledáme:

$$J_1(x'_4) N_0(x'_3) = (-1,01 + j 11,18), \quad N_1(x'_4) J_0(x'_3) = (-0,33 + j 11,09),$$

$$J_1(x'_3) N_0(x'_3) - N_1(x'_4) J_0(x'_3) = (-0,68 + j 0,09),$$

$$N_1(x'_3) J_1(x'_4) - N_1(x'_4) J_1(x'_3) = (-0,21 - j 0,81),$$

$$\mathbf{S} = \operatorname{Re}(\mathbf{S}) + j \operatorname{Im}(\mathbf{S}) = \frac{(-0,68 + j 0,09)}{(-0,21 - j 0,81)} = (0,10 - j 0,815),$$

$$\operatorname{Re}(\mathbf{S}) = +0,10, \quad \operatorname{Im}(\mathbf{S}) = -0,815,$$

$$R_{21} = -\frac{1}{2\pi r_3 a_2 \gamma_2} [\operatorname{Re}(\mathbf{S}) + \operatorname{Im}(\mathbf{S})] =$$

$$= -\frac{1}{6,28 \cdot 1,25 \cdot 0,74 \cdot 1,54 \cdot 10^6} \cdot (0,10 - 0,815) = +7,98 \cdot 10^{-6} \Omega/\text{cm},$$

$$\omega L_{21} = -\frac{1}{2\pi r_3 a_2 \gamma_2} [\operatorname{Im}(\mathbf{S}) - \operatorname{Re}(\mathbf{S})] =$$

$$= -\frac{1}{6,28 \cdot 1,25 \cdot 0,74 \cdot 1,54 \cdot 10^6} \cdot (-0,815 - 0,10) = +10,20 \cdot 10^{-6} \Omega/\text{cm}.$$

Reaktance mezery ωL_{m1} z rovnice (53,24):

$$\omega L_{m1} = 2\omega \mu \ln \frac{r_3}{r_1} \cdot 10^{-9} = 2 \cdot 3,14 \cdot 10^2 \cdot 1 \cdot \ln \frac{1,25}{1,00} \cdot 10^{-9} = 1,40 \cdot 10^{-7} \Omega/\text{cm}.$$

Výslednou impedanci soustavy *měděná tyč + ocelová trubka* (části o délce 1 cm) dostaneme sečtením dílčích impedancí. Reálnou složku označíme R_{11} , jalovou složku ωL_{11} :

$$R_{11} = R_{11} + R_{21} = 1,56 \cdot 10^{-6} + 7,98 \cdot 10^{-6} = 9,54 \cdot 10^{-6} \Omega/\text{cm},$$

$$\omega L_{11} = \omega L_{11} + \omega L_{21} + \omega L_{m1} = 1,65 \cdot 10^{-7} + 10,20 \cdot 10^{-6} + 1,40 \cdot 10^{-7} = 10,505 \cdot 10^{-6} \Omega/\text{cm}.$$

Výsledná impedance \mathbf{Z}_{11} :

$$\mathbf{Z}_{11} = R_{11} + j\omega L_{11} = (9,54 + j 10,505) \cdot 10^{-6} \Omega/\text{cm},$$

$$Z_{11} = \sqrt{R_{11}^2 + \omega^2 L_{11}^2} = \sqrt{9,54^2 + 10,505^2} \cdot 10^{-6} = 14,15 \cdot 10^{-6} \Omega/\text{cm}.$$

Má-li procházet tyčí proud $I_{1\text{ef}} = 1300 \text{ A}$, musíme na každý cm délky tyče přivádět napětí U_{11} :

$$U_{11} = Z_{11} I_{1\text{ef}} = 14,15 \cdot 10^{-6} \cdot 1,3 \cdot 10^3 = 1,84 \cdot 10^{-2} \text{ V/cm} \text{ (efektivní hodnota)}$$

Pošinutí mezi přiváděným napětím a proudem:

$$\cos \varphi = \frac{R_{11}}{Z_{11}} = \frac{9,54 \cdot 10^{-6}}{14,15 \cdot 10^{-6}} = 0,674.$$

Množství tepla P_{11} v tyči a P_{21} v trubce dostaneme z výrazů (52,20) a (53,26):

$$P_{11} = R_{11} I_{1\text{ef}}^2 = 1,56 \cdot 10^{-6} \cdot 1,3^2 \cdot 10^6 = 2,65 \text{ W/cm},$$

$$P_{21} = R_{21} I_{2\text{ef}}^2 = 7,98 \cdot 10^{-6} \cdot 1,3^2 \cdot 10^6 = 13,48 \text{ W/cm}.$$

Účinnost η přenosu energie z tyče do trubky:

$$\eta = \frac{P_{21}}{P_{11} + P_{21}} = \frac{13,48}{2,65 + 13,48} = 0,836.$$

5,33. Elektrická a magnetická intenzita ve vnějším válci s velkou tloušťkou stěny

Vzájemné uspořádání je vidět na obr. 53,3.

Tyčí umístěnou souose v dutině silnostěnného válce protéká proud I_1 . Ve stěně válce se indukuje proud I_2 , $I_2 = -I_1$. Při odvozování \mathbf{H} a \mathbf{E} vyjdeme opět z rovnic (51,13) a (51,17):

$$\mathbf{H} = \sqrt{j} \frac{\gamma a}{\sqrt{2}} [C_1 J_1(x)\sqrt{-j} + C_2 N_1(x)\sqrt{-j}] \quad [\text{A}/\text{cm}], \quad (53,27)$$

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} = \gamma [C_1 J_0(x)\sqrt{-j} + C_2 N_0(x)\sqrt{-j}] \quad [\text{A}/\text{cm}^2, \text{V}/\text{cm}, \text{A}/\text{cm}]. \quad (53,28)$$

Integrační konstanty C_1 a C_2 opět určíme z mezních podmínek.

Magnetická intenzita H_4 na vnějším poloměru r_4 se rovná nule.

Z rovnice (53,27) dostaneme

$$C_1 J_1(x_4)\sqrt{-j} = -C_2 N_1(x_4)\sqrt{-j}. \quad (53,29)$$

Vnější poloměr $r_4 \rightarrow \infty$. Můžeme proto Besselovy funkce v (53,29) nahradit funkčemi exponenciálními podle 7,33.

$$C_1(-j) \frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{8}\right)}}{\sqrt{2\pi x_4}} e^{\sqrt{j}x_4} = -C_2(-j) \frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{8}\right)}}{\sqrt{2\pi x_4}} [2e^{-\sqrt{j}x_4} - j e^{\sqrt{j}x_4}].$$

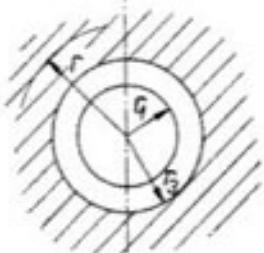
Po vykrácení a úpravě dostaneme

$$C_1 = -C_2 [2e^{-2\sqrt{j}x_4} - j \cdot 1] \quad (53,30)$$

Pro magnetickou intenzitu H_3 na vnitřním povrchu můžeme napsat rovnici

$$\begin{aligned} H_3 &= \frac{I_1}{2\pi r_3} = \\ &= \sqrt{j} \frac{\gamma a}{\sqrt{2}} [C_1 J_1(x_3 \sqrt{-j}) + C_2 N_1(x_3 \sqrt{-j})] \\ &\quad [\text{A/cm}]. \quad (53,31) \end{aligned}$$

Dosadíme do (53,31) za C_1 z (53,30) a dostaneme výrazy pro C_1 a C_2 :



Obr. 53,3. Vodivá tyč umístěná v dutině silnostěnného válce.

$$C_1 = -\frac{I_1}{2\pi r_3} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{j} a \gamma} \frac{(2e^{-\sqrt{j}2x_4} - j \cdot 1)}{[N_1(x_3 \sqrt{-j}) - (2e^{-\sqrt{j}2x_4} - j) J_1(x_3 \sqrt{-j})]}, \quad (53,32)$$

$$C_2 = \frac{I_1}{2\pi r_3} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{j} a \gamma} \frac{1}{[N_1(x_3 \sqrt{-j}) - (2e^{-\sqrt{j}2x_4} - j) J_1(x_3 \sqrt{-j})]}. \quad (53,33)$$

Dosadíme C_1 a C_2 do (53,27), po úpravě dostaneme

$$H = \frac{I_1}{2\pi r_3} \frac{[N_1(x \sqrt{-j}) - (2e^{-\sqrt{j}2x_4} - j) J_1(x \sqrt{-j})]}{[N_1(x_3 \sqrt{-j}) - (2e^{-\sqrt{j}2x_4} - j) J_1(x_3 \sqrt{-j})]} \quad [\text{A/cm}, \text{ A}]. \quad (53,34)$$

Pokusme se ještě zjednodušit výraz (53,34):

$$\begin{aligned} e^{-\sqrt{j}2x_4} &= e^{-\frac{(1+j)}{\sqrt{2}} \cdot 2x_4} = e^{-\sqrt{2}x_4} e^{-j\sqrt{2}x_4} = e^{-\sqrt{2}x_4} [\cos(\sqrt{2}x_4) - j \sin(\sqrt{2}x_4)] = \\ &= \frac{\cos(\sqrt{2}x_4) - j \sin(\sqrt{2}x_4)}{e^{\sqrt{2}x_4}}. \quad (53,35) \end{aligned}$$

Předpokládejme, že $x_4 \geq 4,0$, $(\sqrt{2}x_4) \geq 5,66$, $e^{\sqrt{2}x_4} \geq 287,15$.

Oba členy v čitateli výrazu (53,35) mají maximálně hodnotu 1. Dělme-li jmenovatelem, jsou oba členy výrazu (53,35) již pro $x_4 = 4,0$ menší než 0,01.

Můžeme proto ve výraze $(2e^{-\sqrt{j}2x_4} - j \cdot 1)$ zanedbat první člen proti druhému a (53,34) bude

$$H = \frac{I_1}{2\pi r_3} \frac{N_1(x \sqrt{-j}) + j J_1(x \sqrt{-j})}{N_1(x_3 \sqrt{-j}) + j J_1(x_3 \sqrt{-j})} \quad [\text{A/cm}, \text{ A/cm}]. \quad (53,36)$$

Po obdobné úpravě dostaneme z (53,28) zjednodušený výraz pro J :

$$J = \sqrt{-j} \frac{\sqrt{2}}{a} \frac{I_1}{2\pi r_3} \frac{N_0(x \sqrt{-j}) + j J_0(x \sqrt{-j})}{N_1(x_3 \sqrt{-j}) + j J_1(x_3 \sqrt{-j})} \quad [\text{A/cm}^2]. \quad (53,37)$$

5.34. Impedance a ztráty ve vnějším válcovém tloušťce

Intenzitu E_3 určíme z (53,37):

$$\begin{aligned} Z_{21} &= \frac{E_3}{I_2} = \frac{E_3}{-I_1} = -\sqrt{-j} \frac{\sqrt{2}}{a\gamma} \frac{1}{2\pi r_3} \frac{N_0(x_3 \sqrt{-j}) + j J_0(x_3 \sqrt{-j})}{N_1(x_3 \sqrt{-j}) + j J_1(x_3 \sqrt{-j})} = \\ &= -\sqrt{-j} \frac{\sqrt{2}}{2\pi r_3 a\gamma} \frac{(ner x_3 - j nei x_3) + j (ber x_3 - j bei x_3)}{-\sqrt{j} ((ner' x_3 - j nei' x_3) + j (ber' x_3 - j bei' x_3))} = \\ &= -j \frac{\sqrt{2}}{2\pi r_3 a\gamma} \frac{(A + jB)}{(C + jD)} = -\frac{\sqrt{2}}{2\pi r_3 a\gamma} \frac{(AD - BC) + j(AC + BD)}{(C^2 + D^2)} \quad [\Omega/\text{cm}]. \quad (53,38) \end{aligned}$$

Zavedli jsme znaky:

$$\left. \begin{array}{ll} A = ner x_3 + bei x_3, & C = ner' x_3 + bei' x_3, \\ B = ber x_3 - nei x_3, & D = ber' x_3 - nei' x_3. \end{array} \right\} \quad (53,39)$$

Činný a jalový odpor válce velké tloušťky

$$R_{21} = -\frac{\sqrt{2}}{2\pi r_3 a\gamma} \frac{(AD - BC)}{(C^2 + D^2)} \quad [\Omega/\text{cm}], \quad (53,40)$$

$$\omega L_{21} = -\frac{\sqrt{2}}{2\pi r_3 a\gamma} \frac{(AC + BD)}{(C^2 + D^2)} \quad [\Omega/\text{cm}]. \quad (53,41)$$

Příklad 53,2

Měděná tyč o průměru $2r_1 = 2,0$ cm prochází ocelovým blokem, prohřátým na 450°C . Vypočtěme impedanci soustavy $tyč + ocelový blok$, určeme množství tepla, které se na indukuje do bloku. Průměr dutiny $2r_3 = 2,5$ cm. Schematicky podle obr. 53,3.

Měděnou tyčí prochází proud o efektivní hodnotě 1300 A, $I_1 = 1840$ A, 50 Hz. Vodivost obou materiálů je stejná jako v předchozím příkladu 53,1.

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= 2,04 \cdot 10^5 \text{ S} \cdot \text{cm}^{-1}, & \gamma_2 &= 1,54 \cdot 10^4 \text{ S} \cdot \text{cm}^{-1}, \\ a_1 &= 1,58 \text{ cm}, & \mu_2 &= 60, \\ a_2 &= 0,74 \text{ cm}.\end{aligned}$$

Pro výpočet činného a jalového odporu použijeme výrazů (53,40) a (53,41). Znaky A, B, C, D podle (53,39). Z tabulek jsme vyhledali:

$$\begin{aligned}A &= 0,0429, & C &= 0,0189, \\ B &= 0,0804, & D &= -0,1032.\end{aligned}$$

$$\frac{AD - BC}{C^2 + D^2} = -0,541, \quad \frac{AC + BD}{C^2 + D^2} = -0,678.$$

$$R_{21} = + \frac{1,414}{6,28 \cdot 1,25 \cdot 0,74 \cdot 1,54 \cdot 10^4} \cdot 0,541 = 8,56 \cdot 10^{-6} \Omega/\text{cm},$$

$$\omega L_{21} = + \frac{1,414}{6,28 \cdot 1,25 \cdot 0,74 \cdot 1,54 \cdot 10^4} \cdot 0,678 = 10,75 \cdot 10^{-6} \Omega/\text{cm}.$$

Impedance tyče a mezery jsou stejné jako v předchozím příkladu 53,1:

$$\begin{aligned}R_{11} &= 1,56 \cdot 10^{-6} \Omega/\text{cm}, \quad \omega L_{11} = 1,65 \cdot 10^{-7} \Omega/\text{cm}, \\ \omega L_{m1} &= 1,40 \cdot 10^{-7} \Omega/\text{cm}.\end{aligned}$$

Výsledný činný a jalový odpor:

$$R_{11} = R_{21} = 1,56 \cdot 10^{-6} + 8,56 \cdot 10^{-6} = 10,12 \cdot 10^{-6} \Omega/\text{cm},$$

$$\begin{aligned}\omega L_{11} &= \omega L_{21} + \omega L_{m1} = 1,65 \cdot 10^{-7} + 10,75 \cdot 10^{-6} + 1,40 \cdot 10^{-7} = \\ &= 11,055 \cdot 10^{-6} \Omega/\text{cm}.\end{aligned}$$

Výsledná impedance:

$$Z_{11} = \sqrt{R_{11}^2 + \omega^2 L_{11}^2} = \sqrt{10,12^2 + 11,055^2} \cdot 10^{-6} = 14,95 \cdot 10^{-6} \Omega/\text{cm}.$$

Na každý cm délky tyče je třeba přivádět efektivní napětí U_{11} :

$$U_{11} = Z_{11} \frac{I_1}{\sqrt{2}} = 14,95 \cdot 10^{-6} \cdot 1300 = 1,95 \cdot 10^{-2} \text{ V/cm},$$

$$\cos \varphi = \frac{R_{11}}{Z_{11}} = \frac{10,12 \cdot 10^{-6}}{14,95 \cdot 10^{-6}} = 0,676.$$

Množství tepla v bloku:

$$P_{21} = \frac{1}{2} R_{21} I_1^2 = 0,5 \cdot 8,56 \cdot 10^{-6} \cdot 1840^2 = 14,50 \text{ W/cm}.$$

Teplo P_{11} v tyči:

$$P_{11} = 2,64 \text{ W/cm}$$

Účinnost přenosu energie do bloku:

$$\eta = \frac{P_{21}}{P_{11} + P_{21}} = \frac{14,50}{2,64 + 14,50} = 0,846.$$

5.35. Absolutní hodnota hustoty proudu ve stěně velké tloušťky

Při indukčním prohřívání speciálních kovových bloků (jako jsou např. kontenery pro lisování trub) se používá soustavy vhodně rozmístěných tyčí, napájených z transformátoru.

Schematicky je indukční vytápění konteneru znázorněno na obr. 53,4.

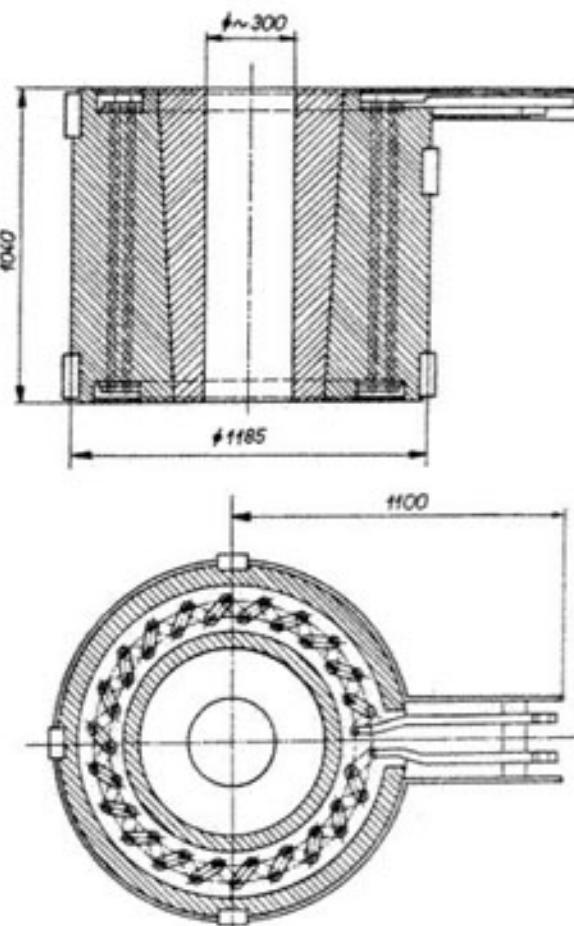
Kontener je tlustostěnná ocelová nádoba, umístěná v lisu. Do dutiny se vkládá předehřátý vývalek z hliníku (teplota 420 °C) nebo mosazi (800 °C). Na vývalek tlačí z jedné strany píst, materiál uniká na druhém konci dutiny otvorem tvaru mezikruží. Před započetím směny je třeba kontener zahřát na požadovanou teplotu. Výhodné je indukční vytápění soustavou měděných tyčí, izolovaně umístěných rovnoběžně s osou konteneru. Všechny tyče jsou zapojeny za sebou.

Tyče jsou poměrně blízko u sebe. Je třeba vyšetřit rozložení hustoty proudu v okolí dvou sousedních tyčí, abychom mohli posoudit vzájemné působení.

Obr. 53,4. Indukční topení konteneru. Měděné tyče, umístěné izolovaně ve stěně konteneru, rovnoběžně s jeho osou, jsou spojeny za sebou. Protékají jimi proud z transformátoru.

Při odvozování absolutních hodnot vyjdeme z rovnice (53,37):

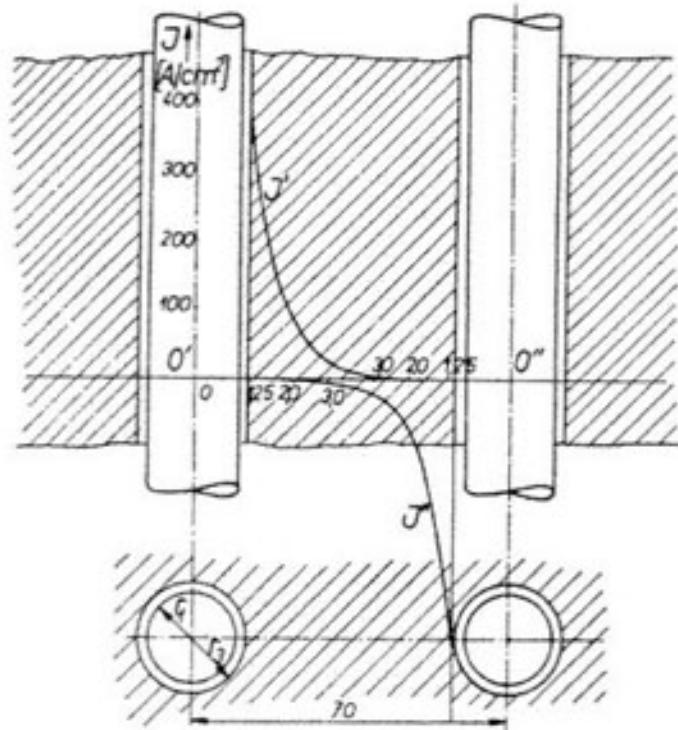
$$J = \sqrt{-j} \frac{\sqrt{2}}{a} \frac{I_1}{2\pi r_3} \frac{N_0(x)\sqrt{-j} + j J_0(x)\sqrt{-j}}{N_1(x_3)\sqrt{-j} + j J_1(x_3)\sqrt{-j}} =$$



$$= + j \frac{\sqrt{2}}{a} \frac{I_1}{2\pi r_3} \frac{(ner x + bei x) + j(ber x - nei x)}{(ner' x_3 + bei' x_3) + j(ber' x_3 - nei' x_3)} = \\ = \frac{\sqrt{2}}{a} \frac{I_1}{2\pi r_3} \frac{(AD - BC) + j(AC + BD)}{(C^2 + D^2)} [A/cm^2, A]. \quad (53,42)$$

Z rovnice (53,42) dostaneme absolutní hodnotu J :

$$J = \frac{\sqrt{2}}{a} \frac{I_1}{2\pi r_3} \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2}} [A/cm^2, A]. \quad (53,43)$$



Obr. 53,5. Průběh hustot proudů ve stěně konteneru, vybuzených dvěma sousedními tyčemi.

Příklad 53,3

Odvodme průběh hustoty proudu pro uspořádání podle obr. 53,5. Rozměry a fyzikální vlastnosti tyče i bloku jsou uvedeny v příkladu 53,2. Kmitočet $f = 50$ Hz.

$$r_1 = 1,0 \text{ cm}, \quad x_1 = 0,89, \quad r_3 = 1,25 \text{ cm}, \quad x_3 = 2,40.$$

Proud v tyči $I_1 = 1840 \text{ A}$, $\gamma_1 = 2,04 \cdot 10^5 \text{ S.cm}^{-1}$, $a_1 = 1,58 \text{ cm}$, $\gamma_2 = 1,54 \cdot 10^4 \text{ S.cm}^{-1}$, $\mu_2 = 60$, $a_2 = 0,74 \text{ cm}$.

Dosadíme do (53,43).

$$C = ner' x_3 + bei' x_3 = 0,0189, \quad D = ber' x_3 - nei' x_3 = -0,1032,$$

$$\sqrt{C^2 + D^2} = 1,05 \cdot 10^{-1}$$

Vypočtěme napřed J_3 pro $r_3 = 1,25 \text{ cm}$.

$$A = ner x_3 + bei x_3 = 0,0429, \quad B = ber x_3 - nei x_3 = 0,0804,$$

$$\sqrt{A^2 + B^2} = 9,1 \cdot 10^{-2},$$

$$J_3 = \frac{1,41}{0,74} \cdot \frac{1840}{6,28 \cdot 1,25} \cdot \frac{9,1 \cdot 10^{-2}}{1,05 \cdot 10^{-1}} = 387 \text{ A/cm}^2.$$

Obdobně jsme vypočetli další body pro $r = 2,0 \text{ a } 3,0 \text{ cm}$.

$$\begin{aligned} r &= 2,0 \text{ cm}, & J &= 113,5 \text{ A/cm}^2, \\ r &= 3,0 \text{ cm}, & J &= 22,9 \text{ A/cm}^2. \end{aligned}$$

Výsledek je zakreslen v diagramu 53,5. Pro posouzení vzájemného vlivu je zakreslena i sousední topná tyč, umístěná v osové vzdálenosti 70 mm. Ve druhé tyči teče proud v opačném smyslu. Z obrázku je vidět, že vzájemné ovlivňování je nepatrné.

5,36. Výrazy pro H , J v případě, že argumenty x_3 , x_4 jsou veliké (koaxiální kabel)

Schematické uspořádání je na obr. 53,6.

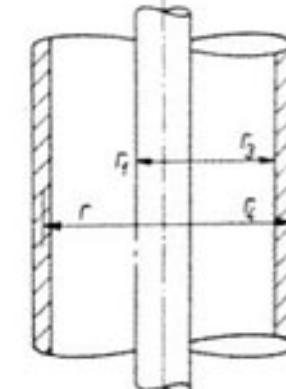
Rovnice (53,9) a (53,10) uvádějí obecné výrazy pro H a J ve stěně vnějšího válce:

$$H = \frac{I_1}{2\pi r_3} \frac{J_1(x'_4) N_1(x') - N_1(x'_4) J_1(x')}{N_1(x'_3) J_1(x'_4) - N_1(x'_4) J_1(x'_3)} [A/cm],$$

$$J = \gamma E = -\sqrt{-j} \frac{\sqrt{2}}{a} \frac{I_1}{2\pi r_3} \frac{J_1(x'_4) N_0(x') - N_1(x'_4) J_0(x')}{N_1(x'_3) J_1(x'_4) - N_1(x'_4) J_1(x'_3)} [A/cm^2, V/cm, A].$$

(V předchozích rovnicích používáme opět zjednodušeného způsobu psaní cylindrických funkcí komplexního argumentu).

Mají-li argumenty x_3 , x_4 velké hodnoty, můžeme nahradit Besselovy funkce funkciemi exponenciálními podle 7,33. Znak s_2 značí $(x_4 - x_3)$.



Obr. 53,6. Schematické uspořádání coaxialního kabelu.

$$N_1(x'_3) J_1(x'_4) - N_1(x'_4) J_1(x'_3) = -\frac{e^{-i(\frac{\pi}{4})}}{\pi \sqrt{x_3 x_4}} \cdot 2 \cdot \sinh(s_2 \sqrt{j}).$$

$$J_1(x'_4) N_1(x') - N_1(x'_4) J_1(x') = -\frac{e^{-j}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\pi \sqrt{x_4 x}} \cdot 2 \cdot \sinh(s\sqrt{j}), \quad (53,45)$$

$$H = H_3 \sqrt{\frac{x_3}{x}} \frac{\sinh(s\sqrt{j})}{\sinh(s_2\sqrt{j})} \quad [\text{A/cm}], \quad (53, 45a)$$

$$J_1(x'_4) N_0(x') - N_1(x'_4) J_0(x') = +j \frac{e^{-j}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\pi \sqrt{x_4 x}} \cdot 2 \cdot \cosh(s\sqrt{j}), \quad (53,46)$$

$$J = -\frac{1+j}{a} H_3 \sqrt{\frac{x_3}{x}} \frac{\cosh(s\sqrt{j})}{\sinh(s_2\sqrt{j})} \quad [\text{A/cm}^2, \text{A/cm}]. \quad (53,47)$$

Obecné výrazy (53,9) a (53,10) pro H a J ve vnějším válci jsou obdobné jako výrazy (44,8) a (44,9), odvozené v kapitole 4,41 pro H a J ve stěně pecní cívky.

Porovnáme-li výrazy pro H a J pro vnější válec (trubku) a cívku, vidíme úplnou obdobu, avšak s tím rozdílem, že funkce nultého řádu $J_0(x')$, $N_0(x')$ pro cívku jsou nahrazeny funkciemi $J_1(x')$, $N_1(x')$ ve výrazech pro trubku. Funkce $J_1(x')$, $N_1(x')$ v čitateli výrazu J u cívky jsou nahrazeny funkciemi nultého řádu $J_0(x')$, $N_0(x')$ ve výraze pro J u trubky.

Porovnejme ještě zjednodušené výrazy (53,45a) a (53,47) pro H a J u trubky s obdobnými výrazy (44,12) a (44,18) pro H a J u pecní cívky.

a) Výrazy pro trubku:

$$H = H_3 \sqrt{\frac{x_3}{x}} \frac{\sinh(s\sqrt{j})}{\sinh(s_2\sqrt{j})} \quad [\text{A/cm}],$$

$$J = -\frac{1+j}{a} H_3 \sqrt{\frac{x_3}{x}} \frac{\cosh(s\sqrt{j})}{\sinh(s_2\sqrt{j})} \quad [\text{A/cm}^2, \text{A/cm}].$$

b) Výrazy pro cívku:

$$H = H_3 \sqrt{\frac{x_3}{x}} \frac{\sinh(s\sqrt{j})}{\sinh(s_2\sqrt{j})} \quad [\text{A/cm}],$$

$$J = +\frac{1+j}{a} H_3 \sqrt{\frac{x_3}{x}} \frac{\cosh(s\sqrt{j})}{\sinh(s_2\sqrt{j})} \quad [\text{A/cm}^2, \text{A/cm}].$$

Výrazy pro H a J v obou uvažovaných případech jsou zcela totožné. Rozdíl je pouze ve znaménku u hustoty J . Rozdíl je dán tím, že v závitech cívky je napětí přivedené, ve vnějším válci je napěti naindukováno.

Vzhledem k totožnosti výrazů pro H a J budou i výrazy pro absolutní hodnotu H a J pro trubku stejné, jako jsme v kapitole 4,41 odvodili pro cívku, rovn. (44,17) a (44,19).

Pro trubku bude:

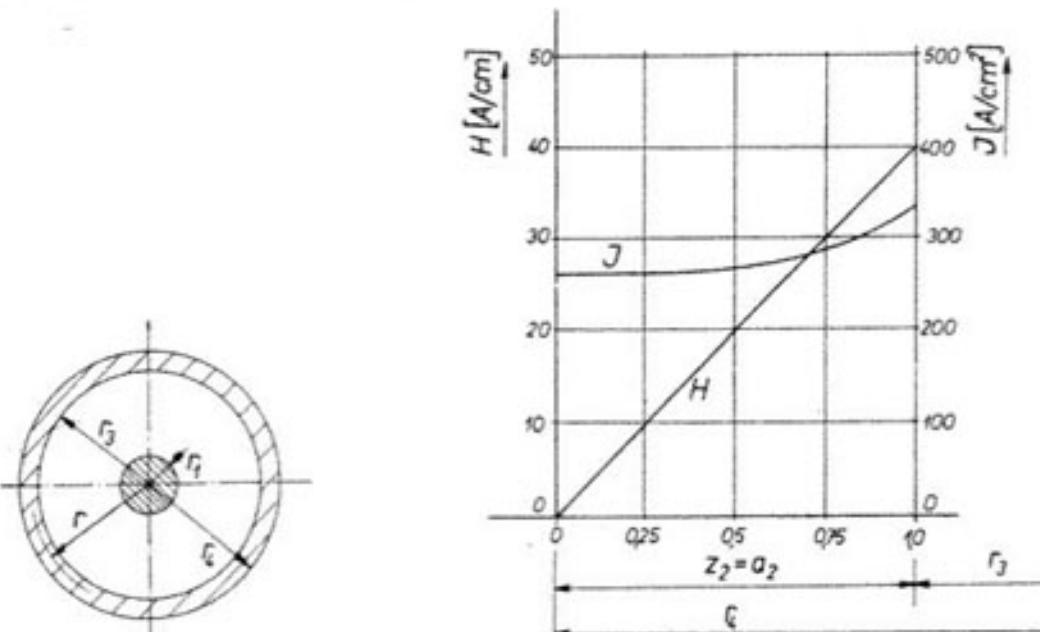
$$H = H_3 \sqrt{\frac{x_3}{x}} \sqrt{\frac{\cosh(s\sqrt{2}) - \cos(s\sqrt{2})}{\cosh(s_2\sqrt{2}) - \cos(s_2\sqrt{2})}} \quad [\text{A/cm}], \quad (43,48)$$

$$J = \frac{\sqrt{2}}{a} H_3 \sqrt{\frac{x_3}{x}} \sqrt{\frac{\cosh(a\sqrt{2}) + \cos(s\sqrt{2})}{\cosh(s_2\sqrt{2}) - \cos(s_2\sqrt{2})}} \quad [\text{A/cm}^2, \text{A/cm}], \quad (53,49)$$

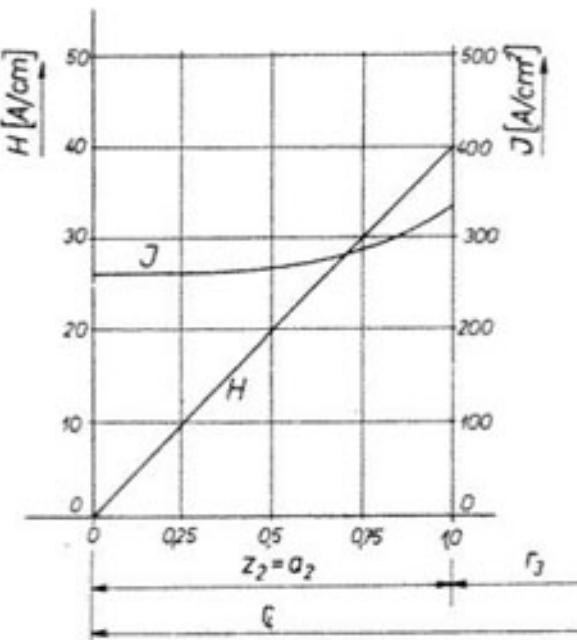
(Místo $(s_2\sqrt{2})$ můžeme psát $\frac{2z_2}{a}$).

Příklad 53,4

Stanovme průběh H a J ve vnějším válcovém vodiči souosého vedení, které se skládá z vnitřního válcového vodiče z mědi o průměru $2r_1 = 1,0$ cm



Obr. 53.7. Příčný řez souosým válcovým vedením.



Obr. 53.8. Průběh hustoty proudu a intenzity magnetického pole ve stěně vnějšího válce souosého vedení.

a souosé měděné trubky o vnitřním průměru $2r_3 = 4,0$ cm. Tloušťka vodiče z_2 se právě rovná hloubce vniku a_2 . Protéká proud $I_1 = I_2 = 500$ A, kmitočet $f = 2000$ Hz. Vodivost mědi $\gamma_2 = 5,5 \cdot 10^6$ S.cm $^{-1}$ (obr. 53,7).

Hloubka vniku $a_2 = 0,151$ cm.

Tloušťku stěny z_2 jsme zvolili 1,51 mm. Intenzita magnetického pole H_3 na vnitřním povrchu trubky:

$$H_3 = \frac{I_1}{2\pi r_3} = \frac{500}{6,28 \cdot 2,0} = 39,8 \text{ A/cm}.$$

Argument x_3 :

$$x_3 = \frac{r_3}{a_2} \sqrt{2} = \frac{2,0 \cdot 1,414}{0,151} = 18,8.$$

Vzhledem k velikosti argumentu x_3 můžeme při výpočtu H a J použít zjednodušených výrazů (53,48) a (53,49). Argument $s = (x_4 - x) = \frac{(r_4 - r)}{a_2}$. $\sqrt{2} = \frac{z}{a_2} \sqrt{2}$. Znak z určuje vzdálenost uvažovaného místa od vnějšího povrchu válce. Dosazením příslušných hodnot do (53,48) jsme vypočetli H pro tyto body:

$z = 0,0 - 0,5a_2 - 0,75a_2 - 1,00a_2$. Pro tytéž body jsme z (53,49) určili také hustotu J . Výsledky jsou v tabulce 53,1 a v diagramu 53,8.

Tabulka 53,1

$\frac{s}{\sqrt{2}} = \frac{z}{a_2}$	0,0	0,50	0,75	1,00
H [A/cm]	0,0	19,4	29,5	39,8
J [A/cm ²]	260	265	284	336

5.37. Impedance válce s velkými hodnotami argumentů x_3, x_4

Impedanci části vnějšího válce o osové délce 1 cm dostaneme opět z definice

$$\begin{aligned} Z_{21} &= \frac{E_3}{I_2} = -\frac{1+j}{a\gamma} H_3 \sqrt{\frac{x_3}{x_2}} \frac{\cosh(s_2\sqrt{j})}{\sinh(s_2\sqrt{j})} \frac{1}{I_2} = \\ &= -\frac{1+j}{a\gamma} \frac{-I_2}{2\pi r_3} \frac{\cosh(s_2\sqrt{j})}{\sinh(s_2\sqrt{j})} \frac{1}{I_2} = +\frac{1+j}{a\gamma} \frac{1}{2\pi r_3} \frac{\cosh(s_2\sqrt{j})}{\sinh(s_2\sqrt{j})} [\Omega/\text{cm}]. \quad (53,50) \end{aligned}$$

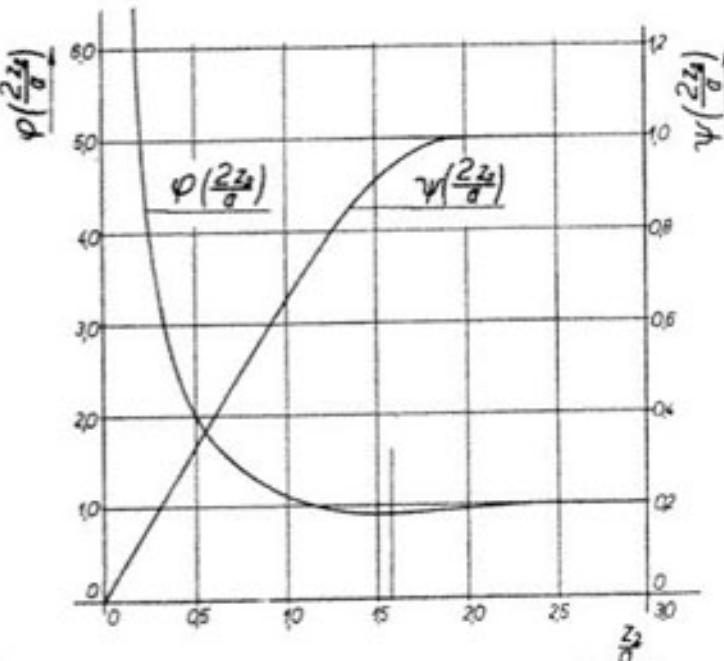
Tento výraz je zcela obdobný s výrazem (52,30), takže

$$R_{21} = \frac{1}{2\pi r_3 a \gamma} \frac{\left(\sinh \frac{2z_2}{a} + \sin \frac{2z_2}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{2z_2}{a} - \cos \frac{2z_2}{a} \right)} = \frac{1}{2\pi r_3 a \gamma} \varphi \left(\frac{2z_2}{a} \right) [\Omega/\text{cm}], \quad (53,51)$$

$$\omega L_{21} = \frac{1}{2\pi r_3 a \gamma} \frac{\left(\sinh \frac{2z_2}{a} - \sin \frac{2z_2}{a} \right)}{\left(\cosh \frac{2z_2}{a} - \cos \frac{2z_2}{a} \right)} = \frac{1}{2\pi r_3 a \gamma} \psi \left(\frac{2z_2}{a} \right) [\Omega/\text{cm}]. \quad (53,52)$$

Obdobné výrazy pro R_{21} a ωL_{21} jsme dostali v kapitole 4,41 pro odpor a indukčnost pevní cívky, rovn. (44,45) a (44,46). Zlomky s hyperbolickými a goniometrickými funkciemi jsme označili v kapitole 4,41 jako funkce $\varphi \left(\frac{2z_2}{a} \right)$ a $\psi \left(\frac{2z_2}{a} \right)$. Jejich průběh je v tabulce 35,4 a v diagramu 44,5.

Vypočetli jsme hodnoty $\varphi \left(\frac{2z_2}{a} \right)$ a $\psi \left(\frac{2z_2}{a} \right)$ pro různé poměry $\frac{z_2}{a}$, výsledky jsou v tabulce 53,2 a v diagramu 53,9.



Obr. 53,9. Průběh činného odporu a reaktance stěny vnějšího válce souosého vedení v závislosti na poměru z_2/a .

Tabulka 53,2

$\frac{z_2}{a} = \frac{s_2}{\sqrt{2}}$	0,0	0,25	0,50	1,0	2,0	4,0
$\varphi \left(\frac{2z_2}{a} \right)$	∞	4,01	2,016	1,085	0,948	1,000
$\psi \left(\frac{2z_2}{a} \right)$	0,0	0,167	0,3337	0,653	1,00	1,000

Funkce $\varphi \left(\frac{2z_2}{a} \right)$ je totožná s funkcí $\varphi \left(\frac{2z_1}{a} \right)$ v kapitole 4,41. Má minimum pro $\frac{z_2}{a} = \frac{\pi}{2} = 1,57$. Vnější válec má minimální odpor R_{21} v případě, že tloušťka stěny z_2 se rovná 1,57násobku hloubky vniku a .

V případě, že tloušťka stěny z_2 vnějšího válce se rovná vícenásobku hloubky vniku a , budou hodnoty zlomků s funkcemi v (53,51) a (53,52) rovné 1. Potom

$$R_{21\infty} = \omega L_{21\infty} = \frac{1}{2\pi r_3 a \gamma} \quad [\Omega/\text{cm}]. \quad (53,53)$$

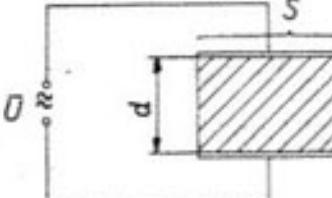
Cinný odpor trubky v tom případě se rovná činnému odporu vnitřní povrchové vrstvy o tloušťce a , pro stejnosměrný proud.

6. Vznik tepla v elektrickém poli (Dielektrické teplo)

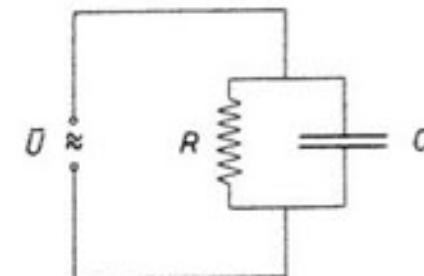
K prohřívání elektricky nevodivých materiálů používáme ohřevu v elektrickém poli (dielektrický ohřev), jak je schematicky znázorněno na obr. 60,1.

Nevodivý materiál se vloží do elektrického pole kondenzátoru, napájeného proudy o vysokém kmitočtu. Používají se kmitočty přibližně v rozsahu 10^6 až 10^9 Hz.

Vznik tepla při dielektrickém ohřevu je obdobný jako vznik tepla vlivem



Obr. 60,1. Schematické uspořádání kondenzátoru pro dielektrické prohřívání. Válcová nevodivá vsázka je mezi deskami kondenzátoru.



Obr. 60,2. Elektrické schéma kondenzátoru se ztrátami v dielektriku.

hysterezních ztrát v železe při magnetování střídavým proudem. Molekuly materiálu vloženého do elektrického pole kondenzátoru se chovají jako elektrické dipoly. Snaží se sledovat změny elektrické polarity, snaží se natáčet, při čemž musí překonávat vzájemné tření. To je příčinou vzniku tepla v materiálu.

Kapacita C deskového kondenzátoru s dielektrikem beze ztrát je dána výrazem

$$\begin{aligned} C &= \frac{\epsilon S}{4\pi d} \quad [\text{cm}, \text{cm}^2, \text{cm}^{-1}] = \frac{10}{9} \cdot 10^{-12} \frac{1}{4\pi} \frac{\epsilon S}{d} [\text{F}, \text{cm}^2, \text{cm}^{-1}] = \\ &= 8,85 \cdot 10^{-14} \frac{\epsilon S}{d} [\text{F}, \text{cm}^2, \text{cm}^{-1}]. \end{aligned} \quad (60,1)$$

Označili jsme:

S . . . plochu desky [cm^2],

d . . . vzdálenost desek [cm],

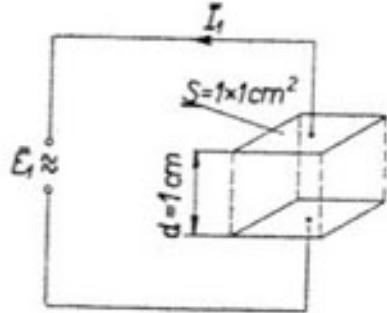
ϵ . . . poměrnou dielektrickou konstantu materiálu.

Zvolíme-li: $S = 1 \text{ cm}^2$, $d = 1 \text{ cm}$, $\epsilon = 1$ (vakuum nebo velmi přibližně vzduch), dostaneme z 60,1 kapacitu 1 cm^3 prázdného prostoru, kterou označujeme ϵ_0 :

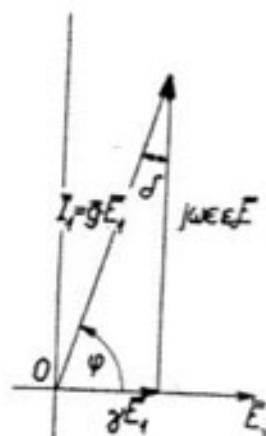
$$C_1 = \epsilon_0 = \frac{10}{9} \cdot 10^{-12} \frac{1}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \frac{10^9}{c^2} = 8,85 \cdot 10^{-14} \quad [\text{F/cm}]. \quad (60,2)$$

Konstanta ϵ_0 je dielektrická konstanta vakuia.

Znak c značí rychlosť šířenja elektromagnetických vln v prázdném prostoru, $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}$.



Obr. 60,3. Dielektrické prohřívání krychle materiálu o hraně 1 cm.



Obr. 60,4. Vektorový diagram pro dielektrické prohřívání jednotkové krychle materiálu.

Výraz (60,1) pro kapacitu kondenzátoru beze ztrát má tedy v praktických jednotkách tvar

$$C = \epsilon_0 \epsilon \frac{S}{d} \quad [\text{F}, \text{cm}^2, \text{cm}^{-1}]. \quad (60,3)$$

Kondenzátor se ztrátami v dielektriku je schematicky vyznačen na obr. 60,2. Paralelně ke kondenzátoru C je připojen určitý odpor R . Ztráty v odporu R jsou právě stejně veliké jako ztráty dielektrické.

Výsledná vodivost G tohoto uspořádání je

$$G = \frac{1}{R} + j\omega C \quad [\text{S}, \Omega, \text{F}]. \quad (60,4)$$

Analogicky výsledná vodivost krychle materiálu o hraně 1 cm bude (obr. 60,3)

$$\mathbf{g} = \left(\frac{1}{\rho} + j\omega \epsilon_0 \epsilon \right) = (\gamma + j\omega \epsilon_0 \epsilon) \quad [\text{S}, \text{S.cm}^{-1}, \text{F/cm}]. \quad (60,5)$$

Znak ρ značí myšlený měrný odpor dielektrika [$\Omega \cdot \text{cm}^2/\text{cm}$], jeho převratná hodnota je vodivost γ [$\text{S} \cdot \text{cm}/\text{cm}^2$]. Uvažovanou jednotkovou krychlí protéká proud I_1 [A], napětí, přiváděné na protější stěny, označme E_1 [V].

$$I_1 = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{g} = \mathbf{E}_1 (\gamma + j\omega \epsilon_0 \epsilon) \quad [\text{A}, \text{V/cm}, \text{S} \cdot \text{cm}^{-1}]. \quad (60,6)$$

Vzájemný vztah mezi I_1 a \mathbf{E}_1 , daný výrazem (60,6), je vyznačen v diagramu 60,4.

Z diagramu můžeme určit pošinutí $\cos \varphi$ mezi proudem I_1 a napětím \mathbf{E}_1 , a tzv. ztrátový úhel $\operatorname{tg} \delta$ dielektrika:

$$\cos \varphi = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + (\omega \epsilon_0 \epsilon)^2}} = \frac{\frac{\gamma}{\omega \epsilon_0 \epsilon}}{\sqrt{\left(\frac{\gamma}{\omega \epsilon_0 \epsilon}\right)^2 + 1}}, \quad (60,7)$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\gamma}{\omega \epsilon_0 \epsilon}. \quad (60,8)$$

Známe-li ztrátový úhel $\operatorname{tg} \delta$ dielektrika, můžeme určit vodivost γ :

$$\gamma = \omega \epsilon_0 \epsilon \cdot \operatorname{tg} \delta. \quad (60,9)$$

Příklad 60,1

Ztrátový úhel $\operatorname{tg} \delta$ má u materiálů, které se dielektricky prohřívají, hodnoty přibližně v rozmezí 0,01 až 0,08. Dielektrická konstanta bývá v rozmezí asi 2 až 7. Vezmeme-li střední hodnoty, potom např. při kmitočtu $f = 10^7 \text{ Hz}$ bude měrná vodivost γ :

$$\gamma = 6,28 \cdot 10^7 \cdot 8,85 \cdot 10^{-14} \cdot 4,5 \cdot 0,045 = 1,14 \cdot 10^{-6} \quad [\text{S} \cdot \text{cm} \cdot \text{cm}^{-2}].$$

Prvý člen pod odmocninou ve výrazu (60,7) bude

$$\left(\frac{\gamma}{\omega \epsilon_0 \epsilon} \right)^2 = (\operatorname{tg} \delta)^2 = (0,045)^2 = 2,025 \cdot 10^{-3}.$$

Zanedbáme-li tento člen proti 1, bude výraz (60,7)

$$\cos \varphi \doteq \frac{\gamma}{\omega \epsilon_0 \epsilon} = \operatorname{tg} \delta. \quad (60,10)$$

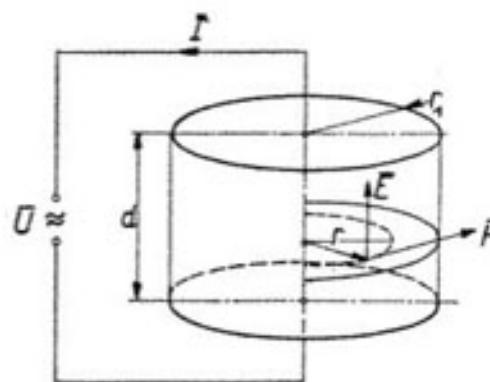
Až dosud jsme předpokládali, že obě vodivé desky kondenzátoru mají ve všech bodech svého povrchu v každém zvoleném okamžiku tentýž potenciál, stejný jako v bodě, ve kterém je připojeno napájecí vedení. V dalším odvodíme, že tento případ ve skutečnosti nastane pouze tehdy, je-li průměr desky kondenzátoru $2r_1$ velmi malý proti vlnové délce λ uvažovaného vlnění, $2r_1 \ll \lambda$.

6.1. Obecné řešení

6.11. Rozložení elektrického a magnetického pole v nevodivém válci

Uvažujme kondenzátor s kruhovými deskami, mezi které vložíme válec z nevodivého materiálu, obr. 61.1.

Poloměr válce označme r_1 [cm], poměrná dielektrická konstanta materiálu je ϵ . Předpokládejme, že elektrické silokřivky mezi deskami jsou rovnoběžné s osou válce, že nevybočují z povrchu válce. Hodnoty H a E jsou v tom případě stejné v kterémkoliv řezu kolmém k ose válce. Vzhledem k symetrii celého uspořádání kolem osy budou hodnoty E a H pouze funkci vzdálenosti r od osy. K určení E a H použijme 1. a 2. Maxwellovy rovnice, vyjděme z obr. 61.2.



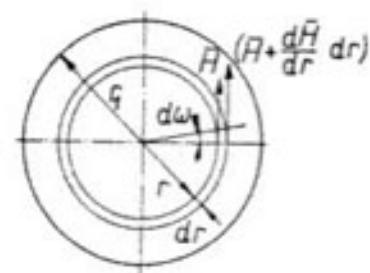
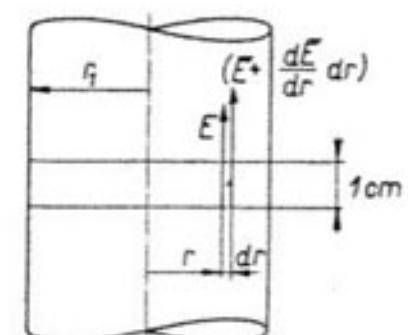
Obr. 61.1. Diagram pro odvození intenzity magnetického a elektrického pole v nevodivém válci.

$$\text{rot } \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E} + \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{E}(\gamma + j\omega \epsilon_0 \epsilon) \quad [\text{A/cm}, \text{V/cm}], \quad (61.1)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu_0 \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -j\omega \mu_0 \mu \mathbf{H} \quad [\text{V/cm}, \text{A/cm}]. \quad (61.2)$$

Podle obr. 61.2 můžeme vyjádřit:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\left[\left(\mathbf{H} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\omega - \mathbf{H} r d\omega \right]}{dr d\omega dr} = \left(\frac{\mathbf{H}}{r} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial r} \right) \cdot \quad (61.3)$$



Obr. 61.2. Diagram pro stanovení rot E a rot H .

Zanedbali jsme součin $(d\mathbf{H}/dr) \cdot 1$ jako veličinu nekonečně malou druhého řádu.

$$-\text{rot } \mathbf{E} = \frac{\left[\left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r} dr \right) \cdot 1 - \mathbf{E} \cdot 1 \right]}{dr \cdot 1} = + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r} \quad [\text{V/cm}]. \quad (61.4)$$

Spojme (61.1), (61.3) a (61.2), (61.4):

$$\mathbf{E}(\gamma + j\omega \epsilon_0 \epsilon) = \frac{\mathbf{H}}{r} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial r}, \quad (61.5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r} = + j\omega \mu_0 \mu \mathbf{H}. \quad (61.6)$$

Vyjádřeme z (61.6) intenzitu \mathbf{H} a dosadme do (61.5):

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r} - j\omega \mu_0 \mu (\gamma + j\omega \epsilon_0 \epsilon) \mathbf{E} = 0. \quad (61.7)$$

Zavedme vektor \mathbf{m}^2 , rovný součiniteli při \mathbf{E} :

$$\mathbf{m}^2 = -j\omega \mu_0 \mu (\gamma + j\omega \epsilon_0 \epsilon), \quad (61.8)$$

$$\mathbf{m} = \sqrt{-j} \sqrt{\omega \mu_0 \mu (\gamma + j\omega \epsilon_0 \epsilon)}. \quad \text{z} \quad \text{z}$$

Dělme rovnici (61.7) timto součinitelem a vhodně upravme:

$$\frac{d^2 \mathbf{E}}{d(mr)^2} + \frac{1}{mr} \frac{d \mathbf{E}}{d(mr)} + \mathbf{E} = 0. \quad (61.9)$$

Rovnice (61.9) je diferenciální rovnice Besselova 2. řádu pro proměnnou \mathbf{E} , s komplexním argumentem (mr) . Jejím integrálem je součet dvou Besselových funkcí:

$$\mathbf{E} = C_1 J_0(mr) + C_2 N_0(mr) \quad [\text{V/cm}]. \quad (61.10)$$

Výraz (61.10) určuje intenzitu elektrického pole na poloměru r . $J_0(mr)$, $N_0(mr)$ jsou cylindrické funkce 1. a 2. druhu, nultého řádu, pro komplexní argument (mr) :

$$(mr) = \sqrt{-j} \sqrt{\omega \mu_0 \mu (\gamma + j\omega \epsilon_0 \epsilon)} r = \sqrt{-j} kr = \sqrt{-j} x. \quad (61.11)$$

Součinitele při $\sqrt{-j} = \frac{1-j}{\sqrt{2}}$ jsme označili $x = (k \cdot r)$. Rovnice (61.10) potom bude

$$\mathbf{E} = C_1 J_0(x \sqrt{-j}) + C_2 N_0(x \sqrt{-j}) \quad [\text{V/cm}]. \quad (61.12)$$

Za použití rovnic (61.6) a (61.12) dostaneme \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} = \frac{1}{j\omega \mu_0 \mu} \left[C_1 \frac{d[J_0(x \sqrt{-j})]}{dr} + C_2 \frac{d[N_0(x \sqrt{-j})]}{dr} \right] \quad [\text{A/cm}]. \quad (61.13)$$

Derivace funkcí $J_0(x\sqrt{-j})$ a $N_0(x\sqrt{-j})$ jsou uvedeny v příloze 7,32. Za použití výrazu (61,11) bude

$$\frac{d[J_0(x\sqrt{-j})]}{d(x\sqrt{-j})} = \frac{d[J_0(x\sqrt{-j})]}{d(\sqrt{-j}kr)} = \frac{1}{\sqrt{-j}k} \cdot \frac{d[J_0(x\sqrt{-j})]}{dr} = -J_1(x\sqrt{-j}),$$

$$\frac{d[N_0(x\sqrt{-j})]}{dr} = -\sqrt{-j}k J_1(x\sqrt{-j}) = -m J_1(mr), \quad (61,14)$$

analogicky

$$\frac{d[N_0(x\sqrt{-j})]}{dr} = -\sqrt{-j}k N_1(x\sqrt{-j}) = -m N_1(mr). \quad (61,15)$$

Dosadme (61,14) a (61,15) do (61,13):

$$H = -\frac{m}{j\omega\mu_0\mu} [C_1 J_1(mr) + C_2 N_1(mr)] \quad [\text{A/cm}]. \quad (61,16)$$

Výrazy (61,10) a (61,16) určují intenzity E a H v uvažovaném válci. Integrační konstanty C_1 a C_2 určíme z mezních podmínek. V ose válce ($r = 0$) se intenzita elektrického pole E_0 rovná poměru přiváděného napětí U (maximální hodnota) a vzdálenosti desek d (napájecí napětí přivádíme do středu desek):

$$E_0 = \frac{U}{d} \quad [\text{V/cm}, \text{V}, \text{cm}]. \quad (61,17)$$

Proudová vlákna posuvného proudu jsou rovnoběžná s osou válce. Magnetické silokřivky mají tvar soustředných kružnic. Z názoru vyplývá (obr. 61,2), že pro $r = 0$, $H_0 = 0$.

Dosadme do (61,16):

$$H = H_0 = -\frac{m}{j\omega\mu_0\mu} [C_1 J_1(0) + C_2 N_1(0)] = 0. \quad (61,18)$$

Z tabulek odečteme $J_1(0) = 0$, $N_1(0) \neq 0$, takže z rovnice (61,18) vyplývá

$$C_2 = 0. \quad (61,19)$$

Dosadme (61,19) do (61,10):

$$E = E_0 = C_1 J_0(0).$$

Z tabulek odečteme $J_0(0) = 1,0$, takže

$$C_1 = E_0 = \frac{U}{d}. \quad (61,20)$$

Rovnice (61,10) a (61,16) budou

$$E = E_0 J_0(mr) \quad [\text{V/cm}], \quad (61,21)$$

$$H = -\frac{m}{j\omega\mu_0\mu} E_0 J_1(mr) \quad [\text{A/cm}, \text{V/cm}]. \quad (61,22)$$

Rovnice (61,21) a (61,22) jsou hledané výrazy pro intenzitu pole elektrického a magnetického na poloměru r .

6.12. Výsledný proud I mezi deskami kondenzátoru a impedance uvažovaného válce

Uvažovaný nevodivý válec má poloměr r_1 , protéká jím proud I . Použijeme 1. rovnice Maxwellovy:

$$\oint_s (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}) = I \quad [\text{A/cm}, \text{cm}, \text{A}]. \quad (61,23)$$

Proud I v uvažovaném případě:

$$I = 2\pi r_1 H_1 \quad [\text{A}, \text{cm}, \text{A/cm}]. \quad (61,24)$$

Za H_1 dosadme z (61,22):

$$I = -2\pi r_1 \frac{m}{j\omega\mu_0\mu} E_0 J_1(mr_1) \quad [\text{A}, \text{V/cm}]. \quad (61,25)$$

Impedanci Z_{11} uvažovaného válce (jeho části o délce 1 cm) rozumíme poměr intenzity elektrického pole E_1 na povrchu a procházejícího proudu.

$$Z_{11} = \frac{E_1}{I} = -E_0 J_0(mr_1) \frac{1}{2\pi r_1} \frac{j\omega\mu_0\mu}{m} \frac{1}{E_0 J_1(mr_1)} = \\ = -j \frac{\omega\mu_0\mu}{2\pi r_1 m} \frac{J_0(mr_1)}{J_1(mr_1)} \quad [\Omega/\text{cm}]. \quad (61,26)$$

Obecné výrazy (61,21), (61,22), (61,25) a (61,26) pro E , H , I , Z_{11} , které jsme odvodili pro jakékoliv prostředí s vodivostí γ , dielektrickou konstantou ϵ a permeabilitou μ , jsou složité a nepřehledné.

V dalším odvodíme z předchozích výrazů jednodušší výrazy pro speciální prostředí, a to pro:

- a) dokonalý izolant,
- b) izolant s malými ztrátami.

6.2. Válec z dokonalého dielektrika

Dokonalým izolantem rozumíme materiál, ve kterém nevznikají žádné ztráty, je-li vložen do střídavého elektrického pole.

6.21. Odvození \mathbf{E} a \mathbf{H} v obecném případě

Vodivost materiálu válce $\gamma = 0$, permeabilita $\mu = 1$. Vektor \mathbf{m}^2 podle (61,8) bude

$$\mathbf{m}^2 = -j\omega\mu_0\mu(\gamma + j\omega\epsilon_0\epsilon) = +\omega^2\mu_0\mu\epsilon_0\epsilon. \quad (62,1)$$

Argument m v Besselových funkciích ve výrazech pro \mathbf{E} a \mathbf{H} je v tomto případě reálný:

$$m = \omega \sqrt{\mu_0\mu\epsilon_0\epsilon} = \omega \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{c}. \quad (62,2)$$

V kapitole 3,20 jsme odvodili, že rychlosť v šíření elmg. vlnění v izolantu o dielektrické konstantě ϵ a permeabilitě μ je

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad [\text{cm/s}].$$

Argument m můžeme vyjádřit pomocí rychlosti v , popřípadě pomocí vlnové délky λ daného vlnění v uvažovaném prostředí:

$$m = \omega \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{c} = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{\lambda f} = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (62,3)$$

Rovnice (61,21) a (61,22) pro \mathbf{E} a \mathbf{H} budou v daném případě

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 J_0(mr) = \mathbf{E}_0 J_0\left(\frac{\omega}{v} r\right) = \mathbf{E}_0 J_0\left(\frac{2\pi}{\lambda} r\right) \quad [\text{V/cm, cm}], \quad (62,4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= -\frac{m}{j\omega\mu_0\mu} \mathbf{E}_0 J_1(mr) = +j \frac{1}{v\mu_0\mu} \mathbf{E}_0 J_1\left(\frac{\omega}{v} r\right) = \\ &= +j \frac{1}{f\lambda\mu_0\mu} \mathbf{E}_0 J_1\left(\frac{2\pi}{\lambda} r\right) \quad [\text{A/cm, V/cm, cm}]. \end{aligned} \quad (62,5)$$

Součinitele ve výrazu pro \mathbf{H} můžeme upravit:

$$-\frac{m}{j\omega\mu_0\mu} = +j \frac{\omega\sqrt{\mu_0\mu\epsilon_0\epsilon}}{\omega\mu_0\mu} = +j \sqrt{\frac{\epsilon_0\epsilon}{\mu_0\mu}} = +j \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{1}{120\pi}. \quad (62,6)$$

Intenzita \mathbf{H} je potom:

$$\mathbf{H} = +j \frac{1}{120\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{E}_0 J_1\left(\frac{2\pi}{\lambda} r\right) \quad [\text{A/cm, V/cm, cm}]. \quad (62,7)$$

Zavedme argument $x = mr = \frac{2\pi}{\lambda} r$, potom bude \mathbf{E} a \mathbf{H} :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 J_0(x) \quad [\text{V/cm}], \quad (62,8)$$

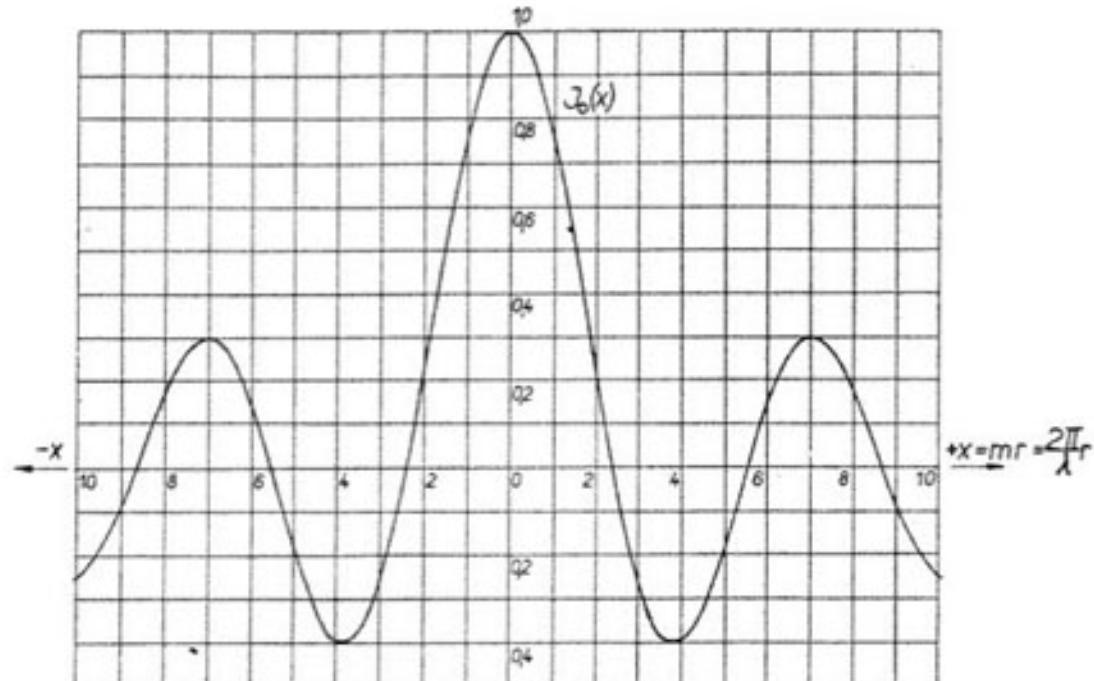
$$\mathbf{H} = +j \frac{1}{120\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{E}_0 J_1(x) \quad [\text{A/cm, V/cm}]. \quad (62,9)$$

Výrazy (62,4) a (62,7) pro \mathbf{E} a \mathbf{H} v uvažovaném válcu z izolantu jsou obdobné s výrazy (41,21) a (41,22), které jsme odvodili v kapitole 4,11 pro \mathbf{H} a \mathbf{E} vlnění v dutině cívky.

Přiváděně napětí je harmonické, takže:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 J_0(x) e^{j\omega t} \quad [\text{V/cm}], \quad (62,10)$$

$$\mathbf{H} = +j \frac{1}{120\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{E}_0 J_1(x) e^{j\omega t} \quad [\text{A/cm, V/cm}]. \quad (62,11)$$



Obr. 62,1. Průběh intenzity elektrického pole stojatého vlnění v nevodivém válcu v závislosti na argumentu x .

V uvažovaném izolačním válcu je stojaté elektromagnetické vlnění. Průběh amplitudy E je dán Besselovou funkcí nultého řádu, amplitudy H Besselovou funkcí prvního řádu, pro argument $x = \frac{2\pi}{\lambda} r$.

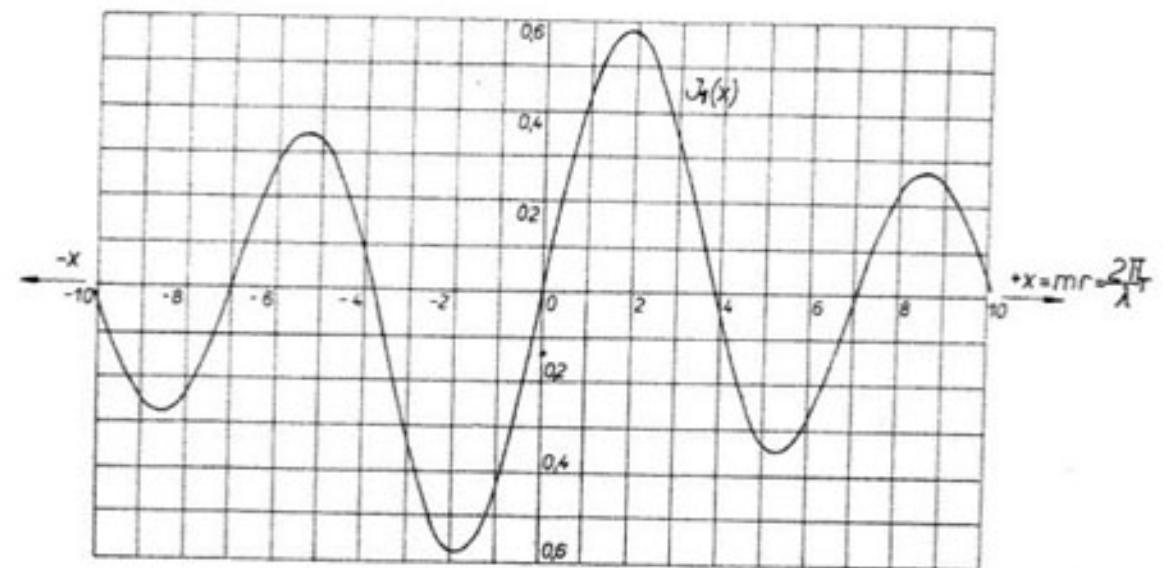
Hodnoty funkcí $J_0(x)$ a $J_1(x)$ jsou v dřívější tabulce 41,1 a průběhy graficky v diagramech 62,1 a 62,2.

Sledujme na obr. 62,1 průběh elektrické intenzity E , rovn. 62,10: pro $r = 0$ je $E = E_0$. Roste-li poloměr r uvažovaného místa, a tedy i argument x , klesá intenzita elektrického pole E , až pro $x = 2,405$ prochází nulou. Roste-li x dále, je intenzita E záporná, při $x = 5,52$ prochází opět nulou, atd. (uzly).

Podobný průběh má intenzita pole magnetického H , daná funkcí $J_1(x)$, výraz (62,11), obr. 62,2. Pro $r = 0$ je $J_1(x) = 0$, tedy i $H = 0$. Intenzita H

v každém místě je časově pošinuta o $\frac{\pi}{2}$ proti E , jak ukazuje výraz (62,11).

Diagramy 62,1 a 62,2 určují průběhy maximálních hodnot (amplitud) vektorů E a H v závislosti na poloměru r . Intenzita E i H v každém místě je časově sinusově proměnná. Necháme-li naznačené průběhy rotovat rychlosť



Obr. 62.2. Průběh intenzity magnetického pole stojatého vlnění v nevodivém válcu v závislosti na argumentu x .

$\omega = 2\pi f$ kolem osy X , dostaneme okamžité hodnoty jako průměty rotujících křivek do svislé roviny.

Intenzita elektrického pole E je ve fázi s přiváděným napětím, intenzita H v každém místě je o $\frac{\pi}{2}$ pošinuta proti přiváděnému napětí.

Příklad 62,1

Určeme intenzitu elektrického a magnetického pole E a H v případě, že přiváděný proud má kmitočet $f = 10^8$ Hz, dielektrickou konstantu $\epsilon = 81$, ve vzdálenosti $r = 10$ cm od osy válce. Napětí přiváděné do středu desek $U = 8$ kV (maximální hodnota), vzdálenost desek $d = 10$ cm.

$$x = mr = \frac{\omega \sqrt{\epsilon \mu}}{c} r = \frac{6,28 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^{10}} \cdot \sqrt{81 \cdot 1 \cdot 10} = 1,88.$$

Z diagramu 62,1 odečteme, že pro $x = 1,88$ je $J_0(x) \doteq 0,26$.

$$E_0 = \frac{U}{d} = \frac{8000}{10} = 800 \text{ V/cm},$$

$$E = E_0 J_0(x) = 800 \cdot 0,26 = 208 \text{ V/cm}.$$

V okamžiku, kdy v ose kondenzátoru je maximální intenzita elektrického pole $E_0 = 800$ V/cm, je ve vzdálenosti $r = 10$ cm pouze $E = 208$ V/cm. Ve vzdálenosti $r = 12,8$ cm od osy, čemuž odpovídá argument $x = 2,41$, se intenzita elektrického pole trvale rovná nule.

Z diagramu 62,2 odečteme, že pro $x = 1,88$ je $J_1(x) \doteq 0,57$. Intentiza H magnetického pole na uvažovaném poloměru $r = 10$ cm, z výrazu (62,11):

$$H = \frac{1}{120\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0 J_1(x) = \frac{\sqrt{81}}{377} \cdot 800 \cdot 0,57 = 10,9 \text{ A/cm}.$$

6.22. Obecně platný diagram pro průběh intenzity E

Dělíme-li intenzitu E v místě o poloměru r intenzitou E_0 v ose kondenzátoru, dostaneme z (62,4):

$$\frac{E}{E_0} = \frac{E}{E_0} = J_0(x) = J_0\left(\frac{2\pi}{\lambda} r\right). \quad (62,12)$$

Upravme vhodně argument x :

$$x = \frac{2\pi}{\lambda} r = \frac{2\pi f}{\lambda f} r = \frac{2\pi f}{v} r = \frac{2\pi f}{c} \sqrt{\epsilon \mu r} = \frac{2\pi}{c} \sqrt{\epsilon \mu} fr. \quad (62,13)$$

Uvažujme válec z dielektrika o konstantě $\epsilon = 50$. Odvodme průběh $J_0(x)$ v závislosti na poloměru r pro různé kmitočty.

$$x = \frac{6,28}{3 \cdot 10^{10}} \cdot \sqrt{50 \cdot 1} fr = 1,48 \cdot 10^{-9} fr. \quad (62,14)$$

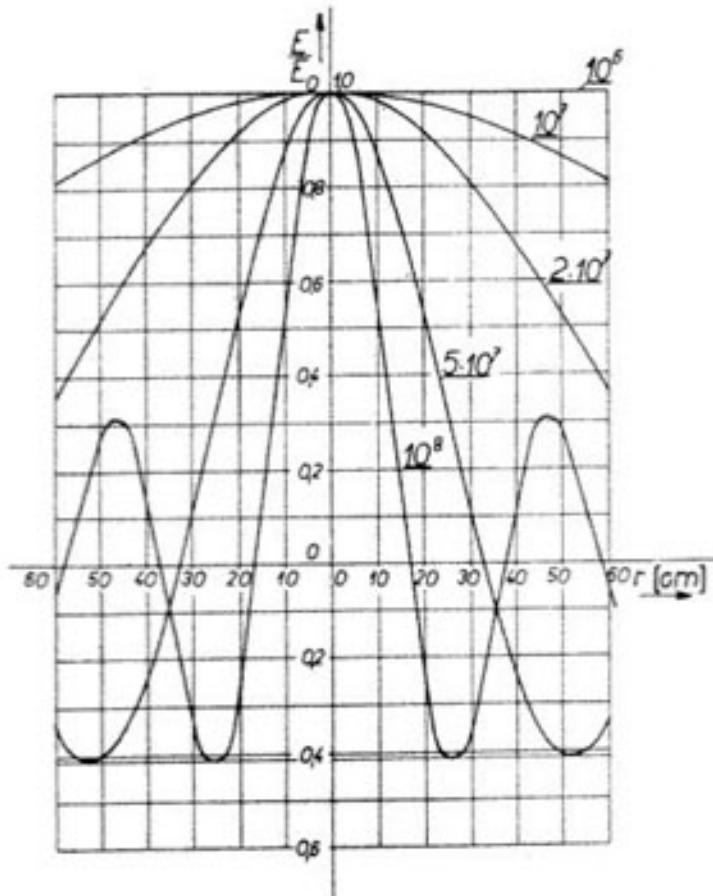
Dosazovali jsme do (62,14) postupně proměnnou $r = 10, 20, 30, 40, 50, 60$ cm a proměnnou $f = 10^6; 10^7, 2 \cdot 10^7; 5 \cdot 10^7; 10^8$, vypočtené hodnoty argumentu x jsou v tabulce 62,1. Z tabulek jsme odečetli odpovídající hodnoty funkce $J_0(x)$ a zapsali rovněž do 62,1:

Tabulka 62,1

Kmitočet [Hz]:	10^6		10^7		$2 \cdot 10^7$		$5 \cdot 10^7$		10^8	
	r [cm]:	x	$J_0(x)$	x	$J_0(x)$	x	$J_0(x)$	x	$J_0(x)$	x
10	0,0148	0,9999	0,148	0,9944	0,296	0,978	0,74	0,868	1,48	0,523
20	0,0296	0,9998	0,296	0,978	0,592	0,914	1,48	0,523	2,96	-0,243
30	0,0444	0,9994	0,444	0,951	0,888	0,811	2,22	0,0993	4,44	-0,334
40	0,0592	0,9991	0,592	0,914	1,184	0,679	2,96	-0,243	5,92	+0,128
50	0,0740	0,9985	0,740	0,868	1,480	0,523	3,70	-0,334	7,40	+0,279
60	0,0888	0,9980	0,888	0,811	1,776	0,354	4,44	-0,334	8,88	-0,060

Vypočtené výsledky jsou zobrazeny v diagramu 62,3.

Je-li v uvažovaném případě ($\varepsilon = 50$) kmitočet $f < 10^6$, můžeme považovat elektrické pole mezi deskami kondenzátoru o průměru 120 cm prakticky za homogenní. Roste-li kmitočet dále, stává se pole nehomogenním. Největší intenzita E je v ose kondenzátoru (mezi napájecími body) a klesá s rostoucím poloměrem r .



Obr. 62,3. Průběh intenzity elektrického pole stojatého vlnění v nevodivém válcovém prostoru jako funkce kmitočtu.

Obecně platí, že elektrické pole mezi deskami je homogenní, je-li vlnová délka značně větší než průměr kondenzátoru. Pro porovnání jsou v tabulce 62,2 uvedeny vlnové délky λ pro příslušné kmitočty pro $\varepsilon = 50$ podle

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{f\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad [\text{cm}].$$

Tabulka 62,2

Kmitočet [Hz]	10^4	10^5	$2 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$	10^6
Vlnová délka λ [cm]	4250	425	212,5	85	42,5

6.23. Výrazy pro E a H v případě že argument x je malý

Není-li kmitočet mimořádně vysoký, je $\lambda \gg r$. Např. pro $f = 10^7$ Hz, $\varepsilon = 4$ je

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{f\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{4 \cdot 1 \cdot 10^7}} = 1,5 \cdot 10^3 \text{ cm}.$$

Pro poloměr $r = 15$ cm bude:

$$x = \frac{2\pi}{\lambda} r = \frac{6,28}{1,5 \cdot 10^3} \cdot 15 = 0,0628.$$

Pro $x = 0,063$ je $J_0(x) = 0,99910$, $J_1(x) = 0,02992$.

Pro $x \rightarrow 0$, $J_0(x) \rightarrow 1,00$, $J_1(x) \rightarrow \frac{x}{2}$.

Pro malé hodnoty argumentu x bude

$$E \doteq E_0 \cdot 1,0 = E_0 \quad [\text{V/cm}], \quad (62,15)$$

$$H = +j \frac{1}{120\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0 \frac{x}{2} \quad [\text{A/cm}, \text{V/cm}]. \quad (62,16)$$

Při nepříliš vysokých kmitočtech ($\lambda \gg r$), je elektrické pole v celém válci prakticky homogenní. Intenzita magnetického pole H roste velmi přibližně lineárně s poloměrem r .

6.24. Proud I a impedanční Z_{11} bezetrátového válce

Vyjdeme z obecných výrazů (61,55) a (61,26). Argument m je podle (62,2):

$$m = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu} = \frac{x}{r},$$

$$\begin{aligned} I &= -2\pi r_1 \frac{m}{j\omega \mu_0 \mu} E_0 J_1(mr_1) = \\ &= +j 2\pi r_1 \frac{\omega \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}}{\omega \mu_0 \mu} E_0 J_1\left(\frac{2\pi}{\lambda} r_1\right) = +j \frac{r_1}{60} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0 J_1(x_1) \\ &\quad [\text{A}, \text{V/cm}]. \quad (62,17) \end{aligned}$$

Hodnota proudu I v případě malého argumentu x_1 :

$$I = 2\pi r_1 \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} E_0 \frac{x_1}{2} = 2\pi r_1 \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} E_0 \frac{1}{2} \omega \sqrt{\mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon} r_1 = j\omega \pi r_1^2 \varepsilon_0 \varepsilon E_0 \quad [\text{A}, \text{V/cm}, \text{cm}]. \quad (62,18)$$

Impedanci Z_{11} dostaneme z (61,26):

$$Z_{11} = -j \frac{\omega \mu_0 \mu}{2\pi r_1 \omega \sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu}} \frac{J_0\left(\frac{2\pi}{\lambda} r_1\right)}{J_1\left(\frac{2\pi}{\lambda} r_1\right)} = -j \frac{1}{2\pi r_1} 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{J_0(x_1)}{J_1(x_1)} = -j \frac{60}{r_1} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{J_0(x_1)}{J_1(x_1)} [\Omega/\text{cm}]. \quad (4,19)$$

Impedance Z_{11} je čistě jalová. Odvodme impedanci pro případ malého argumentu x_1 :

$$\begin{aligned} Z_{11} &= -j \frac{1}{2\pi r_1} \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon}} \frac{1 \cdot 2}{mr_1} = -j \frac{1}{\pi r_1^2} \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon}} \frac{1}{\omega \sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu}} = \\ &= -j \frac{1}{\pi r_1^2} \frac{1}{\omega \epsilon_0 \epsilon} [\Omega/\text{cm}]. \end{aligned} \quad (62,20)$$

Převratná hodnota impedance je kapacitní vodivost Y_{11} :

$$Y_{11} = \frac{1}{Z_{11}} = +j\omega \pi r_1^2 \epsilon_0 \epsilon [\text{S}/\text{cm}]. \quad (62,21)$$

6.3. Válec z dielektrika s malými ztrátami

Do této kategorie patří většina případů dielektrického ohřevu v praxi. Komplexní argument m , rovn. (61,8), bude mít hodnotu

$$\begin{aligned} m^2 &= -j\omega \mu_0 \mu (\gamma + j\omega \epsilon_0 \epsilon) = -j\omega \mu_0 \mu j\omega \epsilon_0 \epsilon \left(\frac{\gamma}{j\omega \epsilon_0 \epsilon} + 1 \right) = \\ &= +\omega^2 \frac{\epsilon \mu}{c^2} \left(1 - j \frac{\gamma}{\omega \epsilon_0 \epsilon} \right) = \left(\frac{\omega}{v} \right)^2 \left(1 - j \frac{\gamma}{\omega \epsilon_0 \epsilon} \right). \end{aligned} \quad (63,1)$$

Podle (60,8) je druhý člen v závorce ztrátový úhel $\operatorname{tg} \delta$. V dalším budeme značit zkráceně znakem y :

$$\frac{\gamma}{\omega \epsilon_0 \epsilon} = \operatorname{tg} \delta = y. \quad (63,2)$$

Komplexní argument (mr) je potom

$$(mr) = \frac{\omega}{v} r \sqrt{1 - jy} = x \sqrt{1 - jy}. \quad (63,3)$$

Reálná část

$$x = \frac{\omega}{v} r = \frac{2\pi}{\lambda} r. \quad (63,4)$$

6.31. Intenzita E elektrického pole

Vyjdeme z obecného výrazu (61,21): $E = E_0 J_0(mr)$. Besselova funkce $J_0(mr)$ je obecně definována řadou (73,5)

$$J_0(mr) = 1 - \frac{(mr)^2}{2^2} + \frac{(mr)^4}{(2 \cdot 4)^2} - \frac{(mr)^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} + \dots \quad (63,5)$$

Vyjádřeme jednotlivé členy:

$$(mr)^2 = x^2 (1 - jy) \quad (63,6)$$

$$(mr)^4 = x^4 (1 - jy)^2 = x^4 (1 - 2jy - y^2) \doteq x^4 (1 - 2jy).$$

Protože hodnoty výrazu $y = \operatorname{tg} \delta$, rovn. (63,2), je v uvažovaném případě malá, můžeme zanedbat proti 1 potence vyšší než prvu.

Obdobně v dalších členech řady (63,5)

$$(mr)^6 = (mr)^2 (mr)^4 = x^2 (1 - jy) x^4 (1 - 2jy) \doteq x^6 (1 - 3jy), \text{ atd.}$$

Dosadíme do rovnice (63,5):

$$\begin{aligned} J_0(mr) &= 1 - \frac{x^2}{2^2} (1 - jy) + \frac{x^4}{(2 \cdot 4)^2} (1 - 2jy) - \frac{x^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} (1 - 3jy) + \dots = \\ &= \left[1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{(2 \cdot 4)^2} - \frac{x^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} + \dots \right] + jy \frac{x}{2} \left[\frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} + \frac{x^5}{(2 \cdot 4)^2 \cdot 6} - \dots \right] \end{aligned} \quad (63,7)$$

Řady v závorkách definují Besselovy funkce $J_0(x)$ a $J_1(x)$ argumentu x (příloha 7,30). Výraz (63,7) bude

$$J_0(mr) = J_0(x) + jy \frac{x}{2} J_1(x). \quad (63,8)$$

Pro intenzitu elektrického pole E ve válcu s malými ztrátami dostáváme výraz

$$E = E_0 J_0(mr) = E_0 [J_0(x) + jy \frac{x}{2} J_1(x)] [\text{V}/\text{cm}]. \quad (63,9)$$

Při dielektrickém ohřevu máme vždy zájem na tom, aby vývin tepla v celém válcu byl pokud možno rovnoměrný. Toho se dosáhne pouze v případě, že argument x má malou hodnotu. Uvažujme jako horní mez $x = 1,0$. Z tabulek odečteme

$$J_0(1,0) = 0,76520, \quad J_1(1,0) = 0,44005.$$

Znak y v (63,9) značí ztrátový úhel $\operatorname{tg} \delta$. Nechť je uvažovaná střední hodnota $\operatorname{tg} \delta = 0,045$, potom druhý člen ve výrazu (63,9) pro $x = 1,0$ bude

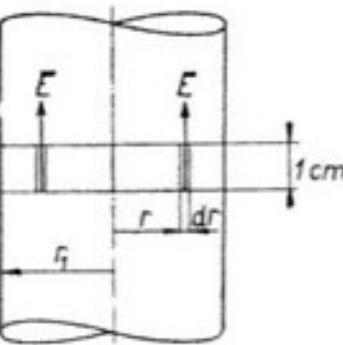
$$y \frac{x}{2} J_1(x) = 0,045 \cdot 0,5 \cdot 0,44005 = 0,99 \cdot 10^{-2} \doteq 0,01.$$

Druhý člen ve výrazu (63,9) je malý proti prvnímu členu a příčítá se k němu kolmo. Můžeme jej proto zanedbat (přibližně pro $x \leq 1,0$) a pro intenzitu elektrického pole \mathbf{E} ve válcu s malými ztrátami dostaneme stejný výraz, jako byl (62,8) pro \mathbf{E} v bezetrátovém dielektriku:

$$\mathbf{E} = E_0 \mathbf{J}_0(x) \quad [\text{V/cm}]. \quad (63,10)$$

6.32. Odvození tepla v dielektriku s malými ztrátami

Kondenzátor s dielektrickými ztrátami nahrazujeme pro výpočty kondenzátorem s paralelně připojeným odporem podle obr. 60,2. Elektrická vodivost γ dielektrika je podle (60,9):



$$\gamma = \omega \epsilon_0 \epsilon \cdot \operatorname{tg} \delta.$$

Je-li v místě o poloměru r intenzita elektrického pole \mathbf{E} a vodivost materiálu γ , je množství tepla, které vznikne v jednotce objemu, tzv. měrný příkon σ :

$$\sigma = \frac{1}{2} \gamma E^2 = \frac{1}{2} \gamma E_0^2 J_0^2(x) \quad [\text{W/cm}^3, \text{S.cm}^{-1}, \text{V/cm}]. \quad (63,11)$$

Vytkněme dvěma řezy kolmými k ose válcovou vrstvu o osové délce 1 cm, obr. 63,1.

Uvažujme elementární válec o poloměru r , tloušťce dr , výšce 1 cm. V tomto válcu vznikne za 1 vteřinu teplo dP_1 :

$$dP_1 = 2\pi r dr \cdot 1 \cdot \sigma = \pi \gamma E_0^2 J_0^2(x) r dr \quad [\text{W}]. \quad (63,12)$$

Obr. 63,1. Diagram pro odvození tepla při dielektrickém prohřívání.

Vzájemný vztah mezi x a r je dán výrazem (63,3):

$$(mr)^2 = x^2(1 - jy) = \left(\frac{2\pi}{\lambda} r\right)^2 (1 - jy). \quad (63,13)$$

Absolutní hodnota:

$$|(mr)|^2 = x^2 \sqrt{1 + y^2}. \quad (63,14)$$

Uvažovaná střední hodnota $y = \operatorname{tg} \delta$ je 0,045. Můžeme proto zanedbat y^2 proti 1, takže velmi přibližně

$$x \doteq mr, \quad r = \frac{x}{m}, \quad r dr = \frac{1}{m^2} x dx. \quad (63,15)$$

$$dP_1 = \pi \gamma E_0^2 \frac{1}{m^2} J_0^2(x) x dx = \pi \gamma E_0^2 \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 J_0^2(x) x dx. \quad (63,16)$$

Teplo ve válcové části mezi oběma řezy

$$P_1 = \pi \gamma E_0^2 \frac{1}{m^2} \int_0^{x_1} J_0^2(x) x dx = \pi \gamma E_0^2 \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \int_0^{x_1} J_0^2(x) x dx \quad [\text{W/cm}, \text{S.cm}^{-1}, \text{V/cm}]. \quad (63,17)$$

K řešení integrálu v rovnici (63,17) použijeme speciálního Lommelova integrálního vztahu, známého z teorie cylindrických funkcí [7,4]:

$$\int_0^{x_1} x J_n^2(ax) dx = \frac{x_1^2}{2} \left[J_n'(ax_1) + \left(1 - \frac{n^2}{a^2 x_1^2}\right) J_n^2(ax_1)\right]. \quad (63,18)$$

V našem případě: $a = 1$, $n = 0$. $J_0'(ax_1)$ je první derivace funkce $J_0(ax_1)$, $J'(x)$ se rovná podle (73,8) $-J_1(x)$. Dosadme do (63,18):

$$\int_0^{x_1} x J_0^2(x) dx = \frac{x_1^2}{2} [J_0'^2(x_1) + J_0^2(x_1)] = \frac{x_1^2}{2} [J_1^2(x_1) + J_0^2(x_1)]. \quad (63,19)$$

Dosadme výsledek (63,19) do (63,17):

$$\begin{aligned} P_1 &= \pi \gamma E_0^2 \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \frac{x_1^2}{2} [J_0^2(x_1) + J_1^2(x_1)] = \pi \gamma E_0^2 \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\lambda} r_1\right)^2 [J_0^2(x_1) + J_1^2(x_1)] = \\ &= \frac{1}{2} \pi r_1^2 \gamma E_0^2 [J_0^2(x_1) + J_1^2(x_1)] \quad [\text{W/cm}, \text{S.cm}^{-1}, \text{V/cm}]. \end{aligned} \quad (63,20)$$

Výraz (63,20) udává množství tepla, které se vyvine při dielektrickém prohřívání ve válcu o poloměru r_1 a výšce 1 cm. Dělíme-li množství tepla P_1 objemem válce ($\pi r_1^2 \cdot 1$) cm^3 , dostaneme střední měrný příkon σ_s :

$$\sigma_s = \frac{P_1}{\pi r_1^2} = \frac{1}{2} \gamma E_0^2 [J_0^2(x_1) + J_1^2(x_1)] \quad [\text{W/cm}^3, \text{S.cm}^{-1}, \text{V/cm}]. \quad (63,21)$$

Při dielektrickém prohřívání je důležité, aby bylo rovnoměrné v celém průřezu. Stupeň rovnoměrnosti ϵ' ohřevu rozumíme poměr měrného příkonu σ v uvažovaném místě (podle 63,11) a středního příkonu σ_s :

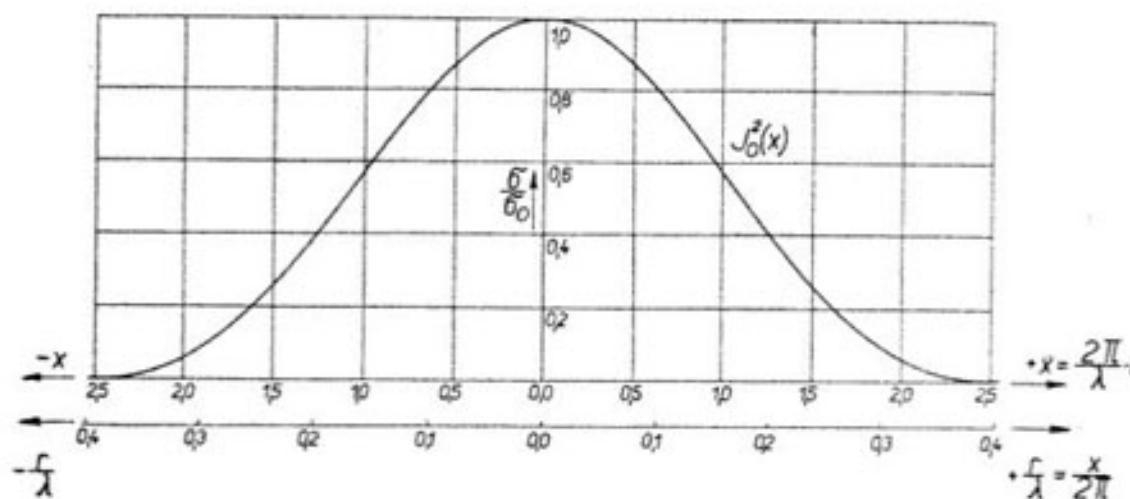
$$\epsilon' = \frac{\sigma}{\sigma_s} = \frac{\frac{1}{2} \gamma E_0^2 J_0^2(x)}{\frac{1}{2} \gamma E_0^2 [J_0^2(x_1) + J_1^2(x_1)]} = \frac{J_0^2(x)}{J_0^2(x_1) + J_1^2(x_1)}. \quad (63,22)$$

Příklad 63,1

Stanovme graficky průběh měrného příkonu σ v závislosti na poloměru r . Označme σ_0 měrný příkon v ose kondenzátoru, $r = 0$, $x = 0$. Vytvořme poměr

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{\frac{1}{2} \gamma E_0^2 J_0^2(x)}{\frac{1}{2} \gamma E_0^2 J_0^2(0)} = J_0^2(x). \quad (63,23)$$

Hodnoty $J_0^2(x)$ jsou v tabulce 63,1. Graficky je průběh $\frac{\sigma}{\sigma_0}$ zobrazen v diagramu 63,2.



Obr. 63,2. Průběh měrného příkonu při dielektrickém prohřívání, v závislosti na argumentu x .

Tabulka 63,1

x	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	1,00	1,50	2,0	2,405	2,50
$J_0(x)$	1,000	0,99752	0,99002	0,9763	0,9604	0,93847	0,7652	0,51183	0,22389	0,000	0,04838
$J_0^2(x)$	1,000	0,995	0,980	0,954	0,922	0,880	0,585	0,262	0,0502	0,000	0,00234

Na obr. 63,2 je vyznačen průběh $\frac{\sigma}{\sigma_0}$ v závislosti na argumentu $x = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot r\right)$.

Pro zvýšení názornosti je vynesena rovněž další vodorovná stupnice v jednotkách $\frac{r}{\lambda} = \frac{x}{2\pi}$. Z grafu je vidět, že měrný příkon σ klesá, roste-li argument x .

Máme-li na mysli určitý kmitočet, potom graf ukazuje, jak klesá měrný příkon, roste-li poloměr r . V místě o argumentu $x = 2,405$ klesá křivka $J_0^2(x)$ k nule. To značí, že na kružnici o příslušném poloměru r nevzniká v materiálu žádné teplo. Pro tento poloměr dostaneme výraz:

$$x = \frac{2\pi}{\lambda} r = 2,405, \quad r = 2,405 \frac{\lambda}{2\pi} = 0,384 \lambda \quad [\text{cm}].$$

V praxi je třeba volit vhodně použitý kmitočet a napájecí body tak, aby vývin tepla byl pokud možno rovnoměrný.

Příklad 63,2

Stanovme stupeň rovnoměrnosti ε' ohřevu podle (63,22) pro tento případ: prohříváme materiál o dielektrické konstantě $\varepsilon = 4$, $\operatorname{tg} \delta = 0,05$, kmitočet $20 \cdot 10^6$ Hz, poloměr válce $r_1 = 10$ cm, přiváděné napětí $U = 10$ kV (maximální hodnota), vzdálenost desek $d = 8$ cm.

$$x_1 = \frac{2\pi}{\lambda} r_1 = \frac{\omega \sqrt{\varepsilon \mu}}{c} r_1 = \frac{6,28 \cdot 2 \cdot 10^7 \sqrt{4 \cdot 1}}{3 \cdot 10^{10}} = 0,0838,$$

$$J_0^2(x_1) = 0,9960, \quad J_1^2(x_1) = 0,0020,$$

$$E_0 = \frac{U}{d} = \frac{10^4}{8} = 1,25 \cdot 10^3 \quad \text{V/cm},$$

$$\gamma = \omega \varepsilon_0 \varepsilon \operatorname{tg} \delta = 6,28 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 8,85 \cdot 10^{-14} \cdot 4 \cdot 0,05 = 2,22 \cdot 10^{-6} \text{ S.cm}^{-1}.$$

Množství tepla P_1 , které vznikne ve válci o poloměru r_1 a výšce 1 cm (podle 63,20):

$$P_1 = \frac{1}{2} \pi r_1^2 \gamma E_0^2 [J_0^2(x_1) + J_1^2(x_1)] = \\ = 0,5 \cdot 3,14 \cdot 10^2 \cdot 2,22 \cdot 10^{-6} \cdot (1,25 \cdot 10^3)^2 \cdot [0,996 + 0,0020] = 543 \text{ W/cm}.$$

Střední měrný příkon σ_s podle (63,21):

$$\sigma_s = \frac{P_1}{\pi r_1^2} \frac{543}{3,14 \cdot 10^2} = 1,73 \text{ W/cm}^2.$$

Stupeň rovnoměrnosti ohřevu v ose válce:

$$\varepsilon' = \frac{\sigma_0}{\sigma_s} \frac{J_0^2(0)}{J_0^2(x_1) + J_1^2(x_1)} = \frac{1,00}{0,996 + 0,002} = 1,002.$$

Stupeň rovnoměrnosti ohřevu na poloměru r_1 :

$$\varepsilon' = \frac{\sigma_1}{\sigma_s} \frac{J_0^2(x_1)}{J_0^2(x_1) + J_1^2(x_1)} = \frac{0,966}{0,966 + 0,002} = 0,998.$$

Příklad 63,3

Stanovme stupeň rovnoměrnosti ohřevu ve stejném případě jako v 63,2, avšak použitý kmitočet je 10^3 Hz.

$$x_1 = 0,0838 \cdot 5 = 0,4190,$$

$$J_0^2(x_1) = 0,915, \quad J_1^2(x_1) = 0,042,$$

$$\gamma = 2,22 \cdot 10^{-6} \cdot 5 = 11,10 \cdot 10^{-6} \text{ S.cm}^{-1},$$

$$P_1 = \frac{1}{2} \pi r_1^2 \gamma E_0^2 [J_0^2(x_1) + J_1^2(x_1)] = 0,5 \cdot 3,14 \cdot 10^2 \cdot 11,1 \cdot 10^{-6} \cdot 1,25^2 \cdot 10^6 \cdot [0,915 + 0,042] = 2610 \text{ W/cm}.$$

Střední měrný příkon:

$$\sigma_s = \frac{P_1}{\pi r_1^2} = \frac{2610}{3,14 \cdot 10^2} = 8,32 \text{ W/cm}^2.$$

Stupeň rovnoměrnosti v ose válce:

$$\epsilon' = \frac{\sigma_0}{\sigma_s} = \frac{J_0^2(0)}{J_0^2(x_1) + J_1^2(x_1)} = \frac{1,00}{0,915 + 0,042} = 1,044.$$

Stupeň rovnoměrnosti ohřevu na poloměru r_1 :

$$\epsilon' = \frac{\sigma_1}{\sigma_s} = \frac{J_0^2(x_1)}{J_0^2(x_1) + J_1^2(x_1)} = \frac{0,915}{0,915 + 0,042} = 0,956.$$

6,33. Množství tepla ve válci v případě malého argumentu x_1

Vyjdeme z výrazu pro P_1 , rovn. (63,20):

$$P_1 = \frac{1}{2} \pi r_1^2 \gamma E_0^2 [J_0^2(x_1) + J_1^2(x_1)] \quad [\text{W/cm}].$$

Uvažujme rozsah argumentu $0 < x_1 < 0,1$. Pro $x_1 = 0,1$ odečteme z tabulek: $J_0(0,1) = 0,99750$, $J_1(0,1) = 0,04994$.

Ve výrazu pro P_1 můžeme zanedbat $J_1^2(x_1)$ proti $J_0^2(x_1) \doteq 1,0$, takže výraz (63,20) se zjednoduší:

$$P_1 = \frac{1}{2} \pi r_1^2 \gamma E_0^2 \quad [\text{W/cm}]. \quad (63,24)$$

Dosadme do (63,24) za γ a E_0 :

$$P_1 = 0,5 \pi r_1^2 \omega \varepsilon_0 \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \delta \left(\frac{U_m}{d} \right)^2 = 0,5 \pi r_1^2 2\pi f \cdot 8,85 \cdot 10^{-14} \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \delta \cdot 2 \left(\frac{U_{ef}}{d} \right)^2 =$$

$$= 5,55 \cdot \pi r_1^2 \frac{1}{d^2} f \varepsilon \operatorname{tg} \delta U_{ef}^2 \cdot 10^{-13} \quad [\text{W/cm, cm, V}]. \quad (63,25)$$

Množství tepla P ve válci o poloměru r_1 a délce d [cm] bude:

$$P = P_1 d = 5,55 \pi r_1^2 \frac{1}{d} f \varepsilon \operatorname{tg} \delta U_{ef}^2 \cdot 10^{-13} \quad [\text{W, cm, V}]. \quad (63,26)$$

7. Přílohy

7.1. Některé poznatky z počítání s prostorovými vektorůmi, přicházející v této práci

Vektor je rozložen na 3 vzájemně kolmé složky ve směru souřadných os X, Y, Z . Jednotkové vektorové vektory ve směru souřadných os označujeme $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$,

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k} = \mathbf{E}_x + \mathbf{E}_y + \mathbf{E}_z. \quad (71,1)$$

Skalární součin C vektorů \mathbf{A} a \mathbf{B} se značí

$$C = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}. \quad (71,2)$$

Vektorový součin C vektorů \mathbf{A}, \mathbf{B}

$$\mathbf{C} = [\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}] = \mathbf{A} \times \mathbf{B}. \quad (71,3)$$

Tak zvaný Hamiltonův diferenciální operátor ∇ (del, nabla) je dán výrazem:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (71,4)$$

Gradient skaláru P :

$$\text{Grad } P = \nabla P = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) P = \frac{\partial P}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial P}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (71,5)$$

Skalární součin $(\nabla \mathbf{E}) = \nabla \mathbf{E}$:

$$(\nabla \mathbf{E}) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) (E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (71,6)$$

Výraz (71,6) se nazývá divergence vektoru \mathbf{E} :

$$\text{div } \mathbf{E} = (\nabla \mathbf{E}) = \nabla \mathbf{E}. \quad (71,7)$$

Vektorový součin $[\nabla \mathbf{E}] = \nabla \times \mathbf{E}$:

$$[\nabla \mathbf{E}] = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) (E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k}) \right] = \\ = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (71,8)$$

Výraz na pravé straně uvádí rot \mathbf{E} (rotace, rotor vektoru \mathbf{E}). V anglické literatuře se označuje curl \mathbf{E} .

Laplaceův diferenciální operátor vektoru \mathbf{H}

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{H} = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} \right). \quad (71,9)$$

Vektor \mathbf{H} rozepišme na složky:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{H} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (H_x \mathbf{i} + H_y \mathbf{j} + H_z \mathbf{k}) = \\ &= \left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} \right) \mathbf{j} + \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} \right) \mathbf{k}, \end{aligned} \quad (71,10)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \nabla^2 H_x \mathbf{i} + \nabla^2 H_y \mathbf{j} + \nabla^2 H_z \mathbf{k}. \quad (71,11)$$

Některé složitější vektorové výrazy:

Skalární součin:

$$\begin{aligned} (\mathbf{H} \cdot [\nabla \mathbf{E}]) &= (H_x \mathbf{i} + H_y \mathbf{j} + H_z \mathbf{k}) \left\{ \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right\} = H_x \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + H_y \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \\ &\quad + H_z \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (71,12)$$

Obdobně:

$$(\mathbf{E} \cdot [\nabla \mathbf{H}]) = E_x \left(\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + E_y \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + E_z \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right). \quad (71,13)$$

Ovodme divergenci vektorového součinu $[\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}]$:

$$\begin{aligned} \text{div } [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}] &= (\nabla \cdot [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}]), \\ [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}] &= [(E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k}) (H_x \mathbf{i} + H_y \mathbf{j} + H_z \mathbf{k})] = \\ &= (E_y H_z - E_z H_y) \mathbf{i} + (E_z H_x - E_x H_z) \mathbf{j} + (E_x H_y - E_y H_x) \mathbf{k}, \end{aligned} \quad (71,14)$$

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}]) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) [(E_y H_z - E_z H_y) \mathbf{i} + (E_z H_x - E_x H_z) \mathbf{j} + \\ &\quad + (E_x H_y - E_y H_x) \mathbf{k}] = E_x \left(\frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) + E_y \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \\ &\quad + E_z \left(\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) + H_x \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) + H_y \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \\ &\quad + H_z \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (71,15)$$

Porovnáme-li (71,15) s (71,12) a (71,13), je vidět:

$$\text{div } [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}] = (\nabla \cdot [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}]) = (\mathbf{H} \cdot [\nabla \mathbf{E}]) - (\mathbf{E} \cdot [\nabla \mathbf{H}]). \quad (71,16)$$

Odvodíme ještě rot rot \mathbf{H} :

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \mathbf{H} &= [\nabla[\nabla \mathbf{H}]] = \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \\ &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right] = - \left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} \right) \mathbf{i} - \left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} \right) \mathbf{j} - \\ &- \left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} \right) \mathbf{k} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial y} \mathbf{i} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial z} \mathbf{i} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial x \partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y \partial z} \mathbf{j} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial x \partial z} \mathbf{k} + \\ &\quad + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y \partial z} \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (71,17)$$

$$\begin{aligned} \text{Grad div } \mathbf{H} &= \nabla \text{div } \mathbf{H} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} \mathbf{i} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} \mathbf{j} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} \mathbf{k} \right) + \frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial y} \mathbf{i} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial z} \mathbf{i} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial x \partial y} \mathbf{j} + \\ &\quad + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y \partial z} \mathbf{j} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial x \partial z} \mathbf{k} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y \partial z} \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (71,18)$$

Porovnáme-li (71,17) s výsledky (71,10) a (71,18), dostaneme:

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = \text{grad div } \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H} \quad (71,19)$$

7.2. Goniometrické a hyperbolické funkce a jejich vztahy, vyskytující se v této práci

Rady definující funkce s reálným argumentem x :

$$\left. \begin{aligned} \sin x &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \\ \sinh x &= \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots, \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \\ \cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (72,1)$$

$$\left. \begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \\ e^{-x} &= 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \end{aligned} \right\} \quad (72,2)$$

Pro součet a rozdíl řad e^x a e^{-x} dostaneme

$$\left. \begin{aligned} e^x + e^{-x} &= 2 \cosh x, & \cosh x &= \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}), \\ e^x - e^{-x} &= 2 \sinh x, & \sinh x &= \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}), \end{aligned} \right\} \quad (72,3)$$

$$\left. \begin{aligned} e^x &= \cosh x + \sinh x, \\ e^{-x} &= \cosh x - \sinh x. \end{aligned} \right\} \quad (72,4)$$

Funkce s imaginárním argumentem (jx)

$$\left. \begin{aligned} j^1 &= j, & j^3 &= -j, & j^5 &= j^4 j = j, \\ j^2 &= -1, & j^4 &= +1, & j^6 &= j^4 j^2 = -1, \text{ atd.} \end{aligned} \right\} \quad (72,5)$$

Dosadíme-li do řad (72,1) a (72,2) místo x argument jx , dostaneme

$$\left. \begin{aligned} \sin(jx) &= j \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right) = j \cdot \sin x, \\ \sinh(jx) &= j \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) = j \cdot \sin x, \\ \cos(jx) &= \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \right) = \cosh x, \\ \cosh(jx) &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right) = \cos x. \end{aligned} \right\} \quad (72,6)$$

$$\left. \begin{aligned} e^{jx} &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right) + j \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) = \\ &= \cos x + j \sin x = \cosh(jx) + \sinh(jx) \\ e^{-jx} &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right) - j \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) = \\ &= \cos x - j \sin x = \cosh(jx) - \sinh(jx), \end{aligned} \right\} \quad (72,7)$$

$$\left. \begin{aligned} e^{jx} + e^{-jx} &= 2 \cos x, & \cos x &= \frac{1}{2} (e^{jx} + e^{-jx}), \\ e^{jx} - e^{-jx} &= 2j \sin x, & j \sin x &= \frac{1}{2} (e^{jx} - e^{-jx}). \end{aligned} \right\} \quad (72,8)$$

Funkce s komplexním argumentem $[(1+j)x] = (\sqrt{2}j)x$

$$\left. \begin{aligned} e^{(1+j)x} &= e^x e^{jx} = (\cosh x + \sinh x)(\cos x + j \sin x) = \\ &= \cosh x \cdot \cos x + \sinh x \cdot \cos x + j \cosh x \cdot \sin x + j \sinh x \cdot \sin x, \end{aligned} \right\} \quad (72,9)$$

$$\left. \begin{aligned} e^{-(1+j)x} &= e^{-x} e^{-jx} = \\ &= \cosh x \cdot \cos x - \sinh x \cdot \cos x - j \cosh x \cdot \sin x + j \sinh x \cdot \sin x. \end{aligned} \right\} \quad (72,9a)$$

Sečteme a odečteme poslední dvě řady:

$$\left. \begin{aligned} e^{(1+j)x} + e^{-(1+j)x} &= 2(\cosh x \cdot \cos x + j \sinh x \cdot \sin x), \\ e^{(1+j)x} - e^{-(1+j)x} &= 2(\sinh x \cdot \cos x + j \cosh x \cdot \sin x). \end{aligned} \right\} \quad (72,10)$$

Použijeme známých výrazů pro součet argumentů:

$$\left. \begin{aligned} \cosh(x+y) &= \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y, \\ \sinh(x+y) &= \sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y. \end{aligned} \right\} \quad (72,10a)$$

Potom

$$\begin{aligned} \cosh[(1+j)x] &= \cosh(\sqrt{2j}x) = \cosh(x+jx) = \\ &= \cosh x \cdot \cosh(jx) + \sinh x \cdot \sinh(jx) = \\ &= \cosh x \cdot \cos x + j \sinh x \cdot \sin x, \end{aligned} \quad (72,11)$$

$$\begin{aligned} \sinh[(1+j)x] &= \sinh(\sqrt{2j}x) = \sinh(x+jx) = \\ &= \sinh x \cdot \cosh(jx) + \cosh x \cdot \sinh(jx) = \\ &= \sinh x \cdot \cos x + j \cosh x \cdot \sin x. \end{aligned} \quad (72,12)$$

Porovnejme (72,10), (72,11), (72,12):

$$\left. \begin{aligned} [e^{(1+j)x} + e^{-(1+j)x}] &= 2 \cosh[(1+j)x], \\ [e^{(1+j)x} - e^{-(1+j)x}] &= 2 \sinh[(1+j)x], \end{aligned} \right\} \quad (72,13)$$

$$[e^{pz} + e^{-pz}] = \left[e^{(1+j)\frac{z}{a}} + e^{-(1+j)\frac{z}{a}} \right] = 2 \cosh\left[(1+j)\frac{z}{a}\right] = 2 \cosh pz, \quad (72,14)$$

$$[e^{pz} - e^{-pz}] = 2 \sinh pz. \quad (72,15)$$

7.3. Cylindrické funkce

(podrobněji je tato část rozvedena v [7,6]).

7.31. Cylindrické funkce reálného argumentu

Cylindrické funkce jsou řešením Besselovy diferenciální rovnice 2. řádu tvaru

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0. \quad (73,1)$$

Řešení rovnice (84,1) lze psát ve tvaru

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 N_n(x). \quad (73,2)$$

Číslo n uvádí řad cylindrické funkce. Znaky C_1, C_2 jsou integrační konstanty, jejichž hodnoty se odvodi z mezních podmínek.

$J_n(x)$ je cylindrická funkce prvního druhu (funkce Besselova), $N_n(x)$ je cylindrická funkce druhého druhu (funkce Neumannova). Obě funkce jsou n -tého řádu, s reálným argumentem x .

Při řešení válekového elmg. vlnění v prázdné dutině cívky dojdeme k rovnici

$$\frac{d^2H}{d(mr)^2} + \frac{1}{(mr)} \frac{dH}{d(mr)} + H = 0. \quad (73,3)$$

H značí intenzitu magnetického pole v místě o poloměru r , součinitel $m = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \mu} = \frac{\omega}{v}$ je reálný. Pro výpočet intenzity elektrického pole E je nutné určit první derivaci $\frac{dH}{dr}$.

Rovn. (73,3) je shodná s rovn. (73,1), pro řad $n = 0$, pro argument $x = (mr)$. Řešení (73,3) je tedy

$$H = C_1 J_0(mr) + C_2 N_0(mr), \quad (73,4)$$

$J_0(mr), N_0(mr)$ jsou cylindrické funkce prvního a druhého druhu, nultého řádu, s reálným argumentem (mr) .

Besselova funkce $J_0(x)$ prvního druhu nultého řádu je určena řadou

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{(2 \cdot 4)^2} - \frac{x^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} + \frac{x^8}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8)^2} - \dots \quad (73,5)$$

Funkce $N_0(x)$ druhého druhu, funkce Neumannova nultého řádu je definována řadou

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln \frac{x}{2} \right) J_0(x) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}. \quad (73,6)$$

Znak γ je Eulerova konstanta, $\gamma = 0,577 215 66$. Pro výpočet intenzity elektrického pole E potřebujeme znát 1. derivaci funkce $J_0(x)$ a $N_0(x)$ podle x :

$$\frac{d[J_0(x)]}{dx} = \left[-\frac{x}{2} + \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} - \frac{x^5}{(2 \cdot 4)^2 \cdot 6} + \frac{x^7}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2 \cdot 8} - \frac{x^9}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8)^2 \cdot 10} + \dots \right] \quad (73,7)$$

Záporně vzatá hodnota této derivace je funkce Besselova $J_1(x)$ prvního druhu, prvního řádu:

$$J_1(x) = -\frac{d[J_0(x)]}{dx}. \quad (73,8)$$

Obdobně funkce Neumannova $N_1(x)$ druhého druhu prvního řádu je zápornou derivací funkce $N_0(x)$ podle x :

$$\begin{aligned} N_1(x) &= -\frac{d[N_0(x)]}{dx} = \frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln \frac{x}{2} \right) J_1(x) - \frac{2}{\pi x} - \\ &- \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n+1} \left\{ 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} \right\}. \end{aligned} \quad (73,9)$$

Funkce: $J_0(x), J_1(x), N_0(x), N_1(x)$ pro reálný argument x jsou dány v tabulkách [7,9], [7,10].

7.32. Cylindrické funkce komplexního argumentu ($x\sqrt{-j}$)

K těmto funkcím vede Besselova rovnice, kterou dostaneme při řešení válečového vlnění ve vodivém válci, pro intenzitu magnetického pole H , na poloměru r :

$$\frac{d^2H}{dx\sqrt{-j}^2} + \frac{1}{(x\sqrt{-j})} \frac{dH}{dx\sqrt{-j}} + H = 0. \quad (73,10)$$

Je to Besselova rovnice stejněho typu jako (73,3), pro komplexní argument $(x\sqrt{-j})$. Její řešení:

$$H = C_1 J_0(x\sqrt{-j}) + C_2 N_0(x\sqrt{-j}). \quad (73,11)$$

Ve výrazu (73,11) dostáváme Besselovu a Neumannovu funkci nultého řádu, pro argument $(x\sqrt{-j})$. Příslušné řady dostaneme z řad (73,5), (73,6), (73,7), (73,9), když za x dosadíme argument $(x\sqrt{-j})$.

$$\sqrt{-j} = \pm \frac{1-j}{\sqrt{2}} = \mp j \frac{1+j}{\sqrt{2}} = \mp j\sqrt{j} = \mp j^{\frac{3}{2}}. \quad (73,12)$$

V příslušných řadách vyjdou střídavě členy reálné a imaginární. Součet členů reálných funkcí $J_0(x\sqrt{-j})$ se označuje ber x , součet imaginárních bei x , podobně ner x a nei x u funkce $N_0(x\sqrt{-j})$.

$$J_0(x\sqrt{-j}) = \text{ber } x - j \text{ bei } x, \quad (73,13)$$

$$\text{ber } x = \left(1 - \frac{x^4}{(2 \cdot 4)^2} + \frac{x^8}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8)^2} - \frac{x^{12}}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12)^2} + \dots \right), \quad (73,14)$$

$$\text{bei } x = \left(-\frac{x^2}{2^2} + \frac{x^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} - \frac{x^{10}}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10)^2} + \dots \right), \quad (73,15)$$

$$N_0(x\sqrt{-j}) = \text{ner } x - j \text{ nei } x. \quad (73,16)$$

Funkce prvního řádu jsou opět derivacemi funkcí nultého řádu:

$$J_1(x\sqrt{-j}) = -\frac{d[J_0(x\sqrt{-j})]}{dx\sqrt{-j}} = -\sqrt{j}(\text{ber}' x - j \text{ bei}' x). \quad (73,17)$$

Funkce $\text{ber}' x$, $\text{bei}' x$ jsou derivacemi funkcí $\text{ber } x$, $\text{bei } x$ podle x .

$$\text{ber}' x = \left(-\frac{x^3}{2^2 \cdot 4} + \frac{x^7}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2 \cdot 8} - \frac{x^{11}}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10)^2 \cdot 12} + \dots \right), \quad (73,14a)$$

$$\text{bei}' x = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^6}{(2 \cdot 4)^2 \cdot 6} - \frac{x^8}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8)^2 \cdot 10} + \dots \right), \quad (73,15a)$$

$$N_1(x\sqrt{-j}) = -\frac{d[N_0(x\sqrt{-j})]}{dx\sqrt{-j}} = -\sqrt{j}(\text{ner}' x - j \text{ nei}' x). \quad (73,18)$$

Funkce $\text{ner}' x$, $\text{nei}' x$ jsou derivace funkcií $\text{ner } x$, $\text{nei } x$ podle x . Funkce $\text{ber } x$, $\text{bei } x$, $\text{ber}' x$, $\text{bei}' x$ a $\text{ner } x$, $\text{nei } x$, $\text{ner}' x$, $\text{nei}' x$ jsou uvedeny v tabulkách 7,4 na konci této knihy, dále [7,7], [7,10].

7.33. Cylindrické funkce Hankelovy

Hankelovy funkce n -tého řádu, prvního a druhého druhu: $H_n^{(1)}(x)$, $H_n^{(2)}(x)$, jsou komplexně sdruženými řešeními rovnice Besselovy. Mezi cylindrickými funkcemi $J_n(x)$, $N_n(x)$ prvního a druhého druhu, n -tého řádu a funkcemi Hankelovými platí tyto vzájemné vztahy:

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + j N_n(x), \quad (73,19)$$

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - j N_n(x). \quad (73,20)$$

Poznámka: Uvedené vztahy mezi cylindrickými funkcemi jsou analogické se vztahy mezi exponenciální funkcí imaginárního argumentu a goniometrickými funkcemi $\sin x$ a $\cos x$ (vzorec Eulerův):

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi, \quad (73,21)$$

$$e^{-j\varphi} = \cos \varphi - j \sin \varphi. \quad (73,22)$$

Sečteme-li nebo odečteme výrazy (74,19), (74,20) dostaneme:

$$J_n(x) = \frac{1}{2} [H_n^{(2)}(x) + H_n^{(1)}(x)] = H_n^{(1)}(x) - j N_n(x) = H_n^{(2)}(x) + j N_n(x), \quad (73,23)$$

$$N_n(x) = j \cdot \frac{1}{2} [H_n^{(2)}(x) - H_n^{(1)}(x)] = j J_n(x) - j H_n^{(1)}(x) = j H_n^{(2)}(x) - j J_n(x). \quad (73,24)$$

V některých tabulkách nejsou uvedeny hodnoty cylindrických funkcí druhého druhu $N_0(x)$, $N_1(x)$ pro imaginární a komplexní argument, jsou tam však uvedeny funkce prvního druhu $J_0(x)$, $J_1(x)$ a funkce Hankelovy pro tytéž argumenty. Za použití výrazů (73,23) a (73,24) můžeme potom určit i funkce druhého druhu (podrobněji v [7,6]).

V některých případech potřebujeme znát limitu funkcií $N_0(x\sqrt{-j})$ a $N_1(x\sqrt{-j})$ pro x rostoucí do nekonečna. Tyto limity nebyly přímo odvozeny, avšak můžeme je určit z limit funkcí Besselových a Hankelových, za použití výrazů (73,23) a (73,24).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} J_0(x\sqrt{-j}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \left[\cos \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} \right) + j \sin \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{j\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right)} = \frac{e^{-j\frac{\pi}{8}}}{\sqrt{2\pi x}} e^{\sqrt{j}x}, \end{aligned} \quad (73,25)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} J_1(x \sqrt{-j}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \left[\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) - j \cdot \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \right] = \\ &= -j \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \left[\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \right] = \\ &= -j \frac{e^{-j \frac{\pi}{8}}}{\sqrt{2\pi x}} e^{\sqrt{j}x}. \end{aligned} \quad (73,26)$$

Limity Hankelových funkcí:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} H_0^{(2)}(x \sqrt{-j}) &= \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}\pi x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left[\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) + j \cdot \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \right] = \\ &= +j \frac{e^{-j \frac{\pi}{8}}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}} e^{-\sqrt{j}x}. \end{aligned} \quad (73,27)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} H_1^{(2)}(x \sqrt{-j}) &= \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}\pi x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left[-\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \right] = \\ &= -j \frac{e^{-j \frac{\pi}{8}}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}} e^{-\sqrt{j}x}. \end{aligned} \quad (73,28)$$

Funkce Neumannovy odvodíme z (73,24):

$$N_0(x \sqrt{-j}) = j [H_0^{(2)}(x \sqrt{-j}) - J_0(x \sqrt{-j})],$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} N_0(x \sqrt{-j}) &= j \left[j \frac{e^{-j \frac{\pi}{8}}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}} e^{-\sqrt{j}x} - \frac{e^{-j \frac{\pi}{8}}}{\sqrt{2\pi x}} e^{\sqrt{j}x} \right] = \\ &= -\frac{e^{-j \frac{\pi}{8}}}{\sqrt{2\pi x}} [2e^{-\sqrt{j}x} + j e^{\sqrt{j}x}], \end{aligned} \quad (73,29)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} N_1(x \sqrt{-j}) &= j \left[-\frac{e^{-j \frac{\pi}{8}}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}} e^{\sqrt{j}x} + j \frac{e^{-j \frac{\pi}{8}}}{\sqrt{2\pi x}} e^{\sqrt{j}x} \right] = \\ &= -j \frac{e^{-j \frac{\pi}{8}}}{\sqrt{2\pi x}} [2e^{-\sqrt{j}x} - j e^{\sqrt{j}x}]. \end{aligned} \quad (73,30)$$

7.34. Některé integrály cylindrických funkcí

Vyjdeme z výrazu:

$$J_1(x \sqrt{-j}) = -\frac{d[J_0(x \sqrt{-j})]}{dx} = -\frac{d[J_0(x \sqrt{-j})]}{\sqrt{-j} dx}, \quad (73,31)$$

$$\begin{aligned} \frac{d[J_0(x \sqrt{-j})]}{dx} &= -\sqrt{-j} J_1(x \sqrt{-j}) = -\frac{1-j}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1+j}{\sqrt{2}} \right) (\operatorname{ber}' x - j \operatorname{bei}' x) = \\ &= (\operatorname{ber}' x - j \operatorname{bei}' x), \end{aligned}$$

$$\int J_1(x \sqrt{-j}) dx = -\frac{1}{\sqrt{-j}} J_0(x \sqrt{-j}) = -\sqrt{j} J_0(x \sqrt{-j}),$$

$$\int_{x_1}^{x_2} J_1(x \sqrt{-j}) dx = -\sqrt{j} [J_0(x_2 \sqrt{-j}) - J_0(x_1 \sqrt{-j})]. \quad (73,32)$$

Odvození integrálu $\int x \cdot J_0(x \sqrt{-j}) dx$:

$$\begin{aligned} \int x J_0(x \sqrt{-j}) dx &= \int x \operatorname{ber} x dx - j \int x \operatorname{bei} x dx = \\ &= \int x \left[1 - \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^4 + \frac{1}{(4!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^8 - \dots \right] dx - j \int x \left[-\left(\frac{x}{2} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^6 + \dots \right] dx = x \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{2!3!} \left(\frac{x}{2} \right)^5 - \dots \right] - jx \left[-\frac{1}{2!} \left(\frac{x}{2} \right)^3 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3!4!} \left(\frac{x}{2} \right)^7 - \dots \right] = x[-\operatorname{bei}' x - j \operatorname{ber}' x] = -jx (\operatorname{ber}' x - j \operatorname{bei}' x) = \\ &= -jx \left[-\frac{J_1(x \sqrt{-j})}{\sqrt{j}} \right] = x \sqrt{j} J_1(x \sqrt{-j}), \end{aligned} \quad (73,33)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} x J_0(x \sqrt{-j}) dx = \sqrt{j} [x_2 J_1(x_2 \sqrt{-j}) - x_1 J_1(x_1 \sqrt{-j})]. \quad (73,34)$$

Řešení integrálu $\int J_0(x \sqrt{-j}) J_1(x \sqrt{-j}) dx$

Použijeme způsobu integrace „per partes“:

$$\int u dv = uv - \int v du, \quad (73,35)$$

$$u = J_0(x \sqrt{-j}) \quad dv = J_1(x \sqrt{-j}) dx.$$

$$\begin{aligned} du &= d[J_0(x \sqrt{-j})] = -\sqrt{-j} J_1(x \sqrt{-j}) dx, \\ v &= \int J_1(x \sqrt{-j}) dx = -\sqrt{j} J_0(x \sqrt{-j}). \end{aligned}$$

Po dosazení do (73,35):

$$\begin{aligned} & \int J_0(x\sqrt{-j}) J_1(x\sqrt{-j}) dx = \\ & = J_0(x\sqrt{-j})(-\sqrt{j}) J_0(x\sqrt{-j}) - \int -\sqrt{j} J_0(x\sqrt{-j})(-\sqrt{-j}) J_1(x\sqrt{-j}) dx = \\ & = -\sqrt{j} J_0^2(x\sqrt{-j}) - \int J_0(x\sqrt{-j}) J_1(x\sqrt{-j}) dx, \\ & \int_{x_1}^{x_2} J_0(x\sqrt{-j}) J_1(x\sqrt{-j}) dx = -\frac{1}{2} \sqrt{j} [J_0^2(x_2\sqrt{-j}) - J_0^2(x_1\sqrt{-j})]. \end{aligned} \quad (73,36)$$

7.35. Cylindrické funkce pro velmi malé reálné hodnoty argumentu $x \rightarrow 0$

Vyjděme z definic uvedených v části 7.31.

$$\left. \begin{aligned} J_0(x) &= 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \dots \\ J_1(x) &= \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{192} - \dots \right) \\ N_0(x) &= \frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln \frac{x}{2} \right) J_0(x) - \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} \left(1 + \frac{1}{2} \right) - \dots \right] \\ N_1(x) &= \frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln \frac{x}{2} \right) J_1(x) - \frac{2}{\pi x} - \frac{1}{\pi} \left[\frac{x}{2} - \frac{x^3}{16} \left(2 + \frac{1}{2} \right) + \dots \right]. \end{aligned} \right\} \quad (73,37)$$

Zjistěme, které členy v uvedených řadách budou zanedbatelně malé např. již pro $x = 10^{-3}$:

$$\left. \begin{aligned} \ln \frac{x}{2} &= -7,599, \quad \gamma = 0,577 215 66, \quad \left(\gamma + \ln \frac{x}{2} \right) = -7,022, \\ J_0(x) &\doteq 1,0, \quad J_1(x) \doteq \frac{x}{2}, \\ N_0(x) &\doteq \frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln \frac{x}{2} \right), \quad N_1(x) \doteq -\frac{2}{\pi x}. \end{aligned} \right\} \quad (73,38)$$

7.36. Cylindrické funkce pro velmi veliké hodnoty reálného argumentu $x \rightarrow \infty$

Podle [7,9] jsou v tomto případě cylindrické funkce definovány těmito výrazy:

$$\left. \begin{aligned} J_0(x) &\doteq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ P_0(x) \cdot \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - Q_0(x) \cdot \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right\}, \\ J_1(x) &\doteq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ P_1(x) \cdot \cos \left(x - \frac{3\pi}{4} \right) - Q_1(x) \cdot \sin \left(x - \frac{3\pi}{4} \right) \right\}, \\ N_0(x) &\doteq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ P_0(x) \cdot \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + Q_0(x) \cdot \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right\}, \\ N_1(x) &\doteq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ P_1(x) \cdot \sin \left(x - \frac{3\pi}{4} \right) + Q_1(x) \cdot \cos \left(x - \frac{3\pi}{4} \right) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (73,39)$$

Funkce $P_0(x)$, $Q_0(x)$, $P_1(x)$, $Q_1(x)$ jsou dány složitými konvergentními řadami, ve kterých se argument x objevuje vždy ve jmenovateli. Např. pro $x = 10$ můžeme již zanedbat všechny další členy kromě prvních dvou:

$$\left. \begin{aligned} P_0(x) &\doteq 1 - \frac{(1 \cdot 3)^2}{2! (8x)^2} + \dots = 1,0000 - 0,000 702 + \dots \\ Q_0(x) &\doteq -\frac{1}{8x} + \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5)^2}{3! (8x)^3} - \dots = -0,0125 + 0,000 073 3 \\ P_1(x) &\doteq 1 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2! (8x)^2} - \dots = 1,0000 + 0,001 17 \\ Q_1(x) &\doteq \frac{1 \cdot 3}{1! (8x)} - \frac{(1 \cdot 3)^2 \cdot 5 \cdot 7}{3 (8x)^3} + \dots = 0,0375 - 0,000 102 5 \end{aligned} \right\} \quad (73,40)$$

Roste-li $x \rightarrow \infty$, potom bude

$$P_0(x) \doteq 1,0, \quad Q_0(x) \doteq 0, \quad P_1(x) \doteq 1,0, \quad Q_1(x) \doteq 0. \quad (73,41)$$

Rozepišme goniometrické funkce v (73,39):

$$\left. \begin{aligned} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) &= \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos x + \sin x), \\ \cos \left(x - \frac{3\pi}{4} \right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (-\cos x + \sin x), \\ \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin x - \cos x), \\ \sin \left(x - \frac{3\pi}{4} \right) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (\sin x + \cos x). \end{aligned} \right\} \quad (73,42)$$

Dosadme (73,41) a (73,42) do (74,39):

$$J_0(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi x}} (\cos x + \sin x) = -N_1(x), \quad (73,43)$$

$$J_1(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi x}} (-\cos x + \sin x) = -N_0(x). \quad (73,44)$$

7.4.

 Tabulky cylindrických funkcí prvního a druhého
 druhu, nultého a prvního rádu, pro komplexní
 argument ($x \sqrt{-j}$)

$J_0(x \sqrt{-j})$ cylindrická funkce prvního druhu, nultého rádu, $\left\{ \begin{array}{l} \text{funkce} \\ \text{Besselovy} \end{array} \right.$
 $J_1(x \sqrt{-j})$ cylindrická funkce prvního druhu, prvního rádu, $\left\{ \begin{array}{l} \text{funkce} \\ \text{Neumannovy} \end{array} \right.$
 $N_0(x \sqrt{-j})$ cylindrická funkce druhého druhu, nultého rádu, $\left\{ \begin{array}{l} \text{funkce} \\ \text{Neumannovy} \end{array} \right.$
 $N_1(x \sqrt{-j})$ cylindrická funkce druhého druhu, prvního rádu, $\left\{ \begin{array}{l} \text{funkce} \\ \text{Neumannovy} \end{array} \right.$

$$J_0(x \sqrt{-j}) = (\text{ber } x - j \text{ bei } x),$$

$$J_1(x \sqrt{-j}) = -\sqrt{j}(\text{ber}' x - j \text{ bei}' x),$$

$$N_0(x \sqrt{-j}) = (\text{ner } x - j \text{ nei } x),$$

$$N_1(x \sqrt{-j}) = -\sqrt{j}(\text{ner}' x - j \text{ nei}' x).$$

Hodnoty funkcí: ber x , bei x , ber' x , bei' x ,
 ner x , nei x , ner' x , nei' x .

x	ber x	bei x	ber' x	bei' x	ner x	nei x	ner' x	nei' x
0,00	1,0000	-0,00000	-0,00000	-0,00000	-	0,5000	0,0000	0,0000
0,02	1,0000	-0,00010	-0,00000	-0,0100	-2,564	0,5003	31,84	0,0288
0,04	1,0000	-0,00040	-0,00000	-0,0200	-2,123	0,5011	15,93	0,0488
0,06	1,0000	-0,00090	-0,00001	-0,0300	-1,864	0,5023	10,63	0,0655
0,08	1,0000	-0,00160	-0,00003	-0,0400	-1,681	0,5037	7,978	0,0800
0,10	1,0000	-0,00250	-0,00006	-0,0500	-1,538	0,5054	6,391	0,0929
0,15	1,0000	-0,00562	-0,00021	-0,0750	-1,279	0,5108	4,282	0,1199
0,20	1,0000	-0,01000	-0,00050	-0,1000	-1,093	0,5173	3,234	0,1414
0,25	0,9999	-0,01562	-0,00098	-0,1250	-0,948	0,5249	2,611	0,1588
0,30	0,9999	-0,02250	-0,00169	-0,1500	-0,8288	0,5332	2,200	0,1729
0,35	0,9998	-0,03062	-0,00268	-0,1750	-0,7264	0,5421	1,911	0,1842
0,40	0,9996	-0,04000	-0,00400	-0,2000	-0,6365	0,5516	1,697	0,1930
0,45	0,9994	-0,05062	-0,00570	-0,2250	-0,5559	0,5614	1,535	0,1997
0,50	0,9990	-0,0625	-0,00781	-0,2499	-0,4824	0,5715	1,408	0,2043
0,55	0,9986	-0,0756	-0,01040	-0,2749	-0,4146	0,5818	1,308	0,2071
0,60	0,9980	-0,0900	-0,01350	-0,2998	-0,3513	0,5922	1,231	0,2082
0,65	0,9972	-0,1056	-0,01716	-0,3247	-0,2916	0,6026	1,161	0,2076
0,70	0,9962	-0,1224	-0,02143	-0,3496	-0,2349	0,6129	1,108	0,2054
0,75	0,9951	-0,1405	-0,02636	-0,3744	-0,1807	0,6231	1,064	0,2017
0,80	0,9936	-0,1599	-0,03199	-0,3991	-0,1284	0,6330	1,028	0,1966
0,85	0,9918	-0,1805	-0,03837	-0,4238	-0,0778	0,6427	0,993	0,1900
0,90	0,9898	-0,2023	-0,04554	-0,4485	-0,0285	0,6520	0,9742	0,1820
0,95	0,9873	-0,2253	-0,05355	-0,4730	0,0197	0,6609	0,9516	0,1726
1,00	0,9844	-0,2496	-0,0624	-0,4974	0,0671	0,6693	0,9396	0,1619
1,05	0,9810	-0,2750	-0,0723	-0,5217	0,1137	0,6770	0,9257	0,1497
1,10	0,9771	-0,3017	-0,0831	-0,5458	0,1598	0,6842	0,9188	0,1362
1,15	0,9727	-0,3296	-0,0949	-0,5698	0,2056	0,6907	0,9115	0,1214
1,20	0,9676	-0,3587	-0,1078	-0,5935	0,2512	0,6963	0,9084	0,1051
1,25	0,9619	-0,3890	-0,1218	-0,6171	0,2965	0,7012	0,9061	0,0875
1,30	0,9554	-0,4204	-0,1370	-0,6403	0,3418	0,7050	0,9059	0,0684
1,35	0,9482	-0,4530	-0,1533	-0,6633	0,3871	0,7080	0,9075	0,0481
1,40	0,9401	-0,4867	0,1709	-0,6860	0,4325	0,7099	0,9095	0,0262
1,45	0,9311	-0,5216	-0,1898	-0,7083	0,4781	0,7106	0,9138	0,0029
1,50	0,9211	-0,5576	-0,2100	-0,7302	0,5239	0,7101	-0,9175	-0,0218
1,55	0,9100	-0,5946	-0,2316	-0,7517	0,5699	0,7083	0,9228	-0,0481
1,60	0,8979	-0,6327	-0,2545	-0,7727	0,6161	0,7053	0,9287	-0,0757
1,65	0,8846	-0,6719	-0,2790	-0,7932	0,6628	0,7008	0,9353	-0,1050
1,70	0,8700	-0,7120	-0,3048	-0,8131	0,7097	0,6948	0,9421	-0,1356
1,75	0,8541	-0,7532	-0,3322	-0,8324	0,7570	0,6872	0,9493	-0,1679
1,80	0,8367	-0,7953	-0,3612	-0,8509	0,8047	0,6779	0,9565	-0,2018
1,85	0,8179	-0,8383	-0,3917	-0,8687	0,8527	0,6670	0,9638	-0,2372
1,90	0,7975	-0,8821	-0,4238	-0,8857	0,9010	0,6542	0,9711	-0,2742
1,95	0,7755	-0,9268	-0,4576	-0,9019	0,9197	0,6395	0,9782	-0,3128
2,00	0,7517	-0,9723	-0,4931	-0,9170	0,9988	0,6228	0,9849	-0,3532
2,05	0,7262	-1,0185	-0,5302	-0,9311	1,0482	0,6042	0,9911	-0,3951
2,10	0,6987	-1,0654	-0,5691	-0,9442	1,0979	0,5834	0,9969	-0,4387
2,15	0,6692	-1,1129	0,6097	-0,9560	1,1479	0,5603	1,0020	-0,4840
2,20	0,6377	-1,1610	-0,6520	-0,9666	1,1981	0,5349	1,0063	-0,5310
2,25	0,6040	-1,2095	-0,6961	-0,9758	1,2485	0,5072	1,0097	-0,5796
2,30	0,5680	-1,2585	-0,7420	-0,9836	1,2990	0,4769	1,0121	-0,6300

x	ber x	bei x	ber' x	bei' x	ner x	nel x	ner' x	nel' x
2,35	0,5298	-1,3079	0,7897	-0,9898	1,3497	0,4442	1,0133	-0,6882
2,40	0,4890	-1,3575	-0,8392	-0,9944	1,4004	0,4086	1,0133	-0,7360
2,45	0,4458	-1,4073	0,8905	-0,9973	1,4510	0,3705	1,0120	-0,7916
2,50	0,4000	-1,4572	-0,9436	-0,9983	1,5016	0,3295	1,0091	-0,8488
2,55	0,3514	-1,5071	0,9985	-0,9973	1,5519	0,2856	1,0045	-0,9078
2,60	0,3001	-1,5569	-1,0551	-0,9943	1,6020	0,2387	0,9982	-0,9684
2,65	0,2459	-1,6065	-1,1136	-0,9890	1,6517	0,1887	0,9899	-1,0307
2,70	0,1887	-1,6557	-1,1738	-0,9815	1,7009	0,1356	0,9797	-1,095
2,75	0,1285	-1,7046	1,2357	-0,9715	1,7496	0,0793	0,9672	-1,160
2,80	+0,0651	-1,7529	-1,2993	-0,9590	1,7977	+0,0195	0,9524	-1,227
2,85	-0,0015	-1,7004	-1,3645	-0,9437	1,8448	-0,0136	0,9350	-1,296
2,90	-0,0714	-1,8472	-1,431	-0,9257	1,8911	-0,1101	0,9152	-1,366
2,95	-0,1446	-1,8929	-1,500	-0,9046	1,9362	-0,1802	0,8924	-1,438
3,00	-0,2214	-1,9376	-1,570	-0,8805	1,9803	-0,2540	0,8668	-1,511
3,05	-0,3017	-1,9809	-1,641	-0,8531	2,0229	-0,3314	0,8381	-1,585
3,10	-0,3855	-2,0228	-1,714	-0,8223	2,0640	-0,4125	0,8062	-1,661
3,15	-0,4731	-2,0631	-1,788	-0,7880	2,1034	-0,4975	0,7708	-1,738
3,20	-0,5644	-2,1016	-1,864	-0,7499	2,1411	-0,5864	0,7318	-1,817
3,25	-0,6595	-2,1380	-1,940	-0,7080	2,1765	-0,6792	0,6892	-1,896
3,30	-0,7584	-2,1723	-2,018	-0,6621	2,2099	-0,7760	0,6426	-1,976
3,35	-0,8613	-2,2042	-2,096	-0,6121	2,2408	-0,8769	0,5921	-2,057
3,40	-0,968	-2,2384	-2,175	-0,5577	2,2690	-0,9817	0,5373	-2,138
3,45	-1,079	-2,2599	-2,256	-0,4988	2,2945	-1,909	0,4780	-2,221
3,50	-1,194	-2,2832	-2,336	-0,4353	2,3167	-1,204	0,4143	-2,304
3,55	-1,312	-2,3033	-2,417	-0,3670	2,3358	-1,321	0,3458	-2,387
3,60	-1,435	-2,3199	-2,498	-0,2937	2,3513	-1,442	0,2724	-2,470
3,65	-1,5562	-2,3326	-2,580	-0,2152	2,3639	-1,568	0,1939	-2,554
3,70	-1,693	-2,3413	-2,661	-0,131	2,3706	-1,698	+ 0,1097	-2,636
3,75	-1,7828	-2,3457	-2,742	-0,042	2,3739	-1,831	+ 0,0208	-2,719
3,80	-1,967	-2,3454	-2,822	+0,053	2,3726	-1,969	- 0,0740	-2,801
3,85	-2,111	-2,3403	-2,902	0,153	2,3644	-2,112	- 0,1738	-2,882
3,90	-2,258	-2,3300	-2,981	0,260	2,3551	-2,258	- 0,2806	-2,963
3,95	-2,409	-2,3142	-3,058	0,372	2,3482	-2,408	- 0,3923	-3,041
4,00	-2,563	-2,2927	-3,135	0,491	2,3157	-2,562	- 0,5110	-3,120
4,05	-2,722	-2,2650	-3,209	0,616	2,2870	-2,720	- 0,6357	-3,195
4,10	-2,884	-2,2309	-3,282	0,748	2,2520	-2,881	- 0,7673	-3,269
4,15	-3,050	-2,1901	-3,352	0,887	2,1102	-3,047	- 0,9060	-3,341
4,20	-3,219	-2,142	-3,420	1,032	2,1612	-3,215	- 1,051	-3,410
4,25	-3,392	-2,087	-3,485	1,184	2,1053	-3,388	- 1,202	-3,476
4,30	-3,568	-2,024	-3,547	1,343	2,0414	-3,563	- 1,361	-3,539
4,35	-3,747	-1,952	-3,605	1,510	1,9685	-3,742	- 1,527	-3,598
4,40	-3,928	-1,873	-3,659	1,683	1,8886	-3,922	- 1,701	-3,652
4,45	-4,113	-1,784	-3,709	1,864	1,7988	-4,107	- 1,880	-3,704
4,50	-4,299	-1,686	-3,754	2,053	1,700	-4,293	- 2,069	-3,749
4,55	-4,488	-1,579	-3,794	2,249	1,592	-4,482	- 2,264	-3,790
4,60	-4,678	-1,461	-3,828	2,452	1,473	-4,671	- 2,467	-3,825
4,65	-4,870	-1,333	-3,856	2,663	1,345	-4,863	- 2,677	-3,853
4,70	-5,064	-1,195	-3,878	2,882	1,206	-5,057	- 2,896	-3,876
4,75	-5,258	-1,045	-3,893	3,108	1,055	-5,251	- 3,121	-3,891
4,80	-5,453	-0,884	-3,901	3,342	0,894	-5,446	- 3,355	-3,900
4,85	-5,648	-0,711	-3,900	3,584	0,720	-5,641	- 3,596	-3,899
4,90	-5,843	-0,525	-3,891	3,833	0,534	-5,836	- 3,845	-3,891

x	ber x	bei x	ber' x	bei' x	ner x	nel x	ner' x	nel' x
4,95	-6,037	-0,327	-3,873	4,090	0,335	-6,030	-4,101	-3,873
5,00	-6,230	-0,116	-3,845	4,354	+0,123	-6,223	-4,365	-3,846
5,05	-6,421	-0,108	-3,808	4,626	-0,101	-6,414	-4,636	-3,809
5,10	-6,611	+0,347	-3,759	4,905	-0,341	-6,604	-4,915	-3,760
5,15	-6,797	+0,599	-3,699	5,191	-0,593	-6,790	-5,201	-3,700
5,20	-6,980	0,866	-3,627	5,484	-0,861	-6,973	-5,493	-3,629
5,25	-7,160	1,147	-3,542	5,783	-1,142	-7,153	-5,792	-3,544
5,30	-7,334	1,444	-3,445	6,089	-1,440	-7,327	-6,097	-3,447
5,35	-7,504	1,757	-3,333	6,402	-1,753	-7,497	-6,410	-3,335
5,40	-7,667	2,085	-3,206	6,720	-2,081	-7,661	-6,727	-3,209
5,45	-7,824	2,429	-3,065	7,044	-2,426	-7,818	-7,051	-3,068
5,50	-7,974	2,789	-2,907	7,373	-2,786	-7,968	-7,380	-2,910
5,55	-8,115	3,166	-2,733	7,707	-3,163	-8,109	-7,713	-2,736
5,60	-8,247	3,560	-2,541	8,045	-3,558	-8,241	-8,051	-2,544
5,65	-8,368	3,971	-2,331	8,388	-3,969	-8,362	-8,394	-2,334
5,70	-8,479	4,399	-2,102	8,734	-4,397	-8,473	-8,739	-2,105
5,75	-8,578	4,844	-1,854	9,082	-4,843	-8,573	-9,087	-1,857
5,80	-8,664	5,307	-1,586	9,433	-5,306	-8,659	-9,438	-1,589
5,85	-8,737	5,787	-1,296	9,786	-5,786	-8,732	-9,790	-1,299
5,90	-8,794	6,285	-0,984	10,139	-6,284	-8,789	-10,143	-0,987
5,95	-8,835	6,801	-0,650	10,493	-6,800	-8,830	-10,497	-0,653
5,99	-8,855	7,227	-0,366	10,776	-7,227	-8,850	-10,780	-0,369

7.5. Tabulka pro výpočet činného odporu a reaktance duté vsázkky.
Platí pro $\mu = 1$. Podle N. M. Rodigina.

x_1	x_2	$\frac{AC + BD}{C^2 + D^2}$	$\frac{BC - AD}{C^2 + D^2}$	x_1	x_2	$\frac{AC + BD}{C^2 + D^2}$	$\frac{BC - AD}{C^2 + D^2}$
0,2	0	0,0005	0,1000	3,5	0	0,5699	0,7251
	0,1	0,0005	0,1000		0,5	0,5700	0,7250
	0,2	0,0000	0,1000		1,0	0,5721	0,7234
					1,5	0,5842	0,7200
0,3	0	0,0017	0,1500	4,0	2,0	0,6248	0,7280
	0,1	0,0017	0,1500		2,4	0,6971	0,7782
	0,2	0,0014	0,1500		2,8	0,7742	0,9617
	0,3	0,0000	0,1500		3,2	0,6525	1,4322
0,5	0	0,0078	0,2497	4,0	3,5	0,0000	1,7498
	0,2	0,0076	0,2497		0	0,5843	0,7143
	0,4	0,0047	0,2499		1,0	0,5845	0,7129
	0,5	0,0000	0,2500		2,0	0,6052	0,6973
1,0	0	0,0608	0,4899	4,0	2,4	0,6443	0,6954
	0,4	0,0594	0,4905		2,8	0,7221	0,7272
	0,6	0,0535	0,4928		3,2	0,8509	0,8720
	0,8	0,0367	0,4969		3,6	0,8945	1,3444
	0,9	0,0215	0,4990		3,8	0,6473	1,7513
	1,0	0,0000	0,5000		4,0	0,0000	2,0051
1,5	0	0,1844	0,6812	4,5	0	0,5945	0,7107
	0,4	0,1839	0,6819		1,0	0,5942	0,7101
	0,8	0,1748	0,6928		2,0	0,5972	0,6980
	1,2	0,1037	0,7332		2,6	0,6256	0,6780
	1,4	0,0508	0,7463		3,2	0,7299	0,6834
	1,5	0,0000	0,7500		3,6	0,8775	0,7835
2,0	0	0,3449	0,7738	5,0	4,0	1,0479	1,1820
	0,4	0,3450	0,7743		4,2	0,9741	1,6730
	0,8	0,3454	0,7824		4,4	0,4658	2,1477
	1,2	0,3364	0,8193		4,5	0,0000	2,2502
	1,6	0,2655	0,9115		0	0,6040	0,7101
	1,8	0,1663	0,9695		1,0	0,6036	0,7100
2,5	2,0	0,0000	1,0000	5,5	2,0	0,6008	0,7045
	0	0,4718	0,7770		3,0	0,6249	0,6691
	0,5	0,4723	0,7771		3,4	0,6842	0,6591
	1,0	0,4794	0,7849		3,8	0,7855	0,6680
	1,4	0,4933	0,8090		4,2	0,9824	0,8079
	1,8	0,4910	0,9207		4,6	1,1841	1,3953
3,0	2,0	0,4531	1,0140	5,5	4,8	0,9544	2,0382
	2,2	0,3509	1,1310		5,0	0,0000	2,5003
	2,4	0,1346	1,1888		0	0,6130	0,7102
	2,5	0,0000	1,2500		1,0	0,6128	0,7103
	0	0,5400	0,7486		2,0	0,6100	0,7091
	0,5	0,5403	0,7485		3,0	0,6080	0,6881
280	1,0	0,5456	0,7490	5,5	3,4	0,6225	0,6663
	1,4	0,5620	0,7560		3,8	0,6666	0,6416
	1,8	0,5901	0,8040		4,2	0,7644	0,6347
	2,2	0,6399	0,9051		4,6	0,9638	0,7217
	2,6	0,5722	1,1947		4,8	1,1048	0,8574
	2,8	0,3818	1,3934		5,0	1,2610	1,1501
	3,0	0,0000	1,5000		5,2	1,2893	1,7337

x_1	x_2	$\frac{AC + BD}{C^2 + D^2}$	$\frac{BC - AD}{C^2 + D^2}$	x_1	x_2	$\frac{AC + BD}{C^2 + D^2}$	$\frac{BC - AD}{C^2 + D^2}$
5,5	5,4	0,6850	2,5637	6,0	5,5	0,0000	2,7500
	5,5				0	0,6211	0,7101
	1,0	0,6300	0,7274		1,0	0,6300	0,7274
	2,0	0,6196	0,7107		2,0	0,6196	0,7107
	3,0	0,6122	0,7034		3,0	0,6122	0,7034
	4,0	0,6336	0,6529		4,0	0,6336	0,6529
	4,4	0,6912	0,6242		4,4	0,6912	0,6242
	4,8	0,8143	0,6232		4,8	0,8143	0,6232
	5,0	0,9219	0,6569		5,0	0,9219	0,6569
	5,2	1,0484	0,7704		5,2	1,0484	0,7704
	5,4	1,2483	0,9451		5,4	1,2483	0,9451
	5,6	1,4240	1,3848		5,6	1,4240	1,3848
	5,8	1,2764	2,2529		5,8	1,2764	2,2529
	6,0	0,0000	2,9991		5,6	0,0000	2,9991
	6,5	0	0,6280	7,0	0	0,6280	0,7097
	1,0	0,6280	0,7175		1,0	0,6280	0,7175
	2,0	0,6276	0,7104		2,0	0,6276	0,7104
	3,0	0,6225	0,7101		3,0	0,6225	0,7101
	4,0	0,6081	0,6814		4,0	0,6081	0,6814
	4,4	0,6312	0,6485		4,4	0,6312	0,6485
	4,8	0,6761	0,6218		4,8	0,6761	0,6218
				7,0	0,0000	3,5001	

Emil Langer: Theory of Induction and Dielectric Heat

In the book "Theory of Induction and Dielectric Heat", the author derives systematically fundamental relations which can then be used for calculations, design and construction of induction and dielectric furnaces and systems.

The book came into being during the past few years in the research and development department of the works, the task of which is the production of various induction and dielectric heat systems. The author worked as head of this department for a considerable time. He tried to penetrate deeper into the theory of the origin of induction heat and so to acquire directions for the calculations and design of the prototypes.

The bodies that are to be heated by induction heat usually have forms limited by plane surfaces (prisms, bands, etc.). Such bodies are placed in the coils that are also in the form of a prism. In this case each side of the coil radiates plane electromagnetic waves which fall on the surface of the body and are partially absorbed. The absorbed electromagnetic energy is changed into heat. Other fundamental forms are cylindrical bodies, such as rolled metal rods, melted charge in the crucible, etc. Such bodies are placed in the cavity of the cylindrical coil. The inner surface of the coil radiates cylindrical waves, which fall on the charge.

The author explains systematically the theory of fundamental cases of plane electromagnetic waves, especially the radiation and incidence of plane waves on flat sheets from one side or from both sides (induced currents are either of the same or of the inverse phase), the conduction of alternating current through one flat sheet and that through two parallel sheets with the same currents of inverse phase. Further the author derives cylindrical electromagnetic waves in the cavity of the coil and in the gap between the coil and the cylindrical charge and examines the incidence of the waves and their propagation into the full and hollow charges. He deals with the electromagnetic field in the coil which has one or two layers and examines the waves induced by a cylindrical conductor, placed in a coaxial cavity of a cylindrical body, etc. In the last chapter the author explains the theory of the origin of heat in an insulator placed between two plates of a capacitor.

The book is a monography in the branch of induction heat. Each case of plane and cylindrical waves is systematically examined in a uniform manner and forms in substance an independent part of the book.

The branch of induction heat is comparatively new and therefore the literature on this subject is not abundant. In the book the known facts have been

completed on a large scale by the author's own work. In the world's literature this subject has not been dealt with to such an extent. It can be indicated as a remarkable contribution to the knowledge of the subject that the author succeeded in deriving the solution showing that almost all cases of plane waves can be simplified to a form of one common type. The text of the book is suitably illustrated by 130 figures and diagrams and supplemented with a great number of original examples taken directly from the practice.

The book may serve those that work in research and development departments as well as students at technical universities. It brings detailed informations to the workers wishing to become more thoroughly acquainted with the problems in question so that they may be able to solve more complicated cases of induction and dielectric heat themselves. The derived results being simultaneously expressed by mathematical solutions as well as in the form of diagrams, the book can also satisfy those who will not follow the individual solutions in detail and would like to use the derived results.

Literatura

Přímý vztah ke knize Teorie indukčního a dielektrického tepla mají tato díla:

Kapitola 2: Základní poznatky o elmg. vlnění

- [2,1] Nachtikal, F.: Technická fyzika, část VI., JČMF Praha 1946.
- [2,2] Govorkov V. A.: Električeskie i magnitnyje polja, část 11, Svjazizdat Moskva 1951.
- [2,3] Hippel A. R.: Dielektriki i volny, Izdatelstvo inostrannoj literatury Moskva 1960.

Kapitola 3: Rovinné elmg. vlnění

- [3,1] Brown, Hoyler, Bierwirth: Theory and Application of Radio-Frequency Heating část 4 a 5, D. van Nostrand Co., New York 1947.
- [3,2] Govorkov V. A.: Električeskie i magnitnyje polja, část 12 [2,2].

Kapitola 4: Válcové elmg. vlnění

- [4,1] Rodigin N. M.: Indukcionnyj nagrev stalnych izdelij, část 2, 3, 7, 8, Metallurgizdat Moskva 1950.
- [4,2] Babat, Deršvarc, Svenčanskij, Smeljanskij: Električeskie promyšlennyje peči, Gosenergoizdat Moskva 1948.
- [4,3] Brown, Hoyler, Bierwirth: Theory and Application of Radio-Frequency Heating, část 2 [3,1].
- [4,4] Langer E.: Magnetické pole v cívce v. f. pece, Elektrotechnický obzor 1953, č. 3, str. 121—130.
- [4,5] Langer E.: Výpočet tepla ve vsázce indukční pece, Elektrotechnický obzor 1955, č. 1, str. 5—12.
- [4,6] Langer E.: Nový způsob výpočtu indukční pece na ocel, Elektrotechnický obzor 1957, č. 1, str. 22—29.
- [4,7] Langer E.: Teoreticko-výzkumná zpráva: VSEP—55/7 z 10. 12. 1955, Odvození průměru náhradní válcové vsázkové.
- [4,8] Langer E.: Teoreticko-výzkumná zpráva: VSEP — 56/14 z 10. 12. 1956, Teorie indukčního ohřevu válcových těles dutých.
- [4,9] Langer E.: Válcové elmg. vlnění v mezeře mezi cívkom a vsázkou. Elektrotechnický časopis 1962, č. 1, str. 17—36.

Kapitola 5: Souosté válcové vedení

- [5,1] Brown, Hoyler, Bierwirth: Theory and Application of Radio-Frequency Heating, část 3 [3,1].
- [5,2] Langer E.: Teoreticko-výzkumná zpráva č. VTS—ET/25 z 11. 9. 53, Rozložení proudu a magnetického pole ve válcovém vodiči.
- [5,3] Langer, E.: Teoreticko-výzkumná zpráva č. VSEP—57/17 z 6. 11. 1957, Teorie indukčního ohřevu konteneru.

Kapitola 6: Dielektrické teplo

- [6,1] Brown, Hoyler, Bierwirth: Theory and Application of Radio-Frequency Heating, část 1 [3,1].
- [6,2] Langer E.: Teoreticko-výzkumná zpráva č. VTS/ET — 24 z 25. 8. 53, Rozložení tepla v materiálu při dielektrickém ohřevu.

Kapitola 7: Přílohy

- Literatura týkající se řešení Besselovy rovnice, cylindrických funkcí a tabulky funkcí cylindrických, exponenciálních a hyperbolických.
- [7,1] Vojtěch J.: Základy matematiky II, JČMF Praha 1946.
 - [7,2] Čuřík Fr.: Technický průvodce — Matematika, ČMT 1944.
 - [7,3] Tichonov, Samarskij: Rovnice matematické fyziky, NČSAV 1955.
 - [7,4] Lebedev N. N.: Speciální funkce a jejich použití, SNTL, 1956.
 - [7,5] Smirnov N.: Kurs vyšší matematiky, Gostechizdat Moskva 1951.
 - [7,6] Langer E.: Cylindrické funkce při řešení válcových elmg. vlnění, Elektrotechnický obzor 1961, č. 7, příloha str. T 29—34.

Tabulky:

- [7,7] Rodigin, N. M.: Indukcionnyj nagrev stalnych izdeilj [4,1].
- [7,8] Babat, Deršvarc, Svenčanskij, Smeljanskij: Električeskie promyšlennyje peči, Gosenergoizdat Moskva 1948.
- [7,9] Segal, Semenadžev: Pjatiznačnyje matematičeskije tablicy, Izdatelstvo AN SSSR, 1950.
- [7,10] Jahnke, Emde: Tafeln höherer Funktionen, Teubner, Leipzig, 1952.

A

- absolutní hodnota — viz intenzita pole elektr. a magnet. absorpcie energie mo- saznou trubkou 197, 198
- ocelovou trubkou 196, 197, 206
- amplituda stojatého vlnění 33, 35
- argument cylindrické funkce 109, 111, 130
- goniometrické funkce 33, 35, 50, 267
- hyperbolické funkce 62, 267

B

- Besselova rovnice — viz rovnice diferen- ciální Besselova
- funkce — viz funkce cylindrické první- ho druhu bezetrátové dielektrikum 249

C

- cívka čtyřboká 15
- indukční pec válcová 15, 159, 171
- — — dvouvrstvová 173
- nekonečné délky 109
- plochá 83
- cylindrické funkce prvního druhu (Besse- lovy) — viz funkce cylindrické prvního druhu
- druhého druhu (Neumannovy) — viz funkce cylindrické druhého druhu
- — Hankelovy 271
- — pro reálné hodnoty $x \rightarrow 0$ — 274
- — pro $x \rightarrow \infty$ 271, 275

D

- definice cylindrických funkcí řadami 114, 269, 270
- funkci exponenciálních řadami 266 až 268
- — goniometrických řadami 266—268
- — hyperbolických řadami 266—268

— náhradní vsázky 150
derivace cylindrických funkcí 111, 131, 248, 269

— řad ber x , bei x 270
délka vlnová — viz vlnová délka
diagram pro optimální kmitočet 206

dielektrická konstanta prostředí (poměr- ná) 15, 244

— — — vakuu 15

dielektrický ohřev 243

dielektrikum s malými ztrátami 256

diferenciální operátor Hamiltonův 264

— — Laplaceův 20, 110, 130, 265

— — rovnice 2. řádu (homogenní) 30, 39

— — 2. řádu (Besselova) 109, 130, 211, 247, 268

divergence vektoru 22, 264

— vektorového součinu 265

dopad rovinného elmg. vlnění na rovnou stěnu 16, 17

dotá válcová vsázka 180

— — — s velkou tloušťkou stěny 199

E

elektromotorická síla naindukovaná 108, 117, 125

elmg. energie pohlcená (absorbovaná) — viz teplo naindukované

— vlnění obecné 19

— — harmonické 30

— — rovinné 16, 28, 30, 38, 57, 76, 82, 95, 98

— — válcové 16, 108, 117, 129, 159, 173, 181, 191, 199, 209, 219, 225, 243

— — v dutině cívky 109

— — v dutině vsázky 184

— — ve stěně (dopadající) 30, 32, 40, 64

— — — (odražené) 30, 32, 40, 64

— — — výsledné 65, 66

energie elmg. vlnění 16

Eulerova konstanta 269

Eulerův vzorec 271

F

fázové natočení vektorů 41, 42

frekvence kruhová 15

funkce: ber x , bei x , nei x , nei x (tabulky) 277—279

— cylindrické 268, 269

— — — prvního druhu (Besselovy) 111, 113, 130, 146, 160, 251, 257, 269

— — — druhého druhu (Neumannovy) 111, 130, 160, 269

— — — Hankelovy 271

— — — náhradní pro $x \rightarrow \infty$ 136, 161, 272, 275

— — — exponenciální 30, 41, 42, 44, 161, 266

— — — goniometrické 33, 34, 161, 266

— — — hyperbolické 61, 161, 266

— — — komplexně sdružené 146, 271

— — — speciální $P(x), Q(x)$ 118, 140, 142, 215

— — — $Y(x)$ 154

— — — $M_{zz}, N_{zz} = 193, 200, 201$

— — — $Q_{zz}, S_{zz} = 196, 203$

— — — $\varphi\left(\frac{2d}{a}\right), \psi\left(\frac{2d}{a}\right)$ 73, 81, 102, 170, 224, 241

G

Gaussova — Ostragradského věta 23

grafické vyšetření průběhu okamžitých hodnot hustoty proudu 46, 166

— znázornění vektorů vlny dopadající a odražené 53—55

gradient skaláru 264

— divergence vektoru 266

H

Hamiltonův diferenciální operátor 264

Hankelovy funkce 271

hloubka vniku 32, 39, 118, 130, 153, 160, 181, 210

— — — ekvivalentní 105

homogenní magnetické pole 99, 116

hustota elmg. energie v prostoru 22

— proud — viz intenzita pole elektr.

— — — (okamžitá hodnota) 29, 108

— toku elmg. energie 22

Ch

chlazení cívek indukční peci 173

I

impedance

— cívky jednovrstvové 161

— pásového vedení 101, 103

— souosých válců 227, 240

— — malé tloušťky 73

— — — s proudy též fáze 81

— — — — opačné fáze 93

— stěny velké tloušťky 53

— — — vodiče proudu 81

— válce z izolantu 249

— — — boze ztrát 256

— vodiče válcového dutého 221, 223

— — — piného 215

— vsázky válcové plné 141

— — — duté 188, 201

indukce elektrická 22

— magnetická 22

indukční pec kolímková tavící 13

— prohřívání ocelového hranolu 56

— teplo — viz teplo naindukované

— vytápění konteneru 236

— zařízení prohřívací 13

indukčnost mezery mezi pásy 102

— náhradního válce 151

— válce vlastní 151

— válce vzájemná 151

indukované (vílivé) proudy 16, 47

integrály cylindrických funkcí 273

intenzita pole elektrického

— — — cívky jednovrstvové 160, 162,

— — — dutiny cívky 112, 114, 115

— — — mezery mezi cívkom a vsázkou

120, 121, 128

— — — pásového vedení 100, 101

— — — souosých válců 226, 233, 235, 238

— — — stěny malé tloušťky 61, 62, 69

— — — stěny s proudy opačné fáze 83,

85, 88

— — — stěny s proudy též fáze 77, 81

— — — stěny velké tloušťky 41, 47

— — — stěny, vodiče proudu 97, 91

— — — válce beze ztrát 250, 251, 253

— — — válce s malými ztrátami 257

— — — — válcové z izolantu 248

— — — — v mezeře 104

— — — — vodiče válcového dutého 220, 222, 223, 233, 235

— — — — vodiče válcového plného 212, 213, 215

— — — — vsázky válcové duté 182, 183, 185, 192, 199

— — — — vsázky válcové plné 132, 134, 136, 137

— — — — magnetického

— — — — cívky jednovrstvové 160, 161, 162

— — — — dutiny cívky 112, 113, 115

— — — — mezery mezi cívkou a vsázkou 119, 121, 128

— — — — pásového vedení 99, 100, 101

— — — — souosých válců 226, 233, 238

— — — — stěny malé tloušťky 61, 62, 69

— — — — stěny s proudy opačné fáze 84, 86, 88

— — — — stěny s proudy téže fáze 78, 80

— — — — stěny velké tloušťky 40, 47

— — — — stěny, vodiče proudu 97, 80

— — — — válcové bez ztrát 250, 252

— — — — vodiče válcového dutého 220, 222, 223

— — — — vodiče válcového plného 212, 214, 215

— — — — vsázky válcové duté 182, 183, 192, 199

intenzita — — vsázky válcové plné 132, 133, 136, 138

izolace mezi závity 159

izolant dokonalý 250

— — s malými ztrátami 256

J Jouleovy ztráty — viz teplo naindukované

K kabel koaxiální 237

kapacita deskového kondenzátoru 244

kmitna stojatého vlnění 33, 35, 113, 114, 251, 252

koaxiální vedení (kabel) 237

kondenzátor beze ztrát 243—255

— — so ztrátami v dielektriku 256—261

konstanta Eulerova 269

konstanty integrační 31, 99, 118, 130, 131, 182, 211, 220, 226, 232, 248

konstrukce průběhu okamžitých hodnot hustoty proudu 46, 166

kontener 235

kontinuita elmg. vlnění v rozhraní 32

korekční člen 193, 195

— — součinitel 136, 162

L

Laplaceův diferenciální operátor 20, 110, 130, 265

limity Besselových funkcí komplexního argumentu pro $x \rightarrow \infty$ 269, 270

— Hankelových funkcí komplexního argumentu pro $x \rightarrow \infty$ 272

Lommelův integrální vztah cylindrických funkcí 146, 259

M

magnetické pole homogenní 99, 116

magnetický tok v dutině cívky 108, 116

magnetický — v mezeře mezi pásy 103

Maxwellovy rovnice — viz rovnice Maxwellovy

mezera mezi dvěma rovnými stěnami 103

— — válcovou cívkou a vsázkou 117

měrná vodivost mědi, oceli, mosazi — viz vodivost měrná.....

měrný odpor dielektrika (myšlený) 244

měrný příkon

— — pásového vedení 100

— — stěny malé tloušťky 68, 69, 71

— — stěny s proudy opačné fáze 87, 88

— — stěny s proudy téže fáze 79, 80

— — stěny velké tloušťky 47, 49

— — stěny, vodiče proudu 79, 80

— — válcové s malými ztrátami 258, 260

— — v dielektriku — střední 259

— — vsázky válcové plné 133, 135

množství absorbované energie elmg. — viz

teplota naindukované

— — — ve stěně dutého válce 196

množství tepla v povrchové vrstvě vsázky

149

myšlený měrný odpor dielektrika 244

N

natočení vektorů fázové 41

náhradní průměr cívky 173

— — válcové vsázky 150, 202

— — válec nulové tloušťky 150

nekonečně dlouhá cívka 108

Neumannovy funkce — viz funkce cylindrické 2. druhu

O

odpor cívky, minimální 171

— stěny, minimální 76

odpor činný

— — cívky dvouvrstvové 176, 177, 178

— — cívky jednovrstvové 169, 170, 171

— — pásového vedení 101, 102

— — souosých válců 227, 233, 240, 241

— — stěny malé tloušťky 73

— — stěny s proudy opačné fáze 93, 94

— — stěny s proudy téže fáze 81

— — stěny velké tloušťky 53

— — stěny, vodiče proudu 81

— — vodiče válcového dutého 221, 224

— — vodiče válcového plného 215

— — vsázky válcové duté 188, 196, 201

— — vsázky válcové plné 142

— — vsázky, ekvivalentní 142

odraz vlnění od zadního rozhraní stěny 42

ohřev dielektrický 243

— — trubky indukční 190, 197, 198

operátor diferenciální Hamiltonův 264

operátor — Laplaceův 20, 110, 130, 255

optimální kmitočet pro indukční ohřev

dutého válce 203, 206

— — tloušťka stěny 75, 171

orientace vektorů **S**, **E**, **H** — vzájemná 24

P

pec na tavení oceli 13

permeabilita prostředí — poměrná 15, 40

— střední 40

— vakua 15

pole magnetické homogenní 99, 116

poloměr náhradní vsázky 154

poměr cylindrických funkcí 140

— převodní 152

Poyntingův — Umovův zářivý vektor —

viz zářivý vektor **P**. — **U**.

princip vzniku tepla při dielektrickém ohřívání 243

— — — indukčním ohříváním 13

promísení lázně v kelímku 13

prostor prázdný nekonečný 36

proud naindukovaný

— — — v cívce jednovrstvové 165

— — — ve stěně malé tloušťky 66

— — — ve stěně s proudem opačné fáze 89, 92

— — — ve stěně s proudem téže fáze 81

— — — ve stěně velké tloušťky 48

— — — ve stěně, vodiče proudu 81

— — — ve vsázce válcové plné 186, 193, 200

— — — ve vsázce válcové plné 139

proudová vlna 24, 109

průběh magnetického pole v řezu duté vsázky 185

— — — okamžitých hodnot hustoty proudu 45, 67, 164

průměr náhradního válce cívky 173

— — — vsázky 154

přenos energie elektrické 25

prímý válcový vodič — viz vodič válcový

R

reaktance

— — cívky jednovrstvové 170

— — pásového vedení 101, 103

— — souosých válců 228, 233, 240

— — stěny malé tloušťky 73

— — stěny s proudem opačné fáze 94

— — stěny s proudem téže fáze 81

— — stěny velké tloušťky 53

— — stěny, vodiče proudu 81

— — vodiče válcového dutého 221, 224

— — vodiče válcového plného 215

— — vsázky válcové duté 188, 196, 201

— — vsázky válcové plné 142

rotor rotace vektoru 20, 266

— — vektoru 31, 111, 210, 247, 264

rovina vyzařující 28, 38

rovnice diferenciální 2. řádu (Besselova)

109, 211, 247, 268

— — — — homogenní 30, 39

rovnice elmg. vlnění 20, 21

— — — — rovinaté 30, 39

— — — — válcovitého 17, 110, 111

rovnice charakteristická 30, 39
— Maxwellovy 19, 21, 209, 246
— Maxwellova v integrálním tvaru 96, 99, 249
— stojatého elmg. vlnění 33, 34, 112, 251
rozhraní mezi vodivým a nevodivým prostředím 30
— vyzařující 28
rozkmit molekul 16
rychlolis kovací 13
rychlosr elmg. vlnění v izolantu 20, 250
— — — fázová 42, 137
— — — ve vakuu 15
— proudové vlny 29

R

řád cylindrické funkce 110, 111, 269, 271

S

sila elektromotorická naindukována 108, 117, 125
skalární součin 23, 264
skalární součin (H. [vE]) 265
směr zářivého vektoru 24
součin vektorů skalární 23, 264
— — — vektorový 24, 264
souosé (koaxiální) vedení 237
souřadnicový systém polární 108
— — — pravoúhlý 28, 39
soustava jednotek absolutní 36
— — — racionalizovaná 17
stěna hranolovité cívky 15
stěna malé tloušťky 57
— odrážející 57
— rovná vodivá
— s buzenými proudy opačné fáze 82
— — — též fáze 76
— velké tloušťky 38
— vyzařující 38
stínění dokonalé 60
stojaté elmg. vlnění rovinné 32, 43
— — — válcové 113, 128, 251
stoupání závitů cívky 108
střední měrný příkon 259
stupeň rovnomořnosti ohřevu 259
systém polárních souřadnic 108
— pravoúhlých souřadnic 28, 39

T

tabulky cylindrických funkcí 277, 279
— pro výpočet odporu duté vsádky 280
teorie vzniku indukčního tepla 15, 16
teplo dielektrické 16, 17, 259
— — stěny malé tloušťky 71, 72
— — stěny s proudy opačné fáze 90, 91, 92
— — stěny s proudy též fáze 81
— naindukováno do stěny velké tloušťky 49, 50, 52
— — stěny vodiče proudu 81
— — vsádky válcové duté 190, 196
— — vsádky válcové plné 144, 145, 147, 148, 149, 150
tloušťka izolace 108
— stěny optimální 75
— vodiče cívky optimální 171
tok elektromagnetické energie 23
— magnetický v dutině cívky 116
— — v mezefu mezi dvěma stěnami 103
topná tyč 235
trubkový vodič 219

U

utlumení elmg. vlnění 42
uzel stojatého vlnění 33, 35, 113, 114, 251, 252
úbytek napětí na pásovém vedení 104
účinnost elektrická přenosu energie z cívky do vsádky 202
— — — z tyče do trubky 231

V

válcové elmg. vlnění ve válcové vsádce 16, 129
— — — v dutině cívky 16, 109
— — — v izolantu 16, 246
válec dutý souosý 180
— náhradní nulové tloušťky 150
— z dielektrika s malými ztrátami 256
— z dokonalého dielektrika 249
vedení dvouvodičové, homogenní 24
— pásové 17, 98
— — ze tří pásků 76
— — ze souosých válců (koaxiální) 225
vektor hustoty proudu 15

— intenzity elektrického pole — viz intenzita elektrického pole
vektor intenzity magnetického pole — viz intenzita pole magnetického
vektor jednotkový 264
— prostorový 264
— zářivý Poyntingův — Umovův — viz zářivý vektor P.—U.
vektorový součin vektorů 24, 264
věta Gaussova — Ostrogradského 23
vlna cívku vyzařovaná 32
— dopadající na rozhraní 32
— elektrická dopadající a odražená 35, 65
— magnetická dopadající a odražená 34, 64
vlnění elmg. obecné 19
— — rovinné 28
— — rovinné stojaté 34, 35
— — stojaté v mezefu 37
— — válcové v mezefu 121
— — válcové stojaté 113, 115
— harmonické 39, 41
vlnová délka elmg. vlnění 33, 42, 109, 137, 254
vodič obdélníkového průřezu 108
— válcový dutý 219
— — plný 209
— — v dutině 232
vodivé válce souosé 224
vodivost měrná při různých teplotách:
mědi 26, 42, 62, 85, 122, 162, 179, 209, 229, 234, 239;
mosazi 198, 205;
oceli 42, 55, 193, 196, 229, 234, 239
vodivý pás 83
volná dráha elektronu 16
— vsádka tvaru hranolu, pásu 37

— válcová dutá — 180, 191, 199
— — plná 129, 132, 134
výklad pojmu „hloubka vniku“ 53
— vzniku elektromotorické síly — 117, 124
výkon přenášený 26
vyzařující rovina 28
výsledný proud mezi deskami kondenzátoru 249
vzájemná orientace vektorů **S**, **E**, **H** 52, 122
vzájemné vztahy mezi funkemi cylindrickými a Hankelovými 271
vzdálenost od předního rozhraní 57
— od roviny symetrie stěny 77, 84
— od zadního rozhraní 57
vznik tepla při dielektrickém ohřevu 17, 243

vzorec Eulerův 271

vzrůst odporu válcového vodiče 216
vztah integrální Lommelův 146, 259

Z

zářivý vektor Poyntingův-Umovův 16, 22, 49, 71, 91, 102, 117, 123, 147, 172, 218, 221
— — — reálná a imaginární složka 49
zářič elmg. energie 16, 28, 108
zdroj elmg. záření (vlnění) 16, 28, 108
ztrátový úhel dielektrika 245
ztráty cívky minimální 172
— dutého vodiče 221
— ve válcovém vodiči 218
— ve vnějším válcí velké tloušťky 229, 233
— v pásovém vedení 102, 104