Modelování a simulace v elektrotechnice

Přímé metody řešení soustav lineárních algebraických rovnic

František Mach

Katedra teoretické elektrotechniky
Regionální inovační centrum elektrotechniky
Fakulta elektrotechnická
Západočeská univerzita v Plzni

2. cvičení, 29.9.2016

FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY V PLZNI

Obsah

Soustavu lineárních algebraických rovnic lze obecně zapsat jako soustavu n rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

kterou lze vyjádřit v maticovém tvaru

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\,,$$

kde $\mathbf{A}$ je matice soustavy, $\boldsymbol{x}$ vektor neznámých a $\boldsymbol{b}$ vektor pravých stran. Metody řešení soustav lze pak rozdělit na

- metody přímé (Gaussova eliminační metoda, LU rozklad, ...) a
- metody iterační, nebo-li nepřímé (Jacobiho metoda, Gauss-Seidelova metoda, ...).

Přímé vs. iterační metody

Přímými metodami získáme teoreticky přesné řešení iterativním procesem o konečně mnoha krocích. Iteračními metodami pak iterativním procesem o nekonečně mnoha krocích.

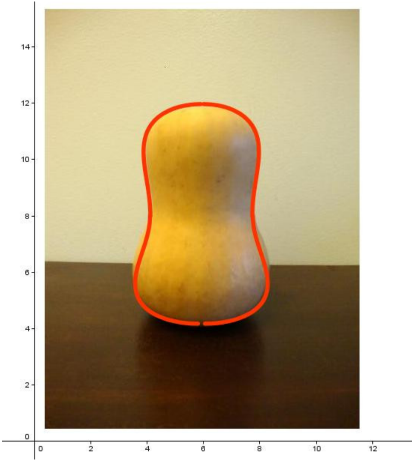
Stacionární model homogenního dopravního proudu

Jednou z mnoha aplikací systémů lineárních algebraických rovnic je například stacionární model homogenního dopravního proudu, tedy proudu vozidel pohybujících se v určitém směru v podmínkách stavebního uspořádání dané komunikace.

Obrázek: Děsivá ukázka stavu na víceúrovňové křižovatce, jehož model představuje *stacionární* dopravní proud (*http://www.reluctantchauffeur.com*)

Interpolace a aproximace

Dalším příkladem použití s velmi širokou oblastí praktického použití je interpolace a aproximace bodů křivkou. Tyto body mohou být získány měřením některé fyzikální veličiny, jiným výpočtem, nebo například ručním zadáním. Výsledkem jsou pak například koeficienty polynomu o určitém řádu, který respektuje rozložení daných bodů. Při interpolaci prochází křivka přímo zadanými body, při aproximaci to není nutné.



Obrázek: Ukázka možnosti použití interpolace několika bodů křivkou. Jedná se o výběr objetu z fotografie při jejím digitálním zpracování pomocí programu (*http://mrhonner.wordpress.com*)

Prutové soustavy

V technické praxi je jedním z velmi často využívaných postupů návrhu nosných konstrukcí řešení problémů prutových soustav, které je možné také popsat pomocí soustavy lineárních algebraických rovnic. Jedná se o nejpoužívanějším typ nosné konstrukce ve stavební i technické praxi. Je tvořena pruty, u nichž jeden délkový rozměr výrazně převládá nad rozměry příčnými.

Obrázek: Příkladem prutové konstrukce jsou také stožáry venkovního vedení, které v tomto případě představují linku velmi vysokého napětí (400 a 220 kV) v blízkosti rozvodny Přeštice

Elektrické obvody v ustáleném stavu

Modely popisující ustálený stav elektrických obvodů (stejnosměrné obvody v ustáleném stavu, harmonické obvody v ustáleném stavu) samozřejmě také vedou na soustavu lineárních algebraických rovnic. Vždy je však nutné si uvědomit, co znamená ustálený stav elektrického obvodu a kdy lze tedy tyto modely využít!

Obrázek: Rozvodná skříň části fotovoltaické elektrárny, která byla zničena průchodem zkratového proudu. Stav obvodu před jeho zničením rozhodně nelze považovat ustálený (*http://www.udalosti112.cz*)

Předpokládejme soustavu lineárních algebraických rovnic ve tvaru

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\,.$$

Aplikujeme-li ekvivalentní úpravy na matici $\mathbf{A}$ a současně na vektor $\boldsymbol{b}$, tak se řešení soustavy nezmění. Mezi ekvivalentní úpravy přitom patří

- vynásobení řádku matice číslem,
- záměna dvou řádků matice,
- přičtení řádku vynásobeného libovolným reálným číslem.

Podaří-li se nám těmito úpravami transformovat matici $\mathbf{A}$ na matici jednotkovou (Gauss-Jordanova eliminační metoda), bude po transformaci vektor $\boldsymbol{b}$ obsahovat hledané řešení dané soustavy.

Jednotková matice

Jednotková matice velikosti n je čtvercová matice $n \times n$, která má na hlavní diagonále jedničky a na ostatních místech nuly. Příkladem jednotkové matice o velikosti 3 je

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pomocí Gauss-Jordanovi eliminační metody řešme soustavu rovnic, kterou lze zapsat ve tvaru

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} . \tag{1}$$

Nejprve provedeme záměnu prvního a posledního řádku matice ($r_1 \leftrightarrow r_3$) a získáme tak soustavu s nenulovými prvky na hlavní diagonále, tedy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} , \tag{2}$$

následně eliminujeme prvky pod hlavní diagonálou, tedy odečteme od poslednímu řádku dvakrát řádek druhý ($r_3 \rightarrow r_3 - 2 \cdot r_2$) a získáme soustavu

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} , \tag{3}$$

kde matice soustavy $\mathbf{A}$ je horní trojúhelníková.

Následně převedeme získanou soustavu

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} , \tag{4}$$

na soustavu s jednotkovou maticí soustavy $\mathbf{A}$. Nejprve odečteme od druhého řádku řádek třetí ($r_2 \rightarrow r_2 - 1 \cdot r_3$) a získáme soustavu

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} . \tag{5}$$

Následně vynulujeme poslední nenulový prvek nad hlavní diagonálou odečtením třetí rovnice od rovnice první ($r_1 \rightarrow r_1 - 1 \cdot r_3$) a získáme již finální soustavu

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} , \tag{6}$$

kde vektor $\boldsymbol{x}$ je řešením původní soustavy a platí tedy

$$x_1 = 2 \, , \; x_2 = -2 \, , \; x_3 = 2 \, .$$

Postup výpočtu pomocí Gaussovi eliminace lze obecně rozdělit na

- dopřednou redukci a
- zpětnou substituci.

Při dopředné redukci se snažíme pomocí ekvivalentních úprav transformovat matici $\mathbf{A}$ na horní trojúhelníkovou matici a při zpětné substituci se následně snažíme přímo určit hodnoty vektoru neznámých $\boldsymbol{x}$ dané soustavy rovnic pomocí zpětného přiřazení již vypočtených hodnot.

Horní trojúhelníková matice

Horní trojúhelníková matice je taková matice, která má všechny prvky pod hlavní diagonálou nulové. Příkladem je matice

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Algoritmus řešení

1. Rozšíření matice soustavy $\mathbf{A}$ o vektor pravých stran $\boldsymbol{b}$
2. Cyklus přes všechny sloupce matice soustavy $\mathbf{A}$
    1. Cyklus přes prvky daného sloupce pod hlavní diagonálou
        - Eliminace daného prvku pomocí prvního řádku matice
3. Zpětný cyklus přes všechny sloupce matice soustavy
    - Vyčíslení neznámých postupnou substitucí

Dopředná redukce

Dopředná redukce představuje iterační postup, kdy postupně procházíme všechny sloupce matice a pro každý prvek daného sloupce provádíme eliminaci všech prvků pod hlavní diagonálou pomocí prvního řádku.

Zpětná substituce

Zpětná substituce pak představuje iterační postup, kdy v opačném pořadí procházíme všechny sloupce matice a pro každý prvek daného sloupce postupně vyčíslujeme hodnoty jednotlivých neznámých.

Při řešení je nutné si uvědomit, že musíme všechny ekvivalentní úpravy provádět vždy s celými rovnicemi, tedy na rozšířené matici soustavy!

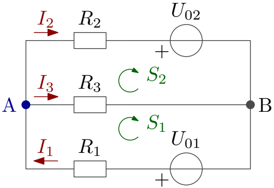
```
function x = gauss(A, b)
% rozsireni matice soustavy
Ab = [A,b];

% dopredna redukce
n = length(b);
for i = 1:n
    for j = (i+1):n
        Ab(j,:) = Ab(j,:) - Ab(i,:) * Ab(j,i)/Ab(i,i);
    end
end

% zpetna substituce
x = Ab(:,n+1);
for i = n:-1:1
    x(i) = (x(i) - Ab(i,(i+1):n) * x((i+1):n)) / Ab(i,i);
end
end
```

```
function x = gauss(A, b)
% rozsireni matice soustavy
Ab = [A,b];

% dopredna redukce
n = length(b);
for i = 1:n
    % radkova pivotace
    step = 1;
    while Ab(i,i) == 0
        Ab([i, i+step],:) = Ab([i+step, i],:);
        step = step + 1;
    end

    % prevod na horni trojuhelnikovou matici
    for j = (i+1):n
        Ab(j,:) = Ab(j,:) - Ab(i,:) * Ab(j,i)/Ab(i,i);
    end
end

% zpetna substituce
x = Ab(:,n+1);
for i = n:-1:1
    x(i) = (x(i) - Ab(i,(i+1):n) * x((i+1):n)) / Ab(i,i);
end
end
```

```
function x = gauss(A, b)
% rozsireni matice soustavy
Ab = [A,b];

% dopredna redukce
n = length(b);
for i = 1:n
    % radkova pivotace
    step = 1;
    while Ab(i,i) == 0
        Ab([i, i+step],:) = Ab([i+step, i],:);
        step = step + 1;
    end

    % prevod na horni trojuhelnikovou matici
    for j = (i+1):n
        if Ab(j,i) != 0
            Ab(j,:) = Ab(j,:) - Ab(i,:) * Ab(j,i)/Ab(i,i);
    end
end

% zpetna substituce
x = Ab(:,n+1);
for i = n:-1:1
    x(i) = (x(i) - Ab(i,(i+1):n) * x((i+1):n)) / Ab(i,i);
end
end
```

Přímá aplikace Kirchhoffových zákonů

Počet rovnic je dán počtem větví v obvodu. Aplikujeme 1. K.z. na $N = n-1$ nezávislých uzlů a 2. K.z. na $S = v - (n-1)$ nezávislých smyček. Soustava má řešení, jsou-li jednotlivé rovnice nezávislé.



$$U_{01} = 7\text{ V}\,, U_{02} = 8\text{ V}$$

$$R_1 = 3\ \Omega\,, R_2 = 2\ \Omega\,, R_3 = 4\ \Omega$$

$$A : -I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$$S_1 : -U_{01} + R_1 I_1 + R_3 I_3 = 0$$

$$S_2 : +U_{02} + R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ R_1 & 0 & R_3 \\ 0 & R_2 & -R3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ +U_{01} \\ -U_{02} \end{bmatrix}$$

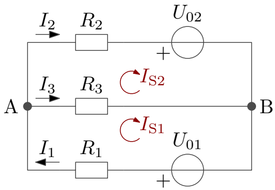
```
U01 = 7; U02 = 8;
R1 = 3; R2 = 4; R3 = 2;

R = [-1,1,1; R1,0,R3; 0,R2,-R3]
U0 = [0; U01; -U02]

I = gauss(R,U0)
R*I-U0
```

Metoda smyčkových proudů

Rovnice formulujeme pomocí 2. K.z. pro S nezávislých smyček, přičemž ve větvích, které jsou společné dílčím smyčkám, teče proud daný superpozicí. Metoda předpokládá pouze napěťové zdroje.

Algoritmus řešení

1. Proudové zdroje nahradíme zdroji napěťovými
2. Určíme systém nezávislých smyček a zavedeme smyčkové proudy I_S
3. Pomocí 2. K.z. formulujeme rovnice pro smyčkové proudy $I_{\mathrm{S}i}$
4. Vyřešíme výslednou soustavu rovnic
5. Vypočteme větvové proudy I_i



$$I_{\mathrm{S}1}: -U_{01} + R_1 I_{\mathrm{S}1} + R_3(I_{\mathrm{S}1} - I_{\mathrm{S}2}) = 0$$

$$I_{\mathrm{S}2}: +U_{02} + R_2 I_{\mathrm{S}2} + R_3(I_{\mathrm{S}2} - I_{\mathrm{S}1}) = 0$$

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\mathrm{S}1} \\ I_{\mathrm{S}2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +U_{01} \\ -U_{02} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{I}_\mathbf{S} = \boldsymbol{U}_\mathbf{0}$$

$$I_1 = I_{\mathrm{S}1},\; I_2 = I_{\mathrm{S}2},\; I_3 = I_{\mathrm{S}1} - I_{\mathrm{S}2}$$

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{S1} \\ I_{S2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +U_{01} \\ -U_{02} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{I}_\mathbf{S} = \boldsymbol{U}_\mathbf{0}$$

- Prvky hlavní diagonály matice $\mathbf{R}$ jsou vlastní odpory smyček R_{ii} (součet odporů ve smyčce) a jsou kladné.
- Prvky mimo hlavní diagonálu matice $\mathbf{R}$ jsou vzájemné odpory smyček $R_{ij} = R_{ji}$. Mají-li proudy I_{Si} stejnou orientaci, jsou záporné.

Přímé sestavení soustavy!

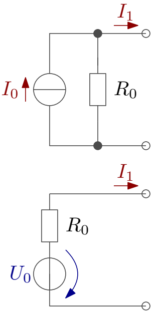
1. Zavedeme nezávislé smyčky S (volíme tzv. oka sítě a stejný směr)
2. Sestavíme odporovou matici $\mathbf{R}$ ze známé topologie obvodu
3. Sestavíme vektor smyčkových proudů $\boldsymbol{I}_\mathbf{S}$ a vektor budících veličin $\boldsymbol{U}_\mathbf{0}$

Pozor na změnu znamének u napětí zdrojů!

$$I_{S1} : -U_{01} + R_1 I_{S1} + R_3(I_{S1} - I_{S2}) = 0$$

$$I_{S1} : (R_1 + R_3)I_{S1} - R_3 I_{S2} = U_{01}$$

Náhrada proudového zdroje za napěťový:



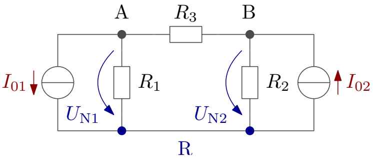
$$U_0 = I_0 R_0$$

Metoda uzlových napětí

Rovnice formulujeme pomocí 1. K.z. pro N nezávislých uzlů, přičemž využíváme napětí mezi nezávislým a referenčním uzlem. Metoda předpokládá pouze proudové zdroje.

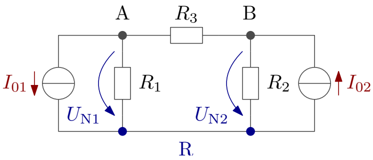
Algoritmus řešení

1. Napěťové zdroje nahradíme proudovými
2. Určíme referenční uzel R a zavedeme uzlová napětí U_{N} pro nezávislé uzly
3. Pomocí 1. K.z. formulujeme rovnice uzlová napětí $U_{\mathrm{N}i}$
4. Vyřešíme výslednou soustavu rovnic
5. Vypočteme větvová napětí U_i.



$$A: I_1 + \frac{1}{R_1}U_{\mathrm{N}1} + \frac{1}{R_3}U_3 = 0$$

$$B: -I_2 + \frac{1}{R_2}U_{\mathrm{N}2} - \frac{1}{R_3}U_3 = 0$$



$$A : I_1 + \frac{1}{R_1} U_{\mathrm{N1}} + \frac{1}{R_3} U_3 = 0$$

$$B : -I_2 + \frac{1}{R_2} U_{\mathrm{N2}} - \frac{1}{R_3} U_3 = 0$$

$$A : I_{01} + G_1 U_{\mathrm{N1}} + G_3 (U_{\mathrm{N1}} - U_{\mathrm{N2}}) = 0$$

$$B : -I_{02} + G_2 U_{\mathrm{N2}} - G_3 (U_{\mathrm{N1}} - U_{\mathrm{N2}}) = 0$$

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_3 & -G_3 \\ -G_3 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{\mathrm{N1}} \\ U_{\mathrm{N2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{01} \\ +I_{02} \end{bmatrix}$$

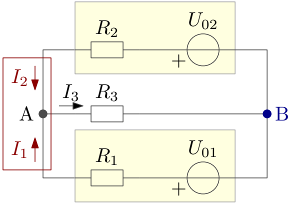
$$\mathbf{G} \cdot \boldsymbol{U}_{\mathbf{N}} = \boldsymbol{I}_{\mathbf{0}}$$

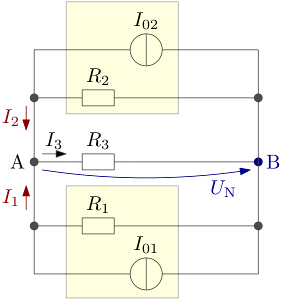
- Prvky hlavní diagonály matice $\mathbf{G}$ jsou vlastní vodivosti uzlu G_{ii} (součet vodivostí v uzlu) a jsou kladné.
- Prvky mimo hlavní diagonálu matice $\mathbf{G}$ jsou vzájemné vodivosti mezi uzly $G_{ij} = G_{ji}$. Jsou-li uzlová napětí $U_{\mathrm{N}i}$ volena směrem k referenčnímu uzlu R, jsou záporné.

Přímé sestavení soustavy!

1. Zavedeme referenční uzel R a uzly nezávislé N
2. Sestavíme vodivostní matici $\mathbf{G}$
3. Sestavíme vektor uzlových napětí $\boldsymbol{U}_{\mathbf{N}}$ a vektor budících zdrojových proudů $\boldsymbol{I}_{\mathbf{0}}$
4. Určíme proudy a napětí obvodu

Pozor na změnu topologie obvodu při náhradě napěťových zdrojů!





$$I_{01} = \frac{U_{01}}{R_1}\,,\ I_{02} = \frac{U_{02}}{R_2}$$

$$\cancel{I_1 = \frac{1}{R_1} U_{01}}\,,\ I_1 = \frac{1}{R_1}(U_{01} - U_{\mathrm{N}})$$

$$\cancel{I_2 = \frac{1}{R_2} U_{02}}\,,\ I_2 = \frac{1}{R_2}(U_{02} - U_{\mathrm{N}})$$

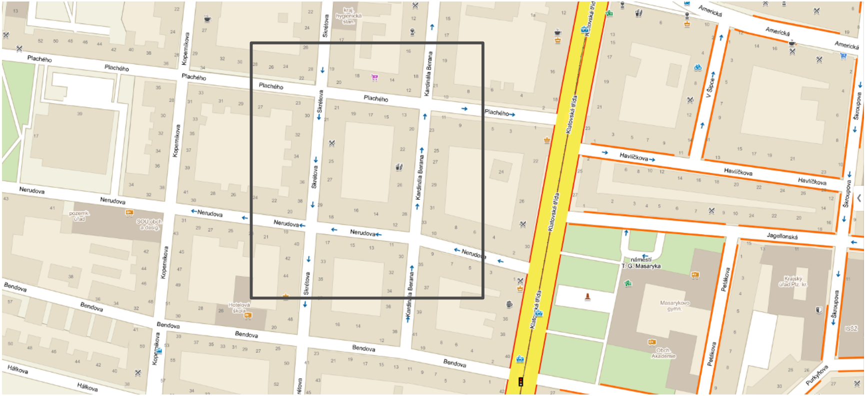
$$[G_1 + G_2 + G_3] \cdot [U_{\mathrm{N}}] = [I_{01} + I_{02}]$$

Model stacionárního dopravního proudu (triviální ukázka)

Obrázek: Letecká mapa zobrazující řešenou oblast

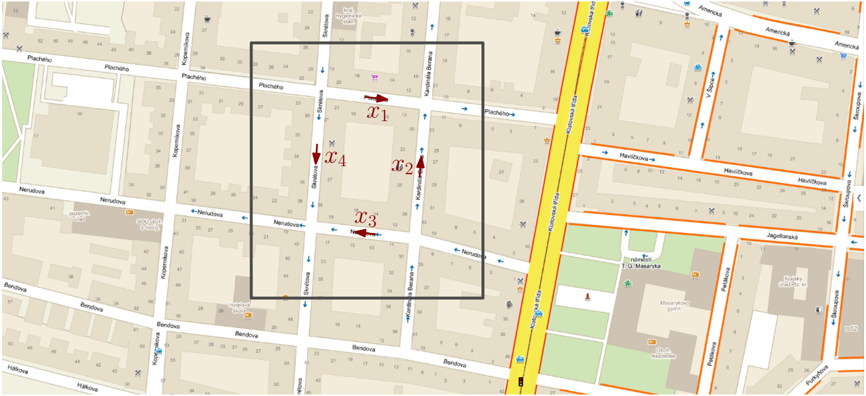
Obrázek: Mapa řešené oblasti a popis dopravních proudu

Model stacionárního dopravního proudu (triviální ukázka)

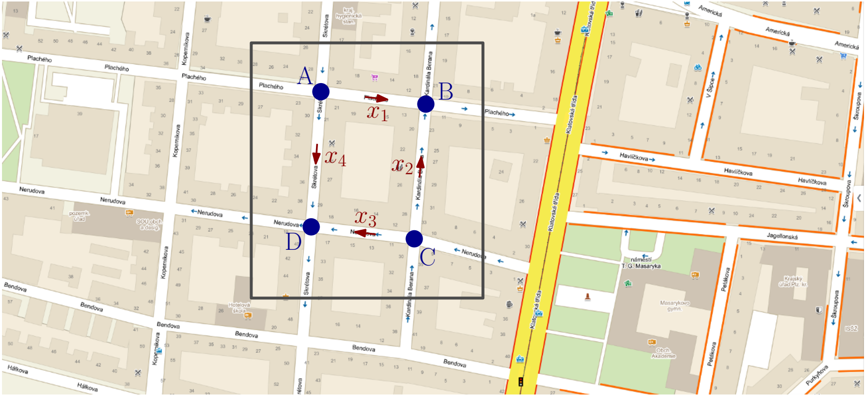


Obrázek: Mapa řešené oblasti a popis dopravních proudu

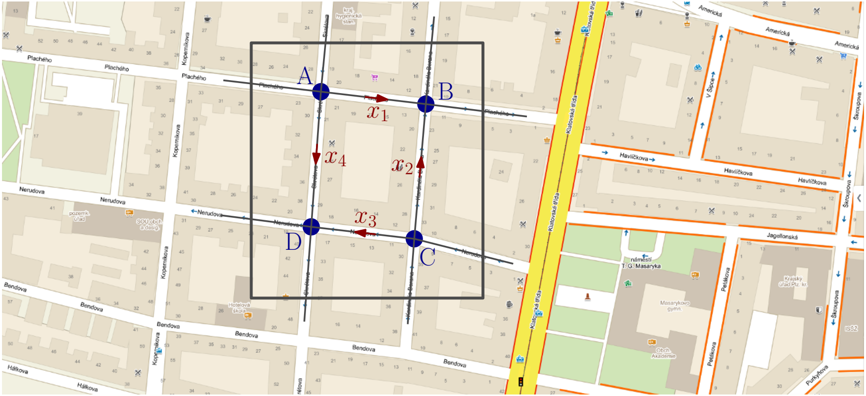
Model stacionárního dopravního proudu (triviální ukázka)



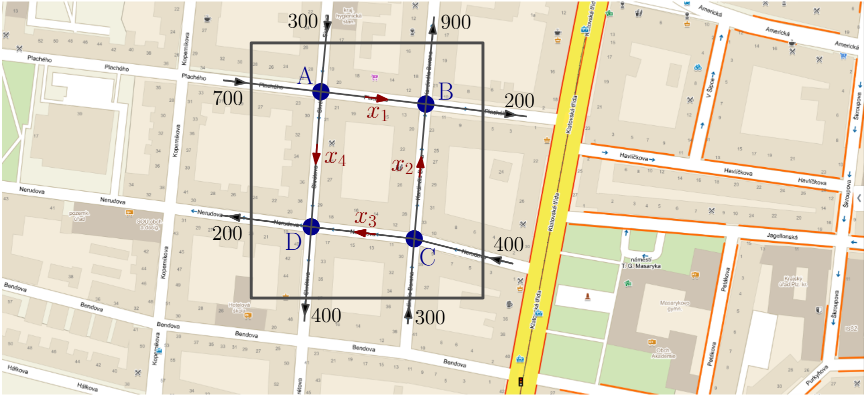
Obrázek: Mapa řešené oblasti a popis dopravních proudu



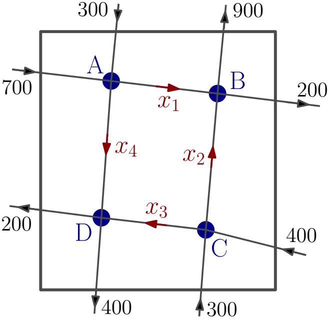
Obrázek: Mapa řešené oblasti a popis dopravních proudu



Obrázek: Mapa řešené oblasti a popis dopravních proudu



Obrázek: Mapa řešené oblasti a popis dopravních proudu



Obrázek: Zobrazení výsledné sítě popisující řešenou dopravní situaci (dopravní toky jsou uvedeny jako počet projíždějících vozů za jednotku času)

Dopravní síť splňuje jednoduchá pravidla, která vycházejí z podstaty problému, tedy

- dopravní tok vstupující do křižovatky je roven dopravnímu toku z této křižovatky vystupujícímu a
- všechny ulice jsou jednosměrné.

Z uvedené sítě lze tedy získat soustavu lineárních algebraických rovnic

$$A : x_1 + x_4 = 700 + 300$$

$$B : x_1 + x_2 = 900 + 200$$

$$C : x_2 + x_3 = 300 + 400$$

$$D : x_3 + x_4 = 200 + 400\,,$$

pro jejíž řešení musí platit, že dopravní proud v každé ulici musí být kladný.

Proveďte interpolaci zadaných bodů prostoru pomocí polynomiální funkce $y = p(x)$. Zadané body (x_i, y_i): (1, 2), (2, 0), (3, 12).

Vzhledem k počtu bodů n můžeme využít polynom $n-1$ řádu, tedy polynom ve tvaru

$$y_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 \, .$$

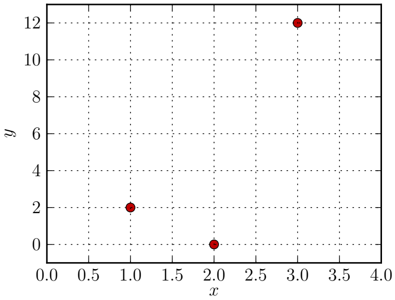
Dosazením jednotlivých bodů vytvoříme soustavu rovnic, jejímž řešením jsou neznámé koeficienty a_0, a_1 a a_2.

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 &= 2 \\ a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 &= 0 \\ a_0 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 3^2 &= 12 \end{aligned}$$

Řešíme tedy soustavu ve tvaru

$$\mathbf{X}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{y} \, .$$

```
X = [1,1,1; 4,2,1; 9,3,1]
y = [2; 0; 12]
a = gauss(X,y)
```



Obrázek: Vykreslení zadaných bodů a jejich interpolace polynomem

Proveďte interpolaci zadaných bodů prostoru pomocí polynomiální funkce $y = p(x)$. Zadané body (x_i, y_i): (1, 2), (2, 0), (3, 12).

Vzhledem k počtu bodů n můžeme využít polynom $n-1$ řádu, tedy polynom ve tvaru

$$y_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 \, .$$

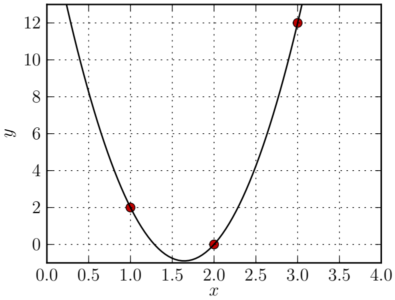
Dosazením jednotlivých bodů vytvoříme soustavu rovnic, jejímž řešením jsou neznámé koeficienty a_0, a_1 a a_2.

$$a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 = 2$$
$$a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 = 0$$
$$a_0 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 3^2 = 12$$

Řešíme tedy soustavu ve tvaru

$$\mathbf{X}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{y} \, .$$

```
X = [1,1,1; 4,2,1; 9,3,1]
y = [2; 0; 12]
a = gauss(X,y)
```



Obrázek: Vykreslení zadaných bodů a jejich interpolace polynomem