Modelování a simulace v elektrotechnice

Základy řešení nelineárních algebraických rovnic

František Mach

Katedra teoretické elektrotechniky
Regionální inovační centrum elektrotechniky
Fakulta elektrotechnická
Západočeská univerzita v Plzni

8. cvičení, 10.11.2016

FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY V PLZNI

Obsah

Lineární algebraická rovnice je rovnice, ve které se vyskytují neznámé pouze v první mocnině. Obecně lze tedy rovnici zapsat ve tvaru

$$ax = b\,.$$

Naproti tomu nelineární algebraická rovnice obsahuje vyšší mocniny a lze ji tedy zapsat ve tvaru

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = b\,,\ n \geq 1\,.$$

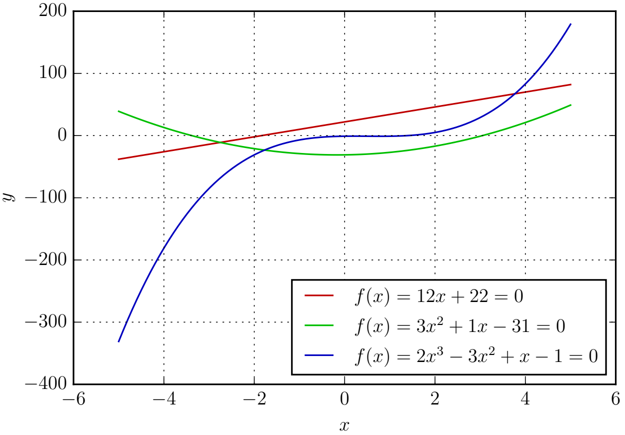
Uvažujme tedy rovnici v obecném tvaru rovnosti funkcí $F(x) = G(x)$, pak pro lineární funkci $f(x) = F(x) - G(x) = 0$ musí platit princip superpozice. Musí tedy platit podmínka aditivity

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

a zároveň podmínka homogenity

$$f(cx) = cf(x)\,.$$

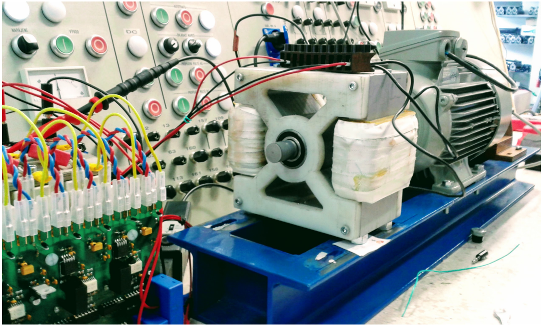
Pokud princip superpozice neplatí, funkce $f(x)$ je nelineární a tedy také příslušná rovnice je nelineární algebraickou rovnicí.

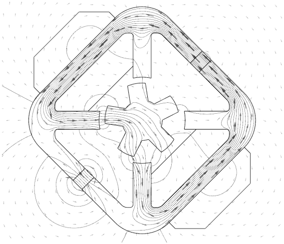


Obrázek: Příklady zobrazení lineární a nelineární rovnice $y = f(x)$. Graf zobrazuje lineární algebraickou rovnici (červená křivka), nelineární kvadratickou (zelená křivka) a kubickou rovnici (modrá křivka)

Nelinearity magnetických obvodů

Velmi důležitou oblastí elektrotechniky, kde je nutné využívat nelineární matematické modely, jsou elektrické stroje a přístroje tvořené feromagnetickými materiály, které se vyznačují nelineární závislostí relativní permeability μ_r na magnetické indukci $\boldsymbol{B}$.





Obrázek: Laboratorní prototyp FSPM stroje pracujícího ve funkci generátoru a zobrazení vektorů magnetické indukce $\boldsymbol{B}$ a magnetických indukčních čar získaných řešením matematického modelu [Miroslav Blohmann]

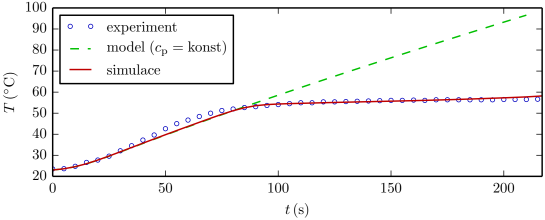
Nelineární polovodičové prvky

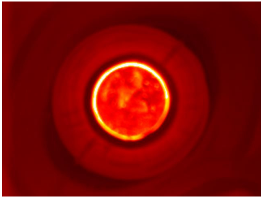
Základním principem funkce polovodičových prvků je nelineární voltampérová charakteristika. Simulace jejich reálné funkce vede tedy také na řešení nelineárních matematických modelů.

Obrázek: Laboratorní prototyp elektromagnetického aktuátoru řízený elektronickým spínačem s MOSFET tranzistory. Řešení komplexního modelu aktuátoru zahrnuje řadu nelinearit, kromě již zmíněné nelinearity magnetického obvodu také nelinearitu řady polovodičových prvků [Tomáš Kaminský]

Nelinearity teplotních charakteristik materiálů

Při simulaci tepelných procesů se velmi často setkáváme s nutností řešit nelineární matematické modely, a to především kvůli teplotním charakteristikám materiálů.





Obrázek: Porovnání výsledků měření teploty Fieldova kovu s výsledky získanými řešením lineárního a nelineárního matematického modelu, a to při jeho ohřevu a tavení v laboratorní indukční peci. Z výsledků je naprosto zřejmá nutnost uvažovat nelinearitu teplotních charakteristik materiálů, v tomto případě se jedná o měrnou tepelnou kapacitu c_p). Pravý obrázek zobrazuje rozložení teploty na povrchu tavené vsázky pořízený termokamerou během experimentu. [Jana Kuthanová, Kateřina Mizerová]

Uvažujme nelineární algebraickou rovnici ve tvaru funkce

$$f(x) = 0\,,$$

kde řešením je právě takové x^* pro které platí uvedená rovnost, tedy v průsečíku grafu funkce s osou x. Pokud se funkce $f(x)$ chová rozumně (je spojitá, hladká a monotónní na řešeném intervalu), lze očekávat její řešení ve směru směrnice tečny sestrojené v bodě počátečního odhadu x_0.

Rovnice tečny a určení jejího průsečíku s osou

Tečna ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě dotyku $T[x_0, y_0]$; $y_0 = f(x_0)$ lze popsat rovnicí

$$(y - y_0) = f'(x_0)(x - x_0)\,,$$

ze které lze snadno určit bod, ve kterém daná tečna protíná osu x pro $y = 0$ z výrazu

$$x = x_0 - \frac{y_0}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Newtonova metoda (metoda tečen nebo Newton-Raphsonova metoda) je iterační numerická metoda, která hledá právě řešení nelineární funkce ve tvaru

$$f(x) = 0\,,$$

pomocí směrnice tečny v bodě x_0, která představuje derivaci funkce $f'(x_0)$ v daném bodě. Pro výpočet této směrnice přitom můžeme využít analytické vyjádření derivace nebo numerický výpočet v úlohách, kde analytické vyjádření derivace nelze nalézt.

Výpočet nového řešení x_{k+1} z počátečního odhadu x_k pak provedeme v místě průsečíku tečny s osou x, který určíme podle vztahu

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\,,\; k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

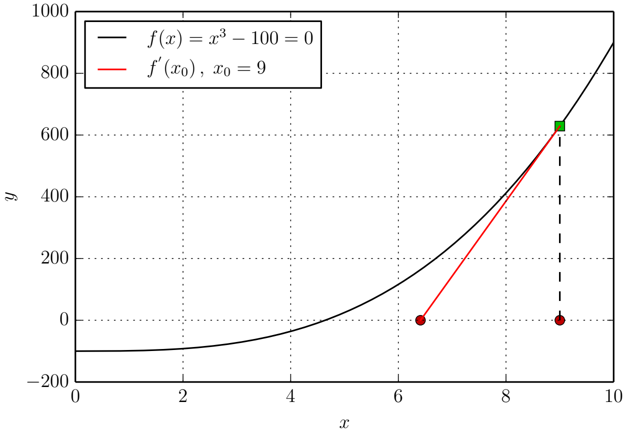
Nově nalezené řešení x_{k+1} bude za splnění uvedených podmínek (spojitá, hladká a monotóní funkce) blíže nule a iteračním postupem lze tak následně získat aproximaci přesného řešení.

Numerická derivace

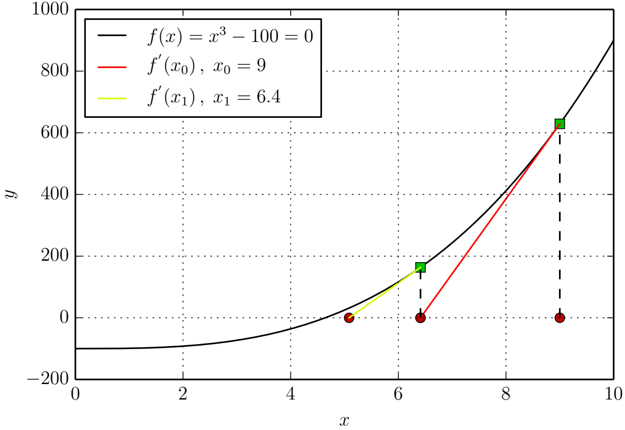
Numerická derivace představuje aproximaci derivace funkce $f'(x)$ na základě funkčních hodnot $f(x)$ pro konečné množství hodnot nezávisle proměnné x. Uvažujeme velmi malé h různé od nuly, dostaneme tak předpis pro výpočet dopředné derivace ve tvaru

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,,\text{ nebo derivace centrální } f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}\,.$$

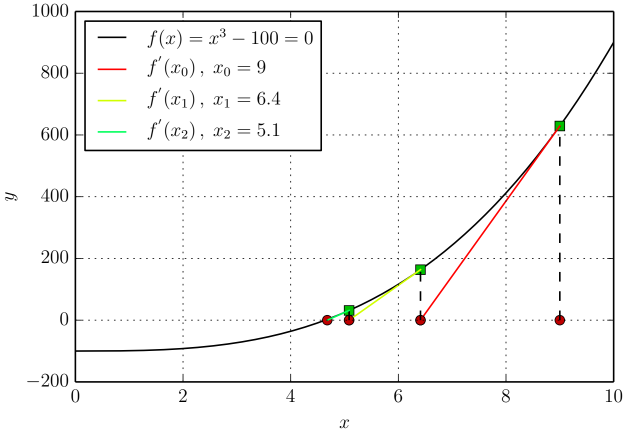
```
function x = newton(fce, interval, x0, epsilon)
a = interval(1);
b = interval(2);
n = 1e4;
dx = (b-a)/n;

for i = 1:n
    % vypocet reseni rovnice pro x0
    y0 = fce(x0);

    % vypocet derivace rovnice v x0
    dy = (fce(x0+dx)-y0)/dx;

    % vypocet noveho parametru a reseni
    x = x0 - y0/dy;
    y = fce(x);

    % vypocet chyby reseni
    err = abs(y-y0)/y;

    % kontrola na pozadovanou chybu reseni
    if err <= epsilon
        return
    end

    x0 = x;
end
end
```



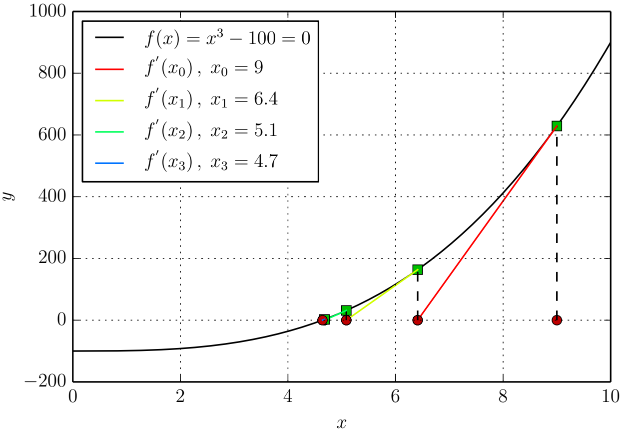
Obrázek: První krok výpočtu: určení x_1 ze známé počáteční podmínky x_0



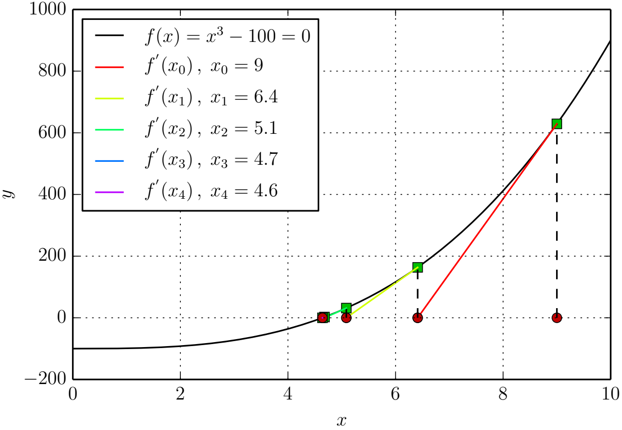
Obrázek: Druhý krok výpočtu (určíme x_2 z již známé hodnoty x_1)



Obrázek: Třetí krok výpočtu (určíme x_3 z již známé hodnoty x_2)



Obrázek: Čtvrtý krok výpočtu (určíme x_4 z již známé hodnoty x_3)



Obrázek: Pátý krok výpočtu (určíme x_5 z již známé hodnoty x_6)