Dodatečné příklady k AJFY

1. Odhadněte velikost atomů, víte-li, že:
a) 1 kapka 0,5 % roztoku kyseliny olejové v alkoholu vytvoří na vodě kruhovou olejovou skvrnu o průměru 32 cm, objem kapky je asi 0,02 cm^3 (Franklin),
b) výparné teplo vody je 2,1 MJ/kg a její povrchové napětí 72 mJ/m^2 (Weisskopf),
c) aktivita 0,1 mg polonia 210 činí $1{,}67 \times 10^{10}$ Bq, střední doba života je $1{,}7 \times 10^7$ s a jeho hustota je 9400 kg/m^3.
Z odhadnuté velikosti atomu zjistěte, kolikrát byste museli rozpůlit větší jablko (1 dm^3), abyste získali kousek velikosti atomu. (Feynman)

Řešení :
a) Jedna kapka roztoku obsahuje $5 \times 10^{-3}\, V$ kyseliny olejové ($V = 0{,}02$ cm^3 je objem kapky). Plocha skvrny je $S = \pi D^2/4$, kde $D = 32$ cm je uvedený průměr. Tloušťka vrstvy odhadující rozměr atomu činí $d = 5 \times 10^{-3}\, V/\, \pi D^2/4 = 2 \times 10^{-2}\, V/\pi D^2 \approx 1{,}2 \times 10^{-7}$ cm = $1{,}2 \times 10^{-9}$ m.

b) Při výparu 1 m^3 vody se spotřebuje $Q\rho V$ tepla (Q = teplo výparné, ρ = 1000 kg/m^3 hustota vody a V = 1 m^3). Toto teplo se spotřebuje na vytvoření povrchu jednotlivých molekul vody. Označíme-li velikost krychličky odpovídající 1 molekule d, pak vzniklý povrch činí $V/d^3.6d^2 = 6V/d$ (počet krychliček × povrch krychličky) a potřebná energie činí $6V\sigma/d$, kde σ je povrchové napětí vody. Porovnáním $d = 6\sigma/Q\rho \approx 2 \times 10^{-10}$ m.

c) Počet atomů v m = 0,1 mg polonia je $A\tau$ (A je aktivita, τ je střední doba života). Objem uvedeného množství polonia je $V = m/\rho$, takže na 1 atom připadá objem $V_1 = m/\rho A\tau$ a rozměr atomu můžeme odhadnout jako $d = \sqrt[3]{V_1} = \sqrt[3]{m/\rho A\tau} \approx 3{,}3 \times 10^{-10}$m.
Rozměr atomu (resp. molekuly) je tedy zřejmě řádově 10^{-10} m.

Při této velikosti atomu musíme jeden rozměr jablka zmenšit miliardkrát. Protože tisícinásobné zmenšení vyžaduje cca 10 řezů ($2^{10} \approx 1000$), potřebujeme pro jeden rozměr 30 řezů. Uvážíme-li 3 rozměry jablka je počet řezů trojnásobný, tj. 90.

2. Spočtěte výchylky v příčném elektrickém a příčném magnetickém poli při Thomsonově metodě určování měrného náboje elektronu a najděte vyjádření pro měrný náboj.

Řešení :
a) Pohyb v příčném elektrickém poli.
Elektron nechť vlétá do kondenzátoru rychlostí v ve směru osy x a je vychylován polem mířícím ve směru osy z. Pohybové rovnice mají zřejmě tvar

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = 0, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = -eE,$$

kde m a $-e$ je hmotnost resp. náboj elektronu a E velikost působícího pole.
Vzhledem k počátečním podmínkám je $x = vt$ a $y = 0$ (počátek souřadnic na počátku kondenzátoru) a pro výchylku ve směru osy z dostaneme užitím

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}\right)\frac{dx}{dt} = \frac{d^2z}{dx^2}\cdot v^2$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{e}{mv^2}E$$

Odtud dvojí integrací (l je vzdálenost ke stínítku)

$$\Delta z = -\frac{e}{mv^2}\int_0^l \left(\int_0^x E dx \right) dx \ .$$

Integrujeme-li metodou per partes ($f = \int_0^x E dx$, $g = x$), dostaneme

$$\Delta z = -\frac{e}{mv^2}\left[l\int_0^l E dx - \int_0^l x E dx \right] = -\frac{e}{mv^2}\int_0^l (l-x) E dx \, .$$

Je-li délka kondenzátoru a a pole v kondenzátoru homogenní, pak

$$\int_0^l (l-x) E dx = a(l-\frac{a}{2})E$$

a $$\Delta z_E = -\frac{e}{mv^2} a(l-\frac{a}{2})E \ .$$

b) Pohyb v příčném magnetickém poli.
Elektron nechť jako výše vlétá do systému rychlostí v ve směru osy x. Magnetická indukce nechť míří ve směru osy y. Zjevně se bude pohyb dít v rovině xz. Pohybová rovnice pro z-složku pohybu má tvar

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{e}{m} v_x B \ .$$

Odtud dostaneme postupem stejným jako výše

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{e}{mv_x^2} v_x B = -\frac{e}{mv_x} B \approx -\frac{e}{mv} B \ ,$$

když jsme ještě položili $v_x \approx v$, což platí, pokud je počáteční rychlost dosti veliká.
Dvojím integrováním a integrací per partes dostaneme obdobně jako výše.

$$\Delta z = -\frac{e}{mv}\int_0^l (l-x) B dx \ .$$

Je-li magnetické pole homogenní a dosahuje až ke stínítku, pak

$$\int_0^l (l-x) B dx = \frac{l^2}{2} B$$

a $$\Delta z_B = -\frac{e}{mv} \cdot \frac{l^2}{2} B \, .$$

V Thomsonově metodě vykompenzujeme obě výchylky, takže $\Delta z_E = \Delta z_B$. Vyloučením rychlosti pak dostaneme

$$-\frac{e}{m} = \Delta z \cdot \frac{4a}{d \cdot l^4}(l-\frac{a}{2}) \cdot \frac{U}{B^2} \ ,$$

když jsme ještě vyjádřili intenzitu elektrického pole E pomocí napětí na kondenzátoru U a vzdálenosti desek d. (Ovšem $E = U/d$.)

3. Určete ionizační energii He I, He II a C I Slaterovou metodou.

Řešení :

Ve Slaterově metodě je vazebná energie elektronu dána vztahem $E = (Z{-}\sigma)^2/n^{*2}$.Ry, kde Z je nábojové číslo jádra, parametr σ popisuje stínění náboje jádra, n^* je efektivní kvantové číslo hladiny a Ry = 13,6 eV je tzv. Rydbergova energie.

Efektivní kvantové číslo je dáno přiřazením $n \to n^*$

n	1	2	3	4	5	6
n^*	1	2	3	3,7	4	5

Pro určení stínící konstanty jsou hladiny rozděleny do „slupek“ (1s), (2s, 2p), (3s, 3p), (3d), (4s, 4p), (4d), (4f), (5s, 5p), (5d) a (5f). Ve vlastní slupce je stínící konstanta rovna 0,35, kromě slupky (1s), tam je jen 0,3. Pro slupky typu (s,p) je stínění od nejbližší hlubší slupky 0,85, od hlubších 1. Pro slupky typu (d) a (f) je stínění od hlubších slupek rovné 1.

U He I s nábojovým číslem $Z = 2$ máme 2 elektrony ve stavu 1s. Stínící konstanta je rovna 0,3, takže efektivní náboj jádra činí 1,7. Protože efektivní kvantové číslo zůstává rovné 1, je energie jednoho elektronu rovna $E_1 = 1{,}7^2/1$ Ry = 2,89 Ry a celková vazebná energie E(He I) = $2E_1$ = 5,78 Ry.

Energie vazby He II (ion helia) je E(He II) = $2^2/1^2$.Ry = 4 Ry (není stínění !).

Energie ionizace He I je zřejmě E_i(He I) = E(He I) − E(He II) = 1,78 Ry = 24,20 eV.

Experimentální hodnota činí 24,58 eV.

Ionizační energie He II je ovšem rovna E(He II) a vychází přesně (vodíkupodobný systém).

U C I máme 2 elektrony ve slupce 1s, 2 ve slupce 2s a 2 ve slupce2p.

Dva elektrony ve slupce dávají příspěvek k vazební energii rovný $2 \times (5{,}7)^2/1^2$.Ry = $2 \times 32{,}49$ Ry (stínění 0,3). Čtyři elektrony ve slupce (2s,2p) dávají příspěvek $4 \times 3{,}25^2/2^2$ Ry = $4 \times 2{,}64$ Ry (stínění $2 \times 0{,}85 + 3 \times 0{,}35 = 2{,}75$). Celkem E(C I) = 75,54 Ry.

U C II jsou ve slupce (2s,2p) jen tři elektrony, takže příslušný příspěvek je jen $3 \times 3{,}6^2/2^2$ = $3 \times 3{,}24$ Ry (stínění $2 \times 0{,}85 + 2 \times 0{,}35 = 2{,}4$). Celkem E(C II) = 74,7 Ry.

Ionizační energie je rovna rozdílu vazebních energii, E_i(C I) = E(C I) − E(C II) = 0,84 Ry = 11,42 eV. Experimentální hodnota činí 11,26 eV.

4. Jakou plochu potřebujeme pro větrné elektrárny, mají-li pokrýt výkon 1 GW, a kolik to stojí?

Reálná data :

Thanet offshore (v moři) UK: 100 3 MW větrníků na 35 km^2 za cca £800 M ≈ 30 GKč, využití 30 %

Řešení :

Plocha pro 1 GW se rovná $10/3 \times 35$ km^2 = 117 km^2, při využití cca 30 % tedy 385 km^2.

Cena $10/3 \times 30$ GKč = 100 GKč, s úvahou o využití 330 GKč.

VI. 4. Porovnejte: gravitační, elektrickou a magnetickou sílu v případě atomu vodíku. Potřebná data: gravitační konstanta je rovna $6{,}7 \times 10^{-11}$ N·m^2/kg^2, permitivita vakua $8{,}9 \times 10^{-12}$ F/m, rychlost světla $3{,}0 \times 10^8$ m/s, hmotnost protonu a elektronu je $1{,}7 \times 10^{-27}$ kg a $0{,}9 \times 10^{-30}$ kg a elementární náboj $1{,}6 \times 10^{-19}$ C. Typická rychlost elektronu v atomu je 1/100 rychlosti světla.

Řešení: Pro velikost gravitační a elektrické síly v atomu vodíku platí

$$F_{gr} = \kappa.m.M/r^2\ ,\quad F_{el} = 1/(4\pi\varepsilon_o)\ .e^2/r^2\ ,$$

kde κ je gravitační konstanta, ε_o permitivita vakua, M a m hmotnost protonu resp. elektronu, e je elementární náboj a r je vzdálenost protonu a elektronu.

Protože obě síly závisejí na vzdálenosti stejně, platí bez ohledu na rozměr atomu

$$F_{gr}/F_{el} = \kappa.4\pi\varepsilon_o.m.M/e^2 \approx 4{,}5 \times 10^{-40}\ .$$

Gravitační síla je tedy v atomu zcela zanedbatelná.

Porovnejme nyní magnetickou a elektrickou sílu. Poměr těchto sil bude záviset i na rychlostech částic, protože velikost magnetické síly působící na elektron je

$$F_{mg} = \left| e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \right| = \mu_o.e^2/(4\pi.r^2)\ .\ \left| \mathbf{v} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{r}_o) \right|\ ,$$

kde μ_o je permeabilita vakua, $\mathbf{v}$ a $\mathbf{V}$ rychlost elektronu a protonu a $\mathbf{r}_o$ jednotkový vektor ve směru od protonu k elektronu. Použili jsme ovšem Biotův-Savartův zákon.

Uvažme pro jednoduchost případ, kdy obě rychlosti jsou kolmé na spojnici obou částic (tak tomu v podstatě v atomu vodíku klasicky chápaném je, protože magnetická síla bude pouze malou korekcí). Pak

$$F_{mg}/F_{el} = \mu_o.\varepsilon_o.v.V = v.V/c^2\ ,$$

protože $\mu_o\varepsilon_o = 1/c^2$. Dostali jsme tak charakteristický výraz pro relativistickou korekci, která je pro malé rychlosti ovlivňujících se částic malá.

Uvážíme-li typickou rychlost elektronu a navíc, že $m.v = M.V$ (neboť těžiště atomu lze považovat za nepohyblivé), dostaneme

$$F_{mg}/F_{el} = m/M\ .v^2/c^2 = 5 \times 10^{-8}\ ,$$

protože poměr m/M je přibližně roven 1/2000.

VI. 13. Spočtěte: celkovou vlastní elektrickou energii homogenně nabité kuličky. Jak velký by byl elektron, kdybychom si ho představili jako takovouto kuličku? Možné další příspěvky k jeho energii neuvažujte.

Řešení: Z Gaussovy věty dostaneme pro intenzitu elektrického pole kuličky

$$\begin{aligned} E.4\pi r^2 &= 1/\varepsilon_o\ .Q = 1/\varepsilon_o\ .Q.r^3/R^3 && \text{pro } r < R \\ &= 1/\varepsilon_o\ .Q && \text{pro } r > R\ , \end{aligned}$$

kde Q je její náboj a R její poloměr. (Porovnejte s příklady 9 a 10.) Je tedy

$$\begin{aligned} E &= 1/(4\pi\varepsilon_o)\ .Q.r/R^3 && \text{pro } r < R \\ &= 1/(4\pi\varepsilon_o)\ .Q/r^2 && \text{pro } r > R\ . \end{aligned}$$

Celkovou energii dostaneme jako integrál hustoty energie přes celý prostor, tj. ze vztahu

$$W = \iiint \frac{1}{2}\,\varepsilon_o.E^2.\mathrm{d}V\ .$$

Zřejmě díky kulové symetrii platí

$$W = \int_0^R 1/2\,\varepsilon_o.Q^2/(4\pi\varepsilon_o)^2\ .r^2/R^6\ .4\pi.r^2.\mathrm{d}r + \int_R^\infty 1/2\,\varepsilon_o.Q^2/(4\pi\varepsilon_o)^2\ .1/r^4\ .4\pi.r^2.\mathrm{d}r$$

$$= [1/10\ Q^2/(4\pi\varepsilon_o.R) + 1/2\ Q^2/(4\pi\varepsilon_o.R)] = 3/5\ Q^2/(4\pi\varepsilon_o.R)\ .$$

Povšimněte si, že příspěvek vnějšku kuličky je větší než příspěvek vnitřku. Pro $R \to 0$ jde energie do nekonečna.

Měl-li by elektron odpovídat takové kuličce, měla by této energii odpovídat jeho klidová energie, tj. mělo by platit

$$3/5\ e^2/(4\pi\varepsilon_o.R) = m_e.c^2$$

a odtud

$$R = 3/5\ e^2/(4\pi\varepsilon_o.m_e.c^2)\ .$$

Výraz $e^2/(4\pi\varepsilon_o.m_e.c^2)$ nazýváme klasický poloměr elektronu a $R_{cl} = 2{,}8 \times 10^{-15}$ m.