Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta elektrotechnická

Katedra technologií a měření

Opakování základních znalostí

z oboru

Metrologie a měřicí technika

Obsah:

2016

1 Zaokrouhlování výsledků měření

Rozlišení:

hodnota poslední číslice vpravo na displeji udává rozlišení měřicího přístroje.

Př. 1*: 4 digitální voltmetry DVM měří s t e j n é napětí.*

		V_1	V_2	V_3	V_4
*Jejich rozlišení (*v digitech*):*		3 1/2	3 3/4	4 1/2	5
číselně:	0 -	1999	3999	19999	99999
Na rozsahu do		200 V	40 V	200 V	100 V
bylo naměřeno:		024,8 V	24,83 V	024,83 V	24,833 V
tj. rozlišení:		0,1 V	0,01 V	0,01 V	0,001 V .

Přesnost (chyba) údaje (čtení naměřené hodnoty):

vyjadřuje maximální odchylku údaje od správné hodnoty při dodržení výrobcem stanovených podmínek (např. doba od poslední kalibrace, teplota apod.).

Př. 2*: Pro daný DVM s rozlišením* 4 1/2 digitů *jsou* v *katalogu udány složky výsledné chyby:* ± *(*0,01% z údaje + 3 digity*). Na rozsahu do* 20 V *(tj. od* 00,000 *do* 19,999 V*) je tedy max. chyba při údaji* 10,000 V *je* $\Delta = \pm (0{,}0001 \cdot 10 + 3 \cdot 0{,}001) = \pm 0{,}004$ V.

To je ale 4x více než je rozlišení (0,001).

Když tento DVM (na etalonu napětí = 10,0000 V) *naměří* 9,996 V *nebo* 10,004 V*, jsou tyto hodnoty v přípustné toleranci.*

Zaokrouhlování údajů obecně:

V počtu udávaných číslic se respektují především chyby údajů, např. 12,34 ± 0,03 V.

Obecně: je-li na posledním místě číslice	**0 až 4**,	„odřízne se“:	15,522 *na* 15,52
	5 až 9,	„přidá se 1“:	15,526 *na* 15,53.

Šíření chyb a zaokrouhlování:

a) Při sčítání hodnot se sčítají absolutní chyby: $X = X_1 + X_2 + \ldots$ $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots$

Př. 3*:* $U_c = U_1 + U_2$, *když* $U_1 = (2{,}640 \pm 0{,}007)$ V $= U_2$, *tedy* $U_c = (5{,}280 \pm 0{,}014)$ V.

b) Při součinu (či podílu) se sčítají relativní chyby: $X = X_1 \cdot X_2 \ldots$, $\delta = \delta_1 + \delta_2 + \ldots$

Př. 4*:* $U = 10{,}017$ V, $\delta U = \pm 0{,}03$ %, $I = 10{,}28$ A, $\delta I = \pm 0{,}06$ %.

$P = 102{,}974\,76$ W, $\delta p = 0{,}09$ % *(tj.* 0,092 68 W*).*

Zaokrouhluje se:

*a) n*a nejvýše tolik desetinných míst, kolik jich má nejméně jeden údaj *(tj.* $I = 10{,}28$ A*), tedy* $P = 102{,}97$ W.

b) na počet platných číslic *(abs. chyba je cca* 0,09 W*), tedy* $P = 102{,}97 \pm 0{,}09$ W.

2 Výpočet chyby údaje (jednoho měřicího přístroje, převodníku).

Analogového, elektromechanického měř. přístroje:

je obvykle udána tzv. třída přesnosti (TP): $\delta p = (|\Delta max| / X_k) \cdot 100$ (tj. δp% z rozsahu X_k).

Př. 5*: Voltmetr má rozsah* U_k = 30 V*, stupnici* 150 d*, tř. přesnosti* δp = 1*.*

Bylo změřeno napětí U_n = 10,0 V*.*

Jaká je absolutní Δmax *a poměrná* δ *chyba údaje tohoto měřicího přístroje?*

$\Delta max = \pm\, \delta_p \cdot U_k / 100 = \pm\, (1 \cdot 30 / 100) = \pm\, 0{,}3$ V .

$\delta = \pm\, \Delta max / U_n = \pm\, 0{,}3 / 10{,}0 = \pm\, 0{,}03 = \pm\, 3\ \%$.

Př.6*: Na rozsahu voltmetru* U_k = 120 V*, tř. přesnosti* δ_p = 0,2 *bylo naměřeno napětí* U_n = 30,0 V*. Jaká je absolutní a poměrná chyba údaje?*

$\Delta max = \pm\, 0{,}2 \cdot 120 / 100 = \pm\, 0{,}24$ V , $\delta_n = \pm\, (0{,}24 / 30) \cdot 100 = \pm\, 0{,}8\ \%$.

Pozn.1: poměrná chyba údaje roste s klesající výchylkou, tj. v poměru U_k / U_n !

tedy $\delta_n = \pm\, \delta p \cdot (U_k / U_n) = \pm\, 0{,}2 \cdot 120 / 30 = \pm\, 0{,}2 \cdot 4 = \pm\, 0{,}8\ \%$.

Pozn. 2: absolutní chyba údaje takového měř. přístroje Δmax je konstantní v daném rozsahu nezávisí na velikosti údaje.

Číslicového měřicího přístroje:

absolutní chyba údaje (tj. naměřené hodnoty) je dána buď:

a) Δm = ± (% z naměřené hodnoty + % z rozsahu) = ± (% **rdg** + % **F.S.),**

nebo:

b) Δm = ± (% z naměřené hodnoty + počet číslic posl. místa · rozlišení) =

= ± (% **rdg** + **digits · 1 LSD).**

digity se zde rozumí počet cifer na nejnižším místě (s nejnižší vahou) · rozlišení,

LSD (Low Significat Digit).

Př. 7*: Číslicový voltmetr (DVM) na rozsahu* U_k = 100,00 V *udává napětí* U_n = 25,00 V*. Jaká je absolutní a relativní chyba údaje, když z katalogu je max. absolutní chyba:*

Δm = ± (0,02 % rdg + 0,01 % F.S.)*?*

$\Delta m = \pm\, (0{,}02 \cdot 25 / 100 + 0{,}01 \cdot 100 / 100) = (0{,}02 / 4 + 0{,}01) = \pm\, 0{,}015$ V,

$\delta = \pm\, 0{,}015 / 25 = \pm\, 0{,}0006 = \pm\, 0{,}06\ \%$.

Př. 8.*: Číslicovým multimetrem (DVM) na rozsahu* I_k = 20,000 mA *(tzn. rozlišení 1LSD* = 0,001 mA*) byl změřen proud* 5,000 mA*.*

V katalogu je udána max. absolutní chyba = ± (0,01 % rdg + 3 digity).

Jaká je absolutní a relativní chyba údaje?

$\Delta m = \pm\, (0{,}01 \cdot 5{,}000 / 100 + 0{,}001 \cdot 3) = \pm\, (0{,}0005 + 0{,}003) = \pm\, 0{,}0035$ mA ,

$\delta = \pm\, 0{,}0035 / 5{,}000 = \pm\, 0{,}0007 = \pm\, 0{,}07\ \%$.

3 Vyjádření chyb – přepočet

Poměrné chyby δ jsou bezrozměrné, lze je však vyjádřit několika způsoby:

δ...(–); $\delta \cdot 10^2$...(%); $\delta \cdot 10^6$...(ppm), „part per million";

$\delta = 10^{-d}$...(d digitů); $\delta = 2^{-n}$ ...(n bitů);   20 log δ ...(dB)

Pozn. 3: hodnoty rozlišení a přesnosti se zvl. u číslicových převodníků vyjadřují ve stejných poměrných jednotkách (např. n-bitů), ale pozor: **rozlišení** není totéž co **přesnost**!

Př. 9.*: Číslicový voltmetr má stupnici d = 7 číslic (digit). Jaké je jeho rozlišení R v ppm a nejméně kolik n bitů musí mít jeho analogově-číslicový převodník (ADC)?*

Rozlišení : $\delta = 10^{-d} = 10^{-7}$, $R = \delta \cdot 10^6 = 0{,}1$ *ppm,*

Počet číslic a bitů je vázán vztahem: $\mathbf{10^d = 2^n}$ => $d = n \cdot \log 2$,

tedy $n = d / \log 2 = 7 / 0{,}30103 = 23{,}25$ *tj. min. 24 bitů.*

Př.10*: Analogově-číslicový převodník (ADC) má rozlišení 14 bitů. Kolik hodnot je schopen rozlišit a kolik číslic může zobrazit připojený dekadický displej?*

$2^n = 2^{14} = 16384$ *hodnot;* $d = n \cdot \log 2 = 14 \cdot 0{,}30103 = 4{,}21$; *tj. 4 digity.*

Vyjádření poměrné chyby přenosu (zesílení) měřicího převodníku se často udává v dB $\delta_{dB} = 20 \cdot \log (\Delta / X) = 20 \cdot \log \delta$;

např. jako odchylka od 0 dB, odpovídající přenosu 1,0.

Př. 11*: Dle katalogu je v daném frekvenčním pásmu zesílení měřicího převodníku konstantní s odchylkou δ nejvýše ± 0,5 dB. Jaká je to relativní chyba δ v %?*

$+0{,}5 = 20.\ \log \delta$; $\delta = (10^{0{,}5/20} - 1{,}0) \cdot 100 = (1{,}0592 - 1{,}0) \cdot 100 = +5{,}92$ %,

ale pro -0,5 dB $\delta = (10^{-0{,}5/20} - 1{,}0) \cdot 100 = (0{,}944 - 1{,}0) \cdot 100 = -5{,}59$ %!

Př. 12*: Na mezní frekvenci zesilovače dochází k poklesu zesílení o $\delta_{dB} = -3$ dB oproti úrovni 0 dB (tj. 1,0). Kolik je to %?*

$\delta_{dB} = 20 \cdot \log \delta$; $\delta = (10^{-3/20} - 1{,}0) \cdot 100 = (0{,}70794 - 1{,}0) \cdot 100 = -29{,}20$ %.

pro $\delta_{dB} = +3$ dB *je* $\delta = +41{,}25$ %!

Při měření s číslicovými voltmetry (DVM) se vyskytuje rušení od souhlasného napětí *Ucm*, které způsobí absolutní chybu *Δcm* v údaji DVM. Pro definované poměry výrobce udává potlačení vlivu rušivého signálu *Ucm* na údaj DVM pomocí činitele potlačení CMRR (Common Mode Rejection Ratio):

CMRR = 20 · log (Δcm / *Ucm*)   [dB]

Př. 13*: Pro daný DVM udává výrobce v katalogu činitel potlačení CMRR = 120 dB. Jakou absolutní chybu údaje DVM způsobí rušivé napětí Ucm = 25 V?*

$-120\ \text{dB} = 20 \cdot \log (\Delta cm / 25)$ => $\Delta cm = 25 \cdot (10^{-120/20}) = 25 \cdot 10^{-6} = 25\ \mu V$

Dynamikou měřicího převodníku (či zesilovače), je nejčastěji označen poměr největší / nejmenší měřitelná hodnota, tj. rozsah/rozlišení (či max. signál/šum) a vyjadřuje se rovněž v dB.

4 Výpočet nejistot měření

Základní informace, termíny, rozdělení nejistot a jejich výpočet jsou uvedeny např. ve skriptech (O. Tůmová a kol.: El. měření - měř. metody, Vyd. ZČU Plzeň, 2005, odst. 1.4) nebo v knize (O. Tůmová: Metrologie a hodnocení procesů, BEN 2009, Praha).

Mírou standardní nejistoty je **směrodatná odchylka** σ, resp. její odhad s (druhá odmocnina z výběrového rozptylu s^2).

Standardní nejistota řešená způsobem A - u_A :

Určuje se statistickým vyhodnocením opakovaných měření téže veličiny za úmyslně neměněných podmínek. Nejlepší odhad rozptylu střední hodnoty X_S souboru naměřených hodnot Xi, i = 1,...,n $\qquad X_s = (\Sigma X_i) / n$, je:

$$s^2 (Xs) = [s^2 (Xi)] / n = [\Sigma (Xi - Xs)^2] / [n \cdot (n-1)]$$

Většina kalkulaček s programem "statistika" umožňuje ale vypočítat hodnotu s(Xi)!

Př. 14*: Pro dvě dané (naměřené) hodnoty (n=2) Xi* = 1,0 *a* 2,0 *je střední hodnota Xs* = 1,5 *a směrodatná odchylka souboru s(Xi)* = 0,707. *Odhad směrodatné odchylky výběr. průměru je potom* $s(X) = s(Xi) / \sqrt{n} = 0{,}5$.

Př. 15*: Z naměřených n = 5 hodnot napětí byla vypočtena střední hodnota Xs* = 14,6 V, *s(Xi)* = 1,14 V. *Směrodatná odchylka výběrového průměru* $s(Xs) = s(Xi) / \sqrt{n} = 0{,}51$ V. *Protože byl počet měření n < 10, se nejistota* u_A *zvětší koeficientem ks* = 1,4 *(viz skripta s. 27, tab. 1.1), tedy* $u_{Ax} = ks \cdot s(Xs) = 0{,}714$ V.

Standardní nejistota řešená způsobem B - u_B :

Určují se ze známých nebo odhadnutých hodnot změn *Xi*, vyvolaných ovlivňujícími veličinami *Zj* (vnější vlivy, změny teploty, napájení ap.) dle statistických závislostí těchto ovlivňujících veličin. Častým předpokladem je, že tvar rozdělení hustoty pravděpodobnosti těchto změn je rovnoměrný, zvláště když jsou dány (známy) maximální odchylky např. δ_m, (ev. Δ_m). Pak je odpovídající $\sigma = \delta_m / \sqrt{3}$ (ev. $\Delta_m / \sqrt{3}$).

Př. 16: *Jaká je nejistota údaje V-metru (rozsah* $U_k = 10$ *V, tř. přesnosti* $\delta_p = 1$*) ?*

$$\sigma = \delta_p / \sqrt{3} = 1 / \sqrt{3} = 0{,}577\,\% = 0{,}058\ V = 58 \cdot 10^{-3}\ V = u_{BV}$$

Př. 17: *Jaká je nejistota stálého údaje číslicového přístroje (*$I_k = 20{,}000$ *mA, rozlišení 1* digit*)?* $\sigma = 0{,}001$ mA $/ \sqrt{3} = 0{,}000\,58$ mA $= 580 \cdot 10^{-6}$ mA $= u_{BI}$

Kombinovaná standardní nejistota měření u_x udává interval, ve kterém se s 68% pravděpodobností vyskytuje skutečná hodnota *Xs* (tzv. konfidenční interval):

$$u_x = \sqrt{(u_A^2 + u_B^2)} \ .$$

Rozšířená (celková) nejistota měření:

$$U = k \bullet u_x$$

kde *k* je koeficient rozšíření, obvykle (pro pravděpodobnost 95 % a normální rozdělení hustoty pravděpodobnosti) je *k* = 2.

Př. 18: *Odporový platinový teploměr Pt-100 byl cejchován v olejové lázni při* 120 °C. *Odpor Pt-100 byl měřen odporovým můstkem, přepočten na teplotu a teplota olejové lázně je kontrolována etalonovým teploměrem.*

Nejistota A:
Cejchování na teplotě $t = 120$ °C bylo $n = 9$x opakováno ($i = 1, 2, ...9$). Z naměřených hodnot byl vypočten odhad směrodatné odchylky výběrového průměru t souboru: $s(t) = \pm 0{,}0029$ K. *Protože bylo méně než 10 opakování, je nutno tuto hodnotu zvětšit součinitelem $ks(9) = 1{,}2$; takže výsledná nejistota typu A je $u_A = 1{,}2 \cdot 0{,}0029 = \pm 0{,}0035$* K

Nejistoty B:

Při výpočtu byly respektovány následující ovlivnění veličinami Zj a předpokládalo se rovnoměrné rozdělení hustoty pravděpodobnosti:

I - chyby měřicím můstkem	*max.* ± 0,005 K, *tj.*	$u_{B1} = 0{,}005/\sqrt{3} = \pm 0{,}003$ K
2 - oteplení RTD proudem	*max.* ±0,3 K	$u_{B2} = 0{,}3/\sqrt{3} = \pm 0{,}173$ K
3 - nehomogenní t(x,y,z) lázně	*max.* ±0,2 K	$u_{B3} = 0{,}2/\sqrt{3} = \pm 0{,}116$ K
4 - etalonový teploměr	*max.* ±0,13 K	$u_{B4} = 0{,}13/\sqrt{3} = \pm 0{,}075$ K

výsledná nejistota $u_B = \sqrt{\Sigma} u_{Bj} = \pm 0{,}2214$ K.

Celková standardní nejistota:

$$u_c^2 = u_A^2 + u_B^2 = 0{,}0035^2 + 0{,}2214^2 = 0{,}049 \qquad u_C = 0{,}2214 \text{ K} = \pm 0{,}221 \text{ K},$$

Rozšířená nejistota:

$$U = k \cdot u_C = 2 \cdot 0{,}221 = 0{,}442 \text{ K} = \pm 0{,}44 \text{ K} = \pm 0{,}44 \text{ °C},$$

Protože výsledek měření byl uveden v °C, bude i nejistota u výsledku uvedena v °C.