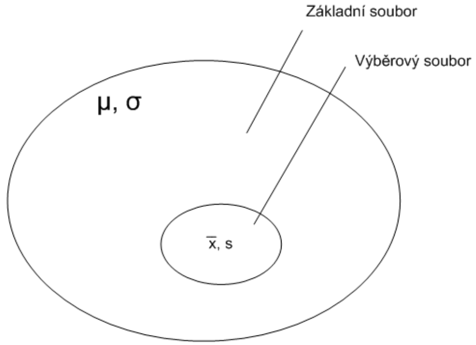
2. cvičení

KET / RJTD

ZS 2016/17

Aplikace statistiky v řízení kvality



Výběrový průměr

$$\mu \to \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Výběrová směrodatná odchylka

$$\sigma \to s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

STATISTICKÝ TEST - TESTOVÁNÍ HYPOTÉZ

- **Nulová a alternativní hypotéza**: tvrzení o jednom nebo více parametrech nebo o rozdělení, jejichž platnost se testuje.
- **Nulová hypotéza (H_0)** se vztahuje k testovanému tvrzení, zatím co **alternativní hypotéza (H_1** nebo **H_A)** k tvrzení, které se přijme, pokud se nulová hypotéza zamítne.
  - Testujeme-li hypotézy o parametrech základního souboru, pak testovaná hypotéza obvykle tvrdí, že daný parametr je rovný určité hodnotě. Tato hodnota se někdy nazývá hypotetickou hodnotou parametru

$$H_o\!: \mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = \mu_i = \dots = \mu_I$$

TESTOVÁNÍ HYPOTÉZ

- **Alternativní hypotéza může být formulována podle povahy problému, a to:**

a) $H_1: \mu_1 = \mu_o$ toto ale většinou nedává smysl!

b) $H_1: \mu_1 > \mu_0$

c) $H_1: \mu_1 < \mu_0$

d) $H_1: \mu_1 \neq \mu_0$

TESTOVÁNÍ HYPOTÉZ

- Testovanou hypotézu přijímáme nebo zamítáme na základě výsledků náhodného výběru.
- Proto k testování hypotézy potřebujeme vhodnou statistiku, kterou nazýváme testovým kritériem.

TESTOVANÉ KRITÉRIUM

- **Obor hodnot testového kritéria** rozdělujeme při testování hypotéz na dvě části:

- 1. kritický obor
  2. obor přijetí

5

KRITICKÝ OBOR

- Kritickým oborem je takový obor hodnot, který svědčí ve prospěch hypotézy H_1.
- To znamená, že pokud vypočteme z výběrových dat hodnotu testového kritéria a tato hodnota padne do kritického oboru, zamítneme hypotézu H_0 a přijmeme hypotézu H_1.

- Naopak, pokud padne hodnota testového kritéria do oboru přijetí, pak testovanou hypotézu H_0 nezamítneme.
- Ohraničení kritického oboru je provedeno tzv. kritickými (tabelovanými) hodnotami.

6

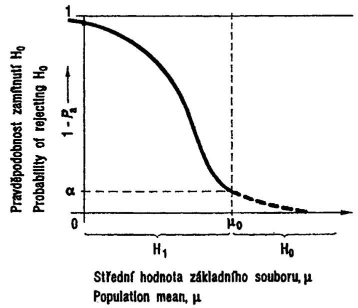
PŘIJMUTÍ HYPOTÉZY

- Testovanou hypotézu přijímáme nebo zamítneme na základě **výsledků náhodného výběru**, a proto může být **rozhodnutí o hypotéze H_0 správné nebo i nesprávné**:

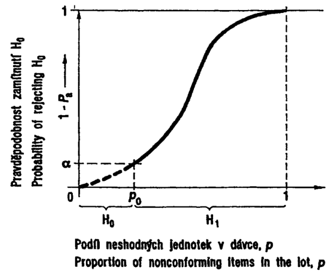
\- Hodnota testového kritéria může totiž padnout do oboru přijetí nebo do kritického oboru jak v případě, kdy ve skutečnosti platí hypotéza H_0, tak v případě, kdy ve skutečnosti platí H_1.

7

GRAFY SILOFUNKCE



Obrázek 1 – Graf silofunkce
Figure 1 – Power curve



Obrázek 2 – Graf silofunkce
Figure 2 – Power curve

Obr,1: **Test hypotézy H_0 ($\mu >= \mu_0$) proti H_1 ($\mu < \mu_0$)**

Obr.2: **Test hypotézy H_0 ($p =< p_0$) proti H_1 ($p > p_0$)**

8

Chyby 1. a 2. druhu

- Nesprávné zamítnutí testované hypotézy $\boldsymbol{H_0}$ se nazývá **chyba prvního druhu**

  nesprávné přijetí testované hypotézy se nazývá **chyba druhého druhu**.

- K chybě 1. druhu dochází, jestliže hodnota testového kritéria padne do kritického oboru, ačkoliv platí hypotéza H_0.
- Naopak k chybě 2. druhu dochází, padne-li hodnota testového kritéria do oboru přijetí, ačkoliv platí hypotéza H_1.

Hladina významnosti

- Pravděpodobnost nesprávného zamítnutí testované hypotézy H_0 se nazývá **hladina významnosti** .
- Značí pravděpodobnost, že hodnota testového kritéria padne do kritického oboru za podmínky, že platí hypotéza H_0.

- Pravděpodobnost nesprávného přijetí hypotézy H_0 (chyba 2. druhu) se značí $\boldsymbol{\beta}$.
- Je to pravděpodobnost, že hodnota testového kritéria padne do oboru přijetí za podmínky, kdy hypotéza H_0 neplatí.

Síla testu

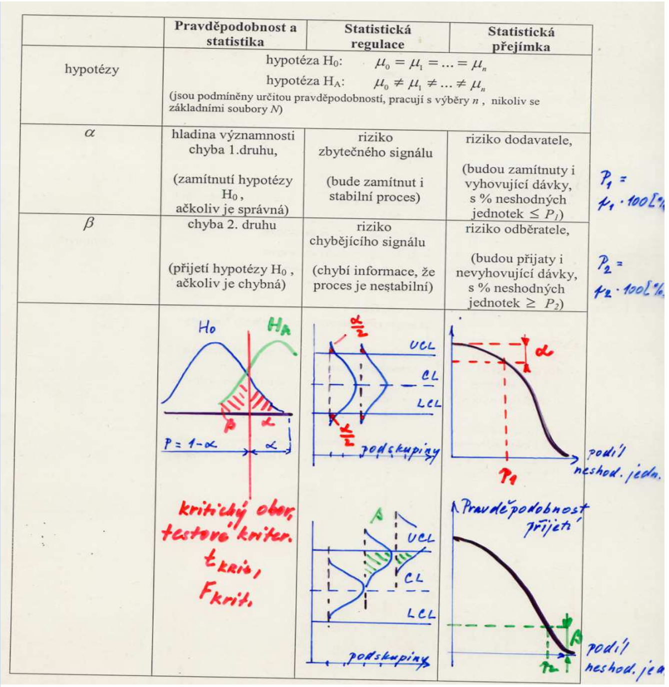
- Pravděpodobnost *(1-β)* znamená, že hodnota testového kritéria padne do kritického oboru za podmínky, že hypotéza H_0 neplatí, tj. **pravděpodobnost oprávněného zamítnutí** hypotézy H_0.
- Tato pravděpodobnost se nazývá **síla testu** $\boldsymbol{\beta}$.

- Při statistickém testování hypotéz se většinou hladina významnosti volí předem a to většinou 5 %, tedy = 0,05 ; méně často 1 %, tedy = 0,01.

Kritický obor

- **Kritických oborů, které vedou k téže hladině významnosti, je vždy více. Z nich se používá ten, který maximalizuje sílu testu.**
- **Síla testu se obvykle předem nevolí, často nebývá vysoká.**
- **V praxi to znamená, že přijímáme hypotézu H_0, ačkoliv neplatí. Z toho vyplývá, že z přijetí testované hypotézy určitým statistickým testem nemůžeme stanovit závěr, že obecně platí.**

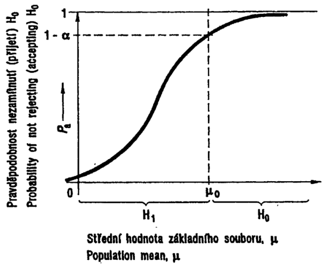
- **Naopak volbou dostatečně nízké hladiny významnosti dosáhneme toho, že vede-li statistický test k přijetí alternativní hypotézy, můžeme si být téměř jisti, že H_1 platí, a tím neplatí H_0.**
- **Velmi důležité je zvolit v dané konkrétní situaci vhodné testové kritérium, a na něm založený kritický obor.**



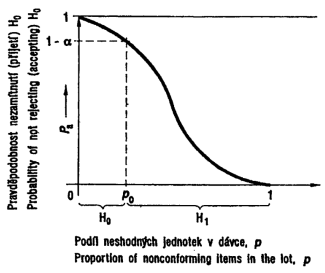
	Pravděpodobnost a statistika	Statistická regulace	Statistická přejímka
hypotézy	hypotéza H_0: $\mu_0 = \mu_1 = \ldots = \mu_n$ hypotéza H_A: $\mu_0 \neq \mu_1 \neq \ldots \neq \mu_n$ (jsou podmíněny určitou pravděpodobností, pracují s výběry n, nikoliv se základními soubory N)		
α	hladina významnosti chyba 1.druhu, (zamítnutí hypotézy H_0, ačkoliv je správná)	riziko zbytečného signálu (bude zamítnut i stabilní proces)	riziko dodavatele, (budou zamítnuty i vyhovující dávky, s % neshodných jednotek $\leq P_1$)
β	chyba 2. druhu (přijetí hypotézy H_0, ačkoliv je chybná)	riziko chybějícího signálu (chybí informace, že proces je nestabilní)	riziko odběratele, (budou přijaty i nevyhovující dávky, s % neshodných jednotek $\geq P_2$)

POROVNÁNÍ STATISTICKÝCH PARAMETRŮ

GRAFY OPERATIVNÍ CHARAKTERISTIKY



Obrázek 3 –Graf operativní charakteristiky
Figure 3 – OC curve



Obrázek 4 –Graf operativní charakteristiky
Figure 4 –OC curve

Obr,3: **Test hypotézy H_0 ($\mu >= \mu_0$) proti H_1 ($\mu < \mu_0$)**

Obr.4: **Test hypotézy H_0 ($p =< p_0$) proti H_1 ($p > p_0$)**

TESTY HYPOTÉZ - PŘÍKLAD

Testy hypotéz pro parametry µ normálního rozdělení jednoho souboru

- A) **se známým rozptylem σ²**

Nechť je normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ se známým parametrem σ² >0.

TESTY HYPOTÉZ - PŘÍKLAD

- Testujeme hypotézu H_0 proti alternativní hypotéze $H_0 : \mu = \mu_0$ $H_A : \mu > \mu_0$
- Jako testové kritérium použijeme statistiku

kde za µ jsme dosadili μ_0 specifikovanou hypotézou H_0.

$$U = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$$

TESTY HYPOTÉZ - PŘÍKLAD

B) **s neznámým rozptylem σ^2**

V daném případě použijeme jako testové kritérium vztah

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s}\sqrt{n}$$

Parametr t je parametrem Studentova rozdělení.

BODOVÉ ODHADY - PŘÍKLADY

- **Většinou se používají pro charakteristiku polohy – uvádějí jedinou hodnotu na číselné ose (odhad skutečné hodnoty)**

- **Aritmetický průměr**
- **Medián,**
- **Modus**
- **Geometrický průměr**
- **Harmonický průměr**

INTERVALOVÉ ODHADY - PŘÍKLADY

- **Většinou se používají pro charakteristiku variability – udávají odhad intervalu, ve kterém se s jistou pravděpodobností vyskytuje skutečná hodnota**

- **Bodový odhad výsledku ± výběrová směrodatná odchylka**
- **Rozpětí**
- **Bodový odhad výsledku ± krajní chyba**
- **Bodový odhad výsledku ± nejistota měření**

Vyhodnocení výsledků měření

STATISTICKÉ CHARAKTERISTIKY

Obecně platí, že volíme takové charakteristiky, které dané rozdělení nejlépe popisují.

Statistické charakteristiky se dělí do 4 základních skupin.

1) **Charakteristika polohy**
2) **Charakteristika variability**
3) **Charakteristika šikmosti**
4) **Charakteristika špičatosti**

Charakteristika polohy – 1.obecný moment

Tyto charakteristiky udávají střed (úroveň) celé skupiny údajů, kolem kterého všechny hodnoty kolísají.

Aritmetický průměr

Výběrový (aritmetický) průměr je definován jako nejlepší odhad střední hodnoty (pravé hodnoty) základního souboru:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\left(X_1 + X_2 + \ldots + X_n\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

kde n je počet prvků náhodného výběru,
i je i-tý prvek náhodného výběru.

Medián

- Medián je bod, který rozděluje celkovou plochu křivky hustoty pravděpodobnosti na dvě stejně velké části (po 50% prvků souboru).

a) Je-li počet ***n*** lichý: $Me = x_{(n+1)/2}$

b) Je-li počet ***n*** sudý: $Me = 0{,}5\,(x_{n/2} + x_{(n/2)+1})$

Modus

- Modus je bod, ve kterém má funkce hustoty pravděpodobnosti vrchol (největší četnost výskytu), tj. tzv. nejtypičtější hodnota souboru.

KVANTILY

- Kvantily jsou hodnoty náhodné veličiny, které rozdělují sledovaný soubor uspořádaný podle velikosti sledovaného znaku (četnosti) na 2 části:
- jedna část obsahuje hodnoty menší (nebo stejné) než je tento kvantil,
- druhá část naopak hodnoty větší (nebo stejné) než kvantil.

KVANTILY

a) **kvartily** – soubor dělí na 4 části, každá obsahuje 25% jednotek,

dolní kvartil X_{25} odděluje 25% nejnižších hodnot,

prostřední kvartil X_{50} = Me dělí obor hodnot na 2 stejné části,

horní kvartil X_{75} odděluje 75% nejnižších hodnot.

b) **decily** $X_{10}...X_{90}$ dělí soubor na 10 stejně početných skupin

c) **centily** $X_{1}...X_{99}$ dělí soubor na 100 stejně četných částí

CHARAKTERISTIKA VARIABILITY – 2. CENTRÁLNÍ MOMENT

- Tyto charakteristiky udávají koncentraci nebo rozptýlení hodnot kolem střední hodnoty.

a) **Rozpětí R** je definováno jako rozdíl mezi maximální a minimální hodnotou z výběru:

$$R = X_{\max} - X_{\min}$$

b) **Mezikvartilové rozpětí** je definováno jako rozdíl mezi horním a dolním kvartilem, tj.

$$R_q = X_{75} - X_{25}$$

c) **Decilové rozpětí:**

$$R_d = X_{90} - X_{10}$$

d) **Percentilové rozpětí:**

$$R_p = X_{99} - X_{1}$$

e) **Odhad rozptylu naměřených hodnot X_i** náhodného výběru

$$s^2(X_i) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

kde n je celkový počet prvků,
i značí i-tý prvek náhodného výběru

f) **Výběrová standardní (směrodatná) odchylka s**
je definována jako druhá odmocnina z rozptylu. Používá se velmi často při vyhodnocování.

1) Směrodatná odchylka naměřených hodnot X_i náhodného výběru:

$$s(X_i) = \sqrt{s^2(X_i)}$$

2) Směrodatná odchylka výběrových průměrů

$$s\left(\overline{X}\right) = \sqrt{s^2\left(\frac{X_i}{n}\right)} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}$$

Je vlastně výběrová směrodatná odchylka výběrových průměrů, tj. nejistota A (pro počet opakovaných měření $n >$ 10

g) **Průměrná** nebo-li **absolutní odchylka d**
se určí jako průměr absolutních odchylek od průměru.

$$d = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|X_i - \overline{X}\right|$$

kde n je celkový počet prvků,
I značí i-tý prvek.

- h) **Variační koeficient**

  je měřítkem relativní variability.

$$c = \frac{s}{\bar{X}}$$

kde s je směrodatná odchylka,

$\bar{X}$ je průměrná hodnota.

Používá se při porovnávání variability znaků.

CHARAKTERISTIKY ŠIKMOSTI – 3. CENTRÁLNÍ MOMENT

Tyto charakteristiky udávají, zda jsou hodnoty kolem středu rozloženy souměrně nebo je rozdělení hodnot sešikmeno na jednu stranu.

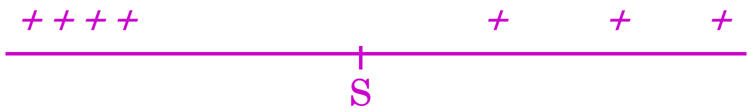
Charakteristiky špičatosti – 4. centrální moment

Charakteristiky špičatosti udávají, jaký průběh má rozdělení kolem střední hodnoty. Čím je rozdělení špičatější, tím více jsou hodnoty soustředěny kolem střední hodnoty (údaje souboru jsou blízké střední hodnotě), opakem je rozdělení s malou špičatostí, kde mnohé hodnoty jsou dost vzdálené od střední hodnoty.

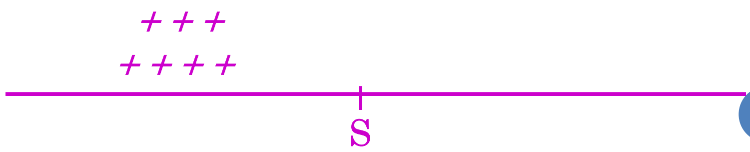
Výsledky opakovaných měření

- pro zpřesnění měření (abychom mohli určit výsledek co nejbližší skutečné hodnotě S), opakují se měření několikrát za stejných podmínek
- výsledky jednotlivých měření (**v obr.** označené +) mohou být vůči hodnotě S různé
- Pojmy: preciznost, pravdivost, přesnost

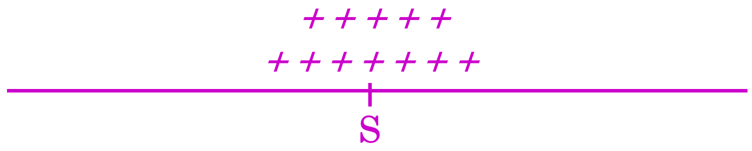
- výsledky nejsou přesné (nejsou správné ani shodné - přesné), je-li vzájemná shoda výsledků špatná - preciznost



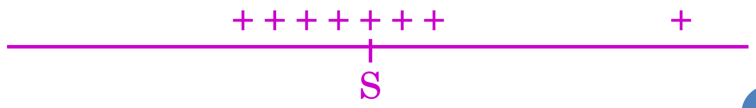
- výsledky jsou shodné (přesné), ale nejsou správné, výsledky mezi sebou shodují, ale výrazně se liší od skutečné hodnoty – pravdivost



- výsledky přesné (správné a shodné současně) - přesnost

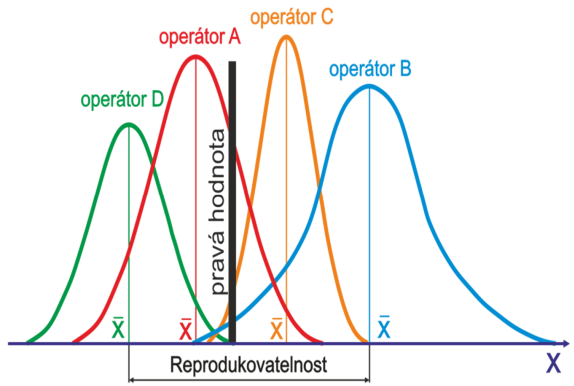


- výsledky odlehlé se výrazně liší od ostatních



Základy měření

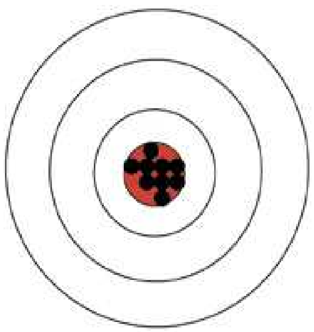
- **Reprodukovatelnost měření**



Základy měření – 3P - Přesnost měření

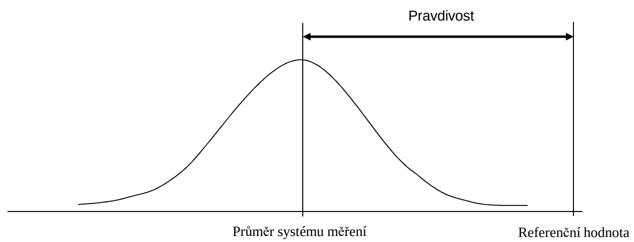
- Pojmem **přesnost měření** rozumíme těsnost shody mezi naměřenou hodnotou veličiny a pravou hodnotou měřené veličiny. Přesnost je kvalitativní pojem, není dána číselnou hodnotou veličiny.
- Měření je prohlášeno za přesnější, čím je chyba měření menší.
- K pojmu **přesnost měření** se vztahují další pojmy, jako jsou **pravdivost** měření a **preciznost** měření.

Střelba je správná a přesná

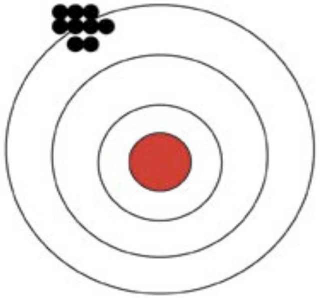


10. Základy měření – 3P – Pravdivost měření

- Pojem, který se dá chápat jako **správnost měření**.
- **Pravdivost měření** je těsnost shody mezi aritmetickým průměrem nekonečného počtu opakovaných naměřených hodnot veličiny a referenční hodnotou veličiny. Ani pravdivost měření není veličinou a tudíž nemůže být vyjádřená číselně a nesmí se zaměňovat s pojmem přesnost měření nebo preciznost měření.



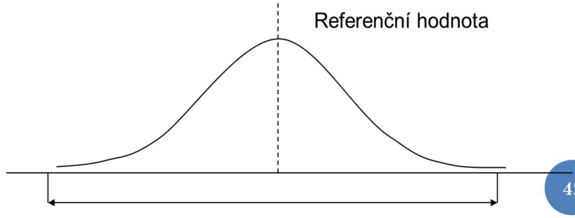
Základy měření – 3P – Pravdivost měření



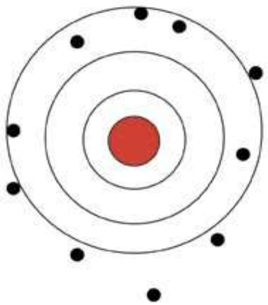
Střelba je nesprávná, ale je přesná

Základy měření – 3P – Preciznost měření

- Je to těsnost shody mezi indikacemi nebo naměřenými hodnotami veličiny získanými z opakovaných měření na stejném objektu nebo na podobných objektech za specifikovaných podmínek.
- **Preciznost měření** je vyjádřena číselně mírami nepreciznosti, jako například směrodatnou odchylkou, rozptylem nebo variačním koeficientem za specifikovaných podmínek měření.
- **Preciznost měření** je používána k definování opakovatelnosti měření, mezilehlé preciznosti měření a reprodukovatelnosti.



Základy měření – 3P – Preciznost měření



Střelba je v zásadě správná ale není přesná

DĚKUJI ZA POZORNOST