Modelování a simulace v elektrotechnice

Základy řešení parciálních diferenciálních rovnic

František Mach

Katedra teoretické elektrotechniky
Regionální inovační centrum elektrotechniky
Fakulta elektrotechnická
Západočeská univerzita v Plzni

10. cvičení, 1.12.2016

FAKULTA
ELEKTROTECHNICKÁ
ZÁPADOČESKÉ
UNIVERZITY
V PLZNI

Obsah

Obyčejná diferenciální rovnice, anglicky ordinary differential equation (ODE), je rovnice, která obsahuje neznámou funkci jedné nezávislé proměnné a její derivace.

Obyčejnou diferenciální rovnici řádu n lze obecně zapsat ve tvaru

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

kde x je nezávisle proměnná, $y = y(x)$ je závisle proměnná a n značí nejvyšší řád derivace.

Parciální diferenciální rovnice, anglicky partial differential equation (PDE), je rovnice, která obsahuje neznámou funkci několika nezávisle proměnných a její parciální derivace.

Parciální diferenciální rovnici rádu k lze obecně zapsat ve tvaru

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 y}{\partial x_n^2}, \ldots, \frac{\partial^k y}{\partial x_1^k}, \frac{\partial^k y}{\partial^{(k-1)x_1} \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^k y}{\partial x_n^k}\right) = 0$$

kde $y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je neznámá funkce n nezávisle proměnných $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a k značí nejvyšší řád derivace.

Jen velmi málo praktických úloh popsaných parciálními diferenciálními metodami lze řešit pomocí analytických metod. Mezi hlavní důvody tohoto tvrzení přitom patří:

- složitost řešená oblasti dané úlohy,
- nelinearita parciální diferenciální rovnice a
- nehomogenita a anizotropie prostředí.

Numerické metody, které je možné využít pro řešení parciálních diferenciálních rovnic lze obecně rozdělit na metody diferenciální a integrální. Diferenciální metody využívají diferenciálního tvaru řešených rovnic a jejich hlavní myšlenka spočívá v nalezení nejlepší aproximace řešení na diskretizované definiční oblasti modelu. Skupina těchto metod je poměrně široká a lze ji rozdělit do tří základních podskupin.

- **Diferenční metody** jsou založené na diferenční aproximaci parciálních diferenciálních rovnic. Parciální derivace libovolného řádu se v daném uzlu diskretizační sítě aproximuje výrazem pro hodnoty hledané funkce v několika sousedních uzlech a zároveň vzdálenosti daného uzlu od oněch sousedních. Mezi tyto metody se řadí například metoda konečných diferencí, která bude dále podrobněji diskutována.

- **Metody vážených reziduí** patrně představují nejsilnější a nejvíce univerzální nástroje pro řešení parciálních diferenciálních rovnic. Tyto metody jsou založeny na minimalizaci vážené chyby ve vyšetřované oblasti. Přesné řešení příslušné rovnice je nejprve nahrazeno přibližným řešením ve tvaru řady sestávající ze zvolených testovacích funkcí násobených koeficienty, jež je třeba v tomto smyslu optimalizovat. Metodami které patří do této skupiny jsou například metoda nejmenších čtverců nebo Galerkinova metoda.
- **Variační metody** jsou založeny na variační reprezentaci parciálních diferenciálních rovnic. Problém řešení dané rovnice se transformuje na problém stanovení funkcionálu a hledání podmínek, za nichž řešení uvedené rovnice vede k extrému tohoto funkcionál. Nejznámější variační metoda je bezesporu metoda konečných prvků a Ritzova metoda.

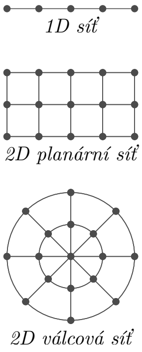
Do skupiny integrálních metod lze zařadit zejména metody užívané pro řešení integrálních a integrodiferenciálních rovnic a dále také technologie pro výpočty velkého množství určitých i neurčitých integrálů vyskytujících se ve výrazech pro různé veličiny lineárních a homogenních polí nebo algoritmy kombinující jak řešení integrálních rovnic, tak i určování integrálních výrazů. Mezi tyto metody tedy patří například metody hraničních prvků nebo velmi univerzální metoda momentů.

Integrální metody mohou za jistých okolností představovat skvělou alternativu k diferenciálním metodám a to především pro úlohy, kde je diferenciální formulace špatně podmíněná.

Metoda konečných diferencí (MKD), anglicky finite difference method (FDM) je velice jednoduchá a účinná metoda pro řešení parciálních diferenciálních rovnic. Poprvé představena v roce 1920 A. Thomem pod názvem metoda čtverců a byla využita k řešení nehomogenní hydrodynamické rovnice. Základní myšlenka této metody je v nahrazení derivací konečnými diferencemi a převedením na soustavu algebraických rovnic.

Řešení pomocí metody sestává z několika kroků:

- rozdělení řešené oblasti diskretizační mřížkou,
- nahrazení operátorů parciální diferenciální rovnice diferenční aproximací pomocí uzlů zvolené mřížky,
- doplnění okrajovými podmínkami (Dirichletova nebo Neumannova okrajová podmínka) a
- vyřešením soustavy algebraických rovnic získáme řešení rovnice v uzlech sítě.

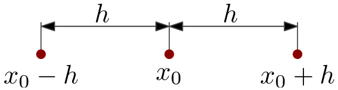


Obrázek: Ilustrativní příklady několik rozdílných diskretizačních sítí pro metodu konečných diferencí

Metoda konečných diferencí

Základní princip pro 1D úlohy

Uvažujme funkci $F = f_0$, která má ve svém okolí definované derivace.



Provedeme Taylorův rozvoj v bodě $x_0 + h$

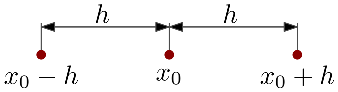
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R_n(x)$$

a v bodě $x_0 - h$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R_n(x),$$

kde $R_n(x)$ je zbytkový člen aproximace.

Nyní odvodíme aproximaci první řádu přesnosti



Uvažujme pouze první 2 členy rozvoje a ostatní zanedbáme

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2$$

a v bodě $x_0 - h$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2$$

Uvedené rovnice nejprve sečteme

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) = 2f(x_0) + f^{''}(x_0)h^2 \,.$$

První derivace vypadne a ihned vidíme, že druhou derivaci v bodě x_0 lze aproximovat vztahem

$$f^{''}(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}.$$

A následně rovnice odečteme

$$f(x_0 + h) - f(x_0 - h) = 2f'(x_0)h \,.$$

Druhá derivace vypadne a ihned vidíme, že první derivaci v bodě x_0 lze aproximovat vztahem

$$f^{'}(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}.$$

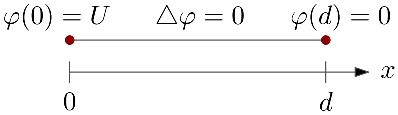
Metoda konečných diferencí
Ilustrativní příklad (ideální deskový kondenzátor)

Uvažujme Laplaceovu rovnici v 1D popisující rozložení elektrického potenciálu (např. ideální deskový kondenzátor, tedy bez respektování okrajového jevu)

$$\triangle\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \varphi'' = 0.$$

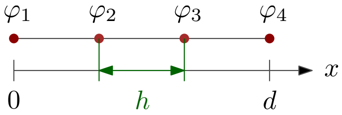
Doplněnou Dirichletovou okrajovou podmínkou na obou koncích

$$\varphi(0) = U\,, \quad \varphi(d) = 0.$$



Nejprve rozdělíme řešenou oblast na konečný počet elementů N s krokem

$$h = \frac{d}{N-1}.$$



V uzlech 2 a 3 platí obecná Laplaceova rovnice $\triangle\varphi = 0$. S využitím odvozené aproximace lze rovnici v těchto bodech zapsat ve tvaru

$$\frac{\varphi_3 - 2\varphi_2 + \varphi_1}{h^2} = 0\,, \quad \frac{\varphi_4 - 2\varphi_3 + \varphi_2}{h^2} = 0.$$

Rovnici doplníme o okrajové podmínky

$$\varphi_1 = U\,, \quad \varphi_4 = 0.$$

Uvedené rovnice zapíšeme v maticovém tvaru

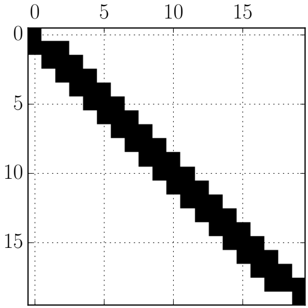
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Pro $N = 4$, $d = 0{,}1\,\mathrm{m}$ a $U = 10\,\mathrm{V}$ tedy získáme soustavu

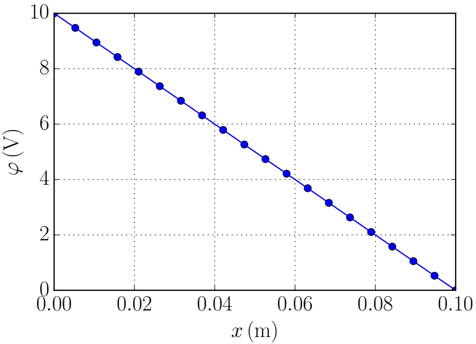
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 900 & -1800 & 900 & 0 \\ 0 & 900 & -1800 & 900 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

jejímž řešením získáme hledané hodnoty potenciálu

$$\varphi = \begin{bmatrix} 10 \\ 6{,}666 \\ 3{,}333 \\ 0 \end{bmatrix} .$$



Obrázek: Vizualizace řídkosti matice soustavy (matice je pásová a řídká)



Obrázek: Rozložení potenciálu v řešené ideálním kondenzátoru

Uvažujme Poissonovu rovnici ve dvoudimenzionálním prostoru, kterou lze zapsat v obecném tvaru

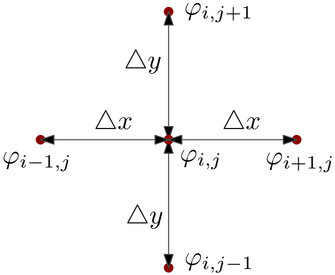
$$\triangle\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = g(x,y)\,.$$

Pro druhou derivaci ve směru osy x lze psát

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\Big|_{i,j} = \frac{\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{(\triangle x)^2}$$

a analogicky také pro druhou derivaci ve směru osy x

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\Big|_{i,j} = \frac{\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}}{(\triangle y)^2}\,.$$



Diferenční aproximaci tedy zapíšeme jako

$$\frac{\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{(\triangle x)^2} + \frac{\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}}{(\triangle y)^2} = g_{i,j} \,.$$

Nulovou Neumannovu okrajovou podmínku ve směru osy x pak ve tvaru

$$\frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}}{\triangle x} = 0\,, \quad \frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i-1,j}}{\triangle x} = 0$$

a ve směru osy y pak

$$\frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j}}{\triangle y} = 0\,, \quad \frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i,j-1}}{\triangle y} = 0\,.$$