

# Vyhodnocování přesnosti měření – chyby a nejistoty

- **MOTTO:**

Pokud bychom znali pravou hodnotu veličiny, nemusíme ji měřit. Analýza chyb vede k zvyšování přesnosti měření.

# Chyba měření

- dříve přesnost vyjadřována pomocí chyby měření
- chyba měření definována jako rozdíl mezi naměřenou a pravou hodnotou měřené veličiny

- **Absolutní chyba měřené veličiny**

$$\Delta = X_N - X_S = -K$$

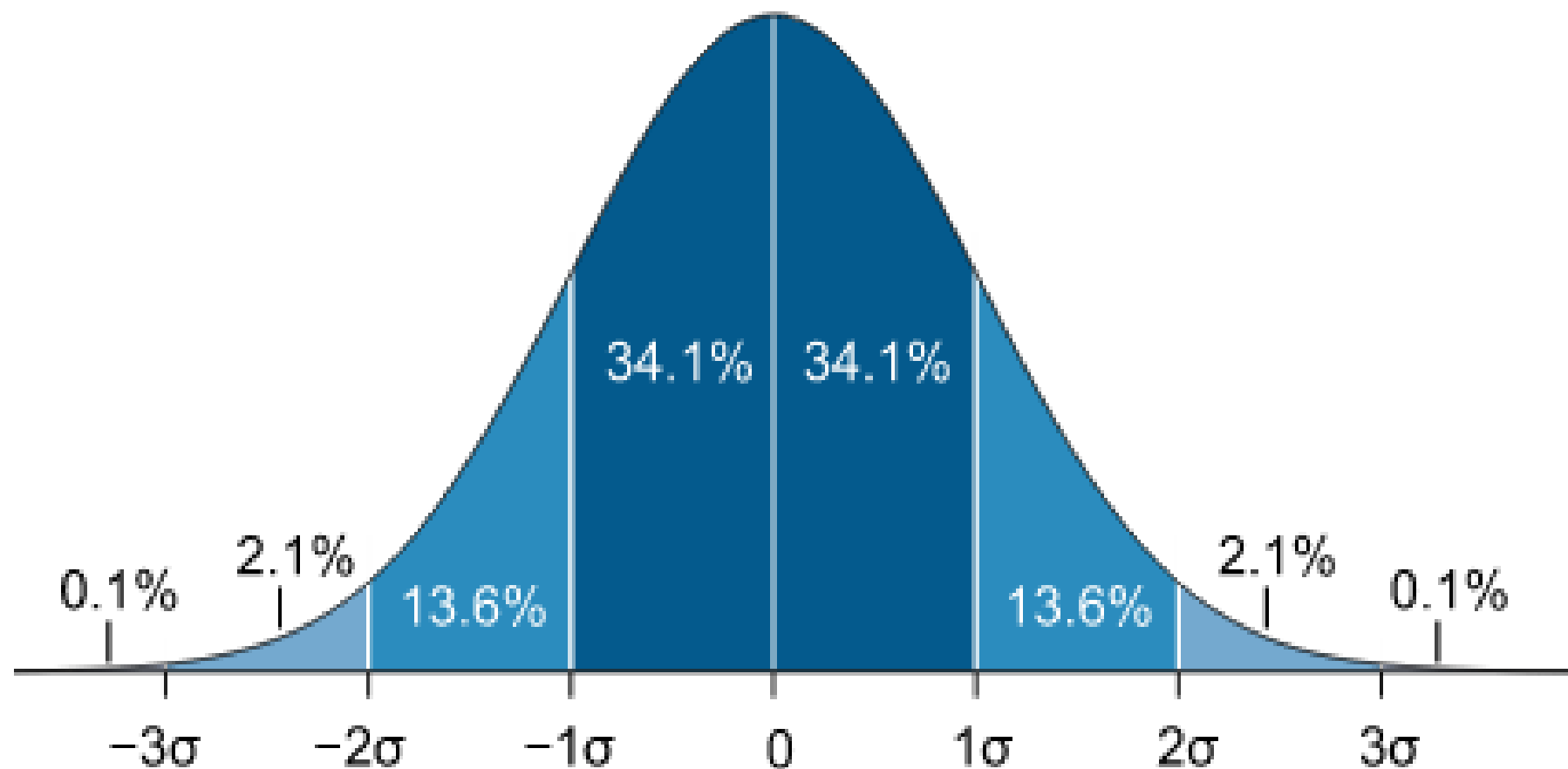
- **Chyba relativní**

$$\delta = \frac{\Delta}{X_S} \quad [-]$$

$$\delta = \frac{\Delta}{X_S} \cdot 100 \quad [\%]$$

$$\delta = \frac{\Delta}{X_S} \cdot 10^6 \quad [ppm]$$

# Rozdělení chyb měření



# Rozdělení chyb měření

- **Podle způsobu výskytu:**

- Chyby systematické (soustavné)
- Chyby náhodné (nahodilé)

- **Podle příčiny vzniku:**

1. Chyba metody ( $\Delta_m$ ,  $\delta_m$ )

- systematická chyba
- vzájemné působení měř. přístroje a měř. Obvodu  
(zapojení přístroje – přidavný R, L, C do obvodu,  
měř. přístroj koná práci, tím odebírá energii z měř. Signálu)

# Rozdělení chyb měření

## 2. Chyby rušivými vlivy

- těžko korigovatelné
- např. rušivá napětí, kapacitní a indukční vazby, odpory vodičů apod.

## 3. Chyby členů měřicího obvodu

- nepřesnost kalibrace a vyrovnaní etalonů
- je udána největší dovolená odchylka od jmenovité hodnoty

## 4. Chyba měřicího přístroje ( $\Delta_p$ , $\delta_p$ )

- Základní – zahrnuta ve třídě přesnosti
- Přídavná – vzniká při nedodržení provozních podmínek přístrojů, i o několik řádů vyšší než chyba základní

## 5. Chyba čtení

- způsobená pozorovatelem

## 6. Chyba celková

- součet výše popsaných

# Chyby měřicích přístrojů

- **Třída přesnosti** (TP)- udává maximální dovolenou relativní chybu přístroje  $\delta_p$  [%] za referenčních podmínek

- Řada tříd přesnosti

**0,05 – 0,1 – 0,2 – 0,5 – 1 – 1,5 – 2,5 – 5**

0,05 – 0,2      přístroje cejchovní

0,2 – 2,5      přístroje laboratorní

2,5 – 5      přístroje provozní

- referenční podmínky

- Teplota  $\vartheta = (23 \pm 10) ^\circ\text{C}$
- Vnější mg. pole  $B < 5 \text{ mT}$
- Vztažná frekvence  $f_n \pm 10\%$
- Pracovní poloha přístroje  $\pm 5^\circ$

# Chyby měřicích přístrojů

- Výpočet TP a značení

$$TP \geq \delta_{PM} = \frac{\Delta p}{M} \cdot 100 \quad [\%] \quad 1,5$$

$$TP \geq \delta_{PS} = \frac{\Delta p}{S} \cdot 100 \quad [\%] \quad \textcircled{1,5}$$

$$TP \geq \delta_{Pl} = \frac{\Delta p}{l} \cdot 100 \quad [\%] \quad \checkmark 1,5$$

kde M měřicí rozsah

S skutečná hodnota

l délka stupnice

$\Delta p$  základní chyba přístroje za referenčních podmínek



# Chyby měřicích přístrojů

## Chyba číslicových měřicích přístrojů

- vyjadřuje se 2 složkami chyb

### 1. způsob

$$\Delta v \leq \left| \frac{\delta_1}{100} \cdot U_x \right| + \left| \frac{\delta_2}{100} \cdot M \right|$$

Kde	$\pm \delta_1$	relativní chyba měřené hodnoty veličiny	[%]
	$\pm \delta_2$	relativní chyba rozsahu	[%]
	$U_x$	změřené napětí	
	$M$	měřicí rozsah (F.S.)	

# Chyby měřicích přístrojů

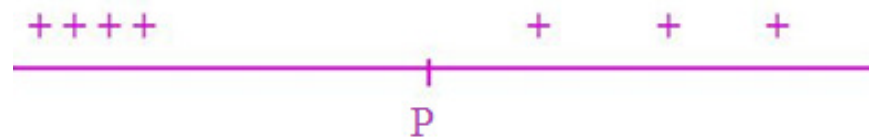
## 2. způsob

$$|\Delta_v| \leq \left| \frac{\delta_1}{100} \cdot U_x \right| + \text{počet kvantovacích kroků na posledním rozlišitelném místě (digitů)}$$

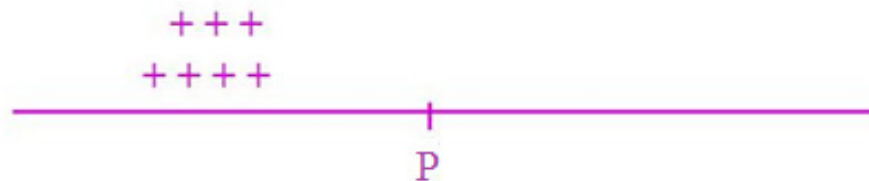
Kde  $\pm \delta_1$  relativní chyba měřené hodnoty [%]  
 $U_x$  změřené napětí

# Vyhodnocování opakovaných měření

- Vzájemná shoda výsledků je špatná, výsledky jsou **nepřesné**

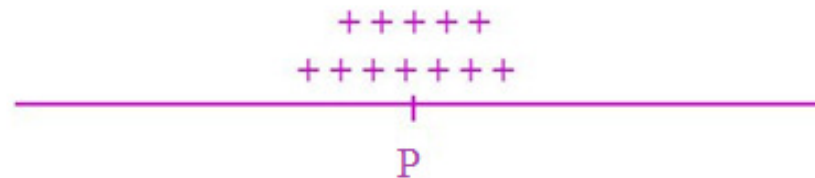


- Výsledky jsou mezi sebou shodné, ale výrazně se liší od pravé hodnoty, jsou **shodné ale nepřesné**

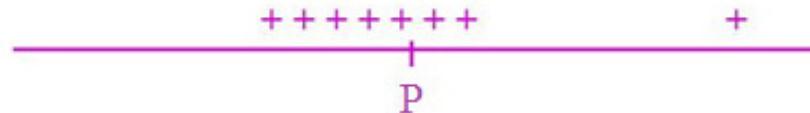


# Vyhodnocování opakovaných měření

- Výsledky **přesné** (správné a shodné současně)



- Výsledek **odlehlý** (výrazně se liší od ostatních, zatíženo hrubou chybou nebo omylem)



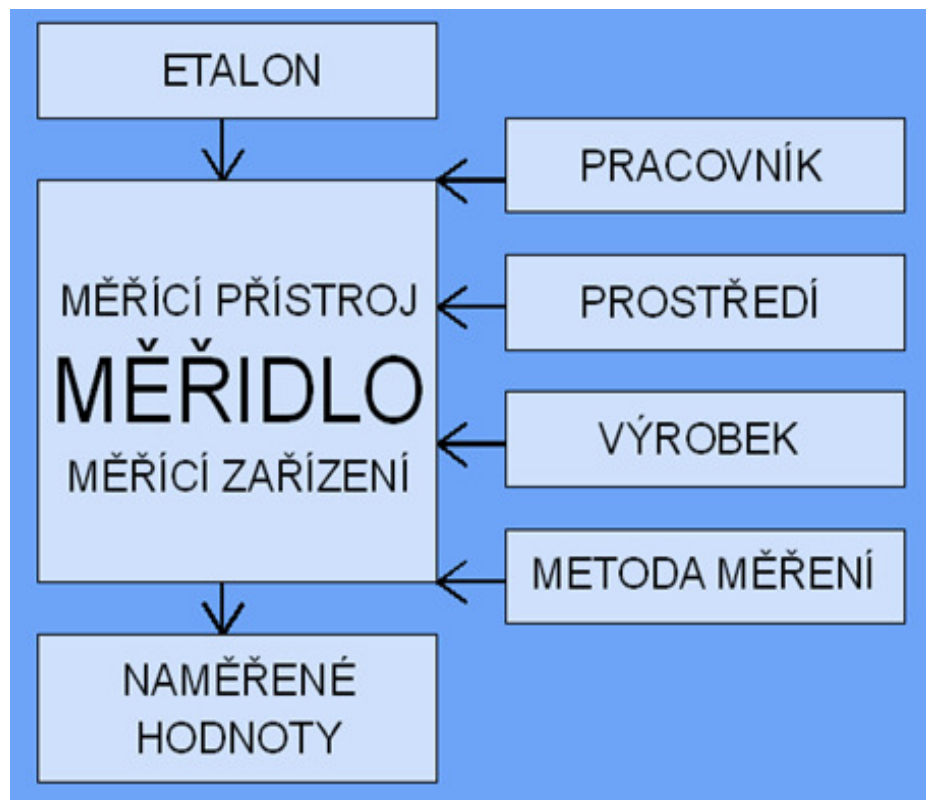


# Nejistota měření

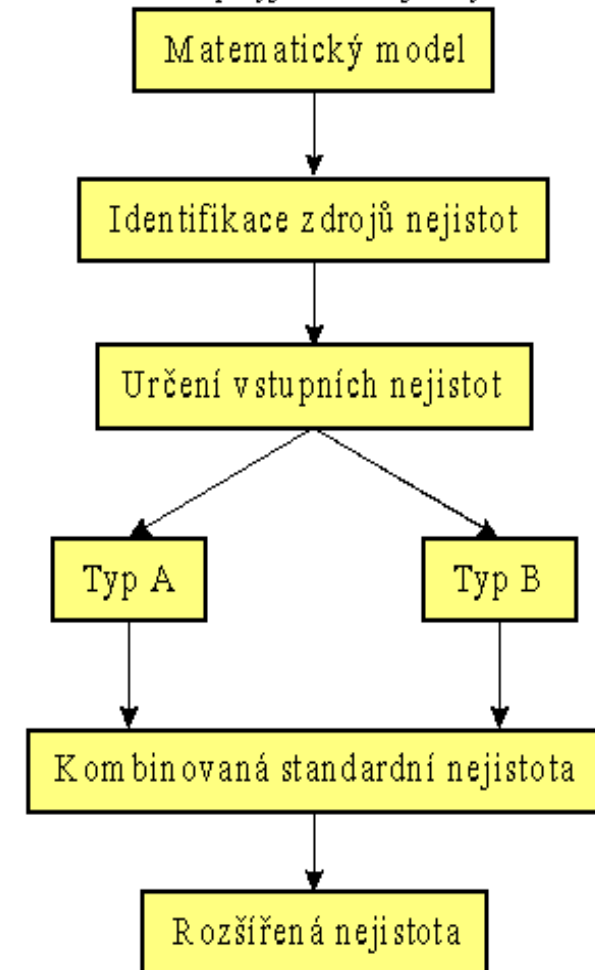
- Postupně zaváděny od 80. let minulého století
- Společně s měřenou veličinou se v měřicím procesu vyskytují i veličiny jiné, které ovlivňují měření
- Jejich působení se projevuje odchylkou mezi naměřenou a skutečnou (pravou) hodnotou
- Výsledek se pohybuje v určitém „tolerančním pásmu“ kolem skutečné hodnoty
- Nejistotou měření rozumíme parametr charakterizující rozsah hodnot okolo výsledku měření, který je možné racionálně přiřadit hodnotě měřené veličiny
- V r. 1993 vyšly první příručky pro výpočet nejistot měření
- Existují 2 způsoby řešení - A, B

# Nejistota měření

- Každé měření je zatíženo chybami měření a tak hovoříme o nejistotě měření. Nejistotu měření způsobuje:



Obr. 2: Postup vyjádření nejistoty měření



## Nejistota řešená způsobem (typ) A - $u_A(X)$

- Způsobována náhodnými chybami
- Stanovuje se statistickými metodami z opakovaných měření
- Je nutné opakovat celé měření a ne jen odečet hodnot
- Předpokládáme, že měřená veličina ani veličiny ovlivňující měření se nemění
- Mírou nejistoty je výběrová směrodatná odchylka
- Alespoň 10 – 20 měření, jinak je nutné výsledek upravit na počet opakování měření

# Nejistota měření

- Platí následovné vztahy:

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$\sigma^2(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$$

$$\sigma(X_i) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}$$

$$s^2(X_i) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$$

$$s(X_i) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}$$

$$u_{AX} = s(\overline{X}) = \sqrt{\frac{s^2(X_i)}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}$$



# Nejistota měření

- Pokud je počet opakování menší než 10, je nutno upravit výsledek nejistoty měření:

$$u_A(X) = k_s \cdot s(\overline{X})$$

Počet měření	9	8	7	6	5	4	3	2
Koeficient $k_s$	1,2	1,2	1,3	1,3	1,4	1,7	2,3	7

## Nejistota řešená způsobem (typ) B - $u_B$ (Z)

- Stanovena analýzou naměřených hodnot vycházející z racionálních úsudků
- Způsobována známými a odhadnutelnými vlivy
- Pro výpočet nejistoty (typu) B je nutné nejprve provést **analýzu všech vlivů**, které mohou na prováděné měření působit, tzn. zjistit **dílčí nejistoty** od jednotlivých dílčích zdrojů

# Nejistota měření

Nejistoty B jsou obecně **způsobeny nedokonalostmi** např.:

- Měřicích prostředků  
(etalony, stabilita přístrojů, dynamické chyby přístrojů, ...)
- Použitých metod měření  
(odvod nebo přestup tepla, interakce s měřeným objektem, vlivy reálných parametrů součástek, ...)
- Okolních podmínek měření a jejich změn  
(působení elektrického a magnetického pole, relativní vlhkost a tlak, ...)
- Vlivů operátora  
(osobní zvyklosti, tepelné vyzařování, ...)
- Vztahů konstant nebo závislostí, které jsou použity při vyhodnocování.

# Nejistota měření

- Obecně se odhad  $u_{Bj}$  provádí následujícími kroky:
- odhadne se maximální možná odchylka  $\pm \Delta_{Zi,MAX}$  od nominální hodnoty veličiny příslušející **zdroji nejistoty**  $Z_i$  (měřidlo, obsluha,...)
- posoudí se **průběh pravděpodobnostní odchylky** v tomto intervalu a najde se nejvhodnější aproximace (koeficient  $\chi$ )
- **dílčí nejistota** (typu) **B** se určí z maximální změny daného zdroje  $\Delta_{Zi,MAX}$ :

$$u_{Bi} = \pm \frac{\Delta_{Zi,MAX}}{\chi}$$

# Nejistota měření

- **Koeficient  $\chi$**  – tabulková hodnota podle typu rozdělení
  - $\chi = 2$  pro normální rozdělení ( $P = 95,45 \%$ )
  - $\chi = 3$  pro normální rozdělení ( $P = 99,73 \%$ )
  - $\chi = \sqrt{3}$  pro rovnoměrné rozdělení
- pokud zdroje nejistot typu B tvoří různé fyzikální vlivy, které mají různé veličiny (i různé jednotky), je nutné určit **citlivostní koeficienty**  $c_{Zi}$ :

$$u_{Bi} = c_{Zi} \cdot u_{Bzi}$$

- v takovém případě se stanoví citlivostní koeficienty ze závislosti:

$$c_{Zi} = \frac{\partial X}{\partial Z_i}$$

# Nejistota měření

- **celková nejistota** (typu) **B** se stanoví z dílčích nezávislých nejistot typu B:

$$u_B(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^n c_{Zi}^2 \cdot u_{Bzi}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_{Bi}^2}$$

- Pokud je mezi zdroji nejistot (J, K) korelace, pak se  $u_B$  stanoví:

$$u_{BX} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^n c_{XZi}^2 u_{Zi}^2 + 2 u_{ZJ} u_{ZK} r(J, K)}$$

## Kombinovaná nejistota $u_c(X)$

- Udává interval, ve kterém se s pravděpodobností 68,27 % vyskytuje skutečná hodnota (podmínkou je normální rozdělení):

$$u_c = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$$

- *Poznámka:*

Kdy a proč můžeme předpokládat normální rozdělení?

## Rozšířená nejistota $U$

- definuje interval okolo výsledku měření, v němž se s určitou požadovanou úrovní spolehlivosti nalézá výsledek měření (obvykle volíme 95%-ní).
- násobení kombinované standardní nejistoty a koeficientu rozšíření  $k$ , tzn.

$$U = k \cdot u_c$$

- $k$  ... koeficient rozšíření
- $k = 2$  ... skutečná hodnota je v daném intervalu s pstí  $P = 95 \%$
- $k = 3$  ... skutečná hodnota je v daném intervalu s pstí  $P = 99,73\%$



# Nejistota měření

- Matematické vyjádření výsledků měření
  - Výsledek měření pro opakovaná měření pak zapisujeme včetně rozšířené nejistoty měření:

$$X = \bar{x} \pm U$$

- s použitím standardní kombinované nejistoty  $u_c$
  - s použitím rozšířené nejistoty  $U$
- Příklad
  - nominální hodnota napětí  $\bar{x} = 100\text{V}$   
 $U = 0,35\text{mV}$
  - $\bar{x} = 100,02147\text{V}$  s  $U = 0,35\text{mV}$
  - $X = 100,02147 (35) \text{V}$
  - $X = (100,02147 \pm 0,00035)\text{V}$  - tento zápis se upřednostňuje pro rozšířenou nejistotu

# Nejistota měření

- posuzování shody

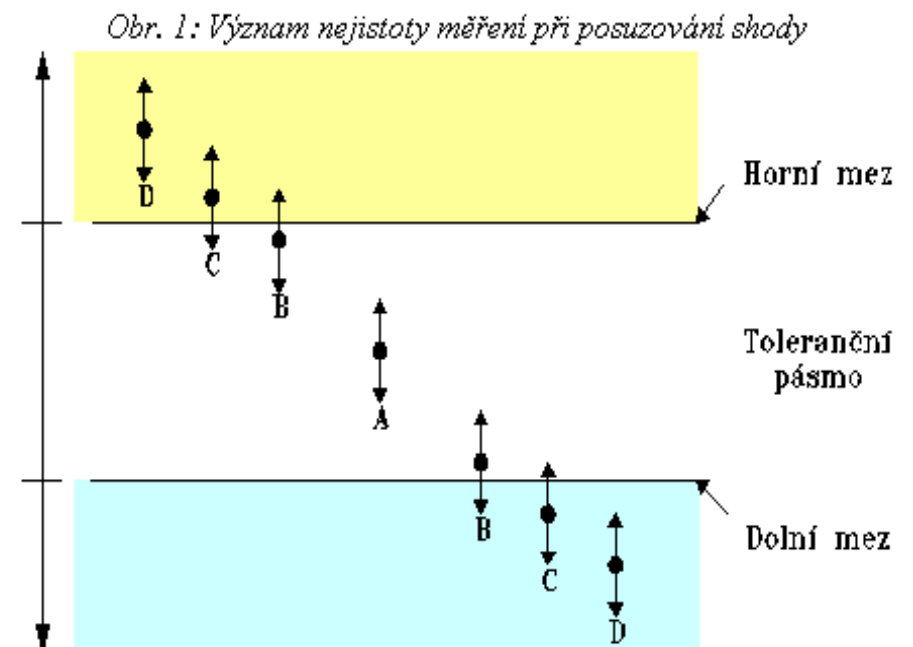
- příklad – dolní mez 36 mm, horní mez 40,6 mm, tolerance 4,6 mm

- 1) Naměřená hodnota + nejistota je  $(38,3 \pm 0,3)$  mm, tj. bod A - **Vyhovuje** - hodnota i nejistota jsou v tolerančním pásmu

- 2)  $(36,2 \pm 0,3)$  mm nebo  $(40,5 \pm 0,3)$  mm  
Body B - **Nevyhovují** - hodnota je v tolerančním pásmu, nejistota však hranice tolerančního pásma překračuje

- 3)  $(35,9 \pm 0,3)$  mm nebo  $(40,8 \pm 0,3)$  mm  
Body C - **Nevyhovují** - hodnota je mimo toleranční pásmo, nejistota do tolerančního pásma zasahuje

- 4)  $(35,5 \pm 0,3)$  mm nebo  $(41,0 \pm 0,3)$  mm  
Body D - **Nevyhovují** - hodnota i nejistota jsou mimo toleranční pásmo



# Téma cvičení: chyby a nejistoty měření

Děkuji za pozornost