Fakulta elektrotechnická *Katedra technologií a měření*

KET/MET

6. přednáška

Chyby a nejistoty měření (pokračování),
Měřicí metody

8.4 Chyby měření

- výsledky měření se získávají:

  - přímo (údaj měřicího přístroje),
  - nepřímo (dosazením hodnot do matematických vztahů)

8.4.1 Chyby naměřených hodnot

- hodnota veličiny, kterou zjistíme danou měřicí metodou, značíme naměřená hodnota N
- hodnota skutečná (pravá, konvenční),
- zjistíme ji přesnější metodou nebo teoretickým výpočtem, značíme S
- mezi nimi existuje vztah: $S = N - \Delta$

- absolutní chyba měřené veličiny Δ – vyjadřuje vztah mezi naměřenou a skutečnou hodnotou; musí se u ní zachovat znaménko

$$\Delta = N - S = -K$$

- korekce (oprava) K – hodnota, kterou musíme k naměřené hodnotě N přičíst a získáme hodnotu pravou S,
  - je opakem absolutní chyby:

$$K = S - N$$

- relativní chyba měřené veličiny δ
  (vytažená ke skutečné hodnotě)

$$\delta = \frac{\Delta}{S} \,.\, 100 \quad (\%)$$

- aby mělo měření smysl, volíme takovou měřicí metodu, kdy předpokládáme, že

$$\delta \rightarrow 0$$

- při přesnějších měřeních je N = S,
  a relativní chyba

$$\delta = \frac{\Delta}{N} \,.\, 100 \quad (\%)$$

- pravá hodnota S měřené veličiny obvykle není předem známa a nelze potom určit přímo ani velikost chyby
- pokud je výsledkem měření řada přibližných hodnot, jejichž mezní velikosti jsou N_1 a N_n, lze použít místo skutečné hodnoty S hodnotu $S^/$, které se říká střední aproximace

$$S^{/} = 0{,}5\left(N_1 + N_n\right)$$

8.4.2 Chyby přímých měření

- výsledek přímých měření se získá čtením údaje příslušného měřicího přístroje
- největší možná absolutní chyba měření Δ_T rovna součtu absolutní chyby údaje přístroje Δ_U a absolutní chyby metody Δ_M

$$\left|\Delta_T\right| = \left|\Delta_U\right| + \left|\Delta_M\right|$$

- největší možná relativní chyba měření σ_T je vztažena k naměřené hodnotě N

$$\delta_T = \frac{\Delta_T}{N} \,.\, 100 \quad (\%)$$

- Př.: Voltmetrem o třídě přesnosti TP = 1,5 a rozsahu 300 V je naměřeno napětí 225 V.
  Jaká je největší možná absolutní dovolená chyba a největší možná relativní chyba měření?

$$\pm \Delta_U = 4{,}5\,V$$

skutečná hodnota napětí

$$U = 225 \pm 4{,}5\,V$$

a největší možná relativní chyba tohoto měření

$$\delta_T = \pm \frac{4{,}5}{225} 100 = \pm 2\ \%$$

8.4.3 Chyby nepřímých měření

- při nepřímém měření je dán výsledek matematickou funkcí nezávislých proměnných
- jejich hodnoty jsou obvykle zjištěny přímými měřeními, která jsou zatížena chybami
- je-li měřená veličina Y dána $Y = f(X_1, X_2, \dots X_n)$, pak absolutní chyba měřené veličiny Y je přibližně rovna vztahu („totální diferenciál“)

$$\left|\Delta_{(Y)}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial X_1}\Delta_{(X_1)}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial X_2}\Delta_{(X_2)}\right| + \dots$$
$$\dots + \left|\frac{\partial f}{\partial X_n}\Delta_{(X_n)}\right|$$

- z dané rovnice lze určit pravidla pro určení absolutních nebo relativních chyb při základních matematických operacích
- určení relativní chyby měření, je-li měřená funkce $Y = f(A, B)$:

Funkce	Relativní chyba
$Y = A + B$	$\delta_Y = \frac{\Delta_A + \Delta_B}{A + B}$
$Y = A - B$	$\delta_Y = \frac{\Delta_A + \Delta_B}{A - B}$
$Y = AB\,;\, Y = \frac{A}{B}$	$\delta_Y = \delta_A + \delta_B$
$Y = A^n$	$\delta_Y = n\,\delta_A$
$Y = \sqrt[m]{A}$	$\delta_Y = \frac{1}{m}\delta_A$

8.4.4 Výsledky opakovaných měření

- pro zpřesnění měření (abychom mohli určit výsledek co nejbližší skutečné hodnotě S), opakují se měření několikrát za stejných podmínek
- výsledky jednotlivých měření (v obr. označené +) mohou být vůči hodnotě S různé

- výsledky nejsou přesné (nejsou správné ani shodné), je-li vzájemná shoda výsledků špatná

+ + + +   + + +

S

- výsledky jsou shodné, ale nejsou správné, výsledky mezi sebou shodují, ale výrazně se liší od skutečné hodnoty

+ + +

+ + + +

S

- výsledky přesné (správné a shodné současně)

+ + + + +

+ + + + + + +

S

- výsledky odlehlé se výrazně liší od ostatních

+ + + + + + +   +

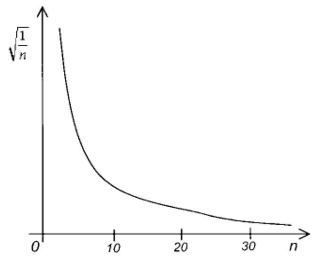
S

Vliv počtu opakovaných měření na přesnost výsledku

- Čím větší je počet měření, tím více se aritmetický průměr blíží ke skutečné (konvenční) hodnotě S
- Úměrně s počtem měření narůstá potřebný čas i ekonomická náročnost
- Při zvětšování počtu měření chyba klesá zpočátku rychle, od určitého počtu podstatně pomaleji
- Počet měření nad 20 – 30 je v technické praxi neopodstatnělé
- Počet opakování měření by neměl klesnout pod 6 !

Vliv počtu opakovaných měření na přesnost výsledku

- Závislost chyby na počtu měření



K velikosti chyby aritmetického průměru v závislosti na počtu měření

8.5 Nejistoty měření

- základem určování nejistot je statistický přístup k vyhodnocování
- předpokládá se určité rozdělení pravděpodobnosti, kt. udává, jak se měřená hodnota odchyluje od (konvenční) pravé hodnoty;
- popř. je uvedena pravděpodobnost, s jakou se skutečná hodnota může nacházet v intervalu daném nejistotou
- mírou nejistoty je směrodatná odchylka
- standardní nejistoty se značí *u*

8.5.1 Standardní nejistota u_A (vyhodnocená postupem A)

- tato nejistota se získává statistickým vyhodnocením ze série opakovaných měření
- základem vyhodnocení je rozptyl a jeho odmocnina, tzn. směrodatná odchylka
- pro stanovení variability základního souboru a náhodného výběru platí následující vztahy

rozptyl základního souboru

$$\sigma^2(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

směrodatná odchylka základního souboru

$$\sigma(X_i) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}$$

odhad rozptylu náhodného výběru

$$s^2(X_i) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

výběrová směrodatná odchylka náhodného výběru

$$s(X_i) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}$$

výběrová směrodatná odchylka výběrových průměrů = nejistota typu A

$$u_{AX} = s\left(\overline{X}\right) = \sqrt{\frac{s^2(X_i)}{n}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}$$

kde X_i … hodnota i-tého vzorku

$\overline{X}$ … aritmetický průměr výběru ze základního souboru

- je-li počet měření n < 10, potom se výběrová směrodatná odchylka výběrových průměrů násobí koeficientem k_S, který závisí na počtu měření (není-li možno udělat jiný kvalifikovaný odhad)

$$u_{AX} = k_S\, s\left(\overline{X}\right)$$

kde k_S … koeficient, jeho hodnota závisí na počtu měření

Počet měření	9	8	7	6	5	4	3	2
k_S	1,2	1,2	1,3	1,3	1,4	1,7	2,3	7,0

- je-li nepravidelný počet opakování měření (např. první a poslední se zopakovalo vícekrát N = 10 – než ostatní n = 3), pak se z prvního a posledního určí

$$s\left(\overline{X}'\right)$$

$$u_{AX} = s\left(\overline{X}'\right)\sqrt{\frac{N}{n}}$$

8.5.2 Standardní nejistota u_B (vyhodnocená postupem B)

- vyhodnocení je na jiném principu – analýza naměřených hodnot vychází z racionálních úsudků
- základem jejich určování je zjišťování dílčích nejistot od dílčích zdrojů
- jsou způsobeny nedokonalostí

a) měřicích prostředků (etalon, použité přístroje a vybavení – nejistoty kalibrací, stabilita přístrojů, dynamické chyby přístrojů, vnitřní tření v analogových přístrojích, hystereze, apod.)

b) použitých metod měření (svodové proudy, svodové interakce s měřeným objektem, vlivy reálných parametrů součástek, odvod nebo přístup tepla)

c) okolních podmínek a jejich změn (působení elmg. pole, relativní vlhkost, tlak, apod.)

d) vlivy operátora (osobní zvyklosti, tepelné vyzařování, apod.)

e) ostatní vlivy (vliv polohy přístroje, denní doba, roční doba)

f) vztahů a konstant, se kterými počítáme

obecné určení nejistoty u_B

- odhadne se maximální rozsah příslušných změn (odchylek) $\pm\Delta Z_{J\max}$ od nominální hodnoty veličiny příslušející zdroji Z_J (překročení této změny je málo pravděpodobné)
-
- posoudí se průběh pravděpodobnostní odchylky v tomto intervalu a najde se nejvhodnější aproximace (typ spojitého nebo diskrétního rozdělení)
- dílčí nejistota B se určí z maximální změny daného zdroje $\Delta Z_{J\max}$

$$u_{Z_J} = \pm \frac{\Delta Z_{J\max}}{\chi}$$

kde χ … má hodnotu podle typu rozdělení

a) *rovnoměrné rozdělení*: jestliže jakákoli odchylka od jmenovité hodnoty se může vyskytnout se stejnou pravděpodobností
(tato aproximace se používá nejčastěji)

b) aproximace *normálním* nebo *trojúhelníkovým rozdělením*: pokud se často vyskytují malé odchylky od jmenovité hodnoty a s jejich rostoucí velikostí klesá pravděpodobnost jejich výskytu

- odhadnuté nejistoty od jednotlivých J zdrojů ovlivněné Z_J se přenáší do celkové nejistoty typu B měřené veličiny X

$$u_{BX} = \sqrt{\sum_j u_{Z_J}^2}$$

- pokud zdroje nejistot B tvoří různé fyzikální vlivy (různé veličiny a různé jednotky), je nutné určit citlivostní koeficienty c_{XZ}, které obecně nejsou bezrozměrné

$$u_{XZ_J} = c_{XZ_J} u_{Z_J}$$

- v takovém případě se stanoví citlivostní koeficienty se závislostí

$$c_{XZ_J} = \frac{\partial X}{\partial Z_J}$$

kde Z … aktuální hodnoty veličiny Z

- jestliže vztah X = f(Z) není známý, stanoví se c_{XZ_J} experimentálně změřením hodnoty ΔX_{Z_J} při malé změně ΔZ_J a vztah převedeme na

$$c_{XZ_J} = \frac{\Delta X_{Z_J}}{\Delta Z_J}$$

- celková nejistota B se stanoví z dílčích nezávislých nejistot B

$$u_{BX} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_{XZ_i}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_{XZ_i}^2 u_{Z_i}^2}$$

Při korelaci různých zdrojů nejistot B :

$$u_{BX} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_{XZ_i}^2 u_{Z_i}^2 + 2 u_{Z_J} u_{Z_K} r(J,K)}$$

8.5.3 Kombinovaná nejistota – – standardní nejistota – u_{XC}

- udává interval, ve kterém se s P= 68,27 % vyskytuje skutečná hodnota

$$u_X = \sqrt{u_{AX}^2 + u_{BX}^2} =$$

$$= \sqrt{u_{AX}^2 + \sum_{i=1}^{n} c_J^2 u_{Z_J}^2}$$

- pokud je požadována větší pravděpodobnost výskytu skutečné hodnoty, zavádí se rozšířená (celková) standardní nejistota

$$U = k\, u_C$$

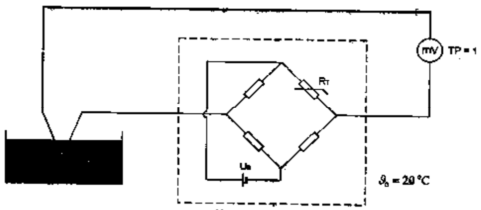
kde k … koeficient rozšíření (pokrytí)

- v rámci WECC platí dohoda, že k = 2,
  tzn. že skutečná hodnota je v daném intervalu s pravděpodobností P = 95,45 %
  (pro k = 3 je P = 99,73 %)

- Výsledná nejistota se zaokrouhluje na 2 platné číslice

Příklad – přímé měření teploty v peci termočlánkem

Podmínky:
Termočlánek typu *K* (chronel-alumel), nekalibrovaný, výrobcem garantované dovolené odchylky odpovídají *TP* „bez označení“, termočlánek je umístěný v ochranném pouzdře.
Indikační přístroj pro termočlánky v rozsahu *(0 ÷ 600)* °C, má třídu přesnosti = *1*, kompenzační krabice (teplotně závislý můstek) pro teplotní kompenzaci na *20* °C.



Příklad – vytypované zdroje nejistot typu B

- **Tolerance termočlánku**
- **Chyba milivoltmetru,**
- **Nedodržení ref.podmínek, kolísání teploty.**
- **Vliv kompenzační krabice (+/-) 50 μV**
- **Zatížení odporu obvodu a mV-metru**
- **Odvod tepla ochranným pouzdrem termočl.**
- **Korelace mezi nejistotami**

9 Měřicí metody

9.1 Rozdělení měření

1) rozdělení podle účelu

- přejímací a kontrolní měření – ověření předepsaných vlastností daných objednávkou
- vývojová měření – k měření vlastností nově konstruovaných výrobků
- výzkumná měření – ověřují existenci jevů očekávaných dle teorie (výzkum základní a aplikovaný)

- provozní měření – ověřují funkci strojů, přístrojů a zařízení (periodická x trvalá)
- výuková měření - většinou částečně připravená

2) rozdělení podle způsobu určení měřené veličiny

- přímá měření – hodnota měřené veličiny se získá přímo, (např. odpor ohmmetrem)
- nepřímá měření (např. odpor ampérmetrem a voltmetrem)
- kombinovaná měření – složeno z určitého počtu měření přímých a nepřímých a výpočtu rovnic

3) rozdělení podle rychlosti změny měřené veličiny

- statická měření – měření statická (klidové hodnoty)
- dynamická měření – (děje proměnné, přechodové děje, poruchy apod.)

4) jiná dělení

- absolutní měření – podle fyzikální definice
- relativní měření – vychází se z poměru dvou veličin jednoho a téhož druhu