Fakulta elektrotechnická

Katedra technologií a měření

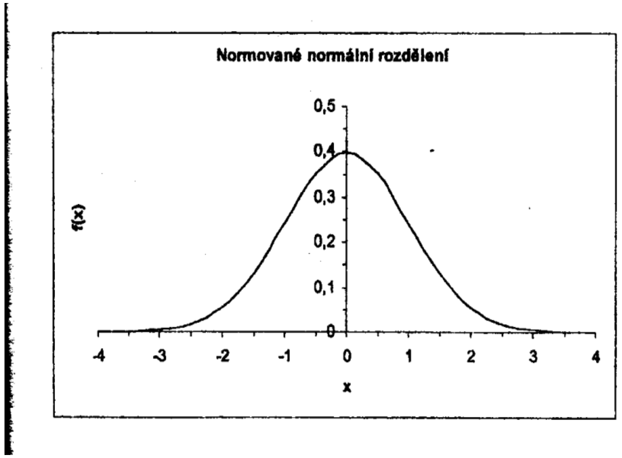
KET / RJTD

2. přednáška – **Základní charakteristiky náhodných procesů** (pokračování)

2.6.2 **Normované (standardizované) normální rozdělení** *N(0,1)* *(str. 20)*

- je zvláštním případem Gaussova rozdělení

- náhodná veličina se označuje obvykle U
- má rozdělení $N(0,1)$



Poznámka: viz normované momenty - 1. přednáška

- vztah mezi původní náhodnou veličinou X s rozdělením $N(\mu,\sigma^2)$ a
- náhodnou veličinou U pro $N(0,1)$

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

kde μ … střední hodnota

σ … odmocnina z rozptylu

- hustota pravděpodobnosti
  náhodné veličiny

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$$

$$\varphi(u) = \sigma f(x)$$

$$\varphi(u) = \varphi(-u)$$
$$u \in (-\infty, \infty)$$

- distribuční funkce

$$\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{\frac{-u^2}{2}} du = \int_{-\infty}^{u} \varphi(u) du$$
$$\phi(u) = 1 - \phi(-u)$$

kvantily

$$u_P = -u_{1-P}$$

- 1. normovaný moment

$$\mu_1(U) = 0 = \mu_1^{/}(U)$$

- 2. normovaný moment

$$\mu_2(U) = \frac{1}{2} \frac{2!}{\left(\frac{2}{2}\right)!} = 1 = \mu_2^{/}(U)$$

- 3. normovaný moment

$$\mu_3(U) = 0 = \mu_3^{/}(U)$$

- 4. normovaný moment

$$\mu_4(U) = \frac{1}{2^2} \frac{4!}{\left(\frac{4}{2}\right)!} = 3 = \mu_4^{/}(U)$$

2.6.3 **Rovnoměrné rozdělení spojité** *R(μ,h)* *(str. 21)*

- rozdělení náhodné veličiny, které se stejnou pravděpodobností nabývají kterékoliv hodnoty z určitého konečného intervalu:
- např. chyby při zaokrouhlování čísel, při odečítání údajů z lineární stupnice měřicího přístroje, apod.
- náhodná veličina se vyskytuje se stejnou pravděpodobností v intervalu (μ – h, μ + h)

- hustota pravděpodobnosti

je konstantní v celém intervalu hodnot

a) pro x v intervalu (μ – h, μ + h)

$$f(x) = \frac{1}{2h}$$

b) pro x mimo tento interval

$$f(x) = 0$$

- 1. obecný moment

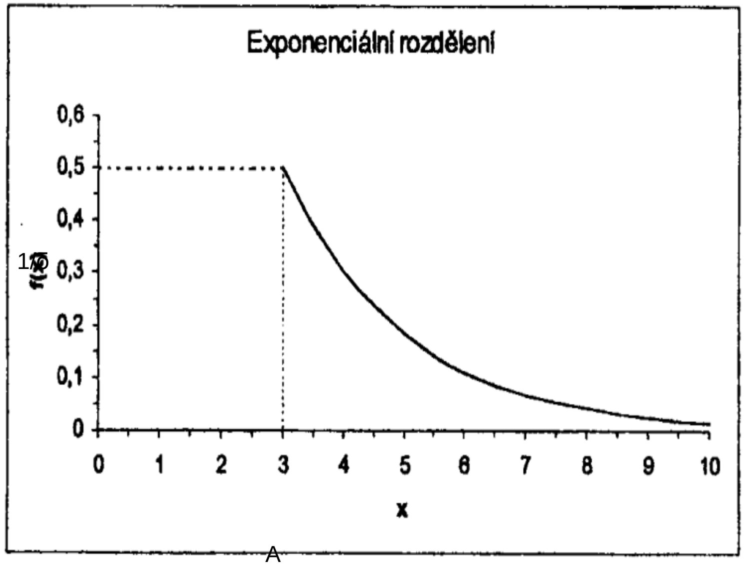
$$E(x) = \int_{\mu - h}^{\mu + h} x \frac{1}{2h} dt = \mu$$

- 2. centrální moment

$$D(x) = \int_{\mu - h}^{\mu + h} x^2 \frac{1}{2h} dt - \mu^2 = \frac{h^2}{3}$$

2.6.4 **Exponenciální rozdělení** *E(A,δ)* *(str. 21)*

- Použití v teorii spolehlivosti, hromadné obsluhy a životností i teorii obnovy
- popisuje rozdělení doby života zařízení, u kterých dochází k poruše ze zcela náhodných příčin, bez zjevného předchozího opotřebení



- rozdělení lze použít i pro určení výskytu jiné události než poruchy, neboť informace o tom, že událost nenastala po dobu A hodin, nemění pravděpodobnost výskytu události v dalších x hodinách – nazývá se také rozdělení „bez paměti“
- 1. obecný moment

$$E(X) = A + \delta E(V) = A + \delta$$

- 2. centrální moment

$$\mu_2(X) = \delta^2$$

2.6.5 **Weibullovo rozdělení** *W(δ,c)* *(str. 24)*

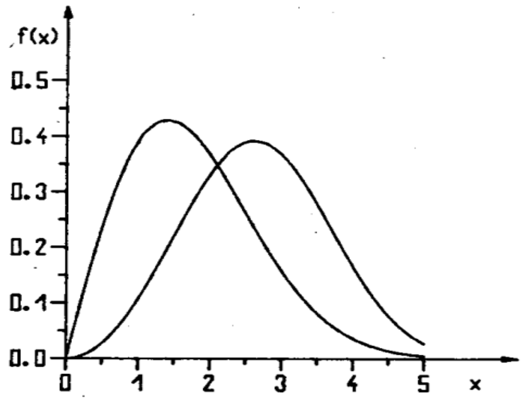
- rozdělení používá (většinou) 2 parametry d > 0, c >0
- je obecně nesouměrné

- Použití:
- pro určení doby života součástek, kde není exponenciální rozdělení,
- pro vyjádření mechanického opotřebení a únavu a materiálu, např. pro některé mezní vlastnosti ocelí (pružnost, charakteristiky únavy),

  pevnost vláken,

  dobu životnosti pneumatik,

  rozměry částic sazí (např. u spalin)



Příklad Weibullova dvouparametrického rozdělení *W(δ,c)*

- zvláštním případem Weibullova rozdělení -

- Rayleighovo rozdělení

  s parametry

$$\delta^C = 2b^2$$

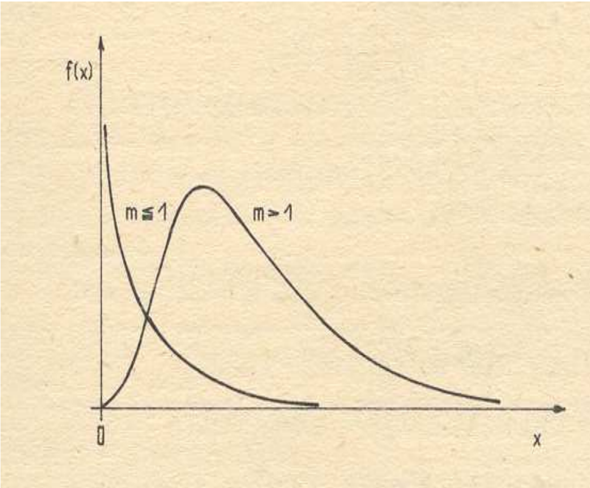
$$c = 2$$

2.6.6 **Rozdělení gama** Γ(m,δ)

(str. 26)

- rozdělení - 2 parametry $m > 0$ a $\delta > 0$
- asymetrické, používá se v podobných případech jako Weibullovo rozdělení

- Použití:
- aplikace teorie spolehlivosti,
- zkoušky životnosti, únavy materiálu, aplikace metod teorie hromadné obsluhy, obnovy výrobního zařízení, apod.



Příklad rozdělení gama Γ(m,δ)

2.7 Charakteristiky diskrétních rozdělení

(str. 28 – 36)

- diskrétní rozdělení používají se v kontrole kvality (při kontrole **atributů**, zda je výrobek shodný nebo neshodný)
- kontrola srovnáváním, ne měřením!

pozn. : *P(x)* analogické s *f(x)* u spojitých rozdělení

2.7.1 Binomické rozdělení Bi(n,π)

(str.28)

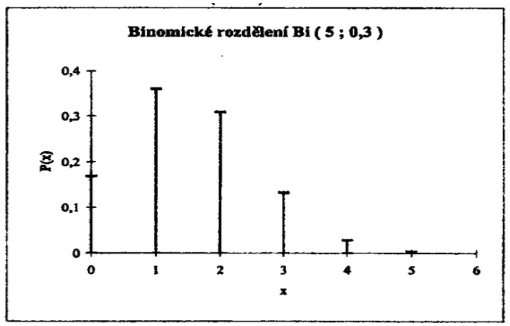
- rozdělením se řídí počet výskytů *X* určitého jevu:

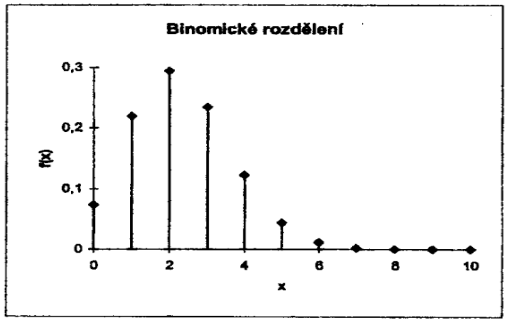
- v *n* nezávislých pokusech,
- pravděpodobnost výskytu tohoto jevu v každém jednotlivém pokusu je právě *π*

- binomické rozdělení je obecně nesymetrické,
- kromě *π = 0,5*;

  s rostoucím *n* je souměrnější,

  pro n > 30 přechází na N (.,.)





- náhodná veličina *X* má *Bi*-rozdělení, jestliže pro pravděpodobnost platí vztah,

  kde *n* … přirozené číslo,

  π … v intervalu (0,1),

  střední hodnota náhodné veličiny *X* je větší než rozptyl

a) pro *X = 0, 1, …, n*

$$P(x) = \binom{n}{x} \pi^{x} (1-\pi)^{n-x}$$

b) pro *X* mimo tento interval

$$P(x) = 0$$

- distribuční funkce

a) pro $x \le 0$ $\quad F(x) = 0$

b) pro $x \in \langle 0, n \rangle$

$$F(x) = \sum_{t=1}^{x} \binom{n}{t} \pi^{t} (1-\pi)^{n-t}$$

c) pro $x \succ n$ $\quad F(x) = 1$

- 1. obecný moment

$$\mu_1^{/}(X) = E(X) = n\pi$$

- 2. centrální moment

$$\mu_2(X) = n\pi(1-\pi)$$

2.7.2 Alternativní (Bernouliho) rozdělení A(π) (str. 30)

- rozdělení $A(\pi)$ s parametrem π je zvláštním případem binomického rozdělení $Bi(1,\pi)$
- náhodná veličina nabývá pouze *2* hodnoty:
- ***x = 0,*** **pokud jev *A* nenastane**
- ***x = 1,*** **pokud jev *A* nastane**

$$P(0) = P(\overline{A}) = 1 - \pi$$
$$P(1) = P(A) = \pi$$

- 1. obecný moment

$$\mu_1^{/}(X) = E(X) = \pi$$

- 2. centrální moment

$$\mu_2(X) = D(X) = \pi(1-\pi)$$

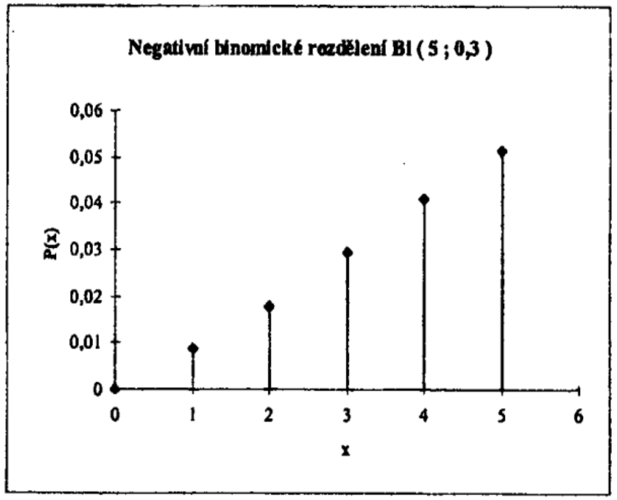
2.7.3 Negativní binomické rozdělení (str. 30)

- Použití:

pokud se řeší, kolik neúspěš. pokusů předchází *n*-tému úspěš. pokusu, jestliže:

- pravděpodobnost úspěchu v každém pokusu = π
- pravděpodobnost neúspěchu = $1-\pi$

- náhodná veličina X = počet neúspěšných pokusů
- celkový počet pokusů, které vedou k n úspěšným pokusům = $X+n$



- náhodná veličina X má negativní binomické rozdělení:
- je-li stř. hodnota náhodné veličiny X menší než rozptyl, tj. $\mu < \sigma^2$
  a platí pravděpodobnost:

a) pro $x \leq 0$ $$P(x) = \binom{x+n-1}{n-1} \pi^n (1-\pi)^x$$

b) pro hodnoty mimo tyto intervaly $P(x) = 0$

- 1. obecný moment

$$\mu_1^{/}(X) = E(X) = \frac{n(1-\pi)}{\pi}$$

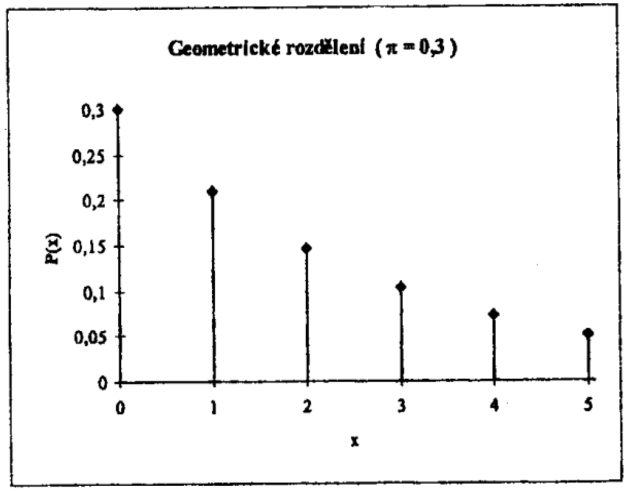
- 2. centrální moment

$$\mu_2(X) = D(X) = \frac{n(1-\pi)}{\pi^2}$$

2.7.4 Geometrické rozdělení

(str. 31)

- rozdělení je zvl. případem negativního binomického rozdělení pro $n = 1$
- pokud je n pouze celé číslo, nazývá se rozdělení Pascalovo,
- hodnota π je stálá pravděpodobnost úspěchu nebo nastoupení jevu v každém z nezávislých pokusů,
- náhodná veličina X = počet nezávislých pokusů do prvního úspěchu
- ppst P udává, že prvých x pokusů bude neúspěšných,
- teprve $(x+1)$-ní pokus bude úspěšný

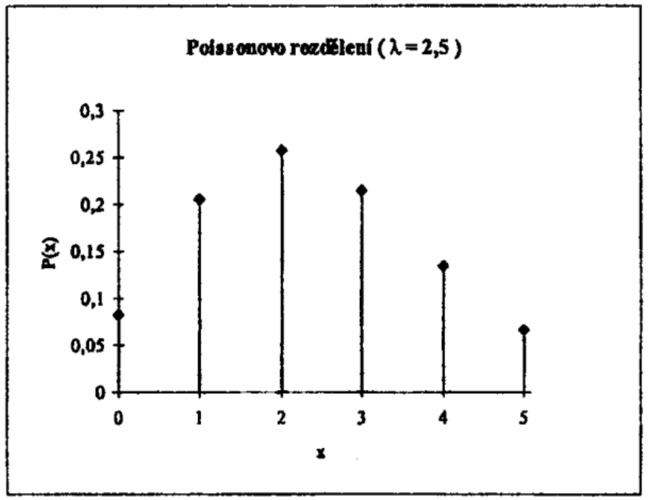


2.7.5 Poissonovo rozdělení Po(λ)

(str.32)

- rozdělením se řídí:
- počet událostí během časového intervalu
  (např. počet signálů nebo počet poruch během jedné hodiny, směny, apod.) nebo
- četnost výskytu objektů v nějaké oblasti
  (např. počet částic v jednotce plochy nebo objemu, počet vad na 1 m^2 plochy materiálu)
- **Poissonovo rozdělení je**
  limitním případem binomického rozdělení **Bi(n,π) pro**

$$n \to \infty,\ \pi \to 0,\ n\pi \to \lambda$$



- Poissonovo rozdělení s $\lambda > 9$ lze nahradit N (μ, σ^2), kde střední hodnota $\mu = 1$ a rozptyl $D(X) = \lambda$
  N (1, λ)
- náhodná veličina X má $Po(\lambda)$ s parametrem $\lambda > 0$, (tj. střední hodnota), jestliže platí:

a) pro $x = 0, 1, 2, \dots$ $$P(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

b) pro x mimo tento interval $$P(x) = 0$$

- 1. obecný moment

$$\mu_1'(X) = E(X) = \lambda$$

- 2. centrální moment

$$\mu_2(X) = D(X) = \lambda$$

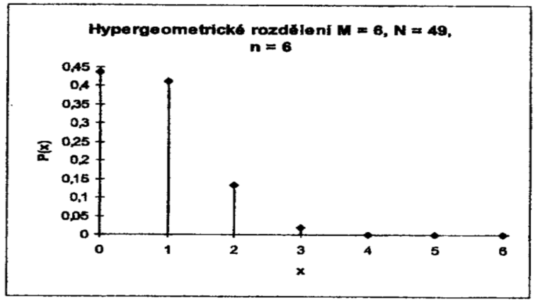
střední hodnota je stejně velká jako rozptyl !

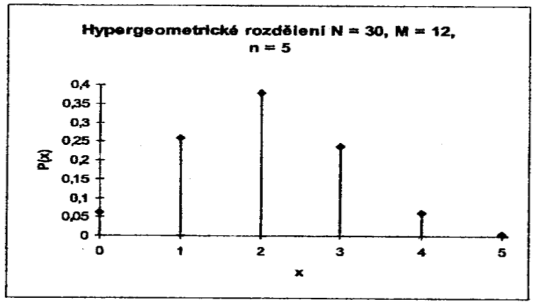
2.7.6 Hypergeometrické rozdělení (str. 34)

- rozdělením se řídí:
- počet vybraných prvků (např. součástek), které vykazují sledovanou vlastnost při závislém vybírání
- využívá se zejména při statistické přejímce

- pokud je N dostatečně velké

- a vybrané prvky vracíme zpět (přejímka s vracením),
- přejde toto rozdělení na *Bi* rozdělení





- náhodná veličina X
  má hypergeometrické rozdělení s parametry
  N, M, n (*N, M, n* jsou přirozená čísla)
- a dále mezi nimi platí

$$1 \le n \prec N, \quad 1 \le M \prec N,$$

jestliže ppst rozdělení má tvar:

a) pro x = max (0, N – M + n), …, min (M, n)

$$P(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

b) pro X mimo tento interval

$$P(x) = 0$$

kde M …počet neshod. výrobků v souboru
N …celkový počet výrobků v souboru

- 1. obecný moment

$$\mu_1^{/}(X) = E(X) = n\frac{M}{N}$$

- 2. centrální moment

$$\mu_2(X) = D(X) = n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$$

2.7.7 Rovnoměrné rozdělení diskrétní (str. 36)

- v rozdělení nabývá náhodná veličina X hodnot přirozených čísel v mezích od a do b se stejnou ppst, kde rozpětí

$$m = b - a$$

- Př.: pravděpodobnost hodu určitého čísla hrací kostkou
- ppst rozdělení má tvar

$$P(x) = \frac{1}{m}$$

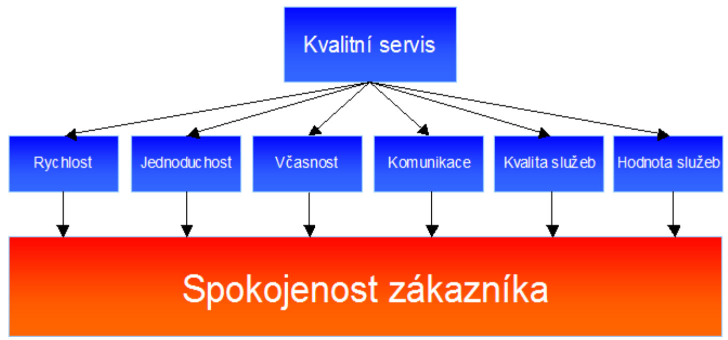
- 1. obecný moment

$$\mu_1^{/} = \frac{a+b}{2}$$

- 2. centrální moment

$$\mu_2 = D(X) = \frac{m^2 - 1}{12}$$

- Pozor na rozdíl mezi spojitým a diskrétním rozdělením!



Konec 2.přednášky

D Ě K U J I
Z A P O Z O R N O S T