

Modelování a simulace v elektrotechnice

Základy řešení obyčejných diferenciálních rovnic

František Mach

Katedra teoretické elektrotechniky
Regionální inovační centrum elektrotechniky
Fakulta elektrotechnická
Západočeská univerzita v Plzni

4. cvičení, 12.10.2016



FAKULTA
ELEKTROTECHNICKÁ
ZÁPADOČESKÉ
UNIVERZITY
V PLZNI

Obsah

1 Úvod do problematiky

- Vymezení základních pojmu
- Motivace

2 Základy numerického řešení ODE

- Diskretizace intervalu a approximace řešení
- Ilustrace numerického řešení ODE

3 Eulerova metoda

- Základní princip
- Určení chyby metody
- Implementace metody

1 Úvod do problematiky

- Vymezení základních pojmu
- Motivace

2 Základy numerického řešení ODE

- Diskretizace intervalu a approximace řešení
- Ilustrace numerického řešení ODE

3 Eulerova metoda

- Základní princip
- Určení chyby metody
- Implementace metody

Úvod do problematiky

Vymezení základních pojmu



Obyčejná diferenciální rovnice, anglicky ordinary differential equation (ODE), je rovnice, která obsahuje neznámou funkci jedné nezávislé proměnné a její derivace.

Obyčejnou diferenciální rovnici řádu n lze obecně zapsat ve tvaru

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

kde x je nezávisle proměnná, y je závisle proměnná a n značí nejvyšší řád derivace. Pokud je rovnice rozřešena vzhledem k nejvyšší derivaci y' lze ji zapsat ve tvaru

$$y^{(n)} = f(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)(x)}),$$

kde $y(x)$ představuje řešení dané rovnice. Soustavu diferenciálních rovnic pak představuje

$$\mathbf{y}^{(n)} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}'(x), \mathbf{y}''(x), \dots, \mathbf{y}^{(n-1)(x)}).$$

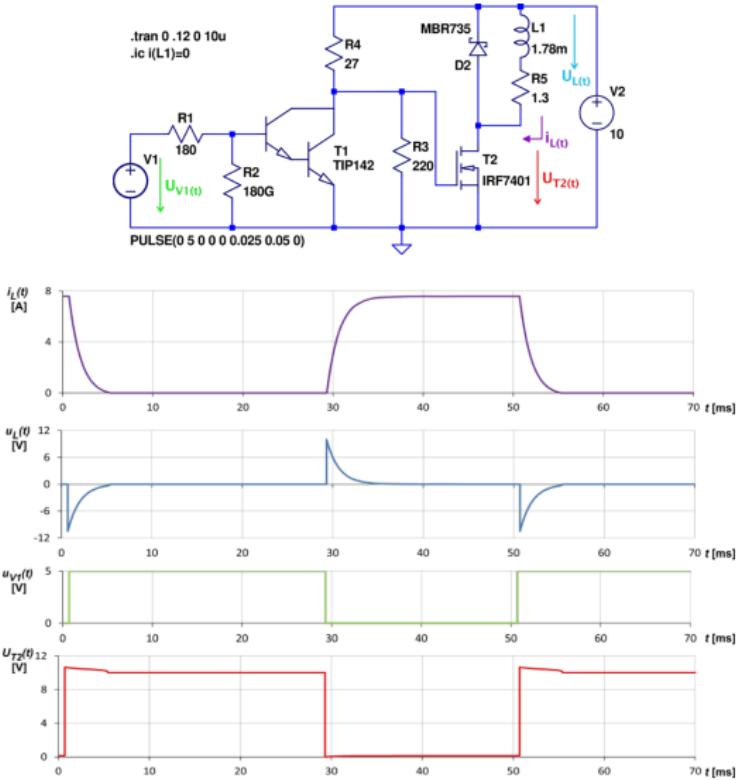
Redukce řádu

Řešení obyčejných diferenciálních rovnic je často výrazně jednodušší, pokud jsme schopni snížit jejich řád. Toho využívám například pro pohybové rovnice v klasické mechanice, kdy jednu rovnici druhého řádu můžeme redukovat na soustavu dvou rovnic prvního řádu.

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = F \quad \rightarrow \quad m \frac{dv}{dt} = F, \quad v = \frac{ds}{dt}$$

Přechodové děje v elektrických obvodech

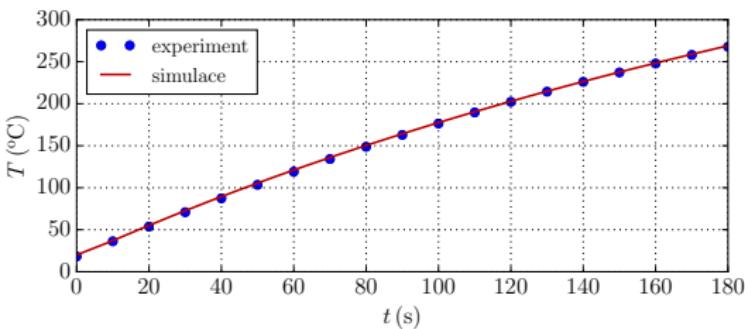
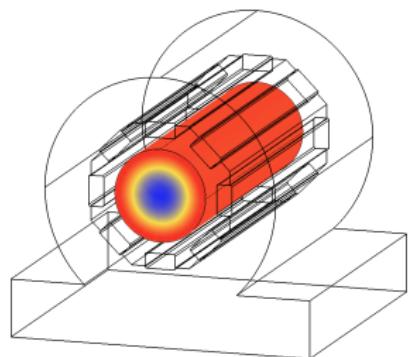
Obyčejné diferenciální rovnice popisují dynamické děje, které jsou charakteristické časovou změnou stavových veličin. V elektrotechnice lze mezi ně zařadit především přechodové děje v elektrických obvodech. Jejich praktické využití najdeme ve všech oblastech současné elektrotechniky. Jedná se především o řešení přechodových dějů při spínacích procesech nebo poruchách a dále také v obvodech s nestacionárními a neharmonickými zdroji napětí.



Obrázek: Typický průběh napětí a proudu ve specifických částech elektronického spínače při cyklickém spinání induktivní zátěže [Bauer, Lufinka. T3F Solenoid Engine]

Ohřev pevných těles

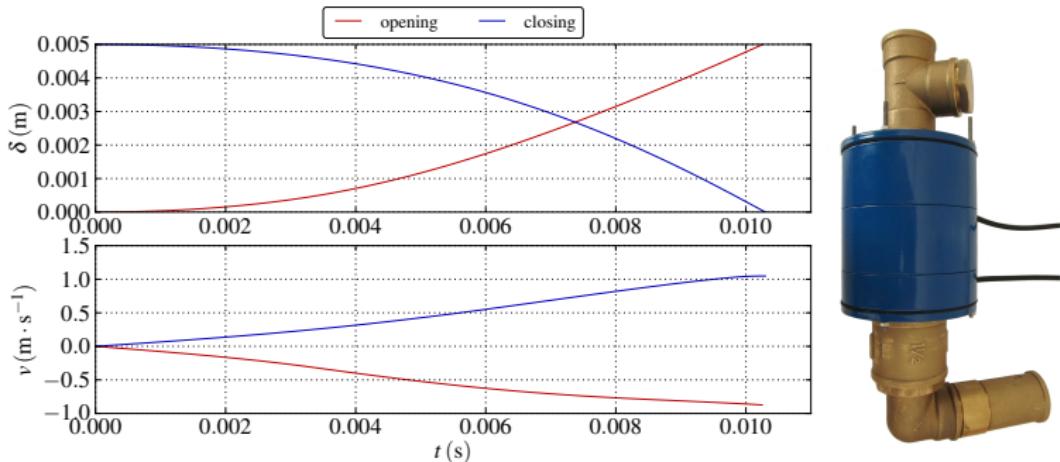
Průběh ohřevu pevných těles také charakterizují obyčejné diferenciální rovnice. Jejich řešením získáme časovou závislost teploty ohřívaného tělesa.



Obrázek: Průběh ohřevu hliníkového ingotu při rotačním indukčním ohřevu ve stacionárním magnetickém poli generovaným permanentními magnety (zleva: rozložení teploty získané na základě numerického řešení matematického modelu a následné porovnání experimentu a simulace na základě vývoje teploty)

Dynamika tuhých těles

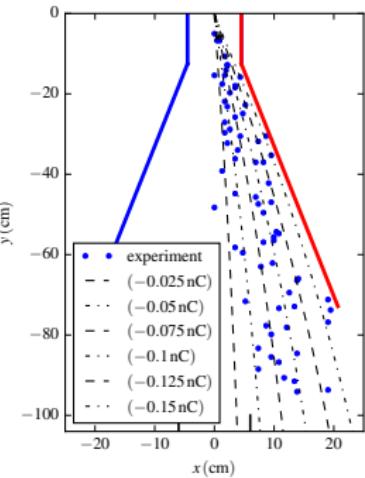
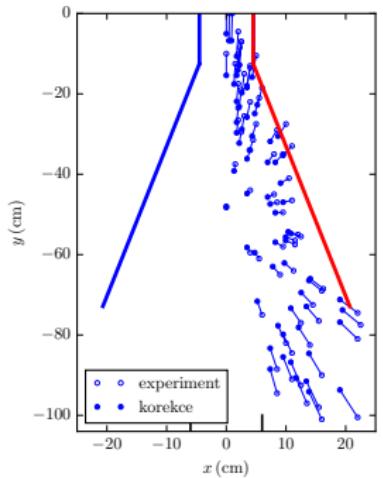
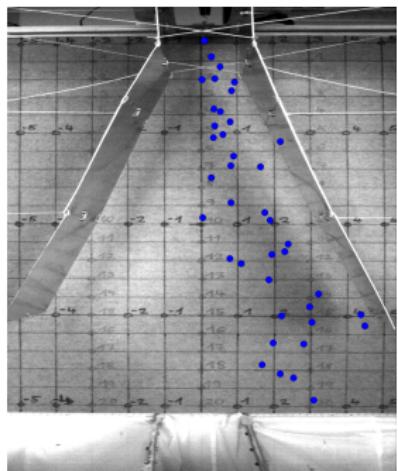
Velmi širokou oblastí využití matematických modelů charakterizovaných obyčejnými diferenciálními rovnicemi je dynamika tuhých těles. Jako příklad z oblasti elektrotechniky může posloužit dynamika rotoru elektrických strojů nebo pohyb kotvy elektromechanického aktuátoru.



Obrázek: Ukázka dynamických charakteristik pro pohyblivé jádro elektromagnetického aktuátoru ve funkci ventilu, a to pro jeho otevírání i zavírání (dynamické charakteristiky představují závislost polohy jádra a jeho rychlosti na čase) [Kurfišt. TROMAG Valve 2PM]

Trasování elektricky nabitých těles v elektromagnetickém poli

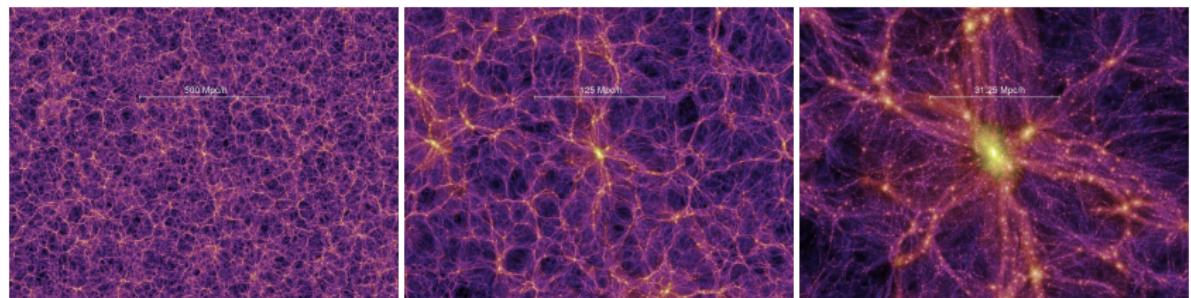
Velmi často řešený model, který je popsán soustavou obyčejných diferenciálních rovnic, je model trasování pohybu elektricky nabitých těles v elektromagnetickém poli.



Obrázek: Porovnání výsledků experimentu a numerického řešení matematického modelu popisujícího pohyb elektricky nabitých těles v elektrostatickém separátoru plastů (zleva: snímek procesu separace pořízený vysokorychlostní kamерou, korekce vzniklého zkreslení při záznamu, porovnání výsledků experimentu s výsledky numerického modelu pro různý náboj částic)

N-body simulace

Pojem N-body simulace je využíván ve velmi široké oblasti fyziky a chemie. Jedná se o simulaci vzájemného působení velkého množství hmotných těles. Do této oblasti se řadí například molekulární dynamika (vzájemná interakce atomů a molekul), interakce vesmírných těles (dynamika hvězd a planet, vývoj hvězdokup a galaxií), simulace granulovaných směsí nebo trasování pohybu velkého množství elektricky nabitých těles v elektromagnetickém poli.



Obrázek: Výsledky simulace formování galaxie získané při řešení projektu Millennium simulation (<http://wwwmpa.mpa-garching.mpg.de/millennium/>)

1 Úvod do problematiky

- Vymezení základních pojmu
- Motivace

2 Základy numerického řešení ODE

- Diskretizace intervalu a approximace řešení
- Ilustrace numerického řešení ODE

3 Eulerova metoda

- Základní princip
- Určení chyby metody
- Implementace metody

Základy numerického řešení ODE

Diskretizace intervalu a approximace řešení



Při numerickém řešení obyčejných diferenciálních rovnic (dále budeme uvažovat pouze rovnice 1. řádu) využíváme **diskretizace** předem známého intervalu řešení a, b a samotné řešení y hledáme v jednotlivých krocích podle předpisu

$$y(x+h) \approx y(x) + D(x, y)h$$

kde h je délka diskretizačního kroku a $D(x, y)$ představuje approximaci $y'(x)$, tak aby řešení $y(x+h)$ bylo co možná nejpřesnější. Aby bylo možné numerické řešení provést je nutné vždy předem určit **počáteční podmínu** $y(x_0) = y_0$. Tuto podmínu určíme na základě rozboru modelovaného děje (např. počáteční podmínky u přechodových dějů v elektrických obvodech nebo počáteční poloha a rychlosť u dynamiky hmotných těles).

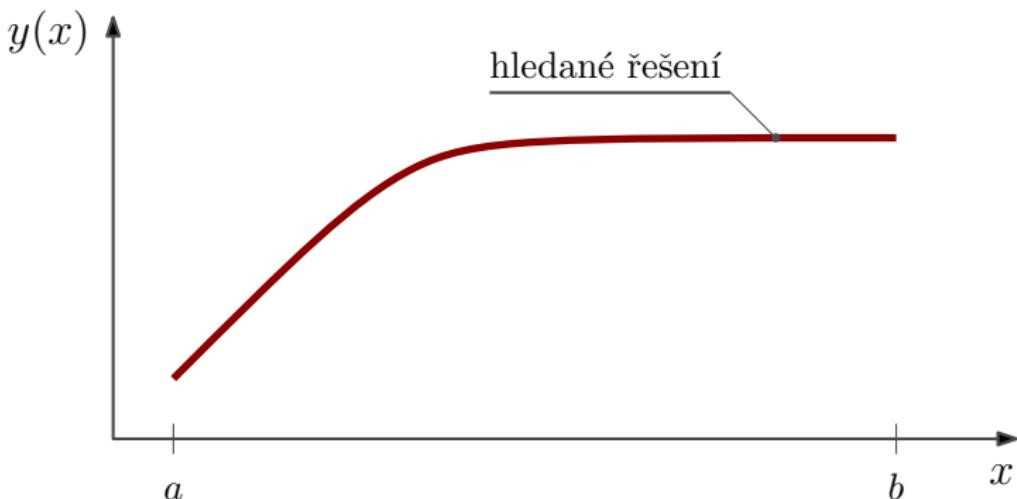
Numerická derivace

Numerická derivace představuje approximaci derivace funkce $f'(x)$ na základě funkčních hodnot $f(x)$ pro konečné množství hodnot nezávisle proměnné x . Vycházíme z definice derivace funkce

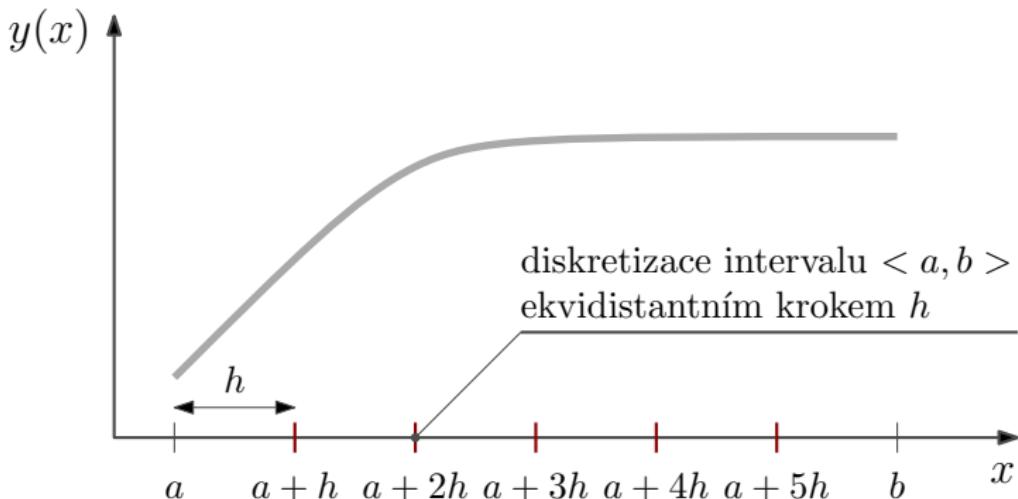
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

a uvažujeme velmi malé h různé od nuly, dostaneme tak předpis pro výpočet derivace ve tvaru

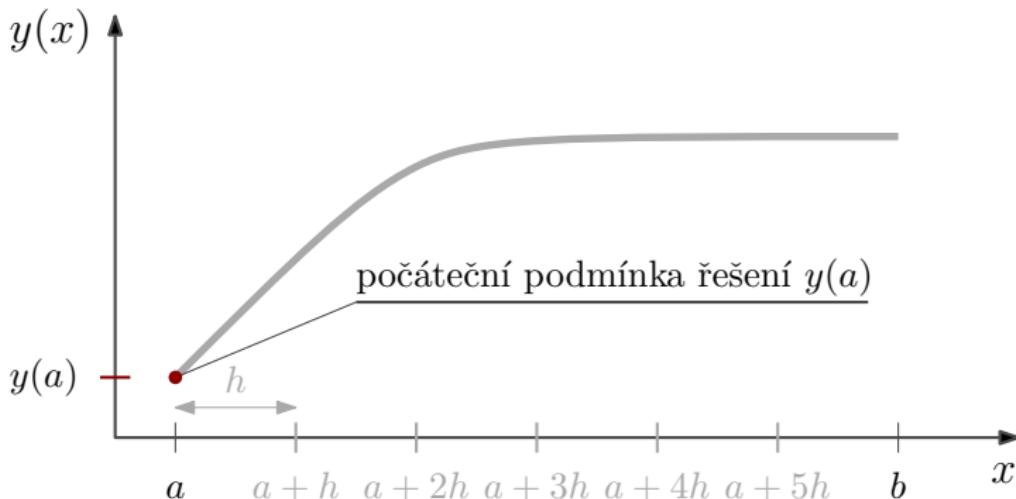
$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$



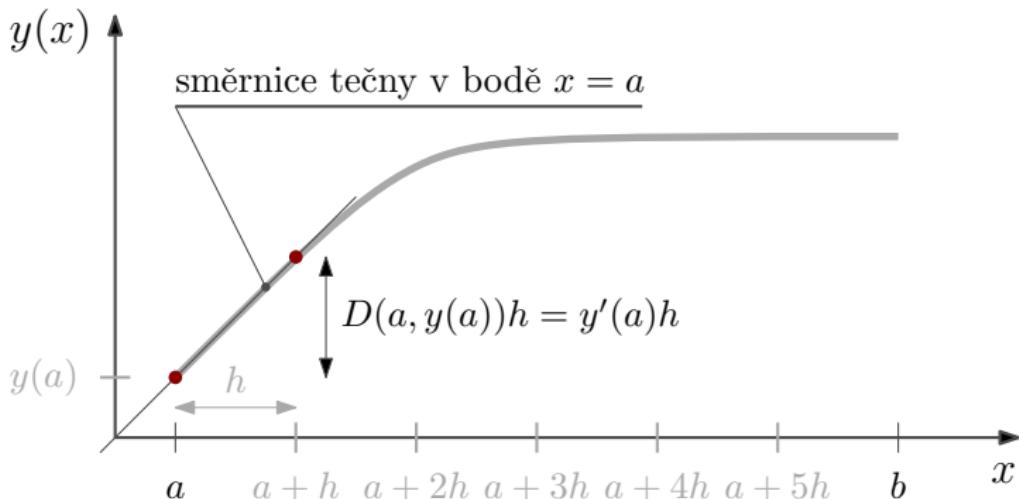
Obrázek: Ilustrace průběhu numerického řešení ODE pro 1D úlohu



Obrázek: Ilustrace průběhu numerického řešení ODE pro 1D úlohu



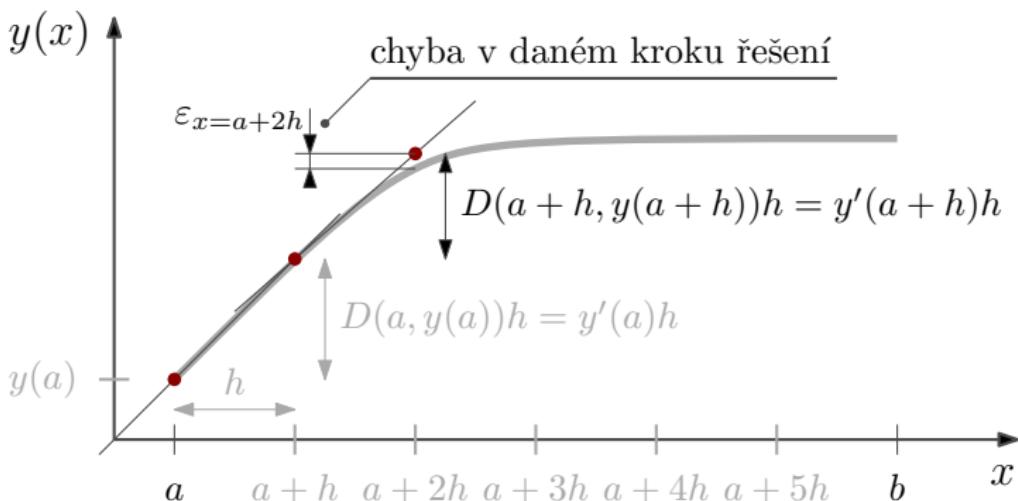
Obrázek: Ilustrace průběhu numerického řešení ODE pro 1D úlohu



Obrázek: Ilustrace průběhu numerického řešení ODE pro 1D úlohu

Základy numerického řešení ODE

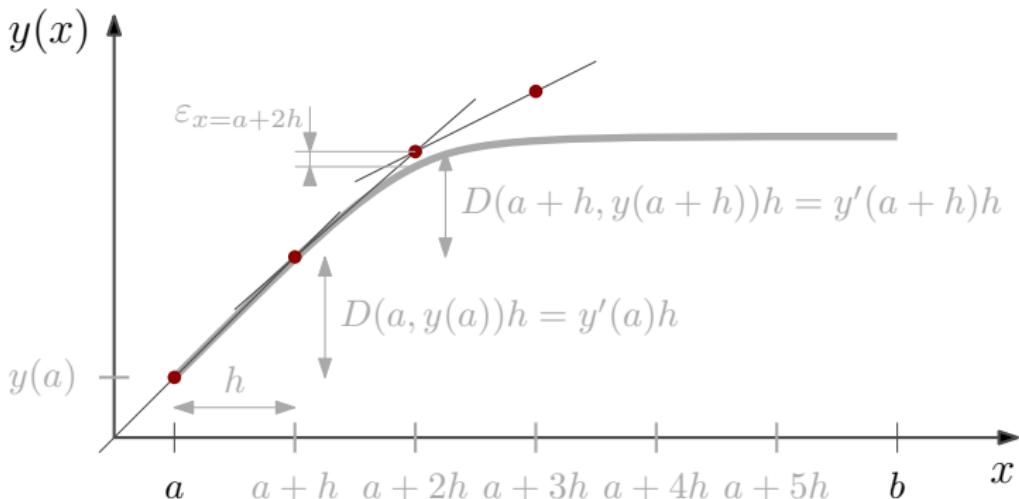
Ilustrace numerického řešení ODE



Obrázek: Ilustrace průběhu numerického řešení ODE pro 1D úlohu

Základy numerického řešení ODE

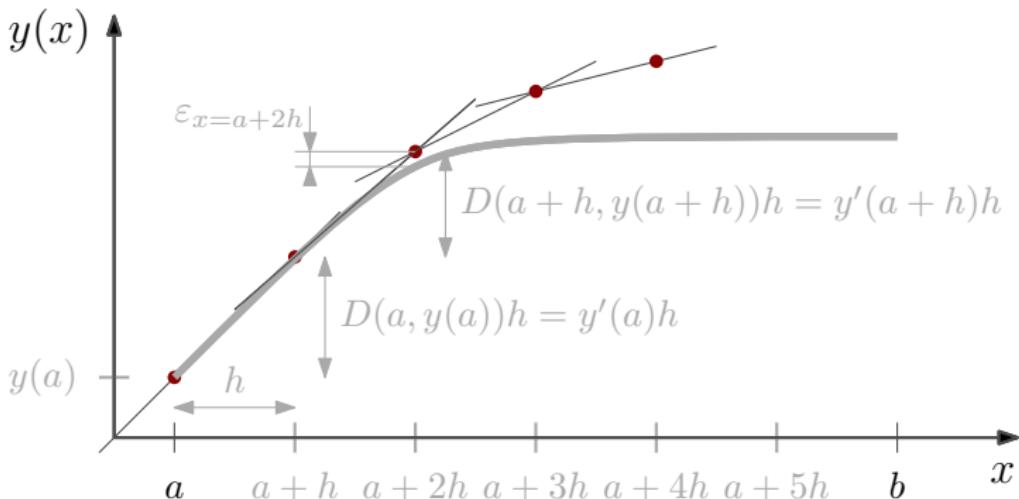
Ilustrace numerického řešení ODE



Obrázek: Ilustrace průběhu numerického řešení ODE pro 1D úlohu

Základy numerického řešení ODE

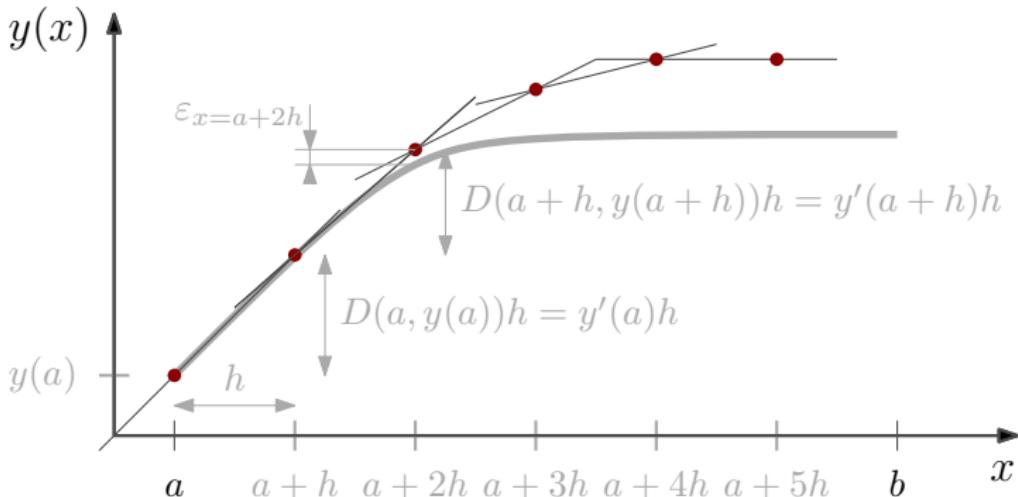
Ilustrace numerického řešení ODE



Obrázek: Ilustrace průběhu numerického řešení ODE pro 1D úlohu

Základy numerického řešení ODE

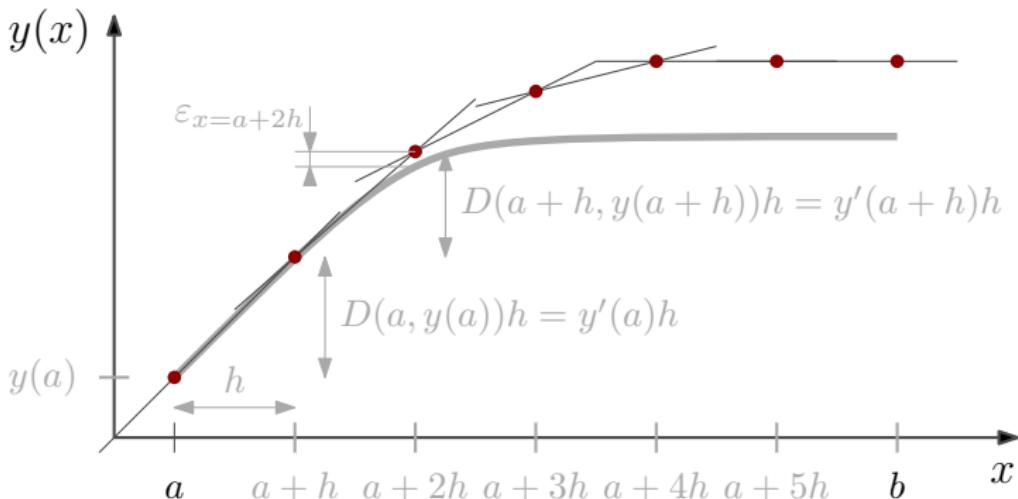
Ilustrace numerického řešení ODE



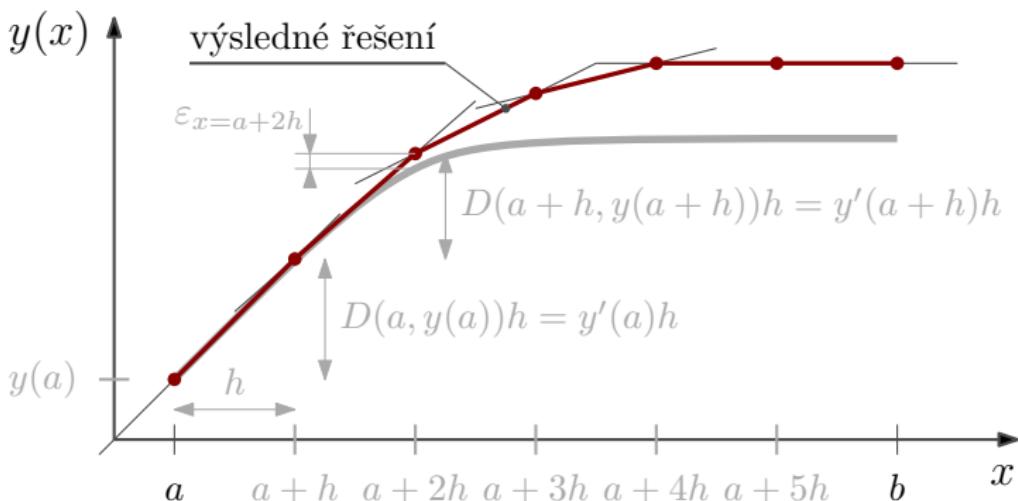
Obrázek: Ilustrace průběhu numerického řešení ODE pro 1D úlohu

Základy numerického řešení ODE

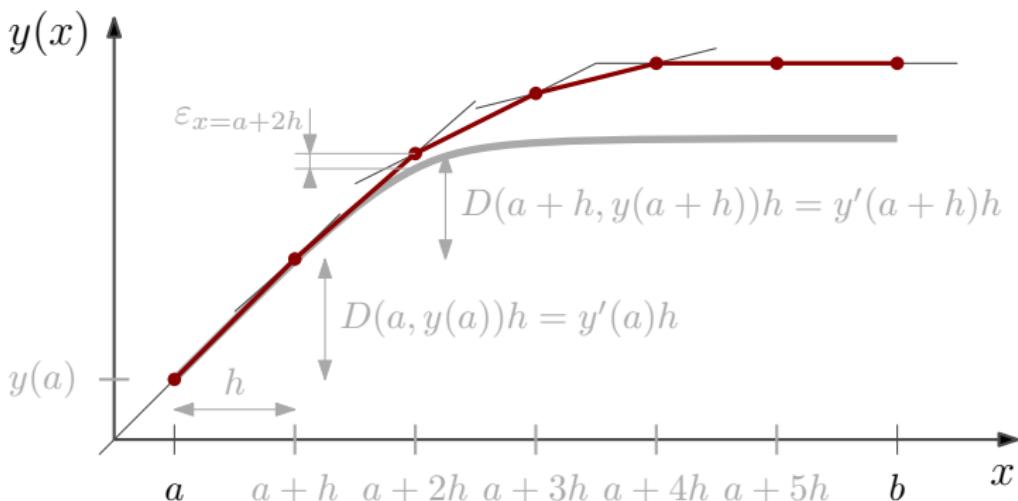
Ilustrace numerického řešení ODE



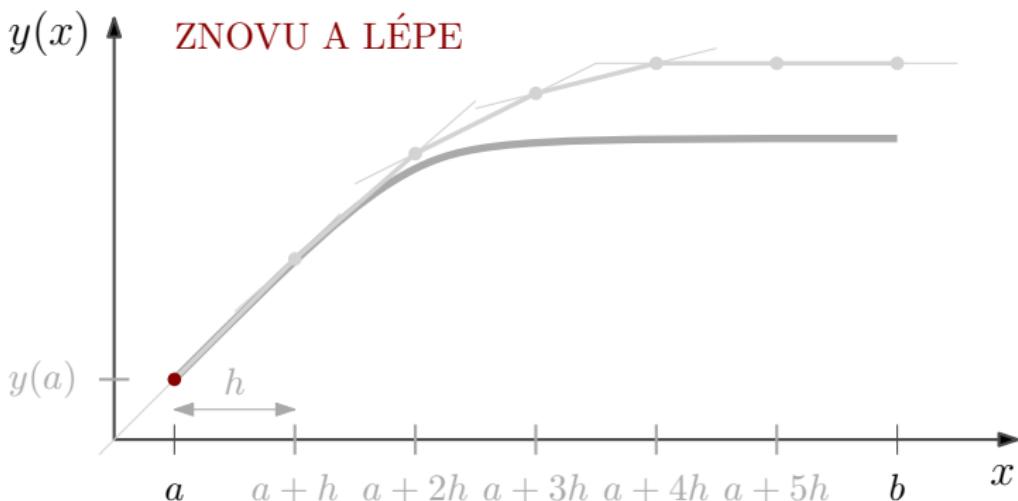
Obrázek: Ilustrace průběhu numerického řešení ODE pro 1D úlohu



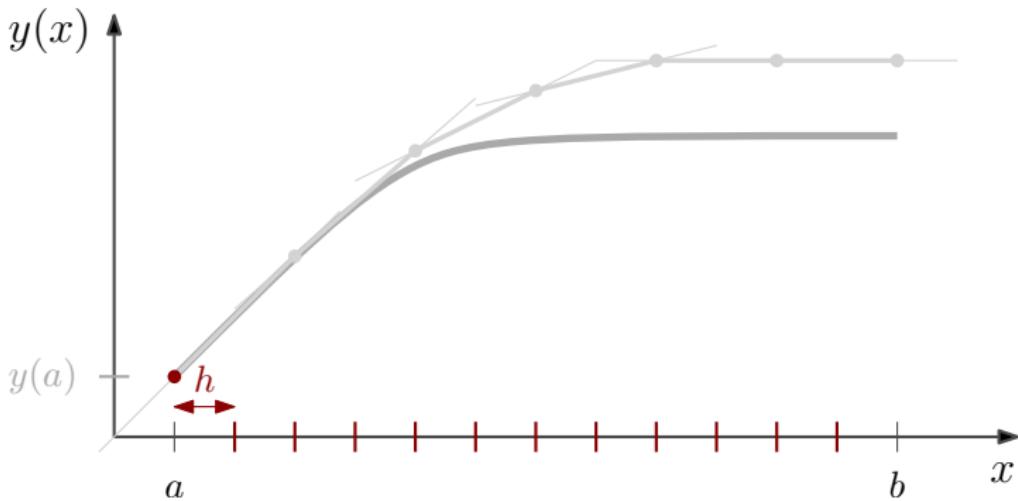
Obrázek: Ilustrace průběhu numerického řešení ODE pro 1D úlohu



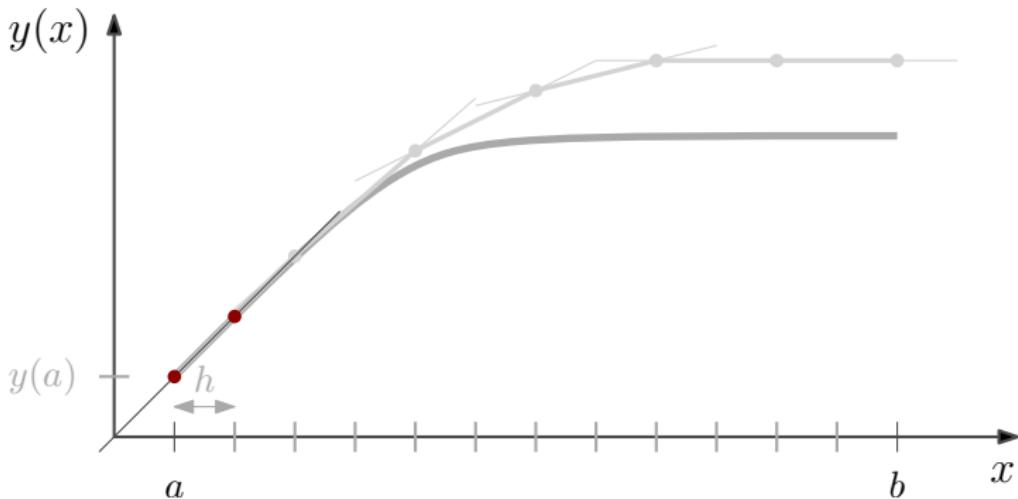
Obrázek: Ilustrace průběhu numerického řešení ODE pro 1D úlohu



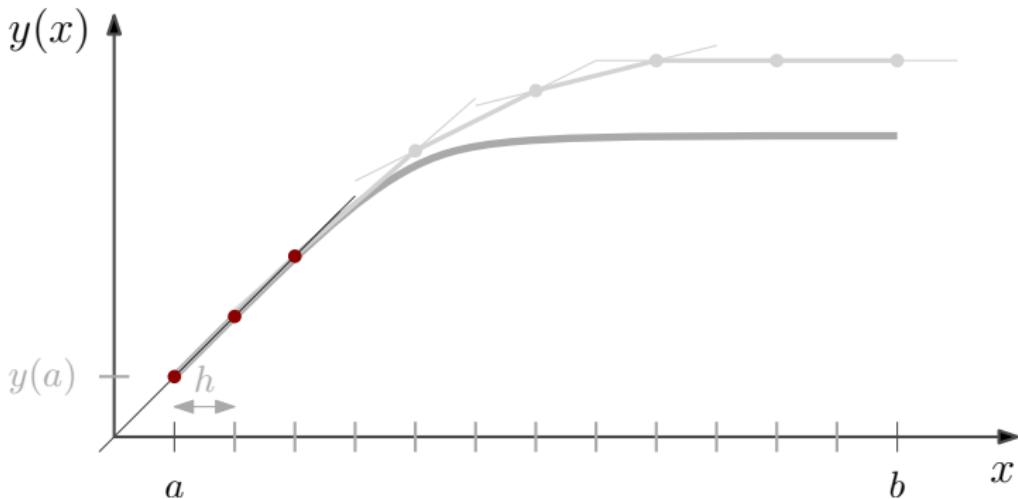
Obrázek: Ilustrace průběhu numerického řešení ODE pro 1D úlohu



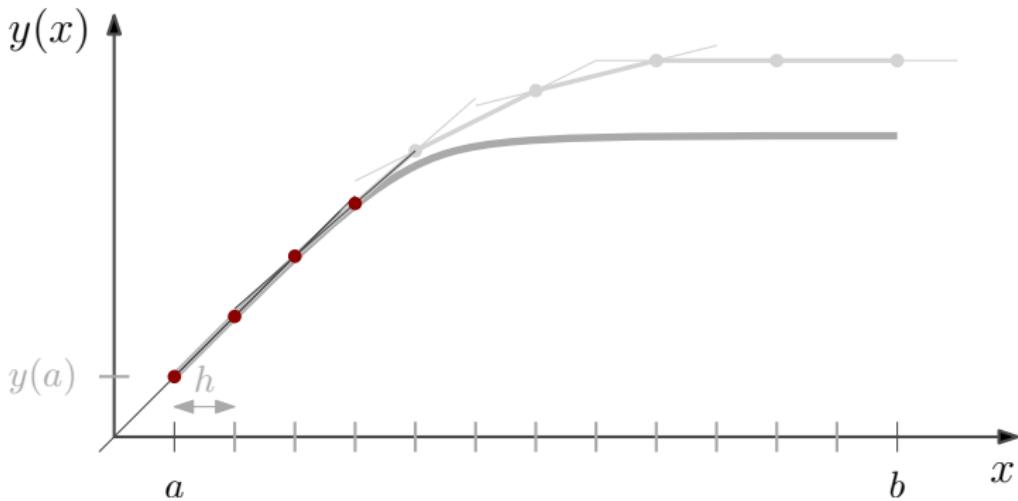
Obrázek: Ilustrace průběhu numerického řešení ODE pro 1D úlohu



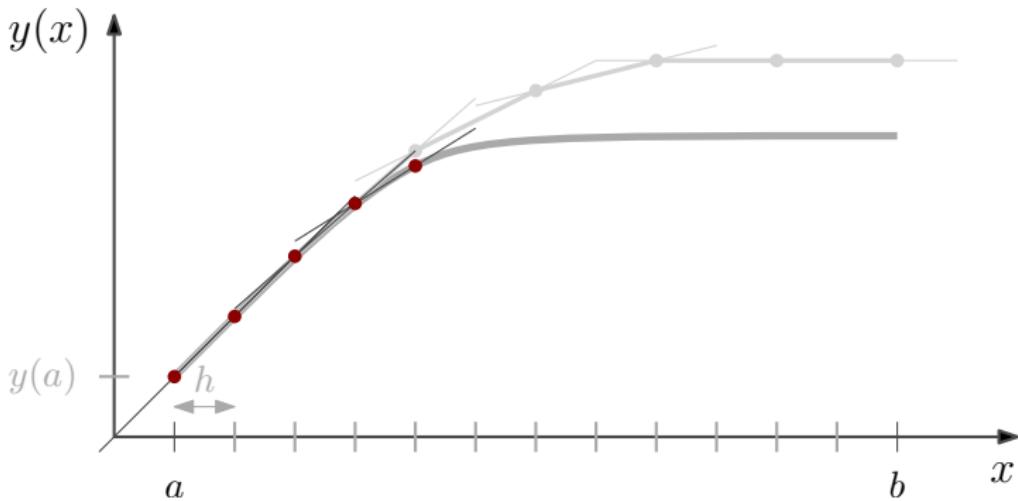
Obrázek: Ilustrace průběhu numerického řešení ODE pro 1D úlohu



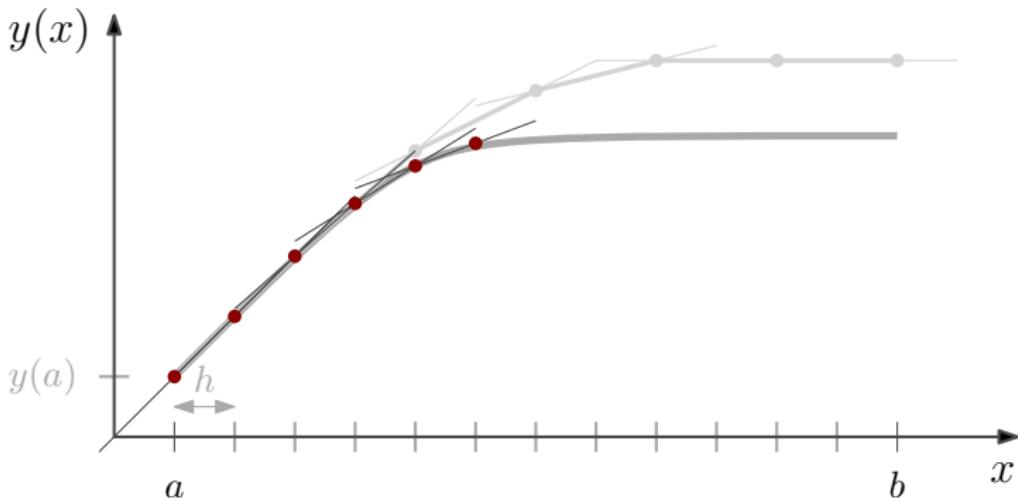
Obrázek: Ilustrace průběhu numerického řešení ODE pro 1D úlohu



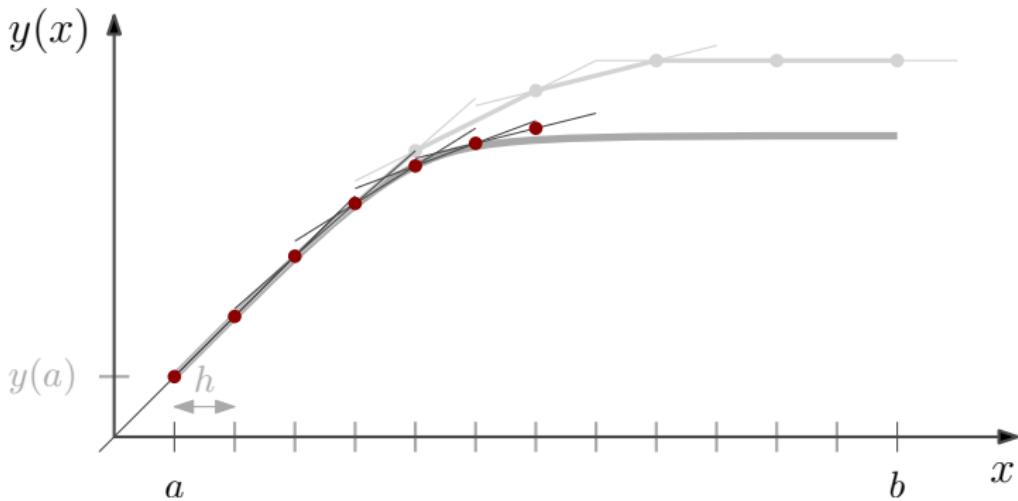
Obrázek: Ilustrace průběhu numerického řešení ODE pro 1D úlohu



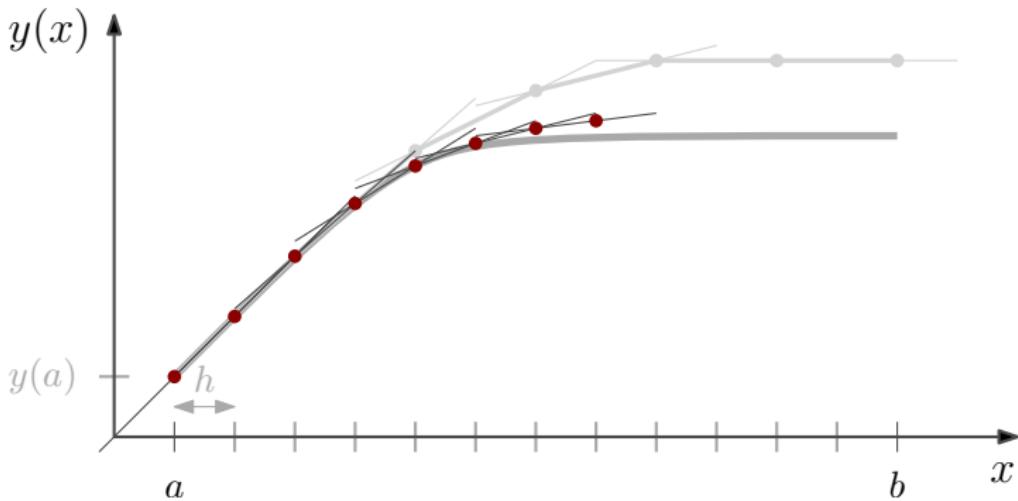
Obrázek: Ilustrace průběhu numerického řešení ODE pro 1D úlohu



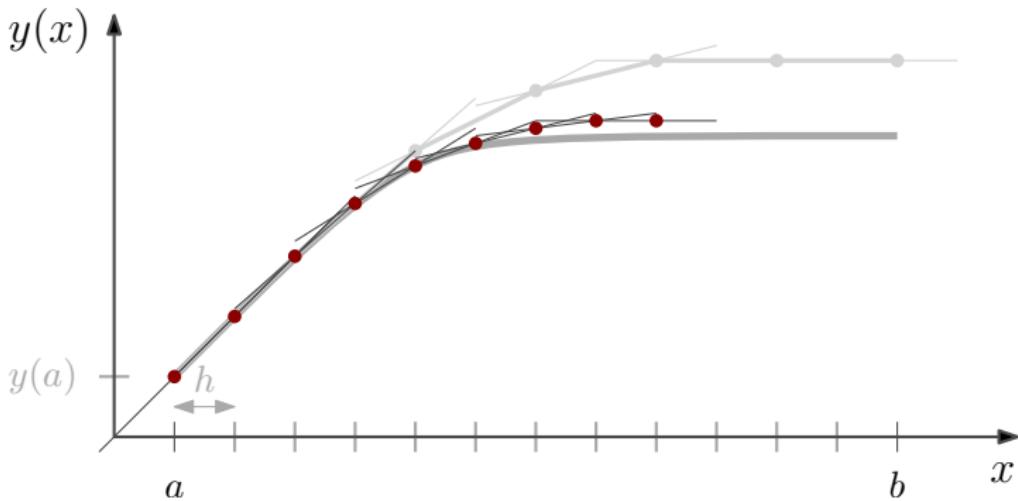
Obrázek: Ilustrace průběhu numerického řešení ODE pro 1D úlohu



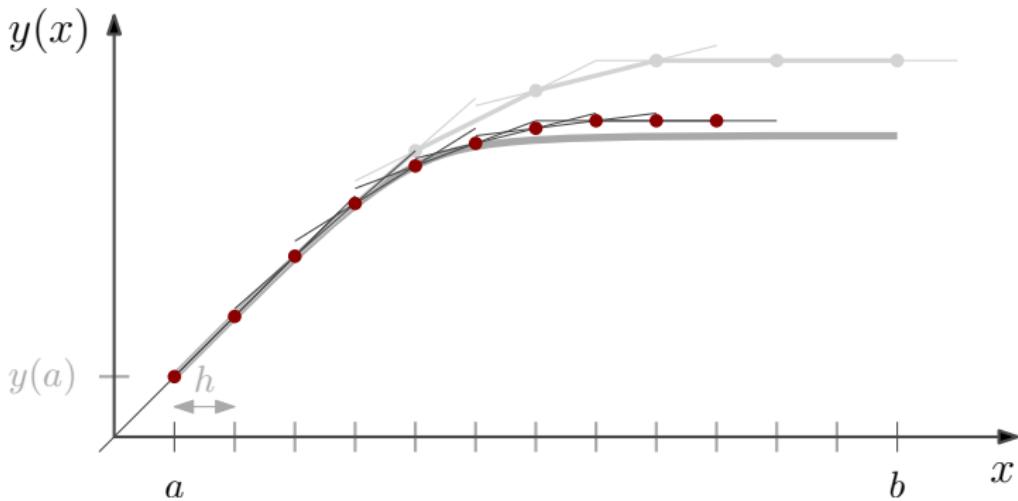
Obrázek: Ilustrace průběhu numerického řešení ODE pro 1D úlohu



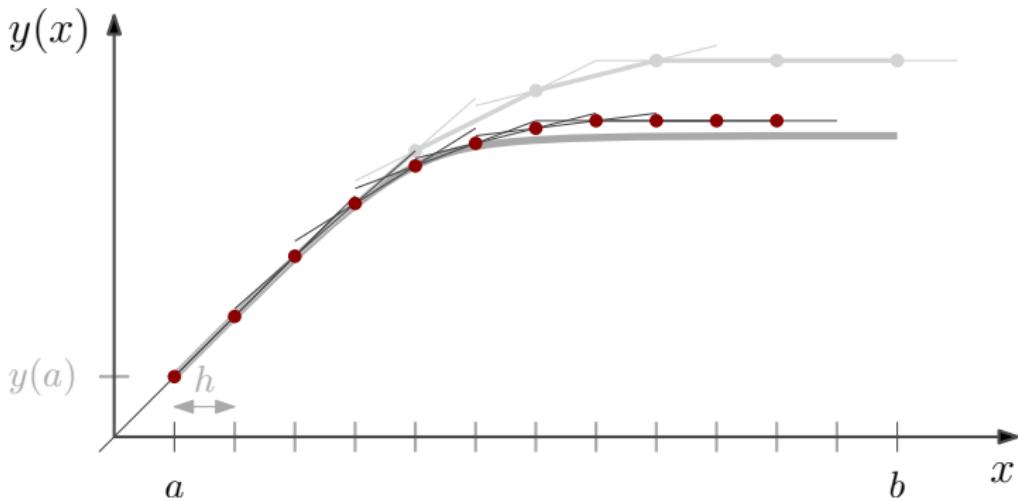
Obrázek: Ilustrace průběhu numerického řešení ODE pro 1D úlohu



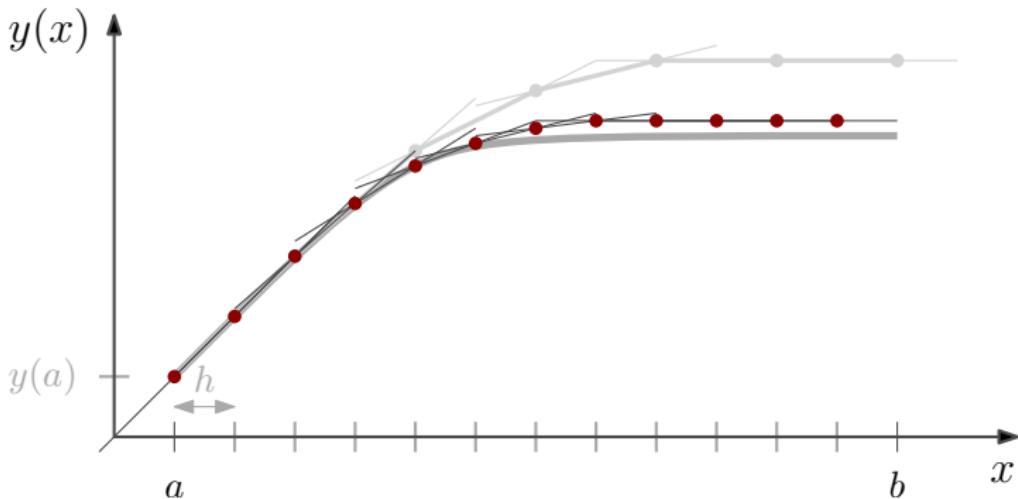
Obrázek: Ilustrace průběhu numerického řešení ODE pro 1D úlohu



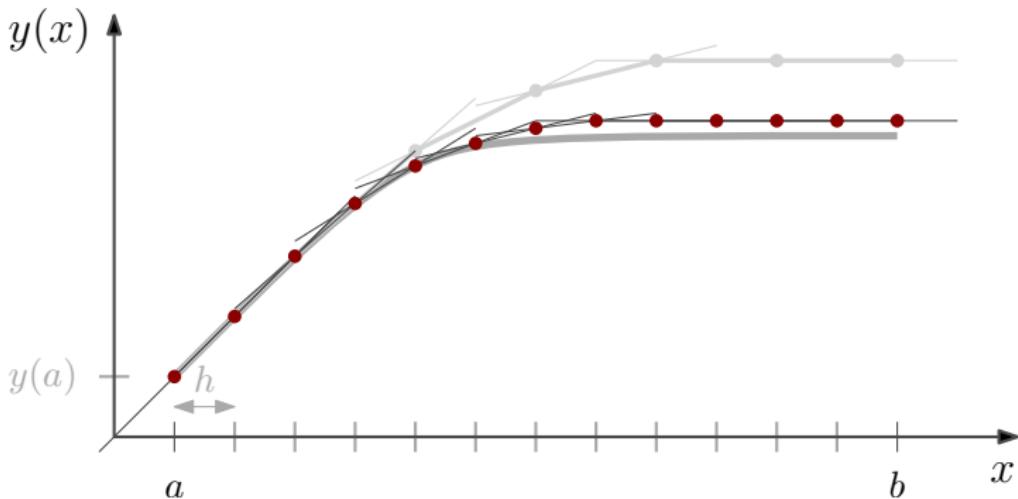
Obrázek: Ilustrace průběhu numerického řešení ODE pro 1D úlohu



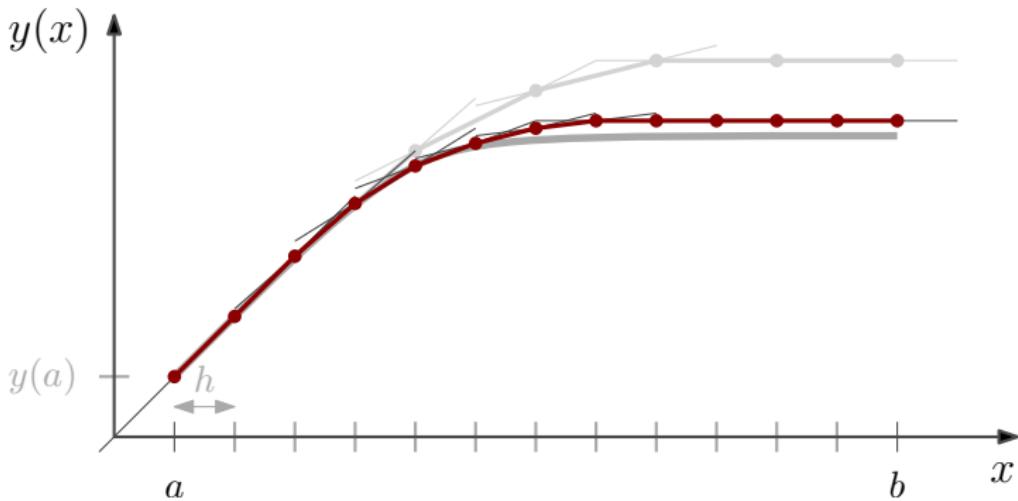
Obrázek: Ilustrace průběhu numerického řešení ODE pro 1D úlohu



Obrázek: Ilustrace průběhu numerického řešení ODE pro 1D úlohu



Obrázek: Ilustrace průběhu numerického řešení ODE pro 1D úlohu



Obrázek: Ilustrace průběhu numerického řešení ODE pro 1D úlohu

1 Úvod do problematiky

- Vymezení základních pojmu
- Motivace

2 Základy numerického řešení ODE

- Diskretizace intervalu a approximace řešení
- Ilustrace numerického řešení ODE

3 Eulerova metoda

- Základní princip
- Určení chyby metody
- Implementace metody

Jednou ze základních metod pro numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic je Eulerova metoda, která využívá při výpočtu řešení v novém kroku y_{i+1} první derivaci řešení v předchozím známém kroku y_i . Metoda tedy postupně prochází interval řešení $< a, b >$ diskretizovaný krokem h a vyčísluje approximaci řešení ve tvaru

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)h. \quad (1)$$

Vzhledem k tomu, že platí $y' = f(x, y(x))$, lze danou approximaci zapsat ve tvaru

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + f(x_i, y(x_i))h,$$

který představuje **iterační předpis** pro výpočet approximace přesného řešení.

Fyzikální přiblížení Eulerovy metody

Pro hmotné těleso, pohybující se po dráze $s(t)$, lze určit aktuální rychlosť $v(t)$ ze vztahu

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds(t)}{dt}.$$

Při známé počáteční pozici tělesa $s(t_0)$ a jeho rychlosti $v(t_0)$, lze velmi snadno určit jeho pozici v čase $t_0 + h$ z rovnice

$$s(t_0 + h) = s(t_0) + v(t_0)h = s(t_0) + s'(t_0)h.$$

Lokální diskretizační chyba (chyba jednoho kroku) Eulerovy metody je přímo úměrná druhé mocnině diskretizačního kroku h . Tuto zkutečnost lze určit porovnáním aproximace řešení (1) s Taylorovým rozvojem řešení ve tvaru

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)h + \frac{1}{2}y''(x_i)h^2 + O(h^3), \quad (2)$$

kde $O(h^3)$ značí asymptotickou složitost vyjádřenou pomocí Landauovy notace. Lokální chyba metody je tedy dána rozdílem (1) a (2) a odpovídá

$$-\frac{1}{2}y''(x_i)h^2 + O(h^3).$$

Globální diskretizační chyba ε_{x_i} Eulerovy metody v určitém bodě x_i intervalu řešení $< a, b >$ je kumulativní a závisí na lokální diskretizační chybě vzniklé v již provedených iteracích. Vzhledem k tomu, že celkový počet iterací je roven $(x_i - x_0)/h$, je tedy úměrný h^{-1} kroku metody, musí také platit že **globální diskretizační chyba ε_{x_i} je úměrná velikosti kroku metody h** . Tedy čím menší bude krok metody h , tím přesnější aproximaci řešení získáme, nicméně výpočet bude časově náročnější.

```
function [x, y] = euler(fce, interval, y0, n)
a = interval(1);
b = interval(2);

% vytvoreni vektoru nezávisle promenne
x = linspace(a, b, n)';
h = (b-a)/(n-1);

% vytvoreni prázdného vektoru resení
y = zeros(n, length(y0));

y(1,:) = y0;
for i = 1:(n-1)
    % výpočet resení v novém kroku
    y(i+1,:) = y(i,:) + h * fce(x(i), y(i,:))';
end
end
```